Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

# PRODOTTI INFINITI IN CAMPO COMPLESSO

Tesi di Laurea in
ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE I

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Coen Salvatore

Presentata da:
Tommassoni Daniela

Seconda Sessione
Anno Accademico 2010/2011

# Indice

# Introduzione

La nozione di prodotto infinito nacque non molto tempo dopo quella di serie. Già nel 1655 Wallis (1616 – 1703), nel tentativo di integrare funzioni della forma $(1 - x^a)x^b$ con a, b razionali giunse alla cosiddetta formula di Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

Naturalmente il tentativo ingenuo di estendere ai prodotti infiniti (convergenti) tale quale la teoria delle serie (convergenti) deve tenere conto del fatto che il gruppo moltiplicativo dei complessi non comprende lo zero cioè l'identità additiva. Tenendo conto della necessità di avere una definizione che mantenga la proprietà che il prodotto si annulli se e solo se uno degli (infiniti) fattori si annulla e della proprietà per cui la convergenza di un prodotto infinito deve essere una proprietà definitiva, si giunge a dire che se $\{a_n\}_n$ è una successione numerica allora il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge quando solo un numero finito di elementi può essere nullo e converge la successione dei prodotti parziali $p_n = a_1 \dots a_n$ a partire da un indice $n$ per il quale valga $a_j = 0$ per $j > n$.

Una volta esaminata brevemente la nozione di prodotto infinito numerico determinandone qualche criterio di convergenza, passiamo a considerare, nel secondo capitolo, i prodotti infiniti funzionali, occupandoci ancora di proprietà di convergenza.

Nel terzo capitolo studiamo alcune applicazioni dalla variabile complessa alla combinatoria, particolarmente usando alcuni prodotti infiniti funzionali. Iniziamo con alcune applicazioni della teoria delle serie di potenze al problema dei cassetti. Poi studiamo la funzione di Eulero, definita appunto mediante il classico prodotto infinito funzionale $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + z^n)$ e $q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^n)$ dimostrandone una classica caratterizzazione. Questo ci permette attraverso il valore $p(z) = \frac{q(z^2)}{q(z)}$ di dimostrare il teorema in cui per ogni intero $k$ siano $e_k$ e $o_k$ rispettivamente il numero di partizioni in numeri interi distinti positivi e negativi di $k$, allora $e_k = o_k$ se k non è nella forma $\frac{1}{2}(3n^2 + n)$. Altrimenti se $k = \frac{1}{2}(3n^2 + n)$ per un qualche $n$ intero, $e_k - o_k = (-1)^n$.

Infine, l'ultimo capitolo è dedicato all'introduzione delle funzioni Gamma di Eulero e Zeta di Riemann. Di queste, particolarmente della prima, vengono esposte alcune tra le proprietà più significative (le dimostrazioni sono solo parziali). Un cenno anche ad una introduzione diretta della funzione Gamma in campo reale.

# Capitolo 1

# CONVERGENZA DI PRODOTTI INFINITI NUMERICI

In questo capitolo introduciamo la nozione di prodotto infinito nel caso in cui i fattori generali siano numeri complessi. Esaminiamo quindi le loro prime proprietà (caratterizzazioni della convergenza).

**Definizione 1.1.**

*Sia* $A = \{a_n\}_{n\geq 1}$ *una successione di numeri complessi; è detto prodotto infinito della successione il seguente simbolo:*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

*chiamiamo* <u>*prodotto parziale k-esimo*</u> *e lo indichiamo con* $P_k = P_k(A)$, *il prodotto dei primi k elementi della successione cioè, per* $k = 1,2,..$ *poniamo*

$$P_k = \prod_{n=1}^{k} a_n.$$

In analogia con le definizioni date nella teoria delle serie potrebbe sembrare naturale adottare le seguenti definizioni (che dovremo in seguito correggere).

**Definizione (provvisoria) 1.2.**

*Si dice che (1.1) converge a $P \in \mathbb{C}$, ovvero che P è il valore del prodotto (1.1) quando*

$\lim_{k\to\infty} P_k = P$.

In realtà poiché $\mathbb{C}$ non è gruppo moltiplicativo per la presenza dello zero, siamo costretti ad usare definizioni più appropriate. E' naturale per un prodotto richiedere che valgano le seguenti condizioni:

**1)** La proprietà fondamentale degli zeri di un prodotto, ossia:

sia $\prod a_n$ un prodotto di infiniti fattori, il suo valore deve essere nullo se e solo se almeno uno dei fattori è nullo.

In altri termini se $\prod a_n$ è convergente e P è il suo valore, allora P = 0 ⇔ almeno uno dei fattori è nullo.

Nella definizione provvisoria data, questa proprietà non è necessariamente verificata.

**Contro esempio.**

Consideriamo il seguente prodotto:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Con la definizione precedentemente data si ha $P_k = \frac{1}{k!}$ e quindi il prodotto converge a zero senza che nessuno dei fattori sia nullo.

**2)** La proprietà di convergenza non deve variare se si sostituisce un numero finito di fattori con altri numeri complessi; ossia si deve avere una definizione che valga in modo definitivo.

Nella definizione provvisoria data, tale proprietà non è necessariamente verificata.

**Contro esempio.**

Consideriamo la successione $a_n = n$ con $n > 1$ e $a_1 = 0$ e come primo elemento prendo lo zero, la successione tende a zero. Questo per la definizione precedente converge, ma se sostituisco $a_1 = 0$ con $a_1 = 1$, non converge più.

Occorre quindi mutare la precedente definizione. A correzione della precedente definizione adottiamo la seguente

**Definizione 1.3.**

*Il prodotto (1.1) si dice convergente quando al più un numero finito di fattori sono zero e quindi la successione dei prodotti parziali, formati da fattori non nulli, ha limite finito diverso da zero.*

**Esercizio.** Se il prodotto converge allora il fattore generale tende ad 1.

Sia $P_k = \prod_{n=1}^{k} a_n$ il prodotto parziale della successione $a_n$ tale che converga a *P*; quindi $P_k \xrightarrow{k\to\infty} P$ e $P_{k-1} \xrightarrow{k\to\infty} P$ come sottosuccessione di $P_k$.

Vale $P_k = P_{k-1} a_k$ e passando al limite si ottiene

$$\lim_{k\to\infty} P_k = \lim_{k\to\infty} P_{k-1} \lim_{k\to\infty} a_k$$

da cui si ha, essendo $P \neq 0$,

$$P = P \lim_{k\to\infty} a_k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 1.$$

Per un prodotto infinito convergente, esiste *m* tale che per ogni $n \geq m$ si abbia $a_n \neq 0$.

Dunque, per tali valori di *n*, è definito il logaritmo principale $\log a_n$

e si ha passando al limite

$$\log \prod_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{\infty} \log a_n$$

con il primo membro convergente se e solo se il secondo membro converge.

**Proposizione 1.4.**

*Sia* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *una successione di numeri complessi; si pone* $P_m^k = \prod_{n=m}^{k} a_n$ *per* $k \geq m$. *Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

*i)* $\prod a_n$ *è convergente (secondo la definizione 1.3)*
*ii)* $\exists\ \bar{k}$ *tale che* $a_n \neq 0$ *per* $n > \bar{k}$ *ed* $\exists\ m$ *tale che* $lim_{k\to\infty} P_m^k$ $\exists$ *finito e non nullo.*
*iii)* $\exists\ m \in \mathbb{N}$ *tale che* $\sum_{n=m}^{\infty} log\, a_n$ *è convergente (dove è stata scelta la accezione principale del logaritmo).*

Dimostriamo che $i)$ $\Rightarrow$ *ii)*. Sia (1.1) convergente secondo la definizione 1.3; quindi sia $\bar{k}$ l'indice massimo di fattori nulli. Per $n > \bar{k}$, vale che $a_n \neq 0$.

Definiamo $P_m^k = \prod_{n=m}^{k} a_n$ ; $\forall\ m > \bar{k}$ il prodotto parziale convergente per la definizione 1.3; ma allora abbiamo provato *ii).*

Viceversa, $ii) \Rightarrow i)$. Poiché secondo la *i)* ho convergenza, allora esiste un indice $\bar{k}$, massimo, tale per cui tutti gli altri fattori più grandi di $\bar{k}$ sono diversi da zero; quindi nel prodotto parziale $\exists\ m$ tale che la successione dei prodotti parziali con $m > \bar{k}$ ha limite diverso da zero.

Dimostriamo ora che *ii)* ⇒ *iii)*. Per ipotesi, per un opportuno m ∈ ℕ, esiste finito e diverso da zero

$$\prod_m := lim_{k\to\infty} P_m^k.$$

Per $z \neq 0$ definisco $Log\, z := \ log\,|z| + iArg\, z,$ dove:

$$arg\prod_m - \pi < Arg\ z < arg\prod_m + \pi$$

e $arg\prod_m$ è l'accezione principale dell'argomento di $\prod_m$.

Per ogni k ∈ ℕ esiste $h_k \in \mathbb{Z}$ per cui

$$\sum_{n=m}^{k} \log a_n = \sum_{n=m}^{k} \mathrm{Log}\, a_n + 2\pi i h_k.$$

È sufficiente, quindi, mostrare che esiste finito il

$$\lim_{k\to\infty} (\ \mathrm{Log}\, P_m^k \ +\ 2\pi i h_k).$$

Per ciò si proverà che da un certo indice $k$ in poi $h_k$ si mantiene costante. Sappiamo che $\lim_{k\to\infty} a_k\ = 1$ (vedi esercizio); ne segue che esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ e $\mathrm{Log}\,|a_n| < \frac{\pi}{2}$ per $n \geq \bar{n}$; inoltre, dalla continuità del logaritmo principale nel punto $\prod_m$, si deduce la convergenza della successione $\{\mathrm{Log}\, a_m^k\}_{m\in\mathbf{N}}$, quindi $\bar{n}$ può essere scelto anche in modo da aversi

$$|\ \mathrm{Log}\, a_m^{n_1} -\ \mathrm{Log}\, a_m^{n_2}\ | < \frac{\pi}{2}\ \ \forall n_1, n_2 \geq \bar{n}.$$

Per $n > \bar{n}$ vale, perciò, la disuguaglianza

$$2\pi|h_{n+1} - h_n| \leq |\, log\; a_{n+1}| + |\mathrm{Log}\, a_m^n \; - \mathrm{Log}\, a_m^{n+1}| \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

da cui $h_n = h_{n+1}$ $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $n > \bar{n}$.

Viceversa $iii) \Rightarrow ii)$. Infatti basta osservare che si ha

$$\lim_{k\to\infty} P_m^k = \lim_{k\to\infty} e^{\sum_{m=n}^{k} \log a_n} = e^{\sum_{m=n}^{\infty} \log a_n} \neq 0. \quad \blacksquare$$

Quanto visto rende naturale scrivere i prodotti infiniti come segue

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \tag{1.2}$$

se questo prodotto converge il suo termine generale al limite per $n \to \infty$ vale 1 (vedi esercizio).

Così la condizione che $a_n \to 0$ è necessaria per la convergenza ma non sufficiente, infatti il fatto che la successione di fattori di (1.2) tenda ad 1 non implica necessariamente che il prodotto infinito converga.

**Esempio.** Consideriamo $a_n := \frac{1}{n}$ con $n = 1{,}2, ....$ allora

$$P_n = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

tale prodotto è divergente perché la serie armonica diverge.

**Teorema 1.5.**

*Un prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ con fattori non nulli converge se e solo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, dove $b_n := log(1 + a_n)$ (valore principale del logaritmo).*

Come abbiamo già osservato, condizione necessaria per la convergenza del prodotto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ o della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + a_n)$ è che $a_n \to 0$.

Ora se $a_n \to 0$, il $\mathrm{Log}(1 + a_n)$ si comporta asintoticamente come $a_n$.

Infatti

$$\log(1 + a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + \frac{a_n^3}{3} - \cdots = a_n\left(1 - \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^3}{3} - \cdots\right),$$

e con $|a_n| < \frac{1}{2}$ vale che

$$\frac{1}{2}|a_n| = |a_n|\left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \cdots\right) < |\log(1 + a_n)| < |a_n|\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) = \frac{3}{2}|a_n|.$$

Di conseguenza $\sum|\mathrm{Log}(1 + a_n)|$ converge e diverge simultaneamente con $\sum|a_n|$.

**Definizione 1.6.**

*Il prodotto infinito*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$$

*si dice che è assolutamente convergente quando la serie*

$$\sum Log(1 + a_n)$$

*converge assolutamente .*

Quindi dal teorema 1.5 abbiamo ottenuto e provato il seguente:

**Teorema 1.7.**

*Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza assoluta del prodotto*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$$

*è la convergenza assoluta della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

# Capitolo 2

# CONVERGENZA DI PRODOTTI INFINITI FUNZIONALI

Analogamente a quanto avviene per le serie l'utilità della nozione di prodotto infinito si manifesta principalmente per i prodotti infiniti funzionali. In questo capitolo ne studieremo alcune proprietà elementari che saranno utili in seguito.

Poniamo ora l'attenzione su prodotti infiniti dove i fattori sono funzioni su un aperto A di $\mathbb{C}$ e si rappresentano come segue:

$$\prod_{n=1}^{\infty}[1+u_n(z)\,] \tag{2.1}$$

Analizziamo ora la convergenza uniforme dandone una definizione:

**Definizione 2.1.**

*Sia U* $\subseteq \mathbb{C}$*. Una successione* $f_n$ *di funzioni da U a* $\mathbb{C}$ *converge uniformemente ad una funzione f se,* $\forall \varepsilon > 0$*, esiste* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *con* $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ *per ogni* $z \in U$.

La teoria della convergenza uniforme può essere estesa alla serie della forma:

$u_1(z) + u_2(z) + \cdots$

A questo proposito enunciamo due interessanti teoremi sulla convergenza uniforme di serie numeriche e serie di funzioni (per la dimostrazione si veda [Titcmarsh]).

**Teorema 2.2. (Abel)**

*Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*(con $a_n \in \mathbb{R}$ e $\forall\, n > 1$ ) converge e ha valore s, allora la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*è uniformemente convergente per 0 $\leq x \leq 1$, e*

$$\lim_{x\nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s.$$

Il teorema precedente non si inverte, ma per una parziale inversione si può usare il seguente teorema:

**Teorema 2.3. (Tauber)**

*Se $a_n$= o($1/n$), e*

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \to s$$

*per x $\to 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge al valore s.*

Ritornando alla definizione precedente, ricordiamo che può succedere che una successione di funzioni continue converga punto per punto ad una funzione su un compatto senza che tale funzione sia continua.

**Esempio**. Considero la serie

$$a_n(t) = \frac{1}{1+nt}$$

con $0 \leq t \leq 1$; dunque $a_n(t)$ è una successione di funzioni continue che tende puntualmente ad un limite discontinuo. Per $t > 0$ $a_n(t)$ tende a zero per $n \to \infty$; ma se $t = 0$, $a_n(t) = 1$ per ogni valore di $n$ e quindi il suo limite è 1.

In conclusione la somma della serie è discontinua così la serie non può essere uniformemente convergente.

**Definizione 2.4.**

*Sia data una successione $u_n(z)$ di funzioni definite su $U \subset \mathbb{C}$. Il prodotto (2.1) converge uniformemente su U quando la sequenza dei prodotti parziali*

$$\{P_n(z)\} = \{[1 + u_1(z)] \dots [1 + u_n(z)]\}$$

*è uniformemente convergente su U.*

Per quanto detto fino ad ora è interessante considerare il seguente:

**Teorema 2.5.**

*Sia U un dominio di $\mathbb{C}$. Sia $u_n(z)$ una successione di funzioni analitiche su U tale che $u_n(z) \neq -1$ $\forall\, z \in U$.*

*Supponiamo la seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} log[1 + u_n(z)], \tag{2.2}$$

*dove il logaritmo è il logaritmo principale, convergere uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di U e supponiamo che ogni termine della successione $\{u_n(z)\}$ sia analitico su U. Allora il prodotto infinito (2.1) converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di U ad una funzione analitica non nulla $f(z)$.*

*Dimostrazione*. Prendiamo $f(z) = \exp\{\sum_{n=1}^{\infty} \log[1 + u_n(z)]\}$.

Sia W un sottoinsieme compatto di U, sia $M = \max_{z \in W} |f(z)|$ e sia $\varepsilon$ un numero positivo arbitrario più piccolo di M.

Poiché la (2.2) è convergente su W, c'è un intero $m_\varepsilon > 0$ tale che

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \log[1 + u_k(z)] \right| < \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{1}{2}$$

$\forall\, n > m_\varepsilon$ e $z \in$ W.

Quindi, poiché $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$ con $z \in \mathbb{C}$ troviamo che

$$\left| f(z) - \prod_{k=1}^{n} [1 + u_n(z)] \right| =$$

$$= \left| exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \log[1 + u_k(z)] \right\} - exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \log[1 + u_k(z)] \right\} \right|$$

$$= \left| exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \log[1 + u_k(z)] \right\} \right| \left| 1 - exp\left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} -\log[1 + u_k(z)] \right\} \right|$$

$$\leq M \left[ \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{2!}(\frac{\varepsilon}{2M})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{\varepsilon}{2M})^3 + \cdots \right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left[ 1 + \frac{1}{2!}\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{3!}(\frac{\varepsilon}{2M})^2 + \cdots \right] < \frac{\varepsilon}{2}\left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) = \varepsilon$$

$\forall n > m_\varepsilon$, $z \in$ W; il prodotto infinito (2.1) è uniformemente convergente su W. ■

**Teorema 2.6.**

*Data una successione di funzioni $\{f_n(z)\}$ con n = 1,2,... definite in un dominio D di $\mathbb{C}$ se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$$

*è uniformemente convergente sui compatti, allora il prodotto*

$$\prod_{n=1}^{\infty} |1 + f_n(z)|$$

*converge uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa su D.*

*Dimostrazione*. Fissiamo un compatto K, sottoinsieme di D.

Come nel caso dei prodotti numerici, è facile dedurre che al più solo un numero di fattori $(1 + f_n)$

può avere zeri.

Infatti, siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\mathrm{z})|$$

converge uniformemente su K, esisterà un $n_1$intero positivo tale che ∀ n > $n_1 e$ , si ha $|f_n(\mathrm{z})| < 1$.

Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia N($\varepsilon$) intero positivo tale che

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(\mathrm{z})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall z \in K.$$

Dunque la serie

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \log[1 + f_n(z)]$$

è uniformemente convergente su K.

Sia ora

$$\mathrm{S(z)} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \log[1 + u_n(z)]$$

dato che la convergenza della serie è uniforme e K è compatto, S(z) è certamente continua.

Ora considero

$$P_N(z) = \exp\left(\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \log[1 + f_n(z)]\right).$$

Dal momento che su ogni compatto la funzione $e^z$ è uniformemente continua, ne segue che $P_N$(z) converge uniformemente a $e^{S(z)}$. ■

Concludiamo questo secondo capitolo con la definizione di funzione meromorfa e di derivata logaritmica:

**Definizione 2.7.**

*Si definisce funzione meromorfa su un sottoinsieme aperto D di* $\mathbb{C}$ *una funzione che è olomorfa su tutto D ad esclusione di un insieme di punti isolati che siano poli della funzione.*

Per il seguito è opportuno ricordare la definizione

**Definizione 2.8.**

*Sia A un dominio di $\mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$. Sia f una funzione meromorfa su A non identicamente nulla. Allora la funzione meromorfa su A*

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

*si dice che è la derivata logaritmica di f su A.*

*Sia $z_0 \epsilon A$ e f continua in $z_0$, f($z_0$) $\neq 0$, allora ha senso considerare il $log(f(z_0))$ e vale*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = d\,log\big(f(z)\big).$$

# Capitolo 3

# PRODOTTI INFINITI E PRIME APPLICAZIONI DI TEORIA DEI NUMERI

Mostreremo come sia possibile esplicitare le soluzioni del problema dei cassetti in certi casi particolari mediante l'uso elementare di serie di potenze. Introdurremo, poi, alcune funzioni classiche definite come valori di opportuni prodotti infiniti che ci consentiranno di trovare alcuni risultati di teoria dei numeri di tipo combinatorio.

## 3.1 Problema dei cassetti

Dunque, prima di procedere, è necessario e opportuno fare un piccolo approfondimento, in particolare analizzeremo il cosiddetto "problema dei cassetti". Di fatto si tratta di contare il numero di modi in cui alcuni oggetti possono essere ripartiti. La teoria delle serie di potenze spesso si rivela uno strumento efficace per risolvere problemi combinatori.

Sarà discussa di seguito un'applicazione.

**Definizione 3.1.**

*Il problema dei cassetti consiste nel domandarsi in quanti modi p oggetti distinti possono essere messi in n cassetti, se ogni cassetto può contenere al più un oggetto.*

Sia ora $c_p$ il numero dei modi possibili per sistemare $p$ oggetti in $n$ cassetti.

E' chiaro che $c_p > 0$ solo se $0 \leq p \leq n (c_0 := 1)$ e che $c_p = 0$ per $p > n$.

**1)** Definiamo $\epsilon_m (m = 1,2, \dots, n)$ come segue:

$$\epsilon_m := \begin{cases} 1, se\ l'm - esimo\ cassetto\ contiene\ un\ oggetto, \\ 0, se\ l'm - esimo\ cassetto\ non\ contiene\ oggetti. \end{cases}$$

$\epsilon_m$ corrisponde alla n-upla $(\epsilon_1 \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ le cui componenti sono *1* oppure *0* fino a raggiungere sommati il valore di $p$.

Il numero totale di modi, $c_p$, chiaramente equivale alla somma dei numeri della n-upla $(\epsilon_1 \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$.

Consideriamo la serie di potenze nell'indeterminata *x*

$$F(x) := c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

Se questa serie ha un disco di convergenza positivo, definisce sul disco di convergenza una funzione analitica $f$, $f$ è chiamata <u>funzione generatrice</u> della successione $\{c_p\}$.

Da quanto detto sopra $c_p$ è il numero di fattorizzazioni della forma

$$x^p = \prod_{i=1}^{n} x^{\epsilon_i}, \tag{3.1}$$

dove gli esponenti $\epsilon_i$ sono 0 oppure 1 e $\sum \epsilon_i = p$.

Ma questo, a sua volta, è il coefficiente *p-esimo* del prodotto

$$n - volte \begin{cases} (1 + x) \\ (1 + x) \\ \vdots \\ (1 + x) \end{cases} = (1 + x)^n$$

così la funzione generatrice è

$$f(x) = (1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \cdots + \binom{n}{n} x^n,$$

e segue che

$$c_p = \binom{n}{p}.$$

Abbiamo così dimostrato che se ho $n$ cassetti e $p$ oggetti, questi ultimi possono essere ripartiti in $\binom{n}{p}$ modi possibili.

**2)** Cambiamo ora per un attimo le condizioni sul “problema dei cassetti”. Ogni cassetto non può contenere più di due oggetti. Il numero $c_p$ di modi in cui sistemare $p$ oggetti con queste nuove regole, evidentemente equivale al numero di vettori $(\epsilon_1\epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ dove ogni $\epsilon_i$ può valere 0, 1, 2 e $\sum \epsilon_i = p$.

Segue che i coefficienti della funzione generatrice per il nuovo problema, indicando con

$$f(x) := \sum_{p=0}^{\infty} c_p x^p,$$

la nuova funzione generatrice, sono pari al numero delle fattorizzazioni di

$$x^p = \prod_{i=1}^{n} x^{\epsilon_i},$$

dove gli $\epsilon_i$ sono 0, 1 oppure 2 e $\sum \epsilon_i = p$.

Ora tali numeri sono i coefficienti *p-esimi* del prodotto

$$n - volte \begin{cases} (1 + x + x^2) \\ (1 + x + x^2) \\ \quad\vdots \\ (1 + x + x^2) \end{cases} = (1 + x + x^2)^n.$$

Così

$$f(x) = (1 + x + x^2)^n.$$

Abbiamo così mostrato l’uso che può avere la teoria delle serie di potenze nel caso che ogni cassetto non possa contenere più di due oggetti. Per una soluzione finale si veda [Henrici], teorema 1.6c (formula di J. C. P. Miller).

**3)** Una soluzione esplicita è inoltre possibile se ammettiamo che ogni cassetto possa contenere un numero arbitrario di oggetti. Allora la funzione generatrice è

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^n = (\frac{1}{1 - x})^n,$$

e troviamo

$$c_p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

### 3.2 Due risultati utili

Per una migliore comprensione di quanto verrà trattato nel prossimo paragrafo, vediamo due interessanti teoremi.

**Teorema 3.2a.**

*Siano* $f_0, f_1, f_2$ ... *funzioni definite per* $|Z| < \rho$, $\rho > 0$, *rispettivamente come somma dalle serie di potenze convergenti*

$$f_n(Z) := a_{n,0} + a_{n,1}Z + a_{n,2}Z^2 + \cdots$$

*Per ogni* $\rho_1 < \rho$ *la successione* $\{f_n(Z)\}$ *sia uniformemente convergente sull'insieme* $|Z| \leq \rho_1$. *Il limite*

$$a_m := \lim_{n\to\infty} a_{n,m}\,, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

*esiste per ogni m e la funzione limite* $f := lim_{n\to\infty} f_n$ *per* $|Z| \leq \rho$ *è rappresentata da*

$$f(Z) = a_0 + a_1Z + a_2Z^2 + \cdots,$$

*ed è analitica per* $|Z| < \rho$ .

*Dimostrazione.* Sia $\epsilon > 0$ dato e $\rho_0 < \rho$ scelto arbitrariamente. Dalla convergenza uniforme esiste un $N = N(\epsilon, \rho_0)$ tale che per ogni $k > N$ e ogni $Z$ tale che $|Z| \leq \rho_0$

$$|f_k(Z) - f(Z)| < \epsilon; \tag{3.3}$$

così, se $n > N$,

$$|f_n(Z) - f_k(Z)| =< 2\epsilon.$$

Le disuguaglianze di Cauchy applicate alle funzioni $f_n - f_k$ danno

$$|a_{n,m} - a_{k,m}| < \frac{2\epsilon}{\rho_0^m} \tag{3.4}$$

per ogni $m = 0, 1, 2, \ldots$ Poiché $\epsilon > 0$ era arbitrario, questo mostra che per ogni $m$ fissato la successione $\{a_{n,m}\}$ è una successione di Cauchy di numeri complessi. Allora i limiti di (3.2) esistono tutti.

Ora sia $|Z_1| = \rho_1 < \rho_0$. Dobbiamo mostrare che la serie *F(Z)* converga per $Z = Z_1$ e che la sua somma è $f(Z_1)$; $\rho_0$ e $\rho_1$ possono essere scelti arbitrariamente vicini a $\rho$, questo proverà la seconda parte dell'enunciato del teorema 3.1.

Ora, fissato $k > N$, poniamo

$$b_m := a_m - a_{k,m}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots;$$

con $n \to \infty$ in (3.4) si ottiene

$$|b_m| \le \frac{2\epsilon}{\rho_0^m}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots$$

così

$$\left|a_m Z_1^m - a_{k,m} Z_1^m\right| \le |b_m||Z_1|^m \le 2\epsilon \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^m.$$

Ne segue che la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(a_m Z_1^m - a_{k,m} Z_1^m\right)$$

converge e il suo valore non supera

$$\frac{2\epsilon}{1 - \rho_1/\rho_0}.$$

Poiché la serie

$$F_k(Z_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{k,m} Z_1^m$$

sappiamo essere convergente, ne segue la convergenza di $F(Z_1)$ e

$$|F(Z_1) - F_k(Z_1)| \le \frac{2\epsilon}{1 - \rho_1/\rho_0};$$

e dalla (3.3), in quanto $|Z_1| < \rho_0$,

$$|f(Z_1) - F_k(Z_1)| < \epsilon \qquad \blacksquare$$

E' ben noto il seguente teorema

**Teorema 3.2b.**

*Siano $f_0, f_1, f_2, \dots$ funzioni analitiche sullo stesso insieme aperto S di $\mathbb{C}$ e sia la successione $\{f_n\}$ uniformemente convergente sui compatti di S.*

*Allora la funzione limite $f$ è analitica su S. Inoltre la successione delle derivate $\{f_n'\}$ converge a $f'$ uniformemente sui compatti di S.*

### 3.3 Particolari prodotti infiniti

Sulla base delle considerazioni fatte nei precedenti paragrafi, consideriamo ora i seguenti prodotti infiniti funzionali:

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + z^n) \qquad\qquad q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^n). \tag{3.5}$$

Quanto è stato precedentemente osservato per la convergenza di prodotti infiniti numerici e precisamente nel teorema 1.7, il fatto che il prodotto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ converga uniformemente e assolutamente è condizione necessaria e sufficiente che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga uniformemente e assolutamente; la convergenza della serie geometrica, ossia $\sum(-z^n)$ e $\sum(z^n)$, ci assicura che entrambi i prodotti di (3.5) convergono uniformemente in ogni disco con $|z| \leq \rho$ dove $\rho < 1$.

Per questo motivo, i valori di tali prodotti rappresentano delle funzioni analitiche e quindi per $|z| < 1$ indichiamo come segue i loro sviluppi di Taylor nell'origine.

NOTAZIONE. *Definiamo le successioni* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *e* $\{b_n\}_{n\geq 0}$ *come segue*

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad\qquad q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.$$

Poiché i prodotti non hanno fattori nulli, sono diversi da zero quando $|z| < 1$. Così anche i loro reciproci sono funzioni analitiche per $|z| < 1$.

NOTAZIONE. *Definiamo inoltre la successione* $\{c_n\}_{n\geq 0}$ *come segue*

$$\frac{1}{q(z)} := \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Vogliamo mostrare che le successioni definite sopra hanno particolari significati combinatori.

Consideriamo il seguente prodotto parziale n-esimo

$$P_n(z) := \prod_{k=1}^{n}(1 + z^k).$$

Questo è un polinomio di grado $\frac{1}{2}n(n + 1)$ e possiamo scriverlo come serie assumendo $a_k^n = 0$ per $k > \frac{(1+n)n}{2}$, così

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^{(\infty)} a_k^{(n)} z^k,$$

dove la notazione di infinito tra parentesi sta ad indicare che considero nulli tutti i coefficienti per $k$ abbastanza grande.

Quindi per i teoremi visti nel paragrafo 3.2

$$P_n(z) \to P(z)$$

uniformemente sui compatti di $|z| < 1$, $\forall$ $k$ = *0,1,…*

$$a_k = \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}.$$

Confrontando i coefficienti di *1, z, .., $z^n$* nella relazione

$$P_{n+1}(z) = \sum_{k=0}^{(\infty)} a_k^{(n+1)} z^k = (1 + z^{n+1}) \sum_{k=0}^{(\infty)} a_k^{(n)} z^k,$$

notiamo che $a_k^{(n+1)} = a_k^{(n)}$, con $k$ = *0, 1,.., n.*

Così per ogni valore di $k$ fissato i coefficienti $a_k^{(n)}$ non cambiano una volta raggiunto il valore di $k$ e troviamo

$$a_k = a_k^{(k)},\ k = 0, 1,..$$

Così abbiamo, per esempio,

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^3) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4^{(3)} z^4 + \cdots$$

In seguito a questa attenzione, per quanto visto nel paragrafo 3.1, possiamo dire che <u>$a_k$ per $k > 0$ equivale proprio al numero di modi in cui l'intero $k$ può essere scritto come somma di interi positivi distinti.</u>

**Esempio1.** Calcolando esplicitamente gli $a_k$ segue

$1 = 1$ con $a_1 = 1$

$2 = 2$ con $a_2 = 1$

$3 = 3$ e 3 = 1 + 2 con $a_3 = 2$.

**Esempio2.**

6 = 6

= 5 + 1

= 2 + 4

$$= 1 + 2 + 3 \qquad \text{con } a_6 = 4.$$

Ponendo

$$q_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+z^k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{(\infty)} b_k^{(n)} z^k,$$

in modo analogo troviamo $b_k = b_k^{(k)}$, con *k = 0, 1, 2,..*

Diamo ora un'interpretazione combinatoria di quanto scritto sopra.

<u>Per $k > 0$, $b_k$ rappresenta l'eccesso del numero di modi in cui $k$ può essere scritto come somma di numeri pari di interi positivi distinti rispetto al numero di modi in cui può essere scritto come somma di numeri dispari di interi positivi distinti.</u>

Esiste anche una interpretazione combinatoria per i $c_k$.

Sviluppiamo $\frac{1}{q(z)}$ nella serie geometrica:

$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots} = (1 + z + z^2 + ..)(1 + z^2 + z^4 + ..)(1 + z^3 + z^6 + ..) \ldots$

Moltiplicando le serie di destra vediamo che solo i primi $k-1$ fattori possono dare contributi ai coefficienti di $z^k$ .

Questo viene rivisto ponendo

$$\frac{1}{q_n(z)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-z^k} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} z^k$$

e considerando la relazione

$$\frac{1}{q_{n+1}(z)} = \frac{1}{q_n(z)(1-z^{n+1})} = \frac{1}{q_n(z)}(1 + z^{n+1} + ..)$$

ciò implica come prima che $c_k^{(n+1)} = c_k^{(n)}$, con *k = 0, 1,.., n.*

Ogni contributo per i coefficienti $c_k$ deriva dal prodotto della forma

$$z^{n_1 \cdot 1} \cdot z^{n_2 \cdot 2} \cdot \ldots \cdot z^{n_k \cdot k}$$

dove gli $n_i$ sono interi non negativi tali che

$$n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + .. + n_k \cdot k = k \text{ (con } n_i \geq 0);$$

questa si chiama partizione di $k$.

Poiché c'è corrispondenza biunivoca tra gli $z^{n_i \cdot i}$ e le partizioni di $k$ , $c_k$ rappresenta proprio il numero di partizioni possibili per $k$.

La funzione $\pi(k) := c_k$ è chiamata funzione di partizione.

**Esempio.**

6 = 6

= 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3

= 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2

= 3 + 1 + 1 +1 = 2 + 2 + 1 + 1

= 2 + 1 + 1 + 1 + 1

= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

Ossia ha 11 partizioni, quindi $c_6 = 11$.

Vediamo ora come relazionare tra loro le funzioni di (3.5); per fare questo inseriamo un teorema di particolare importanza:

**Teorema 3.3a. (Eulero)** *Con le notazioni precedenti*

$$p(z) = \frac{q(z^2)}{q(z)}, \qquad |z| < 1 \tag{3.6}$$

*cioè*

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\ldots = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)\ldots} \tag{3.7}$$

*Cenno di dimostrazione.* Vale che

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right) = \frac{1}{1-z}$$

uniformemente su ogni insieme compatto contenuto in $|z| < 1$.

Limitandoci a delineare la dimostrazione nel caso puntuale.

Dovrebbe essere

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\ldots = \frac{1}{(1-z)},$$

equivalentemente

$$(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\ldots = 1.$$

Si tratta di dimostrare

$$(1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)\ldots = 1$$

cioè

$$(1-z^4)(1+z^4)(1+z^8)\ldots = 1$$

e così via.

Analogamente

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^{2\cdot 2})\ldots = \frac{1}{(1-z)}$$

$$(1+z^3)(1+z^{2\cdot 3})(1+z^{4\cdot 3})\ldots = \frac{1}{(1-z^3)},$$

$$(1+z^5)(1+z^{2\cdot 5})(1+z^{4\cdot 5})\ldots = \frac{1}{(1-z^5)}. \quad \blacksquare$$

Ragionando come sopra, notiamo che il coefficiente di $z^k$ dell'espressione

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^5)..}$$

equivale al numero di partizioni di $k$ in interi dispari.

Considerando l'interpretazione combinatoria della funzione *p(z)* per il teorema di Eulero, <u>il numero delle partizioni di $k > 0$ sommando interi positivi distinti eguaglia il numero delle partizioni in numeri interi dispari (non necessariamente distinti)</u>.

**Esempio.**

Per $k = 9$ ho la seguente partizione con interi distinti

$$
\begin{aligned}
9 &= 1+2+6 \\
&= 1+3+5 \\
&= 2+3+4 \\
&= 1+8 \\
&= 2+7 \\
&= 3+6 \\
&= 4+5 \\
&= 9,
\end{aligned}
$$

così $a_9 = 8$.

Inoltre 9 ha tutte e sole le partizioni in numeri dispari seguenti,

$$
\begin{aligned}
9 &= 1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1+1+3 \\
&= 1+1+1+3+3 \\
&= 3+3+3 \\
&= 1+1+1+1+5 \\
&= 1+3+5 \\
&= 1+1+7 \\
&= 9
\end{aligned}
$$

.

### 3.4. Un risultato di Jacobi

Concludiamo questo terzo capitolo introducendo il teorema di Jacobi e una sua interessante applicazione.

**Teorema 3.4a. (Jacobi)**

*Sia*

$$
g(z,t) := \prod_{n=1}^{\infty} (1+z^{2n-1}t)(1+z^{2n-1}t^{-1}) \tag{3.8}
$$

*Per ogni* $t \neq 0$, $g(z,t)$ *definisce una funzione analitica per* $|z| < 1$ *e per* $|z| < 1$, *definisce una funzione in t analitica per* $0 < |t| < \infty$. *Come funzione di t ha serie di Laurent*

$$g(z,t) = \frac{1}{q(z^2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{k^2}\, t^k \tag{3.9}$$

*Dimostrazione.* L'analiticità deriva dal teorema 2.6, perché per $t \neq 0$ il prodotto (3.8) converge uniformemente per $|z| \leq \rho$ con $\rho < 1$, e per z fissato,$|z| < 1$, uniformemente in $\rho \leq |t| \leq \rho^{-1}$ per ogni $\rho \in (0,1)$. Per la convergenza uniforme su $|t| = 1$, per esempio, segue che i coefficienti di Laurent (nella t) nella funzione

$$g(z,t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k t^k$$

si ottengono passando al limite con $n \to \infty$ nei coefficienti di Laurent del prodotto ennesimo parziale di $g(z,t)$,

$$g_n(z,t) := \prod_{k=1}^{n} (1 + z^{2k-1}t)(1 + z^{2k-1}t^{-1})$$

dove con le stesse notazioni usate in precedenza

$$:= \sum_{k=-n}^{n} h_k^{(n)} t^k.$$

Calcoliamo $h_k^{(n)}$ esplicitamente. Poiché $g(z,t) = g(z,-t)$ abbiamo $h_k^{(n)} = h_{-k}^{(n)}$ ed è sufficiente determinare questi coefficienti per $k = 0, 1, \dots, n$.

Evidentemente

$$h_n^{(n)} = z^{1+3+5+\cdots+(2n-1)} = z^{n^2}. \tag{3.10}$$

Dalla relazione funzionale

$$g_n(z, z^2 t) := \prod_{k=1}^{n} (1 + z^{2k-1}t)(1 + z^{2k-3}t^{-1})$$

$$= \frac{1 + z^{2n+1}t}{1 + zt}\, \frac{1 + z^{-1}t^{-1}}{1 + z^{2n-1}t^{-1}}\, g_n(z,t)$$

$$= \frac{1 + z^{2n+1}t}{zt + z^{2n}}\, g_n(z,t)$$

troviamo

$$(zt + z^{2n}) \sum_{k=-n}^{n} h_k^{(n)} z^{2k} t^k = (1 + z^{2n+1} t) \sum_{k=-n}^{n} h_k^{(n)} t^k,$$

e così, confrontando i coefficienti di $t^k$,

$$z^{2k+2n} h_k^{(n)} + z^{2k-1} h_{k-1}^{(n)} = h_k^{(n)} + z^{2n+1} h_{k-1}^{(n)},$$

$$h_{k-1}^{(n)} = \frac{1 - z^{2k+2n}}{z^{sk-1}(1 - z^{2n-2k+2})} h_k^{(n)},$$

$k = 1, 2, \ldots$ e così usando la (3.10),

$$h_k^{(n)} = \frac{(1 - z^{2k+2n+2})(1 - z^{2k+2n+4}) \ldots (1 - z^{4n})}{(1 - z^2)(1 - z^4) \ldots (1 - z^{2n-2k})} z^{k^2}.$$

In termini di prodotto parziale

$$q_n(z) := \prod_{k=1}^{n} (1 - z^k)$$

di $q(z), h_k^{(n)}$ può essere espressa come segue:

$$h_k^{(n)} = \frac{q_{2n}(z^2)}{q_{n+k}(z^2) q_{n-k}(z^2)} z^{k^2}.$$

Se $k$ è fissato e $n \to \infty$, ogni prodotto parziale tende a $q(z^2)$, e semplificando otteniamo

$$h_k = \lim_{n \to \infty} h_k^{(n)} = \frac{1}{q(z^2)} z^{k^2}$$

come richiesto. ■

Consideriamo ora alcune conseguenze del teorema di Jacobi; moltiplicando la (3.9) per $q(z^2)$ otteniamo

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2n-1} t)(1 + z^{2n-1} t^{-1})(1 - z^{2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{n^2} t^n.$$

Sia $0 \leq x < 1$, e ponendo $z = x^{3/2}$, $t := -x^{1/2}$ risulta

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{3n-1})(1 - x^{3n-2})(1 - x^{3n}).$$

Così abbiamo provato che

$$q(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^{(3n^2+n)/2} \tag{3.11}$$

se $z$ è reale nonnegativo e $z < 1$.

Quindi la serie di destra rappresenta una funzione analitica per $|z| < 1$.

Poiché anche $q(z)$ è analitica per $|z| < 1$, la serie sulla destra è lo sviluppo di Maclaurin di $q$ e la (3.11) vale per ogni $z$ tale che $|z| < 1$.

Scritta per esteso l'equazione si legge $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)$ ...

$$= 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + \cdots$$

e, con le notazioni usate nel paragrafo precedente, abbiamo

$$b_k = \begin{cases} (-1)^n, se\ k = \frac{1}{2}(3n^2 + n) & con\ n\ intero; \\ 0, & altrimenti. \end{cases}$$

Abbiamo visto il seguente teorema

**Teorema 3.4b.**

*Per ogni intero $k > 0$, siano $e_k$ e $o_k$ il numero di partizioni in numeri interi distinti positivi e negativi di k. Se k non è nella forma $\frac{1}{2}(3n^2 + n)$, allora $e_k = o_k$.*

*Se $k = \frac{1}{2}(3n^2 + n)$ per un qualche n intero, allora $e_k - o_k = (-1)^n$.*

**Esempio.**

Le partizioni per $k$ = *7* sono

$$\begin{array}{ll} 7 = 7 & = 1 + 6 \\ \quad = 1 + 2 + 4 & = 2 + 3 \\ & = 3 + 4 \end{array}$$

Ci sono tre partizioni in numero pari di termini e una in meno in numero dispari di termini, infatti

$$7 = \frac{1}{2}(3 \cdot 2^2 + 2).$$

# Capitolo 4

# CENNO A FUNZIONI SPECIALI

In questo capitolo introduciamo alcune funzioni a variabile complessa che storicamente si sono dimostrate utili in svariati campi della scienza. Enunceremo le definizioni ed alcuni dei risultati principali limitandoci a qualche dimostrazione.

### 4.1 Funzione zeta di Riemann

Introduciamo dapprima la funzione zeta di Riemann, definita come somma della serie di Dirichlet

$$f(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ con parte reale $\mathrm{Re}(z) > 1$. Questa restrizione sui valori di $z$ è necessaria affinché la serie risulti convergente, tuttavia la funzione si può prolungare analiticamente ad una funzione olomorfa su tutto il piano complesso ad eccezione del punto 1, dove ha un polo semplice.

Il primo a notare l'importanza della funzione zeta di Riemann nello studio dei numeri primi fu Eulero che nella prima metà del 1700, dimostrò l'identità che segue.

**Teorema 4.1.** *Vale*

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-z}} = \prod_{p\ primo} \frac{1}{1 - p^{-z}} \tag{4.1}$$

*con* $z \in \mathbb{C}$ *e* $Re(z) > 1$.

Tenendo in considerazione quanto detto sulla convergenza nel teorema 2.6 , secondo capitolo, vediamo una dimostrazione dell'identità precedente di Eulero.

*Dimostrazione.* Cominciamo a dimostrare la convergenza del prodotto dei reciproci, cioè di

$$\prod_{p\ primo} (1 - p^{-z}).$$

Se $z = x + iy$, il prodotto converge uniformemente per $x \geq k$ con $k > 1$; questo si può affermare grazie al teorema 2.6 capitolo 2, perché

$$\sum_{p\ primo} |p^{-z}| = \sum_{p\ primo} p^{-x} < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}.$$

Ora prendiamo il prodotto parziale per primi $p \leq k$. Abbiamo

$$\prod_{p\leq k} \frac{1}{1 - p^{-z}} = (1 + 2^{-z} + 2^{-2z} + ..)(1 + 3^{-z} + 3^{-2z} + ..)..(1 + p_k^{-z} + p_k^{-2z} + ..),$$

dove $p_k$ è il più grande primo $\leq k$. Sviluppando otteniamo prodotti della forma

$$2^{-m_2 z} \cdot 3^{-m_3 z} \cdot 5^{-m_5 z} \cdots p_k^{-m_{p_k} z},$$

dove $m_2, m_3, m_5 \cdots m_{p_k}$ sono interi arbitrari non negativi. Quindi il prodotto si scrive nella forma $n^{-z}$, dove $n$ è intero con fattori primi $\leq k$ e ogni tale numero è ottenuto solo una volta per l'unicità della decomposizione in fattori primi.

Ne segue

$$\prod_{p\leq k} \frac{1}{1 - p^{-z}} = \sum_{n=1}^{k} n^{-z} + r_k(z),$$

dove per $x > 1$,

$$|r_k(z)| \leq \sum_{n>k} |n^{-z}| = \sum_{n>k} n^{-x} \leq \int_k^{\infty} v^{-x}\, dv = \frac{k^{-x+1}}{x - 1}.$$

Si vede che per $k \to \infty$ $|r_k(z)| \to 0$ per $x > 1$, e quindi in definitiva troviamo

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z},$$

che dimostra l'uguaglianza di (4.1). ■

### 4.2 Funzione Gamma

Procediamo ora studiando la funzione Gamma; tale funzione appartiene alle funzioni speciali trascendenti e insieme alle funzioni esponenziale e alle funzioni trigonometriche è considerata una delle più utili in vari campi della matematica quali serie asintotiche, serie geometriche, calcolo di integrali definiti, funzione zeta di Riemann e teoria dei numeri.

Iniziamo col definire la costante $\gamma$ di Eulero enunciando dapprima una osservazione che sarà utile per lo studio di tale costante.

**Osservazione - Definizione 4.2a.**

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$$

*finito, con* $0<\gamma<1$. *Si dice che* $\gamma$ *è la costante di Eulero.*

*Dimostrazione*. Innanzi tutto osserviamo che si può scrivere

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-(\log(k+1)-\log k)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right).$$

Ora posso sviluppare il logaritmo come segue per $|h|$ piccolo:

$$\log(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)$$

per cui

$$\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\sim\frac{1}{2k^2},$$

da cui segue la convergenza della serie.

Per una stima di $\gamma$ osserviamo che

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{k}dx\geq\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx=\sum_{k=1}^{n}(\log(k+1)-\log k)=\log(n+1).$$

Allo stesso modo

$$\log(n+1) - \log n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \leq 1,$$

da cui la conclusione. ■

Il numero $\gamma$ è chiamata <u>costante di Eulero</u> e si approssima con $0{,}577215664$ ...

E' curioso notare inoltre che non sia mai stato stabilito se $\gamma$ sia razionale o meno.

**Teorema 4.2b.** (solo enunciato)

*Sia f una funzione senza zeri. Allora esiste una funzione intera g tale che f(z)=*$e^{g(z)}$ *per ogni z.*

(Per la dimostrazione consultare [Henrici], volume 2, teorema 8.3a).

Consideriamo ora la funzione data dal valore del prodotto canonico,

$$g(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \tag{4.2}$$

Vediamo che converge. Possiamo scrivere il prodotto (4.2) nella forma $1 + x$, dove $x = e^{-z/n} + \frac{z}{n} e^{-z/n} - 1$. Quindi la (4.2) è equivalente a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + (e^{-z/n} + \frac{z}{n} e^{-z/n} - 1)\right].$$

Considerando ora la serie naturalmente abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-z/n} + \frac{z}{n} e^{-z/n} - 1\right).$$

Scriviamo di seguito i polinomi di Taylor intorno $z = 0$:

$$e^{-z/n} \ = \ 1 - \frac{z}{n} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2} + \cdots$$

$$\frac{z}{n} e^{-z/n} \ = \ \frac{z}{n}(1 - \frac{z}{n} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2} + \cdots)$$

così il prodotto può scriversi

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+w_n(z))$$

con

$$w_n(z) = 1 - \frac{z}{n} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2} + \frac{z}{n} - \frac{z^2}{n^2} + \frac{1}{2}\frac{z^3}{n^3} - 1 + \cdots = -\frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2} + h_n(z)$$

dove $h_n(z) = \frac{1}{2}\frac{z^3}{n^3} +$ termini in $z^3$ e $z^4$. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)$ è uniformemente convergente.

Ora la (4.2) ha zeri negli interi negativi mentre è evidente che $g(-z)$ si annulla negli interi positivi. Quindi considerando nota la rappresentazione di $\sin \pi z$ (vedere appendice) vediamo che

$$g(z)g(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} \tag{4.3}$$

la funzione $g(z-1)$ ha gli stessi zeri della funzione $g(z)$ e ha uno zero per $z = 0$. Così $g(z-1)/zg(z)$ è una funzione intera senza zeri. Per il teorema 4.2b

$$g(z-1) = ze^{h(z)}g(z) \tag{4.4}$$

dove $h$ è una funzione intera. Per determinare $h$ calcoliamo le derivate logaritmiche dei due membri, otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + h'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right).$$

Cambiando gli indici $n-1$ con $n$ si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{z} + h'(z) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Sottraendo le due serie troviamo

$$h'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - 1 = 0.$$

Segue che $h(z)$ è costante. Dalla (4.4) ponendo $z = 1$ otteniamo

$$1 = g(0) = e^{\sigma}g(1);$$

così

$$e^{-\sigma} = g(1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{-1/n}.$$

Dunque

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

Inoltre poiché $\log(1 + 1/n) = \log(1 + n) - \log n$ e così $\sigma$ è la costante di Eulero $\gamma$ già introdotta

Da (4.4) si ha

**Teorema 4.2c.** *Vale*

$$g(z-1) = ze^{\gamma} g(z).$$

Diamo ora la definizione di funzione Gamma data da Weierstrass con le notazioni usate sopra:

**Definizione 4.2d**.(Weierstrass)

*Si pone*

$$\Gamma(z) := \frac{1}{ze^{\gamma z} g(z)},$$

*cioè*

$$\Gamma(z) := \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n})^{-1} \, e^{z/n}.$$

Esponiamo alcune proprietà della funzione $\Gamma$.

Per la (4.4) abbiamo

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{(z+1)e^{\gamma(z+1)} g(z+1)} = \frac{1}{e^{\gamma} g(z)};$$

così $\Gamma$ soddisfa la relazione

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Iterando questa relazione, abbiamo per $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Gamma(z+n) = (z)_n \Gamma(z) \tag{4.5}$$

oppure

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

dove $(z)_n := z(z+1) \ldots (z+n-1)$. Per $z = 1$ abbiamo, poiché $\Gamma(1) = 1$,

$$n! = \Gamma(n+1).$$

Riscrivendo la (4.3) usando $\Gamma$, otteniamo

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{4.6}$$

Ponendo $z = \frac{1}{2}$ troviamo

$$\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi.$$

Dunque poiché $\Gamma(z) > 0$ per $z > 0$, otteniamo un interessante valore di $\Gamma$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1.7724538509 \ldots$$

Dalla (4.6) abbiamo

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(1-z)} \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Poiché $1/\Gamma(1-z)$ è analitica in $z = -n$ con valore $1/n!$ e poiché $\pi/\sin \pi z$ ha residuo $(-1)^n$, troviamo

$$r_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ricordando che la derivata logaritmica dei prodotti (anche infiniti convergenti) è la somma delle derivate logaritmiche dei fattori (vedere corollario 8.3d [Henrici]) e facendo quindi la derivata logaritmica della funzione nella definizione 4.2d troviamo

**Teorema 4.2e.**(solo enunciato)

*Vale*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) \tag{4.7}$$

E' curioso notare che la (4.7) per $z = 1$ restituisce un importante valore:

$$\Gamma'(1) = -\gamma,$$

e dalla (4.5) e direttamente dalla (4.7) segue che

$$\Gamma'(n+1) = n!\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma\right),$$

dove $n = 1, 2, \ldots$

Inoltre, derivando ulteriormente la (4.7), otteniamo

$$\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right]' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

Concludiamo che per $z$ reale, $z \neq 0, 1, 2, \ldots, \Gamma''(z)$ ha sempre lo stesso segno di $\Gamma(z)$, come si vede calcolando la derivata.

Consideriamo ora una caratterizzazione della funzione $\Gamma$ storicamente precedente alla definizione di Weierstrass. Per la definizione di prodotto infinito segue che $\Gamma(z)$, per $n \to \infty$, è il limite della successione dei

$$P_n(z) := \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}(1 + \frac{z}{k})^{-1}e^{z/k}.$$

Con un calcolo diretto si vede

$$P_n(z) = exp\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma\right)z\right]\frac{n!}{z(z+1\ldots)(z+n)}.$$

Dalla definizione di $\gamma$ si ha

$$e^{z\,\mathrm{Log}\,n} = n^z.$$

Dunque abbiamo ottenuto il

**Teorema 4.2f.**

*Per ogni* $z \neq 0, -1, -2, \ldots,$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^z n!}{(z)_{n+1}}.$$

Per concludere, vediamo una terza rappresentazione.

Supponiamo che $z = x > 0$.

**Definizione 4.2g.** (Eulero)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\sigma}\, \sigma^{x-1} d\sigma.$$

Formiamo le linee generali della dimostrazione.

E' opportuno scrivere, nelle notazioni precedenti,

$$\Gamma_n(z) := \frac{n^z n!}{(z)_{n+1}}$$

Notiamo che il fattore $1/(x)_{n+1}$ si ottiene integrando la funzione $\tau^{x-1}$ *n +1* volte, e l'ultima volta tra 0 e 1:

$$\frac{1}{(x)_{n+1}} = \int_0^1 \int_0^{\tau_n} \ldots \int_0^{\tau_1} \tau^{x-1} d\tau d\tau_1 \ldots d\tau_n.$$

Partendo da tale relazione si può dimostrare (confrontare [Henrici] problema 2 paragrafo 10.4) usando la nozione di prodotto di convoluzione il seguente risultato

$$\frac{n!}{(x)_{n+1}} = \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{x-1} d\tau,$$

così ponendo $\sigma := n\tau$, troviamo

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{(x)_{n+1}} = \int_0^1 (1 - \frac{\sigma}{n})^n \sigma^{x-1} d\sigma.$$

Richiamiamo il ben noto limite, valido per ogni s reale o complesso:

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{s}{n})^n = e^{-s}.$$

Se è possibile passare il limite sotto il segno di integrale e simultaneamente se si ha che $\Gamma_n \to \Gamma$ abbiamo ottenuto la forma integrale di Eulero per la funzione gamma.

## 4.3 Approccio Reale

Per completezza osserviamo che la formula integrale ora trovata, consente, nel caso in cui si consideri solo la variabile reale, un approccio diretto che è utile nell'analisi reale, evitando il ricorso alla variabile complessa ed anche alla nozione di prodotto infinito.

**Definizione 4.3a.**

*Sia* $x > 0$, *si pone*

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\log(t))^{x-1}\, dt. \tag{4.7}$$

Apportando un cambio di variabile, la formula assume l'aspetto classico visto nel paragrafo precedente.

**Osservazione 4.3b.**

*Sia* $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} dt \tag{4.8}$$

*Dimostrazione.* Basta un cambiamento di variabile con $u = -\log t$ in (4.7). ■

Quindi integrando per serie vediamo che la funzione (4.7) per $x > 0$, è analitica reale e ben definita.

Abbiamo inoltre che

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \tag{4.9}$$

e per $x > 0$, facendo una integrazione per parti, si ottiene

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t}\, dt = [-t^x e^{-t}]_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} -t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

Quindi

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{4.10}$$

Quest'ultima uguaglianza è un'importante equazione funzionale.

Per valori interi, la funzione diventa

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Questo è il motivo per cui la funzione Gamma può essere vista come estensione del fattoriale.

E' inoltre possibile estendere la funzione a valori negativi invertendo l'equazione funzionale come segue

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

su (-1,0) e quindi su (-2,-1) e così via;

per esempio

$$\Gamma\left(-{}^{1}\!/_{2}\right) = -2\Gamma\left({}^{1}\!/_{2}\right).$$

Iterando questa identità possiamo definire la funzione Gamma su tutto l'asse reale tranne negli interi negativi (0, -1, -2...).

Per ogni intero non nullo abbiamo:

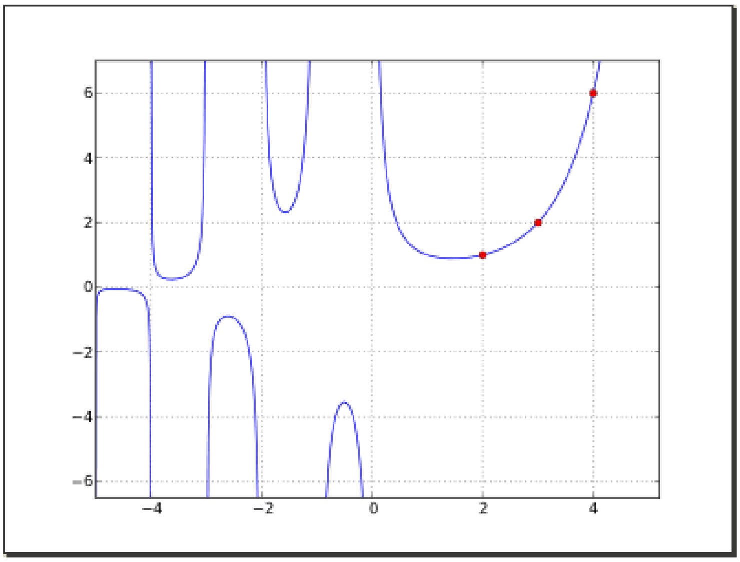
$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} \qquad \text{con } x+n > 0. \tag{4.11}$$

Supponiamo $x = -n + h$, essendo $h$ piccolo si ha:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(1+h)}{h(h-1)..(h-n)} \sim \frac{(-1)^n}{n!\,h} \qquad \text{dove } h \to 0.$$

Così $\Gamma(x)$ possiede un polo semplice in $-n$ con residuo $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Quindi la funzione Gamma può essere rappresentata su tutta la retta reale come nel grafico seguente




Infine possiamo concludere con un'ultima osservazione riguardo la funzione Gamma; essa infatti non è l'unica soluzione all'equazione funzionale (4.10) che soddisfa la condizione (4.9), per esempio anche la funzione $\cos(2m\pi x)\Gamma(x)$, dove $m$ è un intero non nullo, è un'altra soluzione.

Concludiamo quindi questo quarto capitolo con un interessante teorema che sotto altre condizioni rende la funzione Gamma l'unica soluzione alla equazione funzionale, ossia la funzione Gamma è univocamente determinata da (4.9) e (4.10) se si richiede che la funzione $\log \Gamma$ sia convessa. (Per una semplice dimostrazione del teorema confrontare *G.E. Andrews, R. Askey e R. Roy, Special Function, 1999*).

**Teorema 4.3c. (Bhor-Mollerup)**

*Sia* $f : ]\,0,+\infty[ \rightarrow ]\,0,+\infty[$ *una funzione soddisfacente le seguenti proprietà:*

*1)* $f(1) = 1$;

*2)* $f(x+1) = xf(x)$;

*3)* $\log f$ *sia convessa.*

*Allora* $f(x) = \Gamma(x)$ *per ogni* $x$ *positivo.*

# Appendice

**Definizione** di logaritmo in $\mathbb{C}$.

Per $z \in \mathbb{C}$, $z=x+iy$ e $z \neq 0$, una accezione dell'argomento, *argz* è un numero reale con

$x = |z|\, cos(argz)$ e $y = |z|\, sen(argz)$

si dice che l'accezione è principale se $-\pi < argz \leq \pi$.

Per ogni tale $z$ esiste sempre almeno una accezione *argz* dell'argomento di $z$.

In questo caso le altre accezioni sono solo della forma $argz + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Una accezione del logaritmo di $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ è

$$\log z = \log|z| + iargz.$$

Si dice che $\log z$ è accezione principale del logaritmo di $z$ quando *argz* è l'accezione principale dell'argomento di $z$.

Infine vale che

$$e^{logz} = z.$$

**Definizione** del prodotto canonico del seno

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}.$$

Possiamo semplificarla moltiplicando i termini corrispondenti $n$ e $-n$ e si ottiene

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

# Bibliografia


- [Markushevich] Alekseĭ Ivanovich Markushevich, *Theory of  function*, volume 3, American Mathematical Soc., 1963.

- [Henrici] Peter Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, volumi 1 e 2,Wiley-IEEE, 1977.

- [Coen] Salvatore Coen, *Teoria elementare delle funzioni analitiche di una o più variabili complesse, 1979.*

- [Titchmarsh] Edward Charles Titchmarsh, *The Theory of Function*, Oxford University Press, 1968.

- [Andrew, Askey, Roy] G. E. Andrews, R. Askey e R. Roy, *Special Function*, Cambridge University Press, 1999.