Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

L'Integrale di Perron: una Estensione dell'Integrale di Lebesgue, e Applicazioni

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Giada Garbini

Sessione II
Anno Accademico 2021/2022

Alla mia famiglia

Introduzione

Lo scopo di questa Tesi è di studiare il cosiddetto *Integrale di Perron*, introdotto verso gli anni 1910-14 dal matematico tedesco Oskar Perron (1880–1975). Di fatto Perron definì l'integrale che porta il suo nome solo per funzioni limitate [6], mentre la definizione generale fu data da[1] Hans Bauer (1891–1953) in [7] nel 1915.

Perron introdusse la sua nozione di integrale per risolvere un problema risalente agli albori del calcolo infinitesimale. É ben noto infatti che, sebbene il lavori di Leibniz e Newton fossero memori dei metodi di Eudosso e di Archimede che sfruttavano le approssimazione delle aree attraverso somme finite, i loro immediati successori avevano definito l'integrale solo per funzioni dotate di una primitiva. Così fece Eulero, nel suo influente trattato *Institutiones calculi integralis* del 1768; in termini più moderni, questa definizione di integrale (attorno a cui ruota tutta questa Tesi di laurea) si può scrivere come segue:

$$(\bigstar) \qquad \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Se si vuole adottare questa definizione Euleriana di integrale, è evidente che sono integrabili tutte e sole le funzioni che sono la derivata f' di qualche funzione derivabile f su $[a, b]$. Questa definizione (che spesso, in modo assai infelice, è anche quella adottata in alcuni libri delle Scuole Secondarie) è al contempo

- **troppo restrittiva**, perché ammette come integrande solo le funzioni dotate di primitiva, e quindi non può integrare ad esempio la funzione segno su $[-1, 1]$ (che non ammette primitiva, in forza del Teorema di Darboux, ma che è integrabile poiché monotona);

[1] Da non confondere con Heinz Bauer (1928–2002), a cui è dovuta gran parte della Teoria astratta del Potenziale.

- **troppo generale**, poiché secondo questa definizione sarebbero integrabili anche funzioni che, più tardi, entrambi gli influenti integrali di Riemann e di Lebesgue avrebbero rigettato come potenziali integrande.

Infatti la funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ (prolungata con 0 in $x = 0$) ha la derivata illimitata su $[0, 1]$, quindi non integrabile secondo Riemann, e tale derivata non è nemmeno sommabile secondo Lebesgue. La funzione f' ha però la peculiarità di essere integrabile su $]0, 1]$ nel senso di Riemann generalizzato, quest'ultimo essendo un integrale che ben accoglie le funzioni con integrale *condizionatamente convergente*, ossia convergente ma non assolutamente, un fenomeno non ammesso nell'integrale di Lebesgue (e nemmeno in quello di Riemann standard, per il quale se f è integrabile allora lo è anche $|f|$).

La formula ($\bigstar$) è spesso chiamata *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*, ma essendo questo un termine un po' generico ed abusato,[2] ci riferiremo a ($\bigstar$) come alla *Formula di Torricelli-Barrow*, in onore dei pionieristici studi di Evangelista Torricelli (circa 1644) e di Isaac Barrow, maestro di Newton; siamo tuttavia consapevoli che in letteratura non c'è un generale accordo sulla attribuzione del teorema, e la nostra è solo una scelta convenzionale.

Nel 1912, solo dieci anni dopo la pubblicazione della tesi di dottorato di Henri Lebesgue del 1902, che cambiò la storia della teoria dell'integrale, Arnaud Denjoy, utilizzando un metodo complicato basato sulla induzione transfinita, introdusse un integrale più generale di quello di Lebesgue, capace di integrare *tutte le funzioni che sono la derivata di una funzione* (nel seguito parleremo brevemente di 'funzioni derivata'). Il lavoro di Perron è di due anni successivo a quello di Denjoy, e fu fortemente influenzato da una caratterizzazione dell'integrabilità secondo Lebesgue provata da de La Vallée-Poussin (circa 1910). Prima di descrivere la teoria di Perron, che è il tema di questa tesi, terminiamo questo breve excursus storico.

É ritenuto che, sebbene l'integrale di Perron sia più semplice da definire, la definizione di integrale di Denjoy sia più costruttiva. L'integrale oggi noto come integrale di

[2]Molti chiamano invece in questo modo il teorema dovuto a Cauchy, 1823, secondo cui, quando f è continua su $[a, b]$, la derivata in x della funzione integrale $\int_a^x f(t)\,dt$ fa $f(x)$.

Henstock-Kurzweil è venuto molto dopo:[3] Kurzweil [10] 1957; Henstock [9] 1961. La definizione di quest'ultimo (in cui non ci addentriamo) è sorprendentemente simile a quella di Riemann (facente uso delle somme di Cauchy-Riemann), dunque assai naturale; Kurzweil stesso provò che questa definizione è equivalente a quella di Perron e Denjoy. Può essere curioso osservare che ci sono in letteratura una ventina di monografie introduttive all'Analisi che introducono la teoria dell'integrale mediante l'integrale di Henstock-Kurzweil (anziché l'integrale di Riemann, come fanno quasi tutte le monografie di base). Sebbene la teoria sia più impegnativa di quella dell'integrale di Riemann, non è incomprensibile la posizione di chi vorrebbe vedere l'integrale di Henstock-Kurzweil alla base dell'insegnamento universitario dell'integrazione, poiché questo tipo di integrale racchiude in un sol colpo l'integrale di Riemann standard, quello di Riemann generalizzato e quello di Lebesgue, e lo fa con una definizione simile all'integrale di Riemann.[4]

Passiamo ora a descrivere a grandi linee gli argomenti matematici di questa tesi. Nel seguito, data $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e fissato $x_0 \in [a, b]$, denotiamo al solito con

$$\underline{D}g(x_0) = \liminf_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \qquad \overline{D}g(x_0) = \limsup_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

le derivate inferiore e superiore di g in x_0.

Due funzioni continue $U, L : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono dette *soprafunzione* (U sta per upper) e *sottofunzione* (L sta per lower) di $f : [a, b] \to [-\infty, +\infty]$ se sono nulle in a, e se

$$\overline{D}L(x) \le f(x) \le \underline{D}U(x) \qquad \text{per ogni } x \in [a, b],$$

e nella ipotesi che il primo termine non sia $+\infty$ e il terzo non sia $-\infty$.

Stante questa definizione, avremmo forse potuto chiamare L e U rispettivamente *sotto-primitiva* e *sopra-primitiva* (nulla in a) di f, ma, nella teoria dell'integrale di Perron, è abitudine chiamarle in questo modo.

Ovviamente, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è dotata di una primitiva F (nulla in a) su $[a, b]$, allora F è sia sottofunzione che soprafunzione di f. Viceversa, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ammette una sottofunzione e una soprafunzione *coincidenti* $L \equiv U$, allora $L = U$ è una primitiva

[3] R. Henstock (1923–2007); J. Kurzweil (1926-2022). A testimonianza della modernità di questa teoria dell'integrale, si noti che Kurzweil è venuto a mancare pochi mesi fa.

[4] Per questa breve introduzione storica abbiamo seguito Mawhin [11].

di f su $[a, b]$. Quindi le funzioni derivata sono caratterizzate dall'avere una coppia di sopra-/sottofunzioni coincidenti.

In generale, visto che (per definizione di sottofunzione L e soprafunzione U) vale

$$\underline{D}(U - L) = \underline{D}U(x) - \overline{D}L(x) \geq 0,$$

la differenza $\underline{D}U(x) - \overline{D}L(x)$ essendo ben posta perché non è una forma indeterminata, allora $U - L$ è monotona crescente (per un analogo del Test di Monotonia secondo cui una funzione g con $\underline{D}g \geq 0$ è crescente), quindi in particolare

$$L(x) \leq U(x) \qquad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Posto (ad esempio) $x = b$, questo implica immediatamente che gli insiemi

$$A_f := \{L(b) : L \text{ è sottofunzione di } f\},$$
$$B_f := \{U(b) : U \text{ è soprafunzione di } f\}$$

sono separati, e quindi

$$\sup A_f \leq \inf B_f.$$

Con chiara suggestione proveniente dalla teoria dell'integrale di Riemann degli integrali inferiori e superiori, una funzione si dice *Perron-integrabile* su $[a, b]$ se

$$\sup A_f = \inf B_f,$$

e in tal caso il valore comune dell'unico elemento separatore di A_f e B_f si dice *integrale di Perron di f* e si denota con

$$(\mathrm{P}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{o brevemente} \quad (\mathrm{P}) \int_a^b f.$$

Visto che quando f è la derivata di F su $[a, b]$, gli insiemi A_f e B_f hanno in comune esattamente $F(b) - F(a)$, è immediato che f è Perron-integrabile e vale

$$F(b) - F(a) = (\mathrm{P}) \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Questo prova che *l'integrale di Perron risolve il problema di rendere integrabili tutte le funzioni derivata* (cosa che gli integrali di Riemann e Lebesgue non fanno), e *restituisce l'analogo del Teorema Fondamentale del Calcolo nella versione di Torricelli-Barrow.*

L'integrale di Perron ha varie proprietà strutturali in comune con l'integrale di Riemann: ha un criterio di integrabilità di tipo Riemann; è lineare, monotono e additivo.

Visto che il Teorema Fondamentale del Calcolo nella versione di tipo Torricelli-Barrow sull'integrale della derivata è perfettamente risolto dal (P)-integrale, ci dobbiamo chiedere se lo stesso vale anche per la versione del Teorema Fondamentale del Calcolo sulla derivata della funzione integrale: la risposta è positiva. Vale infatti il seguente notevole risultato:

Sia $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione* (P)*-integrabile su* $[a, b]$, *e sia*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = (\mathrm{P}) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

la sua funzione (P)*-integrale nulla in* a. *Allora* F *è continua su* $[a, b]$ *ed è differenziabile quasi dappertutto su* $[a, b]$ *e vale* $F' = f$ *quasi dappertutto su* $[a, b]$.

In questo enunciato si nota la presenza della misura di Lebesgue (si parla infatti di insiemi di misura nulla secondo Lebesgue) e sorge spontaneo chiedersi se il legame dell'integrale di Perron con quello di Lebesgue sia profondo: la risposta è decisamente positiva, come ora vediamo.

Da un lato è facile provare che ogni funzione (P)-integrabile è misurabile (nel senso di Lebesgue); infatti per il precedente risultato si ha che f può essere scritta (quasi dappertutto) come limite di una successione di funzioni continue come segue

$$f(x) = F'(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}},$$

per quasi ogni $x \in [a, b]$. Quindi f è misurabile.

Ma il risultato davvero notevole (uno dei principali della tesi) è il seguente, il quale stabilisce che l'integrale di Perron estende e prolunga l'integrale di Lebesgue:

Sia $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *sommabile (nel senso di Lebesgue) su* $[a, b]$. *Allora* f *è* (P)*-integrabile su* $[a, b]$, *e i due integrali coincidono:*

$$(\mathrm{P}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Osserviamo esplicitamente che la prova di questo risultato non è difficile, e si basa sulla approssimabilità dell'integrale di Lebesgue mediante l'integrale di funzioni semicontinue:

$$(\mathrm{L}) \int_a^b f = \inf \left\{ \int_a^b u : \ u \geq f, \quad u \text{ semicontinua inferiormente} \right\},$$

valido per ogni $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile secondo Lebesgue.

Dunque l'integrale di Perron estende quello di Lebesgue e a maggior ragione anche quello di Riemann. Sorge però una domanda: visto che l'integrale di Lebesgue non è una estensione dell'integrale generalizzato di Riemann, giacché ad esempio la funzione

$$\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in]0, 1]$$

è semplicemente integrabile in senso generalizzato ma non assolutamente (e quindi non è L^1), che relazione c'è tra l'integrale di Perron e quello di Riemann generalizzato? Ebbene si può provare[5] che *l'integrale di Perron estende anche l'integrale generalizzato di Riemann.* Appare dunque che la teoria dell'integrale di Perron comprende le tre definizioni di integrale date nei corsi introduttivi di Analisi. É notevole anche osservare che per definire l'integrale di Perron non occorre utilizzare la nozione di misura, a differenza dell'integrale di Lebesgue. Appare allora ancor più sorprendente il risultato visto poco sopra, secondo cui l'integrale di Perron estende quello di Lebesgue, per introdurre il quale serve parecchio lavoro di teoria della misura.

Tornando alla relazione con l'integrale di Lebesgue, a completamento dell'ultimo teorema citato, si ha il seguente altrettanto notevole fatto:

Sia $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ a valori non negativi; se f è integrabile secondo Perron è anche sommabile secondo Lebesgue.

Questo implica che, per le funzioni non negative, l'integrabilità secondo Perron e la sommabilità secondo Lebesgue *coincidono.* Per trovare una funzione che è Perron integrabile ma non Lebesgue integrabile occorre quindi cercarla tra le funzioni a segno non costante: l'esempio è facile, ed è dato dalla derivata di

$$F : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

[5]Si veda [4] Theorem 8.18 pag. 128, dove si prova molto di più: data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Perron integrabile su ogni intervallo $[a, \beta]$ con $a < \beta < b$, se esiste finito $\lim_{\beta \to b-} (\mathrm{P}) \int_a^\beta f$ allora f è Perron-integrabile su tutto $[a, b]$ e tale limite coincide con $(\mathrm{P}) \int_a^b f$. Questo dice che non esiste un integrale improprio di Perron perché l'integrale di Perron racchiude già la sua versione impropria. Visto che ogni funzione Riemann integrabile è anche Perron integrabile e gli integrali coincidono, questo risultato implica che l'integrale di Perron estende quello di Riemann generalizzato.

Si ha infatti che $f = F'$ è Perron integrabile poiché è la derivata di una qualche funzione, ma non è Lebesgue sommabile poiché (per $x \neq 0$)

$$f(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

e, mentre il primo addendo di cui sopra è sommabile poiché limitato, il secondo addendo non è sommabile giacché

$$\int_0^1 \left|\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Si noti che $|f|$ non è integrabile secondo Perron, perché, se lo fosse, essendo a valori non negativi, dovrebbe essere anche sommabile secondo Lebesgue, il che non è. Abbiamo fornito quindi un esempio di funzione non integrabile secondo Perron.

Abbiamo però anche appena mostrato una forte peculiarità dell'integrale di Perron: esso non è, come si usa dire, un integrale assolutamente convergente, ossia *la P-integrabilità di f non implica la P-integrabilità di $|f|$*. Si usa dire che l'integrale di Perron è un integrale condizionatamente (o semplicemente) convergente. Questa è anche in parte la ragione della poca diffusione dell'integrale di Perron nella pratica perché lavorare con un integrale come quello di Lebesgue che assicura la sommabilità di $|f|$ (se f è sommabile) è decisamente più facile.

Chiude la Tesi una galleria di esempi di funzioni di interesse per la formula ($\bigstar$) di Torricelli-Barrow e un notevole teorema che non sempre si trova nei libri di testo:

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è derivabile in ogni punto di $[a, b]$ e se la sua derivata f' è ivi sommabile, allora vale la formula ($\bigstar$) di Torricelli-Barrow

$$(\diamondsuit) \qquad \int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Sorge spontanea la domanda di quanto si possa indebolire la ipotesi di *ovunque* derivabilità di f. Di certo non si può indebolirla a tal punto da farla diventare un *quasi ovunque*; infatti la nota funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ di Vitali-Cantor (esempio di funzione continua e a variazione limitata ma non assolutamente continua) è derivabile quasi ovunque su $[0, 1]$ e ha derivata nulla quasi ovunque, ma $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ quindi ($\diamondsuit$) non può valere. In effetti la perdita di derivabilità anche solo in un punto può invalidare ($\diamondsuit$), come mostra la funzione segno tra $[-1,1]$, che è derivabile fuori da 0 e con derivata nulla su $[-1,1]\setminus\{0\}$ ma il secondo membro di $(\diamondsuit)$ è 2 e il primo è 0. Ovviamente la perdita di continuità della funzione segno gioca un ruolo.

Infatti, se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua ed è derivabile ovunque tranne in un punto $x_0\in[a,b]$ e ha derivata sommabile, allora possiamo applicare il teorema di cui sopra a $[a,x_0-\epsilon]$ e $[x_0+\epsilon,b]$ e dedurre che

$$\int_a^{x_0-\epsilon} f' + \int_{x_0+\epsilon}^b f' = f(x_0-\epsilon)-f(a)+f(b)-f(x_0+\epsilon).$$

Facendo tendere ϵ a 0, il primo membro tende a $\int_a^b f'$ (poiché f è sommabile), mentre il secondo membro, essendo f continua anche in x_0, tende a

$$f(x_0)-f(a)+f(b)-f(x_0)=f(b)-f(a),$$

e dunque $(\diamondsuit)$ è vera. Lo stesso ragionamento si adatta se la perdita di derivabilità avviene in un numero finito di punti. Ebbene è un risultato altamemte non ovvio che ci si può spingere ad una perdita di derivabilità *su un insieme numerabile.* Si veda [4], Theorem 6.27 pag. 104.

Conclusioni. Riassumendo i punti salienti della Tesi, il fulcro nodale è lo studio della formula

$$(\bigstar) \qquad \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

Dimostriamo che:

1. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è derivabile in ogni punto, $(\bigstar)$ potrebbe essere priva di significato per l'integrale di Riemann, come mostra la funzione

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x\in]0,1] \\ 0 & \text{se } x=0. \end{cases}$$

   La derivata di f esiste dappertutto ma f' non è limitata e quindi non è Riemann integrabile. Richiedere la limitatezza di f' non migliora la situazione perché la funzione di Volterra V (Sezione 3.4) è derivabile, ha derivata limitata ma discontinua su un insieme di misura positiva e quindi V' non è Riemann integrabile.

2. Richiedere l'esistenza di f' su tutto $[a, b]$ e la Riemann integrabilità di f' è invece sufficiente alla validità di ($\bigstar$), come provato nel primo corso di Analisi.

3. ($\bigstar$) può essere priva di significato anche per l'integrale di Lebesgue, perché la stessa f nel punto 1 è tale che f' non è Lebesgue sommabile.

4. Richiedere l'esistenza di f' su tutto $[a, b]$ e la Lebesgue sommabilità di f' è invece sufficiente alla validità di ($\bigstar$), come si prova nella Sezione 3.1.

5. Se vogliamo indebolire la richiesta di derivabilità su tutto $[a, b]$ nel punto 4, non possiamo rinunciare alla continuità di f (come mostra l'esempio della funzione segno su $[-1, 1]$) e, anche in presenza di continuità, non possiamo spingerci fino alla derivabilità quasi dappertutto, come mostra l'esempio della funzione di Vitali-Cantor (Sezione 3.3).

6. Si può invece provare (ma di questo non ci occupiamo in questa Tesi) che, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, è derivabile su $[a, b]$ tranne un insieme numerabile $E \subset [a, b]$ e f' è Lebesgue sommabile, allora ($\bigstar$) è valida. Il caso in cui E è finito, è invece provato in questa Tesi poiché discende subito dal caso di cui in 4.

7. L'integrale di Perron è stato creato per rendere valida ($\bigstar$) qualsiasi sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile su tutto $[a, b]$, a patto di intendere il membro di sinistra come integrale di Perron. In questa Tesi studiamo le proprietà salienti dell'integrale di Perron, tra cui quella di estendere l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue, e di coincidere con l'integrale di Lebesgue per le funzioni non negative.

Indice

Capitolo 1

Integrale di Perron

1.1 Soprafunzioni e sottofunzioni

Definizione 1.1. *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione e sia* $x_0 \in [a,b]$. *Sono chiamate rispettivamente derivata inferiore e derivata superiore di* f *nel punto* x_0 *i numeri reali o estesi definiti rispettivamente da*

$$\underline{D}f(x_0) = \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \overline{D}f(x_0) = \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Osservazione 1.2. f è una funzione derivabile in x_0 se e solo se coincidono e sono finite la derivata inferiore e quella superiore. Quando diciamo che una funzione *è derivabile* in x_0 conveniamo sempre che la derivata sia finita. Possiamo però accettare di dire che f ha derivata *in senso esteso* in x_0 se $\underline{D}f(x_0) = \overline{D}f(x_0)$ ed esse coincidono con $+\infty$ oppure con $-\infty$. In situazioni di ambiguità tra derivata in senso esteso oppure no, lo chiariremo.

Ad esempio la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$ è continua ed ha derivata in senso esteso in 0 (con $f'(0) = +\infty$). Attenzione: una funzione può avere derivata *in senso esteso* senza essere continua: ad esempio la funzione segno, definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ha derivata in senso esteso in $x = 0$ (con $f'(0) = +\infty$), ma è ivi discontinua.

Esempio 1.3. Consideriamo $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ (semicirconferenza goniometrica superiore). Essa ammette derivata in senso esteso

$$F' : [-1,1] \to [-\infty, +\infty] \qquad\qquad F'(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x = -1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } -1 < x < 1 \\ -\infty & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Lemma 1.4. *Siano $U, L : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in [a,b]$ tali che*

$$\underline{D}U(x_0) > -\infty, \qquad\qquad \overline{D}L(x_0) < +\infty. \tag{1.1}$$

Se $R(x) = U(x) - L(x)$, allora

$$\underline{D}R(x_0) \geq \underline{D}U(x_0) - \overline{D}L(x_0).$$

Dimostrazione. Segue dal seguente argomento:

$$\begin{aligned} \underline{D}R(x_0) &= \liminf_{x\to x_0} \frac{R(x)-R(x_0)}{x-x_0} \\ &= \liminf_{x\to x_0} \left(\frac{U(x)-U(x_0)}{x-x_0} - \frac{L(x)-L(x_0)}{x-x_0} \right) \\ &\geq \liminf_{x\to x_0} \frac{U(x)-U(x_0)}{x-x_0} + \liminf_{x\to x_0} (-1) \left(\frac{L(x)-L(x_0)}{x-x_0} \right) \\ &= \liminf_{x\to x_0} \frac{U(x)-U(x_0)}{x-x_0} - \limsup_{x\to x_0} \frac{L(x)-L(x_0)}{x-x_0} \\ &= \underline{D}U(x_0) - \overline{D}L(x_0). \end{aligned}$$

Tutto il calcolo è ben posto poiché non viene una forma indeterminata $+\infty - \infty$ né $-\infty + \infty$ grazie a (1.1). □

Nella seguente definizione abbiamo scelto le lettere U e L per ricordare le parole inglesi *Upper-function* e *Lower-function.*

Definizione 1.5 (Soprafunzioni e sottofunzioni). *Sia $f : [a,b] \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ una funzione. Una funzione continua $U : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta soprafunzione di f se:*

1. $U(a) = 0$,

2. $\underline{D}U(x) > -\infty \quad \forall\, x \in [a,b]$,

3. $\underline{D}U(x) \geq f(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Analogamente una funzione continua $L : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *è detta sottofunzione di* f *se:*

1. $L(a) = 0$,

2. $\overline{D}L(x) < +\infty \quad \forall\, x \in [a, b]$,

3. $\overline{D}L(x) \leq f(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Si noti che se f *è a valori finiti, entrambe le condizioni (2) di cui sopra sono garantite dalle rispettive condizioni (3).*

Osservazione 1.6. Le definizioni di soprafunzione e sottofunzione sono una generalizzazione del concetto di primitiva (nulla in a) di f. Avremmo potuto chiamarle *sopra-primitiva* e *sotto-primitiva* (nulla in a) in f, ma, nella teoria dell'integrale di Perron, è abitudine chiamarle in questo modo.

Osservazione 1.7. Se U, L sono soprafunzione e sottofunzione di $f : [a, b] \to [-\infty, \infty]$, allora (mettendo assieme le condizioni (3) di cui sopra)

$$\underline{D}U(x) \geq \overline{D}L(x), \quad \forall\, x \in [a, b], \tag{1.2}$$

e, anche se f ha qualche valore esteso, la differenza

$$\underline{D}U(x) - \overline{D}L(x) \geq 0$$

è ben posta (eventualmente fa $+\infty$) per ogni $x \in [a, b]$ (grazie alle condizioni (2)).

Il lemma seguente è ovvio, segue direttamente dalla definizione di soprafunzione e sottofunzione, ma è di importanza estrema per la trattazione a seguire:

Lemma 1.8. *Sia* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su* $[a, b]$, *con* $F(a) = 0$. *Allora* F *è sia soprafunzione che sottofunzione di* F'.

In altre parole, le funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *che sono la funzione derivata di qualche funzione derivabile su* $[a, b]$ *posseggono una soprafunzione e una sottofunzione coincidenti.*

Nel caso di funzioni con derivata in senso esteso, il lemma precedente non è più garantito:

Esempio 1.9. Consideriamo una restrizione della funzione F nell'Esempio 1.3,

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \sqrt{1-x^2} - 1.$$

(Essa è stata anche traslata in modo da avere $F(0) = 0$.) F non è derivabile in $x = 1$, però ammette ivi derivata in senso esteso $F'(1) = -\infty$. Consideriamo la funzione

$$F' : [0,1] \to [-\infty, +\infty], \qquad F'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } 0 \le x < 1 \\ -\infty & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

F è sì una sottofunzione di F', ma non è una soprafunzione di F' poiché

$$\underline{D}F(1) = F'(1) = -\infty.$$

Ciò non toglie che F' possa ammettere delle soprafunzioni. Ad esempio, se consideriamo una funzione $U : [0,1] \to \mathbb{R}$ ottenuta restringendo F ad un intervallo $[0, 1-\epsilon]$ e poi definendo U su $(1-\epsilon, 1]$ per mezzo della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa $1-\epsilon$, è facile riconoscere che U è una soprafunzione di F' (per ogni ϵ).

Per sottolineare la facilità con cui si possono creare sopra e sottofunzioni nel caso di funzioni continue che hanno derivata in senso esteso, consideriamo anche il seguente

Esempio 1.10. Consideriamo la funzione

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \sqrt{x}.$$

F non è derivabile in $x = 0$, però ammette ivi derivata in senso esteso $F'(0) = +\infty$. Consideriamo la funzione

$$F' : [0,1] \to [-\infty, +\infty], \qquad F'(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

F è sì una soprafunzione di F', ma non è una sottofunzione di F' poiché

$$\overline{D}F(0) = F'(0) = +\infty.$$

F' possiede però infinite sottofunzioni (arbitrariamente prossime a F). Ad esempio, consideriamo una funzione $s = s_\epsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ ottenuta restringendo F all'intervallo $[\epsilon, 1]$ e poi definendo s su $[0, \epsilon)$ per mezzo della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa ϵ. Per garantire la condizione (1) per le sottofunzioni, trasliamo s in modo da ottenere una funzione L del tipo

$$L(x) = s(x) - c_\epsilon, \qquad \text{con } L(0) = 0.$$

Ovviamente basta prendere $c_\epsilon := s(0)$. È facile riconoscere che L è una sottofunzione di F' (per ogni ϵ).

Il seguente lemma è un generalizzazione (di parte) del classico test di monotonia per funzioni derivabili.

Lemma 1.11. *Sia $R : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$\underline{D}R(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Allora R è crescente su $[a, b]$.

Dimostrazione. Sia $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ con $f(a) = f(b)$. Dal Teorema di Weierstrass esistono $c_1, c_2 \in [a, b]$ punti di massimo e minimo per f. A parte il caso banale in cui f è costante, almeno uno tra c_1 e c_2 è interno ad $[a, b]$. Per fissare le idee, sia $c_1 \in]a, b[$ punto di massimo per f. Nel rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1},$$

il numeratore è ≤ 0 e il denominatore cambia segno prima e dopo $c_1 \in]a, b[$. Quindi $\underline{D}f(c_1) \leq 0$. Questo è vero anche nel caso in cui f è costante.

Sia R come nelle ipotesi e consideriamo $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$. Dobbiamo provare $R(x_1) \leq R(x_2)$. Consideriamo $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = R(x) - \left(R(x_1) + \frac{R(x_2) - R(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \right).$$

Si ha che $f \in C([x_1, x_2], \mathbb{R})$ con $f(x_1) = f(x_2)$. Per quanto provato sopra, esiste $c \in]x_1, x_2[$ tale che $\underline{D}f(c) \leq 0$. Ma, per ogni $x \in [a, b]$ si ha

$$\underline{D}f(x) = \underline{D}R(x) - \frac{R(x_2) - R(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{R(x_2) - R(x_1)}{x_2 - x_1},$$

grazie alla ipotesi $\underline{D}R(x) \geq 0$. Dunque

$$0 \geq \underline{D}f(c) \geq \frac{R(x_1) - R(x_2)}{x_2 - x_1},$$

ed allora (essendo $x_2 - x_1 > 0$) si ha $0 \geq R(x_1) - R(x_2)$, ossia $R(x_1) \leq R(x_2)$. $\square$

Detto ruvidamente, il seguente lemma assicura che i grafici di soprafunzioni e sottofunzioni si allontanano sempre di più tra loro, a mano a mano che ci si allontana da a (punto in cui coincidono).

Lemma 1.12. *Siano $U, L : [a, b] \to \mathbb{R}$ rispettivamente soprafunzione e sottofunzione di $f : [a, b] \to [-\infty, +\infty]$. Allora la funzione differenza*

$$R(x) = U(x) - L(x)$$

è crescente su $[a, b]$ (ed è nulla in a). In particolare,

$$L(x) \leq U(x), \quad \textit{per ogni } x \in [a, b].$$

Dimostrazione. Per il Lemma 1.4, per ogni $x \in [a, b]$ si ha

$$\underline{D}R(x) \geq \underline{D}U(x) - \overline{D}L(x) \overset{(1.2)}{\geq} 0.$$

Allora la funzione R è crescente, come segue dal Lemma 1.11. □

I seguenti corollari saranno utili per la buona positura della definizione di integrale di Perron. È facile immaginare, dal seguente corollario, quale sarà la definizione di $\int_a^b f$ nel senso di Perron (imitando ciò che si fa nel caso di somme inferiori e superiori per l'integrale di Riemann).

Corollario 1.13. *Siano $U, L : [a, b] \to \mathbb{R}$ rispettivamente soprafunzione e sottofunzione di $f : [a, b] \to [-\infty, +\infty]$.*

Allora $U(x) \geq L(x)$ per ogni $x \in [a, b]$; in particolare $U(b) \geq L(b)$. Dunque gli insiemi

$$\begin{aligned} A = A_f &= \{L(b) \in \mathbb{R} : L \ \textit{è sottofunzione di } f\}, \\ B = B_f &= \{U(b) \in \mathbb{R} : U \ \textit{è soprafunzione di } f\} \end{aligned} \tag{1.3}$$

sono separati, e quindi

$$\sup A_f \leq \inf B_f. \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Per il Lemma 1.12 sappiamo che $R = U - L$ è una funzione crescente, quindi $R(a) \leq R(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, ovvero

$$U(a) - L(a) \leq U(x) - L(x), \ \forall\, x \in [a, b].$$

Siccome, per definizione di soprafunzione e sottofunzione, $U(a) = L(a) = 0$ abbiamo $U(x) - L(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, da cui la tesi. □

Il seguente risultato stabilisce il fatto che quando $f = F'$ (per una qualche funzione derivabile $F : [a, b] \to \mathbb{R}$), allora gli insiemi separati A_f e B_f del Corollario 1.13 si intersecano (in un punto): questo valore comune darà l'integrale di Perron di $f = F'$, che sarà uguale a $F(b) - F(a)$.

Corollario 1.14. *Sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile (in senso non esteso) su $[a, b]$ con $F(a) = 0$. Allora*

$$F(b) = \min\{U(b)\} = \max\{L(b)\},$$

ove min *e* max *sono considerati al variare di $U, L : [a, b] \to \mathbb{R}$ rispettivamente soprafunzione e sottofunzione di F'.*

In altre parole, se F è derivabile su $[a, b]$ e $F(a) = 0$, vale

$$\begin{aligned} F(b) &= \min\{U(b) : U \textit{ è soprafunzione di } F'\} \\ &= \max\{L(b) : L \textit{ è sottofunzione di } F'\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se A e B sono come nel Corollario 1.13, vale (1.4). D'altra parte, dal Lemma 1.8 (applicabile poiché $F(a) = 0$), F è sia soprafunzione sia sottofunzione di F'; quindi $F(b) \in A \cap B$. Ne segue che A è dotato di massimo, B di minimo ed essi coincidono con $F(b)$. □

1.2 Definizione dell'integrale di Perron

Definizione 1.15. *Una funzione $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ si dice integrabile nel senso di Perron (o* (P)*-integrabile) su $[a, b]$ se:*

1. *esistono almeno una soprafunzione U e una sottofunzione L di f su $[a, b]$ (quindi gli insiemi A_f e B_f introdotti in* (1.3) *sono entrambi non vuoti);*

2. $\inf\{U(b)\} = \sup\{L(b)\}$, *ove* inf *e* sup *sono considerati al variare di U soprafunzioni di f e L sottofunzioni di f.*

L'integrale di Perron di f nell'intervallo $[a, b]$ è il valore comune di $\inf\{U(b)\} = \sup\{L(b)\}$. *Esso si indica con*

$$(\mathrm{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \textit{oppure brevemente} \quad (\mathrm{P})\int_a^b f.$$

Per l'integrale di Perron, il teorema seguente è l'analogo del Teorema di Torricelli-Barrow. Possiamo notare come, in questo caso, le ipotesi sulla derivata prima di f siano meno forti rispetto a quelle richieste per l'integrale di Riemann, per il quale si richiede che f' sia Riemann-integrabile.

Teorema 1.16 (Torricelli-Barrow per l'integrale di Perron). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile (in senso non esteso) in ogni punto di $[a, b]$.*

Allora la sua funzione derivata $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ è Perron-integrabile e vale

$$f(b) - f(a) = (\mathrm{P}) \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Sia f derivabile su $[a, b]$. Consideriamo

$$F(x) := f(x) - f(a).$$

Ovviamente F è derivabile su $[a, b]$ e vale $F(a) = 0$ e $F' = f'$ su $[a, b]$. È dunque applicabile il Lemma 1.8 e F è sia soprafunzione sia sottofunzione di f'. La condizione 1 della Definizione 1.15 è dunque verificata per f'. Dal Corollario 1.14 si ha

$$\begin{aligned} F(b) &= \min\{U(b) : U \text{ è soprafunzione di } F'\} \\ &= \max\{L(b) : L \text{ è sottofunzione di } F'\}. \end{aligned}$$

Essendo $F' = f'$, è verificata anche la condizione 2 della Definizione 1.15, e il valore comune tra $\inf\{U(b)\}$ e $\sup\{L(b)\}$ è appunto

$$F(b) = f(b) - f(a).$$

Questo conclude la prova. $\square$

Osservazione 1.17. Stante il precedente notevole teorema, è naturale chiedersi se la sua tesi vale anche per funzioni derivabili in senso esteso. Ad esempio, nel caso della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ su $[0, 1]$ (Esempio 1.10), è facile vedere che vale

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{ossia} \quad 1 = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$

se l'integrale è considerato nel senso sia di Riemann generalizzato sia di Lebesgue. Visto che (come vedremo) l'integrale di Perron prolunga quello di Lebesgue, si ha anche

$$f(1) - f(0) = (\mathrm{P}) \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Questo esempio è incoraggiante. Tuttavia, se si considera la funzione segno f su $[-1, 1]$ (Osservazione 1.2), essa è derivabile in senso esteso, e vale

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ +\infty & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

In questo caso vale ('L' denota l'integrale di Lebesgue)

$$(\mathrm{P}) \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq f(1) - f(-1) = 2.$$

Questo mostra che *la derivabilità in senso esteso non è una buona ipotesi per il Teorema 1.16*, anche solo per colpa di un punto, nemmeno per l'integrale di Perron.

Diamo una condizione necessaria e sufficiente per la Perron-integrabilità, la cui dimostrazione segue della definizione di integrale di Perron (si noti l'analogia con la ben nota condizione di Riemann di integrabilità).

Lemma 1.18. *Una funzione $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ è Perron-integrabile su $[a, b]$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esistono U, L soprafunzione e sottofunzione di f tali che*

$$U(b) - L(b) < \epsilon.$$

1.3 Proprietà elementari dell'integrale di Perron

Seguono alcune proprietà generali dell'integrale di Perron.

Proposizione 1.19 (Linearità dell'integrale di Perron). *Valgono i seguenti fatti.*

1. *Sia f (P)-integrabile su $[a, b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora λf è (P)-integrabile su $[a, b]$, e vale*

$$(\mathrm{P}) \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda (\mathrm{P}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. *Siano* f_1, f_2 (P)*-integrabili su* $[a,b]$. *Se la loro somma è ben definita su* $[a,b]$, *allora* $f_1 + f_2$ *è* (P)*-integrabile su* $[a,b]$, *e vale*

$$(\mathrm{P})\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = (\mathrm{P})\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{P})\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è una semplice applicazione del Lemma 1.18. Per il primo punto prendiamo come soprafunzione e sottofunzione di λf rispettivamente λU e λL, con U e L soprafunzione e sottofunzione di f. Mentre per il secondo punto applichiamo il Lemma 1.18 a $U(x) = U_1(x) + U_2(x)$ e $L(x) = L_1(x) + L_2(x)$, con U_i e L_i come ovvio. □

Le due proposizioni seguenti riguardano l'additività della funzione integrale di Perron.

Proposizione 1.20 (**Additività dell'integrale di Perron - I**). *Sia* f (P)*-integrabile su* $[a,b]$. *Allora* f *è* (P)*-integrabile su* $[a,c]$ *e* $[c,b]$ *per ogni* $a < c < b$, *e vale*

$$(\mathrm{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{P})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{P})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ e siano U, L soprafunzione e sottofunzione di f tali che

$$U(b) - L(b) < \epsilon.$$

U e L sono soprafunzione e sottofunzione di f anche nell'intervallo $[a,c]$. Inoltre per il Lemma 1.12 la loro differenza è crescente quindi

$$U(c) - L(c) \le U(b) - L(b) < \epsilon.$$

Dal Lemma 1.18, segue che f è (P)-integrabile su $[a,c]$ e

$$L(c) \le (\mathrm{P})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \le U(c). \tag{1.6}$$

Per l'intervallo $[c,b]$ consideriamo come soprafunzione e sottofunzione

$$\widetilde{U}(x) = U(x) - U(c), \qquad \widetilde{L}(x) = L(x) - L(c).$$

f è (P)-integrabile su $[c,b]$; infatti, per il Corollario 1.13, $U(c) - L(c) \ge 0$, quindi abbiamo

$$\widetilde{U}(b) - \widetilde{L}(b) = (U(b) - L(b)) - (U(c) - L(c)) \le U(b) - L(b) < \epsilon.$$

Per cui vale

$$\widetilde{L}(b) \leq (\mathrm{P}) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \widetilde{U}(b),$$

ovvero

$$L(b) - L(c) \leq (\mathrm{P}) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq U(b) - U(c). \tag{1.7}$$

Sommando le formule (1.6) e (1.7) otteniamo

$$L(b) \leq (\mathrm{P}) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{P}) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq U(b).$$

Sottraendo a tutti i membri il numero (P) $\int_a^b f$ si ottiene

$$L(b) - (\mathrm{P}) \int_a^b f \leq (\mathrm{P}) \int_a^c f + (\mathrm{P}) \int_c^b f - (\mathrm{P}) \int_a^b f \leq U(b) - (\mathrm{P}) \int_a^b f.$$

Essendo $\epsilon > 0$ arbitrario, il membro centrale (che non dipende da ϵ) è allora nullo. Abbiamo così provato la formula (1.5). □

Proposizione 1.21 (Additività dell'integrale di Perron - II). *Sia f (P)-integrabile su $[a, c]$ e $[c, b]$. Allora f è (P)-integrabile su $[a, b]$, e vale quindi la formula (1.5).*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$, e siano U_1 e L_1 rispettivamente soprafunzione e sottofunzione di f su $[a, c]$ e U_2 e L_2 su $[c, b]$ tali che

$$U_1(c) - L_1(c) < \epsilon, \qquad U_2(b) - L_2(b) < \epsilon.$$

Definiamo le funzioni

$$U(x) = \begin{cases} U_1(x) & \text{per } a \leq x \leq c \\ U_1(c) + U_2(x) & \text{per } c \leq x \leq b, \end{cases}$$

$$L(x) = \begin{cases} L_1(x) & \text{per } a \leq x \leq c \\ L_1(c) + L_2(x) & \text{per } c \leq x \leq b, \end{cases}$$

che sono rispettivamente soprafunzione e sottofunzione di f su $[a, b]$. Inoltre vale che

$$U(b) - L(b) = (U_1(c) - L_1(c)) + (U_2(b) - L_2(b)) < 2\epsilon.$$

Siccome ϵ è arbitrario, f è (P)-integrabile su tutto $[a, b]$. □

I teoremi seguenti sanciscono un primo legame tra l'integrale di Perron e di Lebesgue.

Teorema 1.22. *Una funzione* (P)*-integrabile è a valori finiti quasi dappertutto.*

Dimostrazione. Poniamo $C = \{x \in [a,b] : f(x) \in \{+\infty, -\infty\}\}$. Siano U, L rispettivamente soprafunzione e sottofunzione di f e $R(x) = U(x) - L(x)$. Dal Lemma 1.12 abbiamo che R è crescente quindi (da risultati generali sulle funzioni monotone) l'insieme

$$D := \{x \in [a,b] : \underline{D}R(x) = +\infty\}$$

ha misura nulla. Vogliamo provare che $C \subseteq D$.

Sia $x_0 \in C$, e supponiamo che $f(x_0) = +\infty$; allora dalla definizione di soprafunzione e sottofunzione $\underline{D}\,U(x_0) \geq f(x_0) = +\infty$ e $\overline{D}L(x_0) < +\infty$. Quindi per il Lemma 1.4

$$\underline{D}R(x_0) \geq \underline{D}U(x_0) - \overline{D}L(x_0) = +\infty.$$

Analogamente se $f(x_0) = -\infty$, $\overline{D}\,L(x_0) \leq f(x_0) = -\infty$ e $\underline{D}U(x_0) > -\infty$, quindi

$$\underline{D}R(x_0) \geq \underline{D}U(x_0) - \overline{D}L(x_0) = +\infty.$$

Dunque in ogni caso $x_0 \in D$, e questo completa la dimostrazione. □

Teorema 1.23. *Siano f* (P)*-integrabile su $[a,b]$ e g definita su $[a,b]$ tali che $g(x) = f(x)$ quasi dappertutto. Allora g è* (P)*-integrabile su $[a,b]$ e*

$$(\mathrm{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{P})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme di misura nulla A dei punti di $[a,b]$ tali che $f(x) \neq g(x)$. Definiamo m, M funzioni su $[a,b]$ tali che $m(x) = M(x) = 0$ per ogni $x \notin A$, e $m(x) = -\infty$, $M(x) = +\infty$ per ogni $x \in A$.

Fissato $\epsilon > 0$, dalle ipotesi secondo cui f è (P)-integrabile, esistono una soprafunzione e una sottofunzione U_1, L_1 di f su $[a,b]$ tali che

$$L_1(b) \leq (\mathrm{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq U_1(b),$$

e $U_1(b) - L_1(b) < \epsilon$. Quindi

$$0 \leq U_1(b) - (\mathrm{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq U_1(b) - L_1(b) < \epsilon.$$

Anticipiamo il notevole risultato (Teorema 2.7) secondo cui ogni funzione Lebesgue-integrabile è anche Perron-integrabile, e i due integrali coincidono. La funzione M è integrabile nel senso di Lebesgue su $[a, b]$ con integrale nullo, e quindi (per il citato teorema) esiste una soprafunzione U_2 di M su $[a, b]$ tale che

$$0 \leq U_2(b) < \epsilon.$$

$U := U_1 + U_2$ è una soprafunzione di $f + M$ e ovviamente $f + M \geq g$. Quindi $U = U_1 + U_2$ è una soprafunzione di g su $[a, b]$ ed essendo

$$U(b) - (\mathrm{P}) \int_a^b f = U_1(b) + U_2(b) - (\mathrm{P}) \int_a^b f,$$

ne segue (dalle disequazioni precedenti)

$$0 \leq U(b) - (\mathrm{P}) \int_a^b f < 2\epsilon.$$

Procedendo analogamente per le sottofunzioni abbiamo che

$$-2\epsilon < L(b) - (\mathrm{P}) \int_a^b f \leq 0.$$

Allora g è (P)-integrabile su $[a, b]$ e vale la formula (1.8). □

1.4 Integrale indefinito di Perron

Definizione 1.24. *Sia* $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione* (P)*-integrabile. Allora la funzione*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := (\mathrm{P}) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

è chiamata integrale indefinito di Perron di f*. Per convenzione si pone* $F(a) := 0$*. La buona positura di* F *segue dalla Proposizione 1.20.*

Osservazione 1.25. Si potrebbero considerare anche funzioni integrali in cui la variabile indipendente è al primo estremo, come

$$G : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad G(x) := (\mathrm{P}) \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ma queste si riconducono al primo tipo, poiché, per l'additività dell'integrale di Perron,

$$F(x) + G(x) = (\mathrm{P}) \int_a^x f + (\mathrm{P}) \int_x^b f = (\mathrm{P}) \int_a^b f,$$

e quindi $G(x) = (\mathrm{P}) \int_a^b f - F(x)$.

Teorema 1.26. *L'integrale indefinito di Perron è una funzione continua.*

Dimostrazione. Siano U, L soprafunzione e sottofunzione di f su $[a, b]$ tali che

$$U(b) - L(b) < \epsilon.$$

Siccome, per il Lemma 1.12, $U(x) - L(x)$ è crescente, si ha

$$U(x) - L(x) < \epsilon, \ \forall\, x \in [a, b].$$

Quindi U e L sono soprafunzione e sottofunzione di f anche su $[a, x]$, e vale dunque

$$L(x) \leq (\mathrm{P}) \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \leq U(x).$$

Quindi, per ogni $x \in [a, b]$, abbiamo che

$$0 \leq U(x) - (\mathrm{P}) \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \leq U(x) - L(x) < \epsilon.$$

La possibilità di effettuare un'approssimazione uniforme e arbitrariamente vicina alla funzione $(\mathrm{P}) \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$, mediante una successione di soprafunzioni U_n (che sono funzioni continue) completa la dimostrazione. □

Lemma 1.27. *Sia* $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione* (P)*-integrabile su* $[a, b]$ *e consideriamo la funzione integrale indefinito*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = (\mathrm{P}) \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Siano infine U, L *soprafunzione e sottofunzione di* f*. Allora le differenze*

$$U(x) - F(x), \qquad F(x) - L(x)$$

sono funzioni crescenti (e non negative). In particolare,

$$L(x) \leq (\mathrm{P}) \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \leq U(x), \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{1.9}$$

Dimostrazione. Siano $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. La funzione $U(x) - U(x_1)$ è una soprafunzione di f in $[x_1, x_2]$, quindi

$$(\mathrm{P}) \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \leq U(x_2) - U(x_1),$$

ovvero

$$F(x_2) - F(x_1) \leq U(x_2) - U(x_1).$$

Abbiamo quindi provato che

$$U(x_1) - F(x_1) \leq U(x_2) - F(x_2),$$

e dunque $U - F$ è crescente su $[a, b]$. Essendo $U(a) = F(a) = 0$, dalla monotonia di $U - F$ segue poi che

$$U(x) - F(x) \geq U(a) - F(a) = 0, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Si procede analogamente per le sottofunzioni. □

Il seguente teorema è il (Secondo) Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale nel senso di Perron, sulla derivazione della funzione integrale indefinito di Perron. La sua dimostrazione è non banale. In termini molto semplificati, possiamo interpretare il seguente profondo risultato come segue: l'integrale di Perron su $[a, b]$ è definito in modo tale da rendere (P)-integrabili tutte le funzioni f che sono (dappertutto) la derivata di qualche funzione derivabile su $[a, b]$; sorge quindi la domanda reciproca, ossia, se data una funzione f (P)-integrabile su $[a, b]$ essa sia necessariamente la derivata di qualche funzione. Il seguente teorema dice che questo è vero quasi dappertutto su $[a, b]$, poiché f coincide quasi dappertutto con la derivata della funzione integrale indefinito di Perron:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\mathrm{P}) \int_a^x f\right) = f(x), \quad \text{per quasi ogni } x \in [a, b].$$

Chiaramente non è auspicabile, in generale, che questo sia vero dappertutto su $[a, b]$. Infatti, se f è ad esempio la funzione segno su $[-1, 1]$, sappiamo che f non[1] può essere la derivata di una funzione derivabile su $[-1, 1]$; tuttavia f è certamente Perron integrabile su $[-1, 1]$ poiché essa è Lebesgue integrabile e l'integrale di Perron estende l'integrale di Lebesgue.

[1]Segue dal noto Teorema di Darboux, secondo cui (su un intervallo) la funzione derivata deve mandare intervalli in intervalli; ovviamente la funzione segno non ha tale proprietà.

Teorema 1.28. *Sia $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione* (P)*-integrabile su* $[a,b]$*, e sia*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = (\mathrm{P}) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Allora F è differenziabile quasi dappertutto su $[a,b]$ e $F' = f$ quasi dappertutto su $[a,b]$.

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$ (ragionando come nella prova del Teorema 1.26) esiste una soprafunzione U di f tale che

$$U(b) - F(b) < \epsilon^2.$$

Poniamo

$$R(x) := U(x) - F(x);$$

questa funzione è crescente per il Lemma 1.27, ed è continua perché differenza di due funzioni continue (Teorema 1.26). Quindi, per risultati generali sulle funzioni monotone, la sua derivata esiste quasi dappertutto su $[a,b]$ e

$$\begin{aligned}(\mathrm{L}) \int_a^b R'(x)\,\mathrm{d}x &\le R(b) - R(a) = U(b) - F(b) - (U(a) - F(a)) \\ &= U(b) - F(b) < \epsilon^2.\end{aligned}$$

Si noti che U e quindi R dipendono da ϵ. Denotiamo

$$A(\epsilon) := \{x \in [a,b] : \underline{D}F(x) < f(x) - \epsilon\}.$$

Per ogni $x \in A(\epsilon)$ abbiamo che $\underline{D}F(x) < \underline{D}U(x) - \epsilon$, ovvero

$$\underline{D}U(x) - \underline{D}F(x) > \epsilon.$$

Questa differenza è ben posta: infatti, essendo $\underline{D}F(x) < f(x) - \epsilon$, si ha $\underline{D}F(x) < +\infty$, e $\underline{D}U(x) > -\infty$. Denotiamo con M l'insieme dei punti in cui $R'(x)$ esiste; questo insieme ha misura $b - a$. Se $x \in M$ si ha

$$R'(x) = \underline{D}U(x) - \underline{D}F(x). \tag{1.10}$$

Infatti, per definizione di $R = U - F$, vale

$$\frac{R(x+h) - R(x)}{h} = \frac{U(x+h) - U(x)}{h} - \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

e dunque
$$\frac{U(x+h)-U(x)}{h}=\frac{R(x+h)-R(x)}{h}+\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$
Passando al limite inferiore per h che tende a zero ad entrambi i membri (e ricordando che esiste $R'(x)$ per ogni $x \in M$) si ha

$$\begin{aligned}\underline{D}U(x) &= \liminf_{h\to 0}\frac{U(x+h)-U(x)}{h}\\ &= \liminf_{h\to 0}\left(\frac{R(x+h)-R(x)}{h}+\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{R(x+h)-R(x)}{h}+\liminf_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\ &= R'(x)+\underline{D}F(x).\end{aligned}$$

Ne segue
$$\underline{D}U(x)=R'(x)+\underline{D}F(x),\ \forall\, x\in M,$$
da cui (1.10). Poniamo
$$B(\epsilon):=\{x\in[a,b]:R'(x)>\epsilon\}.$$
Ovviamente R' è una funzione misurabile e quindi $B(\epsilon)$ è un insieme misurabile. Consideriamo poi l'insieme
$$M\cap A(\epsilon).$$
Da quanto visto sopra, per ogni $x\in M\cap A(\epsilon)$, vale
$$R'(x)=\underline{D}U(x)-\underline{D}F(x)>\epsilon;$$
ma allora $M\cap A(\epsilon)\subseteq B(\epsilon)$. Ma (essendo $R'\geq 0$ su M)
$$\epsilon^2>(\mathrm{L})\int_a^b R'\geq(\mathrm{L})\int_{B(\epsilon)}R'>\epsilon\mu(B(\epsilon)).$$
Segue che $\mu(B(\epsilon))<\epsilon$. Essendo $M\cap A(\epsilon)\subseteq B(\epsilon)$ (e poiché $\mu(M)=b-a$) deduciamo
$$\mu^*(A(\epsilon))=\mu^*(M\cap A(\epsilon))\leq\mu^*(B(\epsilon))=\mu(B(\epsilon))<\epsilon,$$
ossia $\mu^*(A(\epsilon))<\epsilon$ per ogni $\epsilon>0$. Data l'arbitrarietà di ϵ, segue anche
$$\mu^*\left(A\left(\frac{\epsilon}{2^n}\right)\right)<\frac{\epsilon}{2^n}\qquad\forall\,\epsilon>0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Si noti che
$$A\left(\frac{\epsilon}{2^n}\right) = \left\{x \in [a,b] : \underline{D}F(x) < f(x) - \frac{\epsilon}{2^n}\right\},$$
ed è dunque semplice riconoscere che, posto $A = \{x \in [a,b] : \underline{D}F(x) < f(x)\}$, vale
$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A\left(\frac{\epsilon}{2^n}\right)$$
(qualunque sia $\epsilon > 0$). Ma[2] allora
$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A\left(\frac{\epsilon}{2^n}\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*\left(A\left(\frac{\epsilon}{2^n}\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$
Riassumendo, $\mu^*(\{x \in [a,b] : \underline{D}F(x) < f(x)\}) < \epsilon$; dall'aribitrarietà di ϵ segue
$$\mu(\{x \in [a,b] : \underline{D}F(x) < f(x)\}) = 0.$$
Questo è come dire che
$$\underline{D}F(x) \geq f(x) \text{ per quasi ogni } x \in [a,b]. \tag{1.11}$$
Analogamente si prova che
$$\overline{D}F(x) \leq f(x) \text{ per quasi ogni } x \in [a,b]. \tag{1.12}$$
Essendo soddisfatte sia (1.11) che (1.12), possiamo concludere che $F'(x)$ esiste per quasi ogni $x \in [a,b]$ e coincide con $f(x)$ per tali x. □

Anche il seguente risultato stabilisce un legame tra integrale di Perron e la teoria di Lebesgue.

Corollario 1.29. *Sia* $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione* (P)*-integrabile su* $[a,b]$*. Allora* f *è misurabile su* $[a,b]$ *(rispetto alla misura di Lebesgue).*

Dimostrazione. Sia F l'integrale generalizzato di Perron; poniamo $F(x) = F(b)$ per ogni $x > b$. Grazie al Teorema 1.28, la funzione f può essere scritta come limite di una successione di funzioni continue come segue
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right),$$
per quasi ogni $x \in [a,b]$. Quindi f è misurabile. □

[2]Qui e nel seguito μ e μ^* denotano la misura di Lebesgue e la misura esterna di Lebesgue in $\mathbb{R}^1$.

Corollario 1.30. *Siano U e L, rispettivamente, una soprafunzione e una sottofunzione di una funzione $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ che è* (P)*-integrabile.*

Allora esse sono derivabili quasi dappertutto.

Dimostrazione. Si ha ovviamente

$$U(x) = (U(x) - F(x)) + F(x).$$

Ma $U(x) - F(x)$ e $F(x)$ sono differenziabili quasi dappertutto come visto nel Lemma 1.27 e nel Teorema 1.28. Analogamente per $L(x)$. □

Capitolo 2

Confronto tra gli integrali di Lebesgue e Perron

In questo capitolo studieremo la relazione tra l'integrale di Perron e quello di Lebesgue. In particolare vedremo come il primo sia un'estensione del secondo dimostrando che ogni funzione (L)-integrabile è anche (P)-integrabile.

Prima però è necessario considerare alcune proprietà delle funzioni semicontinue.

2.1 Funzioni semicontinue inferiormente

Definizione 2.1. *Una funzione* $u : [a, b] \to (-\infty, +\infty]$ *si dice semicontinua inferiormente in* $x_0 \in [a, b]$ *se*

$$\liminf_{x \to x_0} u(x) \geq u(x_0).$$

Se questo vale per ogni $x \in [a, b]$ *si dice che* u *è semicontinua inferiormente su* $[a, b]$.

Lemma 2.2. *Sia* $u : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *con* $x_0 \in [a, b]$ *e* $u(x_0) > -\infty$. *Una condizione necessaria e sufficiente alla semicontinuità inferiore in* x_0 *è che per ogni* $y < u(x_0)$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $u(x) > y$ *con* $|x - x_0| < \delta$ *e* $x \in [a, b]$.

Dimostrazione. Supponiamo che u sia una funzione semicontinua inferiormente in x_0. Se $y < u(x_0)$ e definiamo

$$m_\delta(x_0) = \inf\{u(x) : x \in]x_0 - \delta,\, x_0 + \delta[\cap [a, b] \text{ e } x \neq x_0\},$$

allora

$$u(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} u(x) = \lim_{\delta \to 0} m_\delta(x_0).$$

Sia allora (per la permanenza del segno) $\delta > 0$ tale che $m_\delta(x_0) > y$. Abbiamo ovviamente che $u(x) \geq m_\delta(x_0)$ per $0 \neq |x - x_0| < \delta$, ed allora vale la condizione dell'asserto.

Proviamo ora il viceversa: prendiamo $y < u(x_0)$ e un δ come nell'asserto; allora abbiamo che $m_\delta(x_0) \geq y$, da cui segue che

$$\liminf_{x \to x_0} u(x) \geq y.$$

Se ora si passa al limite $y \to u(x_0)$, troviamo che

$$\liminf_{x \to x_0} u(x) \geq u(x_0).$$

Quindi $u(x)$ è semicontinua inferiormente. □

Lemma 2.3. *Una funzione $u : [a, b] \to (-\infty, +\infty]$ è semicontinua inferiormente se e solo se l'insieme $B = \{x \in [a, b] : u(x) \leq \beta\}$ è chiuso per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Questo è ovviamente equivalente a dire che l'insieme $B' = \{x \in [a, b] : u(x) > \beta\}$ è relativamente aperto in $[a, b]$, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che u sia semicontinua inferiormente su $[a, b]$ e $\beta \in \mathbb{R}$; vogliamo dimostrare che B, così come l'abbiamo definito nell'enunciato, è chiuso. Siano x_0 punto di accumulazione di B e $\alpha < u(x_0)$. Dal Lemma 2.2 abbiamo che esiste $\delta > 0$ tale che $u(x) > \alpha$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$. Per definizione di punto di accumulazione esiste $z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap B \setminus \{x_0\}$. Quindi $\alpha < u(z) \leq \beta$, ma $\alpha < u(x_0)$ è arbitrario perciò segue che $u(x_0) \leq \beta$, ovvero $x_0 \in B$. Abbiamo provato che B è chiuso.

Proviamo ora il viceversa. Supponiamo che l'insieme $B = \{x \in [a, b] : u(x) \leq \beta\}$ sia chiuso per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $\alpha < u(x_0)$. L'insieme $\{x \in [a, b] : u(x) \leq \alpha\}$ è chiuso e non contiene il punto x_0; allora esiste $\delta > 0$ tale che $u(x) > \alpha$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$. Questo prova che u è semicontinua inferiormente in x_0. □

Osservazione 2.4. Da quest'ultimo lemma segue che se $A = [a, b] \cap G$, con G insieme aperto, la funzione caratteristica χ_A è semicontinua inferiormente su $[a, b]$; infatti

$$B = \{x \in [a, b] : \chi_A(x) \leq \beta\} = \begin{cases} [a, b] & \text{per } \beta \geq 1, \\ [a, b] \setminus G & \text{per } 0 \leq \beta < 1, \\ \varnothing & \text{per } \beta < 0. \end{cases}$$

Quindi B è chiuso per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Il seguente lemma garantisce l'approssimabilità dell'integrale di Lebesgue mediante l'integrale di Lebesgue di funzioni semicontinue inferiormente. Infatti esso prova che, qualunque sia $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ L-sommabile, si ha

$$\int_a^b f = \inf \left\{ \int_a^b u : \; u \geq f, \quad u \text{ semicontinua inferiormente} \right\}.$$

Lemma 2.5. *Sia* $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *sommabile (nel senso di Lebesgue) su* $[a, b]$*. Allora per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste una funzione* u *tale che:*

1. $u : [a, b] \to (-\infty, +\infty]$ *è una funzione semicontinua inferiormente,*

2. $u(x) \geq f(x)$ *per ogni* $x \in [a, b]$*,*

3. u *è sommabile e*

$$(\mathrm{L}) \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq (\mathrm{L}) \int_a^b u(x) \, \mathrm{d}x < \epsilon + (\mathrm{L}) \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia non negativa e limitata; perciò esiste M tale che $0 \leq f(x) < M$ per ogni $x \in [a, b]$. Definiamo

$$\eta = \frac{\epsilon}{b - a + 1};$$

scegliamo $N \in \mathbb{N}$ con $N > 0$ tale che $\eta N > M$. Per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$, siano poi

$$E_k = \{x \in [a, b] : (k - 1)\eta \leq f(x) < k\eta\},$$

e sia G_k un insieme aperto tale che $E_k \subseteq G_k$ e $\mu(G_k) < \mu(E_k) + \frac{1}{k2^k}$. Prendiamo $A_k = G_k \cap [a, b]$; allora per il Lemma 2.3 la funzione χ_{A_k} è semicontinua inferiormente su $[a, b]$, quindi lo è anche

$$u := \sum_{k=1}^{N} k\eta\chi_{A_k}.$$

Sia $x \in [a,b]$; visto che gli E_k formano una partizione di $[a,b]$, sarà $x \in E_k$ per un qualche k e quindi (giacché $E_k \subseteq G_k \cap [a,b] = A_k$)

$$u(x) = \sum_{k=1}^{N} k\eta\chi_{A_k}(x) \geq k\eta\chi_{A_k}(x) = k\eta > f(x),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo riusato il fatto che $x \in E_k$. Inoltre vale

$$\begin{aligned}
(\mathrm{L}) \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x &= \eta \sum_{k=1}^{N} k\mu(A_k) \leq \eta \sum_{k=1}^{N} k\mu(G_k) \\
&< \eta \sum_{k=1}^{N} k\left(\mu(E_K) + \frac{1}{k2^k}\right) = \eta \sum_{k=1}^{N} k\mu(E_K) + \eta \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \\
&= \eta \sum_{k=1}^{N} (k-1)\mu(E_K) + \eta \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k) + \eta \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \\
&\leq \eta \sum_{k=1}^{N} (k-1)\mu(E_K) + \eta(b-a) + \eta \\
&= \eta \sum_{k=1}^{N} (k-1)\mu(E_K) + \epsilon.
\end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$(\mathrm{L}) \int_a^b f \geq \int_{E_k} (k-1)\eta\,\mathrm{d}x = (k-1)\eta\mu(E_k),$$

ed allora, proseguendo nelle stime di cui sopra,

$$(\mathrm{L}) \int_a^b u \leq \sum_{k=1}^{N} (L) \int_{E_k} f + \epsilon = (\mathrm{L}) \int_a^b f + \epsilon,$$

come volevasi (si noti che nell'ultimo passaggio abbiamo riusato il fatto che E_k formano una partizione disgiunta di $[a,b]$). La u così definita è la funzione richiesta del Lemma.

Supponiamo ora f non negativa. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$g_n(x) = \min\{f(x), n\},$$

e sia $f_1 = g_1$ e $f_n = g_n - g_{n-1}$ per $n \geq 2$. Notiamo che f_n è non negativa e limitata, e

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n.$$

Possiamo quindi applicare ad ogni f_n la prima parte della dimostrazione. Otteniamo quindi che per ogni n esiste u_n funzione semicontinua inferiormente su $[a, b]$ tale che $u_n \geq f_n$ su $[a, b]$ e

$$(\mathrm{L}) \int_a^b u_n < (\mathrm{L}) \int_a^b f_n + \epsilon 2^{-n}.$$

La funzione

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

è ancora semicontinua inferiormente su $[a, b]$ e segue che $u \geq f$. Quindi (applicando la convergenza monotona due volte)

$$(\mathrm{L}) \int_a^b u = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b u_n < \sum_{n=1}^{+\infty} \left((\mathrm{L}) \int_a^b f_n + \epsilon 2^{-n} \right) = (\mathrm{L}) \int_a^b f + \epsilon.$$

Sia ora f una qualunque funzione (L)-integrabile su $[a, b]$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$f_n(x) = \max\{f(x), -n\}.$$

Abbiamo che $|f_n| \leq |f|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ converge a f; inoltre per il Teorema di Convergenza Dominata

$$\lim_{n \to +\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b f_n = (\mathrm{L}) \int_a^b f.$$

Scegliamo un intero N tale che $(\mathrm{L}) \int_a^b f_N < (\mathrm{L}) \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}$. Analogamente al caso precedente possiamo applicare la dimostrazione a $f_N + N$, e otteniamo una funzione semicontinua inferiormente u_N tale che $u_N \geq f_N + N$ e

$$(\mathrm{L}) \int_a^b u_N < (\mathrm{L}) \int_a^b (f_N + N) + \frac{\epsilon}{2}.$$

La funzione $u = u_N - N$ ha le proprietà richieste dal Lemma. $\square$

2.2 Integrale di Lebesgue e di Perron

Il seguente risultato stabilisce che, per integrande inferiormente semicontinue e sommabili, la funzione integrale indefinito (di Lebesgue) è, in modo naturale, una soprafunzione nel senso di Perron. Questo semplice risultato è dunque un perno cruciale tra la teoria delle funzioni semicontinue inferiormente (che, come abbiamo visto nel Lemma 2.5, permettono di approssimare l'integrale di Lebesgue) e la teoria dell'integrale di Perron.

Lemma 2.6. *Se u è sommabile su $[a,b]$, poniamo*

$$U : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad U(x) := (\mathrm{L}) \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Se u è semicontinua inferiormente in $x_0 \in [a,b]$. Allora

$$\underline{D}U(x_0) \geq u(x_0).$$

In particolare, se $u : [a,b] \to (-\infty, +\infty]$ è sommabile e semicontinua inferiormente su tutto $[a,b]$, allora $U(x)$ è una soprafunzione di f.

Dimostrazione. La funzione U è continua su $[a,b]$ poiché u è sommabile. Proviamo ora che $\underline{D}U(x_0) \geq u(x_0)$. Supponiamo che $u(x_0) > -\infty$, altrimenti la dimostrazione è banale. Prendiamo λ tale che $u(x_0) > \lambda$; allora esiste $\delta > 0$ tale che $u(t) > \lambda$ per ogni $t \in [a,b]$ con $|t - x_0| < \delta$. Quindi per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ abbiamo che

$$U(x) - U(x_0) = (\mathrm{L}) \int_{x_0}^x u(t)\,\mathrm{d}t \geq \lambda(x - x_0),$$

da cui segue (per tali x, notando che $x - x_0 > 0$)

$$\frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} \geq \lambda.$$

Se invece $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ abbiamo che

$$U(x) - U(x_0) = -(\mathrm{L}) \int_x^{x_0} u(t)\,\mathrm{d}t \leq \lambda(x - x_0),$$

da cui per tali x segue ancora (notando che stavolta $x - x_0 < 0$ e quindi dividendo per $x - x_0$ la disuguaglianza si inverte)

$$\frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} \geq \lambda.$$

Quindi in ogni caso si ha

$$\frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} \geq \lambda, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\},$$

da cui segue $\underline{D}U(x_0) \geq \lambda$. Siccome λ era scelto arbitrariamente in modo che $u(x_0) > \lambda$, facendo tendere $\lambda \to u(x_0)^-$ abbiamo provato il lemma. $\square$

Il seguente notevolissimo risultato stabilisce che l'integrale di Perron estende e prolunga l'integrale di Lebesgue. Si osservi la semplicità della prova, quasi interamente giocata sul Lemma 2.5.

Teorema 2.7. *Sia $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile (nel senso di Lebesgue) su $[a, b]$. Allora f è* (P)*-integrabile su $[a, b]$, e vale*

$$(\mathrm{P}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$, e sia $u = u_\epsilon : [a, b] \to (-\infty, +\infty]$ una funzione sommabile e semicontinua inferiormente su $[a, b]$ come nel Lemma 2.5 relativamente a f. Sia

$$U_\epsilon(x) = (\mathrm{L}) \int_a^x u_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t.$$

Allora U_ϵ è continua, $U_\epsilon(a) = 0$, e inoltre, per il Lemma 2.6, per ogni $x \in [a, b]$ si ha

$$\underline{D}U_\epsilon(x) \geq u_\epsilon(x).$$

Questo implica (ricordando che $u \geq f$ per costruzione e $u(x) > -\infty$ per ogni x)

$$\underline{D}U_\epsilon(x) > -\infty, \qquad \underline{D}U_\epsilon(x) \geq f(x),$$

e quindi U_ϵ è una soprafunzione di f. Essendo ϵ arbitrario la disuguaglianza

$$U_\epsilon(b) = (\mathrm{L}) \int_a^b u_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t < \epsilon + (\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

implica

$$\inf\{U(b)\} \leq (\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

dove $\{U(b)\}$ è l'insieme dei valori di tutte le possibili soprafunzioni di f in $x = b$. Analogamente, per le sottofunzioni L si ha

$$\sup\{L(b)\} \geq (\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Abbiamo quindi che

$$\sup\{L(b)\} \geq (\mathrm{L}) \int_a^b f \geq \inf\{U(b)\}.$$

D'altra parte sappiamo che (Corollario 1.13)

$$\sup\{L(b)\} \leq \inf\{U(b)\},$$

e quindi le precedenti sono tutte delle uguaglianze:

$$\sup\{L(b)\} = (\mathrm{L}) \int_a^b f = \inf\{U(b)\}.$$

Ne segue dunque che f è Perron-integrabile e che

$$(\mathrm{P}) \int_a^b f = (\mathrm{L}) \int_a^b f.$$

Questo conclude la prova. □

Il seguente teorema rimarchevole completa il teorema precedente: esso asserisce che, per le funzioni a valori non negativi, la integrabilità nel senso di Perron e la sommabilità nel senso di Lebesgue coincidono. Quindi l'integrale di Perron estende quello di Lebesgue non per merito delle funzioni dotate di segno, bensì per quelle che cambiano segno infinite volte, come la derivata di $x^2 \sin(1/x^2)$ su $[0, 1]$.

Teorema 2.8. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *non negativa e* (P)*-integrabile su* $[a, b]$*. Allora* f *è anche sommabile nel senso di Lebesgue su* $[a, b]$ *(e quindi gli integrali di Lebesgue e di Perron coincidono, per il Teorema 2.7).*

Dimostrazione. Sia U soprafunzione di f. La disuguaglianza

$$\underline{D}U(x) \geq f(x) \geq 0 \tag{2.2}$$

implica che U è crescente per il Lemma 1.11, quindi, per i ben noti risultati sulla derivabilità delle funzioni monotone, U' esiste quasi dappertutto (è non negativa laddove esiste) ed è sommabile, stante la formula

$$0 \leq (\mathrm{L}) \int_a^b U' \leq U(b) - U(a) \in \mathbb{R}.$$

La formula (2.2) diventa quindi

$$U'(x) \geq f(x) \geq 0,$$

in tutti i punti x in cui $U'(x)$ esiste, ossia quasi dappertutto. Dal Corollario 1.29, essendo f (P)-integrabile segue che f è misurabile; dunque, per provare che f è (L)-sommabile, è suffciente provare che $|f|$ è (L)-sommabile. Ma questo segue proprio da

$$0 \leq f \leq U' \quad \text{q.d.},$$

giacché U' è sommabile. □

Corollario 2.9. *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *misurabile e assolutamente* (P)*-integrabile su* $[a,b]$, *cioè esiste (finito)*

$$(\mathrm{P}) \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Allora f *è* (L)*-sommabile su* $[a,b]$.

Basta applicare il Teorema 2.8 alla funzione $|f|$, che è non negativa e (P)-integrabile. Si noti che il citato teorema garantisce la misurabilità di $|f|$ ma non quella di f; la misurabilità di f va quindi messa tra le ipotesi, e non è ulteriormente rimovibile, come mostra il seguente esempio: sia $V \subset [0,1]$ non misurabile secondo Lebesgue e poniamo

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in V \\ -1 & \text{se } x \in [0,1] \setminus V. \end{cases}$$

Allora f non è misurabile (e quindi non può essere L-sommabile), mentre $|f| \equiv 1$ è (P)-integrabile.

Teorema 2.10. *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *misurabile. Allora* f *è assolutamente integrabile nel senso di Perron se e solo se lo è anche nel senso di Lebesgue.*

Basta combinare il Teorema 2.7 (applicato a $|f|$) e il Corollario 2.9.

Capitolo 3

Alcuni notevoli esempi

In questo capitolo forniamo alcuni notevoli esempi che aiutano a fissare le idee sulla differenza tra integrale di Perron e di Lebesgue. Forniamo inoltre un bel teorema, sempre concernente il Teorema di Torricelli-Barrow, con cui si apre la seguente sezione.

3.1 Una variante del Teorema di Torricelli-Barrow

Si osservi la ipotesi di derivabilità *in ogni punto*, nel seguente teorema; tale ipotesi non può però essere rimpiazzata con la derivabilità *quasi dappertutto*, come mostra l'esempio della famosa funzione di Vitali-Cantor (Paragrafo 3.3).

Teorema 3.1. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivabile in ogni punto di* $[a, b]$, *e supponiamo che* $f' \in L^1([a, b])$. *Allora*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Proviamolo nel caso $x = b$ (il caso generale essendo analogo). Fissato $\epsilon > 0$, per il Lemma 2.5 (applicato alla funzione sommabile f'), esiste una funzione sommabile $g = g_\epsilon$, semicontinua inferiormente su $[a, b]$, tale che $g \geq f'$ e

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t + \epsilon. \tag{3.2}$$

Il Lemma 2.5 ci assicura l'esistenza di $g \geq f'$, ma, siccome la misura di $[a, b]$ è finita, possiamo aggiungere una costante (dipendente da ϵ) a g senza modificare la formula (3.2) e quindi possiamo supporre che $g > f'$ su $[a, b]$. Per ogni $\eta > 0$ definiamo la seguente funzione su $[a, b]$:

$$F_\eta(x) = \int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s - f(x) + f(a) + \eta(x-a). \tag{3.3}$$

Sia $\eta > 0$ fissato. Ad ogni $x \in [a, b[$ (grazie alla inferiore semicontinuità di g e alla definizione di derivata) corrisponde un $\delta_x > 0$ (che dipende anche da η e da ϵ) tale che

$$g(t) > f'(x) \quad \text{e} \quad \frac{f(t) - f(x)}{t-x} < f'(x) + \eta, \qquad \forall\, t \in (x, x+\delta_x). \tag{3.4}$$

Per tali t abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
&F_\eta(t) - F_\eta(x) = \\
&= \int_a^t g(s)\,\mathrm{d}s - f(t) + f(a) + \eta(t-a) - \int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s + f(x) - f(a) - \eta(x-a) \\
&= \int_x^t g(s)\,\mathrm{d}s - (f(t) - f(x)) + \eta(t-x) \\
&\text{(applicando la prima disuguaglianza in (3.4))} \\
&\geq \int_x^t f'(x)\,\mathrm{d}s - (f(t) - f(x)) + \eta(t-x) \\
&= (t-x)f'(x) - (f(t) - f(x)) + \eta(t-x) \\
&\text{(applicando la seconda disuguaglianza in (3.4), essendo } t > x) \\
&> (t-x)f'(x) - (t-x)(f'(x) + \eta) + \eta(t-x) = 0.
\end{aligned}$$

Ne segue

$$F_\eta(t) > F_\eta(x), \qquad \forall\, t \in (x, x+\delta_x). \tag{3.5}$$

Consideriamo l'insieme

$$A := \{x \in [a, b] : F_\eta(x) = 0\}.$$

Questo insieme è non vuoto poiché $F_\eta(a) = 0$; A è anche chiuso in $[a, b]$, poiché F_η è continua. Dunque A è compatto ed esiste allora $\overline{x} := \max A$. Se $\overline{x} < b$, da (3.5) segue

$$F_\eta(t) > 0, \quad \text{per } t \in (\overline{x}, \overline{x} + \delta_{\overline{x}}),$$

e F_η non può più diventare negativa dopo $\overline{x}$, altrimenti (per ragioni di continuità) si dovrebbe annullare dopo $\overline{x}$, il che contraddice la massimalità di $\overline{x}$. Dunque $F_\eta(t) > 0$ per $t \in (\overline{x}, b]$. In ogni caso[1] $F_\eta(b) \geq 0$, ossia (si veda (3.3))

$$\int_a^b g(s)\,\mathrm{d}s - f(b) + f(a) + \eta(b-a) \geq 0;$$

essendo $\eta > 0$ arbitrario, possiamo fare il limite $\eta \to 0^+$ ed ottenere

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \geq f(b) - f(a).$$

Dalla formula (3.2) abbiamo quindi

$$f(b) - f(a) \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t + \epsilon;$$

siccome ϵ è arbitrario possiamo concludere che

$$f(b) - f(a) \leq \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.6}$$

Se f soddisfa le ipotesi del teorema, le soddisfa anche $-f$; quindi andando a sostituire f con $-f$ la formula (3.6) diventa $-f(b) + f(a) \leq -\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$, ovvero

$$f(b) - f(a) \geq \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Queste ultime due formule danno la (3.1). □

3.2 Una funzione P-integrabile e non L-sommabile

Consideriamo la funzione $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

[1] Restava ancora il caso in cui $\overline{x} = b$, e quindi, vista la definizione di A, $F_\eta(b) = 0$.

Questa funzione è derivabile,[2] ma la sua derivata non è Riemann-integrabile essendo illimitata; infatti, per ogni $x \in (0,1]$ vale

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

Dunque la formula $\int_0^1 F'(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0)$ non può valere nel senso di Riemann standard. Se invece l'integrale $\int_0^1 F'(x)\,\mathrm{d}x$ viene inteso come integrale di Riemann generalizzato, il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale è verificato, infatti

$$\int_0^1 F' = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 F' = \lim_{\epsilon \to 0^+} (F(1) - F(\epsilon)) = F(1) - F(0).$$

Sappiamo inoltre che F, essendo derivabile, è integrabile nel senso di Perron (si veda il Teorema 1.16) e vale[3]

$$(\mathrm{P}) \int_0^1 F' = F(1) - F(0).$$

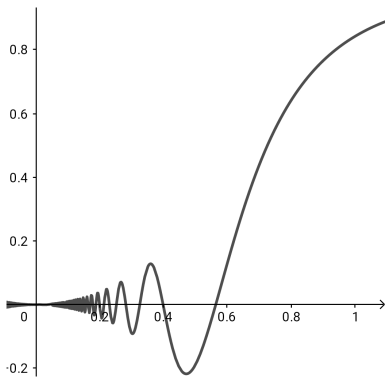


Figura 3.1: $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \in]0,1] \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Si osservi che F' non appartiene a $L^1([0,1])$. Infatti se F' appartenesse ad $L^1([0,1])$, allora anche $-\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ apparterebbe ad $L^1([0,1])$ (giacché $2x \sin \frac{1}{x^2}$ è continua fino a 0).

[2]Ovviamente F è derivabile in $(0,1]$; è derivabile anche in 0 poiché

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0.$$

[3]Non è un caso che l'integrale $\int_0^1 F'$ possa intendersi sia come integrale improprio di Riemann, sia di Perron, poiché si può dimostrare che l'integrale di Perron estende quello di Riemann in senso improprio.

Ma $-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \notin L^1([0,1])$ in quanto

$$\int_0^1 \left| -\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \right| \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{2}{x} \left|\cos\frac{1}{x^2}\right| \mathrm{d}x,$$

e applicando la sostituzione $\frac{1}{x^2} = t$ quest'ultimo limite uguaglia

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_1^{\frac{1}{\epsilon^2}} \frac{|\cos t|}{t} \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t} \mathrm{d}t = +\infty.$$

Questo mostra che, nel Teorema 3.1, l'ipotesi "$f' \in L^1$" non può essere rimossa.

Questo esempio mostra una funzione, F' su $[0,1]$, che è Perron-integrabile ma non Lebesgue-sommabile; questo mostra che nel Teorema 2.7, che sancisce l'implicazione

$$f \text{ Lebesgue-sommabile } \Rightarrow f \text{ Perron-integrabile},$$

la freccia '$\Rightarrow$' non può essere invertita.

3.3 La funzione di Vitali-Cantor

Con questo esempio vedremo che non si possono restringere ulteriormente le ipotesi del Teorema 3.1: infatti, se una funzione F è derivabile quasi dappertutto, e se $F' \in L^1([0,1])$, allora la formula

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

non è detto che sia verificata.

Definiamo la funzione di Vitali-Cantor. Partiamo costruendo l'insieme ternario di Cantor. Poniamo $C_0 = [0,1]$ e procediamo eliminando il sottointervallo aperto di lunghezza $\frac{1}{3}$ dal centro di C_0 e chiamiamo il nuovo insieme C_1; esso sarà formato dagli intervalli $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3},1\right]$. Al passo n-esimo andremo ad eliminare dal centro di ognuno dei 2^{n-1} intervalli un segmento aperto di lunghezza $\frac{1}{3^n}$; ripetiamo questa procedura ad ogni passo. C_n sarà così costruito come unione di 2^n intervalli chiusi e disgiunti di lunghezza $\frac{1}{3^n}$. Abbiamo quindi $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$, con $\mu(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Possiamo ora definire l'insieme ternario di Cantor, che indicheremo con C, come

$$C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.$$

Figura 3.2: *Insieme ternario di Cantor*

C è compatto e $\mu(C) = 0$, infatti la successione $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende a zero.

Definiamo ora la funzione di Vitali-Cantor. Sia

$$g_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{-n} \chi_{C_n} \quad \text{e} \quad f_n(x) = \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Allora $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-n} \cdot \mu(C_n) = 1$, f_n è una funzione monotona, costante su ogni intervallo costituente il complementare di C_n. Se I è uno dei 2^n segmenti che compongono C_n, si ha

$$\int_I g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I g_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}.$$

Infatti

$$\int_I g_n(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{2}{3}\right)^{-n} \cdot \mu(I \cap C_n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2^n},$$

$$\int_I g_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{2}{3}\right)^{-(n+1)} \cdot \mu(I \cap C_{n+1}) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Segue che $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ se $x \notin C_n$ e che

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \int_I |g_n - g_{n+1}| < 2^{-n+1} \quad \text{se } x \in C_n.$$

Quindi $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a una funzione f che è detta funzione di Vitali-Cantor. Possiamo osservare che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, e f è una funzione continua e crescente. Inoltre $f'(x) = 0$ per ogni $x \notin C$. Quindi, siccome $\mu(C) = 0$, abbiamo che f è derivabile quasi dappertutto. Questo però non basta per poter applicare il Teorema di Torricelli-Barrow, sia per l'integrale di Lebesgue che per quello di Perron. Infatti

$$0 = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t \neq f(1) - f(0) = 1.$$

Si noti che l'integrale in questa formula è tanto un integrale di Lebesgue quanto un integrale di Perron (Teorema 2.7).

Non possiamo quindi indebolire le ipotesi del classico Teorema di Torricelli-Barrow, né quelle del Teorema di Torricelli-Barrow per l'integrale di Perron (Teorema 1.16), né quelle della variante di Torricelli-Barrow nel Teorema 3.1, accettando funzioni derivabili quasi dappertutto.

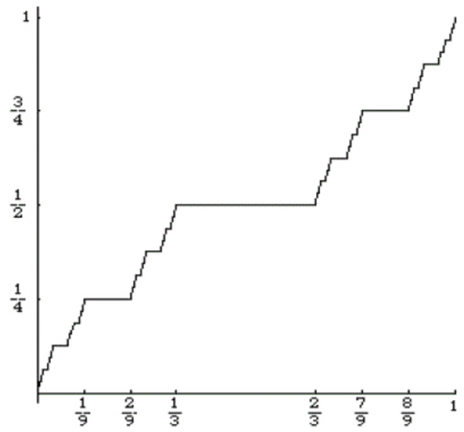


Figura 3.3: *Funzione di Vitali-Cantor.*

3.4 Funzione di Volterra

Un altro esempio di funzione la cui derivata non è Riemann-integrabile è la funzione $V(x)$ di Volterra; V' però è Perron-integrabile perché V è derivabile. In realtà V' è addirittura limitata e quindi (essendo misurabile) è anche Lebesgue sommabile.

Prima di definire la funzione di Volterra, costruiamo l'insieme di Smith-Volterra-Cantor, che indicheremo con SVC. Consideriamo l'intervallo $[0, 1]$ e (come passo zero della costruzione) rimuoviamo dal centro di esso un segmento di lunghezza $\frac{1}{4}$. Procediamo col passo uno, andando a rimuovere un segmento di lunghezza $\frac{1}{16}$ dal centro di ognuno dei due segmenti rimasti, e così via.

Al passo n-esimo si rimuovono così 2^n segmenti di lunghezza $\dfrac{1}{4^{n+1}}$. La misura dell'insieme rimanente sarà quindi

$$1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \cdots + \frac{2^n}{4^{n+1}} + \cdots\right) = 1 - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^n = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

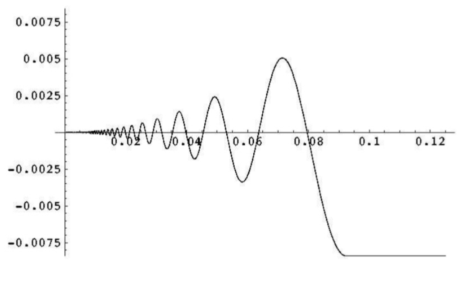
Figura 3.4: *Insieme di Smith-Volterra-Cantor*

Questo insieme non contiene intervalli: infatti, prendendo un sottointervallo di $[0, 1]$ piccolo quanto vogliamo, ci sarà almeno un punto in questo sottointervallo che non appartiene all'insieme SVC. Un'altra proprietà di questo insieme è che presi sottointervalli disgiunti di $[0, 1]$, se la misura della loro unione è maggiore di $\frac{1}{2}$, allora essa deve contenere almeno un punto dell'insieme. Inoltre data una partizione dell'intervallo $[0, 1]$, la misura dei sottointervalli che contengono punti dell'insieme SVC è sempre almeno $\frac{1}{2}$.

Consideriamo ora la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

e in particolare il valore del massimo punto critico x nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{8}\right]$ (dunque $f'(x) = 0$). Sia x_0 tale punto critico; manteniamo la funzione a destra di x_0 costante al valore $f(x_0)$ fino a $x = \frac{1}{8}$.



Simmetrizziamo la funzione finora costruita rispetto alla retta $x = \frac{1}{8}$, e abbiamo così ottenuto una funzione definita in $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. Al di fuori di questo intervallo poniamo la funzione pari a zero. Chiamiamo $f_1(x)$ questa funzione; essa è differenziabile per ogni $x \in [0, 1]$, ma $\lim_{x\to 0^+} f_1'(x)$ e $\lim_{x\to \frac{1}{4}^-} f_1'(x)$ non esistono. Inoltre f_1' è limitata. Trasliamo f_1 in modo che l'intervallo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, diventi l'intervallo $\left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]$.

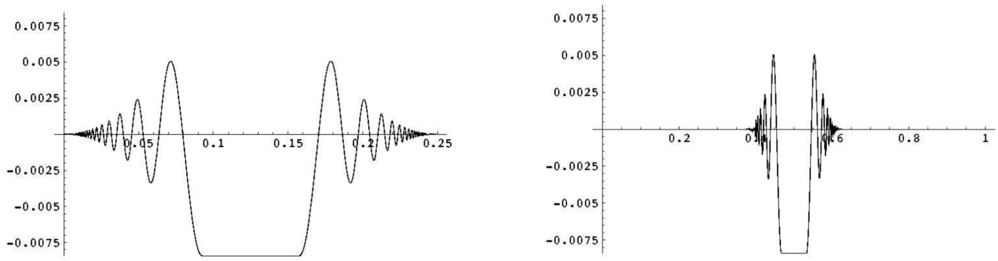


Figura 3.5: $f_1(x)$ *prima e dopo la traslazione.*

Per la costruzione di f_2 nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{16}\right]$ ripetiamo la stessa procedura utilizzata per f_1 e trasliamo la f_2 così ottenuta negli intervalli di lunghezza $\frac{1}{16}$ che abbiamo precedentemente rimosso nella costruzione dell'insieme SVC.

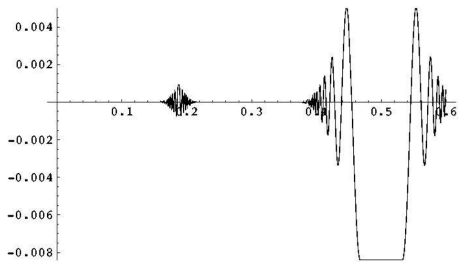


Figura 3.6: $f_2(x)$

La funzione di Volterra $V(x)$ è quindi costruita ripetendo questo procedimento per ogni intervallo rimosso dall'insieme SVC.

Come già osservato per i pezzi che definiscono $f_1, f_2, \ldots$, la funzione di Volterra V è derivabile e la sua derivata V' è limitata; ma V' è discontinua agli estremi di ogni intervallo rimosso durante la costruzione dell'insieme SVC, e in questi punti V' vale 0. Inoltre, in prossimità degli estremi di questi intervalli, possiamo trovare punti arbitrariamente vicini ad essi tali che V' calcolata in questi punti assuma i valori 1 e -1.

Non è difficile riconoscere, ad esempio usando il Teorema di Vitali-Lebesgue,[4] che V' non è Riemann-integrabile. Essa è però Lebesgue-integrabile poiché misurabile e limitata; ricordiamo inoltre che se una funzione f è derivabile con derivata limitata su

[4]Infatti V' è discontinua su un insieme di misura positiva.

$[a, b]$ (dunque f' è sommabile), allora si può applicare il Teorema 3.1, secondo cui

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Segue dunque che anche per la funzione di Volterra vale la formula di tipo Torricelli-Barrow

$$\int_1^0 V'(t)\,\mathrm{d}t = V(1) - V(0) \qquad \text{(che in questo caso fa 0)},$$

ove però l'integrale *non* è un integrale di Riemann, bensì di Lebesgue.

Capitolo 4

Appendice

4.1 Richiami sulle funzioni crescenti

Teorema 4.1. *Sia* $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *sommabile (nel senso di Lebesgue) su* $[a, b]$*. Allora* $\int_a^x f = 0$ *per ogni* $x \in [a, b]$ *se e solo se* $f = 0$ *quasi dappertutto su* $[a, b]$*.*

Dimostrazione. Una delle due implicazioni è banale.

Supponiamo che $\int_a^x f = 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$D^+ = \{x \in [a, b] : f(x) > 0\} \text{ e } D_n^+ = \left\{x \in [a, b] : f(x) > \frac{1}{n}\right\}.$$

Supponiamo che $\mu(D_n^+) > 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ (ove μ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$). Allora esiste un insieme chiuso $K \subset D_n^+$ tale che $\mu(K) > 0$. Essendo $(a, b) \setminus K$ un insieme aperto, esistono $a_k < b_k$ tali che gli insiemi (a_k, b_k) sono a due a due disgiunti e inoltre

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (a_k, b_k).$$

Quindi (grazie alle ipotesi)

$$\int_{a_k}^{b_k} f = \int_a^{b_k} f - \int_a^{a_k} f = 0 \qquad \forall\ k,$$

da cui segue

$$0 = \int_a^b f = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{a_k}^{b_k} f + \int_K f = \int_K f > \frac{\mu(K)}{n} > 0.$$

Abbiamo quindi una contraddizione. Perciò $\mu(D_n^+) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui segue che

$$\mu(D^+) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n^+\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(D_n^+\right) = 0.$$

Questo mostra che $f \leq 0$ quasi dappertutto su $[a, b]$. Si procede analogamente dimostrando che $f \geq 0$ quasi dappertutto su $[a, b]$. Possiamo quindi concludere che $f = 0$ quasi dappertutto su $[a, b]$. □

Riportiamo senza dimostrazione il seguente fondamentale risultato di Analisi Reale, che abbiamo usato molte volte in questa tesi.

Teorema 4.2. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione crescente. Allora* f *è derivabile quasi dappertutto su* $[a, b]$.

A partire dal Teorema 4.2, dimostriamo invece il seguente fatto, che altrettanto è stato usato sovente nella tesi.

Teorema 4.3. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione crescente. Allora* f' *(che esiste q.d., in forza del Teorema 4.2) è Lebesgue-sommabile su* $[a, b]$ *e*

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leq f(b) - f(a). \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Estendiamo f ponendo $f(x) = f(b)$ per $b < x \leq b + 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right].$$

Dal Teorema 4.2, la successione $(f_n)_n$ converge a f' quasi dappertutto su $[a, b]$. Per cui f' è misurabile essendo limite di funzioni misurabili. Dalla crescenza di f si ha poi ovviamente $f_n \geq 0$ per ogni n e quindi $f'(x) \geq 0$ laddove esiste.

Dimostriamo ora la disuguaglianza (4.1). Si ha

$$\begin{aligned}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]\mathrm{d}x\\ &= n\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x - n\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - n\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &\le f(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).\end{aligned}$$

Nella disuguaglianza "$\le$" abbiamo usato la crescenza di f. Per quanto visto prima, la successione $(f_n)_n$ converge a f' quasi dappertutto su $[a,b]$. Per il lemma di Fatou

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \le f(b)-f(a).$$

Questo conclude la prova. □

4.2 Richiami sulle funzioni assolutamente continue

Diamo ora le definizioni di funzione assolutamente continua e a variazione limitata.

Definizione 4.4. *Siano $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $\sigma=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}\in\Omega[a,b]$ una partizione di $[a,b]$. f è detta assolutamente continua se per ogni $\epsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che*

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|<\epsilon \text{ ogni volta che } \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})<\delta.$$

Definizione 4.5. *Siano $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $\sigma=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}\in\Omega[a,b]$ una partizione di $[a,b]$. f è detta a variazione limitata se*

$$\bigvee_a^b f := \sup\left\{\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| : \sigma\in\Omega[a,b]\right\} < +\infty.$$

Osservazione 4.6. Dal corso di Analisi 2 è ben noto che le funzioni a variazione limitata sono la differenza di due funzioni crescenti. Quindi, dal Teorema 4.2, *le funzioni a variazione limitata sono derivabili quasi dappertutto.*

Corollario 4.7. *Sia f a variazione limitata su $[a,b]$. Allora la sua funzione derivata f' (che esiste q.d., vedasi Osservazione 4.6) è sommabile su $[a,b]$.*

Dimostrazione. Scriviamo $f = f_1 - f_2$, con f_1, f_2 crescenti su $[a,b]$. Si ha, quasi dappertutto, $f' = f_1' - f_2'$; se proviamo che f_1' e f_2' sono sommabili, seguirà che è sommabile anche f'. Ma, dal Teorema 4.3, essendo f_i (con $i = 1,2$) crescente, vale

$$\int_a^b |f_i'| = \int_a^b f_i' \leq f_i(b) - f_i(a) \in \mathbb{R}.$$

Si noti che abbiamo usato la crescenza di f_i quando abbiamo scritto $|f_i'| = f_i'$. Questo conclude la prova. □

Procediamo dimostrando che le funzioni assolutamente continue sono funzioni a variazione limitata, di conseguenza sono derivabili quasi dappertutto.

Teorema 4.8. *Ogni funzione assolutamente continua è a variazione limitata.*

Dimostrazione. Sia f assolutamente continua definita su $[a,b]$. Sia $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \Omega[a,b]$ una partizione di $[a,b]$, scegliamo $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < 1,$$

ogni volta che $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) < \delta$. Sia $p \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{b-a}{p} < \delta$ e definiamo $c_i = a + \frac{i(b-a)}{p}$ con $0 \leq i \leq p$. Segue che

$$\bigvee_a^b f = \sum_{i=1}^{p} \bigvee_{c_{i-1}}^{c_1} (f) \leq \sum_{i=1}^{p} 1 = p.$$

Dunque f è a variazione limitata. □

Corollario 4.9. *Sia f assolutamente continua su $[a,b]$. Allora f è derivabile quasi dappertutto e la sua funzione derivata f' è sommabile su $[a,b]$.*

Dimostrazione. Se f è assolutamente continua su $[a,b]$, allora è ivi a variazione limitata (Teorema 4.8). Quindi f è derivabile quasi dappertutto (Osservazione 4.6). Sempre per il fatto che f è a variazione limitata, segue che f' è sommabile (Corollario 4.7). □

Lemma 4.10. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata e misurabile. Sia* $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *per ogni* $x \in [a, b]$. *Allora* F *è assolutamente continua e* $F' = f$ *quasi dappertutto su* $[a, b]$.

(Questo lemma contiene una versione parziale del Teorema 4.12, in cui sostituiremo la ipotesi di limitatezza con quella di sommabilità.)

Dimostrazione. Essendo f limitata, è facile provare che F è assolutamente continua su $[a, b]$ e derivabile quasi dappertutto[1] su $[a, b]$. Estendiamo F ponendo $F(x) = F(b)$ per $x > b$ e definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = n \left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \right].$$

La successione $(F_n)_n$ converge a F' quasi dappertutto su $[a, b]$ ed è uniformemente limitata; infatti, preso $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, vale che

$$|F_n(x)| = n \left| \int_x^{x+\frac{1}{n}} f \right| \leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} M = M,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in [a, b]$. Dal teorema di Convergenza Dominata segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x F_n = \int_a^x F',$$

per ogni $x \in [a, b]$. F è continua su $[a, b]$, quindi per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (e per la definizione di derivata)

$$F(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x F = \lim_{n\to+\infty} n \left(\int_a^{x+\frac{1}{n}} F - \int_a^x F \right),$$

per ogni $x \in [a, b]$. In particolare, preso $x = a$, osservando che $F(a) = \int_a^a f = 0$, segue

$$0 = \lim_{n\to+\infty} n \left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} F - \int_a^a F \right).$$

[1]Basta scrivere $f = f_+ - f_-$ cosicché $F(x) = \int_a^x f_+ - \int_a^x f_- =: F_1(x) - F_2(x)$ è differenza tra due funzioni monotone F_1 e F_2 (quindi derivabili quasi dappertutto per il Teorema 4.2).

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}F(x) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_a^{x+\frac{1}{n}} F - \int_a^x F\right) - \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} F - \int_a^a F\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} F - \int_a^x F\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_a^x F\left(t+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}t - \int_a^x F\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_a^x \left(F\left(t+\frac{1}{n}\right) - F(t)\right)\mathrm{d}t\right) = \lim_{n\to+\infty}\int_a^x F_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x F'.\end{aligned}$$

Segue che per ogni $x \in [a,b]$

$$\int_a^x (F'-f) = \int_a^x F' - \int_a^x f = F(x) - F(x) = 0.$$

Quindi $F' = f$ quasi dappertutto su $[a,b]$ grazie al Teorema 4.1. □

Il seguente lemma viene usualmente chiamato *l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue* (di funzioni sommabili).

Lemma 4.11. *Sia $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-sommabile su $[a,b]$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\int_E |f| < \epsilon$ per ogni E sottoinsieme misurabile di $[a,b]$ tale che $\mu(E) < \delta$.*

Dimostrazione. Se f è limitata il lemma è triviale. Nel caso generale, dato $\epsilon > 0$, per definizione di integrale di Lebesgue, esiste una funzione limitata, misurabile tale che $0 \le u \le |f|$ e $\int_a^b u > \int_a^b |f| - \epsilon$. Siccome u è limitata e Lebesgue-integrabile su $[a,b]$ esiste $\delta > 0$ tale che $\int_E u < \epsilon$ per ogni E sottoinsieme misurabile di $[a,b]$ tale che $\mu(E) < \delta$. Quindi

$$\int_E |f| = \int_E (|f| - u) + \int_E u \le \int_a^b (|f| - u) + \int_E u < 2\epsilon.$$

Questo prova il lemma. □

Teorema 4.12 (**Secondo Teorema Fondam. del Calcolo Int. per integrande L^1**). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sommabile su $[a,b]$. Consideriamo la funzione integrale (nulla in a)*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Allora F è assolutamente continua, F è derivabile quasi dappertutto e $F' = f$ quasi dappertutto su $[a,b]$.

Parte di questo teorema è contenuto nel Teorema 1.28, giacché l'integrale di Lebesgue di funzioni sommabili coincide con l'integrale di Perron; tuttavia abbiamo preferito provare questo teorema senza passare per la teoria di Perron.

Dimostrazione. Dal Lemma 4.11 segue che F è assolutamente continua su $[a,b]$. Infatti, dato $\epsilon > 0$, se $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ è come nel Lemma 4.11, allora scegliendo $[x_{i-1}, x_i]$ tali che $\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1} - x_i) < \delta$, abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \epsilon.$$

Siccome $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_i) - F(x_{i-1})$ segue che $\sum_{i=1}^{n}|F(x_i) - F(x_{i-1})| < \epsilon$. Quindi F è assolutamente continua.

Proviamo ora che $F' = f$ quasi dappertutto su $[a,b]$. Supponiamo che f sia non negativa (altrimenti possiamo scrivere $f = f_+ - f_-$ con $f_+ \geq 0$ e $f_- \geq 0$). In questo caso F è crescente e $F' \geq 0$ quasi dappertutto su $[a,b]$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$f_n = \min\{n, f(x)\}.$$

La successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e converge puntualmente a f su $[a,b]$. La funzione

$$G(x) := F(x) - \int_a^x f_n = \int_a^x (f - f_n)$$

è crescente su $[a,b]$ siccome $f - f_n \geq 0$. Segue che G è derivabile quasi dappertutto e, laddove esiste, $G'(x) \geq 0$.

Dal Lemma 4.10 (essendo f_n limitata), la derivata di G è $F'(x) - f_n(x)$ per quasi ogni $x \in [a,b]$; quindi $F'(x) - f_n(x) \geq 0$ quasi dappertutto su $[a,b]$. Siccome vale per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $F' - f \geq 0$ quasi dappertutto su $[a,b]$. Segue che (si veda anche il Teorema 4.3 applicato a F che è crescente)

$$\int_a^b (F' - f) = \int_a^b F' - \int_a^b f \leq F(b) - F(a) - \int_a^b f = 0.$$

Quindi (giacché $F' - f \geq 0$ q.d.) $F' = f$ quasi dappertutto su $[a,b]$. □

Lemma 4.13. *Sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua su $[a,b]$. Sappiamo già che F è derivabile quasi dappertutto (poiché è a variazione limitata). Se $F' = 0$ quasi dappertutto su $[a,b]$, allora F è costante su $[a,b]$.*

Tralasciamo la prova non banale di questo risultato, che richiede un cosiddetto Lemma di ricoprimento di Vitali.

Teorema 4.14. *Sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua su $[a,b]$. Allora F è derivabile quasi dappertutto e F' è Lebesgue-sommabile su $[a,b]$, e vale*

$$\int_a^x F' = F(x) - F(a) \qquad \forall\, x \in [a,b]. \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Dal Corollario 4.9, sappiamo che F è derivabile q.d., e che F' è sommabile. Possiamo quindi definire $G(x) := \int_a^x F'$; dal Teorema 4.12 (essendo F' sommabile) segue che G è una funzione assolutamente continua su $[a,b]$ e $G' = F'$ quasi dappertutto su $[a,b]$. Siccome G e F sono assolutamente continue su $[a,b]$, il Lemma 4.13 implica che $F = G + k$ con k costante, ossia

$$F(x) = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t + k, \qquad \forall\, x \in [a,b]. \tag{4.3}$$

Preso in particolare $x = a$, viene $F(a) = \int_a^a F'(t)\,\mathrm{d}t + k = k$. Possiamo quindi riscrivere (4.3) come segue

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in [a,b],$$

da cui segue immediatamente la tesi. □

Dai Teoremi 4.12 e 4.14 segue la caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue su $[a,b]$:

Corollario 4.15. *Sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. Allora F è assolutamente continua se e solo se esiste una funzione sommabile f su $[a,b]$ tale che*

$$F(x) = F(a) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{4.4}$$

In tal caso f non è altro che F' (quasi dappertutto).

Dimostrazione. $\Rightarrow$: Se F è assolutamente continua, dal Teorema 4.14, posto $f := F'$ (questo definisce f quasi dappertutto; possiamo definire f nei restanti punti ad esempio ponendola nulla), sappiamo che $f \in L^1([a,b])$ e (4.2) è allora esattamente (4.4).

$\Leftarrow$: Se F verifica (4.4) per qualche $f \in L^1([a,b])$, dal Teorema 4.12 segue che $F - F(a)$, e quindi F, è assolutamente continua; inoltre $f = F'$ quasi dappertutto. □

Possiamo ulteriormente riformulare questo corollario, in modo da rendere palese la relazione che c'è col Teorema di Torricelli-Barrow:

Corollario 4.16. *Sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti i seguenti fatti*

1. *F è assolutamente continua;*

2. *F è derivabile quasi dappertutto su $[a, b]$, la sua funzione derivata F' è sommabile su $[a, b]$ e vale la formula (di tipo Torricelli-Barrow)*

$$\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Dimostrazione. La implicazione (1) $\Rightarrow$ (2) è esattamente il Teorema 4.14. L'altra implicazione è contenuta nel Corollario 4.15. $\square$

Segue la caratterizzazione delle funzioni sommabili in termini della derivata delle funzioni assolutamente continue.

Teorema 4.17. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è Lebesgue-sommabile su $[a, b]$ se e solo se esiste una funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ assolutamente continua su $[a, b]$ (quindi ivi derivabile q.d.) tale che $F' = f$ quasi dappertutto su $[a, b]$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$: Se $f \in L^1([a, b])$, la funzione integrale $F(x) := \int_a^x f$ verifica quanto desiderato, grazie al Teorema 4.12.

$\Leftarrow$: Se F è assolutamente continua su $[a, b]$, allora F' è ivi sommabile, grazie al Teorema 4.14; quindi se $f = F'$ q.d., segue che f è sommabile. $\square$

Bibliografia

[1] I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable, Volume I, Third edition*, Frederick Ungar Publishing Co., 1964

[2] I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable, Volume II*, Frederick Ungar Publishing Co., 1960

[3] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, International Student Edition, 1970

[4] Russell A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, American Mathematical Society, 1994

[5] David M. Bressoud, *Wrestling with the Fundamental Theorem of Calculus*, 2003

[6] O. Perron, *Ueber den Integralbegriff* Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. , VA (1914) pp. 1–16

[7] H. Bauer, *Der Perronsche Integralbegriff und seine Beziehung auf Lebesguesschen* Monatsh. Math. Phys., 26 (1915) pp. 153–198

[8] S. Saks, *Theory of the integral*, Hafner (1952)

[9] R. Henstock, *Definitions of Riemann Type of the Variational Integrals* Proc. London Math. Soc. (3), 11, n. 1, 1961, pp. 402–418

[10] J. Kurzweil, *Generalized ordinary differential equations*, Czechoslovak Mathematical Journal, 8, n. 3, (1958) pp. 360–388

[11] J. Mawhin, *Two histories of integration theory: riemannesque vs romanesque* Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, 18, n.1–6, (2007), pp. 47–63

Ringraziamenti

Non sono una persona di molte parole, ma ci tengo a ringraziare coloro che hanno fatto parte di questo percorso universitario, che mi sono stati vicino contribuendo al conseguimento di questo mio obiettivo.

Parto col ringraziare il prof. Andrea Bonfiglioli per l'enorme disponibilità, la pazienza e la precisione dimostrata durante tutto il periodo di stesura di questa tesi ma anche durante il corso di questi tre anni, grazie per aver trasmesso tutta la passione che mette nel suo lavoro.

Un ringraziamento speciale a tutta la mia famiglia, in particolare a mia mamma, mio babbo e mia sorella, grazie per il loro costante sostegno, i loro insegnamenti e per esserci sempre stati soprattutto nei momenti di sconforto; è anche grazie a loro se oggi sono riuscita a raggiungere questo traguardo. Grazie per aver sempre creduto in me.

Ringrazio Marco per avermi supportata e spronata, per aver trovato le giuste parole per darmi forza e coraggio per attraversare i momenti di difficoltà. Grazie per esserci sempre per me.

Ringrazio anche tutto il *Team Dance Borgo* per avermi accompagnata durante tutto questo percorso e non solo. Ringrazio in particolare Sophi e Michi per le serate passate a ballare ma soprattutto per quelle in cui non lo abbiamo fatto, grazie per avermi ascoltata, consigliata e rassicurata quando ne avevo bisogno.

Ringrazio infine tutti i miei amici che mi sono stati vicino in questi anni e tutti i ragazzi e le ragazze incontrati durante questo percorso.