

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**La Geodinamo e  
le inversioni di polarità del campo geomagnetico**

**Relatore:**  
**Prof. Michele Dragoni**

**Presentata da:**  
**Davide Livieri**

Anno Accademico: 2021/2022





# Abstract

Lo studio del geomagnetismo è una disciplina che da sempre ha catturato l'attenzione e la curiosità dell'uomo. L'inesorabilità dell'azione magnetica è probabilmente la particolarità che ha destato maggior interesse e ha certamente turbato l'uomo-navigatore, che sin dal primo millennio doveva considerare l'influenza magnetica sull'orientamento della bussola, ben prima che fossero sviluppati modelli per comprenderne i meccanismi. Quali sono le modalità di generazione del campo geomagnetico, che influenza simultaneamente la vita di tutti? Quali modelli si possono elaborare per simulare un processo simile? L'obiettivo di questa tesi è quello di dare una risposta a queste domande, alla cui soluzione si giungerà passando dallo sviluppo della formulazione delle equazioni della Magnetoidrodinamica, che governano l'interazione elettromagnetica tra il campo magnetico e il moto del fluido conduttore, fino alla presentazione di modelli che riproducono in modo realistico la genesi del campo. È stata approfondita la teoria della Geodinamo, riconosciuto il ruolo primario ricoperto dall'interazione tra le due zone del nucleo, di composizione chimica diversa e ricostruita l'evoluzione temporale delle linee di campo. Nell'ultima parte dell'elaborato è stata poi indagata la dinamica di inversione di polarità del campo geomagnetico. Grazie a numerose misure paleomagnetiche, è stata individuata una ventina di periodi di transizioni di polarità e sono state precisate le modalità di inversione con una rotazione dell'asse del dipolo, che in un determinato istante di tempo interseca il piano equatoriale. Nello stesso intervallo temporale, si registra un parziale azzeramento dell'intensità del campo misurato sulla superficie terrestre e una successiva stabilizzazione del valore che torna a essere quello iniziale ma con polarità invertita. L'analisi del modello di Rikitake ha evidenziato inoltre il comportamento caotico delle inversioni, con una forte dipendenza dalle condizioni iniziali.



# Indice

Introduzione .....	8
Capitolo 1: La magnetoidrodinamica .....	10
1.1    La teoria magnetoidrodinamica .....	10
1.2    Le equazioni di Maxwell .....	11
1.3    Il tensore degli sforzi di Maxwell.....	14
1.4    La forza ponderomotrice .....	16
1.5    Le equazioni del moto .....	17
1.6    Teoremi di Alfvén .....	21
1.7    Numero di Reynolds magnetico .....	23
Capitolo 2: La Geodinamo .....	26
2.1    Proprietà fisiche e dinamiche del Nucleo Terrestre .....	26
2.2    Generazione del campo geomagnetico .....	28
2.3    Rappresentazione di Mie .....	33
2.4    Evoluzione delle linee di campo magnetico nel tempo.....	37
2.5    Amplificazione del campo magnetico .....	42
Capitolo 3: Inversione della polarità del campo magnetico .....	46
3.1    Risposta della materia ad un campo magnetico .....	46
3.2    Paleomagnetismo .....	49
3.3    Dinamo di Rikitake .....	51
3.4    Simulazione computerizzata del meccanismo di inversione .....	59
3.4.1    Introduzione al modello .....	59
3.4.2    Descrizione del modello .....	60
3.4.3    Struttura del campo durante l'inversione.....	61
Conclusione.....	70
Bibliografia.....	72







# Introduzione

Il campo magnetico terrestre non è stazionario ma è soggetto a variazioni temporali in direzione ed intensità. Lo studio della magnetizzazione delle rocce del passato geologico ha evidenziato come il campo sia stato soggetto a inversioni di polarità magnetica le cui ricorrenze sembrano essere casuali e che interessano simultaneamente tutte le regioni della Terra. Infatti, a differenza di quanto accade per il Sole, dove questa inversione si verifica a intervalli regolari di 11 anni, il cosiddetto ciclo solare, per la Terra non esiste una periodicità specifica. Un fatto, tuttavia, è appurato scientificamente: il campo magnetico terrestre ci protegge. Si comporta come scudo invisibile alle radiazioni nocive che arrivano dallo spazio e al vento solare, un flusso di particelle costituito essenzialmente da protoni, elettroni e, in piccola parte, particelle alfa, che effluisce perennemente dal Sole e che pervade lo spazio interplanetario investendo anche l'atmosfera terrestre.

Nel primo capitolo vengono esposti i fondamenti e le leggi alla base della teoria della Magnetoidrodinamica, la quale si sviluppa dalla combinazione delle leggi dell'Elettromagnetismo e della Fluidodinamica. Il ricorso alla Magnetoidrodinamica è giustificato dalle ricerche e scoperte, che individuano nel moto del fluido nel Nucleo esterno l'origine del campo geomagnetico. Il moto del fluido e l'azione del campo magnetico su di esso sono due fenomeni correlati, motivo per cui debbano essere trovate simultaneamente le soluzioni dell'equazione del moto, che corrisponde all'*equazione di Navier-Stokes*, e dell'*equazione idromagnetica*, che verrà ricavata anche tramite una descrizione dell'azione esercitata dal campo elettromagnetico sui corpi immersi nel fluido, espressa dal *tensore degli sforzi di Maxwell*. Si potrà evidenziare l'analogia stringente tra le leggi della fluidodinamica e la magnetoidrodinamica, analogia che ci permetterà di estendere molti teoremi validi per una anche nel campo di validità della seconda.

Nel secondo capitolo, viene analizzata una applicazione della teoria della magnetoidrodinamica di natura geofisica: la Geodinamo. Si riferisce al meccanismo mediante il quale un corpo celeste come quello terrestre genera un campo magnetico, il processo tramite cui un fluido rotante, convettivo ed elettricamente conduttivo può generare un campo magnetico lungo scale temporali astronomiche. Dalla descrizione della composizione chimica e della dinamica fisica del nucleo terrestre, si comprenderà il meccanismo di generazione del campo magnetico terrestre con un approfondimento sul processo di amplificazione dello stesso, riconoscendo la centralità del concetto di *tubo di flusso*. Infine, verrà enunciato l'importante teorema di Cowling e verrà illustrato come il modello di una dinamo magnetoidrodinamica autoalimentata descriva coerentemente l'evoluzione temporale del campo magnetico terrestre, espresso tramite la Rappresentazione di Mie.

Nel terzo capitolo viene approfondito un aspetto cruciale del campo geomagnetico: l'inversione della polarità del campo. Il fenomeno per cui il Polo Nord geomagnetico (attualmente negativo) si inverte con il Polo Sud geomagnetico (attualmente positivo), fu scoperto da Bernard Brunhes nel 1906 attraverso lo studio del magnetismo delle rocce laviche. Verrà perciò introdotto il concetto di Paleomagnetismo, disciplina mediante cui i geologi possono comprendere, studiare e datare le inversioni che si sono succedute nel corso dei millenni. Lo sviluppo nel 1958 del modello di Rikitake mostrò per la prima volta in che modo una dinamo autoalimentata possa invertire la polarità del proprio campo magnetico e si rivelò una tappa importante nello sviluppo di questa teoria che diede impulso e indirizzò gli studi successivi sulla comprensione del meccanismo di inversione.

# Capitolo 1

## La Magnetoidrodinamica

### 1.1 La teoria Magnetoidrodinamica

La *meccanica dei continui* è la branca della meccanica classica che studia il comportamento di corpi continui, cioè sistemi fisici macroscopici nei casi in cui la dimensione dei fenomeni osservati sia tale che questi non siano affetti dalla struttura molecolare della materia e per il quale si assume che la materia sia distribuita uniformemente e che riempi lo spazio che il corpo occupa. Dal punto di vista matematico, le equazioni fondamentali della meccanica del continuo possono essere sviluppate in due formulazioni diverse ma equivalenti. La prima, in forma integrale, deriva dall'applicazione dei principi di base ad una porzione finita di volume del corpo. La seconda, in forma differenziale, porta a equazioni risultanti dall'applicazione dei principi di base a elementi di volume infinitesimi. L'*elettrodinamica dei continui* è una estensione della *meccanica dei continui*, quando i valori medi delle grandezze in gioco non interessano più solo proprietà cinematiche, come densità e temperatura, bensì grandezze elettromagnetiche come campo elettrico e magnetico. L'elettrodinamica dei continui, infatti, considera e descrive l'interazione tra un fluido conduttore e il campo elettromagnetico, condizione che si verifica nelle tre regioni terrestri, (il nucleo, la ionosfera, la magnetosfera) responsabili della generazione e della propagazione del campo magnetico terrestre. È una teoria macroscopica dove i campi elettrici e magnetici vanno intesi come valori medi su un elemento infinitesimo del mezzo, che contiene un numero grandissimo di molecole. La *magnetoidrodinamica* (abbreviata MHD) è una sotto-teoria dell'*elettrodinamica dei continui* che si applica in condizioni e con assunzioni specifiche. Le ipotesi alla base della MHD sono:

- La frequenza di collisione degli elettroni liberi è elevata rispetto alle frequenze del moto; perciò, la teoria considera fluidi con elevate densità (liquidi o gas densi) e/o basse frequenze di oscillazione;
- Il moto del liquido può essere descritto con le grandezze idrodinamiche: densità  $\rho$ , pressione  $p$ , temperatura  $T$ . La teoria della Magnetoidrodinamica unifica quindi la meccanica dei fluidi e l'elettromagnetismo.
- Non si ha separazione di carica, ossia il fluido è elettricamente neutro ( $\rho_e = 0$ ), la carica è distribuita uniformemente sul volume del corpo, non si riscontrano eccessi di carica negativa o positiva.

## 1.2 Le Equazioni di Maxwell

Le equazioni che governano l'interazione elettromagnetica e costituiscono il fondamento dell'elettromagnetismo sono le *equazioni di Maxwell*, punto di partenza per lo sviluppo della teoria MHD. Nel Nucleo il valore della permeabilità magnetica non si discosta dall'unità per più di qualche parte su  $10^5$ ; per questo motivo, per approssimazione, si assume il valore 1 e si utilizza il campo  $\mathbf{B}$ , anziché il campo  $\mathbf{H}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad 1.1$$

Dove  $\rho$  è la densità volumetrica di carica,  $\mathbf{E}$  il campo elettrico,  $\mathbf{B}$  il campo magnetico,  $c$  la velocità della luce e  $\mathbf{J}$  la densità di corrente. Questo sistema di quattro equazioni differenziali si può semplificare imponendo le condizioni vigenti nella trattazione della MHD, considerando quindi le ipotesi suddette. All'interno del fluido conduttore non vi è separazione di carica, perciò la  $\rho_e = 0$  e, considerando la prima ipotesi, se il moto avviene a basse frequenze, si può trascurare la corrente di spostamento, descritta nell'equazione 4 dal termine  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ . Le equazioni di Maxwell, dunque, con le approssimazioni considerate, diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{array} \right. \quad 1.2$$

Considerando il moto di un liquido conduttore con velocità  $\mathbf{v}$  e una qualunque superficie  $S$  all'interno del liquido che si muove in maniera solidale con esso. In presenza di un campo magnetico  $\mathbf{B}$ , la legge di Faraday – Neumann esplica come una variazione del flusso del campo magnetico attraverso la superficie  $S$  genera nel liquido una forza elettromotrice, secondo la formula:

$$\mathcal{E} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad 1.3$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale alla superficie considerata. Nel caso, più semplice, in cui la superficie possa essere considerata ferma rispetto al moto del fluido e preso  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale generico, il risultato è:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad 1.4$$

semplificato dall'assunzione secondo cui una qualsiasi parametrizzazione della superficie è indipendente dal tempo.

Nel caso più generale la superficie  $S$  deve essere considerata solidale con il fluido e dunque in movimento; perciò, vi sono altri contributi alla variazione del flusso. Durante l'intervallo di tempo infinitesimo  $dt$ , la superficie  $S$  descrive il volume cilindrico  $\delta V$  delimitato dalla superficie  $S(t)$ , dalla superficie  $S(t + dt)$  e dalla superficie laterale  $S'$ . quest'ultima si può parametrizzare tramite l'elemento di superficie laterale  $S'$ :

$$dS' = |d\mathbf{s} \times \mathbf{v}| dt \quad 1.5$$

dove  $|d\mathbf{s} \times \mathbf{v}|$  è l'elemento di superficie laterale perpendicolare alla superficie stessa. Perciò il flusso di  $F$  attraverso la superficie  $S'$  diventa:

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = dt \oint_{\partial S'} \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{v}) = dt \oint_{\partial S'} (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} \quad 1.6$$

utilizzando un'importante proprietà del prodotto misto, è stato possibile esprimere un integrale doppio di superficie come integrale di linea lungo il contorno chiuso e orientato  $C$  della superficie  $S'$ .

Il flusso uscente dal volume cilindrico risulta essere:

$$\Phi = \iint_{S(t+dt)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + dt \oint_{\partial S'} (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} \quad 1.7$$

Applicando il Teorema di Stokes, il terzo integrale diventa:

$$\oint_{\partial S'} (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{S(t)} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad 1.8$$

Sostituendo il risultato ottenuto per il terzo integrale all'interno della formula per il flusso uscente dal volume, si ottiene:

$$\Phi = \iint_{S(t+dt)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + dt \iint_{S(t)} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad 1.9$$

Ora, il flusso appena ottenuto si può esprimere anche mediante il Teorema di Gauss secondo la formula:

$$\Phi = \iiint_{\delta V} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad 1.10$$

dove  $\delta V$  è il volume del cilindro e dove nel problema considerato possiamo scrivere:

$$dV = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt dS \quad 1.11$$

Da cui, sostituendola all'interno della formula di Gauss del flusso:

$$\Phi = \iint_{S(t)} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad 1.12$$

dove tramite questa parametrizzazione del volume infinitesimo considerato, è stato convertito un integrale di volume in un integrale di superficie più semplice. Eguagliando ora le due equazioni equivalenti ottenute per il flusso uscente dal volume cilindrico e raccogliendo al secondo membro i termini che moltiplicano  $dt$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \iint_{S(t+dt)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ = dt \iint_{S(t)} [(\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F})] \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad 1.13$$

Il primo membro dell'equazione si può scrivere come differenziale del flusso del campo vettoriale generico  $\mathbf{F}$  attraverso la superficie  $S(t)$ . Dividendo entrambi i membri per  $dt$ , si ottiene il contributo del movimento della superficie  $S$  alla variazione del flusso di  $\mathbf{F}$  attraverso  $S$ :

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t+dt)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} [(\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F})] \cdot \mathbf{n} dS \quad 1.14$$

dove i due termini al secondo membro rappresentano rispettivamente il contributo delle sorgenti di  $\mathbf{F}$  e quello dovuto alla variazione di  $\mathbf{F}$  nello spazio. Se aggiungiamo anche la variazione del campo  $\mathbf{F}$  nel tempo, otteniamo la relazione finale:

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t+dt)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \right] \cdot \mathbf{n} dS \quad 1.15$$

Osservando e analizzando l'espressione appena ottenuta, si può constatare che il flusso di  $\mathbf{F}$  può variare per tre diversi motivi:

- Una variazione di  $\mathbf{F}$  nel tempo, indipendentemente dal moto di  $S$ ;
- Una variazione delle sorgenti di  $\mathbf{F}$  racchiuse dal contorno  $\partial S$  dovuta al moto di  $S$ ;
- Una variazione di  $\mathbf{F}$  dovuta alla variazione della posizione e/o della forma di  $C$  causata dal moto di  $S$ .

I calcoli e i passaggi appena fatti nel caso di un campo vettoriale generico  $\mathbf{F}$  mantengono la loro validità anche per il campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Perciò possiamo estendere i ragionamenti fatti anche al caso magnetico e scrivere direttamente la soluzione finale della variazione del flusso del campo  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie in movimento nel tempo. L'espressione appena trovata è ulteriormente semplificata tenendo conto della Legge di Gauss per il magnetismo, la terza equazione di Maxwell riportata precedentemente, secondo cui, essendo il campo  $\mathbf{B}$  un campo solenoidale, la sua divergenza è nulla:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad 1.16$$

Per cui la variazione del flusso di  $\mathbf{B}$  nel tempo è:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \mathbf{n} dS \quad 1.17$$

In analogia con il caso generale, il flusso può cambiare per uno dei seguenti motivi:

- $\mathbf{B}$  varia nel tempo;
- $C$  ha un moto uniforme in un campo  $\mathbf{B}$  disomogeneo;
- $C$  cambia forma (perché  $\mathbf{v}$  varia con la posizione).

La forza elettromotrice, che abbiamo appena calcolato come la variazione del flusso del campo magnetico attraverso la superficie  $S$  in movimento in funzione di  $t$ , generata all'interno del fluido, determina l'insorgere di una corrente elettrica.

### 1.3 Il Tensore degli Sforzi di Maxwell

La densità di energia, ossia l'energia immagazzinata in una data regione di spazio in cui è presente un campo elettromagnetico, risulta essere:

$$W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad 1.18$$

Utilizzando la formula appena riportata per la densità di energia elettromagnetica come somma dei due contributi all'energia del campo elettrico e del campo magnetico e introducendo il Vettore di Poynting, che corrisponde all'energia che fluisce per unità di tempo dal volume  $V$ , trasportata dal campo elettromagnetico, si definisce la densità di impulso:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c} \quad 1.19$$

Calcoliamo ora come varia l'impulso contenuto in un volume  $V$  arbitrario: se  $\mathbf{P}$  è l'impulso contenuto in un volume  $V$  del campo, si ha

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV \quad 1.20$$

dove la derivata al secondo membro è una derivata di un prodotto vettoriale e si può scrivere come:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad 1.21$$

e, sostituendo le due derivate con i termini presenti nelle equazioni di Maxwell e considerando l'approssimazione in cui la densità di corrente  $\mathbf{J}$  è nulla, otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = c(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + c(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} \quad 1.22$$

In seguito, utilizzando una nota identità vettoriale valida per un prodotto triplo secondo cui:

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla v^2 \quad 1.23$$

l'equazione diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = c \left[ (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2 \right] \quad 1.24$$

Ricorrendo nuovamente alle equazioni di Maxwell nel caso di assenza di separazione di carica:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad 1.25$$

si possono quindi aggiungere i due termini nulli:

$$\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) \qquad \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad 1.26$$

ottenendo dunque la relazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{ijk} E_j B_k) = c \left( E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij} + B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right)_{,j} \quad 1.27$$

da cui, raccogliendo i due termini moltiplicati con la delta di Kronecker e sostituendo la definizione di densità di impulso:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left( E_i E_j + B_i B_j - \frac{E^2 + B^2}{2} \delta_{ij} \right)_{,j} dV \quad 1.28$$

Si può notare che l'integrando è la divergenza di un tensore del secondo ordine e perciò possiamo scrivere la variazione dell'impulso  $\mathbf{P}$  nel tempo come:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} dV \quad 1.29$$

dove è stato introdotto il Tensore degli Sforzi di Maxwell  $T_{ij}$  definito come:

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left( E_i E_j + B_i B_j - \frac{E^2 + B^2}{2} \delta_{ij} \right) \quad 1.30$$

Il Tensore degli Sforzi di Maxwell è un tensore simmetrico che si può esprimere in forma matriciale tramite una matrice 3x3 ed esprime l'azione esercitata dal campo elettromagnetico sui corpi immersi in esso. È stato introdotto in elettromagnetismo con un legame intrinseco con la forza di Lorentz, ossia la forza che il campo elettromagnetico esercita su un corpo nella regione di dominio del campo stesso. La conoscenza di tale forza, espressa come integrale della forza applicata sul volume del corpo, poteva infatti essere sostituita dalla conoscenza del tensore degli sforzi applicato alla superficie che racchiude quel determinato volume per conoscere, tramite il teorema della divergenza e



di Gauss, gli sforzi applicati ad esso. L'importanza fisica dell'introduzione di questo tensore si può ricavare analizzando i risultati ottenuti precedentemente. Applicando, infatti, il Teorema di Gauss alla formula, si può dedurre un concetto importante: la variazione della densità di impulso deve essere uguale all'opposto del flusso di impulso attraverso la superficie  $S$ , secondo la formula:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = -\Phi_i \quad 1.31$$

Perciò la densità di flusso di impulso associata al campo elettromagnetico è uguale a  $-T_{ij}$ .

## 1.4 La Forza Ponderomotrice

La definizione del Tensore degli Sforzi di Maxwell conduce alla introduzione di una forza di volume applicata al corpo immerso all'interno della regione di applicazione del campo elettromagnetico, denominata "Forza ponderomotrice". Consideriamo un liquido conduttore situato in un campo magnetico  $\mathbf{B}$ , in tal caso la forma del Tensore degli Sforzi di Maxwell è la seguente:

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right) \quad 1.32$$

Lo sforzo di Maxwell dà luogo a una forza di volume il cui legame è esplicitato dalla relazione:

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \quad 1.33$$

Analizzando la relazione appena riportata, la forza ponderomotrice dunque è una forza che un corpo percepisce in presenza di uno sforzo di Maxwell non uniforme, ossia in presenza di un campo magnetico non uniforme. Derivando  $T_{ij}$  rispetto a  $x_{ij}$  si ha:

$$f_i = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial B_i}{\partial x_j} B_j + B_i \frac{\partial B_j}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{8\pi} (B^2)_{,i} \quad 1.34$$

Poiché la divergenza di  $\mathbf{B}$  è nulla, si ottiene:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{8\pi} \nabla(B^2) \quad 1.35$$

Come si può vedere, la *forza ponderomotrice* è composta da due termini:

- un termine avvertivo  $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$
- il gradiente della *pressione magnetica*  $\mathcal{p} = \frac{B^2}{8\pi}$

I due termini possono essere poi unificati grazie all'identità vettoriale

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{B}^2) = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad 1.36$$

Sostituendo nella formula della forza ponderomotrice, si ottiene:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad 1.37$$

Da questa espressione notiamo dunque che la forza:

- è perpendicolare al campo magnetico
- è presente solo se il rotore di  $\mathbf{B}$  è diverso da 0.

Ricorrendo alla Legge di Ampère, se il rotore di  $\mathbf{B}$  è diverso da zero deve esistere una densità di corrente

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \mathbf{B} \quad 1.38$$

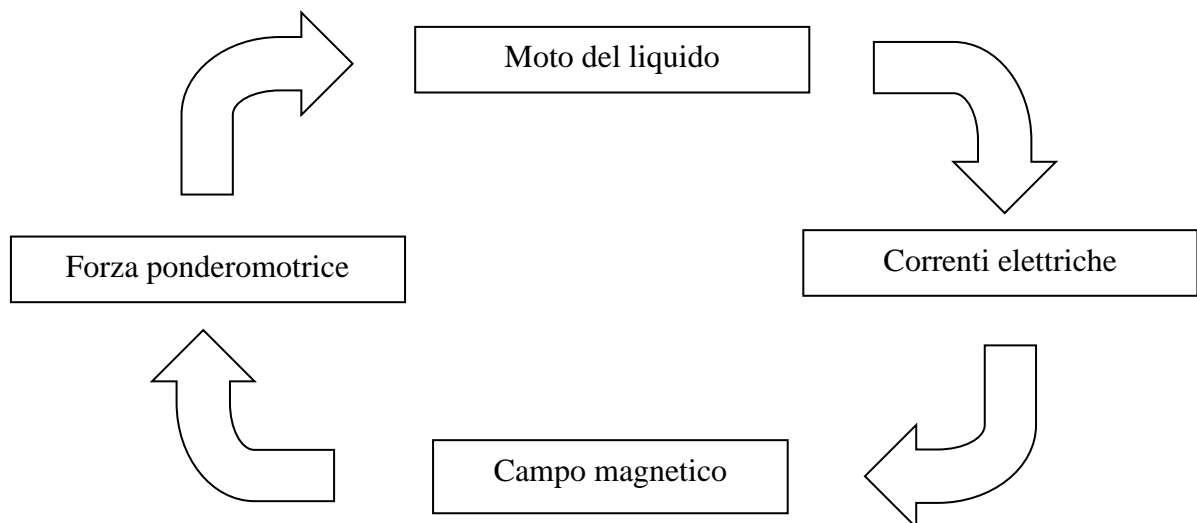
Sostituendola nell'espressione della forza ponderomotrice:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad 1.39$$

La forza ponderomotrice è quindi perpendicolare sia al campo magnetico, sia alla corrente elettrica. È una generalizzazione della forza di Lorentz che agisce su una carica  $q$  che si muove con velocità  $v$  in un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Per questo motivo viene anche denominata forza di Lorentz volumetrica. Nel caso di un liquido, la forza ponderomotrice è una forza di volume che dunque deve essere inserita all'interno delle equazioni del moto.

## 1.5 Le equazioni del moto

Si può dunque, riassumendo le riflessioni precedenti, descrivere il moto di un liquido conduttore in un campo magnetico tramite lo schema seguente:



Consideriamo ora un liquido viscoso newtoniano, omogeneo e isotropo, con densità  $\rho$ , viscosità  $\eta$  e conducibilità elettrica  $\sigma$ , con le seguenti assunzioni:

- La conducibilità elettrica non dipende dal campo magnetico;
- Il liquido ha permeabilità magnetica  $\mu \sim 1$
- Il liquido è elettricamente neutro;
- Il liquido è incompressibile, perciò vale l'equazione di continuità  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

L'equazione che governa la dinamica del liquido conduttore immerso in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  è l'equazione di Navier-Stokes:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad 1.40$$

dove  $p$  è la pressione e  $\mathbf{f}$  è la somma delle forze di volume che agiscono sul fluido, comprendendo la *forza ponderomotrice*, la forza di gravità e altre eventuali forze.

### Legge di Ohm

Il moto del liquido determina l'insorgere di una corrente elettrica che possiamo determinare nel sistema dell'osservatore come somma di due contributi:

$$\mathbf{J} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad 1.41$$

dove il primo termine è legato alla presenza di un liquido conduttore in una regione di applicazione del campo elettrico  $\mathbf{E}$  mentre il secondo termine è dovuto alla forza di Lorentz a cui è soggetta una particella carica all'interno del liquido in movimento con velocità  $\mathbf{v}$  in presenza di un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Considerando il caso particolare in cui l'azione del campo elettrico è nulla, si ottiene che la corrente è perpendicolare alla velocità  $\mathbf{v}$  del fluido. Un'assunzione iniziale importante era la neutralità elettrica del liquido, perciò il suo moto non produce alcuna corrente elettrica nella direzione della velocità  $\mathbf{v}$ .

### Equazione di stato

Un'equazione di stato è una legge costitutiva che descrive lo stato della materia sotto determinate condizioni fisiche. È una relazione matematica tra due o più variabili di stato associate alla materia stessa. Nel caso particolare di un fluido e nell'ambito della fluidodinamica, l'equazione di stato considerata mette in relazione densità, pressione e temperatura del fluido:

$$p = p(\rho, T) \quad 1.42$$

dove in questo caso è stata esplicitata la pressione in funzione delle altre due variabili di stato, densità e temperatura. Specificatamente al nostro caso di un fluido Newtoniano, omogeneo e incompressibile, l'equazione di stato è:

$$\rho = \text{cost} \quad 1.43$$

Questo significa che vengono trascurate le variazioni della densità dovute alle variazioni della pressione ma non necessariamente a quelle della temperatura.

### Equazione idromagnetica

L'equazione idromagnetica è l'equazione fondamentale della teoria MHD e lega le variazioni del campo magnetico in funzione del tempo e dello spazio al moto del liquido. Tramite un sistema a catena, si parte dalla Legge di Faraday discussa precedentemente:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} \quad 1.44$$

Dalla legge di Ohm ricavata sopra:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad 1.45$$

e sostituendola nella legge di Faraday si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad 1.46$$

Ricordando che si può esprimere la corrente  $\mathbf{J}$  per mezzo delle equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad 1.47$$

Imponendo di trascurare processi che avvengono su tempi scala brevi e con velocità tipiche  $u \ll c$ , per cui  $|\mathbf{E}/\mathbf{B}| \sim u/c \ll 1$  e quindi:

$$\left| \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| : |\nabla \times \mathbf{B}| \sim \frac{E/ct}{B/L} \sim \frac{u E}{c B} \sim \left( \frac{u}{c} \right)^2 \quad 1.48$$

In tal modo si possono trascurare le correnti di spostamento e quindi:

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \quad 1.49$$

Inserendola nell'equazione precedente, si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad 1.50$$

Utilizzando l'identità vettoriale:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \quad 1.51$$

Tenendo conto che

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad 1.52$$

Si ottiene dunque l'equazione idromagnetica:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \chi_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad 1.53$$

Dove

$$\chi_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad 1.54$$

è la *diffusività magnetica*.

Osservando la forma dell'equazione magnetoidrodinamica ottenuta, si può notare come la variazione del campo magnetico nel tempo possa essere espresso come somma di due contributi legati al moto del fluido conduttore. Il primo termine rappresenta la convezione del campo magnetico da parte del liquido in moto (in analogia all'equazione di vorticità per i fluidi), mentre il secondo termine indica la diffusione del campo magnetico (analogamente all'equazione della temperatura per il trasporto di calore).

Si può osservare come l'equazione idromagnetica appena ricavata sia formalmente identica all'equazione di Helmholtz che sostituisce al campo magnetico, la vorticità  $\Omega$  di un fluido viscoso:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \Omega) + \nu \nabla^2 \Omega \quad 1.55$$

dove la viscosità cinematica  $\nu$  prende il posto della diffusività magnetica. L'importanza di questa osservazione risiede nella possibilità di estendere molti dei teoremi validi per la fluidodinamica, ambito di validità dell'equazione della vorticità, alla magnetoidrodinamica e all'equazione idromagnetica. Spesso, infatti, la risoluzione analitica del moto del fluido conduttore in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  è complessa da portare a termine. La risoluzione analitica del problema, infatti prevede la considerazione simultanea delle leggi della fluidodinamica e dell'elettromagnetismo con opportune condizioni iniziali e al contorno. Il problema matematico che nasce dalla analisi della fenomenologia fisica di interesse in generale è privo di soluzione analitica: per questo risulta necessario a volte, per determinate condizioni di flusso, introdurre delle semplificazioni alle equazioni che lo governano, in modo tale che alcuni termini possano essere trascurati o diventare poco importanti. Nonostante ciò, è possibile che anche le equazioni così semplificate possano non ammettere una soluzione analitica, rendendo necessario un approccio numerico. L'analogia con il caso fluidodinamico della vorticità di un fluido viscoso permette un'estensione di alcuni teoremi e lo studio numerico di alcuni problemi, rimasti irrisolti analiticamente. Analizziamo il caso particolare del fluido a riposo e perciò imponiamo che la velocità del fluido sia nulla. L'equazione idromagnetica si riduce a:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \chi_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad 1.56$$

Si deduce dunque che una configurazione del campo magnetico di intensità  $B$  e dimensioni lineari  $L$  decade con un tempo caratteristico  $\tau$  che si ricava dall'equazione

$$\frac{B}{\tau} \approx \chi_m \frac{B}{L^2} \quad 1.57$$

Portando  $\tau$  al numeratore, si ricava dunque:

$$\tau = \frac{L^2}{\chi_m} = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} \quad 1.58$$

Sostituendo alle grandezze i valori relativi al nucleo terrestre, si ottiene:

$$\tau = 10^4 \text{anni}$$

Questo è il tempo entro il quale il campo geomagnetico si attenuerebbe se il meccanismo che lo alimenta si arrestasse.

## 1.6 Teorema di Alfvén

Nel 1970 l'Accademia reale svedese delle scienze riconobbe a Hannes Alfvén il merito per le sue scoperte nell'ambito della fisica del plasma e della magnetoidrodinamica. Nel 1942 lo scienziato svedese elaborò e ricavò due teoremi essenziali per lo sviluppo della teoria della MHD che vanno sotto il titolo di *congelamento delle linee di flusso magnetico nei fluidi a conduttività infinita*. Ricorrendo, come è stato detto in precedenza, alla analogia tra l'equazione riguardante la vorticità della fluidodinamica e l'equazione idromagnetica della MHD, si può analizzare un altro caso importante: quello del conduttore perfetto. In tal caso, le condizioni che devono essere soddisfatte sono un valore di resistività del mezzo nulla, o in maniera equivalente, conducibilità elettrica che tende a un valore infinito. L'equazione idromagnetica in tale limite risulta:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad 1.59$$

dove è stato possibile trascurare il termine diffusivo in quanto per  $t \ll \tau$ , la diffusione del campo magnetico non ha il tempo di realizzarsi. L'equazione in questa forma permette di stimare, conoscendo il valore di  $\mathbf{B}$  a  $t = 0$ , l'evoluzione temporale del campo sotto le opportune condizioni fisiche vigenti dai moti del fluido.

Il primo teorema di Alfvén afferma che il flusso magnetico attraverso qualunque circuito concatenato con il fluido è costante. È possibile dimostrare algebricamente tale teorema convertendo il prodotto triplo a secondo termine dell'equazione idromagnetica con una nota identità vettoriale:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad 1.60$$

dove, per l'equazione di continuità e utilizzando le equazioni di Maxwell, il secondo e quarto termine sono nulli. Si ha allora:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad 1.61$$

Al primo membro dell'equazione si può facilmente riconoscere la derivata totale del campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Quindi:

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad 1.62$$

Studiando l'andamento del flusso del vettore campo magnetico attraverso una superficie  $S$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$ , era stato trovato come risultato che la variazione del flusso si può scrivere come:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \mathbf{n} dS \quad 1.63$$

Per l'equazione idromagnetica, nel caso in cui la conducibilità  $\sigma \rightarrow \infty$ , l'espressione tra parentesi è nulla, dunque:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad 1.64$$

Perciò il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie  $S$  che si muove con il fluido è costante per un conduttore perfetto.

Il secondo teorema di Alfvén è un corollario del primo ed afferma che elementi di fluido che si trovano inizialmente associati ad una data linea di flusso continuano a rimanere solidali con tale linea durante il moto. Le linee di campo di  $\mathbf{B}$  sono dunque congelate nel fluido e si muovono con esso. Questa proprietà ha un ruolo fondamentale nella generazione del campo geomagnetico. Si dimostra algebricamente introducendo il concetto di *linea materiale*, una curva che si sposta contemporaneamente alle particelle che la formano. Se  $s$  è un elemento di linea materiale, le velocità del fluido all'estremità di  $s$  sono legate dalla relazione:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (d\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad 1.65$$

Dove  $d\mathbf{x}$  è  $s$  e, dunque, sostituendolo all'interno dell'equazione:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (\mathbf{s} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad 1.66$$

La variazione di lunghezza di  $s$  nell'unità di tempo è data dalla differenza tra le due velocità, da cui tramite un semplice passaggio matematico, si ottiene:

$$\frac{ds}{dt} = (\mathbf{s} \cdot \nabla)v \quad 1.67$$

L'equazione appena ottenuta ha la stessa forma di quella che rappresenta la variazione nel tempo del campo magnetico  $\mathbf{B}$  nel caso di un conduttore perfetto. Questa analogia comporta due conseguenze fondamentali:

- Se le direzioni di  $s$  e  $\mathbf{B}$  coincidono a  $t = 0$ , rimangono parallele anche in un tempo successivo.
- Le lunghezze dei due vettori  $\mathbf{B}$  e  $s$  variano in maniera proporzionale.

Questi due concetti, come vedremo nel secondo capitolo, sono alla base del processo di amplificazione del campo geomagnetico.

Si può, ora, calcolare la velocità di trascinamento delle linee di campo magnetiche. Scomponiamo la velocità  $\mathbf{v}$  del fluido in una componente parallela e una perpendicolare al campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Chiamando  $\mathbf{w}$  la componente perpendicolare della velocità delle linee di campo, nel limite di conduttore perfetto, la legge di Ohm comporta che:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \rightarrow 0 \quad 1.68$$

da cui:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} \simeq -c\mathbf{E} \quad 1.69$$

che, scomponendo la velocità nelle due componenti suddette, si può scrivere come:

$$(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}) \times \mathbf{B} \simeq -c\mathbf{E} \quad 1.70$$

Per definizione:

$$\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B} = 0 \quad 1.71$$

Dunque:

$$\mathbf{w} \times \mathbf{B} = -c\mathbf{E} \quad 1.72$$

Moltiplicando vettorialmente entrambi i membri per  $\mathbf{B}$  e sviluppando il prodotto triplo, si ottiene:

$$\mathbf{w}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{w}) = c\mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad 1.73$$

nella quale, eliminando il secondo termine al primo membro con la giustificazione di un prodotto scalare tra due vettori perpendicolari tra loro, si ricava la velocità di trascinamento delle linee di campo magnetiche:

$$\mathbf{w} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad 1.74$$

detta *Deriva*  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ed è perpendicolare simultaneamente ai due campi elettrico e magnetico.

## 1.7 Numero di Reynolds magnetico

Il *Numero di Reynolds Magnetico* è un numero adimensionale dal significato fisico importante in quanto esprime il peso dei due termini nell'equazione idromagnetica. Indica, quindi, se il movimento del fluido conduttore in una regione dominata dal campo magnetico  $\mathbf{B}$  è dominato dalle forze dovute al moto del fluido stesso o dalle forze elettromagnetiche agenti su di esso. Considerando di nuovo l'equazione idromagnetica:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \chi_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad 1.75$$



che esprime l'evoluzione temporale del campo magnetico come somma di due termini, il termine avvevivo e quello diffusivo. Se  $L$  è la lunghezza caratteristica e  $V$  è la velocità caratteristica del problema considerato, si effettua il cambiamento di variabile:

$$x' = \frac{x}{L} \qquad v' = \frac{v}{V} \qquad t = \frac{V}{L} t \qquad 1.76$$

L'equazione diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = \nabla' \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}') + \frac{\chi_m}{LV} \nabla'^2 \mathbf{B}' \qquad 1.77$$

dove le derivate sono effettuate rispetto alle nuove variabili. Il problema è dunque caratterizzato dai tre parametri che compaiono nel termine diffusivo e che si possono raggruppare in una sola quantità adimensionale: il **Numero di Reynolds Magnetico**.

$$R_m = \frac{LV}{\chi_m} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} LV \qquad 1.78$$

Si possono dunque studiare i due casi limite intorno al valore di riferimento uguale all'unità:

- Se  $R_m \ll 1$ , la velocità del moto del fluido è bassa o nulla, perciò il comportamento del fluido conduttore è governato dalla diffusione che prevale sul trascinamento delle linee di campo;
- Se  $R_m \gg 1$ , la velocità del fluido è elevata, perciò il comportamento del fluido conduttore è governato dal termine avvevivo e dunque il trascinamento delle linee di campo prevale sulla diffusione.

Nel processo di generazione del campo geomagnetico, la regione di interesse è il nucleo terrestre dove i valori di velocità caratteristica del moto del fluido e quello di lunghezza caratteristica sono sotto riportati:

$$L \approx 10^8 \text{ cm} \qquad V \approx 10^{-2} - 10^{-1} \text{ cm s}^{-1} \qquad 1.79$$

$$\chi_m \approx 10^4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

Sostituendoli all'interno della definizione di *numero di Reynolds magnetico*, si ottiene un valore approssimato di:

$$R_m \approx 10^2 - 10^3 \qquad 1.80$$

Il *numero di Reynolds magnetico* è molto grande rispetto all'unità; dunque, si può dedurre che il trascinamento delle linee di campo prevale sulla diffusione del campo magnetico. Perciò il moto del liquido conduttore ha un ruolo determinante nel determinare  $\mathbf{B}$ .



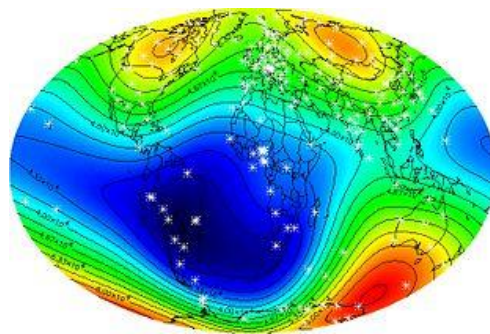
# Capitolo 2

## La Geodinamo

### 2.1 Proprietà fisiche e dinamiche del nucleo terrestre

Un'applicazione di natura geofisica, i cui meccanismi sono interpretabili nell'ambito della MHD, è la generazione del campo geomagnetico, prodotto tramite il movimento del liquido conduttore che costituisce il nucleo esterno. La natura dinamica del campo magnetico terrestre suggerisce infatti che la sorgente del campo è individuabile nel nucleo esterno, liquido e in movimento. Il nostro pianeta, in analogia ad altri corpi del Sistema Solare, genera un campo magnetico mediante un processo interno di dinamo geomagnetica. In linea di principio, la dinamo terrestre opera come un generatore elettrico, creando campi magnetici ed elettrici convertendo l'energia cinetica delle componenti in movimento in energia elettrica. Il campo geomagnetico non è però omogeneo lungo la superficie terrestre e le sue variazioni di intensità non riflettono né le variazioni della geologia di superficie né la morfologia topografica. Il modello IGRF (International Geomagnetic Reference Field), il modello globale del campo magnetico alla superficie terrestre usato come riferimento a livello internazionale, mostra questa disomogeneità basandosi su uno sviluppo del campo in armoniche sferiche fino al grado  $l = 10$ . Quest'analisi armonica sferica del campo magnetico di superficie dimostra che più del 94% del campo è di origine interna e comprende due contributi:

- Il campo nucleare che, sebbene sia variabile nel tempo, cambia molto lentamente ed ha origine nel nucleo esterno dal moto del liquido conduttore che genera un loop di correnti elettriche;
- Il campo crostale, generato da rocce magnetizzate dal campo nucleare, che crea anomalie magnetiche locali ed è di piccola entità.



*Figura 2.1: grafico che rappresenta, in maniera cromatica, l'intensità del campo magnetico alla superficie terrestre. (National Centers for Environmental Information)*

Nello studio che seguirà, la concentrazione sarà rivolta solo alla componente nucleare che è responsabile per il 94% del campo magnetico osservabile alla superficie terrestre e ne determina le proprietà generali.

La regione di nostro interesse è dunque il Nucleo, che ha un raggio pari al 55% della Terra e una densità circa il doppio della densità media terrestre. Nonostante ciò, il contributo alla massa della Terra è solo il 32% e il motivo è che il Mantello, pur avendo uno spessore minore del raggio del Nucleo e una densità media minore (81% di quella terrestre), ha un volume 5 volte maggiore del volume del Nucleo. I progressi nel campo della sismologia e dello studio della propagazione delle onde sismiche hanno condotto ad un risultato di primaria importanza sulla costituzione chimico-fisica del Nucleo: è suddivisibile in due regioni, una interna di composizione solida e una esterna di composizione liquida. Una differenza di composizione chimica comprovata sia dalla possibilità del nucleo interno solido di essere attraversato dalle onde sismiche di tipo S sia dallo studio delle oscillazioni libere a lungo periodo. In quest'ultimo caso, l'osservazione secondo cui la velocità d'onda è anisotropica, ovvero il suo valore non è uniforme in tutte le direzioni, essendo maggiore parallela all'asse, è giustificabile solo nel caso in cui il materiale attraverso cui essa viaggia è solido per la sua struttura cristallina allineata e regolare. Tutto questo può essere compreso alla luce dei modelli comunemente utilizzati per lo studio della formazione ed evoluzione dei pianeti rocciosi come la Terra: lo sviluppo per accrescimento basato sulla conversione di energia cinetica dei corpi, collidenti con il proto-pianeta, in calore. Queste condizioni reologiche, all'inizio della formazione del pianeta che oggi si osserva, determinarono l'inizio di un meccanismo di differenziazione gravitativa, un processo di selezione degli elementi e composti chimici sulla base del loro peso. Essendo il più pesante tra gli elementi più abbondanti che formano la Terra, la maggior parte del *Fe* si è depositata al centro del pianeta, formando il Nucleo. (Brown e Mussett, 1993)

- Il *Nucleo esterno* è formato prevalentemente da *Fe* allo stato liquido. Misure ed esperimenti fatti mostrano come il nucleo esterno non sia composto interamente da ferro puro, ma un valore di densità del 10% più bassa dimostra che il *Fe* è diluito da un elemento meno denso, lo zolfo (*S*). Il ferro infatti combina facilmente tramite affinità elettronica con lo zolfo, formando il solfuro di ferro (*FeS*). *Fe* e *FeS* sono miscibili ad alte temperature e la temperatura del miscuglio *Fe-FeS* è inferiore a quella dei due componenti presi separatamente.
- Il *Nucleo interno* è solido e si è formato prevalentemente per solidificazione del metallo liquido che forma la parte esterna. È formato da una lega di *Fe* e *Ni* con 80% *Fe* e 20% *Ni*. La formazione del nucleo interno è iniziata meno di due Ga fa, quando la temperatura al centro della Terra era diminuita abbastanza da consentire la solidificazione della lega *Fe-Ni*.

Con buona approssimazione, si può assumere che il Nucleo esterno sia formato da un liquido newtoniano, omogeneo, isotropo e incompressibile, laddove le forze agenti su di esso sono determinate dalla presenza di un campo gravitazionale e di un sistema di riferimento rotante a velocità angolare  $\omega$ , trascurando per ora la presenza del campo

magnetico  $\mathbf{B}$ . La forza di galleggiamento è dovuta simultaneamente alla presenza di un campo gravitazionale  $\mathbf{g}$  e a differenze di densità nel nucleo che si producono per due motivi principali:

- La formazione della lega  $Fe - Ni$ , che accresce il nucleo interno, impoverisce di  $Ni$  il liquido residuo e ne riduce la densità;
- La distribuzione radiale della temperatura, che aumenta con la profondità, riducendo la densità del liquido situato a profondità maggiori.

Trascurando per ora la presenza del campo magnetico  $\mathbf{B}$ , il cui contributo verrà considerato successivamente, il moto del liquido newtoniano può essere determinato risolvendo e considerando contemporaneamente un sistema di equazioni comprendenti l'equazione del moto che coincide con l'*equazione di Navier-Stokes*, l'equazione del calore e l'equazione di continuità per un fluido incompressibile. Come già visto in MHD, anche in questo caso il sistema, che deve essere risolto in un guscio sferico, con opportune simmetrie e condizioni al contorno e iniziali, è troppo complicato per poter essere risolto analiticamente e si deve ricorrere a soluzioni numeriche, ma lo studio qualitativo del problema permette di introdurre due aspetti della dinamica del Nucleo fondamentali per la generazione del campo geomagnetico, considerando un moto con la forza di Coriolis dominante:

- *Elicità* del moto, secondo cui il moto del liquido tende a essere confinato sui piani perpendicolari all'asse di rotazione, rispettando la condizione di Proudman-Taylor. Il moto del liquido nel nucleo esterno assume la forma di cilindri o rulli paralleli all'asse di rotazione. Tuttavia, poiché la superficie su cui terminano i rulli è una sfera, il moto del fluido alle estremità non può essere perpendicolare all'asse di rotazione. Perciò le condizioni al contorno introducono una piccola componente della velocità lungo l'asse di rotazione, a causa della quale il moto assume una forma elicoidale;
- la *rotazione differenziale*, la tendenza del liquido in convezione a conservare il suo momento angolare mentre si muove radialmente spinto dalla forza di galleggiamento. La conseguenza è che il nucleo interno ruota con una velocità angolare più alta di quella del mantello di circa  $1^\circ/\text{anno}$ .

Alle due forze considerate, la forza di Coriolis dovuta alla rotazione terrestre e la forza di galleggiamento dovuta alla differenza di densità, deve essere aggiunta nella comprensione del problema la *forza ponderomotrice*, dovuta alla presenza di un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . L'interazione tra il fluido conduttore e incompressibile e il campo magnetico è descritto con accuratezza dalle leggi della MHD.

## 2.2 Generazione del campo geomagnetico

Una volta accettata l'idea che il campo magnetico terrestre sia di origine interna al Nucleo terrestre, il problema diventa quello di formulare un modello fisicamente plausibile del meccanismo di generazione del campo stesso. Riassumendo, il campo magnetico terrestre

è generato da correnti elettriche che hanno sede nel Nucleo, la cui persistenza è garantita dall'effetto dinamo, per il quale si verifica la conversione di energia meccanica, fornita dai movimenti del liquido che forma il nucleo dovuti a convezione termica e composizionale, in energia elettrica. Il Nucleo è perciò una *dinamo magnetoidrodinamica*, anche detta *geodinamo*, in quanto il suo comportamento è descritto in maniera esauriente tramite l'equazione idromagnetica, ricavata in MHD. La possibilità di realizzare una dinamo magnetoidrodinamica, infatti, dipende dalla disponibilità di un liquido conduttore con  $R_m \gg 1$ , nel quale il termine avvevativo prevale su quello diffusivo e dove quindi il moto del liquido produce lo stiramento e la torsione delle linee di campo magnetiche, amplificando la sua intensità e contrastandone l'attenuazione dovuta alla diffusione. Il primo ad elaborare il modello fisico dell'effetto dinamo per spiegare il magnetismo planetario fu Walter M. Elsasser nel 1945. Prima di allora si pensava che i campi magnetici dei pianeti fossero generati per effetto termoelettrico. Un modello semplificato di dinamo magnetoidrodinamica è la *dinamo a disco di Faraday*, composta da un disco metallico che ruota attorno a un asse con velocità angolare  $\omega$  costante sottoposto a un campo magnetico  $\mathbf{B}_0$  uniforme, diretto parallelamente all'asse.

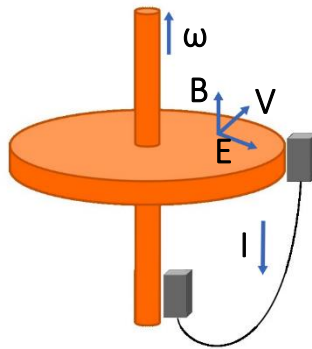


Figura 2.2: *dinamo a disco di Faraday*.

Nel sistema del laboratorio si ha:

$$\mathbf{E} = 0 \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \qquad 2.1$$

Se  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  è la velocità del disco, sulle cariche libere  $q$  del disco agisce la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{qvB_0}{c} \hat{\mathbf{r}} \qquad 2.2$$

e, poiché la carica degli elettroni liberi è negativa, la forza è diretta verso l'asse del disco.

Nel sistema di riferimento solidale con il disco, si ha:

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B} \qquad 2.3$$

e la forza di Lorentz che agisce su ciascuna carica ha solo il contributo elettrico, in quanto considerando il moto nel sistema di riferimento solidale con il disco, si ha che  $\mathbf{v}' = 0$  ed è:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}' = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{q\mathbf{v}B_0}{c} \mathbf{r} \quad 2.4$$

che coincide con il risultato precedente. Si genera una forza elettromotrice tra l'asse di rotazione e il bordo del disco, ma non si verifica scorrimento di corrente fino a quando il circuito è completato con un cavo collegante le due parti. La forza elettromotrice è calcolabile come:

$$\epsilon = \int_0^{r_0} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{c} \int_0^{r_0} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad 2.5$$

Dove  $r_0$  è il raggio del disco e considerando il campo magnetico con una sola componente diretta lungo l'asse di rotazione, considerato come l'asse z, si ottiene:

$$\epsilon = \frac{\omega B_0}{c} \int_0^{r_0} r dr = \frac{\omega B_0 r_0^2}{2c} \quad 2.6$$

Questa forza elettromotrice appena ricavata è utilizzabile per generare una corrente elettrica:

$$I = \frac{\epsilon}{R} \quad 2.7$$

dove  $R$  è la resistenza del circuito. Dunque, sostituendo il valore della forza elettromotrice ricavato precedentemente, si ottiene una corrente elettrica:

$$I = \frac{\omega B_0 r_0^2}{2cR} \quad 2.8$$

Come è stato già detto, la persistenza di tale corrente elettrica è garantita tramite il continuo rifornimento di energia meccanica al disco mediante un momento torcente, diretto lungo l'asse del disco stesso. All'equilibrio, il limite inferiore della produzione di energia necessaria a mantenere il campo magnetico deve essere la dissipazione ohmica delle correnti elettriche, ossia la potenza dissipata dalla resistenza elettrica:

$$W = \omega N \quad W = \epsilon I = I^2 R \quad 2.9$$

Eguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$N = \frac{RI^2}{\omega} \quad 2.10$$

E quindi il momento torcente deve essere proporzionale al quadrato della intensità di corrente che si intende ottenere. Un'apparente contraddizione nel modello dinamico del disco di Faraday appena descritto è dovuta al fatto che il campo geomagnetico è determinato dall'insorgere delle correnti elettriche generato per effetto dinamo, ma quest'ultimo si manifesta solo in presenza di un campo magnetico. Una relazione di causa effetto alla base del processo di generazione del campo geomagnetico in cui la causa è essa stessa effetto e viceversa. Il modello del disco di Faraday è sostituito, per una

migliore rappresentazione, dalla *dinamo autoalimentata di Bullard*. Il circuito è avvolto attorno all'asse in modo da formare un solenoide in cui la corrente scorre nello stesso verso della rotazione del disco. La corrente produce un campo magnetico secondario che sostituisce l'azione del campo magnetico esterno: infatti, la corrente attraversa il filo attorno l'asse di rotazione del disco in modo tale che il campo magnetico secondario viene sfruttato per la sua autoeccitazione. Questo è il meccanismo in cui opera una dinamo autoalimentata che persiste nella generazione del campo fino a quando è in atto la rotazione.

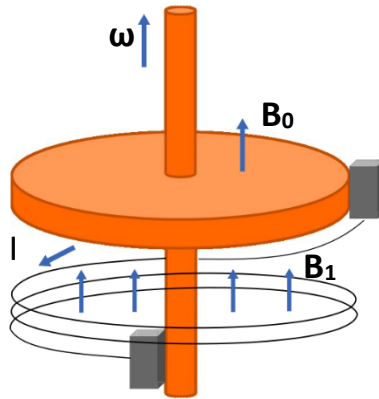


Figura 2.3: *dinamo a disco autoalimentata.*

La corrente  $I$  è fornita dall'equazione:

$$L \frac{dI}{dt} = \epsilon - RI \quad 2.11$$

dove  $L$  è l'induttanza del circuito, che dipende direttamente dalle caratteristiche geometriche del solenoide e rappresenta la capacità del conduttore di opporsi alla variazione di corrente elettrica. Il flusso magnetico che attraversa la superficie  $S$  del disco è:

$$\Phi = \int_S B_z dS = 2\pi \int_0^{r_0} B_z r dr \quad 2.12$$

Dove  $B_z$  include sia il contributo  $B_1$  dovuto alla corrente elettrica sia il campo preesistente  $B_0$  e poiché il campo  $B_1$  è approssimativamente uniforme su  $S$ , anche  $B_z$  lo è:

$$\Phi = 2\pi B_z \int_0^{r_0} r dr \quad 2.13$$

Sostituendola all'interno dell'espressione della forza elettromotrice, considerando che l'intensità del campo magnetico secondario generato dalla corrente elettrica è trascurabile rispetto a quello primario che ha contribuito a innescarlo e introducendo la mutua induttanza  $M$  tra il circuito e il disco, si ottiene:



$$\Phi = cMI \qquad \epsilon = \frac{\omega MI}{2\pi} \qquad 2.14$$

E l'equazione del circuito diventa:

$$L \frac{dI}{dt} = \left( \frac{\omega M}{2\pi} - R \right) I \qquad 2.15$$

e risolvendo l'equazione differenziale si ricava la funzione matematica che descrive il comportamento della corrente elettrica:

$$I(t) = I_0 \exp \left[ \frac{1}{L} \left( \frac{\omega M}{2\pi} - R \right) t \right] \qquad 2.16$$

Nella condizione  $\frac{\omega M}{2\pi} - R > 0$  la corrente cresce esponenzialmente, a partire dal valore iniziale  $I_0$ . Affinché la condizione sia verificata, la velocità di rotazione  $\omega$  del disco deve essere elevata e poiché il campo magnetico di un solenoide è proporzionale alla corrente, anche  $\mathbf{B}_1$  cresce esponenzialmente. Questo determina, in condizione di regime, la possibilità di rimuovere  $\mathbf{B}_0$ , il campo magnetico preesistente e l'energia spesa per la rotazione del disco genera un campo magnetico per effetto dinamo.

Questo modello della dinamo a disco di Bullard permette una comprensione e una descrizione del meccanismo di generazione del campo geomagnetico, ma non può essere applicato direttamente al Nucleo, dove il processo avviene in un dominio sferico semplicemente connesso, con conducibilità elettrica uniforme. La geodinamo è infatti descrivibile come un sistema con feedback o retroazione, dove quest'ultima è la capacità di un sistema dinamico di tenere conto dei risultati del sistema per modificare le caratteristiche del sistema stesso. La geodinamo viene attivata da un debole campo magnetico, denominato *seme*, che successivamente può essere rimosso e che con ottima probabilità è rappresentato dal campo magnetico interplanetario. Il sistema deve poi essere alimentato da una fonte di energia a un tasso sufficientemente elevato. Quanta energia serva dipende esclusivamente dal meccanismo che produce il moto del metallo liquido nel Nucleo interno. Si possono annoverare due possibili fonti di energia: la *convezione termica* generata da una sorgente di calore e la *convezione composizionale*, determinata da una separazione di componenti più leggeri e più densi in presenza di un campo gravitazionale. (Campbell, 2003)

- la *convezione termica* è un moto di circolazione del fluido dovuto a una sorgente di calore che riscalda componenti del fluido stesso, le espande e ne determina una riduzione della densità così da innescare un processo di trasporto delle parti del fluido riscaldate e meno dense verso l'altro e di quelle più fredde e più dense verso il basso, completando il ciclo. La convezione termica è, tuttavia, un modo piuttosto inefficiente per convertire energia termica in moti meccanici per varie ragioni. Per originare la convezione in un liquido compressibile è necessario che il gradiente di temperatura tra la parte superiore e inferiore del liquido, nel nostro caso il Nucleo esterno, ecceda il gradiente adiabatico, il quale nel nucleo è stimato

essere approssimativamente  $0.5^{\circ}\text{C km}^{-1}$ . Se questo non avviene, il calore adiabatico determina l'insorgere di moti conduttivi senza mai indurre la convezione. Per produrre una convezione termica tale da alimentare il processo di generazione della Geodinamo, il gradiente di temperatura deve superare di molto il gradiente adiabatico, il che equivale a dire che è necessaria una sorgente di calore con una potenza molto elevata. Solo un decadimento radioattivo sarebbe in grado di soddisfare questa richiesta senza interruzioni, dove l'isotopo del potassio  $^{40}\text{K}$  potrebbe costituire una possibilità remota in quanto necessita una proprietà non comprovata di essere siderofilo ai valori di pressione del Nucleo;

- la *convezione composizionale* è il secondo meccanismo per generare un flusso convettivo di fluido nel Nucleo esterno. In analogia con la convezione termica, si basa sulla salita del fluido meno denso ma in questo caso la differenza di densità è originata da una differenza composizionale, non da una differenza di temperatura. Consideriamo la miscela di  $\text{Fe} - \text{FeS}$  come esempio: il ferro si raffredda sulla superficie del Nucleo interno e perciò rilascia immediatamente sopra di esso uno strato liquido ricco di  $\text{FeS}$ . Quest'ultimo, essendo più leggero rispetto al restante Nucleo esterno, tende a salire così come gli strati più caldi nel caso della convezione termica. La convezione composizionale è il meccanismo più efficiente per alimentare la geodinamo in quanto non c'è un limite inferiore, corrispondente al gradiente adiabatico nella convezione termica, che deve essere superato affinché si possa innescare la convezione.

## 2.3 Rappresentazione di Mie

Prima di trattare in maniera più approfondita la dinamica della generazione del campo geomagnetico, introducendo il concetto di stiramento e amplificazione del campo stesso, è conveniente decomporre il campo magnetico  $\mathbf{B}$  secondo la *rappresentazione di Mie*. Un arbitrario campo vettoriale  $\mathbf{B}$  può essere infatti espresso tramite le sue tre componenti nel sistema di coordinate prescelto tra quelli a disposizione (cartesiane, sferiche, cilindriche). La proprietà di  $\mathbf{B}$  di essere un campo solenoidale che equivale a dire che la sua divergenza è nulla, permette di esprimere il campo tramite due funzioni scalari soltanto, che denominiamo  $P$  e  $Q$ . Si può dimostrare dunque, sulla base della condizione su  $\mathbf{B}$  appena enunciata, che il campo  $\mathbf{B}$  può essere decomposto tramite la rappresentazione di Mie:

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) + \mathbf{r} \times \nabla Q \quad 2.17$$

Dove, quindi, il campo è espresso come somma di due contributi: il primo termine è la componente poloidale mentre il secondo è la componente toroidale.

$$\mathbf{B}_P = \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) \quad \mathbf{B}_T = \mathbf{r} \times \nabla Q \quad 2.18$$

Un campo vettoriale  $\mathbf{B}$  si dice, dunque, poloidale se la componente toroidale  $\mathbf{B}_T = 0$  e viceversa. Se ora si calcola il rotore della rappresentazione di Mie di  $\mathbf{B}$ , si ottiene:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) + \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla Q) \quad 2.19$$

I due termini che compaiono possono essere semplificati ricorrendo a note identità vettoriali dei prodotti tripli. Considerando, infatti, il primo termine, il rotore della componente poloidale può essere scritto come segue:

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) = \nabla[\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla P)] - \nabla^2(\mathbf{r} \times \nabla P) \quad 2.20$$

Dove la divergenza può essere scritta come:

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla P) = \nabla P \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \nabla P) = \mathbf{0} \quad 2.21$$

E viene posta a zero in quanto il rotore della coordinata radiale è nullo, come il rotore di un gradiente. Mentre, per quanto riguarda al secondo termine nell'eq. 2.20 usiamo l'identità:

$$\nabla^2(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{r} \times \nabla^2 \mathbf{a}) + 2\nabla \times \mathbf{a} \quad 2.22$$

Dove  $\mathbf{a}$  è un campo generico che nel caso in esame coincide con il  $\nabla P$ . Poiché il rotore di un gradiente è nullo, si può annullare il secondo termine al secondo membro e dunque:

$$\nabla^2(\mathbf{r} \times \nabla P) = \mathbf{r} \times \nabla^2(\nabla P) = \mathbf{r} \times \nabla(\nabla^2 P) \quad 2.23$$

Quindi il rotore di  $\mathbf{B}_P$  risulta essere

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) - \mathbf{r} \times \nabla(\nabla^2 P) \quad 2.24$$

Tornando al rotore della Rappresentazione di Mie, sostituendo le relazioni appena trovate, possiamo scrivere:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla Q) - \mathbf{r} \times \nabla(\nabla^2 P) \quad 2.25$$

Un'osservazione importante su questa semplificazione ci porta a concludere che l'equazione appena scritta ha la stessa forma della Rappresentazione di Mie di  $\mathbf{B}$ , con  $Q$  al posto di  $P$  e  $-\nabla^2 P$  al posto di  $Q$ . L'equazione, scritta in questa maniera, evidenzia una particolare simmetria che giocherà un ruolo primario nell'analisi della formazione del campo magnetico dipolare che osserviamo sulla superficie terrestre. Il primo termine è, infatti, la componente poloidale di  $\nabla \times \mathbf{B}$  e il secondo termine è la componente toroidale di  $\nabla \times \mathbf{B}$ . Ricordando le definizioni di  $\mathbf{B}_T$  e  $\mathbf{B}_P$ , si possono scrivere le seguenti uguaglianze:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_P = \nabla \times \mathbf{B}_T \quad (\nabla \times \mathbf{B})_T = \nabla \times \mathbf{B}_P \quad 2.26$$

Da questa osservazione seguono i seguenti corollari:

- il rotore di un campo toroidale è un campo poloidale;

- il rotore di un campo toroidale è un campo poloidale.

Quindi il campo magnetico  $\mathbf{B}$  può essere formulato come la somma delle due componenti, toroidale e poloidale, del campo, laddove la componente toroidale è tangenziale rispetto alle superfici sferiche  $r = \text{cost}$ . Infatti, secondo la Rappresentazione di Mie,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_T = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla Q) = 0 \quad 2.27$$

La componente poloidale  $\mathbf{B}_P$ , invece, ha il rotore tangenziale alle stesse superfici. Si può scrivere infatti:

$$\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_P) = \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})_T = -\mathbf{r} \cdot [\mathbf{r} \times \nabla(\nabla^2 P)] \quad 2.28$$

In quanto il vettore  $\mathbf{r} \times \nabla(\nabla^2 P)$  è perpendicolare a  $\mathbf{r}$ .

Ricorrendo nuovamente alla proprietà di  $\mathbf{B}$  di essere un campo solenoidale, tale condizione permette di esprimerlo come rotore di un potenziale vettore  $\mathbf{A}$ , che può essere scelto in modo tale da essere anch'esso un campo solenoidale e la cui divergenza, perciò, sia nulla. Questa proprietà, scelta arbitrariamente, detta gauge di Coulomb, conduce a una semplificazione dei calcoli e ad un collegamento con quanto detto in precedenza. Dalle proprietà viste sopra, infatti, segue immediatamente:

- la componente poloidale di  $\mathbf{B}$  è uguale al rotore della componente toroidale di  $\mathbf{A}$ :

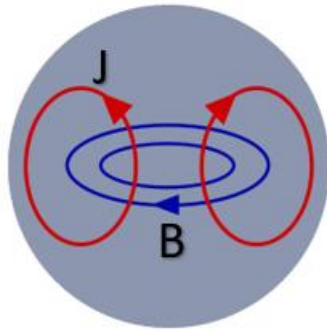
$$\mathbf{B}_P = (\nabla \times \mathbf{A})_P = \nabla \times \mathbf{A}_T \quad 2.29$$

- la componente toroidale di  $\mathbf{B}$  è uguale al rotore della componente poloidale di  $\mathbf{A}$ :

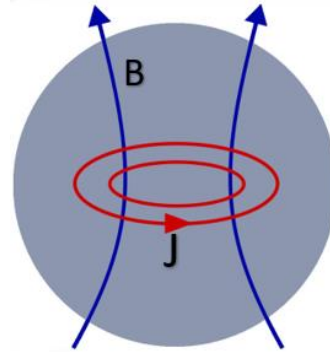
$$\mathbf{B}_T = (\nabla \times \mathbf{A})_T = \nabla \times \mathbf{A}_P \quad 2.30$$

Le stesse considerazioni fatte per il campo solenoidale  $\mathbf{A}$  possono essere ripetute per la densità di corrente elettrica, in quanto come sappiamo dalle equazioni di Maxwell, nella approssimazione MHD è direttamente proporzionale al rotore del campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Estendendo dunque a  $\mathbf{J}$  le riflessioni e i corollari ricavati sopra, si ottengono le due assunzioni:

- un campo magnetico *toroidale*  $\mathbf{B}_T$  è associato a una corrente *poloidale*;
- un campo magnetico *poloidale*  $\mathbf{B}_P$  è associato a una corrente *toroidale*.



Campo toroidale



Campo poloidale

Figura 2.4: rappresentazione del campo magnetico toroidale associato ad una corrente poloidale e viceversa.

Prima di addentrarsi nella descrizione delle linee di campo magnetiche, è necessario fornire una definizione importante di campo a simmetria assiale e un teorema altrettanto rilevante, il teorema di Cowling, che confuta l'idea di un campo magnetico dotato di tale simmetria. Un campo ha simmetria assiale quando non dipende dalla coordinata azimutale  $\phi$ . Se un campo solenoidale ha simmetria assiale, allora la componente toroidale coincide con la componente azimutale. Consideriamo il caso in cui le due funzioni scalari della Rappresentazione di Mie,  $P$  e  $Q$ , non dipendono da  $\phi$ , allora neanche il vettore  $\nabla Q$  ha componente  $\phi$  e giace sui piani che contengono l'asse  $z$ . La componente toroidale di  $\mathbf{B}$  è:

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{r} \times \nabla Q \quad 2.31$$

Perciò è una componente azimutale e in coordinate sferiche possiamo scrivere le due componenti nel seguente modo:

$$\mathbf{B}_P = (B_r, B_\theta, 0) \quad \mathbf{B}_T = (0, 0, B_\phi)$$

La struttura del campo geomagnetico osservabile sulla superficie terrestre e al di fuori di essa è quella originata da un campo dipolare. Questo potrebbe essere sufficiente per poter pensare a una Geodinamo stazionaria dotata di simmetria assiale, laddove in coordinate cilindriche si genererebbe una corrente toroidale  $\mathbf{J} = (0, J_\phi, 0)$  e un campo magnetico poloidale  $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$ . una struttura così semplice risulta però irrealizzabile e la sua impraticabilità viene provata dal *teorema di Cowling*, il quale asserisce come il moto di un fluido avente conducibilità elettrica finita non può generare un campo magnetico stazionario dotato di simmetria assiale. La dimostrazione per assurdo si fonda sull'assunto che in assenza di sorgenti, le linee di campo magnetico sono anelli concentrici e a mano a mano che si considerano anelli più piccoli, anche il valore di  $\mathbf{B}$  tende a diminuire ad un valore minimo nullo. Perciò esiste una circonferenza, denominata, anello neutro, sulla quale il valore del campo è nullo ma la sua esistenza non si concilia con la possibilità di misurare un valore non nullo di densità di corrente toroidale  $J_\phi$ . Per la legge di Ohm, infatti, nel sistema dell'osservatore, la corrente si può scrivere come:

$$J_\phi = \sigma \left[ \mathbf{E}_\phi + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\phi \right] \quad 2.32$$

E se consideriamo l'anello neutro ed un valore nullo di  $\mathbf{B}$ , la corrente è dovuta solo al contributo del campo elettrico. Ma se il rotore di  $\mathbf{E}$  è diverso da 0 si ha per la legge di Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad 2.33$$

Dunque,  $\mathbf{B}$  deve variare nel tempo in contraddizione con l'ipotesi di partenza. Dal teorema di Cowling si deduce, dunque, che il modello della dinamo autoalimentata analizzato precedentemente deve essere associato a un campo magnetico più complicato di uno a simmetria assiale. Nel nucleo è infatti confinata una componente toroidale del campo che non è osservabile dalla superficie, laddove questo confinamento è comprovato dal fatto che il mantello presenta un valore di conducibilità elettrica trascurabile rispetto al Nucleo e dunque è considerabile come isolante.

## 2.4 Evoluzione delle linee di campo magnetico nel tempo

Introducendo la Rappresentazione di Mie come decomposizione del campo magnetico tramite due funzioni scalari e due componenti, toroidale e poloidale, abbiamo a disposizione tutti gli elementi necessari per la descrizione del meccanismo di evoluzione delle linee di campo magnetico nel tempo. Una spiegazione fisica e dinamica, basata sul modello dinamo, del processo tramite cui si originano le linee di campo a struttura dipolare che possiamo osservare sulla superficie terrestre. Un processo dove ogni elemento e proprietà che è stata menzionata entra in gioco nella generazione del campo geomagnetico. Il punto di partenza è il teorema di Alfvén, un risultato algebricamente molto semplice ma dal profondo significato fisico:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad 2.34$$

Ovvero il flusso del campo magnetico attraverso una superficie  $S$  arbitraria è costante nel tempo. Applicandolo nell'approssimazione di conduttore perfetto, equivale a dire che le linee di forza si muovono solidamente col fluido, sono "congelate" nel fluido. Le linee di forza del campo magnetico, dunque, sono influenzate dal moto del fluido conduttore che permea lo spazio sferico del Nucleo esterno. Si ricorda che lo studio del moto del liquido nel Nucleo e la sua interazione con il campo magnetico, descritta dalla MHD, è realizzato nella condizione in cui la Forza di Coriolis, dovuta alla rotazione terrestre, è dominante. In un tale scenario, il liquido al confine tra il Nucleo esterno e il mantello e quello al confine tra il nucleo esterno e interno non ruota con la stessa velocità angolare  $\omega$ , ma entra in gioco la rotazione differenziale. Ricavata come conseguenza del principio di conservazione del momento angolare rispetto all'asse di rotazione terrestre, la rotazione differenziale prevede, a causa dei moti convettivi dovuti a differenziazione composizionale e termica, una riduzione della

velocità angolare degli strati contigui alla ICB (Inner Core Boundary) rispetto a quelli in prossimità del confine nucleo interno ed esterno e quindi una deriva verso ovest di  $0.18^\circ$  all'anno, stando alla predizione ricavata dai calcoli del modello dinamo di Elsasser. Se considerassimo un piano cartesiano bidimensionale e un campo magnetico distribuito lungo  $y$  e uniformemente ed un campo di velocità anch'esso uniforme lungo l'asse  $x$ , in questo caso osserveremmo un trascinarsi laterale delle linee di forza di  $\mathbf{B}$  senza alcuna deformazione e senza formazione di componenti di  $\mathbf{B}$  lungo  $x$ . A causa della rotazione differenziale, però, queste condizioni non si concretizzano e il campo di velocità non è uniforme. Si verifica dunque che nella zona dove si riscontra un valore di velocità maggiore, anche il trascinarsi delle linee di forza di  $\mathbf{B}$  è maggiore. In questo caso, si osserva una deformazione che dà vita a una componente del campo magnetico lungo la direzione della velocità del fluido, mentre la componente lungo  $y$  rimane immutata. Il meccanismo è mostrato in Fig.2.5:

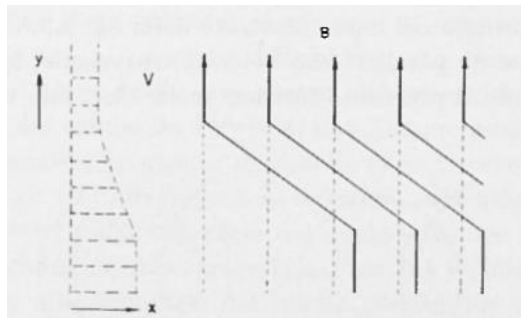


Figura 2.5: grafico interazione campo magnetico e velocità del fluido. (Carrigan, C. R. e Gubbins, D., 1979. La sorgente del campo magnetico terrestre)

L'energia del campo magnetico è aumentata a spese dell'energia cinetica del fluido mediante un processo di amplificazione che, applicato al campo magnetico, è conseguenza della conservazione della massa e del flusso e il cui funzionamento verrà approfondito nel prossimo capitolo.

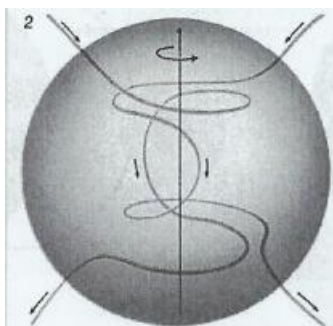


Fig. 2.6.2: formazione campo toroidale. (Carrigan, C. R. e Gubbins, D., 1979. La sorgente del campo magnetico terrestre)

A questo punto, per innescare il meccanismo di generazione del campo geomagnetico, fu necessaria l'esistenza di un campo magnetico preesistente, di natura poloidale e a struttura di dipolo, che probabilmente corrisponde al campo magnetico interplanetario (1).

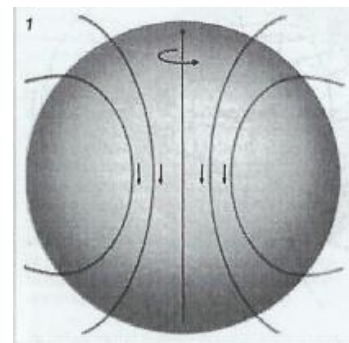


Fig. 2.6.1: campo poloidale interplanetario. (Carrigan, C. R. e Gubbins, D., 1979. La sorgente del campo magnetico terrestre)

La sua componente normale alla velocità trasversale del fluido viene dunque deformata nelle modalità descritte sopra e quest'interazione origina una componente toroidale o azimutale del campo  $\mathbf{B}$ , diretto verso ovest nell'emisfero australe e verso est nell'emisfero boreale, la cui energia dipende da quella trasferita dai moti convettivi del fluido conduttore e con un tempo di decadimento di 30000 anni. (2)

Durante questo intervallo di tempo, le linee di campo hanno avuto modo di avvolgersi più e più volte attorno al nucleo dando vita ad un campo sempre più intenso e che rimane l'unico esistente se gli sottraiamo quello dipolare. (3)

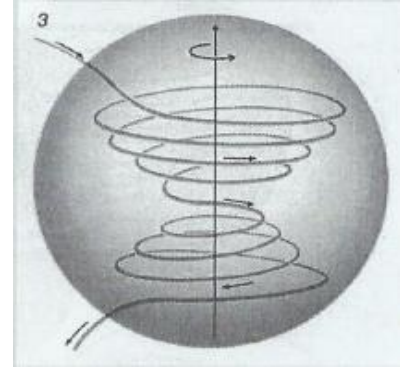


Fig. 2.6.3: campo toroidale (Carrigan, C. R. e Gubbins, D., 1979. La sorgente del campo magnetico terrestre)

Supponiamo, infatti, che a  $t = 0$  sia presente un campo poloidale in coordinate sferiche:

$$\mathbf{B}_p(r, \theta) = (B_r, B_\theta, 0) \quad \mathbf{B}_t = 0$$

Con la componente toroidale nulla. La rotazione differenziale genera un campo di velocità toroidale:

$$\mathbf{v}(r, \theta) = (0, 0, v_\phi)$$

Per la descrizione dell'interazione tra i due campi vettoriali e, quindi, tra i movimenti del Nucleo e il campo  $\mathbf{B}$ , ricorriamo all'equazione idromagnetica:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \chi_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad 2.35$$

Poiché il campo magnetico è poloidale, si ha:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p) = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_p \quad 2.36$$

e la componente toroidale dell'equazione si può scrivere come:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_T}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_P) + \chi_m \nabla^2 \mathbf{B}_T \quad 2.37$$

Ed evidenzia, come detto in precedenza, che il campo poloidale agisce come sorgente del campo toroidale o azimutale che si sviluppa mediante il trascinamento e la



deformazione delle linee di forza della componente poloidale di  $\mathbf{B}$ , come espresso dal termine avvertivo  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p)$ . Infatti, per tempi piccoli, la componente toroidale e quindi il termine diffusivo è approssimativamente nullo e l'equazione idromagnetica fornisce:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_T}{\partial t} \simeq \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p) \quad 2.38$$

Osservando le caratteristiche e la struttura del campo geomagnetico che oggi si può esaminare sperimentalmente alla superficie terrestre, appare necessario un meccanismo di rigenerazione del campo di dipolo poloidale e che questo processo di intensificazione del campo non sia illimitato. Quest'ultima condizione è risolta ricorrendo direttamente alle leggi della MHD. Con la crescita di  $\mathbf{B}_t$ , interviene nell'equazione idromagnetica anche il termine diffusivo e il processo di dissipazione delle correnti elettriche fino al raggiungimento di una situazione di equilibrio descritta dall'equazione:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p) + \chi_m \nabla^2 \mathbf{B}_T = \mathbf{0} \quad 2.39$$

Laddove, questa condizione, tramite un semplice cambio di variabile, può essere scritta:

$$R_m \nabla' \times \{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_p\} + \nabla'^2 \mathbf{B}_T = \mathbf{0} \quad 2.40$$

dove è stato introdotto il Numero di Reynolds magnetico.

La risoluzione del primo quesito, invece, riguardo alla conversione e al ritorno ad una struttura dipolare da quella toroidale del Nucleo, è una diretta conseguenza di quanto detto.

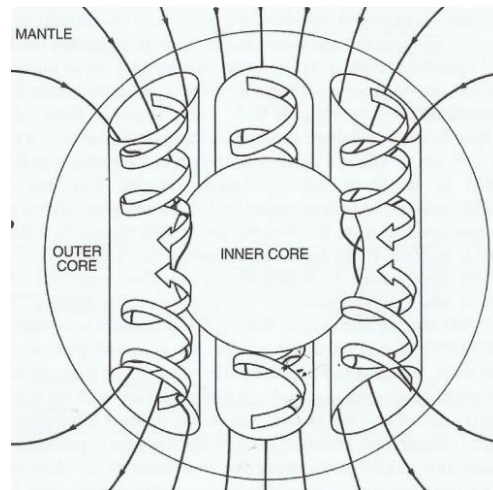
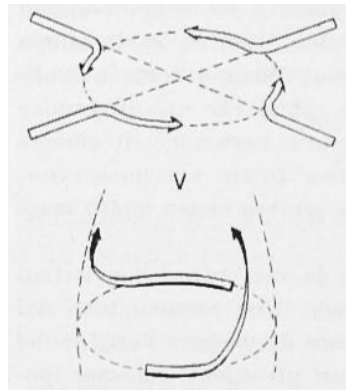


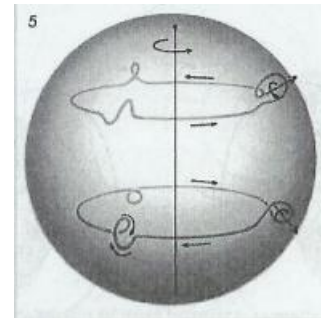
Figura 2.7: celle ascensionali del moto convettivo del fluido nel Nucleo esterno. (Brown, G., C., Mussett, A., E., The Inaccessible Earth, an integrated view to its structure and composition, 1993.)

L'ipotesi più accreditata e che è stata approvata dal mondo scientifico è legata ad una particolare struttura del moto convettivo, il quale avviene lungo celle di convezione che corrispondono a colonne di fluido secondo il fenomeno già descritto dell'elicità, come evidenziato in Fig. 2.7. La condizione di Proudman-Taylor, infatti, regola il comportamento e il moto convettivo del fluido in una cella rotante come il Nucleo. Il moto, dunque, assume la forma di cilindri o rulli paralleli all'asse di rotazione. Questa curiosa simmetria conferma la centralità del ruolo svolto dalla forza di Coriolis nella dinamica di generazione del campo. Il fluido compie quindi un moto elicoidale con la velocità scomponibile in una componente ascensionale e una trasversale, come mostrato in Fig. 2.8:



*Figura 2.8: formazione del moto elicoidale del fluido.  
(Carrigan, C. R. e Gubbins, D., 1979. La sorgente del campo magnetico terrestre)*

Questo moto elicoidale lungo le celle convettive entra in interazione con le linee di campo magnetico toroidali, dirette perpendicolarmente rispetto all'asse delle colonne, causando la loro deformazione e torsione le cui modalità sono descritte dall'effetto- $\alpha$ . Per effetto dell'elicità, una linea di campo piana viene deformata in una curva sghemba: subisce un sollevamento, seguito da una torsione e dalla formazione di una spira su un piano perpendicolare alla direzione delle linee azimutali del campo. Un segmento di retta assume dunque la forma di cappio che ruota fuori dal piano formato dalla retta e dalla velocità iniziale del liquido. (5)



*Fig. 2.6.5: formazione del cappio sul piano perpendicolare rispetto al campo toroidale. (Carrigan, C. R. e Gubbins, D., 1979. La sorgente del campo magnetico terrestre)*

Le numerose spire formatesi per diffusione interagiscono tra loro, rigenerando le linee di forza del campo poloidale a struttura dipolare di partenza. (6)

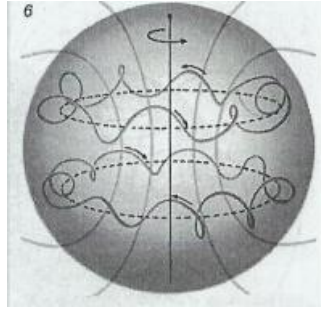


Fig. 2.6.6: rigenerazione campo poloidale. (Carrigan, C. R. e Gubbins, D., 1979. La sorgente del campo magnetico terrestre)

Data la natura solenoidale del campo magnetico toroidale, le linee di campo sono tipicamente curve chiuse oppure terminano sulla frontiera del dominio considerato.

## 2.5 Amplificazione del campo magnetico

Appurata e compresa la dinamica del processo di generazione della geodinamo come dinamo autoalimentata e come sistema a retroazione, il modello della dinamo di Bullard suggerisce che il campo geomagnetico si sia originato per amplificazione del campo magnetico interplanetario presente all'epoca della formazione del Nucleo. La permanenza del campo geomagnetico è basata sulla continua rigenerazione del campo all'interno della geodinamo, che altrimenti tenderebbe a decadere per effetto della diffusione. La rigenerazione avviene tramite processi di amplificazione del campo prodotti dal moto del metallo liquido che compone il Nucleo terrestre. Nella descrizione di questi processi occorre dare centralità al concetto di *tubo di flusso*: lo stiramento dei tubi di flusso del campo magnetico  $\mathbf{B}$  è infatti il meccanismo alla base del funzionamento della geodinamo.

Consideriamo, per un'analisi preliminare, un campo vettoriale qualsiasi, come ad esempio la velocità, per introdurre dei teoremi la cui validità potrà essere estesa anche al campo magnetico  $\mathbf{B}$ , sulla base di analogie strutturali tra i due campi vettoriali. In un fluido in moto, un *tubo di flusso* è un insieme connesso di linee di campo della velocità  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , perciò la velocità è per definizione tangente alla superficie del tubo di flusso.

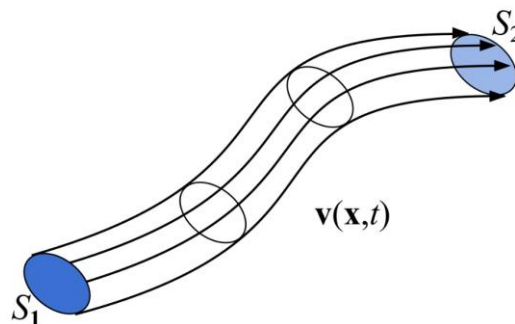


Fig. 2.9: Tubo di flusso.

Se  $\Sigma$  è una sezione del tubo, il flusso della velocità attraverso  $\Sigma$  è

$$\phi = \int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad 2.41$$

Considerando una porzione del tubo, avente volume  $V$  e superficie  $S$ , se il fluido è incompressibile e, dunque, il campo vettoriale è solenoidale, allora:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad 2.42$$

Dove  $d\mathbf{S}$  è orientato verso l'esterno di  $V$ . Come si può vedere, grazie al teorema della divergenza, si è arrivati al risultato per cui il flusso di  $\mathbf{v}$  attraverso la superficie  $S$  è nullo. Il flusso attraverso la superficie laterale del tubo è nullo per definizione in quanto i due vettori, di superficie e di velocità, sono perpendicolari tra loro. Quindi

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad 2.43$$

Dove possiamo chiamare  $\Phi_1$  il flusso, negativo, entrante nella superficie  $S_1$  e  $\Phi_2$  il flusso, positivo, uscente dalla superficie  $S_2$ . L'annullamento del flusso attraverso  $S$  implica quindi

$$-\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \quad 2.44$$

Da cui si ottiene il risultato:

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad 2.45$$

Secondo cui il flusso di  $\mathbf{v}$  attraverso una sezione  $\Sigma$  del tubo è costante lungo il tubo o, in altre parole, la portata di un tubo di flusso è costante, nel caso di un fluido incompressibile la cui divergenza è nulla, come se il tubo fosse un condotto dalle pareti solide. In generale, però la sezione di un tubo di flusso varia lungo il tubo in quanto determinata dalla geometria delle linee di campo che lo costituiscono. Queste considerazioni generali possono essere applicate a un qualsiasi campo vettoriale solenoidale. Consideriamo il caso del campo magnetico di nostro interesse. Si può estendere in maniera diretta e senza altre opportune condizioni il risultato della costanza del flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una qualunque sezione  $\Sigma$  del tubo. Ricordando che il moto del fluido conduttore nel Nucleo esterno è regolato e descritto dall'equazione idromagnetica, considerando il termine avvertivo dell'equazione, si può spiegare anche in formulazione matematica il processo di intensificazione del campo. Utilizziamo l'identità vettoriale:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad 2.46$$

Dove il termine  $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  rappresenta l'intensificazione del campo magnetico dovuta allo stiramento degli elementi del fluido. Abbiamo già visto il collegamento e l'analogia tra la vorticità  $\Omega$  e il campo magnetico  $\mathbf{B}$  nel confronto tra l'equazione di Helmholtz e l'equazione idromagnetica. Mentre nella dinamica dei vortici, l'intensificazione di  $\Omega$  è una conseguenza della conservazione del momento angolare, nella magnetoidrodinamica, l'intensificazione di  $\mathbf{B}$  deriva da una combinazione di due cause: la conservazione della massa e la conservazione del flusso di  $\mathbf{B}$  lungo il tubo. Consideriamo, infatti, un segmento di tubo di flusso magnetico: il segmento ha lunghezza  $dl$ , sezione di area  $A$  e il volume

$$dV = A dl \quad 2.47$$

Se il tuo viene stirato, la sua lunghezza aumenta; il principio di conservazione della massa impone che essa sia costante nel volume  $V$ :

$$dm = \rho dV = \rho A dl = cost \quad 2.48$$

Quindi, l'aumento della lunghezza del tubo di flusso determina una riduzione della sezione di area. Attraverso la sezione di area  $A$  passa un flusso pari a:

$$\Phi = BA \quad 2.49$$

Poiché si è visto che il flusso si conserva lungo il tubo, una diminuzione di  $A$  comporta un aumento di  $\mathbf{B}$  e dunque lo stiramento dei tubi di flusso del campo magnetico determina l'intensificazione del campo stesso ed è il meccanismo di base di una dinamo magnetoidrodinamica. Una forma tipica dei tubi di flusso magnetico è quella di toro. Alcune deformazioni che una forma del genere può subire per effetto del moto del fluido sono descritte dal Processo Stretch-Twist. Supponiamo che l'asse del toro sia parallelo all'asse  $z$  e che il toro venga stirato nella direzione  $x$ . Il tubo, quindi, subisce un assottigliamento che produce un'intensificazione di  $\mathbf{B}$ . Se il fluido ruota in maniera differenziale attorno all'asse  $x$ , allora il tubo subisce una torsione, la quale, una volta raggiunti i  $180^\circ$ , determina un aumento del gradiente di  $\mathbf{B}$ . L'aumento è così elevato che il termine diffusivo nell'equazione idromagnetica entra in gioco, producendo una riconnessione delle linee di campo magnetiche, con la formazione di due tubi di flusso distinti, con gli assi paralleli all'asse  $z$ . Se la diffusione non è così veloce, può accadere che il tubo venga ulteriormente deformato prima che la diffusione abbia effetto, con un procedimento analogo al precedente ma con la formazione di due tubi di flusso con gli assi paralleli all'asse  $y$ . Questa deformazione e riconnessione delle linee magnetiche sono i processi attraverso cui la geodinamo genera un campo geomagnetico.



# Capitolo 3

## Inversione della polarità del campo geomagnetico

### 3.1 Risposta della materia ad un campo magnetico esterno

In questo capitolo verrà analizzato il processo di inversione della polarità del campo geomagnetico. Le prove che abbiamo a disposizione dimostrano come si tratti di un fenomeno avvenuto varie volte nel corso dei millenni e la cui frequenza e la cui durata non sembrano seguire un andamento periodico. Prima di giungere alla descrizione e all'analisi del meccanismo di inversione, è necessario fare riferimento a comportamenti della materia esposta all'azione di un campo magnetico applicato dall'esterno. Lo studio e le scoperte fatte in ambito chimico-fisico sulla risposta della materia e dei suoi costituenti sono stati la base per lo sviluppo di una disciplina denominata Paleomagnetismo, i cui sviluppi hanno contribuito a corroborare l'ipotesi di inversione della polarità del campo geomagnetico. È risaputo che la materia, solida, liquida o aeriforme, è composta da atomi, al cui interno ruotano, in orbite approssimabili a circonferenze, gli elettroni. La struttura atomica determina l'insorgere di momenti magnetici, le cui sorgenti possono essere due: il moto orbitale e gli spin disaccoppiati. Questi momenti interagiscono con un campo magnetico applicato dall'esterno, dando vita a una magnetizzazione indotta. Consideriamo inizialmente il contributo dovuto alle orbite che gli elettroni tracciano con il loro moto. Il vettore momento angolare degli elettroni è associato ad un vettore momento magnetico  $m$ . Quando un campo magnetico esterno viene applicato, questo esercita un momento torcente sul momento magnetico  $m$ . La variazione risultante sul vettore momento angolare orbitale corrisponde a una variazione del vettore momento magnetico  $\Delta m$ . Tale variazione si verifica sempre in opposizione al campo magnetico applicato. Ricerche sull'argomento hanno poi evidenziato come la magnetizzazione indotta  $M$  è direttamente proporzionale al campo applicato dall'esterno, che possiamo indicare con il simbolo  $H$ , tramite la costante di proporzionalità  $\chi$ , denominata *suscettività magnetica* e che dipende dal tipo di materiale preso in esame. La relazione tra le due grandezze è esprimibile, dunque, secondo la seguente formula:

$$M = \chi H \quad 3.1$$

Occorre, a questo punto, discernere tre diverse risposte che la materia e i suoi costituenti possono, in relazione all'applicazione di un campo magnetico esterno, far registrare. Si osservano un comportamento diamagnetico, paramagnetico o ferromagnetico. Nel caso di una risposta diamagnetica della materia, si registra un valore negativo della suscettività

indipendente dalla temperatura. La risposta diamagnetica è riscontrabile in tutte le sostanze tuttavia per alcuni materiali i cui atomi possiedono dei momenti magnetici atomici non nulli, il comportamento diamagnetico è dominato dall'interazione tra il campo magnetico esterno e i momenti magnetici appena citati. Solo nelle sostanze in cui gli orbitali sono totalmente occupati e, dunque, non si osservano spin disaccoppiati, il diamagnetismo prevale. Molte molecole, tuttavia, possiedono un numero dispari di elettroni o alcune configurazioni elettroniche non prevedono la compensazione degli spin, cosicché molti materiali presentano un comportamento paramagnetico, dovuto alla presenza di spin disaccoppiati negli orbitali di valenza. Il loro comportamento è assimilabile a quello di dipoli magnetici, il cui momento ha un valore uguale al Magnetone di Bohr, costante ricavata nell'ambito della meccanica quantistica ed uguale al rapporto  $e\hbar/2m_e$ . In assenza di un campo esterno o in assenza di *interazione di scambio*, gli spin sono generalmente orientati in maniera casuale e disordinata. Questo comporta l'azzeramento complessivo del momento magnetico del sistema. Una perturbazione del sistema si verifica nell'istante in cui viene attivato un campo magnetico esterno. L'effetto che si osserva è un allineamento parziale degli spin, determinando l'insorgere di una magnetizzazione netta espressa ancora dalla (3.1) ma con suscettività positiva. Il modello su cui poggiano le assunzioni che fino ad ora sono state menzionate è stato introdotto da P. Langevin nel 1905. Si tratta di un primo modello in grado di riprodurre il fenomeno paramagnetico ma che è stato perfezionato successivamente da Landau, ricorrendo ad una trattazione quantistica del meccanismo in questione. Langevin si è limitato ad una descrizione fondata sui principi costituenti della meccanica classica che, nonostante ciò, riesce a spiegare le cause del fenomeno paramagnetico. La teoria di Langevin si basa sui seguenti assunti:

1. ogni spin disaccoppiato contribuisce alla risposta paramagnetica e al dipolo magnetico;
2. in assenza di un campo esterno, domina l'energia termica e la conseguente vibrazione del reticolo cristallino, le quali determinano la casualità delle orientazioni dei singoli momenti magnetici atomici;
3. l'applicazione di un campo magnetico esterno esercita un momento torcente sui momenti magnetici atomici, laddove l'energia magnetica di un momento magnetico in presenza di un campo  $B$ , ruotato di un angolo  $\theta$ , risulta essere:

$$E = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -mB \cos \theta \quad 3.2$$

Si osserva dunque che l'energia magnetica è minima quando il momento magnetico è allineato con il campo esterno;

4. per ogni valore di  $B$  e della temperatura  $T$ , occorre confrontare l'entità di entrambe l'energia magnetica e l'energia termica, per stimare quale delle due domina sull'altra, in modo tale da prevedere il comportamento del materiale.

Per stimare un confronto tra le due energie in gioco, magnetica e termica, consideriamo un momento magnetico atomico immerso in un campo magnetico esterno di intensità pari a  $10^{-2}T$ , un campo di modulo elevato posto a confronto con il massimo valore di campo geomagnetico alla superficie terrestre dell'ordine di  $65\mu T$ . Stimando invece una temperatura di 300K, considerato il valore più vicino a quello associato all'ambiente, il risultato ottenuto è una energia termica di vari ordini più grande rispetto all'energia magnetica, responsabile dell'allineamento dei momenti magnetici atomici e, di



conseguenza, il valore di magnetizzazione, nel caso specifico di materiale a risposta paramagnetica, è di piccola entità nonostante l'assunzione di campo esterno intenso. Il terzo caso che verrà analizzato e oggetto di studio, come suddetto, del Paleomagnetismo è la risposta ferromagnetica. I geofisici specializzati nello studio dell'evoluzione del campo magnetico nel tempo si avvalgono della particolare proprietà di alcune sostanze come il Ferro di conservare memoria del campo in un'epoca passata. A differenza delle due risposte studiate e citate in precedenza, diamagnetica e paramagnetica, il ferromagnetismo determina lo sviluppo di una forte magnetizzazione in presenza di un campo magnetico esterno, che persiste anche in assenza di esso. Questa magnetizzazione prende il nome di *magnetizzazione spontanea* o *residua* e la sua origine è da ricercare nell'interazione tra i dipoli magnetici atomici, tale da mantenerli allineati tra loro e con il campo magnetico esterno. In assenza di essa, infatti, i dipoli si orienterebbero in maniera random. Responsabile di questo allineamento è *l'interazione di scambio*, comprensibile solo in chiave quantistica, essendo essa legata alla repulsione elettrone-elettrone e al Principio di Esclusione di Pauli. L'energia di scambio, che a differenza di quella dipolare, è a corto raggio e più intensa, è infatti minimizzata quando gli spin sono allineati parallelamente o anti-parallelamente tra loro e questo è garantito da tale principio che prevede la presenza di massimo due elettroni per orbitale, garantendo una differenza di spin nel set di numeri quantici del sistema. La repulsione coulombiana tra elettroni, dunque, favorisce l'allineamento degli spin degli elettroni per minimizzare l'energia di scambio, formando i vari domini di Weiss, all'interno dei quali gli spin sono tutti paralleli ma ordinati casualmente rispetto ai domini contigui. Nel momento in cui viene applicato un campo magnetico esterno, questo genera un momento torcente sugli spin nei domini, i quali tendono a ruotare e allinearsi nella direzione di  $\mathbf{B}$ , determinando l'insorgere di una forte magnetizzazione. Attenuando gradualmente l'intensità del campo esterno, si osserva un fenomeno di riduzione della magnetizzazione fino a quando scompare il campo esterno e la sostanza in esame conserva memoria del campo precedente e mantiene un valore non nullo e positivo di magnetizzazione. Se si inverte, successivamente, la polarità di  $\mathbf{B}$ , il valore di magnetizzazione tende di nuovo ad aumentare in modulo ma con segno negativo. Questo processo è rappresentato nel ciclo di isteresi il cui grafico è riportato:

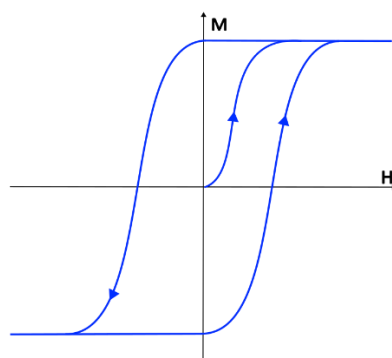


Fig. 3.1: Ciclo di Isteresi magnetica.

Nel caso ferromagnetico, le energie di scambio sono grandi, equivalenti all'energia associata ad uno stesso momento in un campo magnetico dell'ordine di 1000 T. Nel confronto, dunque, con l'energia termica, quest'ultima risulta trascurabile. Nonostante

ciò, il comportamento ferromagnetico di una sostanza è influenzato dal fattore termico. Esiste infatti un valore di temperatura, che varia da sostanza a sostanza, denominato Temperatura di Curie, al di sopra del quale l'agitazione termica determina un disturbo alla struttura di spin e la rottura dei legami nei domini di Weiss. L'energia termica, a questo punto, prevale sull'energia di scambio e il materiale assume un comportamento paramagnetico.

## 3.2 Paleomagnetismo

Dopo aver presentato le tre possibili risposte che la materia può registrare a seguito dell'interazione con un campo magnetico esterno, è necessario introdurre un ramo della geofisica, il Paleomagnetismo, una disciplina che studia la magnetizzazione residua delle formazioni rocciose e consente di ricostruire la storia magnetica della Terra. Come visto e analizzato nel paragrafo precedente, il Paleomagnetismo è basato sulla proprietà delle rocce contenenti minerali ferromagnetici di magnetizzarsi in maniera permanente all'epoca della loro formazione sotto l'azione del campo geomagnetico presente in quell'epoca. Il punto di partenza degli studi in merito a questa disciplina fu segnato dalla scoperta di particolari anomalie negative, derivanti da formazioni rocciose ignee localizzate in specifiche aree del globo. Secondo le premesse fatte nel paragrafo sulla risposta della materia, enunciate precedentemente, le rocce, composte da minerali ferromagnetici, danno vita, in presenza di un campo magnetico esterno, nel nostro caso quello geomagnetico, ad una intensa magnetizzazione la cui direzione è concorde con quella di  $B_{est}$ . Si registra dunque una forte amplificazione dell'intensità del campo in quella particolare regione che si traduce in marcate anomalie positive. La scoperta di anomalie negative ha dato avvio allo sviluppo di ricerche, per scoprire, prima dal punto di vista teorico e in seguito riproducendolo sperimentalmente, quali fossero le possibili cause. La presenza di anomalie negative fu, in seguito, confermato sperimentalmente analizzando particolari campioni di formazioni rocciose estratte nelle regioni in cui tale fenomeno era stato registrato. Lo studio delle cause di un fenomeno che avrebbe potuto mettere in discussione l'impianto geofisico alla base dell'analisi del campo geomagnetico, condusse alla formulazione di due ipotesi, auto-escludenti tra di loro. La prima ipotesi fu quella del fenomeno dell'autoinversione, secondo cui, tramite processi chimico-fisici interni alle formazioni rocciose, esse hanno acquisito una magnetizzazione inversa rispetto a quella del campo applicato. Nelle prime fasi delle ricerche, agli studiosi questa appariva come l'ipotesi più plausibile, confermata dalla scoperta di una roccia, la dacite del monte Haruna, in Giappone, che presentava il fenomeno dell'autoinversione. Esperimenti di termomagnetizzazione su questa roccia evidenziarono un comportamento anomalo di alcuni minerali al suo interno: la sua direzione di magnetizzazione era ruotata di  $135^\circ$  rispetto alla direzione del campo geomagnetico di attuale. Una rotazione imperfetta che però, riprodotta in laboratorio, si completava fino a raggiungere un angolo di  $180^\circ$ , quindi opposto rispetto a quello iniziale. Questa prova, unita ad esperimenti e ricerche più approfondite che condussero molti geofisici a comprendere dal punto di vista chimico le modalità e la causa di tale comportamento, indusse molti scienziati ad avallare l'ipotesi dell'autoinversione. Tuttavia, processi di termomagnetizzazione applicati su altri campioni di formazioni rocciose, sia ignee che di origine sedimentaria, non condussero allo stesso risultato e non mostravano evidenze osservative del fenomeno

dell'autoinversione. Non solo, dunque, la dacite era l'unica formazione rocciosa ignea a vantare questa capacità di invertire la magnetizzazione residua, ma appariva ancora più complesso estendere tale spiegazione al caso delle rocce sedimentarie. Gli studiosi, perciò, furono orientati a concentrare le ricerche su una seconda ipotesi: se l'anomalia negativa non era il risultato di un'inversione della magnetizzazione della materia, allora ad invertirsi avrebbe dovuto essere la polarità del campo geomagnetico. La dimostrazione della validità di questa ipotesi doveva corrispondere al rispetto di alcuni criteri su cui essa poggia e che andrò ad elencare. Il primo principio è quello della *contemporaneità*, in quanto la polarità del campo influenza contemporaneamente tutto il globo; dunque, esperimenti condotti su campioni di formazioni rocciose coeve e localizzate in diverse parti della Terra avrebbero dovuto conservare memoria della stessa inversione di polarità. Negli ultimi decenni, questo processo complicato di correlare cronologicamente vari campioni di rocce geograficamente distanti l'uno dall'altro è stato semplificato dall'introduzione di un metodo radiometrico, che permette di acquisire una datazione assoluta dei campioni in esame. Il secondo principio è quello dell'*omogeneità*: il campo geomagnetico, a meno di alcune variazioni di piccola entità, è uniforme e dunque la magnetizzazione che si deve registrare in laboratorio deve essere la stessa in ogni punto della formazione rocciosa, tenendo conto di alcune reazioni chimiche o variazioni di grandezze fisiche a cui la roccia può essere andata in contro durante il suo ciclo vitale. Il terzo criterio è lo studio delle *zone di transizione*: appurata la validità dell'ipotesi dell'inversione del campo geomagnetico, se è esistita un'epoca in cui il campo aveva una certa polarità, preceduta da un'altra con polarità opposta, necessariamente alcuni campioni di rocce devono presentare tracce di magnetizzazione di transizione dalla prima alla seconda. L'aspetto che sarà precisato nel prossimo paragrafo è la modalità con cui si verifica tale transizione, tramite una rotazione dell'asse del dipolo e un intervallo di tempo in cui il campo magnetico ha assunto un valore di intensità prossima allo zero, ma non nullo per la presenza dei termini non dipolari. Alla luce di questi criteri, i dati sperimentali mostrano che la situazione del campo geomagnetico negli ultimi cinque milioni di anni appare un susseguirsi di una ventina di periodi a polarità opposte frammentate da brevissimi periodi di transizione.

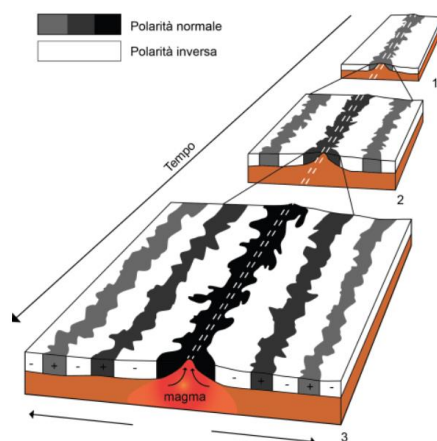


Fig. 3.2: analisi magnetica dell'espansione dei fondali oceanici. (INGV ambiente)

Un'altra conferma della validità dell'ipotesi dell'inversione della polarità del campo geomagnetico deriva dallo studio dell'espansione dei fondi oceanici, sulla base delle

ricerche realizzate dal geologo Hammond Hess ed alla pubblicazione nel 1960 del volume in cui esponeva i fondamenti e le dinamiche di tale espansione. Analisi magnetiche hanno infatti evidenziato la presenza di anomalie magnetiche nelle prossimità delle dorsali oceaniche sottomarine. Le rocce basiche poste ai lati della dorsale mostravano infatti la presenza di bande magneticamente anomale, di larghezza e spessore variabili e caratterizzate da polarità invertite, rese visibili tramite la solidificazione dei minerali ferrosi, costituenti della lava basaltica. La lava, magnetizzata nel verso del campo esistente in quell'epoca, fuoriuscita dalla dorsale da ambo i lati della fenditura, si espande lateralmente sostituendo quella effusa in un periodo antecedente. In questo modo, in seguito a un processo di solidificazione, i minerali ferromagnetici che costituivano uno dei costituenti della lava effusa, conservavano memoria della direzione e del verso del campo presente in quel momento. Il segno delle anomalie, dunque, rappresenta la polarità del campo mentre la distanza tra le bande anomale e la dorsale è una misura dell'età di quel periodo di polarità. La scoperta e lo sviluppo della teoria dell'espansione dei fondali oceanici correlato all'analisi chimica e magnetica dei minerali ferromagnetici hanno costituito un'importante conferma del processo di inversione della polarità e della confutazione dell'autoinversione, non della sua validità generale ma almeno per quanto riguarda quella ristretta alla spiegazione della presenza di determinate anomalie magnetiche.

### 3.3 Dinamo di Rikitake

Come riportato nel precedente capitolo della descrizione del modello dinamo come rappresentazione del funzionamento della geodinamo e delle dinamiche del Nucleo esterno, il modello del disco di Bullard fu proposto nel 1955 e venne riconosciuta la sua valenza e la sua importanza illustrativa dei meccanismi della dinamo terrestre. Quello di Bullard, tuttavia, è un modello cinematico, in cui il campo di velocità è noto e non viene posto come variabile del problema. Anche per questo motivo, non è in grado di simulare un comportamento non lineare e caotico della dinamo ma la sua utilità è limitata alla descrizione essenziale dell'interazione tra la componente elettrica e magnetica del fluido. La dinamo di Rikitake è stata proposta come modello più avanzato della dinamo di Bullard nel 1958 in grado di esibire spontaneamente inversioni della polarità del campo. Solo nel 1970, due scienziati Cook e Roberts riuscirono a dimostrare che questo modello dava origine a una dinamica caotica e non lineare. L'importanza di tale modello risiede nel riconoscere come le inversioni del campo geomagnetico non richiedano una causa specifica ma siano il risultato dall'imprevedibilità di un sistema caotico. Anticipando le analisi che riporterò in questo capitolo, l'analogia tra il modello di Rikitake e la geodinamo è stata oggetto di studio per molti anni, e la conclusione a cui il mondo scientifico è pervenuto riguarda l'impossibilità da parte di un "low-order system", come quello di Rikitake, di descrivere i complessi processi magnetoidrodinamici che hanno sede all'interno della Terra e di riprodurre i dati ottenuti. Il suo interesse e la sua valenza sono per lo più storiche e dimostrative nel ricreare un accoppiamento non-lineare e l'alternarsi di una risposta periodica e caotica. La differenza tra il modello di Bullard e quella di Rikitake è la presenza di un'ulteriore dinamo, in modo tale da riprodurre la mutua interazione dei due campi magnetici generati, rispettivamente a periodo breve e lungo. Le due dinamo sono in mutua interazione tra loro dando origine a correnti

elettriche che generano campi magnetici e campi elettrici, i quali tramite fenomeni di autoinduzione producono oscillazioni di campo sulla seconda dinamo. La dinamica è irregolare e imprevedibile con ricorrenza infinita di inversioni e caratterizzata da una forte dipendenza dalle condizioni iniziali, tanto da poter osservare il susseguirsi di comportamenti periodici e caotici variando il valore di alcuni parametri del sistema.

La dinamo di Rikitake è composta da due dischi simmetrici rotanti con velocità angolari rispettivamente  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Per semplicità di notazione, le equazioni e le grandezze relative alle due dinamo saranno classificate tramite i pedici 1 e 2. Sulle due dinamo sono applicati due momenti torcenti  $G$ , di uguale intensità in modo da contrastare le dissipazioni ohmiche. Ogni dinamo è costituita da un asse di rotazione, un disco e un filo in cui scorre corrente, tutti fatti dello stesso materiale conduttivo. Questi tre elementi vanno a creare un circuito elettrico chiuso, con il filo in contatto con l'estremità del disco da una parte e con l'asse dall'altra. Limitandomi allo studio del comportamento statico, la corrente  $i_1$  attraversa l'anello sulla destra e ruotando in senso orario, genera un campo magnetico  $\mathbf{B}_2$ , di segno positivo se diretto verso il basso. Il campo magnetico generato attraversa la superficie rotante e elettricamente conduttrice del disco 2 e tramite un fenomeno di induzione elettromagnetica genera un campo elettrico di modulo  $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  con direzione radiale verso l'asse di rotazione. Il campo elettrico indotto dà origine a una corrente elettrica  $i_2$  che opera con la stessa modalità della corrente nella prima dinamo generando un campo magnetico  $\mathbf{B}_1$ . Nel caso statico l'equazione che descrive il circuito appena realizzato è la seguente:

$$RI_2 = M\Omega_2 I_1 \quad 3.3$$

Dove  $R$  è la resistenza di uno dei due circuiti e  $M$  è la mutua induttanza dell'interazione tra le correnti elettriche di entrambi i circuiti e il disco conduttore elettricamente. Le interazioni tra correnti e campi magnetici nei due dischi producono un momento che, all'equilibrio, bilancia quello applicato secondo l'equazione:

$$\mathbf{G} = MI_1 I_2 \quad 3.4$$

Analizzando il processo dinamico della dinamo di Rikitake, da uno studio esclusivamente elettromagnetico si ricavano le equazioni differenziali che governano la sua dinamica:

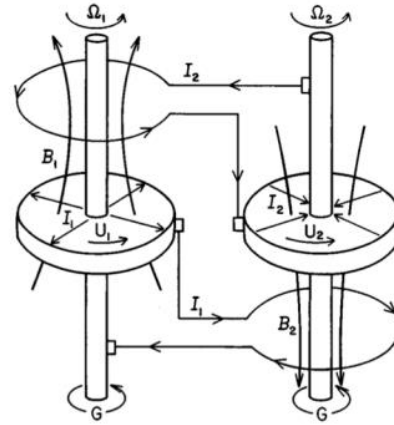


Fig. 3.3: Dinamo di Rikitake (Donald L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, 1997)

$$\begin{aligned}
L \frac{dI_1}{dt} + RI_1 &= M\Omega_1\Omega_2 \\
L \frac{dI_2}{dt} + RI_2 &= M\Omega_1\Omega_2 \\
C \frac{d\Omega_1}{dt} &= \mathbf{G} - MI_1I_2 \\
C \frac{d\Omega_2}{dt} &= \mathbf{G} - MI_1I_2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

dove  $C$  è il momento di inerzia di ciascun disco e  $\mathbf{G}$  è il momento che fa ruotare ciascun disco. Le ultime due equazioni del sistema possono essere sottratte membro a membro e successivamente integrate ottenendo l'equazione:

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \Omega_0 \tag{3.6}$$

Dove  $\Omega_0$  è una costante e quest'equazione può semplificare il sistema, sostituendola a una delle due equazioni (3) o (4).

Come ulteriore semplificazione del sistema in esame, è possibile adimensionalizzarlo mediante l'introduzione di variabili e parametri:

$$\begin{aligned}
\tau &= \left(\frac{GM}{LC}\right)^{1/2} t; \quad X_1 = \left(\frac{M}{G}\right)^{1/2} I_1; \quad X_2 = \left(\frac{M}{G}\right)^{1/2} I_2; \quad Y_1 = \left(\frac{CM}{LG}\right)^{1/2} \Omega_1; \\
Y_2 &= \left(\frac{CM}{LG}\right)^{1/2} \Omega_2; \quad A = \left(\frac{CM}{LG}\right)^{1/2} \Omega_0; \quad \mu = \left(\frac{CR^2}{GLM}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Dove al primo membro di ciascuna equazione sono definite le variabili che verranno analizzate successivamente e entreranno in gioco nel sistema 3.8.

Sostituendo le variabili appena definite all'interno del sistema, si ricavano 3 equazioni differenziali di forma semplificata e risolvibili:

$$\begin{aligned}
\frac{dX_1}{d\tau} + \mu X_1 &= Y_1 X_2 \\
\frac{dX_2}{d\tau} + \mu X_2 &= (Y_1 - A) X_1 \\
\frac{dY_1}{d\tau} &= 1 - X_1 X_2 \\
Y_2 &= Y_1 - A
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Abbiamo ridotto lo studio del problema dinamico all'analisi di un sistema di equazioni differenziali non lineari che determinano l'evoluzione temporale della dinamo di Rikitake. Ponendo l'attenzione alle ultime due equazioni, si possono ricavare contemporaneamente l'andamento delle due funzioni  $Y_1$  e  $Y_2$ . Portando tutti i termini che

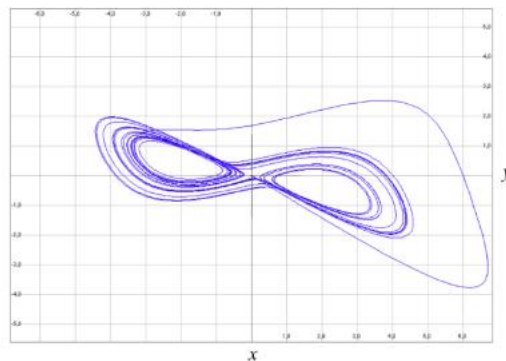
non compaiono sotto forma di derivata al secondo membro, si può considerare il set di equazioni formulate nel seguente modo:

$$\dot{x} = f(x) \quad 3.9$$

Dove  $f(x)$  è il campo vettoriale associato alla derivata della funzione  $x$ . Imponendo ora l'annullamento del campo vettoriale o equivalentemente della derivata prima, si richiede la condizione di ricerca dei punti di equilibrio della funzione in esame nel caso stazionario. Le soluzioni stazionarie ottenute sono le seguenti:

$$\begin{aligned} X_1 &= \pm K \\ X_2 &= \pm K^{-1} \\ Y_1 &= \mu K^2 \\ Y_2 &= \mu K^{-2} \end{aligned} \quad 3.10$$

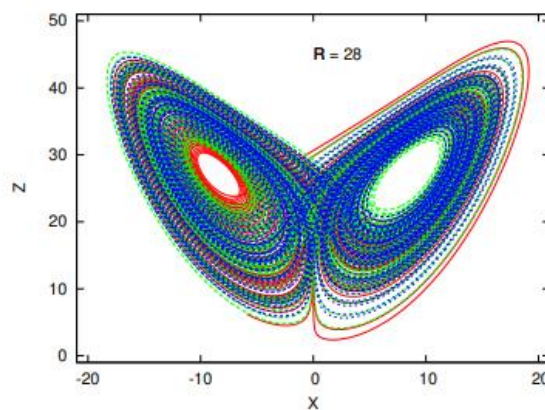
dove  $K$  e  $\mu$  sono denominati parametri di Ljapunov e tali per cui  $A = \mu(K^2 - K^{-2})$ . I due segni positivo e negativo associati alle due variabili  $X_1$  e  $X_2$  si riferiscono rispettivamente alle due opposte orientazioni della polarità del campo geomagnetico. Mediante un processo di linearizzazione delle equazioni differenziali e adottando l'approssimazione di considerare solo i termini lineari dello sviluppo di Taylor, si può ridurre lo studio delle equazioni ottenute nel sistema ad un problema di autovalori e autovettori. Questo procedimento consente una semplificazione nella ricerca e nella classificazione dei punti di equilibrio, calcolati precedentemente, secondo la loro stabilità. Non riporterò i calcoli eseguiti ma è possibile dimostrare che i punti singolari trovati sono instabili per tutti i valori assunti dai parametri di Ljapunov. (Cook e Roberts, 1970)



*Fig. 3.4: Soluzione numerica della Dinamo di Rikitake nello spazio  $X_1X_2Y_1$  proiettato nel piano  $X_1X_2$ .*

In Fig. 3.4 è raffigurata nel piano  $(X_1, X_2)$  una traiettoria del sistema per valori dei parametri  $\mu = 1$  e  $K = 2$  e, di conseguenza,  $A = 3.75$ . Interessante notare l'avvolgimento della traiettoria del sistema complesso intorno ai due punti di equilibrio corrispondenti alla polarizzazione positiva e negativa del campo magnetico  $X_1 = \pm 2$  e  $X_2 = \pm 0.5$ . L'evoluzione del sistema in esame è molto simile all'andamento descritto dal modello di Lorenz, il primo modello che prevedeva, mediante una semplificazione delle equazioni

differenziali e non lineari in gioco, un comportamento caotico e imprevedibile del sistema. Prendendo in esame il problema della convezione nell'atmosfera terrestre, si rese conto che il comportamento del sistema era fortemente influenzato dalle condizioni iniziali. Lorenz riuscì a semplificare le equazioni di Navier-Stokes e del calore, riducendo lo studio del sistema alla considerazione di ogni punto di uno spazio tridimensionale come uno stato del sistema e seguendo la traiettoria del campo vettoriale, era in grado di ricostruire l'evoluzione temporale del sistema. Partendo da due modelli di atmosfera che differivano solo per il valore di alcuni parametri ma con condizioni iniziali quasi identiche, Lorenz si accorse che le due evoluzioni temporali portavano le loro evoluzioni a differenziarsi in maniera significativa. Fu Lorenz il primo a introdurre il concetto di caos e formularlo matematicamente in un modello fisico. (Leo, 2020)



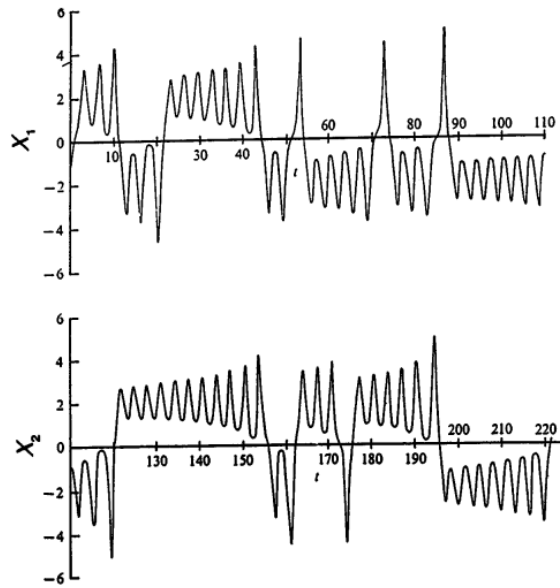
*Fig. 3.5: Attrattore di Lorenz.*

Il comportamento caotico è regolato dalle seguenti condizioni: (Devaney, 1989) (Banks, Brooks, Cairns, Davis, Stacey, 1992)

- dipendenza sensibile dai dati iniziali;
- transitività topologica;
- distribuzione densa delle orbite periodiche.

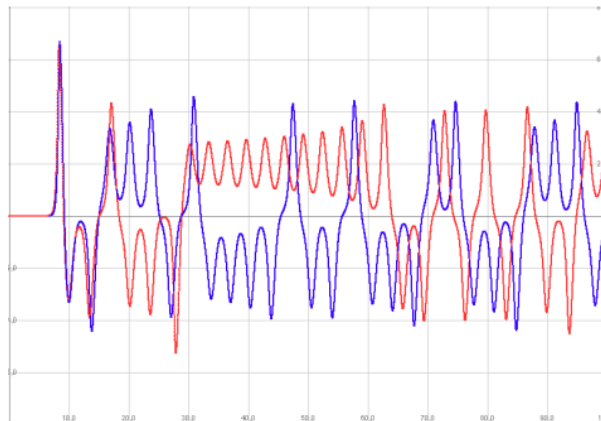
Qualitativamente, la prima proprietà afferma che data una qualsiasi orbita, ce n'è sempre almeno un'altra che parte vicino alla prima, ma se ne distacca in un istante di tempo indefinito; la seconda proprietà prevede che due regioni nello spazio delle fasi siano collegate da almeno una traiettoria che esca dalla prima ed entri nella seconda; la terza implica che per ogni punto nello spazio delle fasi esista almeno un'orbita che gli passi arbitrariamente vicino. Anche l'evoluzione temporale delle soluzioni del sistema nel modello di Rikitake 3.10, raffigurata in Fig. 3.6, ha un andamento simile a quello delle equazioni di Lorenz. Si può osservare come le oscillazioni crescono di intensità in una determinata polarità fintanto che si verifica l'inversione e incrementa nuovamente la sua ampiezza fino alla inversione successiva. L'andamento che si delinea è irregolare ma non appare essere casuale.





*Fig. 3.6: Evoluzione temporale di  $X_1$  e  $X_2$ . (Donald L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, 1997)*

Come conferma della dinamica caotica della dinamo di Rikitake, è riprodotto lo stesso andamento della variabile  $X_1$ , vista in precedenza, per condizioni iniziali quasi identiche, evidenziando dunque la dipendenza del sistema dalle condizioni iniziali imposte.



*Fig. 3.7: rappresentazione di due traiettorie temporali con condizioni iniziali quasi identiche. (Enrico Cameron, *Tre modelli di dinamica caotica nelle scienze della Terra*)*

Interessante notare come le due traiettorie raffigurate si sovrappongono per istanti di tempo prossimi allo zero e si allontanano l'una dall'altra per istanti successivi a causa di valori di condizioni iniziali che si discostano solo leggermente tra loro. (Ito, 1980) Riassumendo quanto detto finora, Rikitake propose un modello che esibiva il fenomeno di inversione di polarità del campo. Fu però solo successivamente agli studi di Cook e Roberts nel 1970 che fu scoperto il carattere caotico, oltre a quello periodico, del modello.

La transizione dall'andamento periodico a quello caotico è mostrata nel diagramma di biforcazione nella Fig. 3.8.

In Fig. 3.8 è raffigurato un diagramma di biforcazione fissando il valore della variabile  $K$  a 2 e facendo variare quello di  $\mu$ . La variabile  $x$  è una funzione delle variabili del sistema e i valori assunti, al variare di  $\mu$ , sono evidenziati in figura. Il modello dinamico di Rikitake ha avuto un ruolo primario come precursore degli studi sul meccanismo di inversione della polarità del campo, di come una dinamo autoalimentata possa esibire un tale fenomeno e ha avuto il merito di riconoscere il carattere caotico del funzionamento della geodinamo, ma

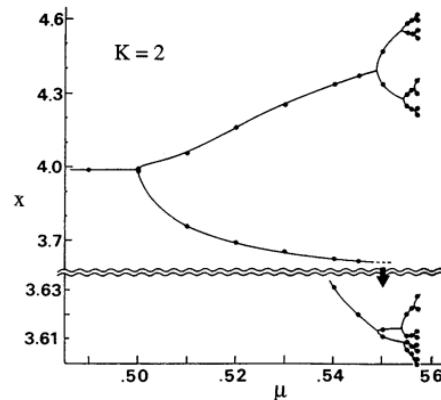


Fig. 3.8: diagramma di biforcazione che illustra la biforcazione del raddoppio del periodo che conduce la dinamo di Rikitake al caos. (Donald L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, 1997)

essendo un low-order system governato da equazioni semplificate, è ben distante dal simulare efficacemente il comportamento effettivo del campo geomagnetico. I risultati delle simulazioni effettuate sulla base di tale modello non si conciliano con i dati relativi all'effettivo processo di inversione del campo. Dagli anni '90 sono stati sviluppati modelli più realistici della geodinamo che tengono conto della convezione del fluido del Nucleo esterno e del carattere turbolento del moto. Da qui alla fine del capitolo, menzionerò alcuni di questi modelli, soffermandomi nella prossima sezione sul modello di Glatzmaier e Roberts del 1995, la prima simulazione numerica del fenomeno di inversione basata su un modello di dinamo magnetoidrodinamica. Un modello interessante è quello proposto dai due scienziati Krause e Schmidt nel 1988. In tale modello, il meccanismo di inversione viene simulato da una funzione ricorsiva di terzo ordine, la cui formulazione matematica è:

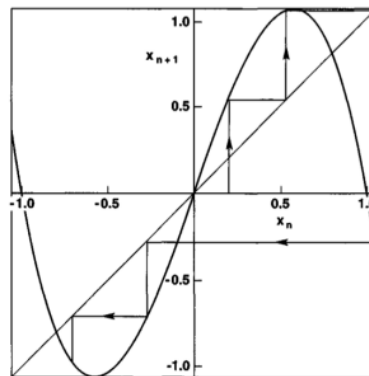
$$x_{n+1} = ax(1 - x_n^2)$$

dove la denominazione “ricorsiva” deriva dalla dipendenza dello stato del sistema  $n+1$  dalla conoscenza dello stato fisico precedente di ordine  $n$ , dove con  $n$  si indicano le iterazioni realizzate. Il merito di Krause e Schmidt è stato quello di aver introdotto un modello più semplice della dinamo a due dischi di Rikitake, un sistema con un solo grado di libertà e che presenta inversioni di segno imprevedibili della variabile  $x$ , che non necessariamente rappresenta il campo magnetico ma qualsiasi grandezza. Ripetendo i passaggi matematici, si parte dallo studio dei punti fissi della funzione ossia quei punti che sono immagine di loro stessi e di conseguenza sono punti di equilibrio della mappa ricorsiva considerata. I punti fissi in questo caso sono  $x_f = 0$  e  $x_f = \pm(1 - a^{-1})^{1/2}$ . Studiando poi la stabilità o l'instabilità dei punti fissi appena calcolati, utilizzando il criterio dei Ljapunov e la derivata prima della mappa ricorsiva calcolata in un intorno del punto fisso, si trova dunque che il punto  $x_f = 0$  è stabile per valori di  $0 < a < 1$  e instabile per  $a > 1$ . I punti fissi  $x_f = \pm(1 - a^{-1})^{1/2}$  invece sono stabili per  $1 < a < 2$  e instabili per  $a > 2$ . Per valori di  $0 < a < 3\sqrt{3}/2$  i valori di  $x$  non invertono il loro segno

mentre per valori di  $a > 3$ , la mappa non è limitata e non si possono eseguire iterazioni. Nell'intervallo  $3\sqrt{3}/2 < a < 3$  si registrano variazioni di segno di  $x$ . Studi successivi hanno mostrato una dinamica caotica delle oscillazioni nel range  $-2a/3\sqrt{3} < x < 2a/3\sqrt{3}$ . Come prova grafica di quanto detto, nelle prossime righe riporto i dati ottenuti nell'analisi della funzione ricorsiva per un valore di  $a = 2.75$  e i grafici che ne derivano, i quali evidenziano ancora una volta un comportamento caotico e imprevedibile del meccanismo di inversione. La funzione di riferimento è la seguente:

$$f(x) = 2.75x(1 - x^2)$$

Prendendo come punto iniziale di riferimento arbitrariamente  $x_0 = 0.2$ , si disegna nel piano cartesiano una linea verticale, la sua intersezione con il grafico di  $f(x)$  ci fornisce il valore dell'iterazione successiva  $x_1 = 0.528$ . Tracciando poi da tale intersezione una linea orizzontale fino ad incontrare la bisettrice del quadrante considerato si opera la transizione da  $x_{n+1}$  a  $x_n$ . ripetendo lo stesso procedimento puramente geometrico, si trova  $x_2 = 1.0472056$  e poiché, come visto in precedenza, la variabile iterata  $x$  deve rimanere nell'intervallo  $-2a/3\sqrt{3} < x < 2a/3\sqrt{3}$  affinché si possano osservare inversioni di polarità, l'iterazione successiva comporta una variazione di segno di  $x$  e, consequenzialmente, un'inversione del campo e si ottiene  $x_3 = -0.2783043$ . le iterazioni successive forniscono i due valori  $x_4 = -0.7060590$  e  $x_5 = -0.9737061$ . Questi valori sono riportati e sono visibili in Fig. 3.9:



*Fig. 3.9: iterazione della mappa ricorsiva di terzo ordine. L'inversione avviene alla terza iterazione. (Donald L. Turcotte, Fractals and Chaos in Geology and Geophysics, 1997)*

Il grafico riportato evidenzia il comportamento del sistema descritto da una formulazione matematica di una mappa ricorsiva di terzo ordine limitata alle prime 5 iterazioni. Se aumentassimo il numero delle iterazioni e considerassimo cento iterazioni, la sequenza di inversioni caotiche è evidenziata nel grafico sotto riportato:

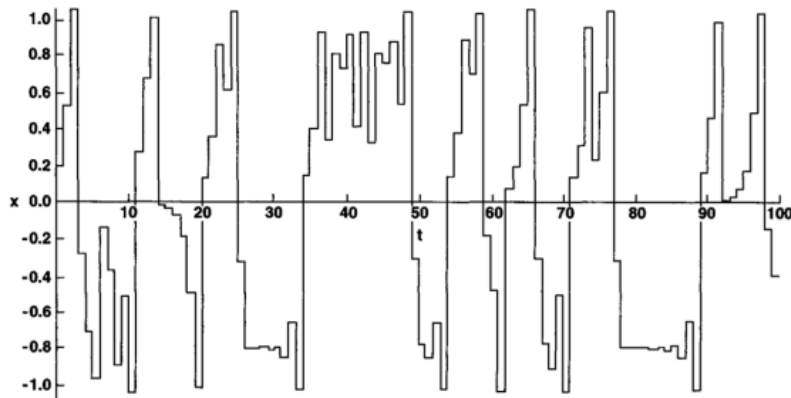


Fig. 3.10: grafico che mostra 100 iterazioni della mappa ricorsiva di terzo ordine. La sequenza di inversioni caotiche è evidente. (Donald L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, 1997)

Dove è evidente il comportamento caotico di questo sistema. Nel prossimo paragrafo, verrà analizzato il modello di Glatzmaier e Roberts, sviluppato nel 1995. Si tratta di un modello più avanzato rispetto a quelli di Rikitake e di Krause e Schmidt, in quanto considera un high-order system che meglio simula le interazioni tra le correnti elettriche e il flusso del liquido conduttore. (Turcotte, 1992)

### 3.4 Simulazione computerizzata del meccanismo di inversione

#### 3.4.1 Introduzione al modello

In questo paragrafo l'obiettivo è la presentazione e l'analisi di un modello sviluppato da Glatzmaier e Roberts nel 1995 più verosimile e più concordante con i dati empirici ottenuti rispetto a quelli proposti da Rikitake e altri scienziati. Abbiamo appurato come unificare e connettere causa e effetto nel meccanismo a cascata della generazione del campo geomagnetico è stato complesso tanto da indurre Einstein a inserirlo nella lista dei cinque più importanti problemi irrisolti nella fisica. Al giorno d'oggi sappiamo che è necessario un modello non lineare tridimensionale di Magnetoidrodinamica del nucleo terrestre per descrivere la struttura e l'evoluzione temporale del campo geomagnetico. Si possono annoverare due ragioni che spiegano quanto detto: è improbabile che modelli matematici lineari possano contribuire alla simulazione e alla riproduzione del campo geomagnetico in quanto la Terra opera nel regime di campo forte. Tali modelli registrano successi nello studio dei regimi di campo debole, dove le forze magnetiche rientrano nell'approssimazione di perturbazioni nella dinamica dei sistemi. Nel regime di campo forte, invece, la forza magnetica e non lineare di Lorentz è approssimativamente dello stesso ordine di grandezza della forza di Coriolis e pertanto tale approssimazione perde la sua validità. Il secondo motivo per cui è necessaria un'analisi matematica non lineare è una diretta conseguenza del teorema di Cowling, già enunciato nel primo capitolo, secondo cui un campo magnetico autoalimentato, prodotto da una dinamo, non può essere simmetrico rispetto a un asse. Nel corso della seconda metà del '900 sono state effettuate simulazioni numeriche di modelli di dinamo convettiva, tridimensionale e autoalimentata, molte delle quali adottando un approccio geometrico planare, sul piano cartesiano, per studiare l'azione locale della dinamo e nella restante parte ricorrendo a una geometria

globale o sferica per analizzare la dinamo solare. Tuttavia, gli unici modelli che hanno generato energia magnetica di magnitudo maggiore rispetto all'energia cinetica e, pertanto, sono riusciti ad operare nel regime di campo forte sono i modelli recenti di St. Pierre (1993) e Kageyama (1995). Negli altri modelli sviluppati si riscontra un valore di energia cinetica maggiore di alcuni ordini di grandezza rispetto all'energia magnetica. Quello che presenterò è un modello simulato computerizzato tridimensionale e autoalimentato di un meccanismo di dinamo convettiva e in regime di campo forte in un dominio sferico con un valore finito di conducibilità elettrica associato al nucleo interno. In questo modello, l'effetto della diffusione viene contrastato efficacemente e il campo magnetico si conserva rigenerandosi e autoalimentandosi per più di tre intervalli di tempo di diffusione e genera un valore di energia magnetica di tre ordini di grandezza superiore rispetto a quello di energia cinetica del moto convettivo del fluido. I grafici che inserirò evidenzieranno come tale modello preveda il verificarsi di inversione di polarità del campo alla fine della simulazione. L'attenzione sperimentale è dunque rivolta al meccanismo di inversione ma considerando un solo campione di inversione, non si può dedurre nessuna conclusione riguardo al comportamento generale. L'esito degli esperimenti realizzati è la raccolta di dati che ben riproducono in maniera verosimile la dinamica della geodinamo.

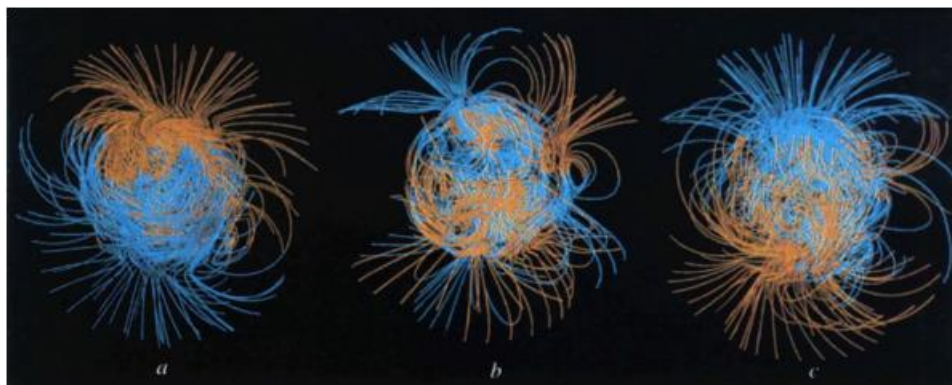
### 3.4.2 Descrizione del modello

Il modello numericamente risolve le equazioni della MHD che governano l'interazione tra i campi elettrico e magnetico nel Nucleo e l'evoluzione temporale del fluido conduttore sottoposto a convezione termica e composizionale, come analizzato nei precedenti capitoli. La dinamica simulata dal modello è dunque conforme al processo reale osservato, con una leggera variazione dei dati impostati come condizioni iniziali. I valori associati a grandezze che entrano in gioco come parametri nelle equazioni della MHD sono "Earth-like", come la massa, dimensioni, frequenza di rotazione. Galtzmaier e Roberts hanno optato, per alcune variabili e costanti del moto, di sovrastimare o sottostimare il loro valore: il flusso di calore proveniente dalla ICB (Inner Core Boundary) è stato assunto maggiore rispetto a quello osservato e la viscosità del Nucleo esterno liquido è stato scelto sovrastimato rispetto a quello reale. L'assunzione dietro queste scelte è la presenza di forze viscosive nel modello che, nonostante il valore sovrastimato di viscosità, sono di vari ordini di grandezza minori rispetto alle forze di Lorentz magnetica e di Coriolis dovuta alla rotazione terrestre. Pertanto, nonostante gli adattamenti appena citati, le soluzioni del modello sono nel corretto regime. Il valore di conducibilità elettrica del nucleo interno solido è assunto molto simile a quello della componente fluida del nucleo esterno. Nei primi esperimenti, il nucleo interno era stato considerato isolante con un valore di conducibilità elettrica, quindi, prossimo allo zero ma il risultato finale non era quello sperato: si osservava un comportamento caotico del campo, che a differenza della Terra, invertiva la sua polarità seguendo un andamento pressoché regolare con periodo di mille anni. Il contributo determinante di due scienziati Hollerbach e Jones (1993) e i loro studi sul magnetismo indussero Glatzmaier e Roberts a modificare la loro impostazione e assumere un valore finito di conducibilità elettrica per il nucleo interno, il quale garantì un grado di stabilità al campo magnetico. Rispetto, dunque, ad altri modelli sviluppati in quegli stessi anni, quello che tratterò in questo capitolo è più evoluto e plausibile rispetto a quello di Kageyama, sopraccitato, il quale non assume nel proprio

modello un valore finito di conducibilità elettrica e dunque non riscontra l'interazione tra il campo magnetico esterno e interno, riprodotto fedelmente dalla dinamo di Rikitake. La soluzione ottenuta nel modello in esame percorre l'evoluzione temporale della variazione di intensità e orientamento del campo in un intervallo di tempo di oltre 40mila anni, che corrispondono a più di tre intervalli di tempo di diffusione, con un'evidenza sperimentale di come il campo non abbia la tendenza di decadere e sia in grado di auto alimentarsi sostenuto dal moto convettivo del fluido. Il punto di partenza del modello è l'applicazione di un campo magnetico esterno di piccola intensità (seme) e il verificarsi di perturbazioni random quasi impercettibili. La soluzione dipendente dal tempo, dopo un periodo di approssimativamente 10mila anni conserva la polarità fino all'incirca alla fine della simulazione, quando si produce l'inversione, la cui transizione ha una durata di poco più di mille anni e mantiene poi tale polarità per i restanti 4mila anni della simulazione.

### 3.4.3 Struttura del campo durante l'inversione

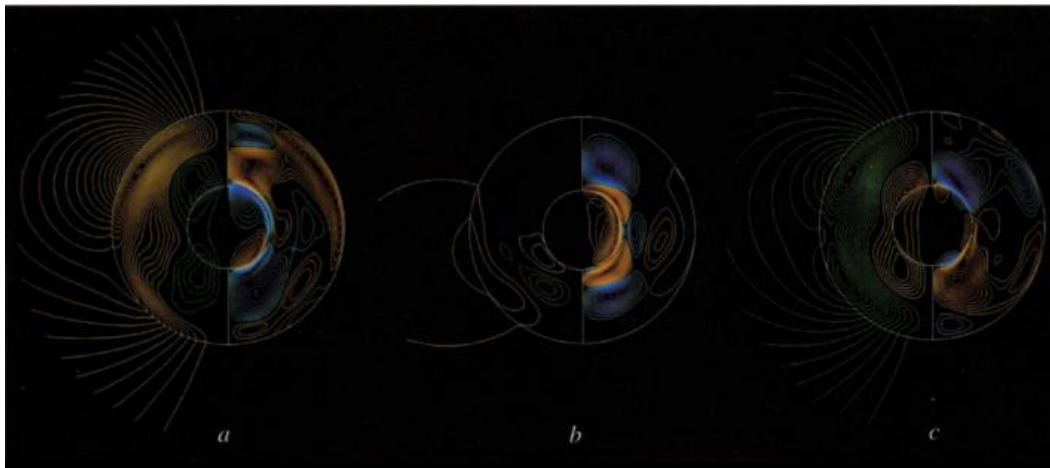
In questo paragrafo, verrà analizzato il meccanismo di inversione di polarità del campo geomagnetico risultante dalla simulazione numerica di Glatzmaier e Roberts da un punto di vista grafico. Le differenze cromatiche nei vari grafici rimarcheranno la differenza tra l'orientamento del campo nei due emisferi o la dualità della componente poloidale e toroidale del campo. La prima rappresentazione visiva del meccanismo di inversione è quello riprodotto in Fig. 3.11, un ritratto della struttura in tre dimensioni del campo magnetico mediante il tracciamento delle linee di forza. Sono stati selezionati tre istanti di tempo, in cui la dinamica delle linee di campo è stata congelata e, in seguito, evidenziata a livello cromatico in modo tale da marcare le differenze. La figura (a) riproduce la struttura del campo 9mila anni prima della fine della simulazione e, a seguire, durante la transizione di polarità (approssimativamente 4mila anni prima del termine della simulazione) e la figura (c) mostra la disposizione del campo una volta terminata.



*Fig. 3.11: la struttura tridimensionale del campo magnetico realizzata tramite linee di forza tracciate sulla superficie terrestre. (Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H. (1995) A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal)*

Il punto di vista adottato è quello di un osservatore solidale con la Terra, localizzato sulla superficie e seguendo il percorso delle linee di forza del campo, prendendo come punto di partenza la superficie stessa, si osserva il verso delle linee diretto verso il centro della Terra. Le linee penetrano all'interno della litosfera e non vengono influenzate dalla presenza del mantello isolante, raggiungendo il confine tra il mantello e il nucleo esterno dove ha origine la genesi del campo stesso. Il grafico mette in luce, infatti, l'incremento

di complessità della struttura del campo durante tale transizione, passando da un'intensità del campo minore e una struttura meno articolata a un campo intenso e una struttura governata dalla dinamica caotica del moto convettivo del fluido. Se invece esaminiamo regioni prossime alla superficie terrestre, la struttura del campo si semplifica e prevale, nello sviluppo del potenziale magnetico, la componente dipolare prima e dopo l'inversione, con l'asse del dipolo allineato con l'asse di rotazione terrestre. Nella figura (b) la disposizione del campo è più complicata e l'asse del dipolo incontra il piano equatoriale. Appurato dunque che la struttura del campo aumenta la sua complessità spostando il punto di osservazione dalla superficie terrestre al confine tra il mantello isolante e il nucleo esterno e, ancor di più, al confine tra le due regioni del nucleo dove il campo magnetico viene originato e modificato, nel secondo grafico è esplicitata, sempre a livello cromatico, la dualità tra la componente poloidale e toroidale del campo. Studiando, nel primo e secondo capitolo, le leggi e le equazioni della MHD che governano il moto convettivo del fluido e l'interazione tra le componenti elettromagnetiche, si è visto come la rotazione differenziale, causata dalla forza di Coriolis, e le differenze composizionali e termiche sono responsabili dei due effetti, alfa e omega, e, dunque, della transizione da una struttura azimutale ad una trasversale del campo e viceversa. Questa transizione è localizzata al confine tra le due regioni del nucleo, ragion per cui, in Fig. 3.12 viene concentrata l'attenzione su questa particolare ma cruciale dinamica:



*Fig. 3.12: rappresentazione delle linee di campo poloidali e toroidali in tre istanti di tempo diversi. (Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H. (1995) A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal)*

Come nel caso precedente, sono state tracciate in figura le linee di forza delle due componenti del campo in una rappresentazione tridimensionale. Le linee di campo sono state congelate negli stessi istanti di tempo selezionati per il grafico precedente, approssimativamente 9mila anni prima della fine della simulazione, durante la transizione di inversione della polarità e al termine della simulazione, una volta ultimata la dinamica di inversione. In ogni istantanea, il grafico è suddiviso in una struttura duale: la parte a destra dell'immagine mostra l'andamento delle linee di forza della componente toroidale, quindi longitudinale, mentre la parte a sinistra riproduce la dinamica della componente azimutale o poloidale del campo. Come possiamo desumere analizzando la parte destra del grafico delle tre istantanee, si possono annoverare due sorgenti di campo toroidale, una in ciascun emisfero, in direzioni opposte e all'interno di un cilindro immaginario

tangente alla superficie del Nucleo interno, dove il flusso convettivo modifica la forma e la struttura del campo poloidale di innesco. Si registra anche la presenza di una componente toroidale del campo che penetra all'interno del nucleo interno generato anch'esso dall'effetto della rotazione differenziale sul campo poloidale preesistente, secondo le dinamiche analizzate nel capitolo 2. In analogia con la parte toroidale, anche la componente azimutale ha due polarità: una localizzata nella parte esterna del nucleo esterno, la stessa struttura dipolare che si osserva sulla superficie terrestre e la seconda polarità opposta nella parte interna del nucleo liquido e quello solido. La componente poloidale è infatti originata dall'interazione e la conseguente variazione strutturale tra la parte toroidale del campo e l'elicità del flusso, ossia la correlazione tra la vorticità e la velocità del moto convettivo del fluido. È in questo punto in cui il modello di Galtzmaier e Roberts evidenzia un limite: al fine di ottenere una riproduzione plausibile del funzionamento della geodinamo e dunque della possibilità di registrare un'inversione di polarità, è necessario che nelle condizioni iniziali vengano già impostate le modalità e le caratteristiche del moto anziché fare in modo che si risolvano auto-consistentemente. Questa approssimazione o limite del modello è però compensato dalla possibilità, ereditata dallo sviluppo del modello dinamo di Rikitake, di indurre un'interazione tra le due polarità opposte, le quali giocano un ruolo fondamentale nel meccanismo di inversione. Altre importanti osservazioni possono essere fatte analizzando le tre istantanee in Fig. 3.13. La riproduzione continua della simulazione mostra infatti come il campo localizzato nella regione prossima al Nucleo esterno abbia una tendenza frequente di invertire la sua polarità in un intervallo di tempo breve di all'incirca 100 anni spinta dal moto convettivo del fluido ma ciò non avviene a causa della stabilità del campo nel Nucleo interno solido, il quale tende a invertirsi in un lasso di tempo diffusivo molto più lungo (circa 1600 anni). Confrontando poi le sfumature cromatiche tra varie regioni nelle tre istantanee, è possibile risalire all'informazione sull'intensità e sull'energia magnetica del campo. Per far ciò, è necessario ricordare che un potenziale è sviluppabile tramite funzioni armoniche sferiche e, nel caso del potenziale magnetico, lo sviluppo si estende fino all'ordine  $l = 12$ , se si considera il campo principale dell'IGRF. In tale sviluppo, il termine di ordine 1 è il termine dipolare, prevale sugli altri ed è responsabile della struttura poloidale del campo che osserviamo sulla superficie. La rappresentazione della modifica delle linee di forza nel tempo evidenzia un comportamento della componente di quadrupolo dello sviluppo in armoniche sferiche che tende a invertire la sua polarità in un arco di tempo di mille anni, causando oscillazioni nella struttura e nell'intensità del campo poloidale esterno. Queste variazioni di intensità seguono però andamenti opposti nei due emisferi, in quanto la somma del termine di dipolo e quello di quadrupolo origina un incremento di intensità del campo poloidale assiale in un emisfero e una diminuzione in quello opposto. Trattando il problema dal punto di vista energetico, anche in tal ambito si registrano variazioni o oscillazioni del valore di energia magnetica del campo tra un valore massimo e minimo. Il valore massimo si rileva alle due estremità della simulazione, in un periodo antecedente e posteriore alla inversione. Durante la transizione, invece, il valore dell'energia del campo nel Nucleo risulta essere un quarto di quello originario.



Introducendo il discorso sulla possibilità di sviluppare il potenziale magnetico in armoniche sferiche fino al dodicesimo ordine, ho specificato come la componente di dipolo prevalga sulle altre e determini la struttura del campo come noi lo vediamo. Gli altri termini di grado superiore sono

responsabili di anomalie magnetiche registrate sulla superficie terrestre e di intensità piccole rispetto alla ampiezza di magnitudo della parte dipolare. Nel terzo grafico, vengono

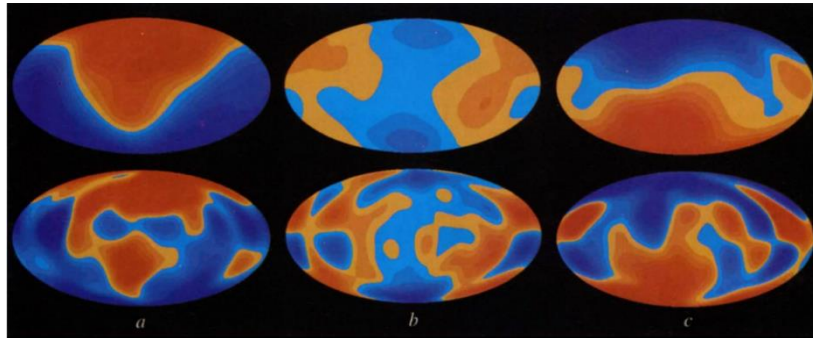


Fig. 3.13: la componente radiale del campo magnetico tracciata al confine tra nucleo esterno e mantello (in basso) e alla superficie terrestre (in alto). (Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H. (1995) *A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal*)

riprodotte tre istantanee che concentrano l'attenzione sulla intensità della componente radiale del campo, le cui linee di campo sono tracciate al confine tra il mantello e il nucleo esterno e alla superficie terrestre, negli stessi tre istanti dei precedenti grafici, in modo da evidenziare le differenze e analogie prima e dopo la transizione.

Il termine dipolare dello sviluppo ha una dipendenza inversa dalla distanza dalla superficie, decade più lentamente e, pertanto, il suo contributo è maggiore sulla superficie rispetto a quello registrato sulla CMB (Core Mantle Boundary). Osservazioni sulla direzionalità della componente dipolare possono essere fatte analizzando la disposizione degli spot rossi, i quali riproducono il campo diretto esternamente, e blu, la parte penetrante all'interno. La componente dipolare è assiale prima e dopo la transizione ed equatoriale durante l'inversione. Come si potrà vedere meglio nel prossimo grafico, la struttura dipolare del campo nell'intervallo di tempo transitorio decresce molto più velocemente e intensamente rispetto agli altri termini dello sviluppo; pertanto, come è facilmente deducibile osservando i contorni e le sfumature cromatiche, la componente dipolare equatoriale del campo transitorio ha un'intensità minore rispetto a quella della parte dipolare assiale prima e dopo l'inversione.

Un confronto interessante è stato sviluppato considerando l'espansione in armoniche sferiche del potenziale magnetico sulla superficie terrestre. Nel grafico sotto riportato, viene posto a paragone il valore quadratico medio dell'intensità del campo magnetico calcolato sulla superficie determinato prendendo in esame la formula dello sviluppo del potenziale in quattro diversi istanti temporali, prima, dopo, durante la transizione e il dato attuale dell'intensità del campo. Esso fornisce lo spettro di energia del campo che può essere espresso come:

$$(l + 1) \sum_m [(g_l^m)^2 + (h_l^m)^2] \quad 3.11$$

Dove all'interno delle parentesi sono i coefficienti di Gauss per il potenziale magnetico del campo determinato all'esterno del nucleo,  $l$  e  $m$  sono rispettivamente il grado e

l'ordine dello sviluppo in armoniche sferiche. Lo spettro di energia è riprodotto in figura negli stessi tre istanti di tempo dei grafici precedenti con, in aggiunta, il dato odierno di intensità del campo terrestre, basato sui dati MAGSAT.

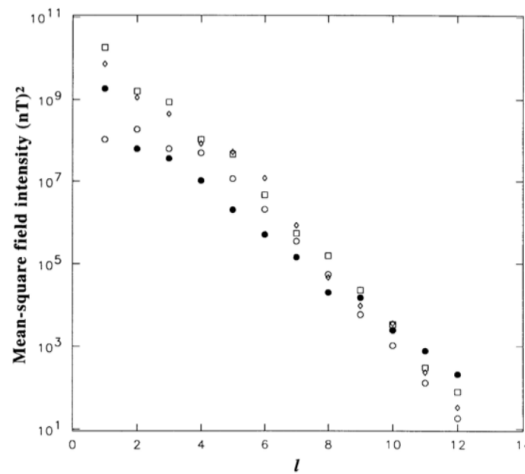


Fig. 3.14: lo spettro del campo sulla superficie calcolato sulla base dello sviluppo in armoniche sferiche del potenziale magnetico. (Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H. (1995) *A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal*)

I dati relativi ai quattro diversi istanti temporali sono contrassegnati da quattro simboli geometrici, laddove il quadrato riproduce il dato di intensità del campo prima della transizione, il diamante una volta ultimata l'inversione, i cerchi vuoti durante la transizione mentre i cerchi pieni rappresentano il dato odierno. Dal grafico si possono trarre alcune osservazioni per comprendere le modalità di inversione tenendo in considerazione non solamente il valore di intensità di ciascun termine dello sviluppo, ma soprattutto il gradiente tra un dato e il successivo. La transizione di polarità mostra, come già analizzato in precedenza, il contributo del termine dipolare ( $l = 1$ ) dominare sugli altri termini e quindi assumere un ruolo primario nella conformazione del campo all'esterno della superficie terrestre. Gli altri termini dello sviluppo decrescono di intensità aumentando il valore del grado, confermando l'assunzione per cui il loro contributo interviene in misura minoritaria come anomalia magnetica osservata in superficie e come oscillazione dal valore dipolare di riferimento. Questo snapshot evidenzia inoltre come nel modello considerato si stia sovrastimando il termine di convezione del fluido, in quanto il dato attuale di intensità del campo è minore nei primi dieci termini rispetto ai valori associati agli altri tre istanti. Concentrando l'attenzione solo al dato di transizione di polarità, si può dedurre come il contributo dipolare si affievolisce in misura maggiore rispetto agli altri dati, come è evidenziato dalla Fig. 3.14. Durante la transizione, dunque, si verifica la conversione e il trasferimento di energia magnetica dal termine dipolare a quelli successivi in maniera del tutto imprevedibile e caotica, soprattutto dal termine dipolare al termine di quadrupolo ( $l = 2$ ) e viceversa in un arco temporale di qualche migliaio di anni.

L'ultima analisi elaborata sulla dinamica di inversione riguarda l'assunzione di numerosi campioni selezionati con differenti valori geografici di longitudine e latitudine, situati, dunque, in località diverse, e la valutazione della variazione angolare della direzione del campo geomagnetico in ciascun sito. I dati ottenuti sono stati, successivamente, posti a

confronto con quelli, già in possesso, derivanti da uno studio paleomagnetico. Per avere una stima della direzione del campo geomagnetico con un errore minimizzato, è stato tracciato l'andamento angolare del campo analizzando la Declinazione e l'Inclinazione del campo in cinquanta siti distribuiti sulla superficie abbracciando un intervallo temporale di 9mila anni. L'esito dell'esperimento ha soddisfatto almeno in parte le aspettative degli scienziati; la mappa suggerisce una forte dipendenza della variazione del campo dalla scelta del sito e quindi della località geografica prestabilita e presa in esame ma mostra come il fenomeno di inversione sia effettivamente avvenuto. Monitorando in tutti i siti la variazione angolare del campo, si può concludere che il tasso di variazione maggiore è di  $0.1^\circ$  al giorno, ma tale valore non è uniforme e valido per ogni sito. Molti di questi registrano un tasso di  $\sim 0.01^\circ$  al giorno durante l'inversione, di molto minore rispetto al dato maggiore di  $6^\circ$  raccolto tramite uno studio paleomagnetico.

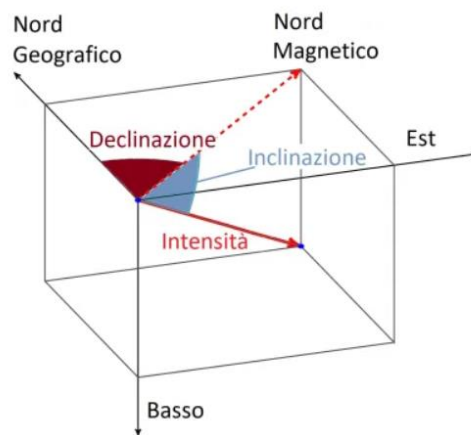


Fig. 3.15: Declinazione e Inclinazione (INGV Ambiente)

In figura sono definiti i significati di Declinazione e Inclinazione, laddove la Declinazione è il valore dell'angolo che si forma sul piano orizzontale tra la direzione della componente orizzontale del vettore **B** e la direzione del meridiano geografico passante per il punto di misura, mentre l'Inclinazione è il valore dell'angolo determinato dalla direzione del campo magnetico terrestre e il piano orizzontale tangente nel punto di misura. Conoscendo i valori di queste due quantità in ciascun sito e assumendo che la struttura del campo sia dipolare, si può determinare la posizione geografica del polo geomagnetico virtuale (VGP). Nel modello considerato, inoltre, è possibile stimare la posizione geografica del polo geomagnetico "vero" (TGP). Questo passaggio è soggetto a notevole indeterminazione, a causa della penuria di dati ottenuti con 50 siti campione considerati e l'incertezza dovuta alla correlazione temporale dei campioni in località diverse e distanti l'una dall'altra. Il percorso ricreato e riproposto in figura del TGP durante i 9mila anni della simulazione del nostro modello evidenzia numerose escursioni o inversioni interrotte in entrambi gli intervalli temporali simmetrici rispetto all'inversione, la quale risulta avere una durata di approssimativamente 1200 anni. I percorsi tracciati per tre diversi siti campione del VGP lungo tutta la simulazione sono mostrati in Fig. 3.16.

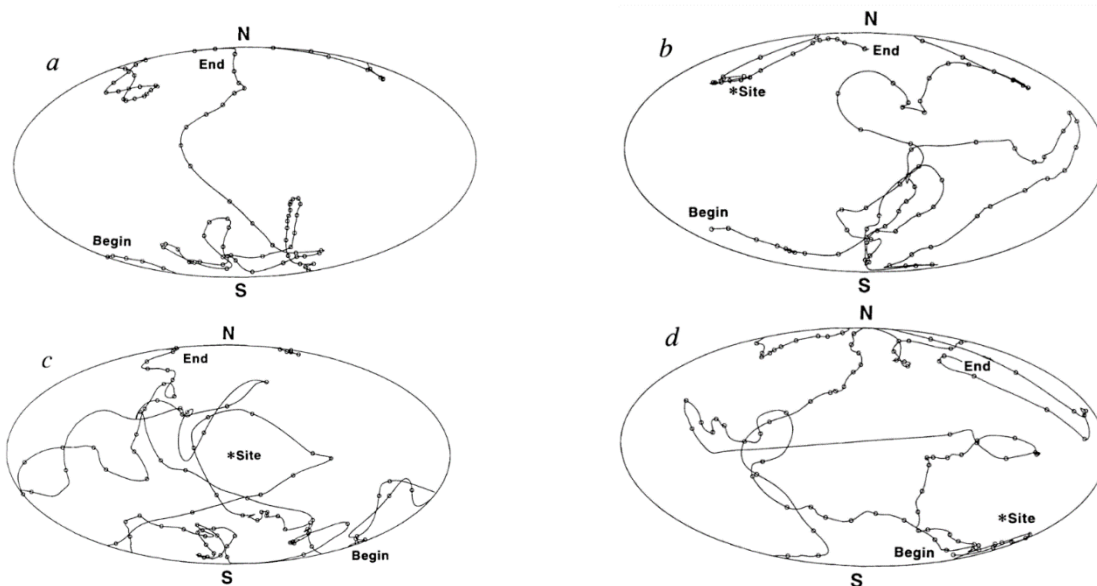


Fig. 3.16: percorso individuato dal TDP (grafico a) e dal VDP in tre siti campione diversi. (Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H. (1995) *A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal*)

La nozione deducibile dai grafici è la stretta correlazione tra il campo geomagnetico e la scelta geografica del sito campione. Nonostante questo limite, però, risulta evidente notare come sia effettivamente avvenuta un'inversione di polarità, la cui durata, basandoci sui dati ottenuti del VGP, è maggiore di 1200 anni. (Glatzmaier e Roberts, 1995)

Questi grafici riportati sopra possono essere messi a confronto con il percorso del VGP riferito ai dati e agli archivi degli studi paleomagnetici, i quali sostengono l'ipotesi di longitudini preferenziali del campo geomagnetico. Nel modello analizzato di Glatzmaier e Roberts questa ipotesi non è applicabile e il motivo è riscontrabile nell'assunzione della simmetria sferica nelle varie direzioni delle condizioni iniziali sull'ICB e sul CMB. Se ai dati di Declinazione e Inclinazione, unissimo anche il valore di intensità del campo in quei tre siti considerati nei grafici riportati sopra, si può riprodurre l'andamento oscillatorio del "virtual dipole moment" (VDM) del campo a struttura dipolare assunto come ipotesi iniziale. In Fig. 3.17 vengono dunque poste a confronto le quattro curve relative al VDM associate ai tre siti campione selezionati e la curva marcata riproduce il comportamento del true dipole moment (TDM). Gli andamenti delle curve sembrano rispettare un comportamento ben preciso con una decrescita prima e durante la transizione di polarità e la crescita dopo di essa.

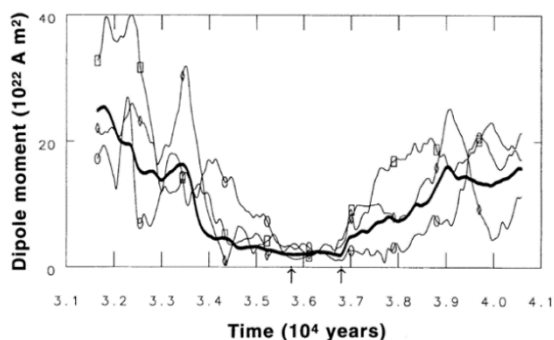


Fig. 3.17: curva del TDM (linea nera marcata) e del VDM in tre diversi siti campione. (Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H. (1995) *A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal*)





# Conclusioni

L'obiettivo dell'elaborato era la ricostruzione della dinamica della generazione del campo geomagnetico partendo da un'analisi della composizione chimico-fisica dell'interno della Terra e dallo studio dei processi termodinamici ed elettromagnetici che hanno sede nel Nucleo, interno ed esterno. Dalla formulazione teorica è stata poi realizzata una riproduzione del sistema complesso della Geodinamo tramite un processo di modellizzazione con l'introduzione dei due modelli di Faraday e Bullard e, successivamente, quello più evoluto di Rikitake. Utilizzando come punto di partenza proprio il modello analogico di Rikitake, è stato approfondito il meccanismo di inversione di polarità del campo geomagnetico e sono giunti a mostrare come la dinamica di transizione di polarità prediliga un comportamento caotico ed imprevedibile dovuto al moto turbolento del fluido nel Nucleo esterno, responsabile della generazione del campo.

La considerazione simultanea dell'equazione di Navier-Stokes e della Legge di Ohm ha condotto alla formulazione dell'equazione idromagnetica che governa la dinamica del fluido conduttore le cui peculiarità sono precisate dal Teorema di Alfvén, che mostra come in un fluido con valore di conducibilità elettrica infinito, il campo magnetico è congelato nel fluido e si muove con esso. Un enunciato equivalente corrisponde all'impossibilità di osservare un campo di velocità perpendicolare alle linee del campo o alla conservazione del flusso magnetico attraverso una superficie co-mobile. La teoria della Magnetoidrodinamica è stata poi applicata alla geodinamo, definito, come risultato dei progressi di Elsasser e Bullard, come un sistema di feedback o retroazione attivato da un debole campo magnetico interplanetario (seme) e alimentato da una fonte di energia proveniente da una differenza composizionale tra il Nucleo esterno e interno. La conclusione a cui si è giunti è dunque l'associazione della Geodinamo ad una dinamo autoalimentata.

Introducendo i concetti di vorticità e di elicità e sviluppando la trattazione elettromagnetica ricorrendo alla formulazione di Mie è stata ricostruita l'evoluzione delle linee di campo magnetico fino al risultato finale della formazione del campo dipolare osservabile oggi in prossimità della superficie terrestre.

Nell'ultima parte dell'elaborato è stato indagato il meccanismo di inversione di polarità del campo geomagnetico seguendo un filo logico temporale, dalle prime scoperte di anomalie magnetiche di segno opposto, allo sviluppo della disciplina del Paleomagnetismo fino all'introduzione del modello di Rikitake, capace di esibire spontaneamente transizioni di polarità, e la prima simulazione numerica di Glatzmaier e Roberts che ne hanno evidenziato il comportamento caotico. Dal modello di Glatzmaier e Roberts sono state dedotte le modalità di transizione di polarità. L'inversione avviene tramite una rotazione dell'asse di dipolo che incontra in un istante di tempo determinato il piano equatoriale e esiste un intervallo temporale in cui l'intensità del campo magnetico

assume un valore prossimo allo zero. La diminuzione di intensità, e quindi anche di energia, è dovuta al fatto che il termine dipolare, responsabile della conformazione del campo osservabile sulla superficie terrestre, decresce in misura maggiore rispetto agli altri termini dello sviluppo del potenziale magnetico in armoniche sferiche. Dopo la transizione di polarità, l'intensità e l'energia del campo tornano al loro valore iniziale.



# Bibliografia

Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., Stacey, P. (1992) *On Devaney's definition of Chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 4

Brown, G. C., Mussett, A. E., (1993) *The Inaccessible Earth, an integrated view to its structure and composition*, Second Edition, Chapman&Hall, 103

Campbell, W. A. (2003), *Introduction to Geomagnetic Fields*, Cambridge University Press.

Carrigan, C. R., Gubbins, D., (1979) *La sorgente del campo magnetico terrestre*, Le scienze, vol. 22, n. 128, 58-73

Cook, A. E., Roberts, P. H. (1970) *The Rikitake two-disc dynamo system*, Volume 68, 547

Devaney, R. L. (1989) *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison Wesley, Third edition, Chapman&Hall, 121

Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H. (1995) *A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal*, Nature, 377

Ito, K. (1980) *Chaos in the Rikitake two-disc dynamo system*. Earth and Planetary Science Letters, Volume 51, 451.

Leo, M. (2020) *L'attrattore di Lorenz*, Università del Salento, Ithaca: Viaggio nella scienza

Turcotte, D. L. (1992). *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge, University press.

# Ringraziamenti

*Un ringraziamento speciale ai miei genitori e a mia sorella per il loro sostegno in questo percorso accademico.*

*I miei ringraziamenti vanno anche al Prof. Michele Dragoni dell'Università di Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi" per avermi assistito nella redazione di questa tesi.*