

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**FRATTALI AUTOSIMILI  
E MISURA DI HAUSDORFF**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
ANNALISA BALDI

Presentata da:  
GIULIA GHERI

Anno Accademico 2021-2022



# Introduzione

Molti fenomeni naturali presentano caratteristiche troppo irregolari perchè possano essere descritti dalla geometria classica, basti pensare al concetto di lunghezza. Siamo portati a pensare che qualsiasi cosa che vediamo sia misurabile, ma non è così. Ecco perché Benoit Mandelbrot nel 1967 pubblicò un articolo intitolato "How long is the coast of Britain?" [5]. Non esiste una formula per dare una risposta univoca a questa domanda. Si può, ad esempio, utilizzare una carta geografica in scala e approssimare la curva costiera con una sequenza di segmenti consecutivi di uguale lunghezza. In questo modo, però, si possono ottenere risultati anche molto differenti cambiando il segmento di riferimento. Ad esempio, se un segmento rappresenta sulla carta 500 km, la relativa lunghezza della costa sarà 2600 km, mentre se si considera un segmento che rappresenti 17 km, la costa intera ne misurerà 8640. In generale, gli strumenti della geometria euclidea non ci possono fornire informazioni su modelli troppo irregolari osservabili nella realtà. Mandelbrot provò allora a introdurre una prima teoria che rispondesse a questo problema di cui parla ad esempio nel suo saggio "The Fractal Geometry of Nature" [6]. Riunendo in un'unica classe alcuni insiemi irregolari, che chiamò frattali, teorizzò una geometria in cui si riuscissero a rappresentare meglio anche pattern irregolari. Il principale strumento utilizzato è il concetto di dimensione, essa infatti dà una descrizione di quanto spazio occupi un insieme e misura proprio le sue irregolarità.

Lo scopo di questa tesi è studiare a partire dalla teoria della misura il concetto di dimensione, per poi applicarlo nella definizione di frattale e trovare esempi di tali insiemi. Nello specifico, nel primo capitolo viene trattata la teoria della misura di Hausdorff, e si osservano alcune delle proprietà grazie a cui si può definire la dimensione di Hausdorff. Nel secondo capitolo si osserva che si possono dare diverse definizioni di dimensione,

come ad esempio la dimensione di auto-similarità o la dimensione box-counting. Per uno stesso insieme, può accadere che esse differiscano tra loro; se ne analizzano quindi le principali differenze. Nella teoria si utilizza più spesso la dimensione di Hausdorff perchè essa si può definire per qualsiasi insieme e rende quindi lo studio più completo. Nel terzo capitolo si introduce poi il vero e proprio concetto di insieme frattale. In particolare consideriamo una classe di insiemi frattali detti autosimili, passando dalla definizione e l'utilizzo dei sistemi di funzioni iterate. In questo capitolo sono enunciati e dimostrati due teoremi fondamentali: l'esistenza e l'unicità di un attrattore per ogni sistema di funzioni iterate e la sua natura frattale nel caso di sole similitudini. Nel quarto capitolo diamo poi un esempio di funzione che abbia grafico frattale, così da mostrare esempi pratici in cui la teoria introdotta da Mandelbrot sia utilizzata.

Nell'espone questi argomenti si sono seguite principalmente la trattazione di Lawrence Craig Evans e Ronald F. Gariepy nel loro "*Measure theory and properties of functions*" [1] per quanto riguarda la teoria della misura e nello specifico quella di Hausdorff, mentre per la geometria frattale e le diverse definizioni di dimensioni si è seguita l'impostazione di Kenneth Falconer in "*Fractal Geometry*" [2]. Altri testi che sono stati consultati sono stati indicati nella Bibliografia.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 La misura di Hausdorff</b>	<b>1</b>
1.1 Teoria della misura . . . . .	1
1.2 La misura di Hausdorff . . . . .	4
1.3 Calcolo di $\mathcal{H}^s$ e $dim_{\mathcal{H}}$ per alcuni insiemi . . . . .	11
1.3.1 Insieme di Cantor . . . . .	11
1.3.2 Insiemi finiti o numerabili . . . . .	13
<b>2 Altre definizioni di dimensione</b>	<b>15</b>
2.1 Dimensione di auto-similarità . . . . .	17
2.2 Dimensione box-counting . . . . .	18
2.3 Relazione tra le dimensioni . . . . .	24
2.3.1 Dimensione di auto-similarità e box-counting . . . . .	24
2.3.2 Box-counting e Hausdorff . . . . .	25
<b>3 Gli insiemi frattali autosimili</b>	<b>29</b>
3.1 Sistemi di funzioni iterate . . . . .	29
3.2 Frattali autosimili . . . . .	33
3.3 Alcuni esempi . . . . .	37
3.3.1 Il triangolo di Sierpinski . . . . .	38
3.3.2 La curva di von Koch . . . . .	38
3.3.3 Curva frattale ottenuta da un generatore . . . . .	39
<b>4 Dimensione di un grafico</b>	<b>41</b>



# Elenco delle figure

1.1	Due possibili $\delta$ -ricoprimenti di un insieme $F$ . . . . .	5
1.2	Costruzione dell'insieme di Cantor . . . . .	12
2.1	Struttura casuale . . . . .	18
2.2	Esempio di raffinamento della griglia . . . . .	19
2.3	I cinque modi di definire la dimensione box-counting . . . . .	21
2.4	Curva che si auto-interseca . . . . .	25
3.1	Costruzione del triangolo di Sierpinski . . . . .	38
3.2	Costruzione della curva di von Koch . . . . .	39
3.3	Costruzione di una curva a partire da un generatore . . . . .	40
4.1	Grafico della Funzione di Weierstrass . . . . .	43



# Capitolo 1

## La misura di Hausdorff

Nello studio della matematica dei frattali si incontra subito il concetto di misura, in particolare viene utilizzata la teoria della misura sviluppata da Felix Hausdorff (1919). Nello sviluppo di essa, Hausdorff utilizzò l'idea di Caratheodory di definire la misura di un insieme a partire da un suo ricoprimento.

In questo capitolo si accennano allora le principali nozioni della teoria della misura e si introducono la definizione e le proprietà principali della misura di Hausdorff.

### 1.1 Teoria della misura

Si dà di seguito la definizione di misura esterna per poi restringerne il dominio e passare alla definizione di misura, più ricca di proprietà.

**Definizione 1.1.1.** *Sia  $X$  un insieme non vuoto. Un'applicazione  $\mu : P(X) \rightarrow [0, +\infty]$  si dice misura esterna se*

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$  per ogni  $A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ .

**Proprietà 1.1.2.** *Le misure esterne sono monotone, cioè se  $\mu$  è una misura esterna su  $X$  e  $A \subseteq B \subseteq X$  allora*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

Una misura esterna è quindi definita per ogni sottoinsieme dell'insieme  $X$  e gode della proprietà di sub-additività.

Perchè valga invece l'additività dobbiamo restringere il dominio dell'applicazione ai soli sottoinsiemi di  $X$  che godono di una proprietà di misurabilità:

**Definizione 1.1.3.** *Sia  $\mu$  una misura esterna su  $X$ ,  $A \subset X$  si dice  $\mu$ -misurabile (secondo Caratheodory) se per ogni  $B \subset X$   $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A)$ .*

Con questa definizione diciamo che se  $\mu$  è una misura esterna su  $X$ ,  $\mu$  ristretta ai sottoinsiemi misurabili di  $X$  è una *misura*.

Si enunciano di seguito alcune delle principali proprietà delle misure.

**Proprietà 1.1.4.** *Sia  $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$  una successione di insiemi  $\mu$ -misurabili. Allora:*

1.  $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$  e  $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$  sono  $\mu$ -misurabili;
2. se gli insiemi  $A_k$  sono a due a due disgiunti allora

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k);$$

3. se  $A_1 \subset \dots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \dots$  allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) = \mu \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right);$$

4. se  $A_1 \supset \dots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \dots$  e  $\mu(A_1) < +\infty$  allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) = \mu \left( \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \right).$$

La seconda proprietà ci dà in particolare una nozione intuitiva sulla misura: associamo a un insieme un valore numerico  $x$  in modo che spezzando l'insieme in un numero finito o numerabile di pezzi,  $x$  coincida con la somma dei valori associati ai singoli pezzi.

Si consideri ora  $A$  un sottoinsieme di  $P(X)$ , ricordando che  $A$  si dice  $\sigma$ -algebra se:

1.  $\emptyset, X \in A$ ;

2. se  $B \in A$  allora  $B^C \in A$ ;
3. se  $B_k \in A$  per  $k = 1, \dots$  allora  $\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \in A$ ,

si definisce allora un'importante  $\sigma$ -algebra:

**Definizione 1.1.5.** *La  $\sigma$ -algebra di Borel di  $\mathbb{R}^n$  è la più piccola  $\sigma$ -algebra di  $\mathbb{R}^n$  che contiene gli aperti di  $\mathbb{R}^n$  (aperti secondo la topologia euclidea). Chiamiamo insiemi boreliani gli elementi di tale  $\sigma$ -algebra.*

Diremo che una misura esterna  $\mu$  è "di Borel" se tutti gli insiemi boreliani sono misurabili alla Caratheodory rispetto a  $\mu$ . Per verificare che una misura esterna sia di Borel si può utilizzare il criterio di Caratheodory, presentato di seguito.

**Teorema 1.1.6** (*Criterio di Caratheodory*). *Sia  $\mu$  una misura esterna su  $\mathbb{R}^n$ . Se per ogni  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  tali che  $\text{dist}(A, B) = \inf \{ \text{dist}(x, y) : x \in A, y \in B \} > 0$  vale  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ , allora  $\mu$  è una misura di Borel.*

*Dimostrazione.* Preso  $C \subset \mathbb{R}^n$  un insieme chiuso si vuole provare che sia  $\mu$ -misurabile. Sicuramente per subadditività  $\forall A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu(A) \leq \mu(A \cap C) + \mu(A - C)$ . Per trovare la disuguaglianza opposta si suppone  $\mu(A) < +\infty$  altrimenti si ha un caso banale. Si definiscono  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$C_n \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}$$

$$R_k \equiv \left\{ x \in A : \frac{1}{k+1} < \text{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\} \subset A.$$

Dato che  $\text{dist}(A - C_n, A \cap C) \geq \frac{1}{n} > 0$  dall'ipotesi segue

$$\mu(A - C_n) + \mu(A \cap C) = \mu((A - C_n) \cup (A \cap C)) \leq \mu(A). \quad (1.1)$$

Inoltre si può considerare  $A - C = (A - C_n) \cup \bigcup_{k=n}^{+\infty} R_k$  così da avere

$$\mu(A - C_n) \leq \mu(A - C) \leq \mu(A - C_n) + \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(R_k). \quad (1.2)$$

Siano ora  $i, j : j \geq i + 2$ , allora  $\text{dist}(R_i, R_j) > 0$  e quindi per ipotesi

$$\sum_{k=1}^m \mu(R_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^m R_{2k}\right) \leq \mu(A),$$

$$\sum_{k=0}^m \mu(R_{2k+1}) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^m R_{2k+1}\right) \leq \mu(A).$$

Combinando questi due risultati e mandando  $m \rightarrow +\infty$  si ottiene

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(R_k) \leq 2\mu(A) < +\infty.$$

Avendo mostrato questo possiamo dire per le proprietà delle serie convergenti che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(R_k) = 0.$$

Tornando allora alla (1.2) e mandando  $n \rightarrow +\infty$  si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A - C_n) \leq \mu(A - C) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A - C_n) + 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A - C_n) = \mu(A - C).$$

Dalla (1.1) si può allora mandare  $n \rightarrow +\infty$  e si ottiene

$$\mu(A - C) + \mu(A \cap C) \leq \mu(A)$$

che conclude la dimostrazione. □

## 1.2 La misura di Hausdorff

Si può pensare alla dimensione di un insieme come a un valore che indichi quanto spazio esso occupa attorno ad ognuno dei suoi punti. Si vuole introdurre la misura di Hausdorff per arrivare a definire la dimensione di Hausdorff. Essa è una nozione centrale nella teoria dei frattali, la più significativa dal punto di vista teorico ed è basata sulla teoria della misura, già studiata a partire dal XIX secolo.

Sia allora  $s \in [0, +\infty)$ , definiamo la misura esterna di Hausdorff su  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $s$ , per poi utilizzare la costruzione degli insiemi misurabili alla Caratheodory e costruire una misura.

Si ricorda che il *diametro* di un sottoinsieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  è  $\text{diam } E = \sup\{|x - y| : x, y \in E\}$ .

**Definizione 1.2.1.** Sia  $E \neq \emptyset$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  e sia  $\delta > 0$ . Un  $\delta$ -ricoprimento di  $E$  è una famiglia numerabile  $\{E_i\}_{i \in I}$  di sottoinsiemi non vuoti di  $\mathbb{R}^n$  tali che  $E \subseteq \bigcup_{i \in I} E_i$  e  $0 < \text{diam } E_i \leq \delta \forall i \in I$ .

Si utilizzano le notazioni  $\Gamma(s) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$  per la funzione Gamma e  $\alpha(s) \equiv \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ .

**Definizione 1.2.2.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s < +\infty$ ,  $0 < \delta \leq +\infty$ . Definiamo

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s \mid \{C_j\}_j \text{ } \delta\text{-ricoprimento di } A \right\}.$$

Con questa definizione vogliamo quindi considerare tutti i  $\delta$ -ricoprimenti dell'insieme  $A$  e minimizzare la somma dei diametri elevati alla  $s$ .

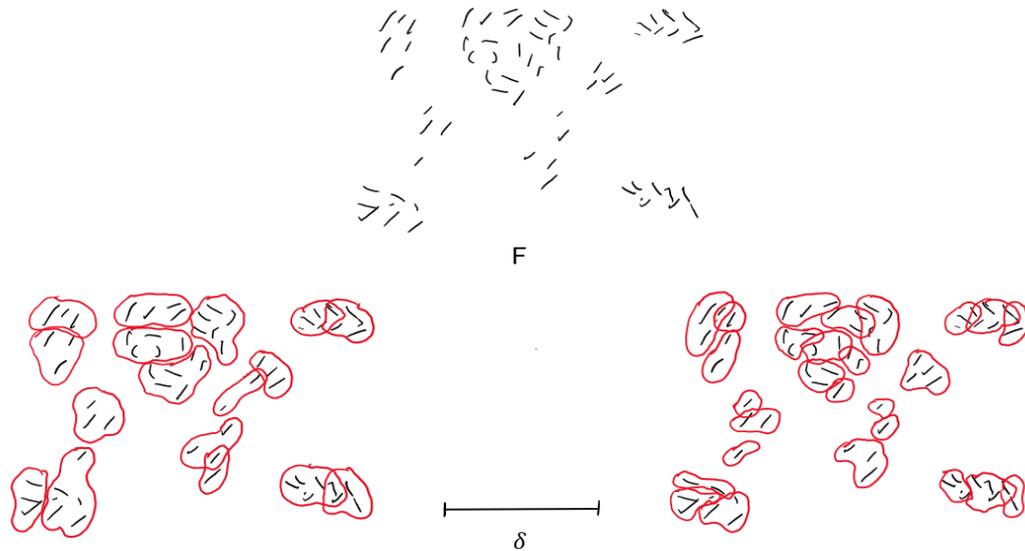


Figura 1.1: Due possibili  $\delta$ -ricoprimenti di un insieme  $F$

Se  $\delta$  diminuisce si rimpicciolisce anche la classe di insiemi che possono ricoprire  $A$  secondo la definizione 1.2.2. Si avrà, dunque, che  $\mathcal{H}_\delta^s(A)$  diminuisce (essendo un estremo inferiore) e si avvicina pertanto sempre più al suo valore limite se  $\delta \rightarrow 0$ . Con queste considerazioni si dà la seguente definizione:

**Definizione 1.2.3.** Per  $A$  e  $s$  come sopra si definisce misura esterna di Hausdorff  $s$ -dimensionale di  $A$  su  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^s(A) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Si può mostrare che con la precedente definizione  $\mathcal{H}^s$  è una misura.

**Teorema 1.2.4.**  $\mathcal{H}^s$  è una misura esterna.

*Dimostrazione.* Per provare la tesi si mostra prima che  $\mathcal{H}_\delta^s$  è una misura esterna.

$\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$  perchè come ricoprimento posso scegliere un qualsiasi insieme  $A_\delta$  tale che  $\text{diam } A_\delta = \delta \forall \delta > 0$ , da cui  $\inf_{\delta > 0} \left\{ \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } A_\delta}{2} \right)^s \right\} = 0$ .

Sia  $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$  una famiglia numerabile di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  e sia per ogni  $k$   $\{C_j^k\}_j$  un  $\delta$ -ricoprimento di  $A_k$ . Dalla definizione di  $\delta$ -ricoprimento segue che  $\{C_j^k\}_{j,k=1}^{+\infty}$  ricopre  $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ . Allora

$$\mathcal{H}_\delta^s \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j^k}{2} \right)^s.$$

Passando poi all'inf sui ricoprimenti rispetto a  $j$ , si ottiene la subaddittività per  $\mathcal{H}_\delta^s$ :  $\mathcal{H}_\delta^s \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_k)$ .

Ora si può mostrare che  $\mathcal{H}^s$  è una misura esterna. Infatti

$$\mathcal{H}_\delta^s \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{H}^s(A_k).$$

Facendo poi il limite per  $\delta \rightarrow 0$  per confronto di limiti ottengo la subaddittività per  $\mathcal{H}^s$ . Infine  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$  banalmente.  $\square$

**Teorema 1.2.5.**  $\mathcal{H}^s$  è una misura di Borel.

*Dimostrazione.* Si vuole utilizzare il criterio di Caratheodory 1.1.6, quindi si prendono due insiemi  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  tali che  $\text{dist}(A, B) > 0$ . Essendo  $\mathcal{H}^s$  una misura esterna sicuramente  $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ . Per provare la disuguaglianza inversa si sceglie  $\{C_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  un  $\delta$ -ricoprimento di  $A \cup B$  con  $0 < \delta < \frac{1}{4} \text{dist}(A, B)$  tale che, se si chiamano  $\mathcal{A} = \{j \in \mathbb{N} : C_j \cap A \neq \emptyset\}$  e  $\mathcal{B} = \{j \in \mathbb{N} : C_j \cap B \neq \emptyset\}$ ,  $\{C_j\}_{j \in \mathbb{N}} = \{C_j\}_{j \in \mathcal{A}} \cup \{C_j\}_{j \in \mathcal{B}}$ . Per la scelta di tale  $\delta$  vale  $C_j \cap C_k = \emptyset \forall j \in \mathcal{A}, k \in \mathcal{B}$ . Allora

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s = \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s + \sum_{j \in \mathcal{B}} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B).$$

Passando all'inf sui  $\{C_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  a sinistra si ottiene  $\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B)$ . Si manda ora  $\delta \rightarrow 0$  e si ottiene

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

Si è allora provato che vale il criterio di Caratheodory (1.1.6) da cui  $\mathcal{H}^s$  è una misura di Borel.  $\square$

Si vedono di seguito alcune proprietà elementari della misura di Hausdorff appena definita.

**Teorema 1.2.6.** *Valgono:*

1.  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$  per ogni  $s > n$ .
2. Se  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una similitudine di rapporto  $\lambda > 0$ , allora  $\mathcal{H}^s(S(A)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$  per ogni  $A \subset \mathbb{R}^n$ .
3.  $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$  per ogni  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  isometria affine e  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.* 1. Fissato un intero  $m \geq 1$  si prende  $Q$  il cubo unitario in  $\mathbb{R}^n$

( $Q = [0, 1]^n$ ).  $Q$  può essere decomposto in  $m^n$  cubi di lato  $\frac{1}{m}$  e diametro  $\frac{\sqrt{n}}{m}$ . Allora  $\mathcal{H}_{\frac{\sqrt{n}}{m}}^s(Q) \leq \sum_{i=1}^{m^n} \alpha(s) \left(\frac{\sqrt{n}}{m}\right)^s = \alpha(s) n^{\frac{s}{2}} m^{n-s}$ . Facendo tendere  $m \rightarrow +\infty$ , cioè  $\delta = \frac{\sqrt{n}}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ , si ottiene  $\mathcal{H}^s(Q) = 0$ , perchè  $n - s < 0$  per ipotesi. Ora si ricopre  $\mathbb{R}^n$  con cubi unitari e si usa la subaddittività della misura di Hausdorff per concludere che  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$ .

2.  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  similitudine di rapporto  $\lambda$  conserva i rapporti tra le distanze. Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  e si prende  $\{C_j\}_j$  un  $\delta$ -ricoprimento di  $A$ , allora  $\{S(C_j)\}_j$  è un  $\lambda\delta$ -ricoprimento di  $S(A)$ . Vale  $\text{diam } S(C_j) = \lambda \text{diam } C_j$  da cui

$$\sum_j \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } S(C_j)}{2}\right)^s = \lambda^s \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s.$$

Ora passando all'inf a sinistra sui  $\lambda\delta$ -ricoprimenti si ottiene

$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(S(A)) \leq \lambda^s \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s$  e poi passando all'inf a destra sui  $\delta$ -ricoprimenti  $\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(S(A)) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(A)$ . Facendo tendere  $\delta \rightarrow 0$  si ha

$$\mathcal{H}^s(S(A)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(A).$$

Per ottenere la disuguaglianza opposta basta osservare che  $S$ , essendo una similitudine, è invertibile e l'inversa è una similitudine di rapporto  $\frac{1}{\lambda}$ . Si rifà quindi lo stesso ragionamento usando  $S^{-1}$  al posto di  $S$  e  $\frac{1}{\lambda}$  al posto di  $\lambda$ .

3. Le isometrie affini sono similitudini di rapporto 1. Dal punto 2. si ottiene

$$\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A).$$

□

**Lemma 1.2.7.** *Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  è un sottoinsieme limitato, allora  $\mathcal{H}^n(A) < +\infty$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $Q = [0, 1]^n$  un cubo di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\delta > 0$  e  $k \in \mathbb{Z}, k \geq \frac{\sqrt{n}}{\delta}$ . Definiamo  $Q_z = \frac{(z+Q)}{k} \forall z \in \mathbb{N}^n$ , ognuno di questi insiemi ha diametro  $\frac{\sqrt{n}}{k} \leq \delta$ . La famiglia di questi  $Q_z$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $Q$  di  $k^n$  insiemi. Si ha allora:

$$\mathcal{H}_\delta^n(Q) \leq k^n \left( \frac{\sqrt{n}}{k} \right)^n = n^{\frac{n}{2}} \Rightarrow \mathcal{H}^n(Q) \leq n^{\frac{n}{2}}.$$

Sia ora  $A \subset \mathbb{R}^n$  limitato, allora esiste una similitudine  $S$  di rapporto  $\lambda$  per cui valga  $A \subset S(Q)$ . Allora per la monotonia di  $\mathcal{H}^n$  e per il Teorema 1.2.6 si ha:

$$\mathcal{H}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(S(Q)) = \lambda^n \mathcal{H}^n(Q) \leq \lambda^n n^{\frac{n}{2}} < +\infty.$$

□

Si introduce ora una notazione per indicare la misura di Lebesgue  $n$ -dimensionale: sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-misurabile, allora si indica la sua misura di Lebesgue  $n$ -dimensionale con  $\mathcal{L}^n(A)$ . Si può allora dimostrare il seguente teorema tenendo conto della *disuguaglianza isodiametrica*:  $\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left( \frac{\text{diam} A}{2} \right)^n$ , una cui prova si può trovare nel testo 'Measure theory and properties of functions' di Evans e Gariepy [1], Teorema 1 sezione 2.2.

**Teorema 1.2.8.** *Per ogni insieme di Borel  $B$  su  $\mathbb{R}^n$  e per ogni  $\delta > 0$  si ha*

$$\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{H}^n(B) = \mathcal{H}_\delta^n(B).$$

Si enuncia ora un importante lemma volto a definire la dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma 1.2.9.** *Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  e siano  $0 \leq s < t < +\infty$ . Allora valgono i seguenti risultati:*

1. Se  $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$  allora  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ .
2. Se  $\mathcal{H}^t(A) > 0$  allora  $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ .

*Dimostrazione.* 1. Sia  $\delta > 0$ . Per definizione di  $\mathcal{H}_\delta^s$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  e  $\forall \{C_j\}_j$   $\delta$ -ricoprimento di  $A$ :  $\sum_j \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \varepsilon \leq \mathcal{H}^s(A) + \varepsilon < +\infty$  per ipotesi. Si vuole calcolare  $\mathcal{H}_\delta^t(A)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^t(A) &\leq \sum_j \alpha(t) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^t = \\ &= \sum_j \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^t \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \left(\frac{2}{\text{diam } C_j}\right)^s = \\ &= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s (\text{diam } C_j)^{t-s} \leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Per  $\delta \rightarrow 0$  e per confronto di limiti si ottiene  $\mathcal{H}^t(A) \leq 0$  da cui  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ .

2. Questo punto segue immediatamente come contronominale del punto precedente: se  $\mathcal{H}^t(A) \neq 0$  (e quindi  $> 0$  perchè si tratta di una misura), allora non è vero che  $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$  e cioè  $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ .

□

Grazie al lemma appena dimostrato si può introdurre la definizione di dimensione di Hausdorff:

**Definizione 1.2.10.** *La dimensione di Hausdorff di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è definita come:*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \equiv \inf \{s \in [0, +\infty) : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Grazie al Teorema 1.2.6 è noto che  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0 \forall s > n$  da cui si ricava immediatamente che in  $\mathbb{R}^n$   $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n$  (per la monotonia di  $\mathcal{H}^s$ ).

**Esempio 1.2.11** (Insiemi Lebesgue-misurabili). Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  tale che  $\mathcal{L}^n(A) > 0$ . Allora vale

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = n. \quad (1.3)$$

Infatti, per l'osservazione precedente si ha  $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n$ . Per la disuguaglianza opposta si ragiona come segue: dall'ipotesi, per il teorema 1.2.8, anche  $\mathcal{H}^n(A) > 0$  e dunque, se si ha  $s \in \mathbb{R}$  con  $s \geq 0$  tale che  $\mathcal{H}^s(A) = 0$ , sicuramente  $s > n$ . Allora  $\dim_{\mathcal{H}}(A) \geq n$ .

Dalle due disequazioni otteniamo la (1.3).

Notiamo che  $\dim_{\mathcal{H}}(A)$  può non essere un intero, proprietà caratteristica di molti insiemi frattali.

Vediamo infine un'importante proprietà della dimensione di Hausdorff, molto utile nella geometria frattale.

**Proposizione 1.2.12.** *Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$ , allora valgono le seguenti:*

1. se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione  $\alpha$ -Holderiana (con  $0 < \alpha \leq 1$ ), cioè esiste  $c > 0$  tale che

$$\text{per ogni } x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha,$$

allora  $\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}}(A)$ ;

2. se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un'applicazione Lipschitziana, cioè holderiana con esponente  $\alpha = 1$ , allora  $\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(A)$ ;
3. se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un'applicazione bi-Lipschitz, cioè esistono due costanti  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , con  $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$ , tali che

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|, \quad \text{per ogni } x, y \in A,$$

allora  $\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) = \dim_{\mathcal{H}}(A)$ .

*Dimostrazione.* 1. Sia  $s > \dim_{\mathcal{H}}(A)$ . Si mostra che  $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(A)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(A) = 0$ , da cui  $\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \frac{s}{\alpha}$  per ogni  $s > \dim_{\mathcal{H}}(A)$ . Per mostrare il risultato necessario si prende un  $\delta$ -ricoprimento di  $A$   $\{U_i\}$ . Dalla condizione di Holder  $\{f(A \cap U_i)\}$  sarà un  $c\delta^\alpha$ -ricoprimento di  $f(A)$ . Si conclude utilizzando la definizione di misura di Hausdorff.

2. Si usa il risultato precedente con  $\alpha = 1$ .
3. Utilizzando il risultato precedente per  $f^{-1}$  si ottiene  $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \dim_{\mathcal{H}}(f(A))$ , da cui l'uguaglianza.

□

Si ha dunque una proprietà fondamentale della dimensione di Hausdorff: essa è invariante per applicazioni bi-Lipschitz. Dunque, se due insiemi hanno diversa dimensione di Hausdorff non può esistere una mappa bi-Lipschitz tra essi. In topologia due insiemi sono visti come lo "stesso" insieme se c'è un omeomorfismo tra essi. Un approccio nella teoria dei frattali è identificare due insiemi se tra essi esiste una trasformazione bi-Lipschitz. Se si cercano dunque dei parametri "invarianti" per distinguere due insiemi, ecco che oltre agli invarianti per omeomorfismi (le applicazioni bi-Lipschitz sono omeomorfismi) possiamo aggiungere la dimensione di Hausdorff. Essa rappresenta allora uno degli strumenti che ci permette di distinguere due diversi frattali.

## 1.3 Calcolo di $\mathcal{H}^s$ e $\dim_{\mathcal{H}}$ per alcuni insiemi

### 1.3.1 Insieme di Cantor

**Definizione 1.3.1.** *Si definisce l'insieme di Cantor ricorsivamente:*

$$C_0 = [0, 1],$$

sia  $C_1$  l'unione dei due intervalli ottenuti dividendo  $C_0$  in 3 parti uguali e rimuovendo quella centrale, cioè

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Su questi due intervalli si ripete lo stesso procedimento ottenendo

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

In generale definiamo  $C_k$  come l'insieme ottenuto rimuovendo il terzo centrale da ogni intervallo di  $C_{k-1}$ . Quindi  $C_k$  sarà formato da  $2^k$  intervalli ognuno di lunghezza  $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ .

Definiamo l'insieme di Cantor come segue:

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in C_k, \forall k\} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k.$$

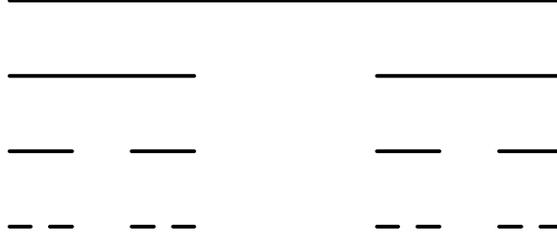


Figura 1.2: Costruzione dell'insieme di Cantor

Si mostra di seguito che  $C$  ha dimensione di Hausdorff non intera.

Si consideri  $C_k$  come nella definizione precedente, si indica di seguito  $\mathcal{I}_k = (I_{k,j})_{j=1, \dots, 2^k}$  la famiglia degli intervalli che costituiscono  $C_k$ . Banalmente  $\mathcal{I}_k$  è un  $\delta_k$ -ricoprimento di  $C$  con  $\delta_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ . Per definizione di  $\mathcal{H}_\delta^s$  si ha:

$$\mathcal{H}_{\delta_k}^s(C) \leq \sum_{j=1}^{2^k} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } I_{k,j}}{2} \right)^s = 2^k \alpha(s) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^k \right)^s = \alpha(s) 2^{-s} 2^k 3^{-ks}.$$

Sia d'ora in poi  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ , allora si ottiene  $\mathcal{H}_{\delta_k}^s(C) \leq \frac{\alpha(s)}{2^s} < +\infty$ . Facendo tendere  $k \rightarrow +\infty$  si ha  $\mathcal{H}^s(C) < +\infty$  e quindi dal Lemma 1.2.9  $\forall t > s \mathcal{H}^t(C) = 0$ .

Si vuole ora provare che  $\mathcal{H}^s(C) > 0$  così da concludere la verifica. Sia  $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  un ricoprimento di  $C$ , senza perdere di generalità si prenda tale famiglia costituita da intervalli chiusi contenuti in  $[0, 1]$ . Per ogni  $J_i$  sia  $k \in \mathbb{Z}$  tale che  $\left(\frac{1}{3}\right)^{(k+1)} \leq \text{diam } J_i < \left(\frac{1}{3}\right)^k$ , così che  $J_i$  intersechi al massimo uno degli intervalli di  $C_k$ . Se  $j \geq k$  allora  $J_i$  interseca al massimo  $2^{j-k} = 2^j \left(\frac{1}{3}\right)^{sk}$  intervalli di  $C_j$  e per la scelta di  $k$  si ha  $2^{j-k} \leq 2^j 3^s (\text{diam } J_i)^s$ . Scegliendo  $j$  abbastanza grande in modo che risulti  $\text{diam } J_i \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{(j+1)} \forall i \in \mathbb{Z}$ , allora, dato che il ricoprimento interseca tutti i  $2^j$  intervalli di  $C_j$ , si ottiene  $2^j \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^j 3^s (\text{diam } J_i)^s$ . Da ciò segue  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } J_i}{2} \right)^s \geq \frac{\alpha(s)}{2^s} \frac{1}{3^s}$ . Quindi  $\mathcal{H}^s(C) > 0$ , il che chiude il ragionamento:

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

### 1.3.2 Insiemi finiti o numerabili

Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  finito o numerabile. Allora si ha:

$$\mathcal{H}^0(A) = |A|, \quad (1.4)$$

$$dim_{\mathcal{H}}(A) = 0. \quad (1.5)$$

Per ottenere la (1.4) si consideri  $A \subset \mathbb{R}^n$  con  $|A| = k$  e  $\delta_0 = \text{diam } A$ . Allora ogni  $\delta$ -ricoprimento di  $A$  con  $\delta < \delta_0$  ha almeno  $k$  insiemi e inoltre esiste sicuramente un  $\delta$ -ricoprimento costituito da esattamente  $k$  insiemi. Da ciò  $\mathcal{H}_{\delta}^0(A) = k$  se  $\delta < \delta_0$  (ricordandosi che nella definizione di  $\mathcal{H}_{\delta}^0$  si ha  $\alpha(0) = 1$ ) e quindi  $\mathcal{H}^0(A) = k$ .

Per la (1.5) basta prendere  $t > 0$  e osservare che per la (1.4)  $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1 \forall a \in \mathbb{R}^n$  e quindi sicuramente  $\mathcal{H}^t(\{a\}) = 0$  per il lemma 1.2.9. Scrivendo allora  $A = \bigcup_{i=1}^k \{a_i\}$ , per sub-additività delle misure  $\mathcal{H}^t(A) \leq \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^t(\{a_i\}) = 0$  e quindi si può concludere che  $dim_{\mathcal{H}}(A) = 0$ .

Il caso  $A$  numerabile è abbastanza analogo. Sia sempre  $\delta_0 = \text{diam } A$ , sicuramente se  $\delta < \delta_0$  non esiste un  $\delta$ -ricoprimento di  $A$  costituito da un numero finito di insiemi. Si ha allora che  $\mathcal{H}_{\delta}^0(A) = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha(0) \right\} = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} 1 \right\} = +\infty$  da cui anche  $\mathcal{H}^0(A) = +\infty$ . Per  $dim_{\mathcal{H}}(A)$  si usa lo stesso ragionamento del caso finito passando ad unioni numerabili.



## Capitolo 2

### Altre definizioni di dimensione

Nel capitolo precedente si è definita la dimensione di Hausdorff e nel seguito useremo questa definizione per trattare la teoria dei frattali autosimili. Il concetto di dimensione è al centro della definizione di insieme frattale. Nella letteratura non si trova una definizione univoca di insieme frattale. Molti matematici hanno provato a proporne una, ma esse si sono sempre rivelate incomplete. Mandelbrot, nel suo saggio originale, definisce un insieme frattale come segue:

'Un insieme si dice frattale se la sua dimensione di Hausdorff è strettamente maggiore della sua dimensione topologica', dove la dimensione topologica di un insieme si può definire come segue: è un numero naturale, vale 0 se l'insieme è totalmente sconnesso, 1 se ogni punto ha un intorno piccolo a piacere con frontiera di dimensione 0, è 2 se ogni punto ha un intorno (nell'insieme) arbitrariamente piccolo con frontiera di dimensione 1 e così via.

Questa definizione è però incompleta, esclude infatti alcuni insiemi che, invece, sono considerati insiemi frattali. Non esiste, oggi, un'unica definizione di frattale. L'atteggiamento comune è, come spiega bene Kenneth Falconer in [2], descrivere le principali caratteristiche di un insieme che si vuole chiamare frattale. Sia quindi  $F$  un frattale, allora esso ha *alcune* delle seguenti proprietà:

1.  $F$  ha una struttura fine, cioè a ogni ingrandimento rivela più dettagli;
2.  $F$  è irregolare, non può quindi essere descritto come luogo dei punti che soddisfano una qualche semplice proprietà geometrica o analitica;

3.  $F$  ha una qualche forma di auto-similarità;
4. si riesce a definire  $F$  in maniera semplice, ad esempio ricorsivamente;
5. aggiungiamo una quinta proprietà che fa intervenire il concetto di dimensione, ossia che la dimensione frattale di  $F$  è maggiore della sua dimensione topologica.

Nella proprietà 5. si parla in generale di dimensione frattale e non di dimensione di Hausdorff perché esistono diverse definizioni di dimensione. Quella di Hausdorff è molto significativa dal punto di vista teorico perché se  $F$  è un frattale e si è determinata  $s = \dim_{\mathcal{H}}(F)$ , allora  $\mathcal{H}^s(F)$  assegna il "contenuto" appropriato ad  $F$ . La teoria della misura di Hausdorff si è però sviluppata in maniera indipendente e molto tempo prima rispetto alla teoria dei frattali. La forte interazione di quest'ultima con le scienze sperimentali, ad esempio la biologia, la meteorologia e la fluidodinamica, ha dunque portato a considerare diverse definizioni di dimensione che meglio adattassero la teoria dei frattali allo specifico campo applicativo considerato. In questo capitolo si danno quindi esempi di alcune diverse definizioni di dimensione. Generalmente per riferirsi a una qualsiasi di queste dimensioni viene utilizzato il termine *dimensione frattale*. L'idea fondamentale che sta alla base di molte di queste definizioni è la stessa: per ogni  $\delta$  si misura un insieme in modo da ignorarne le irregolarità di taglia minore di  $\delta$  e si considerano queste misurazioni guardando il loro comportamento al limite per  $\delta \rightarrow 0$ . Nonostante alla base ci sia quindi una stessa idea, definizioni di dimensione in apparenza simili possono dare origine a proprietà molto diverse. Non possiamo aspettarci che per uno stesso insieme definizioni diverse diano lo stesso valore di dimensione. Bisogna, perciò, derivare le specifiche proprietà di ogni dimensione dalla sua specifica definizione.

In generale ci si aspetta che una "dimensione" debba godere di alcune delle proprietà di cui gode la dimensione di Hausdorff, ad esempio:

1. monotonia: se  $E \subset F$  allora  $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \dim_{\mathcal{H}}(F)$ ;
2. stabilità:  $\dim_{\mathcal{H}}(E \cup F) = \max \{ \dim_{\mathcal{H}}(E), \dim_{\mathcal{H}}(F) \}$ ;
3. invarianza per isometrie e similitudini;
4.  $\dim_{\mathcal{H}}(F) = 0$  se  $F$  è finito o numerabile;

5. invarianza per trasformazioni bi-Lipschitz;
6. se  $F$  è un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  allora  $\dim_{\mathcal{H}}(F) = n$ ;
7. se  $F$  è una varietà liscia  $m$ -dimensionale allora  $\dim_{\mathcal{H}}(F) = m$ .

Le ultime due proprietà assicurano che la dimensione che si sta considerando estenda il concetto classico di dimensione. Le definizioni che si considerano in seguito sono monotone e hanno la proprietà di invarianza per mappe bi-Lipschitz. Qui accenneremo alla dimensione di *auto-similarità* e guarderemo più in dettaglio la dimensione *box-counting*.

## 2.1 Dimensione di auto-similarità

Daremo la definizione precisa di insieme autosimile nel prossimo capitolo. Intuitivamente un insieme è *autosimile* se è unione di copie di se stesso a scale differenti, quindi dividendolo in parti arbitrariamente piccole, ognuna di esse dà una copia della struttura intera. Ognuna di queste parti è quindi ottenibile tramite una similitudine di fattore  $\delta$  arbitrario. Sia  $a$  il numero di parti considerate. Se denotiamo con  $\dim_s$  la dimensione di auto-similarità di un insieme  $F$  autosimile la relazione  $\delta^{\dim_s} = a$  ci dà la definizione di dimensione di auto-similarità:

**Definizione 2.1.1.** *Chiamiamo dimensione di auto-similarità di un insieme autosimile  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  che è unione di  $a$  copie disgiunte di se stesso scalate di un fattore  $\delta < 1$ , il numero reale non negativo*

$$\dim_s(F) = \frac{\log a}{\log \frac{1}{\delta}}.$$

**Esempio 2.1.2.** Si consideri  $C$  l'insieme di Cantor della sezione 1.3.1, ad ogni passo  $k$  si ha:

$$\delta = \frac{1}{3^k}, \quad a = 2^k \quad \text{quindi} \quad \dim_s(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

In particolare, in questo caso  $\dim_s(C) = \dim_{\mathcal{H}}(C)$ , ma ciò non è valido in generale.

## 2.2 Dimensione box-counting

Introduciamo la dimensione box-counting che si calcola per molte tipologie di insiemi, anche se non sussiste alcuna relazione di auto-similarità.



Figura 2.1: Struttura casuale

Sia dunque  $F$  un sottoinsieme limitato e non vuoto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $N_\delta(F)$  la minima cardinalità di un  $\delta$ -ricoprimento di  $F$ , dove utilizziamo per  $\delta$ -ricoprimento la Definizione 1.2.1 del capitolo precedente. Qui scegliamo  $\delta > 0$  abbastanza piccolo perchè  $-\log \delta$  sia strettamente positivo. Definiamo il limite inferiore e il limite superiore della dimensione box-counting di  $F$  rispettivamente:

$$\underline{\dim}_B(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \quad (2.1)$$

$$\overline{\dim}_B(F) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad (2.2)$$

**Definizione 2.2.1.** *Se i due valori in (2.1) e in (2.2) coincidono allora si definisce la dimensione box-counting di  $F$  come*

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

È possibile dare un'altra definizione, equivalente alla precedente, di dimensione box-counting molto più usata empiricamente. Se  $F$  è l'insieme di cui si vuole calcolare la

dimensione, si crea una griglia formata da celle (in generale 'boxes': in  $\mathbb{R}$  una cella coincide con un intervallo, in  $\mathbb{R}^2$  con un quadrato, in  $\mathbb{R}^n$  con un generico cubo di  $\mathbb{R}^n$ ) di lato  $\delta$  e si pone  $F$  su questa griglia. Si conta, poi, il numero  $N'_\delta(F)$  di celle che contengono una parte della struttura.

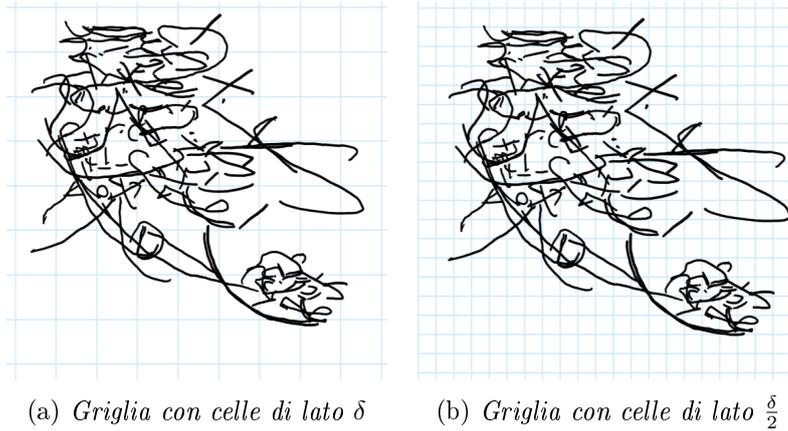


Figura 2.2: Esempio di raffinamento della griglia

Si chiama *dimensione box-counting* di  $F$  il tasso di crescita logaritmico di  $N'_\delta(F)$  per  $\delta \rightarrow 0$ . Essa si può stimare calcolando il gradiente del diagramma  $\log / \log$  in cui sull'asse delle ascisse c'è  $\log \frac{1}{\delta}$  e su quello delle ordinate  $\log N'_\delta(F)$ . In questo modo si può interpretare  $\frac{1}{\delta}$  come "misura di precisione": più è piccolo  $\delta$  e più la precisione  $\frac{1}{\delta}$  è alta. Il grafico  $\log / \log$  mostra come il numero di celle  $\log N'_\delta(F)$  varia all'aumentare della precisione  $\log \frac{1}{\delta}$ .

Ci sono ancora altri modi equivalenti di definire la *dimensione box-counting*. In generale, infatti, si possono calcolare il limite inferiore e superiore e, dove essi coincidono, la *dimensione box-counting* di un insieme  $F$  come segue:

$$\underline{dim}_B(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

$$\overline{dim}_B(F) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

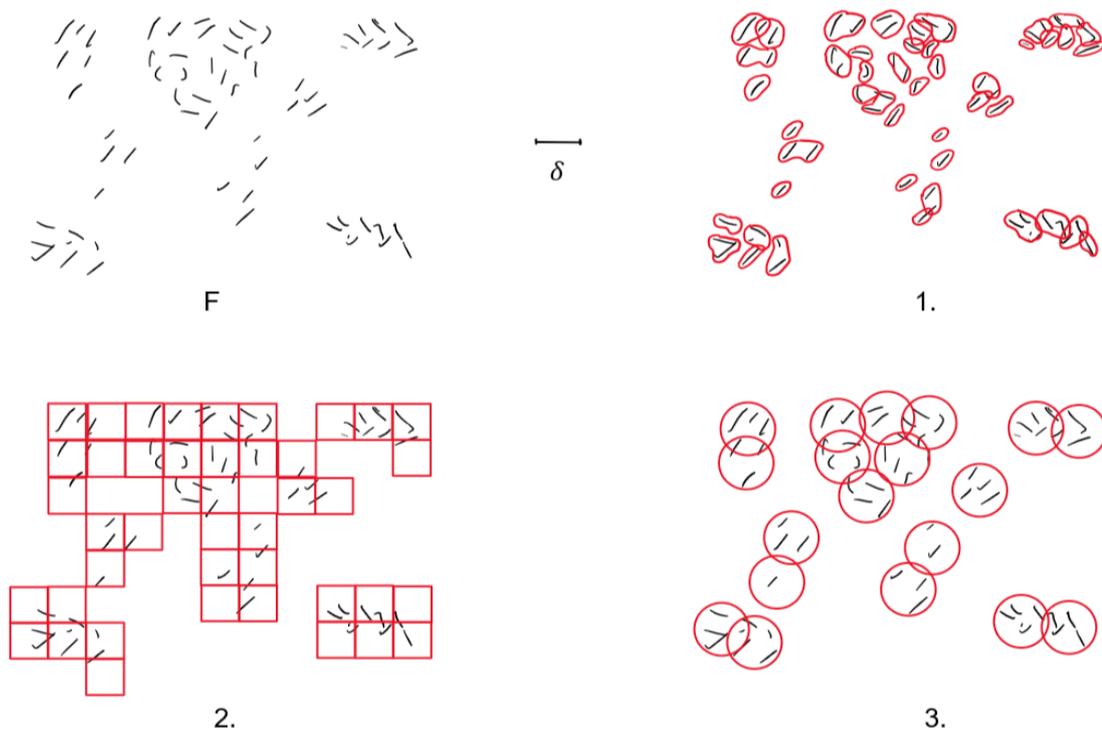
e, se esiste,

$$dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

dove  $N_\delta(F)$  è una qualunque delle seguenti:

1. il più piccolo numero di insiemi di diametro minore di  $\delta$  che ricoprono  $F$ , come visto nella prima definizione data;
2. il numero di celle di lato  $\delta$  che intersecano  $F$ , come visto nella seconda definizione data;
3. il più piccolo numero di palle chiuse di raggio  $\delta$  che ricoprono  $F$ ;
4. il più piccolo numero di cubi di lato  $\delta$  che ricoprono  $F$ ;
5. il maggior numero di palle disgiunte di raggio  $\delta$  che abbiano il loro centro in  $F$ .

Nell'applicare una o l'altra delle definizioni precedenti si utilizzerà quella che meglio si adatta per la particolare situazione.



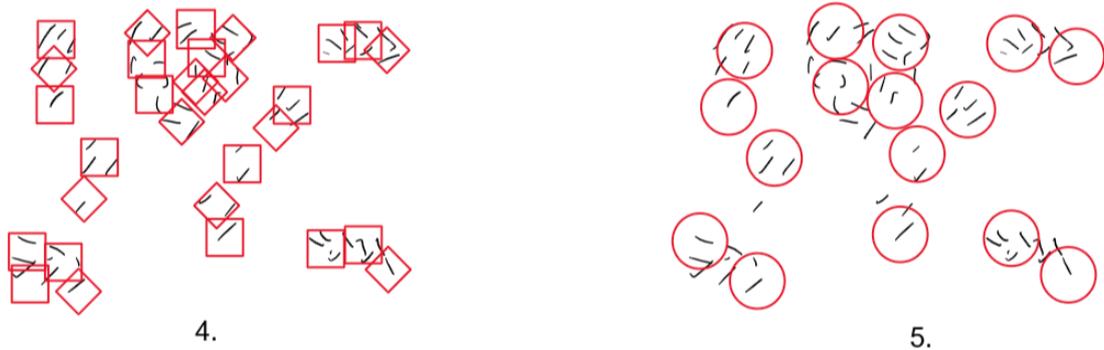


Figura 2.3: I cinque modi di definire la dimensione box-counting

Un'altra definizione del tutto diversa di dimensione box-counting è quella che la collega al contenuto di Minkowski di un insieme. Qui daremo soltanto un cenno di questo argomento. Per una trattazione più dettagliata si può consultare Mattila [7], Sezione 5.3.

Sia  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ , si definisce il  $\delta$ -intorno di  $F$

$$F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta \text{ per qualche } y \in F\}$$

e si vuole considerare la velocità con cui il volume  $n$ -dimensionale di  $F_\delta$  diminuisce se  $\delta \rightarrow 0$ . Vediamo alcuni esempi in  $\mathbb{R}^3$ :

1. se  $F = \{x_0\}$ ,  $F_\delta$  è la palla di raggio  $\delta$  centrata in  $x_0$  e ha dunque  $\text{vol}(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$ ;
2. se  $F$  è un segmento di lunghezza  $l$ , allora  $F_\delta$  è un cilindro di volume  $\text{vol}(F_\delta) = \pi l\delta^2$ ;
3. se  $F$  è una superficie piana di area  $a$ , allora  $F_\delta$  è essenzialmente un ispessimento di  $F$  che ha volume  $\text{vol}(F_\delta) = 2a\delta$ .

In ognuno di questi casi si può notare che  $\text{vol}(F_\delta) \sim c\delta^{3-s}$  dove  $s$  è un intero che indica la dimensione di  $F$ . In particolare la costante  $c$  è una misura della lunghezza, dell'area o del volume di  $F$  ed è quella che viene chiamata *contenuto di Minkowski*.

Estendiamo quest'idea a dimensioni non intere. Se  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  è tale che per qualche  $s \in [0, +\infty)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(F_\delta)}{\delta^{n-s}} = \lambda \in [0, +\infty)$$

è possibile definire la *dimensione di Minkowski* in analogia alla dimensione di Hausdorff e ha senso considerare  $F$  come  $s$ -dimensionale e il valore limite  $\lambda$  si dice *contenuto di  $F$   $s$ -dimensionale*.

Si mostra di seguito la relazione con la definizione di dimensione box-counting precedentemente data.

**Proposizione 2.2.2.** *Se  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  allora*

$$\underline{\dim}_B(F) = n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta},$$

$$\overline{\dim}_B(F) = n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}.$$

*Dimostrazione.* Se  $N_\delta(F)$  è il numero di palle di raggio  $\delta < 1$  con cui si può ricoprire  $F$ , allora  $F_\delta$  può essere ricoperto da altrettante palle di raggio  $2\delta$ . Il volume di  $F_\delta$  è dunque minore della somma dei volumi di tali palle, cioè:

$$\mathcal{L}^n(F_\delta) \leq N_\delta(F) c_n (2\delta)^n,$$

con  $c_n$  il volume di una palla di raggio unitario in  $\mathbb{R}^n$ . Si calcola il logaritmo e si divide per  $-\log \delta$  da entrambe le parti e si ha:

$$\frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^n c_n + n \log \delta + \log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Passando al limite inferiore per entrambi i membri si ottiene la disuguaglianza:

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B(F). \quad (2.3)$$

Analogamente si ottiene la stessa disuguaglianza per i limiti superiori:

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \overline{\dim}_B(F). \quad (2.4)$$

D'altra parte, se si ha un ricoprimento di  $F$  costituito da palle di raggio  $\delta$ , esso non può ricoprire  $F_\delta$  e si ha quindi:

$$N_\delta(F) c_n \delta^n \leq \mathcal{L}^n(F_\delta).$$

Con gli stessi ragionamenti di prima, calcolando cioè prima il logaritmo e poi i limiti inferiori e superiori, si ottengono le disuguaglianze opposte a (2.3) e (2.4) e quindi per entrambe vale l'uguaglianza, da cui:

$$\underline{\dim}_B(F) = n + \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} = n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

e analogamente

$$\overline{\dim}_B(F) = n + \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{-\log \delta} = n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}.$$

□

Seguendo la linea della proposizione precedente la dimensione box-counting è anche chiamata dimensione di Minkowski.

**Esempio 2.2.3.** Sia  $C$  l'insieme di Cantor dell'esempio 1.3.1, possiamo considerare i  $2^k$  intervalli di  $C_k$  come ricoprimento di  $C$ . Si ha allora che se  $\frac{1}{3^k} < \delta \leq \frac{1}{3^{k-1}}$  vale  $N_\delta(C) \leq 2^k$ . Dalla definizione (2.2) si ha

$$\overline{\dim}_B(C) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(C)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Inoltre, si ha che per  $\frac{1}{3^{k+1}} \leq \delta < \frac{1}{3^k}$ , ogni intervallo di lunghezza  $\delta$  interseca al più uno degli intervalli che costituiscono  $C_k$ . Esistono  $2^k$  di questi intervalli, quindi per ricoprire  $C$  servono almeno  $2^k$  intervalli di lunghezza  $\delta$ , da cui  $N_\delta(C) \geq 2^k$ . Con lo stesso ragionamento di prima si ottiene

$$\underline{\dim}_B(C) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(C)}{-\log \delta} \geq \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Si ha quindi la catena di disuguaglianze

$$\frac{\log 2}{\log 3} \leq \underline{\dim}_B(C) \leq \overline{\dim}_B(C) \leq \frac{\log 2}{\log 3}$$

per cui è ben definita  $\dim_B(C)$ .

In particolare, per l'insieme di Cantor  $C$  si osserva che le tre dimensioni definite fino ad ora coincidono:

$$\dim_B(C) = \dim_s(C) = \dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

L'uguaglianza tra le diverse dimensioni è una particolare caratteristica dell'insieme di Cantor, non è assolutamente una regola generale.

La dimensione box-counting è tra le più usate nelle scienze moderne e la motivazione è semplice: il suo calcolo è facilmente eseguibile da una macchina. Infatti, è immediato il calcolo del numero di celle che ci interessano ed esso è indipendente dalle proprietà dell'insieme di cui si vuole conoscere la dimensione.

Ci sono però anche degli svantaggi nell'usare questa definizione di dimensione: in generale non è vero che per una famiglia numerabile di insiemi  $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  vale  $\dim_B(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i) = \sup_i \dim_B(F_i)$ . Ad esempio, considerando  $F$  come l'insieme dei numeri razionali tra 0 e 1,  $\dim_B(F) = 1$ , mentre ogni numero razionale visto come insieme singoletto ha  $\dim_B = 0$ . Ecco perché spesso è preferibile usare la dimensione di Hausdorff, per cui questa proprietà invece sussiste.

## 2.3 Relazione tra le dimensioni

### 2.3.1 Dimensione di auto-similarità e box-counting

Abbiamo già mostrato come per alcuni insiemi valga  $\dim_B = \dim_s$ . Questa uguaglianza è però in generale falsa.

Per mostrare un esempio di insieme per cui non vale l'uguaglianza tra le due dimensioni, proviamo preliminarmente il seguente risultato:

**Proposizione 2.3.1.** *Se  $A$  è contenuto in un piano,  $\dim_B(A) \leq 2$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo una successione di griglie su cui posizionare  $A$  tali che il lato  $\delta$  delle celle venga dimezzato ad ogni step successivo. Allo step  $k$  il lato delle celle sarà dunque  $\delta = 2^{-k}$  con  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Il gradiente del grafico  $\log / \log$  tra il passo  $k$  e il passo  $k + 1$  è dunque:

$$\frac{\log N(2^{-(k+1)}) - \log N(2^{-k})}{\log 2^{k+1} - \log 2^k} = \frac{\log \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})}}{\log 2} = \log_2 \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})}.$$

In particolare con la sequenza di griglie utilizzate, ogni cella viene suddivisa in 4 celle da un passo al successivo, dunque per ogni cella occupata da  $A$  al passo  $k$  si hanno al più 4 celle occupate al passo  $k + 1$ . Questo vuol dire che  $\frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})} \leq 4$  da cui otteniamo

$$\dim_B(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \log_2 \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \log_2 4 = 2,$$

cioè la tesi. □

Il seguente esempio mostra che in generale  $dim_B \neq dim_s$ .

**Esempio 2.3.2.** Se si considera una figura piana abbiamo provato che  $dim_B \leq 2$ . Basta, allora, sceglierne una con  $dim_s > 2$  e si otterrà l'esempio voluto. Una tale figura esisterà sicuramente in quanto è sufficiente considerare  $\delta = \frac{1}{3}$  e prendere  $a > 9$ . Consideriamo, allora, la Figura 2.4, che mostra i primi passi nella costruzione di una curva che si auto-interseca. Questa curva ha  $\delta = \frac{1}{3}$  e  $a = 13$ , quindi  $dim_s = \frac{\log 13}{\log 3} \approx 2.335$ .

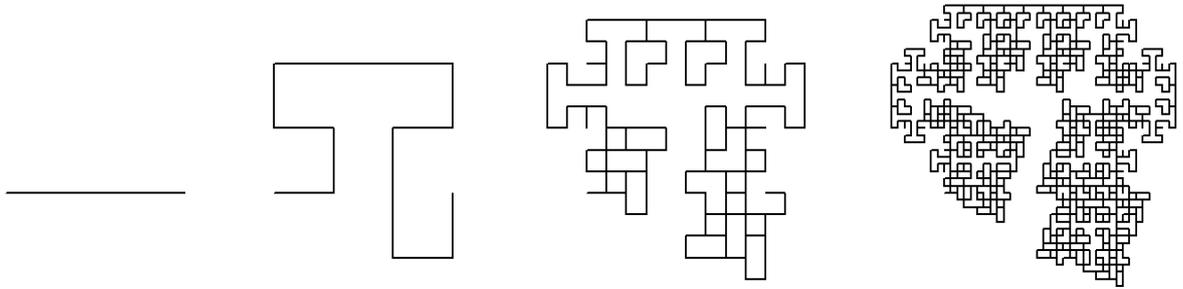


Figura 2.4: Curva che si auto-interseca

Questa discrepanza tra le due dimensioni si ottiene proprio a causa delle sovrapposizioni di alcune parti della curva. Esse vengono contate una sola volta per la dimensione box-counting (si trovano nella stessa cella della griglia considerata), mentre vengono contate con le relative molteplicità quando si calcola la dimensione di auto-similarità.

### 2.3.2 Box-counting e Hausdorff

Per capire la differenza tra dimensione di Hausdorff e dimensione box-counting, prendiamo un insieme  $F$  e ricopriamolo con  $N_\delta(F)$  insiemi di diametro  $\delta > 0$ . Dalla definizione di misura di Hausdorff si ha:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s. \quad (2.5)$$

Se si ha  $F$  tale che  $1 < \mathcal{H}^s(F)$  allora calcolando i logaritmi e utilizzando la disuguaglianza (2.5) si ottiene che  $s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$  da cui:

$$\dim_{\mathcal{H}}(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F) \quad \forall F \subset \mathbb{R}^n.$$

Nella definizione di  $\dim_B$  per un insieme  $F$  utilizziamo come celle della griglia gli elementi di un  $\delta$ -ricoprimento finito di  $F$ . Indichiamo con  $N_\delta$  il minimo numero di insiemi che servono per ricoprire tutto  $F$ , allora si ha:

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta}{\log \frac{1}{\delta}}.$$

Dunque, denotando  $s = \dim_B(F)$ , per  $\delta$  molto piccolo possiamo considerare

$$\log N_\delta \approx s \log \frac{1}{\delta} = \log \delta^{-s} \quad \text{e cioè} \quad N_\delta \approx \delta^{-s}.$$

In generale allora varrà

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta \delta^s = \begin{cases} 0 & \text{se } s > \dim_B(F), \\ +\infty & \text{se } s < \dim_B(F). \end{cases}$$

Quest'uguaglianza è in grande analogia con la proprietà della dimensione di Hausdorff per cui vale

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} 0 & \text{se } s > \dim_{\mathcal{H}}(F), \\ +\infty & \text{se } s < \dim_{\mathcal{H}}(F). \end{cases}$$

La differenza però si ha perchè

$$N_\delta(F) \delta^s = \inf \left\{ \sum_i \delta^s : \{U_i\} \quad \delta\text{-ricoprimento finito di } F \right\},$$

mentre

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i \text{cost}(\text{diam } U_i)^s : \{U_i\} \quad \delta\text{-ricoprimento di } F \right\}.$$

Per la dimensione di Hausdorff, dunque, ogni elemento del ricoprimento considerato ha un peso diverso nel calcolo, mentre per la dimensione box-counting ogni insieme contribuisce per lo stesso  $\delta$ . Si può dunque pensare alla dimensione box-counting di un

insieme  $F$  come indicativa dell'efficienza con cui  $F$  si può ricoprire con copie di uno stesso insieme, mentre volendo calcolare la dimensione di Hausdorff si adatta il ricoprimento ad  $F$  utilizzando insiemi diversi.

Abbiamo visto che l'insieme di Cantor dà un esempio per cui vale l'uguaglianza tra le due dimensioni, ma ci sono casi in cui esse sono diverse, come mostra il seguente esempio:

**Esempio 2.3.3.** Sia  $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \subset \mathbb{R}$ .  $A$  è un insieme numerabile. Come dimostrato nel paragrafo 1.3.2 si ha  $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 0$ . Dimostriamo che invece  $\dim_B(A) = \frac{1}{2}$ . La distanza tra due termini successivi  $\frac{1}{k}$  e  $\frac{1}{k+1}$  di  $A$  è  $\frac{1}{k(k+1)}$ . Prendiamo allora  $\delta$  tale che  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  e sia  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $\frac{1}{k(k+1)} \leq \delta < \frac{1}{k(k-1)}$ . Un intervallo di lunghezza minore di  $\delta$  può ricoprire al massimo un solo elemento di  $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}\}$ . Quindi, servono almeno  $k$  intervalli di lunghezza  $\delta$  per avere un ricoprimento di  $A$ , cioè  $N_{\delta}(A) \geq k$ . Allora:

$$\frac{\log N_{\delta}(A)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}.$$

Passando al limite inferiore per  $\delta \rightarrow 0$  si ottiene la disuguaglianza

$$\underline{\dim}_B(A) \geq \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

D'altra parte,  $k+1$  intervalli di lunghezza  $\delta$  ricoprono  $[0, \frac{1}{k}]$  senza includere  $k-1$  punti di  $A$ , che si possono ricoprire con al più  $k-1$  intervalli. Da questo ragionamento segue che  $N_{\delta}(A) \leq 2k$  e quindi:

$$\frac{\log N_{\delta}(A)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log k(k-1)}.$$

Passando al limite superiore per  $\delta \rightarrow 0$  si ha

$$\overline{\dim}_B(A) \leq \frac{1}{2}. \quad (2.7)$$

Mettendo insieme le disequazioni (2.6) e (2.7) si ottiene  $\dim_B(A) = \frac{1}{2}$  come volevasi dimostrare.



# Capitolo 3

## Gli insiemi frattali autosimili

Abbiamo già visto un esempio di insieme frattale, l'insieme di Cantor  $C$ , che come si è visto nell'esempio 1.3.1 ha dimensione di Hausdorff  $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ . In particolare, l'insieme di Cantor gode della seguente proprietà: considerando i due sottoinsiemi  $C \cap [0, \frac{1}{3}]$  e  $C \cap [\frac{2}{3}, 1]$  essi sono simili a  $C$  stesso e ne formano una partizione. In realtà, molti frattali sono unione di parti che sono tutte simili all'intero insieme. Questa proprietà è molto importante in quanto può essere utilizzata per dare una definizione rigorosa di insieme frattale autosimile. In questo capitolo si vuole formalizzare questo concetto e dare una definizione precisa di insieme autosimile.

### 3.1 Sistemi di funzioni iterate

Sia  $D$  un sottoinsieme chiuso e non vuoto di  $\mathbb{R}^n$  (si può avere anche  $D = \mathbb{R}^n$ ). Ricordando che un'applicazione  $S : D \rightarrow D$  è detta *contrazione* su  $D$  se esiste un reale  $c \in (0, 1)$  tale che  $\forall x, y \in D \ |S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ , si danno le seguenti definizioni:

**Definizione 3.1.1.** *Un sistema di funzioni iterate è una famiglia finita di contrazioni  $\{S_1, \dots, S_m\}$  con  $m \geq 2$ . In seguito si indicherà un tale sistema con la sigla IFS.*

**Definizione 3.1.2.** *Un insieme  $F$  compatto e non vuoto, contenuto in  $D$ , è detto attrattore di un IFS  $\{S_i\}_{i=1, \dots, m}$  se*

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Per studiare le proprietà dei sistemi di funzioni iterate e dei relativi attrattori bisogna definire una metrica tra i sottoinsiemi di  $D$ .

Si ricorda che se  $A \subset \mathbb{R}^n$  si definisce

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, A) \leq \delta\} \quad (3.1)$$

per ogni  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  non vuoto e  $0 \leq \delta < +\infty$ .

**Definizione 3.1.3.** Se  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  sono due insiemi limitati e non vuoti, chiamiamo distanza di Hausdorff tra  $A$  e  $B$

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf \{\delta \geq 0 : A \subset B_\delta, B \subset A_\delta\}.$$

Se si considera l'insieme dei sottoinsiemi limitati non vuoti di  $\mathbb{R}^n$   $d_{\mathcal{H}}$  non è una metrica. Tuttavia lo diventa se ci limitiamo a considerare i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  compatti e non vuoti. Infatti, definendo

$$\mathcal{K} = \{K \subset \mathbb{R}^n : K \text{ è compatto non vuoto}\},$$

si ha il seguente risultato:

**Proposizione 3.1.4.** La distanza di Hausdorff  $d_{\mathcal{H}}$  è una metrica in  $\mathcal{K}$ .

*Dimostrazione.* Sicuramente  $d_{\mathcal{H}}(A, B) \geq 0$  e  $d_{\mathcal{H}}(A, B) = d_{\mathcal{H}}(B, A)$ .

Siano  $A, B$  tali che  $d_{\mathcal{H}}(A, B) = 0$ . Allora  $A \subset B_0 = \bar{B}$  e  $B \subset A_0 = \bar{A}$  e siccome  $A, B \in \mathcal{K}$ , essi sono chiusi e quindi  $A = B$ .

Infine manca la disuguaglianza triangolare. Siano allora  $A, B, C \in \mathcal{K}$  e siano  $d_1 = d_{\mathcal{H}}(A, B)$  e  $d_2 = d_{\mathcal{H}}(B, C)$ . Sicuramente  $A \subset B_{d_1}$ ,  $B \subset A_{d_1}$  e  $B \subset C_{d_2}$ ,  $C \subset B_{d_2}$ . Allora si ha  $A \subset C_{d_1+d_2}$  e  $C \subset A_{d_1+d_2}$  da cui  $d_{\mathcal{H}}(A, C) \leq d_1 + d_2 = d_{\mathcal{H}}(A, B) + d_{\mathcal{H}}(B, C)$ .  $\square$

**Lemma 3.1.5.** Sia  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione non crescente di elementi di  $\mathcal{K}$  e sia  $K = \bigcap_n K_n$ . Allora  $K \in \mathcal{K}$  e  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $K$  rispetto a  $d_{\mathcal{H}}$ .

*Dimostrazione.* Sicuramente  $K$  è compatto perchè è chiuso e limitato. Si mostra che  $K$  è non vuoto. Siano  $x_n \in K_n \forall n$ , allora  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di elementi di  $K_1$  ed essendo  $K_1$  compatto essa ammette una sottosuccessione  $\{x_{n_i}\}$  convergente a  $x \in K_1$ .

Fissato  $n$ , per un qualche indice  $j$  si ha  $n_i \geq n \forall i \geq j$ , da cui  $x_{n_i} \in K_n \forall i \geq j$ . Ma  $K_n$  è chiuso quindi  $x \in K_n$ . Dall'arbitrarietà di  $n$  si ha  $x \in K$ .

Si vuole ora mostrare che  $\forall \varepsilon > 0 \exists n'$  tale che  $K_n \subset K_\varepsilon \forall n \geq n'$ , da cui la convergenza. Per assurdo siano  $\varepsilon > 0$  e  $\{n_i\}$  tali che  $K_{n_i} \not\subset K_\varepsilon \forall i$ , dove  $K_\varepsilon$  è definito come in (3.1). Sia allora  $x_i \in K_{n_i} \setminus K_\varepsilon$ , si ha dunque che  $\forall i \text{ dist}(x_i, K) > \varepsilon$ . Poichè  $x_i \in K_1 \forall i$ , si può estrarre una sottosuccessione  $x_{ij}$  che converga a  $x \in K_1$ . Con il ragionamento precedente  $x \in K$  ma risulta  $\text{dist}(x, K) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \text{dist}(x_{ij}, K) \geq \varepsilon$ , che è assurdo.  $\square$

**Teorema 3.1.6.**  $\mathcal{K}$  è uno spazio metrico completo rispetto a  $d_{\mathcal{H}}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $\mathcal{K}$ . Si pone:

$$K'_n = \overline{\bigcup_{i \geq n} K_i} \quad e \quad K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K'_n.$$

Essendo  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di Cauchy, essa è limitata rispetto a  $d_{\mathcal{H}}$ , cioè  $\exists M > 0$  tale che  $d_{\mathcal{H}}(K_n, K_1) \leq M \forall n$ . Questo implica che tutti i  $K_n$  siano inclusi nello stesso insieme limitato e che i  $K'_n$  siano limitati, cioè  $K'_n \in \mathcal{K}$ . Per il Lemma 3.1.5,  $K \in \mathcal{K}$  e  $\{K'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $K$ . Se si mostra allora  $d_{\mathcal{H}}(K_n, K'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , abbiamo mostrato che anche  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $K$ . Essendo  $\{K_n\}$  di Cauchy, fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $n'$  tale che  $d_{\mathcal{H}}(K_i, K_n) \leq \varepsilon$  per ogni  $i, n \geq n'$ . Preso  $n \geq n'$ ,  $K_n \subset K'_n \subset (K'_n)_\varepsilon$ . Se  $i \geq n$  si ha  $d_{\mathcal{H}}(K_i, K_n) \leq \varepsilon$  e quindi  $K_i \subset (K_n)_\varepsilon$ . Allora  $\bigcup_{i \geq n} K_i \subset (K_n)_\varepsilon$  e quindi  $K'_n \subset (K_n)_\varepsilon$ , dunque  $d_{\mathcal{H}}(K_n, K'_n) \leq \varepsilon$ . Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  si ottiene la tesi.  $\square$

Si mostra allora la proprietà più importante di un IFS ovvero l'esistenza e l'unicità del suo attrattore. Per la dimostrazione si utilizza il *Teorema delle contrazioni di Banach* di cui si riporta l'enunciato di seguito.

**Teorema 3.1.7.** *Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e  $f : X \rightarrow X$  una contrazione. Allora esiste uno e un solo  $\bar{x} \in X$  tale che  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ . Inoltre se si considera la successione in  $X$  che ha come primo elemento  $x_0 \in X$  ed è definita ricorsivamente come  $x_{n+1} = f(x_n)$  per ogni  $n \geq 0$ , essa converge a  $\bar{x}$ .*

I risultati precedenti valgono se sostituiamo  $\mathbb{R}^n$  con  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  limitato e consideriamo  $\mathcal{K}$  la classe dei sottoinsiemi compatti e non vuoti di  $D$ . Il risultato fondamentale che riguarda un IFS su  $D$  è il seguente:

**Teorema 3.1.8.** *Sia  $\{S_1, \dots, S_m\}$  un IFS su  $D$  tale che  $|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y|$  per ogni  $x, y \in D$  e per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Allora esiste un unico attrattore, ovvero un insieme  $F$  compatto e non vuoto tale che*

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

*Inoltre, se definiamo un'applicazione  $S$  su  $\mathcal{K}$ , la classe dei sottoinsiemi compatti non vuoti di  $D$ , ponendo*

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$$

*per  $E \in \mathcal{K}$  e consideriamo le iterate di  $S$ :  $S^0(E) = E$  e  $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$  per  $k \geq 1$ , allora*

$$F = \bigcap_{k=0}^{+\infty} S^k(E)$$

*per ogni  $E \in \mathcal{K}$  con  $S_i(E) \subset E$  per ogni  $i$ .*

*Dimostrazione.* Innanzitutto si vuole provare che esiste unico  $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) = S(F)$ , cioè si vuole dimostrare che  $S$  ammette uno e un solo punto fisso.  $S$  è una contrazione rispetto alla metrica  $d_{\mathcal{H}}$  perchè se  $A, B \in \mathcal{K}$  e scriviamo  $S(A) = \bigcup_{j=1}^m S_j(A)$  e  $S(B) = \bigcup_{j=1}^m S_j(B)$  si ha

$$d_{\mathcal{H}}(S(A), S(B)) = d_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{i=1, \dots, m} d_{\mathcal{H}}(S_i(A), S_i(B))$$

e per l'ipotesi di  $S_i$  contrazioni si ha allora

$$d_{\mathcal{H}}(S(A), S(B)) \leq \max_{i=1, \dots, m} (c_i d_{\mathcal{H}}(A, B)) = \left(\max_{i=1, \dots, m} c_i\right) d_{\mathcal{H}}(A, B) \quad (3.2)$$

con  $0 < \max_{i=1, \dots, m} c_i < 1$ .

Allora  $S$  è una contrazione sullo spazio metrico  $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$  che è completo per quanto visto nel Teorema 3.1.6. Si può allora applicare il Teorema delle contrazioni di Banach 3.1.7 e concludere che esiste unico  $F \in \mathcal{K}$  tale che

$$S(F) = F.$$

Inoltre dal teorema si ha che  $S^k(E) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} F$ . Segue che se  $S_i(E) \subset E \forall i$  allora  $S(E) \subset E$  e cioè  $\{S^k(E)\}$  è una successione decrescente di elementi di  $\mathcal{K}$  che contengono  $F$ . Allora necessariamente

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} S^k(E) = F.$$

□

Questa proprietà di un IFS e del suo attrattore è molto importante per la teoria dei frattali. Infatti, nelle notazioni precedenti,  $F$  è solitamente un insieme frattale.

**Esempio 3.1.9.** Mostriamo che questa teoria si può applicare all'insieme di Cantor  $C$  dell'esempio 1.3.1. Siano  $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le due contrazioni

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

$S_1(C) = C \cap [0, \frac{1}{3}]$  e  $S_2(C) = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$  e quindi  $C = S_1(C) \cup S_2(C)$ . Questo significa che considerando  $\{S_1, S_2\}$  come IFS il suo unico attrattore  $F$  è proprio  $C$ .

**Osservazione 3.1.10.** La trasformazione  $S$  introdotta nel Teorema 3.1.8 è la chiave per calcolare l'attrattore di un IFS. Infatti se  $E \subset \mathcal{K}$  è un qualsiasi insieme, la successione delle iterate  $S^k(E)$  converge all'attrattore  $F$  (ovvero  $d_{\mathcal{H}}(S^k(E), F) \rightarrow 0$ ). Questo segue dal fatto che, per (3.2),  $d_{\mathcal{H}}(S(E), F) = d_{\mathcal{H}}(S(E), S(F)) \leq cd_{\mathcal{H}}(E, F)$  e dunque  $d_{\mathcal{H}}(S^k(E), F) \leq c^k d_{\mathcal{H}}(E, F)$  e, essendo  $c < 1$ ,  $c^k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Dunque  $S^k(E)$  dà una approssimazione di  $F$ .

## 3.2 Frattali autosimili

Si può considerare il caso particolare di un IFS costituito da sole *similitudini*, cioè una famiglia  $\{S_1, \dots, S_m\}$  di applicazioni di  $\mathbb{R}^n$  tali che

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y| \quad \text{con} \quad 0 < c_i < 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

In questo caso ogni  $S_i$  manda sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  in sottoinsiemi ad essi simili. Banalmente, le similitudini sono contrazioni e quindi valgono tutti i risultati riportati nella sezione 3.1. Si dà allora la seguente definizione:

**Definizione 3.2.1.** *L'unico attrattore di un IFS costituito da similitudini si dice insieme autosimile.*

Quando un frattale è autosimile si ha infatti che esso è costituito dall'unione di copie di se stesso (cioè suoi sottoinsiemi ad esso simili).

**Esempio 3.2.2.** Nell' Esempio 3.1.9 abbiamo mostrato che l'insieme di Cantor  $C$  è l'attrattore dell'IFS  $\{S_1, S_2\}$  composto da due similitudini.  $S_1(C)$  e  $S_2(C)$  sono quindi una partizione di copie di  $C$ .

Considerando un IFS  $\{S_1, \dots, S_m\}$  di similitudini e  $F$  il suo attrattore, si vuole ottenere un semplice algoritmo per calcolare  $\dim_{\mathcal{H}}(F)$ .

Nel caso particolare in cui  $0 < \mathcal{H}^s(F) < +\infty$ ,  $s = \dim_{\mathcal{H}}(F)$ , e  $\mathcal{H}^s(S_i(F) \cap S_j(F)) = 0$  per  $i \neq j$  si ha

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^m c_i^s \mathcal{H}^s(F)$$

e semplificando  $\mathcal{H}^s(F)$  si ottiene

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1. \quad (3.4)$$

Sicuramente esiste una e una sola  $s$  che risolve la (3.4), perchè, posto  $f(s)$  il primo membro,  $f$  è una funzione continua e strettamente decrescente per  $s > 0$ . Inoltre  $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = 0$  e  $\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) > 1$ .

Si vuole allora confrontare  $\dim_{\mathcal{H}}(F)$  con la soluzione  $s$  di (3.4). Per ottenere i risultati riportati di seguito, dobbiamo però introdurre una particolare condizione sull'IFS di similitudini che utilizzeremo.

**Definizione 3.2.3.** *L'IFS costituito dalle similitudini  $\{S_1, \dots, S_m\}$  verifica la condizione dell'aperto se esiste un insieme aperto, limitato e non vuoto  $V$  tale che:*

$$V \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(V) = S(V) \quad e \quad S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset \quad per \quad i \neq j.$$

Vogliamo provare che se un IFS di similitudini verifica questa condizione, allora la dimensione di Hausdorff del suo attrattore è proprio la soluzione dell'equazione (3.4).

Si dà il seguente lemma geometrico:

**Lemma 3.2.4.** *Sia  $\{V_i\}_{i \in I}$  una collezione di insiemi aperti a due a due disgiunti di  $\mathbb{R}^n$ . Se per ogni  $i$ ,  $V_i$  contiene una palla di raggio  $a_1 r$  ed è contenuto in una palla di raggio  $a_2 r$ , allora ogni palla  $B$  di raggio  $r$  interseca al più  $(1+2a_2)^n a_1^{-n}$  elementi della collezione  $\{\bar{V}_i\}_{i \in I}$ .*

*Dimostrazione.* Se un  $\bar{V}_i$  interseca  $B$ , allora  $\bar{V}_i$  è contenuto in una palla concentrica a  $B$  di raggio  $r + 2a_2 r = (1 + 2a_2)r$ . Se si hanno  $p$  elementi di  $\{\bar{V}_i\}_i$  che intersecano  $B$ , la somma dei volumi delle palle interne ai  $V_i$  è minore del volume della palla di raggio  $(1 + 2a_2)r$ . Si ha allora che

$$p(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n,$$

da cui la tesi. □

Dimostriamo anche il seguente lemma che prende il nome di *Principio di distribuzione di massa*:

**Lemma 3.2.5.** *Sia  $\mu$  una distribuzione di massa su  $F$  con  $\mu(F) = 1$ . Se per qualche  $s$  esistono  $c > 0$  e  $\varepsilon > 0$  per cui per ogni insieme  $U$  con  $\text{diam } U \leq \varepsilon$  vale  $\mu(U) \leq c(\text{diam } U)^s$ , allora*

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento di  $F$ . Allora  $0 < \mu(F) \leq \mu(\bigcup_i U_i) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i (\text{diam } U_i)^s$ . Per  $\delta$  abbastanza piccolo si ha quindi  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ , da cui la tesi. □

**Teorema 3.2.6.** *Sia  $\{S_1, \dots, S_m\}$ ,  $m \geq 2$ , un IFS di similitudini in  $\mathbb{R}^n$  per cui è verificata la condizione dell'aperto. Sia  $F$  l'attrattore dell'IFS, cioè*

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F),$$

*allora si ha:*

$$\dim_{\mathcal{H}}(F) = \dim_B(F) = s,$$

*dove  $s$  è soluzione dell'equazione (3.4), cioè  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ , con  $c_i$  come in (3.3). In particolare, per tale  $s$  si ha  $0 < \mathcal{H}^s(F) < +\infty$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $s$  soluzione di (3.4). Per ottenere  $\mathcal{H}^s(F) < +\infty$  introduciamo  $I_k$  l'insieme di tutte le  $k$ -uple  $(i_1, \dots, i_k)$  con  $1 \leq i_j \leq m, \forall j = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N}$ . Denotiamo poi  $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$  per  $A$  insieme qualunque. Utilizzando ripetutamente la definizione di  $F$  come attrattore dell'IFS dell'enunciato, segue che  $F = \bigcup_{I_k} F_{i_1, \dots, i_k}$ .  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$  è una similitudine di rapporto  $c_{i_1} \cdots c_{i_k}$ , quindi possiamo calcolare  $\sum_{I_k} \alpha(s)(\text{diam } F_{i_1, \dots, i_k})^s$  come segue:

$$\sum_{I_k} \alpha(s)(\text{diam } F_{i_1, \dots, i_k})^s = \alpha(s) \sum_{I_k} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s (\text{diam } F)^s = \alpha(s)(\text{diam } F)^s$$

utilizzando il risultato di (3.4). Per ogni  $\delta > 0$  possiamo scegliere  $k$  in modo che  $\text{diam } F_{i_1, \dots, i_k} \leq (\max_i c_i)^k \text{diam } F < \delta$ , così da avere  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \alpha(s)(\text{diam } F)^s$  e quindi

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \alpha(s)(\text{diam } F)^s < +\infty.$$

Dobbiamo ora provare che  $\mathcal{H}^s(F) > 0$ . Mostreremo questa disuguaglianza sotto l'ipotesi aggiuntiva in cui l'unione  $\bigcup_{i=1}^m S_i(F)$  è disgiunta.

Consideriamo  $F_{i_1, \dots, i_k}$  e definiamo un'applicazione  $\mu$  tale che  $\mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s$ . Essa è una distribuzione di massa su  $F$ , in quanto  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ , e allora

$$\sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^s = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s = \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^m F_{i_1, \dots, i_k, i}\right),$$

da cui

$$\mu(F) = \sum_{i=1}^m \mu(S_i(F)) = \sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Se  $x \in F$  allora esiste un'unica sequenza infinita  $i_1, i_2, \dots$  (con  $1 \leq i_j \leq m, \forall j = 1, 2, \dots$ ) tale che  $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$ , per ogni  $k$ . Sia  $d > 0$  la minima distanza tra due qualsiasi degli insiemi disgiunti  $S_1(F), \dots, S_m(F)$ . Per  $0 < r < d$ , sia  $k$  il minimo intero tale che:

$$c_{i_1} \cdots c_{i_k} d \leq r < c_{i_1} \cdots c_{i_{k-1}} d.$$

Gli insiemi  $F_{i_1, \dots, i_k}$  e  $F_{i'_1, \dots, i'_k}$ , con  $(i_1, \dots, i_k) \neq (i'_1, \dots, i'_k)$ , sono disgiunti e distanti almeno  $c_{i_1} \cdots c_{i_{k-1}} d > r$ . Allora, denotando la palla di centro  $x$  e raggio  $r$  con  $B(x, r)$ , si ha  $F \cap B(x, r) \subset F_{i_1, \dots, i_k}$ , dunque:

$$\mu(F \cap B(x, r)) \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \leq \frac{1}{d^s} r^s.$$

Sia  $U$  un insieme che interseca  $F$ , se  $r = \text{diam } U$  allora  $U \subset B(x, r)$  per qualche  $x \in F$ . Allora  $\mu(U) \leq \frac{1}{d^s} (\text{diam } U)^s$ . Si conclude allora che  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  per il Lemma 3.2.5.

Per calcolare la dimensione box-counting, sia  $V$  l'aperto per cui il nostro IFS verifica la condizione dell'aperto e  $\bar{V}$  la sua chiusura. Sia poi  $\mathcal{Q}$  la famiglia delle sequenze finite  $(i_1, \dots, i_k)$  costruite troncando una qualsiasi famiglia di tali indici infinita dopo il primo  $i_k$  che verifichi

$$\left( \min_{1 \leq i \leq m} c_i \right) r \leq c_{i_1} \cdots c_{i_k} \leq r, \quad r < 1.$$

$\mathcal{Q}$  conterrà al massimo  $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$  sequenze. Da ciò segue che  $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$  insiemi di diametro  $r \text{ diam } \bar{V}$ ,  $r < 1$ , possono ricoprire  $F$ . Allora  $\overline{\text{dim}}_B(F) \leq s$  e si ha quindi:

$$s = \text{dim}_{\mathcal{H}}(F) \leq \underline{\text{dim}}_B(F) \leq \overline{\text{dim}}_B(F) \leq s,$$

da cui la tesi. □

Si può anche considerare il caso più generale di un IFS composto da contrazioni. In questa circostanza è possibile stimare la dimensione del relativo attrattore  $F$  grazie al seguente risultato che enunciamo soltanto:

**Proposizione 3.2.7.** *Sia  $F$  l'attrattore di un IFS  $\{S_1, \dots, S_m\}$ ,  $m \geq 2$ , composto da contrazioni su un sottoinsieme  $D$  di  $\mathbb{R}^n$  chiuso, cioè*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y|, \quad x, y \in D \quad 0 < c_i < 1.$$

Allora, se  $s$  è la soluzione dell'equazione (3.4),

$$\text{dim}_{\mathcal{H}}(F) \leq s \quad e \quad \overline{\text{dim}}_B(F) \leq s.$$

### 3.3 Alcuni esempi

Grazie al teorema 3.2.6 si possono calcolare le dimensioni di Hausdorff di molti insiemi frattali autosimili. Vediamo in questa sezione alcuni esempi.

### 3.3.1 Il triangolo di Sierpinski

Il triangolo di Sierpinski è l'insieme  $T$  che si costruisce con la seguente procedura ricorsiva: da un triangolo equilatero  $T_0$  si rimuove il triangolo equilatero che si crea congiungendo i punti medi dei lati di  $T_0$ , ottenendo quindi una figura  $T_1$ . Si ripete poi la procedura per ciascuno dei tre triangoli che compongono  $T_1$  e così via ricorsivamente.



Figura 3.1: Costruzione del triangolo di Sierpinski

Si consideri l'IFS costituito dalle tre similitudini di rapporto  $\frac{1}{2}$  che trasformano il triangolo  $T_0$  rispettivamente nei tre triangoli che compongono  $T_1$ . Esso verifica la condizione dell'aperto prendendo come aperto limitato  $V$  l'interno di  $T_0$ . Il triangolo di Sierpinski  $T$  è l'attrattore dell'IFS considerato e quindi per calcolarne la dimensione di Hausdorff applichiamo l'equazione (3.4):

$$\sum_{i=1}^3 (c_i)^s = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^s = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1 \quad \text{quindi} \quad s = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Pertanto  $\dim_{\mathcal{H}}(T) = \dim_B(T) = \frac{\log 3}{\log 2}$ .

### 3.3.2 La curva di von Koch

La curva di von Koch  $E$  è la figura che si ottiene applicando il seguente procedimento ricorsivo: sia  $E_0$  un segmento di lunghezza unitaria. Da  $E_0$  si toglia il terzo centrale sostituendolo con gli altri due lati del triangolo equilatero che ha base sul segmento rimosso. Sia questa nuova figura  $E_1$ .  $E_2$  si ottiene applicando la stessa procedura a ogni segmento di  $E_1$  e così via.

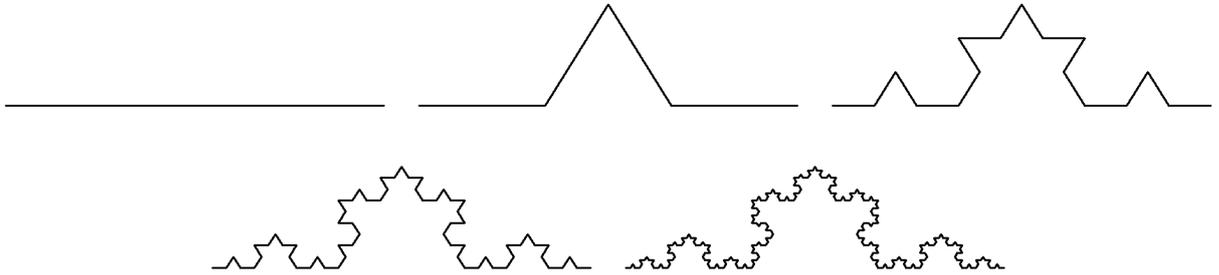


Figura 3.2: Costruzione della curva di von Koch

L'insieme  $E$  è l'attrattore dell'IFS composto dalle quattro similitudini di  $\mathbb{R}^2$  in sè, tutte di rapporto  $\frac{1}{3}$ , che trasformano il segmento unitario  $E_0$  in ciascuno dei quattro segmenti che compongono  $E_1$ . Descriviamo le quattro applicazioni più nel dettaglio:  $S_1$  e  $S_2$  sono le due omotetie con centri nei punti  $(0,0)$  e  $(1,0)$ . Le ultime due, invece, si possono costruire utilizzando le due terne di punti seguenti:

$$A = (0,0), \quad B = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad C = (1,0);$$

$$D = \left(\frac{1}{3}, 0\right), \quad E = \left(\frac{2}{3}, 0\right), \quad F = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

L'unica similitudine che mappa rispettivamente  $A, B, C$  in  $D, E, F$  è  $S_3$ , mentre scegliamo  $S_4$  come quella che trasforma ordinatamente  $A, B, C$  in  $F, D, E$ .

L'IFS così costruito verifica la condizione dell'aperto scegliendo come aperto limitato  $V$  l'interno del triangolo isoscele con base unitaria e altezza  $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ . Si risolve allora l'equazione (3.4) per calcolare la dimensione di  $E$ :

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \quad \text{quindi} \quad s = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Dunque si ha:  $\dim_{\mathcal{H}}(E) = \dim_B(E) = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### 3.3.3 Curva frattale ottenuta da un generatore

L'esempio precedente è un caso particolare di curva ottenuta a partire da un generatore. Per la curva di von Koch si ha che le similitudini che portano  $E_0$  nei quattro segmenti

di  $E_1$  hanno tutte lo stesso rapporto, possiamo però generalizzare il procedimento usando un generatore composto da segmenti di diversa lunghezza, come nell'esempio seguente.

Sia il nostro generatore  $G_0$  costituito come segue: da un segmento di lunghezza unitaria si rimuove il terzo centrale e lo si sostituisce con gli altri tre lati del rettangolo di base il segmento rimosso e di altezza  $\frac{1}{4}$  del segmento iniziale.  $G_1$  si ottiene applicando questa sostituzione a ogni segmento che compone  $G_0$  e così via per i successivi  $G_2, G_3, \dots$ . Il procedimento ricorsivo così creato dà origine alla curva frattale  $G$  di cui ci interessa calcolare la dimensione.

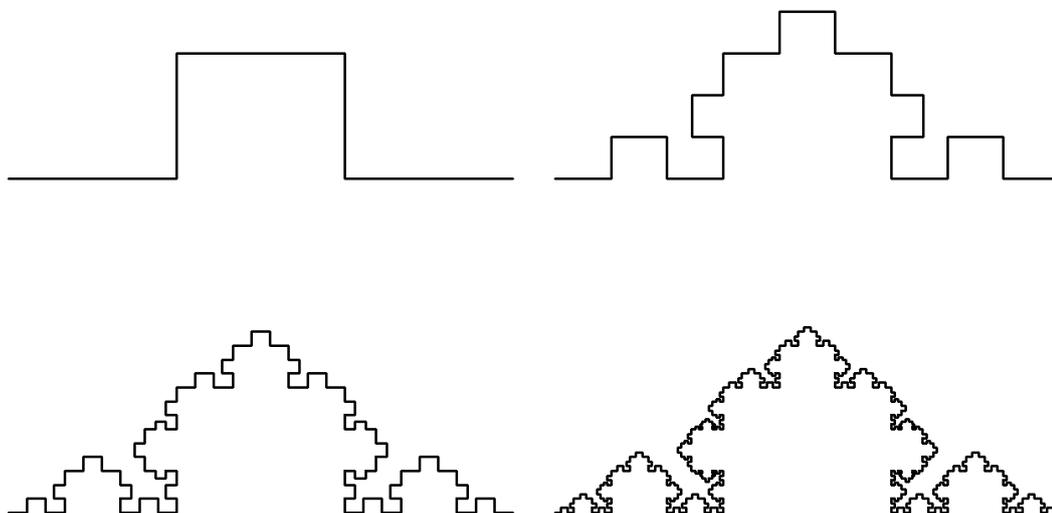


Figura 3.3: Costruzione di una curva a partire da un generatore

Si consideri l'IFS costituito dalle cinque similitudini che trasformano il segmento unitario nei cinque segmenti che costituiscono  $G_0$ . Esse sono tre similitudini di rapporto  $\frac{1}{3}$  e due di rapporto  $\frac{1}{4}$ . Tale IFS verifica la condizione dell'aperto perchè come aperto limitato  $V$  si può prendere l'interno del rettangolo di base unitaria e di altezza  $\frac{3}{8}$ .  $G$  è l'attrattore dell'IFS considerato e si può quindi misurare la sua dimensione risolvendo l'equazione (3.4):

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 3\left(\frac{1}{3}\right)^s + 2\left(\frac{1}{4}\right)^s = 1.$$

La soluzione è approssimata a 1.340... e si ha dunque  $\dim_{\mathcal{H}}(G) = \dim_B(G) = 1.340\dots$ .

# Capitolo 4

## Dimensione di un grafico

Vediamo in questo capitolo un'altra interessante applicazione pratica della matematica dei frattali. Vogliamo, infatti, mostrare come in alcuni casi un frattale si può manifestare come grafico di una funzione. Sono esempi i grafici rispetto al tempo di fenomeni quali il cambiamento dei prezzi del mercato azionario, dati riguardanti la popolazione di uno stato oppure la variazione nei valori della velocità del vento, se calcolati in un lungo periodo di tempo.

Consideriamo una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è di classe  $C^1$  oppure è a variazione limitata, allora si vede facilmente che il grafico di  $f$  è 1-dimensionale. In alcune circostanze, invece, il grafico di una funzione  $f$

$$\text{graf } f = \{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}$$

è un frattale visto come sottoinsieme del piano di coordinate  $(t, x)$ . Questo avviene solitamente per funzioni sufficientemente irregolari.

Per fornire un esempio di funzione il cui grafico sia un insieme frattale, enunciamo preliminarmente due risultati. Si utilizza di seguito la notazione: se  $f$  è una funzione definita nell'intervallo  $[t_1, t_2]$  poniamo

$$R_f [t_1, t_2] := \sup_{t_1 \leq t, u \leq t_2} |f(t) - f(u)|.$$

**Proposizione 4.1.** *Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Siano  $0 < \delta < 1$  e  $m$  il più piccolo intero maggiore o uguale a  $\frac{1}{\delta}$ . Considerata una griglia di celle di lato  $\delta$ , sia*

$N_\delta$  il numero di celle che graf  $f$  interseca. Allora si ha:

$$\frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{m-1} R_f [i\delta, (i+1)\delta] \leq N_\delta \leq 2m + \frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{m-1} R_f [i\delta, (i+1)\delta].$$

*Dimostrazione.* Il risultato si ottiene considerando che, essendo  $f$  continua, se  $t \in [i\delta, (i+1)\delta]$  il numero di celle di lato  $\delta$  che intersecano graf  $f$  sono almeno  $\frac{1}{\delta} R_f [i\delta, (i+1)\delta]$  e al massimo  $2 + \frac{1}{\delta} R_f [i\delta, (i+1)\delta]$ . Si fa poi la somma su tutti i possibili intervalli.  $\square$

Grazie a questa proposizione si può enunciare il seguente corollario:

**Corollario 4.2.** *Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora valgono i due seguenti risultati:*

1. *Se  $f$  è tale che*

$$|f(t) - f(u)| \leq c|t - u|^{2-s},$$

*dove  $0 \leq t, u \leq 1$ , con  $c > 0$  e  $1 \leq s \leq 2$ , allora*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\text{graf } f) \leq \underline{\dim}_B(\text{graf } f) \leq \overline{\dim}_B(\text{graf } f) \leq s.$$

2. *Se esistono numeri  $c_0 > 0, \delta_0 > 0$  e  $1 \leq s < 2$  tali che per ogni  $t \in [0, 1]$  e  $0 < \delta \leq \delta_0$  esiste  $u$  per cui  $|t - u| \leq \delta$  e  $|f(t) - f(u)| \geq c\delta^{2-s}$ , allora*

$$\underline{\dim}_B(\text{graf } f) \geq s.$$

*Dimostrazione.* 1. Dall'ipotesi si ha  $R_f [t_1, t_2] \leq c|t_1 - t_2|^{2-s}$  se  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ . Si consideri allora la Proposizione 4.1, si ha  $m < (1 + \frac{1}{\delta})$  e quindi

$$N_\delta \leq 2m + \frac{1}{\delta} mc\delta^{2-s} \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \left(2 + c\frac{1}{\delta}\delta^{2-s}\right) \leq c_1\delta^{-s},$$

dove  $c_1$  non dipende da  $\delta$ . Si conclude poi considerando la definizione di misura box-counting.

2. Analogamente, l'ipotesi dà  $R_f [t_1, t_2] \geq c|t_1 - t_2|^{2-s}$ . Essendo  $m \geq \frac{1}{\delta}$  si ha

$$N_\delta \geq \frac{1}{\delta} mc\delta^{2-s} \geq c\delta^{-s}.$$

Si conclude poi come prima.  $\square$

Abbiamo allora trovato due risultati per stimare la dimensione box-counting dei grafici di alcune specifiche funzioni. Nel seguito li utilizziamo per dare un esempio di funzione il cui grafico sia un frattale.

**Esempio 4.3.** Sia  $\lambda > 1$  e  $1 < s < 2$ . Consideriamo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t).$$

Essa è nota come *Funzione di Weierstrass*, in quanto Weierstrass la utilizzò per fornire un esempio di funzione che fosse continua ma tale che in ogni punto non fosse differenziabile. Mostriamo che, per opportuni valori di  $\lambda$ , questa funzione ha un grafico di dimensione box-counting frattale, ossia:

$$\dim_B(\text{graf } f) = s.$$

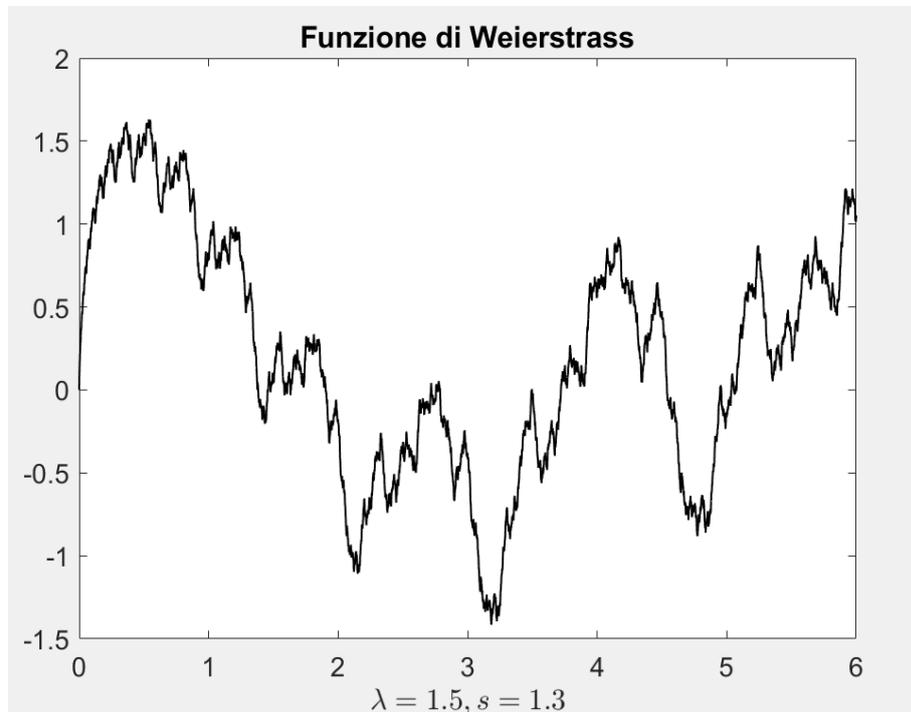


Figura 4.1: Grafico della Funzione di Weierstrass

Sia  $h$  tale che  $0 < h < \frac{1}{\lambda}$  e sia  $N$  il numero intero tale che  $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$ . Si vuole stimare  $|f(t+h) - f(t)|$  in modo da poter utilizzare il Corollario 4.2.

$$|f(t+h) - f(t)| \leq \sum_{k=1}^N \lambda^{(s-2)k} |\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t)| + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda^{(s-2)k} |\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t)|.$$

Utilizzando poi il fatto che  $|\sin(u) - \sin(v)| \leq |u - v|$  nel primo addendo e il fatto che  $|\sin(u)| < 1$  nel secondo, otteniamo la maggiorazione

$$|f(t+h) - f(t)| \leq \sum_{k=1}^N \lambda^{(s-2)k} \lambda^k h + \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2\lambda^{(s-2)k}.$$

Si hanno quindi due serie geometriche la cui somma dà il risultato

$$|f(t+h) - f(t)| \leq \frac{h\lambda^{(s-1)N}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}},$$

da cui

$$|f(t+h) - f(t)| \leq ch^{2-s},$$

con  $c$  che non dipende da  $h$ . Dal Corollario 4.2, punto 1, segue allora  $\overline{\dim_B}(\text{graf } f) \leq s$ . Per ottenere una limitazione dal basso spezziamo invece la somma in tre parti: i primi  $N-1$  termini, l' $N$ -esimo termine e i rimanenti. Otteniamo allora:

$$|f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N} (\sin(\lambda^N(t+h)) - \sin(\lambda^N t))| \leq \frac{\lambda^{(s-2)N-s+1}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}}.$$

Scegliamo  $\lambda$  grande abbastanza perchè il membro destro di quest'ultima disequazione sia minore di  $\frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N}$  per ogni  $N$  e siano poi  $\lambda^{-N} \leq \delta < \lambda^{-(N-1)}$ , con  $\delta < \frac{1}{\lambda}$ , e  $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N} < \delta$  in modo che  $|\sin(\lambda^N(t+h)) - \sin(\lambda^N t)| > \frac{1}{10}$ . Svolgendo i conti si avrà allora la stima

$$|f(t+h) - f(t)| \geq \frac{1}{20}\lambda^{s-2}\delta^{2-s},$$

da cui si può concludere che  $\underline{\dim_B}(\text{graf } f) \geq s$  grazie al Corollario 4.2, punto 2.

Abbiamo quindi mostrato il precedente risultato per la dimensione box-counting di un grafico. Possiamo allora sicuramente stimare la dimensione di Hausdorff dello stesso grafico ottenendo  $\dim_{\mathcal{H}}(\text{graf } f) \leq 2$ . Non esiste però una dimostrazione rigorosa del fatto che  $\dim_{\mathcal{H}}(\text{graf } f) = 2$ , nonostante ciò sia comunemente considerato vero almeno per molti valori di  $\lambda$ .

L'esempio precedente è il capostipite di un'ampia classe di funzioni il cui grafico è un frattale. Basta infatti considerare  $g$  una funzione periodica e definire funzioni del tipo

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{(s-2)k} g(\lambda^k t).$$

Si può dimostrare che per opportune classi di funzioni  $g$  vale ancora che  $\dim_B(\text{graf } f) = s$ .



# Bibliografia

- [1] Evans Lawrence C. ; Gariepy Ronald F.: *Measure theory and fine properties of functions. Studies in Advanced Mathematics.* – CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. viii+268 pp. ISBN: 0-8493-7157-0
- [2] Falconer Kenneth: *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications.* Second edition. – John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2003. xxviii+337 pp. ISBN: 0-470-84861-8
- [3] Gilardi Gianni: *Misure di Hausdorff e applicazioni* – <https://mate.unipv.it/gilardi/WEBGG/PSPDF/hausd.pdf>
- [4] Jürgens Hartmut; Peitgen Heinz-Otto; Saupe Dietmar: *Chaos and fractals. New frontiers of science.* Second edition. – Springer-Verlag, New York, 2004. xiv+864 pp. ISBN: 0-387-20229-3
- [5] Mandelbrot Benoit B.: *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension* – Science, New Series, Vol. 156, No. 3775. (May 5, 1967), pagine 636-638
- [6] Mandelbrot Benoit B.: *The fractal geometry of nature.* Schriftenreihe für den Referenten. [Series for the Referee] – W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1982. v+460 pp. ISBN: 0-7167-1186-9
- [7] Mattila Pertti: *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces.* (English summary) *Fractals and rectifiability.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 44. – Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xii+343 pp. ISBN: 0-521-46576-1; 0-521-65595-1