Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Il Teorema di Morse-Sard

Relatore:
Chiar.mo Prof.
GIOVANNI CUPINI

Presentata da:
MARCO BAGNARA

Sessione
Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione

Un punto critico di una funzione $f : U \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k, $k \geq 1$, con U aperto di $\mathbb{R}^m$, è un punto in cui la matrice Jacobiana di f non ha rango massimo. Il Teorema di Morse-Sard afferma che l'immagine dei punti critici è un insieme di misura di Lebesgue n-dimensionale nulla se sussiste la seguente relazione tra k, m e n:

$$k \geq \max\{m - n + 1, 1\}.$$

Tale risultato è ottimale, come attestato da un controesempio di H. Whitney [11].

Il Teorema di Morse-Sard è così chiamato, in quanto A.P. Morse nel 1939 pubblica la versione per funzioni a valori reali in [6], successivamente generalizzata da A. Sard nel 1942, a funzioni a valori vettoriali, vedi [9]; a tale risultato ci si riferisce spesso con la dicitura di *Lemma di Sard.*

Vi sono due casi di particolare rilevanza: il caso $m = n$, e il caso $n = 1$.

Nel primo caso, il Teorema di Morse-Sard può essere così enunciato:

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $C^1(U)$.
Allora $\mathcal{L}^n(f(crit(f)) = 0$ dove

$$crit(f) = \{x \in U \,:\, \det Df(x) = 0\}.$$

Il secondo caso, riguardante funzioni a valori reali, è il Teorema di Morse, che possiamo enunciare nel modo seguente:

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^m$ e sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^m(U)$.
Allora $\mathcal{L}^1(f(crit(f)) = 0$ dove

$$crit(f) = \{x \in U \,:\, \nabla f(x) = 0\}.$$

In particolare, da questo risultato si deduce che quasi ogni insieme di livello di f è una varietà di classe C^m.

Il capitolo centrale di questa tesi è il Capitolo 2, in cui diamo una dimostrazione del Teorema di Morse-Sard. Il caso $m < n$ non è difficile da trattare, ma decisamente più complicata è la trattazione del caso $m \geq n$. Di questo caso, forniremo la dimostrazione di Moreira e Ruas pubblicata nel 2009 in [5], la quale fa uso del cosiddetto *Curve selection lemma*, si veda [4].

Nel caso $m = n$, l'ipotesi $f \in C^1$ richiesta dal Teorema di Morse-Sard non è ottimale. Infatti, D.E. Varberg nel 1966 in [10] dimostra che è possibile indebolire la regolarità di f richiedendo la sola differenziabilità. Di tale teorema forniamo la dimostrazione originale di Varberg, la quale poggia anche su risultati di Flett [2]. Essa costituisce il terzo capitolo della tesi.

A concludere l'elaborato è una significativa applicazione del Teorema di Morse-Sard: la formula di coarea per funzioni sommabili a valori reali. Mettiamo qui in evidenza il rilevante caso particolare: se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,t)} f(x)\,d\sigma(x) \right) dt$$

dove $B(0,t)$ sta a indicare la palla di $\mathbb{R}^n$ centrata nell'origine e di raggio t.

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo introduciamo alcune notazioni e raccogliamo alcuni risultati preliminari che saranno utili per la dimostrazione del Teorema di Morse-Sard, argomento del successivo capitolo.

Sia $S \subset \mathbb{R}^n$. Indichiamo la chiusura di S con $\bar{S}$ e denotiamo S' il derivato di S, ossia l'insieme dei punti di accumulazione di S.

Inoltre, se S è un insieme misurabile secondo Lebesgue di $\mathbb{R}^n$, scriveremo $\mathrm{vol}(S)$ per indicarne la sua misura di Lebesgue.

Le palle di centro x e raggio r verranno denotate $B(x,r)$ e denoteremo con ω_n la misura di Lebesgue della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$.

1.1 Formula di Taylor

Ricordiamo qui le formule di Taylor con il resto di Lagrange e di Peano per funzioni di più variabili.

Teorema 1.1 (Formula di Taylor con il Resto di Lagrange)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^k$. Siano x, $\bar{x} \in A, x \neq \bar{x}$, tali che $[x, \bar{x}] \subseteq A$. Allora $\exists\, \xi \in]\bar{x}, x[$, tale che:*

$$f(x) = \sum_{\|\alpha\| \leq k-1} \frac{D^\alpha f(\bar{x})}{\alpha!}(x-\bar{x})^\alpha + \sum_{\|\alpha\|=k} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-\bar{x})^\alpha$$

Teorema 1.2 (Formula di Taylor con il Resto di Peano)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^k(A)$. Siano x, $\bar{x} \in A, x \neq \bar{x}$, tali che $[x, \bar{x}] \subseteq A$. Allora:*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(\bar{x})}{\alpha!}(x-\bar{x})^\alpha + o(\|x-\bar{x}\|^k)$$

per $x \to \bar{x}$.

Dimostrazione. Per il Teorema 1.1, $\exists\, \xi \in]\bar{x}, x[$, tale che

$$f(x) = \sum_{\|\alpha\| \leq k-1} \frac{D^\alpha f(\bar{x})}{\alpha!}(x-\bar{x})^\alpha + \sum_{\|\alpha\|=k} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-\bar{x})^\alpha.$$

Per dimostrare il Teorema dobbiamo mostrare che, per $x \to \bar{x}$

$$\sum_{\|\alpha\|=k} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-\bar{x})^\alpha = \sum_{\|\alpha\|=k} \frac{D^\alpha f(\bar{x})}{\alpha!}(x-\bar{x})^\alpha + o(\|x-\bar{x}\|^k),$$

cioè

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{\sum_{\|\alpha\|=k}(D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x}))(x-\bar{x})^\alpha}{\|x-\bar{x}\|^k} = 0.$$

Utilizzando le proprietà della norma si ha

$$\| \sum_{\|\alpha\|=k} (D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x}))(x-\bar{x})^\alpha \| \leq \sum_{\|\alpha\|=k} \|D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x})\| \|(x-\bar{x})^\alpha\| \tag{1.1}$$

e, per le proprietà dei multiindici, si ha che

$$\|(x-\bar{x})^\alpha\| \leq \|x-\bar{x}\|^{|\alpha|}. \tag{1.2}$$

Quindi da (1.1) e (1.2) si ottiene

$$\| \sum_{\|\alpha\|=k} (D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x}))(x-\bar{x})^\alpha \| \leq \sum_{\|\alpha\|=k} \|D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x})\| \|x-\bar{x}\|^k. \tag{1.3}$$

Per (1.3) vale

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\bar{x}} \left\| \frac{\sum_{\|\alpha\|=k}(D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x}))(x-\bar{x})^\alpha}{\|x-\bar{x}\|^k} \right\| \leq \\
&\leq \lim_{x\to\bar{x}} \frac{\sum_{\|\alpha\|=k} \|D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x})\| \|x-\bar{x}\|^k}{\|x-\bar{x}\|^k} \\
&= \lim_{x\to\bar{x}} \sum_{\|\alpha\|=k} \|(D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x}))\|,
\end{aligned}$$

da cui deduciamo che

$$\lim_{x\to\bar{x}} \left\| \frac{\sum_{\|\alpha\|=k}(D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x}))(x-\bar{x})^\alpha}{\|x-\bar{x}\|^k} \right\| \leq \lim_{x\to\bar{x}} \sum_{\|\alpha\|=k} \|D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x})\|. \tag{1.4}$$

f è di classe C^k, quindi tutte le sue derivate fino a ordine k sono continue in $\bar{x}$, inoltre dal fatto che $\xi \in]x, \bar{x}[$ deduciamo che

$$\lim_{x \to \bar{x}} \xi = \bar{x}. \tag{1.5}$$

Vale inoltre, per le proprietà della norma che, se α è tale che $|\alpha| = k$,

$$\|D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x})\| \leq \sqrt{\sum_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k = 1}^{n} \Big(f_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}}(\xi) - f_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}}(\bar{x}) \Big)^2}. \tag{1.6}$$

Otteniamo quindi da (1.5) e (1.6)

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to \bar{x}} \sum_{\|\alpha\| = k} \|D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x})\| \leq \\ &\leq \lim_{x \to \bar{x}} \sqrt{\sum_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k = 1}^{n} \Big(f_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}}(\xi) - f_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}}(\bar{x}) \Big)^2} = 0, \end{aligned}$$

e da (1.4)

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left\| \frac{\sum_{\|\alpha\| = k} (D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\bar{x}))(x - \bar{x})^\alpha}{\|x - \bar{x}\|^k} \right\| = 0.$$

□

1.2 Un teorema di ricoprimento

Il seguente è una versione di teorema di ricoprimento di Vitali, presente in [5].

Lemma 1.3. *Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ aperto di misura $a < +\infty$ e sia $X \subset U$ tale che per ogni $x \in X$ esiste $B(x, \delta_x) \subset U$. Allora esiste un sottoinsieme finito o numerabile $\{x_i\}_{i \in I} \subset X$ tale che $X \subset \cup_{i \in I} B(x_i, \delta_{x_i})$ e $\sum_{i \in I} vol(B(x_i, \delta_{x_i})) \leq 3^m a$*

Dimostrazione. Denotiamo ω_m la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^m$.

Sia $B(x, \delta_x) \subset U$. Essendo $\mathrm{vol}(U) = a$, si ha

$$\mathrm{vol}(B(x, \delta_x)) = \omega_m \delta_x^m \leq a, \tag{1.7}$$

quindi

$$\sup\{\delta > 0 \,:\, \exists x \in X, \delta_x = \delta\} \leq \sqrt[m]{\frac{a}{\omega_m}} < +\infty.$$

Costruiamo $\{x_i\}_{i \in I}$ mediante un ragionamento iterativo.

Sia $x_1 \in X$ tale che:

$$\delta_{x_1} > \frac{1}{2}\sup\{\delta > 0 \,:\, \exists x \in X, \delta_x = \delta\}$$

possono verificarsi due casi:
(i1) $\forall\, x \in X \setminus \{x_1\}$, $B(x, \frac{\delta_x}{3}) \cap B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{3}) \neq \emptyset$.
(ii1) $\exists\, x \in X \setminus \{x_1\}$ tale che $B(x, \frac{\delta_x}{3}) \cap B(x_1, \delta_{x_1}) = \emptyset$.

Caso (i1).
In questo caso otteniamo che per ogni $x \in X \setminus \{x_1\}$

$$\|x - x_1\| < \frac{\delta_x}{3} + \frac{\delta_{x_1}}{3} \leq \frac{\sup\{\delta > 0 \,:\, \exists y \in X, \delta_y = \delta\}}{3} + \frac{\delta_{x_1}}{3} < \frac{2\delta_{x_1}}{3} + \frac{\delta_{x_1}}{3} = \delta_{x_1},$$

e quindi

$$X \subset B(x_1, \delta_{x_1}).$$

Inoltre, per (1.7),

$$\mathrm{vol}(B(x_1, \delta_{x_1})) \leq a < 3^m a.$$

Ciò dà la tesi.

Caso (ii1).
In questo caso $\exists\, x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ tale che:

$$B(x_2, \frac{\delta_{x_2}}{3}) \cap B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{3}) = \emptyset \tag{1.8}$$

e

$$\delta_{x_2} > \frac{1}{2}\sup\{\delta > 0 \,:\, \exists x \in X, \delta_x = \delta \text{ e } B(x, \frac{\delta_x}{3}) \cap B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{3}) = \emptyset\}.$$

Dato che le due palle sono disgiunte, si ha che

$$\mathrm{vol}(B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{3})) + \mathrm{vol}(B(x_2, \frac{\delta_{x_2}}{3})) = \mathrm{vol}(B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{3}) \cup B(x_2, \frac{\delta_{x_2}}{3})) \leq \mathrm{vol}(U) = a.$$

Osserviamo che $\mathrm{vol}(B(x,r)) = 3^m\,\mathrm{vol}(B(x, \frac{r}{3}))$. Dunque

$$\mathrm{vol}(B(x_1, \delta_{x_1})) + \mathrm{vol}(B(x_2, \delta_{x_2})) \leq 3^m(\mathrm{vol}(B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{3})) + \mathrm{vol}(B(x_2, \frac{\delta_{x_2}}{3}))) \leq 3^m a. \tag{1.9}$$

Si procede considerando i seguenti due possibili casi.
(i2) $\forall\, x \in X \setminus \{x_1, x_2\}, B(x, \frac{\delta_x}{3}) \cap (\,\cup_{i=1}^{2} B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3})) \neq \emptyset.$

(ii2) $\exists\, x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ tale che $B(x, \frac{\delta_x}{3}) \cap (\cup_{i=1}^2 B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3})) = \emptyset$.
Nel primo caso, ossia (i2), abbiamo che se $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ allora o

$$B(x, \frac{\delta_x}{3}) \cap B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{3}) \neq \emptyset \tag{1.10}$$

oppure

$$\begin{cases} B(x, \frac{\delta_x}{3}) \cap B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{3}) = \emptyset \\ \\ B(x, \frac{\delta_x}{3}) \cap B(x_2, \frac{\delta_{x_2}}{3}) \neq \emptyset \end{cases} \tag{1.11}$$

Nel caso (1.10), si ha

$$\begin{aligned} \|x - x_1\| &< \frac{\delta_x}{3} + \frac{\delta_{x_1}}{3} < \frac{1}{3} \sup\{\delta > 0 \,:\, \exists y \in X, \delta_y = \delta\} + \frac{\delta_{x_1}}{3} \\ &< \frac{2}{3}\delta_{x_1} + \frac{\delta_{x_1}}{3} = \delta_{x_1}. \end{aligned}$$

Quindi

$$x \in B(x_1, \delta_{x_1}) \subseteq B(x_1, \delta_{x_1}) \cup B(x_2, \delta_{x_2}).$$

Nel caso (1.11), si ha

$$\begin{aligned} \|x - x_2\| &< \frac{\delta_x}{3} + \frac{\delta_{x_2}}{3} \\ &< \frac{1}{3} \sup\{\delta > 0 \,:\, \exists y \in X, \delta_y = \delta, B(y, \frac{\delta_y}{3}) \cap B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{3}) = \emptyset\} + \frac{\delta_{x_2}}{3} \\ &< \frac{2\delta_{x_2}}{3} + \frac{\delta_{x_2}}{3} = \delta_{x_2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$x \in B(x_2, \delta_{x_2}) \subseteq B(x_1, \delta_{x_1}) \cup B(x_2, \delta_{x_2}).$$

Da (i2) segue così

$$X \subset B(x_1, \delta_{x_1}) \cup B(x_2, \delta_{x_2}),$$

e da (1.9)

$$\sum_{i=1}^{2} \mathrm{vol}(B(x_i, \delta_{x_i})) < 3^m a.$$

Consideriamo (ii2), cioè
$\exists\, x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ tale che $B(x, \frac{\delta_x}{3}) \cap (\cup_{i=1}^2 B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3})) = \emptyset$.

In questo caso esiste $x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ tale che

$$B(x_3, \frac{\delta_{x_3}}{3}) \cap (\cup_{i=1}^2 B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3})) = \emptyset \tag{1.12}$$

e

$$\delta_{x_3} > \frac{1}{2}\sup\{\delta > 0 \,:\, \exists y \in X, \delta_y = \delta, B(y, \frac{\delta_y}{3}) \cap (\cup_{i=1}^2 B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3})) = \emptyset\}.$$

Abbiamo quindi $x_1, x_2, x_3 \in X$ e, per (1.8) e (1.12), le palle $B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{3})$, $B(x_2, \frac{\delta_{x_2}}{3})$, $B(x_3, \frac{\delta_{x_3}}{3})$ sono a due a due disgiunte. Quindi:

$$\sum_{i=1}^{3} \mathrm{vol}(B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3})) = \mathrm{vol}(\cup_{i=1}^3 B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3})) \le \mathrm{vol}(U) = a,$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{3} \mathrm{vol}(B(x_i, \delta_{x_i})) = 3^m \sum_{i=1}^{3} \mathrm{vol}(B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3})) \le 3^m a.$$

Iterando il procedimento si trova un insieme finito (se si verifica ad un certo punto un caso (i)) o infinito (nel caso non si verifichi mai un caso (i)) di indici I tale che

$$\{x_i\}_{i\in I} \subset X \text{ e } \sum_{i\in I} \mathrm{vol}(B(x_i, \delta_{x_i})) \le 3^m a.$$

Mostriamo che I è al più numerabile. Sia:

$$E_1 = \{i \in I \,:\, \delta_{x_i} \ge 1\}$$

$$E_2 = \{i \in I \,:\, \frac{1}{2} \le \delta_{x_i} < 1\}$$

in generale

$$E_k = \left\{ i \in I \,:\, \frac{1}{2^k} \le \delta_{x_i} < \frac{1}{2^{k-1}} \right\}.$$

Quindi si ha che $\mathrm{card}(E_k)$ è finita per ogni $k \in \mathbb{N}$, infatti

$$a \ge \sum_{i\in E_k} \mathrm{vol}(B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3})) = \sum_{i\in E_k} \omega_m (\frac{\delta_{x_i}}{3})^m \ge \mathrm{card}(E_k)\omega_m(\frac{1}{2^k})^m$$

e cioè

$$\mathrm{card}(E_k) \le \frac{a(2^k)^m}{\omega_m} < \infty. \tag{1.13}$$

Osserviamo inoltre che

$$I = \cup_{k\in\mathbb{N}} E_k. \tag{1.14}$$

Da (1.13) e (1.14) segue che

$$\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}\left(\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{card}(E_k) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a(2^k)^m}{\omega_m} < \infty$$

e quindi la cardinalità di I è al più numerabile. $\square$

1.3 Sezioni di un insieme compatto

Per la dimostrazione del Teorema di Morse-Sard 2.8, avremo bisogno del seguente risultato di teoria della misura.

Lemma 1.4. *Sia $K \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ un compatto tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^p$, l'insieme*

$$K_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-p} \, : \, (x, y) \in K\}$$

ha misura zero in $\mathbb{R}^{n-p}$. Allora K ha misura zero in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Siccome K è compatto, allora esiste $R > 0$ tale che $K \subset B(0, R) \times \mathbb{R}^{n-p}$, dove $B(0, R)$ è la palla di centro 0 e raggio R in $\mathbb{R}^p$. Per ogni $x \in B(0, R)$, K_x ha misura zero. Da ciò segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste una famiglia di palle $\{B(y_i, r_i)\}_{i \in I}$ in $\mathbb{R}^{n-p}$ tale che

$$K_x \subset \cup_{i \in I} B(y_i, r_i) \text{ e } \sum_{i \in I} \mathrm{vol}(B(y_i, r_i)) < \epsilon. \tag{1.15}$$

Essendo K compatto, si ha

$$\exists\, \delta_x > 0 \text{ tale che } K \cap (B(x, \delta_x) \times \mathbb{R}^{n-p}) \subset \cup_{i \in I} (B(x, \delta_x) \times B(y_i, r_i)). \tag{1.16}$$

Infatti, se così non fosse, avremmo che

$$\forall\, \delta > 0, \exists\, (u_\delta, v_\delta) \in K \cap (B(x, \delta) \times \mathbb{R}^{n-p}) \setminus (\cup_{i \in I} (B(x, \delta) \times B(y_i, r_i)).$$

Scegliendo $\delta = \dfrac{1}{n}$ si avrebbe che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, (u_n, v_n) \in K \cap (B(x, \frac{1}{n}) \times \mathbb{R}^{n-p}) \setminus (\cup_{i \in I} (B(x, \frac{1}{n}) \times B(y_i, r_i))).$$

Abbiamo quindi una successione $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n \in B(x, \frac{1}{n}) \tag{1.17}$$

e tale che

$$(u_n, v_n) \notin \cup_{i \in I} (B(x, \frac{1}{n}) \times B(y_i, r_i)). \tag{1.18}$$

Osserviamo ora che da (1.17) segue che

$$\lim_{n \to \infty} u_n = x \tag{1.19}$$

e da (1.18)

$$v_n \notin \cup_{i \in I} B(y_i, r_i). \tag{1.20}$$

Siccome in $\mathbb{R}^n$ un insieme è compatto se e solo se è compatto per successioni, si ha che esiste $(u, v) \in K$ ed esiste $(u_{h_n}, v_{h_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ sottosuccessione di $(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{h_n}, v_{h_n}) = (u, v) \in K. \tag{1.21}$$

Da (1.19) e tenendo conto del fatto che $(u_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è sottosuccessione di $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} u_{h_n} = x$$

e quindi, per (1.21),

$$u = x. \tag{1.22}$$

Da (1.20) segue che

$$v_{h_n} \in \mathbb{R}^{n-p} \setminus (\cup_{i\in I} B(y_i, r_i)).$$

Dato che $\mathbb{R}^{n-p} \setminus \cup_{i\in I} B(x_i, r_i)$ è un chiuso e v_{h_n} converge a v, per la caratterizzazione per successioni di un insieme chiuso, si ha che

$$v \in \mathbb{R}^{n-p} \setminus (\cup_{i\in I} B(y_i, r_i))$$

cioè

$$v \notin \cup_{i\in I} B(y_i, r_i). \tag{1.23}$$

Da (1.21) e (1.22) segue che $v \in K_x$ e da (1.15) si ha

$$v \in \cup_{i\in I} B(y_i, r_i)$$

e ciò è in contraddizione con (1.23). Abbiamo così dimostrato (1.16).

Dal Lemma 1.3 con $U = X = B(0, R)$ posso ricoprire X con una famiglia finita o numerabile di palle $\{B(x^{(j)}; \delta^{(j)})\}_{j\in J}$ di $\mathbb{R}^p$ tale che

$$\sum_{j\in J} \mathrm{vol}(B(x^{(j)}, \delta^{(j)})) < 3^p \,\mathrm{vol}(B(0, R)). \tag{1.24}$$

Per (1.16), possiamo definire un ricoprimento aperto di K $\{B(x^{(j)}, \delta^{(j)}) \times B(y_i^{(j)}, r_i^{(j)})\}_{i,j\in I,J}$. Da (1.15), (1.24) e dal fatto che $\mathrm{vol}(A \times B) = \mathrm{vol}(A)\,\mathrm{vol}(B)$ si ha

$$\sum_{i,j} \mathrm{vol}(B(x^{(j)}, \delta^{(j)}) \times B(y_i^{(j)}, r_i^{(j)})) < \epsilon \sum_{j} \mathrm{vol}(B(x^{(j)}, \delta^{(j)})) \leq \epsilon 3^p \,\mathrm{vol}(B(0, R)).$$

Quindi per ogni $\epsilon > 0$

$$\mu(K) < \epsilon 3^n \,\mathrm{vol}(B(0, R)).$$

Per l'arbitrarietà di ϵ segue che K ha misura zero. $\square$

Capitolo 2

Teorema di Morse-Sard

Questo è il capitolo centrale della tesi. Qui infatti enunciamo e dimostriamo il Teorema di Morse-Sard nella sua formulazione ottimale.

Il Teorema di Morse-Sard (Teorema 2.8) afferma che, se $f : U \to \mathbb{R}^n$, con U aperto di $\mathbb{R}^m$, $m \geq n$, è una funzione di classe C^{m-n+1}, allora $f(crit(f))$ ha misura zero in $\mathbb{R}^n$.

Qui $crit(f)$ denota l'insieme

$$crit(f) := \{x \in U \mid \operatorname{rg} Df(x) \text{ non è massimo}\}$$

Ovviamente, se $n = 1$, tale insieme coincide con

$$C(f) := \{x \in U \mid \nabla f(x) = 0\}.$$

Di tale teorema diamo la dimostrazione di Moreira e Ruas in [5], la quale fa uso del cosiddetto "Curve selection lemma".

2.1 Il "Curve selection lemma"

Definizione 2.1 (Insieme algebrico). *Sia $V \subset \mathbb{R}^n$. Diciamo che V è un insieme algebrico se è il luogo degli zeri di un numero finito di polinomi.*

Definizione 2.2 (Insieme semialgebrico). *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto definito da un numero finito di disequazioni polinomiali, ossia*

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, g_1(x) > 0, ..., g_h(x) > 0\}$$

con g_i polinomio per ogni $i \in \{1, \dots, h\}$, e sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un insieme algebrico. Allora $U \cap V$ è detto insieme semialgebrico.

Vale il seguente risultato.

Lemma 2.3 (Curve selection lemma)**.** *Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ un aperto definito da un numero finito di disequazioni polinomiali e $V \subset \mathbb{R}^m$ un insieme algebrico.*

Se $0 \in \overline{U \cap V}$, allora esiste una curva reale analitica $\gamma : [0, \epsilon[\to \mathbb{R}^m$, tale che $\gamma(0) = 0$, e $\gamma(t) \in U \cap V$ per ogni $t > 0$.

Tale risultato, dovuto a Milnor, ha una dimostrazione molto articolata, per la quale rimandiamo al capitolo 3 del libro [4].

Il seguente risultato è un'applicazione del Curve Selection Lemma 2.3 che servirà nella dimostrazione del Lemma 2.6.

Proposizione 2.4. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto, $0 \in U$. Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale tale che $f(0) = 0$. Se $C \in \mathbb{R}$, $C > 1$, allora esiste un intorno W di 0 tale che:*

$$|f(x)| \leq C\|x\|\|Df(x)\| \quad \forall x \in W.$$

Dimostrazione. Definiamo:

$$S := \{x \in U \,:\, C\|x\|\|Df(x)\| < |f(x)|\}.$$

Se $S = \emptyset$ allora $W = U$.
Sia $S \neq \emptyset$. Se $0 \notin S'$, dove ricordiamo che S' denota l'insieme dei punti di accumulazione di S, allora

$$\exists\, r > 0 \,:\, B(0, r) \subset U$$

e

$$|f(x)| \leq C\|x\|\|Df(x)\|, \quad \forall\, x \in B(0, r);$$

in tal caso $W = B(0, r)$.
Resta da considerare il caso $S \neq \emptyset$ e $0 \in S'$. Dato che f è una funzione polinomiale, anche Df è una funzione polinomiale, quindi l'insieme S è semialgebrico.

Quindi per il Lemma di selezione della curva, vedi Lemma 2.3, si ha che

$$\exists\, \epsilon > 0 \text{ e } \exists\, \gamma : [0, \epsilon[\to \mathbb{R}^m,$$

tale che $\gamma \in C^1$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(]0, \epsilon[) \subseteq S$ e

$$\|\gamma'(t)\| = 1, \quad \forall\, t \in [0, \epsilon[. \tag{2.1}$$

Pertanto

$$C\|\gamma(t)\|\|Df(\gamma(t))\| < |f(\gamma(t))|.$$

Definiamo la funzione $\Phi : [0, \epsilon[\to \mathbb{R}$, $\Phi(t) = (f \circ \gamma)(t)$.
Allora vale

$$C\|\gamma(t)\|\|Df(\gamma(t))\| < |\Phi(t)| \quad \forall\, t \in [0, \epsilon[\tag{2.2}$$

e si ottiene da (2.1) e (2.2) che

$$\begin{aligned}C\|\gamma(t)\||t||\Phi'(t)| &= C\|\gamma(t)\||t||(f\circ\gamma)'(t)| \\ &\le C\|\gamma(t)\||t|\|Df(\gamma(t))\|\|\gamma'(t)\| \le |t||\Phi(t)|\|\gamma'(t)\| \\ &= |t||f(\gamma(t))|, \quad \forall t\in[0,\epsilon[.\end{aligned}$$

Abbiamo così dedotto che

$$C\|\gamma(t)\||t||\Phi'(t)| \le |t||f(\gamma(t))| \quad \forall t\in[0,\epsilon[. \tag{2.3}$$

Applicando lo sviluppo di Taylor centrato in 0 con il resto di Lagrange alla funzione γ si ha

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \gamma'(\tau)t = \gamma'(\tau)t,$$

con $\tau\in[0,t]$.

Tenendo conto di (2.1) e che $\gamma(0)=0$ si ha

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{\gamma(t)}{t}\right\| = \lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t}\right\| = \|\gamma'(0)\| = 1$$

quindi

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{t}{\gamma(t)}\right\| = 1$$

ovvero

$$\forall\,\sigma>0,\ \exists\,\delta\in]0,\epsilon[:\ \left\|\frac{t}{\gamma(t)}\right\| \le 1+\sigma,\ \forall\,t\in]0,\delta]. \tag{2.4}$$

Allora

$$\frac{1}{C}\frac{\|t\|}{\|\gamma(t)\|} \le \frac{1}{C}(1+\sigma),\ \forall\,t\in]0,\delta]. \tag{2.5}$$

In particolare posso scegliere σ abbastanza piccolo di modo che

$$\rho := \frac{1}{C}(1+\sigma) < 1. \tag{2.6}$$

Otteniamo da (2.4), (2.5) e (2.6) che

$$\exists\,\rho\in\left]\frac{1}{C},1\right[,\quad \exists\,\delta\in]0,\epsilon[\ \text{ tale che }\ \frac{1}{C}\frac{|t|}{\|\gamma(t)\|}\le\rho \quad \forall\,t\in]0,\delta]$$

e quindi, da (2.3),

$$|t||\Phi'(t)| \le \rho|\Phi(t)| \quad \forall\,t\in]0,\delta[. \tag{2.7}$$

Definiamo ora la funzione: $g:]0,\delta[\to\mathbb{R}$, $g(t)=\log(|\Phi(t)|)$. g è derivabile e risulta

$$g'(t) = \frac{d}{dt}(\log(|\Phi(t)|) = \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}$$

quindi, per (2.7)

$$|g'(t)| = \frac{|\Phi'(t)|}{|\Phi(t)|} \leq \frac{\rho}{t} \quad \forall\, t \in]0, \delta[.$$

Allora, per ogni $s \in]0, \delta[$, si ha

$$\left| \log \left| \frac{\Phi(\delta)}{\Phi(s)} \right| \right| = |g(\delta) - g(s)| = \left| \int_s^\delta g'(t)\, dt \right| \leq \int_s^\delta \frac{\rho}{t}\, dt = \rho \log \left| \frac{\delta}{s} \right| = \log \left| \frac{\delta}{s} \right|^\rho,$$

da cui

$$\frac{|\Phi(\delta)|}{|\Phi(s)|} \leq \left(\frac{\delta}{s} \right)^\rho.$$

Abbiamo così ottenuto

$$|\Phi(s)| \geq \left(\frac{s}{\delta} \right)^\rho |\Phi(\delta)| \quad \forall\, s \in]0, \delta[.$$

Dato che $\delta < 1$ si ha che $\dfrac{s}{\delta} \geq s$, e quindi

$$\frac{|\Phi(s)|}{s^\rho} \geq |\Phi(\delta)| \quad \forall\, s \in]0, \delta[,$$

da cui segue, tenendo conto di (2.2),

$$\liminf_{s \to 0^+} \left| \frac{\Phi(s)}{s^\rho} \right| \geq |\Phi(\delta)| > 0. \tag{2.8}$$

Essendo $\Phi \in C^1$ e scrivendo il suo sviluppo di Taylor centrato in 0 con il resto di Lagrange si ha

$$\Phi(s) = \Phi(0) + \Phi'(\tau)s$$

con $\tau \in]0, s[$.

Siccome

$$\Phi(0) = f(\gamma(0)) = f(0) = 0$$

si ha

$$\Phi(s) = \Phi'(\tau)s. \tag{2.9}$$

Φ' è continua su $[0, \delta]$. Definiamo

$$M := \max_{t \in [0, \delta]} |\Phi'(t)|.$$

Tendendo conto di (2.9) si ha

$$\left| \frac{\Phi(s)}{s} \right| \leq M \quad \forall\, s \in]0, \delta[. \tag{2.10}$$

Da (2.10) si ha che

$$\left|\frac{\Phi(s)}{s^\rho}\right| = \frac{|\Phi(s)|}{s} s^{1-\rho} \le M s^{1-\rho} \quad \forall\, s \in]0, \delta[\tag{2.11}$$

e quindi da (2.8) e (2.11)

$$\liminf_{s \to 0^+} \left|\frac{\Phi(s)}{s^\rho}\right| \le \lim_{s \to 0^+} M s^{1-\rho} = 0$$

e ciò è in contraddizione con (2.8). $\square$

2.2 Un risultato preliminare

In questo paragrafo, dimostreremo il seguente risultato.

Proposizione 2.5. *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $C^p(U)$. Se $p \ge \frac{m}{n}$, allora $f(C(f))$ ha misura zero in $\mathbb{R}^n$, dove $C(f) := \{x \in U \;:\; Df(x) = 0\}$.*

Tale risultato implicherà facilmente il Teorema di Morse (Teorema 2.7), riguardante le funzioni reali, ma verrà anche utilizzato per dimostrare il caso più generale di funzioni a valori vettoriali, Teorema di Morse-Sard (Teorema 2.8).

Per la dimostrazione della Proposizione 2.5, faremo uso del seguente risultato.

Lemma 2.6. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto. Sia $f : U \to \mathbb{R}, f \in C^r(U)$, $r \ge 1$. Allora*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in crit(f)}} \frac{|f(y) - f(x)|}{\|y - x\|^r} = 0 \quad \forall\, x \in crit(f)' \cap U$$

dove $crit(f) = \{x \in U \;:\; \nabla f(x) = 0\}$.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che:

$$\exists\, \epsilon > 0 \;:\; \forall\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\, \exists\, y_k \in B(x, \frac{1}{k}) \cap crit(f) \setminus \{x\} \text{ e } \frac{|f(y_k) - f(x)|}{\|y_k - x\|^r} \ge \epsilon.$$

Ciò definisce una successione di $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset crit(f)$ tale che:

$$\lim_{k \to +\infty} y_k = x \tag{2.12}$$

e tale che

$$|f(y_k) - f(x)| \ge \epsilon \|y_k - x\|^r,\, \forall\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{2.13}$$

Sia $\widetilde{f}(y) = \sum_{\|\alpha\| \le r} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}(y-x)^\alpha$ il polinomio di Taylor di f di grado r centrato in x. Tenendo conto di (2.13) e del fatto che $\tilde{f}(x) = f(x)$, si ha

$$\begin{aligned}|\widetilde{f}(y_k) - \widetilde{f}(x)| &= |f(y_k) - f(x) + \widetilde{f}(y_k) - f(y_k)| \\ &\ge |f(y_k) - f(x)| - |\widetilde{f}(y_k) - f(y_k)| \\ &\ge \epsilon \|y_k - x\|^r - |\widetilde{f}(y_k) - f(y_k)|.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dedotto che

$$|\widetilde{f}(y_k) - \widetilde{f}(x)| \ge \epsilon \|y_k - x\|^r - |\widetilde{f}(y_k) - f(y_k)|. \tag{2.14}$$

D'altra parte, dalla formula di Taylor con il resto di Peano, vedi Teorema 1.2, si ha che

$$|\widetilde{f}(y_k) - f(y_k)| = o(\|y_k - x\|^r) \qquad \text{per } k \to +\infty. \tag{2.15}$$

Per definizione di o-piccolo e (2.15) ne deduciamo in particolare che

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tale che } |\widetilde{f}(y_k) - f(y_k)| < \frac{\epsilon}{2}\|y_k - x\|^r \quad \forall\, k \ge N,$$

quindi, da (2.14),

$$|\widetilde{f}(y_k) - \widetilde{f}(x)| \ge \frac{\epsilon}{2}\|y_k - x\|^r \quad \forall\, k \ge N. \tag{2.16}$$

La derivata di f ha un polinomio di Taylor che è la derivata del polinomio di Taylor di f, quindi si ha

$$\nabla f(y_k) = \nabla \widetilde{f}(y_k) + o(\|y_k - x\|^{r-1}),\ \forall\, k \ge N$$

e dato che $\nabla f(y_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\|\nabla \widetilde{f}(y_k)\| = o(\|y_k - x\|^{r-1}) \quad \forall\, k \ge N. \tag{2.17}$$

Consideriamo ora il caso in cui $f(x) = 0$ e quindi $\widetilde{f}(x) = 0$. Definiamo l'insieme

$$V := \{\xi \in \mathbb{R}^m \,:\, \xi = u - x,\ u \in U\}.$$

Siccome $x \in U$ allora $0 \in V$.

Definiamo la funzione $h : V \to \mathbb{R}$, $h(v) = \widetilde{f}(v + x)$. Dato che $\widetilde{f}$ è una funzione polinomiale, anche h è una funzione polinomiale ed è tale che

$$h(0) = \widetilde{f}(x) = 0$$

Applicando la Proposizione 2.4 ad h con $C = 2$, si ha che

$$\exists\, W \text{ intorno di } 0 \text{ tale che } |h(v)| \leq 2\|v\|\|\nabla h(v)\| \quad \forall\, v \in W.$$

Definiamo l'insieme $Z := \{w + x \,:\, w \in W\}$. Z è intorno di x, e dato che $\nabla h(v) = \nabla \widetilde{f}(v + x)$, si ha

$$|\widetilde{f}(v + x)| \leq 2\|v\|\|\nabla \widetilde{f}(v + x)\|.$$

Ossia, dato che $v \in V$ allora $v = u - x$, quindi $u = v + x$, si ha

$$|\widetilde{f}(u)| \leq 2\|u - x\|\|\nabla \widetilde{f}(u)\| \quad \forall\, u \in Z. \tag{2.18}$$

Da (2.12) e dal fatto che Z è intorno di x ne deduciamo che la successione $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartiene definitivamente a Z, quindi

$$\exists\, M \in \mathbb{N}, M \geq N \text{ tale che } y_k \in Z \quad \forall\, k \geq M$$

allora, da (2.18) con $u = y_k$ e $k \geq M$ si ha che

$$|\widetilde{f}(y_k)| \leq 2\|y_k - x\|\|\nabla \widetilde{f}(y_k)\| \tag{2.19}$$

e quindi da (2.17) e (2.19)

$$|\widetilde{f}(y_k)| \leq 2\|y_k - x\| o(\|y_k - x\|^{r-1}) = o(\|y_k - x\|^r).$$

Abbiamo quindi dedotto che

$$|\widetilde{f}(y_k)| \leq o(\|y_k - x\|^r) \quad \forall\, k \geq M. \tag{2.20}$$

Da (2.16) e (2.20) si ha che

$$\frac{\epsilon}{2}\|y_k - x\|^r \leq |\widetilde{f}(y_k)| \leq o(\|y_k - x\|^r) \quad \forall\, k \geq M,$$

quindi

$$\frac{\epsilon}{2} \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{o(\|y_k - x\|^r)}{\|y_k - x\|^r} = 0.$$

Da cui segue che $\epsilon \leq 0$, che è assurdo perché $\epsilon > 0$. Quindi vale al tesi.

Consideriamo ora il caso $f(x) \neq 0$. Definiamo la funzione $g : U \to \mathbb{R}$, $g \in C^k(U)$, tale che

$$g(y) = f(y) - f(x)$$

quindi $g(x) = f(x) - f(x) = 0$ e $crit(f) = crit(g)$.

Per quanto visto nel caso $f(x) = 0$ applicato alla funzione g si ha che

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in crit(g)}} \frac{|g(y)|}{\|y - x\|^r} = 0 \quad \forall\, x \in crit(g)' \cap U$$

ossia
$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in crit(f)}} \frac{|f(y)-f(x)|}{\|y-x\|^r} = 0 \quad \forall\, x \in crit(f)' \cap U.$$
Abbiamo quindi dimostrato la tesi.

□

Siamo ora in grado di dimostrare la Proposizione 2.5, facendo uso, sia del lemma sopra, che del Teorema di ricoprimento 1.3.

Dimostrazione della Proposizione 2.5. Dato che U è unione numerabile di insiemi limitati e dato che una unione numerabile di insiemi di misura zero ha misura zero, possiamo supporre senza perdita di generalità che U sia limitato.

Osserviamo che
$$C(f) = (C(f) \cap C(f)') \cup (C(f) \setminus C(f)').$$

Consideriamo come primo caso gli $\bar{x} \in C(f) \cap C(f)'$.

$f : U \to \mathbb{R}^n$, quindi $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \cdots f_n(\bar{x}))$, con $f_i : U \to \mathbb{R}$. Possiamo applicare il Lemma 2.6 alle singole coordinate della funzione f e quindi per ogni $i \in \mathbb{N}$
$$\lim_{\substack{y\to \bar{x}\\ y\in crit(f)}} \frac{|f_i(y)-f_i(\bar{x})|}{\|y-\bar{x}\|^p} = 0$$
Abbiamo quindi dedotto che
$$\lim_{\substack{y\to \bar{x}\\ y\in crit(f)}} \frac{\|f(y)-f(\bar{x})\|}{\|y-\bar{x}\|^p} = 0$$
cioè
$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta_{\bar{x}} \in]0,1[\text{ tale che se}$$
$$y \in C(f) \cap B(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}) \text{ allora } \|f(y)-f(\bar{x})\| < \left(\frac{\epsilon\omega_m}{\omega_n 3^m \operatorname{vol}(U)}\right)^{\frac{1}{n}} \|y-\bar{x}\|^p.$$

Pertanto se $y \in B(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}) \cap C(f)$ si ha che
$$f(y) \in D_{\bar{x}}$$
dove $D_{\bar{x}} = B\left(f(\bar{x}), (\frac{\epsilon\omega_m}{\omega_n 3^m \operatorname{vol}(U)})^{\frac{1}{n}} \delta_{\bar{x}}^p\right)$ in $\mathbb{R}^n$.

Riassumendo:
$$\forall\, x \in C(f) \cap C(f)',\ \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta_x \in]0,1[\text{ tale che } f(C(f) \cap B(x, \delta_x) \subseteq D_x \qquad (2.21)$$

con $D_x = B\left(f(x), (\frac{\epsilon\omega_m}{\omega_n 3^m \operatorname{vol}(U)})^{\frac{1}{n}}\delta_x^p\right)$ palla di $\mathbb{R}^n$

Il secondo caso possibile è il caso di $\bar{x} \in C(f) \setminus C(f)'$. In questo caso $\bar{x}$ è un punto isolato di $C(f)$, quindi esiste $\delta_{\bar{x}} \in]0,1[$ tale che $B(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}) \cap C(f) = \{\bar{x}\}$.

Quindi

$$f(B(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}) \cap C(f)) = \{f(\bar{x})\}.$$

Abbiamo quindi che per ogni $\epsilon > 0$ risulta

$$f(C(f) \cap B(\bar{x}, \delta_{\bar{x}})) \subset D_{\bar{x}}$$

dove $D_{\bar{x}} = B\left(f(\bar{x}), (\frac{\epsilon\omega_m}{\omega_n 3^m \operatorname{vol}(U)})^{\frac{1}{n}}\delta_{\bar{x}}^p\right)$

Riassumendo:

$$\forall\, x \in C(f) \setminus C(f)',\ \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta_x \in]0,1[\text{ tale che } f(C(f) \cap B(x, \delta_x)) \subset D_x \tag{2.22}$$

dove $D_x = B\left(f(x), (\frac{\epsilon\omega_m}{\omega_n 3^m \operatorname{vol}(U)})^{\frac{1}{n}}\delta_x^p\right)$

Da (2.21) e (2.22) segue che

$$\forall\, x \in C(f),\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta_x \in]0,1[\text{ tale che } f(C(f) \cap B(x, \delta_x)) \subset D_x. \tag{2.23}$$

Dato che $\operatorname{vol}(B(x, \delta_x)) = \omega_m \delta_x^m$ e che $p \geq \dfrac{m}{n}$, possiamo stimare $\operatorname{vol}(D_x)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(D_x) &= \omega_n \frac{\epsilon\omega_m}{\omega_n 3^m \operatorname{vol}(U)} \delta_x^{pn} = \frac{\epsilon\omega_m}{3^m \operatorname{vol}(U)} \delta_x^{pn} \\ &\leq \frac{\epsilon\omega_m}{3^m \operatorname{vol}(U)} \delta_x^m = \frac{\epsilon}{3^m \operatorname{vol}(U)} \operatorname{vol}(B(x, \delta_x)).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Dal Lemma 1.3 esiste un insieme finito o numerabile $\{x_i\}_{i \in I} \subset C(f)$ tale che

$$C(f) \subset \cup_i B(x_i, \delta_{x_i}) \text{ e } \sum_i \operatorname{vol}(B(x_i, \delta_{x_i})) < 3^m \operatorname{vol}(U). \tag{2.25}$$

Da (2.25) si ha

$$C(f) = C(f) \cap (\cup_i B(x_i, \delta_{x_i})) = \cup_i (C(f) \cap B(x_i, \delta_{x_i}))$$

e, siccome $f(\cup_i A_i) = \cup_i f(A_i)$, usando (2.23)

$$f(C(f)) = \cup_i f(C(f) \cap B(x_i, \delta_{x_i})) \subset \cup_i D_{x_i}. \tag{2.26}$$

Da (2.24) e (2.25) segue che per ogni $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \mathrm{vol}(D_{x_i}) &\leq \sum_{i\in I} \frac{\epsilon}{3^m \,\mathrm{vol}(U)} \,\mathrm{vol}(B(x_i, \delta_{x_i}))\\ &= \frac{\epsilon}{3^m \,\mathrm{vol}(U)} \sum_{i\in I} \mathrm{vol}(B(x_i, \delta_{x_i}))\\ &\leq \frac{\epsilon}{3^m \,\mathrm{vol}(U)} 3^m \,\mathrm{vol}(U) = \epsilon.\end{aligned}$$

Allora, per (2.26), $f(C(f))$ ha misura zero in $\mathbb{R}^n$. □

2.3 Il Teorema di Morse-Sard: il caso $m \geq n$

Come conseguenza della Proposizione 2.5 si ottiene il Teorema di Morse, che riguarda il caso $n = 1$ del più generale Teorema di Morse-Sard. Più precisamente vale il seguente risultato.

Teorema 2.7 (Teorema di Morse). *Sia U un aperto di $\mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^m(U)$. Allora $f(C(f))$ ha misura zero in $\mathbb{R}$, dove $C(f) = \{x \in U \,:\, \nabla f(x) = 0\}$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che in $\mathbb{R}$, $C(f) = crit(f)$.

Consideriamo $f_k : U \cap (]-k, k[)^m \to \mathbb{R}$ e applichiamo la Proposizione 2.5 a f_k. Allora $f_k(C(f_k)) = f(C(f_k))$ ha misura nulla in $\mathbb{R}$. Si conclude osservando che

$$C(f) = \cup_{k\in\mathbb{N}} C(f_k).$$

□

Diamo ora l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Morse-Sard, nel caso generale $m \geq n$, con $n \geq 1$.

Teorema 2.8 (Teorema di Morse-Sard). *Sia $m \geq n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$, con U aperto di $\mathbb{R}^m$, una funzione di classe C^{m-n+1}. Sia $crit(f) = \{x \in U \,:\, Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ non è suriettiva$\}$. Allora $f(crit(f))$ ha misura zero in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Sia $C_p = \{x \in U \,:\, \mathrm{rg}\, Df(x) = p\}$, allora $crit(f) = \cup_{p=0}^{n-1} C_p$.

Sia $\bar{x} \in C_p$, ossia $\bar{x} \in U$ tale che

$$\mathrm{rg}\, Df(\bar{x}) = p.$$

Quindi esiste una sottomatrice $p \times p$ di $Df(\bar{x})$ con determinante diverso da zero.

Sia $f = (g, h)$ con $g : U \to \mathbb{R}^p$, $g = (f_1, ..., f_p)$ e $h : U \to \mathbb{R}^{n-p}$, $h = (f_{p+1}, ..., f_n)$. Considerando inoltre $x = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p}$ allora si ha

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi,\eta) \\ \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial h}{\partial \eta}(\xi,\eta) \end{bmatrix} \in M(n \times m).$$

Non è restrittivo supporre che sia $\bar{x} = (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p}$,

$$\det \frac{\partial g}{\partial \xi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \neq 0. \tag{2.27}$$

Per la continuità del determinante e da (2.27) si ha che

$$\begin{aligned} &\exists O \text{ aperto di } \mathbb{R}^p, \text{ con } \bar{\xi} \in O \\ &\exists \Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^{m-p}, \text{ con } \bar{\eta} \in \Omega \text{ tali che} \\ &O \times \Omega \subset U \text{ e } \det \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi,\eta) \neq 0 \quad \forall (\xi,\eta) \in O \times \Omega. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Definiamo ora la funzione $F : O \times \Omega \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p}$, $F \in C^{m-n+1}$ nel seguente modo:

$$F(\xi,\eta,u,v) := (g(\xi,\eta) - u, \eta - v)\,.$$

Osserviamo che $F = (F_1, F_2)$ con

$$\begin{aligned} F_1 &: O \times \Omega \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \to \mathbb{R}^p,\ F_1(\xi,\eta,u,v) = g(\xi,\eta) - u \\ F_2 &: O \times \Omega \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \to \mathbb{R}^{m-p},\ F_2(\xi,\eta,u,v) = \eta - v. \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo

$$DF(\xi,\eta,u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi}(\xi,\eta,u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial \eta}(\xi,\eta,u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial u}(\xi,\eta,u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(\xi,\eta,u,v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(\xi,\eta,u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial \eta}(\xi,\eta,u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial u}(\xi,\eta,u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(\xi,\eta,u,v) \end{bmatrix}$$

cioè

$$DF(\xi,\eta,u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi,\eta) & -I_p & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & -I_{m-p} \end{bmatrix}$$

da cui segue che

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(\xi,\eta)}(\xi,\eta,u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi,\eta) \\ 0 & I_{m-p} \end{bmatrix}.$$

Per (2.28) si ha che per ogni $(\xi,\eta) \in O \times \Omega$ e $(u,v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p}$

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(\xi,\eta)}(\xi,\eta,u,v) &= \det \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi,\eta) \det I_{m-p} \\ &= \det \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi,\eta) \neq 0. \end{aligned}$$

Allora

$$\forall(\xi,\eta,u,v)\in O\times\Omega\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{m-p},\quad DF(\xi,\eta,u,v)\text{ ha rango massimo.}\tag{2.29}$$

Ponendo $\bar{u}=g(\bar{\xi},\bar{\eta})$ e $\bar{v}=\bar{\eta}$ si ha che

$$F(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{u},\bar{v})=(0,0),\tag{2.30}$$

ossia $(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{u},\bar{v})$ appartiene all'insieme di livello zero di F,

$$L_0(F)=\{(\xi,\eta,u,v)\in O\times\Omega\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{m-p}\ :\ g(\xi,\eta)=u,\ \eta=v\}.$$

Dato che valgono (2.29) e (2.30) possiamo applicare il teorema della funzione implicita e si ha

$$\begin{aligned}&\exists\, U \text{ intorno aperto di } g(\bar{\xi},\bar{\eta}) \text{ in } \mathbb{R}^p,\ \exists\, V \text{ intorno aperto di } \bar{\eta} \text{ in } \mathbb{R}^{m-p}\\ &\exists\, W\subset O\times\Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^m,\ \exists\,\varphi: U\times V\to W,\ \varphi\in C^{m-n+1}\end{aligned}$$

tale che

$$\begin{aligned}\{(\xi,\eta,u,v)\in W\times U\times V\ :\ g(\xi,\eta)=u,\ \eta=v\}=\\ =\{(\varphi(u,v),u,v)\ :\ (u,v)\in U\times V\}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Inoltre vale

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(u,v)}(u,v)=-\left(\frac{\partial F}{\partial(\xi,\eta)}(\varphi(u,v),u,v)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(\varphi(u,v),u,v)\quad\forall\,(u,v)\in U\times V$$

cioè per ogni $(u,v)\in U\times V$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(u,v)}(u,v)=-\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial\xi}(\varphi(u,v)) & \frac{\partial g}{\partial\eta}(\varphi(u,v))\\ 0 & I_{m-p}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-I_p & 0\\ 0 & -I_{m-p}\end{bmatrix},$$

quindi per il teorema di Binet

$$\det\frac{\partial\varphi}{\partial(u,v)}(u,v)=-(-1)^m\frac{1}{\det\frac{\partial g}{\partial\xi}(\varphi(u,v))}\neq 0.$$

Abbiamo cosi dedotto che

$$\forall(u,v)\in U\times V,\quad \det\frac{\partial\varphi}{\partial(u,v)}(u,v)\neq 0.\tag{2.32}$$

Per (2.32) possiamo applicare il teorema di invertibilità locale alla funzione φ nell'insieme $U\times V$ e si ha che φ è un diffeomorfismo locale di classe C^{m-n+1} (con inversa di classe C^{m-n+1}) in $U\times V$.

Osserviamo ora che la funzione $f\circ\varphi : U\times V \to \mathbb{R}^n$ è ben definita, infatti $\varphi : U\times V \to W$, con $W \subset O\times\Omega$, e $f : O\times\Omega \to \mathbb{R}^n$, quindi si ha

$$f\circ\varphi(u,v) = (g(\varphi(u,v)), h(\varphi(u,v)) = (u, (h\circ\varphi)(u,v)).$$

Definiamo la funzione $\tilde{f} : U\times V \to \mathbb{R}^{n-p}$, $\tilde{f} = h\circ\varphi$. Si ha allora che, a meno di un diffeomorfismo locale la funzione f ha forma

$$f(u,v) = (u, \tilde{f}(u,v)). \tag{2.33}$$

Si ha

$$Df(u,v) = \begin{bmatrix} D_u f(u,v) & D_v f(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_p & 0 \\ D_u\tilde{f}(u,v) & D_v\tilde{f}(u,v) \end{bmatrix}$$

da cui $(u,v) \in C_p$ se e solo se $D_v\tilde{f}(u,v) = 0$. Infatti se $D_v\tilde{f}(u,v) \neq 0$ avremmo che la matrice non avrebbe più rango p. Allora

$$C_p = \{(u,v) \in U\times V \,:\, D_v\tilde{f}(u,v) = 0\}. \tag{2.34}$$

Fissato $u \in \mathbb{R}^p$, definiamo

$$F_u := \{(u,v) \,:\, v \in \mathbb{R}^{n-p}\}$$

e

$$\tilde{f}_u(v) := \tilde{f}(u,v). \tag{2.35}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} F_u \cap C_p &= \{(u,v) \,:\, v \in \mathbb{R}^{n-p},\ D_v\tilde{f}(u,v) = 0\} \\ &= \{(u,v) \,:\, v \in \mathbb{R}^{n-p},\ D\tilde{f}_u(v) = 0\}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Definiamo

$$N := \{v \in V \,:\, D\tilde{f}_u(v) = 0\}. \tag{2.37}$$

Osserviamo che da (2.33) e (2.35)

$$\begin{aligned} f(F_u) &= \{f(u,v) \,:\, v \in \mathbb{R}^{n-p}\} \\ &= \{(u, \tilde{f}(u,v)) \,:\, v \in \mathbb{R}^{n-p}\} \\ &= \{(u, \tilde{f}_u(v)) \,:\, v \in \mathbb{R}^{n-p}\} \\ &= \{u\} \times \{\tilde{f}_u(v) \,:\, v \in \mathbb{R}^{n-p}\} \end{aligned}$$

da cui ne deduciamo che

$$f(F_u) = \{u\} \times \{\tilde{f}_u(v) \,:\, v \in \mathbb{R}^{n-p}\}. \tag{2.38}$$

Da (2.36), (2.37) e (2.38) si ha

$$f(F_u \cap C_p) = \{u\} \times \{\tilde{f}_u(v) \,:\, v \in \mathbb{R}^{n-p},\ D\tilde{f}_u(v) = 0\} \subseteq \{u\} \times \tilde{f}_u(N). \tag{2.39}$$

Osserviamo ora che, per $p \leq n-1$

$$m - n + 1 \geq \frac{m-p}{n-p} = \frac{m-n}{n-p} + 1. \tag{2.40}$$

e che

$$N = crit(\tilde{f}_u). \tag{2.41}$$

Da (2.40) e (2.41) applicando il Teorema 2.8 si ha

$$\tilde{f}_u(N) \text{ ha misura zero in } \mathbb{R}^{n-p} \quad \forall\, u \in U.$$

Siccome prodotto di insiemi di misura zero ha misura zero si ha

$$\{u\} \times \tilde{f}_u(N) \text{ ha misura zero}$$

e quindi da (2.39)

$$f(F_u \cap C_p) \text{ ha misura zero in } \mathbb{R}^n.$$

Siccome D è aperto allora D è unione numerabile di palle chiuse. Dato che le palle chiuse sono compatte possiamo supporre senza perdita di generalità che C_p, e quindi $f(C_p)$, sono compatti.

Posto $K = f(C_p)$ esso è un compatto di $\mathbb{R}^n$, e da (2.34) si ha

$$\begin{aligned} K = f(C_p) &= \{f(u,v) \,:\, \mathrm{rg}\, Df(u,v) = p\} \\ &= \{(u, \tilde{f}(u,v)) \,:\, D_v \tilde{f}(u,v) = 0\} \end{aligned}$$

e quindi da (2.39)

$$K_u = f(F_u \cap C_p).$$

Dato che, per ogni $u \in U$, K_u ha misura zero, allora per il Lemma 1.4 si ha che $f(C_p)$ ha misura zero.

□

Il caso $m = n$ rappresenta un caso particolarmente significativo del Teorema di Morse-Sard 2.8. Lo mettiamo qui in evidenza.

Teorema 2.9. *Sia $f : U \to \mathbb{R}^n$, con U aperto di $\mathbb{R}^n$, una funzione di classe C^1. Sia $crit(f) = \{x \in U \,:\, \det Df(x) = 0\}$. Allora $f(crit(f))$ ha misura zero in $\mathbb{R}^n$.*

Osserviamo che le ipotesi del Teorema di Morse-Sard 2.8 sono ottimali. Infatti Whitney [11] ha pubblicato nel 1935, un controesempio.

2.4 Il Teorema di Morse-Sard: il caso $m < n$

Concludiamo il capitolo presentando il Teorema di Morse-Sard nel caso $m < n$, che sarà un corollario del seguente risultato, si veda ad esempio [7].

Teorema 2.10. *Siano $U \subset \mathbb{R}^m$ un aperto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $C^1(U)$, con $m < n$. Allora*

$$\mathrm{vol}(f(U)) = 0.$$

Dimostrazione. Siano $a \in \mathbb{Z}^m$ e $N \in \mathbb{Z}^+$, definiamo

$$C(a, N) := \{x \in \mathbb{R}^m \, : \, |Nx_i - a_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2, ..., m\}$$

il cubo m-dimensionale chiuso centrato in $\dfrac{a}{N}$ e di lato $\dfrac{1}{N}$.

Definiamo la famiglia

$$\mathcal{Q} := \{C(a, N) \, : \, a \in \mathbb{Z}^m, \ N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

e osserviamo che $\mathcal{Q}$ è numerabile e le sue sottofamiglie formate dai cubi di lato $\frac{1}{N}$ sono ricoprimenti chiusi e localmente finiti di $\mathbb{R}^m$.

L'insieme U è l'unione $\cup_{k \in J} C_k$ degli elementi della famiglia $\{C_k := C(a_k, N_k) \, : \, C_k \subset U\}$, dove $J \subseteq \mathbb{N}$.

Allora

$$f(U) = \cup_{k \in J} f(C_k). \tag{2.42}$$

Siccome per ogni $k \in \mathbb{N}$ C_k è compatto, anche $f(C_k)$ è compatto, e quindi $f(C_k)$ è misurabile secondo Lebesgue.

Fissiamo $p \in \mathbb{N}$. f è di classe $C^1(U)$ quindi f è localmente lipschitziana, cioè:

$$\exists \, L_p > 0 \, : \, \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L_p \|x_1 - x_2\|, \quad \forall \, x_1, x_2 \in C_p.$$

Sia $E \subset C_p$ con $\mathrm{diam}(E) = \delta$, allora vale

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L_p \|x_1 - x_2\| < \delta L_p, \quad \forall \ x_1, x_2 \in E, \tag{2.43}$$

quindi $f(E)$ è contenuto in una palla di raggio $L_p \delta$, ed è cioè contenuto in un cubo di lato $2L_p\delta$.

Osserviamo ora che C_p è unione di N^m cubi m-dimensionali di lato $\frac{1}{NN_p}$ dove $\frac{1}{N_p}$ è il lato di C_p, siano essi $\{K_1, K_2, ..., K_{N^m}\}$,

$$C_p = \cup_{i=1}^{N^m} K_i. \tag{2.44}$$

Allora, per (2.43), $f(K_i)$ è contenuto in un cubo di lato $2L_p\frac{\sqrt{m}}{NN_p}$, e per (2.44), $f(C_p)$ è contenuto nell'unione di N^m cubi n-dimensionali di lato $2L_p\frac{\sqrt{m}}{NN_p}$, siano essi $\{D_1, D_2, ..., D_{N^m}\}$,

$$f(C_p) \subset \cup_{i=1}^{N^m} D_i. \tag{2.45}$$

Per (2.45) si ha

$$\begin{aligned}0 \leq \mathrm{vol}(f(C_p)) &\leq \sum_{i=1}^{N^m} \mathrm{vol}(D_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N^m} \left(\frac{2L_p\sqrt{m}}{NN_p}\right)^n = N^m \left(\frac{2L_p\sqrt{m}}{NN_p}\right)^n \\ &= \frac{2^n(L_p)^n m^{\frac{n}{2}}}{N_p^n} N^{m-n}.\end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{2^n(L_p)^n m^{\frac{n}{2}}}{N_p^n} N^{m-n} = 0$$

risulta che $\mathrm{vol}(f(C_p)) = 0$.

Abbiamo quindi dimostrato che per ogni $k \in J$ si ha che $\mathrm{vol}(f(C_k)) = 0$.

Per (2.42) si ha la tesi. □

Come conseguenza del Teorema 2.10 si ha il Teorema di Morse-Sard nel caso $m < n$.

Corollario 2.11 (Teorema di Morse-Sard nel caso m<n)**.** *Siano $U \subset \mathbb{R}^m$ un aperto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $C^1(U)$, con $m < n$. Sia $crit(f) = \{x \in U :$ $Df(x)$ non ha rango massimo$\}$. Allora $f(crit(f))$ ha misura zero in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. $crit(f) \subset U$ per definizione.
Per il Teorema 2.10 si ha che $\mathrm{vol}(f(U)) = 0$.
Osservando che $f(crit(f)) \subset f(U)$, si ha la tesi. □

Capitolo 3

Il lemma di Sard per funzioni differenziabili

Per il Teorema 2.8 di Morse-Sard, nel caso $n = m$, si ha:

Se $f : U \to \mathbb{R}^n$, con U aperto di $\mathbb{R}^n$, una funzione di classe C^1. Allora $f(crit(f))$ ha misura zero in $\mathbb{R}^n$, dove

$$crit(f) := \{x \in U \, : \, \det Df(x) = 0\}.$$

Nel 1966 Varberg [10] ha dimostrato che è sufficiente richiedere la differenziabilità di f. Oggetto di questo capitolo è la presentazione di questo risultato, con dimostrazione.

3.1 I ricoprimenti di Vitali

Iniziamo enunciando alcuni risultati preliminari, tra cui un teorema di ricoprimento di tipo Vitali.

Definizione 3.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{K}$ la famiglia dei cubi di $\mathbb{R}^n$ contenente E. Chiamiamo* parametro di regolarità di E *la seguente quantità*

$$r(E) = \inf_{K \in \mathcal{K}} \frac{\mathrm{vol}(E)}{\mathrm{vol}(K)}.$$

Definizione 3.2. *Diciamo che una successione $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ è* regolare *se esiste un numero positivo a tale che*

$$r(E_n) > a \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definizione 3.3. *Diciamo che una successione $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ è convergente a $x \in \mathbb{R}^n$ se $x \in E_n$ per ogni n e $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$ per $n \to +\infty$.*

Definizione 3.4. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Diciamo che una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi di $\mathbb{R}^n$ è un* ricoprimento nel senso di Vitali *di E se per ogni $x \in E$ esiste un successione regolare $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{F}$ convergente a x.*

Teorema 3.5 (Teorema di ricoprimento di Vitali)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{C}$ una famiglia di insiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$. Se $\mathcal{C}$ è un ricoprimento di Vitali di E, allora esiste una sottofamiglia numerabile o finita di elementi di $\mathcal{C}$, sia essa $\{E_i\}_{i\in I}$, a due a due disgiunti, tale che*

$$\mathrm{vol}(E \setminus \cup_{i\in I} E_i) = 0.$$

Rimandiamo a [8] per una dimostrazione.

3.2 Alcune disuguaglianze geometriche

Vediamo in questa sezione alcune disuguaglianze geometriche che saranno poi utili nella sezione successiva.
Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ indicheremo col simbolo $\mu^*(E)$ la sua misura esterna secondo Lebesgue.

Definizione 3.6. *Un cubo $C \subset \mathbb{R}^n$ si dice* orientato *se ha i lati paralleli agli assi coordinati.*

Lemma 3.7. *Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ contenuto in un iperpiano H, sia $x_0 \in F$ e $d > 0$ tale che $\|x - x_0\| \leq d$ per ogni $x \in F$. Sia*

$$G := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, d(x, F) < \delta\}.$$

Allora G è misurabile e vale

$$\mathrm{vol}(G) \leq 2^n (d + \delta)^{n-1} \delta.$$

Per la dimostrazione del Lemma 3.7 rimandiamo a [2].

Lemma 3.8. *Sia $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare, sia*

$$C := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, ..., n\}$$

il cubo unitario e poniamo $P = h(C)$. Sia

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, d(x, P) < \delta\}.$$

Allora Q è misurabile ed esiste una costante $A(n) > 0$ dipendente da n tale che

$$\mathrm{vol}(Q) \leq |\det\, h| + A(n)(\|h\| + \delta)^{n-1} \delta.$$

Dimostrazione. Q è aperto quindi Q è misurabile.
Il primo caso è det $h = 0$. In questo caso esiste un iperpiano H di $\mathbb{R}^n$ tale che $P \subset H$.

Sia $v_0 \in C$ il centro del cubo, allora, per ogni $v \in C$

$$\|h(v) - h(v_0)\| = \|h(v - v_0)\| \leq \|h\|\|v - v_0\| \leq \|h\|\frac{1}{2}\sqrt{n}. \tag{3.1}$$

Siccome $P = h(C)$, ponendo $x_0 = h(v_0)$ si ha da (3.1) che per ogni $x \in P$

$$\|x - x_0\| \leq \|h\|\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Quindi, applicando il Lemma 3.7 con $F = P$ e $d = \frac{1}{2}\|h\|\sqrt{n}$, si ha

$$\mathrm{vol}(Q) \leq 2^n(\frac{1}{2}\sqrt{n}\|h\| + \delta)^{n-1}\delta \leq A(n)(\|h\| + \delta)^{n-1}\delta$$

Da cui la tesi.

Il secondo caso è il caso in cui det $h \neq 0$. In questo caso P è un parallelepipedo n-dimensionale di misura

$$\mathrm{vol}(P) = |\det h| \,\mathrm{vol}(C) = |\det h|.$$

P è compatto, quindi per ogni $y \in Q \setminus P$ esiste un $x \in P$ tale che

$$\|y - x\| = d(y, P)$$

in particolare x sta almeno in una faccia $(n-1)$-dimensionale di P.

Osserviamo che ogni faccia di P è immagine tramite h di una faccia di C, quindi presa B una faccia di C si ha $h(B) \subset H$, con H iperpiano di $\mathbb{R}^n$, e preso $x_0 \in h(B)$ il suo centro, vale, per ogni $x \in h(B)$

$$\|x - x_0\| \leq \frac{1}{2}\sqrt{n-1}\|h\|.$$

Definiamo $E := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, d(x, h(B)) < \delta\}$ e applicando il Lemma 3.7 con $F = h(B)$ e $d = \frac{1}{2}\sqrt{n-1}\|h\|$ vale

$$\mathrm{vol}(E) \leq 2^n(\frac{1}{2}\sqrt{n-1}\|h\| + \delta)^{n-1}\delta \leq A'(n)(\|h\| + \delta)^{n-1}\delta \tag{3.2}$$

dove $A'(n)$ è una costante positiva dipendente da n.

C ha $2n$ facce $(n-1)$-dimensionali, siano esse $\{B_1, B_2, ..., B_{2n}\}$, definiamo

$$E_i := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, d(x, h(B_i)) < \delta\} \tag{3.3}$$

e quindi si ha

$$Q \setminus P \subseteq \cup_{i=1}^{2n} E_i. \tag{3.4}$$

Quindi, da (3.2), (3.3) e (3.4) vale

$$\mathrm{vol}(Q \setminus P) \leq \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{vol}(E_i) \leq 2n(A'(n)(\|h\| + \delta)^{n-1}\delta) \leq A(n)((\|h\| + \delta)^{n-1}\delta \qquad (3.5)$$

dove abbiamo definito $A(n) := 2nA'(n)$.

Dato che $Q = P \cup (Q \setminus P)$, da (3.5) si ha

$$\mathrm{vol}(Q) = \mathrm{vol}(P) + \mathrm{vol}(Q \setminus P) \leq |\det h| + A(n)(\|h\| + \delta)^{n-1}\delta.$$

Da cui la tesi. □

Dal Lemma 3.8, ricalcando la dimostrazione, segue immediatamente il seguente

Lemma 3.9. *Sia C un cubo chiuso e orientato di $\mathbb{R}^n$ di lato α e sia $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Sia*

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, d(x, h(C)) < \alpha\delta\}$$

allora Q è misurabile ed esiste una costante $A(n) > 0$ dipendente da n tale che

$$\mathrm{vol}(Q) \leq \mathrm{vol}(C)(|\det h| + A(n)(\|h\| + \delta)^{n-1}\delta).$$

3.3 Il teorema di Varberg

In questo paragrafo dimostriamo la versione del Teorema di Morse-Sard per funzioni differenziabili da un aperto di $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

Per dimostrarlo, necessitiamo di alcuni risultati preliminari.

Lemma 3.10. *Sia D un aperto di $\mathbb{R}^n$, sia $N \subset D$ un insieme di misura nulla e $f : D \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile su N. Allora*

$$\mathrm{vol}(f(N)) = 0.$$

Dimostrazione. Definiamo per ogni $j, k \in \mathbb{Z}^+$

$$N_{j,k} = \{x \in N \,:\, \|f(x+t) - f(x)\| \leq j\|t\|, \forall\, t \text{ t.c. } x + t \in D, \|t\| \leq \frac{1}{k}\}. \qquad (3.6)$$

Mostriamo che $N = \cup_{j,k} N_{j,k}$. E' sufficiente dimostrare che $N \subseteq \cup_{j,k} N_{j,k}$.

Sia $x \in N$. Dato che f è differenziabile su x si ha

$$\|f(x+t) - f(x) - Df(x)t\| \leq \eta(x+t)\|t\|$$

con $\eta(x+t) \to 0$ se $t \to 0$. Allora, esiste $k \in \mathbb{Z}^+$ tale che $|\eta(x+t)| < 1$ per $\|t\| \leq \frac{1}{k}$. Pertanto, prendendo $j \geq \|Df(x)\| + 1$ si ha

$$\|f(x+t) - f(x)\| \leq \|f(x+t) - f(x) - Df(x)t\| + \|Df(x)t\| \leq j\|t\|$$

per ogni t tale che $x + t \in D$, $\|t\| \leq \frac{1}{k}$, ossia $x \in N_{j,k}$.

Abbiamo quindi dimostrato che se $x \in N$ allora esistono $j, k \in \mathbb{Z}^+$ tale che $x \in N_{j,k}$. Quindi

$$N = \cup_{j,k} N_{j,k}. \tag{3.7}$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e consideriamo $N_{j,k}$. Essendo $N_{j,k} \subset N$ è

$$\mathrm{vol}(N_{j,k}) = 0. \tag{3.8}$$

Mostriamo che $\mathrm{vol}(f(N_{j,k})) = 0$. Per (3.8) possiamo scegliere una successione di cubi n-dimensionali $\{V_i\}_{i \in I}$ dove V_i è centrato in un punto v_i con lato $2b_i$ di modo che

$$b_i \leq \frac{1}{nk} \tag{3.9}$$

e tale che

$$N_{j,k} \subset \cup_{i \in I} V_i \text{ e } \sum_{i \in I} \mathrm{vol}(V_i) < \epsilon. \tag{3.10}$$

Per (3.9), si ha

$$\|v - v_i\| < nb_i \leq \frac{1}{k}, \quad \forall\, v \in V_i \cap N_{j,k}$$

quindi da (3.6)

$$\|f(v) - f(v_i)\| \leq j\|v - v_i\| \leq jnb_i. \tag{3.11}$$

Quindi, da (3.11), $f(V_i \cap N_{j,k})$ è contenuto in un cubo n-dimensionale di centro $f(v_i)$ e lato $2jnb_i$, da cui segue

$$\mu^*(f(V_i \cap N_{j,k})) \leq (2jnb_i)^n = (jn)^n \,\mathrm{vol}(V_i). \tag{3.12}$$

Da (3.10) e (3.12) si ha

$$\begin{aligned} \mu^*(f(N_{j,k})) = \mu^*(\cup_{i \in I} f(V_i \cap N_{j,k})) &\leq \sum_{i \in I} \mu^*(f(V_i \cap N_{j,k}) \\ &\leq (jn)^n \sum_{i \in I} \mathrm{vol}(V_i) \leq (jn)^n \epsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ si ha

$$\mathrm{vol}(f(N_{j,k})) = 0.$$

Da (3.7) segue che $f(N) = \cup_{j,k} f(N_{j,k})$ e quindi si ha la tesi. $\square$

Lemma 3.11. *Siano D un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $E \subseteq D$. Sia $f : D \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile in E tale che*
$$\sup_{x\in E} |\det Df(x)| \leq K \tag{3.13}$$
con K costante positiva. Allora
$$\mu^*(f(E)) \leq K\mu^*(E).$$

Dimostrazione. Se $\mu^*(E) = \infty$ la tesi è ovviamente verificata.

Supponiamo $\mu^*(E) < \infty$. Sia $\epsilon > 0$ e sia $A \subset D$ aperto tale che $E \subset A$ e
$$\text{vol}(A) \leq \mu^*(E) + \epsilon. \tag{3.14}$$

Mostriamo che per ogni $x \in E$ esiste un cubo chiuso n-dimensionale orientato e centrato in x, sia esso E_x, tale che $E_x \subset A$ e
$$\mu^*(f(E_x)) \leq (K + \epsilon)\,\text{vol}(E_x). \tag{3.15}$$

Sia $x \in E$; siccome f è differenziabile in x vale la seguente
$$\|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)\| \leq \eta(y)\|y - x\|$$
dove $\eta(y) \to 0$ per $y \to x$.

Sia $E_x \subseteq D$ un cubo chiuso orientato n-dimensionale centrato in x e sia α il suo lato. Allora
$$\|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)\| \leq \eta(y)\alpha\sqrt{n}, \quad \forall\, y \in E_x. \tag{3.16}$$
Definiamo la funzione $f_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_x(y) := f(y) - f(x) + Df(x)(x)$.

Da (3.16) si ha
$$\|f_x(y) - Df(x)(y)\| < \eta(y)\alpha\sqrt{n}, \quad \forall\, y \in E_x.$$

Sia $P = Df(x)(E_x)$ e sia
$$Q := \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, d(y, P) < \eta(y)\alpha\sqrt{n}\}.$$

Si ha
$$f_x(E_x) \subset Q.$$
Osservando che $\mu^*(f_x(E_x)) = \mu^*(f(E_x))$ e applicando il Lemma 3.9 si ottiene che esiste una costante $A(n) > 0$ dipendente da n tale che
$$\mu^*(f(E_x)) \leq \text{vol}(E_x)\{|\det Df(x)| + A(n)(\|Df(x)\| + \eta)^{n-1}\eta\} \tag{3.17}$$
con $\eta := \sup_{y\in E_x} \eta(y)$.

Dato che $\eta(y) \to 0$ per $y \to x$ possiamo scegliere un cubo E_x abbastanza piccolo tale che $A(n)(\|Df(x)\| + \eta)^{n-1}\eta < \epsilon$. Quindi, per (3.13) e (3.17),

$$\mu^*(f(E_x)) \leq (K + \epsilon)\,\mathrm{vol}(E_x).$$

Ciò dimostra (3.15).

Sia ora

$$\mathcal{F}_x := \{E_x \,:\, E_x \text{ cubo chiuso orientato centrato in } x,\; E_x \subset A \text{ e } E_x \text{ soddisfa (3.15)}\}$$

e definiamo

$$\mathcal{F} := \cup_{x \in E} \mathcal{F}_x.$$

Osserviamo ora che $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di Vitali di E, vedi Definizione 3.4, soddisfacente le ipotesi del Teorema 3.5. Allora esiste una collezione numerabile o finita di elementi di $\mathcal{F}$, sia essa $\{E_1, E_2, ...\}$, a due a due disgiunti, tali che

$$\mathrm{vol}(E \setminus \cup_i E_i) = 0.$$

Sia $N := E \setminus \cup_i E_i$. Allora si ha che $f(E) \subseteq f(\cup_i E_i) \cup f(N)$ e quindi

$$\mu^*(f(E)) \leq \mu^*(f(\cup_i E_i)) + \mu^*(f(N)) \leq \sum_i \mu^*(f(E_i)) + \mu^*(f(N)). \tag{3.18}$$

Dal Lemma 3.10 si ha che $\mu^*(f(N)) = 0$ e da (3.18) si ha

$$\mu^*(f(E)) \leq \sum_i \mu^*(f(E_i)). \tag{3.19}$$

Quindi da (3.19), (3.15) e (3.14) si ha

$$\begin{aligned}
\mu^*(f(E)) &\leq \sum_i \mu^*(f(E_i)) \leq \sum_i (K + \epsilon)\,\mathrm{vol}(E_i) \\
&= (K + \epsilon)\,\mathrm{vol}(\cup_i E_i) \leq (K + \epsilon)\,\mathrm{vol}(A) \\
&\leq (K + \epsilon)(\mu^*(E) + \epsilon).
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ si ha la tesi.

□

Come conseguenza del Lemma 3.11 si ha che l'immagine dei punti singolari di una funzione differenziabile $f : D \to \mathbb{R}^n$, con D un aperto di $\mathbb{R}^n$, ha misura nulla. Più precisamente, vale il seguente risultato.

Teorema 3.12 (Varberg [10]). *Siano D un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $E \subset D$. Sia $f : D \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile su E e tale che*

$$\det Df(x) = 0, \quad \forall x \in E.$$

Allora $\mathrm{vol}(f(E)) = 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dal Lemma 3.11 con $K = 0$. □

Capitolo 4

Formula di coarea

In questo capitolo diamo una importante applicazione del Teorema 2.7 di Morse per funzioni regolari. Essa è la cosiddetta *formula di coarea* per funzioni a valori reali.

Teorema 4.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Sia $N = F(C(F))$ l'insieme dei valori critici di F e*

$$M_t = \{x \in \Omega \,:\, F(x) = t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Allora, M_t è una $(n-1)$-varietà per ogni $t \in F(\Omega) \setminus N$ e per ogni $f : \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile valgono le seguenti:

(a) la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t \in (\mathbb{R} \setminus F(\Omega)) \cup N \\ \displaystyle\int_{M_t} f d\sigma & \text{se } t \in F(\Omega) \setminus N \end{cases}$$

è misurabile,

(b) $\displaystyle\int_\Omega f \,\|DF\|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt.$

Osservazione 4.2. *L'uguaglianza (b) in Teorema 4.1 si può scrivere in modo più leggibile:*

$$\int_\Omega f\|DF\|dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{F=t\}} f \, d\sigma \right) dt.$$

Infatti, N ha misura nulla per il Corollario 2.7 e, se $t \in \mathbb{R} \setminus F(\Omega)$, allora M_t è l'insieme vuoto.

Dimostrazione del Teorema 4.1. Ci possiamo ridurre al caso $DF \neq 0$ in Ω. Infatti, supponiamo di avere dimostrato il teorema con l'ipotesi aggiuntiva di $DF \neq 0$. Denotiamo

$$\Omega' := \Omega \setminus C(F)$$

e, per $t \in \mathbb{R}$,

$$M'_t := \{x \in \Omega' \, : \, F(x) = t\}.$$

Dato che Ω' è l'insieme dei punti che non sono critici per f, allora si ha che M'_t o è una $(n-1)$-varietà oppure è l'insieme vuoto.
Si ha

$$F(\Omega) \setminus N \subset F(\Omega') \subset F(\Omega). \tag{4.1}$$

Inoltre

$$M_t = M'_t \quad \forall\, t \in F(\Omega) \setminus N. \tag{4.2}$$

La inclusione $M_{t'} \subseteq M_t$ è ovvia. Dimostriamo l'opposta inclusione. Sia $t \in F(\Omega) \setminus N$ e sia $x \in M_t$. Allora $x \in \Omega$ e $F(x) = t$. Essendo $t \notin N$ sarà $DF(x) \neq 0$, da cui $x \in \Omega \setminus C(F)$. Ciò dimostra che $x \in M'_t$.

D'altra parte, è banalmente verificato che

$$M_t = M'_t = \emptyset \quad \forall\, t \notin F(\Omega). \tag{4.3}$$

Da (4.1), (4.2), (4.3) e tenendo conto del fatto che, per la Proposizione 2.5, N ha misura zero, si ha

$$M_t = M'_t \quad \text{per q.o. } t \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo ora che

$$F(\Omega') \cap N \subset N,$$

quindi $F(\Omega') \cap N$ è un insieme di misura nulla. Definiamo la funzione $\psi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ la funzione misurabile

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \setminus F(\Omega') \\ \displaystyle\int_{M'_t} f \, d\sigma & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Su $F(\Omega') \cap N$ φ è nulla. Anzi, vale di più:

$$\varphi(t) = 0 \quad \forall\, t \in N. \tag{4.5}$$

Per (4.1) si ha

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{R} \setminus F(\Omega') \subset \mathbb{R} \setminus (F(\Omega) \setminus N) \\ &= (\mathbb{R} \setminus F(\Omega)) \cup (F(\Omega) \cap N) \\ &\subseteq (\mathbb{R} \setminus F(\Omega)) \cup N. \end{aligned}$$

Quindi, per definizione di φ e di ψ si ha

$$\varphi(t) = \psi(t) = 0 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \setminus F(\Omega'). \tag{4.6}$$

Mostriamo ora che $\varphi(t) = \psi(t)$ per ogni $t \in (F(\Omega') \cap N)^c$.
Se $t \in F(\Omega') \setminus N$, allora, per definizione di ψ (4.4),

$$\psi(t) = \int_{M'_t} f d\sigma \qquad \forall t \in F(\Omega') \setminus N.$$

Per (4.1), se $t \in F(\Omega') \setminus N$ è anche $t \in F(\Omega) \setminus N$, da cui, per definizione di φ e (4.2),

$$\varphi(t) = \int_{M_t} f d\sigma = \int_{M'_t} f d\sigma \qquad \forall t \in F(\Omega') \setminus N. \tag{4.7}$$

In particolare, essendo

$$\mathbb{R}^n \setminus (F(\Omega') \cap N) = (\mathbb{R}^n \setminus F(\Omega')) \cup (F(\Omega') \setminus N),$$

da (4.6) e (4.7) si ha

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^n \setminus (F(\Omega') \cap N). \tag{4.8}$$

Osserviamo ora che, essendo $\|DF\| = 0$ in $\Omega \setminus \Omega'$, si ha

$$\int_{\Omega} f(x)\, \|DF(x)\|\, dx = \int_{\Omega'} f(x)\, \|DF(x)\|\, dx.$$

Per la supposizione fatta circa la validità del teorema nel caso di $\|DF(x)\| \neq 0$ ovunque,

$$\int_{\Omega'} f(x)\, \|DF(x)\|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, dt.$$

D'altra parte, per (4.8) e (4.5),

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt.$$

Quindi, collegando le precedenti uguaglianze,

$$\int_{\Omega} f(x)\, \|DF(x)\|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt.$$

Ciò conclude la dimostrazione che se il teorema è vero sotto l'ipotesi aggiuntiva: $DF \neq 0$ in Ω allora il teorema vale anche senza questa ipotesi.

Resta quindi da dimostrare che il teorema vale sotto l'ipotesi aggiuntiva: $DF \neq 0$ in Ω. In questo caso $N = \emptyset$ e M_t è una $(n-1)$-varietà per ogni $t \in F(\Omega)$. Inoltre osserviamo che

$$\begin{cases} M_t = \emptyset & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus F(\Omega) \\ \\ M_t \neq \emptyset & \text{se } t \in F(\Omega). \end{cases}$$

possiamo quindi ridefinire la funzione φ nel seguente modo

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } M_t = \emptyset \\ \\ \displaystyle\int_{M_t} f \, d\sigma & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo $x_0 \in \Omega$. Dall'ipotesi fatta su F, è $DF(x_0) \neq 0$. Non è restrittivo supporre che sia l'ultima componente di DF ad essere non nulla. Per questo motivo d'ora in poi distinguiamo l'ultima coordinata dei punti di $\mathbb{R}^n$ dalle altre, ossia scriviamo $x = (\xi, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Dunque, consideriamo $x_0 = (\xi_0, y_0) \in \Omega$ e supponiamo che sia $D_y F(\xi_0, y_0) \neq 0$. Poniamo inoltre $t_0 = F(\xi_0, y_0)$.

Risolviamo l'equazione

$$t = F(\xi, y) \tag{4.9}$$

attorno a $F(\xi_0, y_0) = t_0$ ricavando y in funzione di ξ e t.

Per il teorema della funzione implicita esistono

(a) V intorno di ξ_0 e $\rho > 0$ tali che
  (a1) $V \times I \subset \Omega$ con $I =]y_0 - \rho, y_0 + \rho[$;
  (a2) $D_y F(\xi, y) \neq 0$ per $(\xi, y) \in V \times I$;

(b) $\epsilon > 0$ e $G \in C^\infty(V \times J)$ con $J =]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ tali che
  (b1) $G(\xi, t) \in I$ per ogni $(\xi, t) \in V \times J$;
  (b2) $F(\xi, G(\xi, t)) = t$ per ogni $(\xi, t) \in V \times J$;
  (b3) per ogni $(\xi, t) \in V \times J$, l'unica soluzione di (4.9) è $y = G(\xi, t)$
  (b4) per ogni $(\xi, t) \in V \times J$

$$D_\xi G(\xi, t) = -\frac{1}{D_y F(\xi, G(\xi, t))} D_\xi F(\xi, G(\xi, t)).$$

Poniamo

$$W := \{(\xi, G(\xi, t)) : \xi \in V, \ t \in J\};$$

per (b1) si ha

$$W \subset V \times I.$$

Definiamo la funzione $\Phi : V \times J \to W$, $\Phi \in C^\infty(V \times J, \mathbb{R}^n)$

$$\Phi(\xi, t) := (\xi, G(\xi, t)), \quad (\xi, t) \in V \times J.$$

Sia $(\xi, t) \in V \times J$, allora

$$D\Phi(\xi, t) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ & \\ D_\xi G(\xi, t) & D_t G(\xi, t). \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Inoltre, derivando entrambi i termini di (b2) rispetto a t, si ha

$$1 = D_t(F(\Phi(\xi, t)) = D_y F(\Phi(\xi, t)) D_t G(\xi, t). \tag{4.11}$$

Quindi da (4.10) e (4.11) si ottiene

$$|\det D\Phi(\xi, t)| = |D_t G(\xi, t)| = \frac{1}{|(D_y F) \circ \Phi(\xi, t)|} > 0, \quad (\xi, t) \in V \times J. \tag{4.12}$$

Da (b4) si ha che per ogni $t \in J$

$$\sqrt{1 + \|D_\xi G(\xi, t))\|^2} = \sqrt{1 + \frac{\|D_\xi F(\xi, G(\xi, t))\|^2}{|D_y F(\xi, G(\xi, t))|^2}} = \frac{\|DF(\xi, G(\xi, t))\|}{|D_y F(\xi, G(\xi, t)|}, \quad \forall \xi \in V. \tag{4.13}$$

Da (4.12) e (4.13) deduciamo che

$$\sqrt{1 + \|D_\xi G(\xi, t))\|^2} = \|DF \circ \Phi(\xi, t))\| |\det D\Phi(\xi, t)| \quad \forall (\xi, t) \in V \times J. \tag{4.14}$$

Osserviamo ora che Φ è biettiva da $V \times J$ in W. Infatti, se $(\xi_1, t_1), (\xi_2, t_2) \in V \times J$ sono tali che $\Phi(\xi_1, t_1) = \Phi(\xi_2, t_2)$, per definizione di Φ deve essere $\xi_1 = \xi_2$. Posto $\xi := \xi_1 = \xi_2$ si ha $G(\xi, t_1) = G(\xi, t_2)$ e quindi da (b2) segue che $t_1 = t_2$. Quindi, per il teorema di inversione locale, essendo $V \times J$ un insieme aperto, anche W è aperto e Φ è un diffeomorfismo da $V \times J$ in W.

Sia ora $t \in J$ e definiamo $\alpha_t : V \to W$,

$$\alpha_t(\xi) := \Phi(\xi, t) = (\xi, G(\xi, t)), \quad \xi \in V. \tag{4.15}$$

Per (b3) $F(\alpha_t(\xi)) = t$, allora

$$\alpha_t(V) = M_t \cap W.$$

Inoltre, siccome $\alpha_t^{-1}(\xi, y) = \xi$ per ogni $(\xi, y) \in M_t \cap W$, allora

$$\alpha_t^{-1} : M_t \cap W \to V$$

è un omeomorfismo.

Per (4.15) si ha

$$D\alpha_t(\xi) = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ \\ D_\xi G(\xi, t) \end{pmatrix} \qquad \forall \xi \in V$$

quindi si ha

$$\mathrm{rg}(D\alpha_t(\xi)) = n - 1 \qquad \forall \xi \in V.$$

Questo dimostra che le coppie (V, α_t) sono un sistema di coordinate locali sulla carta W attorno al punto $(\xi_0, G(\xi_0, t))$ di M_t per ogni t.

Supponiamo ora che $\{x \in \Omega \,:\, f(x) \neq 0\} \subset K \subset W$ per un qualche compatto K. Per il teorema di cambiamento di variabili si ha

$$\int_\Omega f\|DF\| \, dx = \int_W f\|DF\| \, dx = \int_{V\times J} f \circ \Phi \ \|DF \circ \Phi\| |\det D\Phi| \, dx. \tag{4.16}$$

La funzione $f \circ \Phi \|DF \circ \Phi\| |\det D\Phi|$ è misurabile per cui quasi ogni sua sezione lo è. Quindi la funzione

$$\psi(t) := \int_V f \circ \Phi(\xi, t) \|DF \circ \Phi(\xi, t)\| |\det D\Phi(\xi, t)| d\xi$$

è ben definita per q.o. $t \in J$. Per il teorema di Tonelli, ψ è misurabile e per (4.16)

$$\int_\Omega f\|DF\| \, dx = \int_J \psi(t) \, dt.$$

Da (4.14) si ha, per ogni $t \in J$ e per ogni $\xi \in V$

$$\|DF \circ \Phi(\xi, t)\| |\det D\Phi(\xi, t)| = \sqrt{1 + \|D_\xi G(\xi, t))\|^2},$$

pertanto

$$\psi(t) = \int_V f(\xi, G(\xi, t)) \sqrt{1 + \|D_\xi G(\xi, t))\|^2} d\xi, \quad \text{per q.o. } t \in J. \tag{4.17}$$

Essendo il supporto di f contenuto nel compatto K, $f \circ \Phi$ ha supporto contenuto in $\Phi^{-1}(K)$, che è un compatto di $V \times J$. Quindi anche ψ risulta nulla al di fuori di un compatto di J.

Da (b3), per ogni $t \in J$ è

$$M_t \cap W = \{(\xi, y) \in W \,:\, F(\xi, y) = t\} = \{(\xi, G(\xi, t)) \,:\, \xi \in V\}.$$

Allora per il teorema di cambiamento di variabili, si veda ad esempio il Teorema 9.1 in [3] applicato a $u(\xi) := G(\xi, t)$, e tenendo conto che il supporto di f è contenuto in W, si ha

$$\int_V f(\xi, G(\xi, t)) \sqrt{1 + \|D_\xi G(\xi, t))\|^2} d\xi = \int_{M_t} f(\xi, y) \, d\sigma, \quad \text{per q.o. } t \in J,$$

dove σ denota la misura di Hausdorff $n-1$-dimensionale. Quindi, per (4.17),

$$\psi(t) = \int_{M_t} f(\xi, y)\, d\sigma, \quad \text{per q.o. } t \in J. \tag{4.18}$$

Essendo ψ nulla al di fuori di un compatto di J, possiamo prolungare ψ con regolarità su $\mathbb{R}$ ponendo $\psi(t) = 0$ per $t \notin J$. Così si ha

$$\int_\Omega f\|DF\|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, dt. \tag{4.19}$$

D'altra parte, avendo prolungato ψ, la uguaglianza (4.18) continua a valere per $t \notin J$, perché

$$\{x \in \Omega \,:\, f(x) \neq 0\} \subset W$$

e

$$W \cap M_t = \emptyset \qquad \forall t \notin J.$$

Pertanto, da definizione di φ si ha che $\psi = \varphi$ su $\mathbb{R}$, e, da (4.19),

$$\int_\Omega f\|DF\|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt.$$

Nel caso generale, sia $W := \{W_z\}_{z\in\Omega}$ una collezione di intorni aperti dei punti di Ω scelta con la procedura appena descritta a meno di eventuali permutazioni di coordinate dovute al fatto che in generale si avrà solo $D_m F(z) \neq 0$ per qualche $m = m(z) \in \{1, ..., n\}$ per ogni $z \in \Omega$. Sia quindi $\{\eta_j\}_j$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento W di Ω. Si ha allora:

$$f = \sum_j f_j$$

con $f_j = f \circ \eta_j$ e $\{f_j \neq 0\} \subset K_j \subset W_{z_j}$ per qualche insieme compatto K_j e qualche punto $z_j \in \Omega$. Sia allora φ_j la funzione misurabile associata a f_j, nella maniera descritta in precedenza. Proviamo che risulta

$$\varphi(t) = \sum_j \varphi_j(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Infatti, se $t \in \mathbb{R}$ è tale che $M_t \neq \emptyset$, allora per il Teorema di convergenza monotona si ha

$$\varphi(t) = \int_{M_t} f d\sigma = \sum_j \int_{M_t} f_j d\sigma = \sum_j \varphi_j(t)$$

mentre (4.20) è ovvia se $M_t = \emptyset$. Infine, φ è misurabile e si ha come prima per il teorema di convergenza monotona

$$\int_\Omega f\|DF\|\, dx = \sum_j \int_\Omega f_j\|DF\|\, dx = \sum_j \int_{\mathbb{R}} \varphi_j\, dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dt.$$

$\square$

Il seguente risultato è la versione della formula di coarea senza l'ipotesi di segno sulla funzione f. Essa si può facilmente dimostrare considerando che $f = f^+ - f^-$, con f^+ e f^- la parte positiva e negativa di f, rispettivamente.

Corollario 4.3. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $F \in C^\infty(\Omega)$ una funzione. Sia $N = F(C(F))$ l'insieme dei valori critici di F e*

$$M_t = \{x \in \Omega \,:\, F(x) = t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Allora, per ogni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile tale che

$$\int_\Omega |f| \|DF\| \, dx < +\infty$$

valgono le seguenti:
(a) f è σ-integrabile su M_t per ogni $t \in F(\Omega) \setminus N$;
(b) la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in (\mathbb{R} \setminus F(\Omega)) \cup N \\ \displaystyle\int_{M_t} f d\sigma & \text{se } t \in F(\Omega) \setminus N \end{cases}$$

è misurabile e integrabile;
(c) si ha $\displaystyle\int_\Omega f \|DF\| \, dx = \int_\mathbb{R} \varphi(t) dt$.

Un'applicazione particolarmente significativa è la seguente.

Esempio 4.4 (Coordinate Sferiche)**.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,t)} f(x) \, d\sigma(x) \right) dt. \tag{4.21}$$

Per dimostrarla, consideriamo la funzione

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = |x|.$$

Allora $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e $|\nabla F(x)| = \left| \dfrac{x}{|x|} \right| = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Allora, per la formula di coarea, vedi Corollario 4.3,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(x) \, dx = \int_\mathbb{R} \left(\int_{|x|=t} f(x) \, d\sigma(x) \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{|x|=t} f(x) \, d\sigma(x) \right) dt. \end{aligned}$$

La formula (4.21) è così dimostrata.

Da questa uguaglianza, seguono facilmente le seguenti altre uguaglianze, valide per $r > 0$:

$$\int_{B(0,r)} f(x)\, dx = \int_0^r \left(\int_{\partial B(0,t)} f(x)\, d\sigma(x) \right) dt \tag{4.22}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} f(x)\, dx = \int_r^\infty \left(\int_{\partial B(0,t)} f(x)\, d\sigma(x) \right) dt. \tag{4.23}$$

Una variante della precedente applicazione è relativa al caso delle funzioni radiali che qui sotto descriviamo.

Esempio 4.5. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una funzione radiale, ossia $f(x) := g(|x|)$ per una qualche $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$.*

Allora, ragionando come nell'Esempio 4.4 e usando il Corollario 4.3, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx &= \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,t)} g(|x|)\, d\sigma(x) \right) dt \\ &= \int_0^\infty g(t) \left(\int_{\partial B(0,t)} d\sigma(x) \right) dt, \end{aligned}$$

Ricordando che

$$\mathrm{area}(\partial B_t(x_0)) = n\omega_n t^{n-1}, \tag{4.24}$$

otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = n\omega_n \int_0^\infty g(t) t^{n-1}\, dt. \tag{4.25}$$

Un'altra conseguenza del Teorema 4.1 è il seguente.

Corollario 4.6. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto ed $F \in C^\infty(\Omega)$ tale che $F \leq t$ sia compatto per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $f \in C(\Omega)$ esiste $\psi \in C(\mathbb{R})$ tale che*

(a) $\psi = \varphi$ quasi ovunque, ove $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & se\ t \in (\mathbb{R} \setminus F(\Omega)) \cup N \\ \displaystyle\int_{M_t} f d\sigma & se\ t \in F(\Omega) \setminus N \end{cases}$$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^t |\psi| < +\infty$;

(c) $\displaystyle\int_{\{F<t\}} f\|DF\|\, dx = \int_{-\infty}^t \psi(s)\, ds$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che $f \geq 0$. Applicando la formula di coarea a f e F sull'aperto $\{F < t\}$ si ha

$$\int_{\{F<t\}} f\|DF\| \, dx = \int_{-\infty}^{t} \left(\int_{\{F=s\}} f(x) d\sigma(x) \right) ds = \int_{-\infty}^{t} \varphi(s) ds$$

e siccome i sottolivelli di F sono compatti si ha allora

$$0 \leq \int_{\{F<t\}} f\|DF\| \, dx < +\infty, \quad \forall \, t \in \mathbb{R}.$$

Poniamo ora $\Omega' = \{x \in \Omega \, : \, DF(x) \neq 0\}$ e $M'_t = \{x \in \Omega \, : \, F(x) = t\}$ e denotiamo con

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \notin F(\Omega') \\ \displaystyle\int_{M'_t} f d\sigma & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la funzione misurabile tale che $\psi = \varphi$ costruita nel teorema precedente. Resta quindi da provare soltanto che $\psi \in C(\mathbb{R})$.

Sia quindi $\{\eta_j\}_{j \in J}$ una partizione dell'unità subordinata a un ricoprimento aperto $W = \{W_x\}_{x \in \Omega'}$ costruito come nella dimostrazione del teorema precedente. Poniamo $f_i = f \circ \eta_i$ cosicché si ha $\{f_i \neq 0\} \subset K_i \subset W_i$ per qualche insieme compatto K_i e qualche intorno aperto $W_i := W_{x_i}$ di qualche punto $x_i \in \Omega'$ e

$$f = \sum_i f_i \quad \text{in } \Omega'.$$

Sia inoltre

$$\psi_i(t) = \int_{V_i} f_i \circ \alpha_{i,t} \; J\alpha_{i,t}, \quad t \in J_i =]t_i - \epsilon_i, t_i + \epsilon_i[$$

la funzione misurabile associata a f_i, ove $(V_i, \alpha_{i,t})$ è un sistema di coordinate locali sulla carta locale W_i di M'_t attorno ad x_i per ogni $t \in J_i$ ove $t_i = F(x_i)$ ed $\epsilon_i > 0$.

Poiché $\{f_i \neq 0\} \subset K_i$, si ha $\psi \in C_c(J_i)$. Si ha inoltre

$$\psi(t) = \sum_i \psi_i(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ed osserviamo che i supporti delle ψ_i sono localmente finiti poiché, per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed $\epsilon > 0$, si ha $\{x \in \Omega' \, : \, t - \epsilon \leq F(x) \leq t + \epsilon\} \subset \{x \in \Omega \, : \, t - \epsilon \leq F(x) \leq t + \epsilon\}$. Quindi, essendo $\{x \in \Omega \, : \, t - \epsilon \leq F(x) \leq t + \epsilon\}$ compatto, esiste solo un numero finito di indici i tali che f_i sia non nulla su di esso. Conseguentemente, tutte le funzioni ψ_i ad eccezione di un numero finito sono nulle sull'intervallo $]t - \epsilon, t + \epsilon[$ e quindi la serie è in effetti una somma finita attorno ad ogni punto e ψ è continua. $\square$

Bibliografia

[1] P. Celada: *Appunti di lezione*, Università di Parma.

[2] T.M. Flett: *On transformations in $\mathbb{R}^n$ and a theorem of Sard*, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 623-629.

[3] F. Maggi: Sets of finite perimeter and geometric variational problems. An introduction to geometric measure theory. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics,* 135. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[4] J. Milnor: Singular Points of Complex Hypersurfaces. *Princeton University Press*, Princeton (1968).

[5] C.G. Moreira, M.A.S. Ruas: *The curve selection lemma and the Morse-Sard theorem,* Manuscripta Math. 129 (2009), no. 3, 401-408.

[6] A.P. Morse, *The behavior of a function on its critical set,* Ann. of Math. (2) 40 (1939), no. 1, 62-70.

[7] R. Narasimhan, Lectures on topics in analysis. Notes by M. S. Rajwade. *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics*, No. 34 Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1965.

[8] S. Saks, Theory of the integral. Second revised edition English translation by L. C. Young With two additional notes by Stefan Banach. *Dover Publications*, Inc., New York 1964.

[9] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 883-890.

[10] D.E. Varberg, *On differentiable transformations in $\mathbb{R}^n$,* Amer. Math. Monthly 73 (1966), no. 4, part II, 111-114.

[11] H. Whitney, *A function not constant on a connected set of critical points,* Duke Math. J. 1 (1935), no. 4, 514-517.