

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Dinamica dei sistemi collisionali

Tesi di Laurea

Presentata da:

Annalisa Pagliotta

Relatrice:

**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

*"It is, indeed, an incredible fact that what the human mind,
at its deepest and most profound, perceives as beautiful
finds its realization in external nature.
What is intelligible is also beautiful."
- Subrahmanyan Chandrasekhar*

Abstract

In questo elaborato viene discussa la dinamica dei sistemi collisionali, la quale non si riferisce alle effettive collisioni fisiche che possono verificarsi seppur raramente in campo astrofisico (**Appendice A**), ma piuttosto al ruolo dominante ricoperto dagli incontri gravitazionali ravvicinati tra coppie di stelle.

Nel **Capitolo 1** viene introdotto lo studio della dinamica stellare, viene riportata la definizione di sistema collisionale e la sua distinzione da sistema non collisionale, in cui i moti, invece, sono influenzati dalla forza gravitazionale esercitata da una omogenea distribuzione di massa. Viene accennato, inoltre, il fondamentale Teorema del Viriale. A seguire, nel **Capitolo 2**, viene proposto il problema dei due corpi, fondamentale per lo sviluppo del calcolo del tempo di rilassamento a due corpi, e viene confrontato quest'ultimo sia con il tempo dinamico che con il tempo di frizione dinamica. Infine, nel **Capitolo 3** vengono esposti alcuni esempi di dinamica stellare in astrofisica, come l'evaporazione gravitazionale, il *core collapse* e la catastrofe gravotermica degli ammassi globulari.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Definizione di sistema collisionale	2
1.2	Accenno al Teorema del Viriale	2
2	Tempo di rilassamento a due corpi	4
2.1	Accenno al problema dei due corpi	4
2.2	Calcolo del tempo di rilassamento a due corpi	6
2.2.1	Esempio: il tempo di rilassamento a due corpi per un sistema auto-gravitante	9
2.3	Confronto con il tempo di frizione dinamica	10
3	Evoluzione dinamica dei sistemi collisionali	11
3.1	L'equipartizione dell'energia e la segregazione di massa	12
3.2	L'evaporazione gravitazionale e l' <i>ejection</i>	13
3.3	Il <i>core collapse</i> e la catastrofe gravotermica	14
A	Urti in astrofisica	16
	Bibliografia	17
	Ringraziamenti	19

Capitolo 1

Introduzione

La **dinamica stellare** rappresenta un campo di ricerca in astrofisica che si occupa di descrivere il comportamento di un sistema auto-gravitante di un elevato numero di stelle, il cosiddetto sistema ad N corpi, nel quale il campo in cui si muovono è dato dalla forza attrattiva esercitata da ciascuna di esse.

Il fine principale di questo studio risiede nel comprendere la struttura, l'origine e l'evoluzione dei sistemi stellari e nello sviluppo di metodi matematici per darne previsioni quantitative. La loro dimensione e la loro massa possono variare anche oltre i quattordici ordini di magnitudine, a partire dalle stelle binarie, per poi passare ad ammassi aperti e globulari (con $10^2 - 10^6$ stelle), fino ad arrivare a galassie (con $10^5 - 10^{12}$ stelle) e ad ammassi di galassie.

Risulta interessante come questo argomento abbia attirato l'attenzione degli astrofisici più significativi del 20° secolo, quali Jeans, Eddington, Spitzer, Lynden-Bell e Chandrasekhar. Quest'ultimo si occupò, in uno dei suoi lavori più importanti, *Principles of Stellar Dynamics* (1942), di calcolare il tempo di rilassamento assumendo che il moto fosse descritto dall'urto ravvicinato di due corpi in uno spazio omogeneo. Ma che ruolo riveste tale concetto in questa trattazione?

In un sistema stellare le forze che governano i moti delle singole stelle sono essenzialmente di natura gravitazionale e derivano innanzitutto dalla distribuzione omogenea della materia e, in secondo luogo, dall'effetto degli incontri accidentali fra l'oggetto che si sta valutando e il suo vicinato.

Si considera una stella di posizione (x, y, z) ad un tempo $t = 0$, nel quale si suppone essa non faccia esperienza di nessun fenomeno, ma che sia unicamente soggetta all'azione del potenziale gravitazionale Φ ; difatti, si può scrivere

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi$$

L'integrazione dell'equazione vettoriale determina l'**orbita teorica** della stella in termini di posizione e velocità a $t = 0$, la quale viene seguita fintanto che gli incontri stellari non cominciano ad avere un effetto cumulativo e a deviare il suo moto, determinando l'**orbita reale**.

A questo punto la domanda che sorge è: *quanto tempo sarà richiesto da questo fenomeno affinché l'orbita della stella non possa essere più descritta da quella teorica?* Questo tempo può essere definito come **tempo di rilassamento a due corpi** (t_{2b}), il quale caratterizza l'evoluzione e la struttura dei sistemi stellari ed è tipico di ognuno di essi.

1.1 Definizione di sistema collisionale

Un sistema gravitazionale in cui l'effetto cumulativo di questi incontri sia trascurabile e la sua età sia minore di t_{2b} , si dice **non collisionale** (o *collisionless*), come ad esempio una galassia ($t_{2b} = 10^{6\div 7} \text{ Gyr}$); nel caso contrario e di nostro interesse, si parla di sistema **collisionale** (o *collisional*), come ad esempio un ammasso globulare ($t_{2b} = 1 - 10 \text{ Gyr}$). Naturalmente, questi concetti sono relativi, poichè sistemi reali, se osservati per un tempo sufficientemente lungo, vengono considerati collisionali.

Come già affermato, un sistema collisionale è un sistema auto-gravitante composto da N oggetti, con $N \geq 3$, e, inoltre, si definisce a **calore specifico negativo**: se si trova all'equilibrio, dal Teorema del Viriale (Paragrafo 1.2), si ha che

$$U = -K = -\frac{3}{2}Nk_B T \Rightarrow c_v \equiv \frac{dU}{dT} = -\frac{3}{2}Nk_B < 0$$

Conseguentemente, fornendo energia al sistema, ad esempio energia cinetica K , l'energia totale E aumenta, ma diminuisce la sua temperatura in una configurazione all'equilibrio (si può ragionare in maniera analoga togliendo energia al sistema). Inoltre, un sistema che sia soggetto ad un fenomeno prolungato di fluttuazioni energetiche tende a raggiungere uno stato di equilibrio termodinamico, caratterizzato dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann e dall'equipartizione dell'energia. Questi due principi si trovano alla base dei fenomeni quali l'evaporazione gravitazionale, il *core collapse* e la catastrofe gravotermica che verranno illustrati in seguito nel **Capitolo 3**.

1.2 Accenno al Teorema del Viriale

Il **Teorema del Viriale** è una relazione che lega l'energia potenziale all'energia cinetica di un sistema ad N corpi e permette di analizzare la variazione di queste grandezze fisiche. Nel momento in cui essa viene soddisfatta, il sistema è definito all'equilibrio e si dice *virializzato* (i due termini si possono considerare sinonimi).

Per questo teorema si hanno due definizioni, quella scalare e quella tensoriale; difatti esso è rappresentato da un numero infinito di identità tensoriali, dove quella più semplice è un tensore del secondo ordine (matrice 3×3), di cui la **traccia** è data dalla seguente equazione:

$$2T = -W \tag{1.1}$$

dove T indica l'energia cinetica e W l'energia potenziale totale del sistema. Nel caso speciale di un sistema auto-gravitante, esso coincide con l'energia potenziale gravitazionale, per cui

$$2T = -U \tag{1.2}$$

E' possibile rappresentare graficamente questo teorema tramite il **Piano Viriale**¹ (vedi **Figura 1.1**): sull'asse delle ascisse si riporta $|U|$ e sull'asse delle ordinate K (ovvero T). Di seguito vengono elencati alcuni aspetti fondamentali:

1. nella parte superiore si trovano gli oggetti **caldi**, mentre in quella inferiore quelli **freddi**, in base al valore di K ; a destra si trovano gli oggetti **compatti** (più legati), mentre a sinistra quelli **diluiti** (meno legati), in base al valore di $|U|$;

¹ *Crediti immagine*: Angela Cratere, Università di Bologna

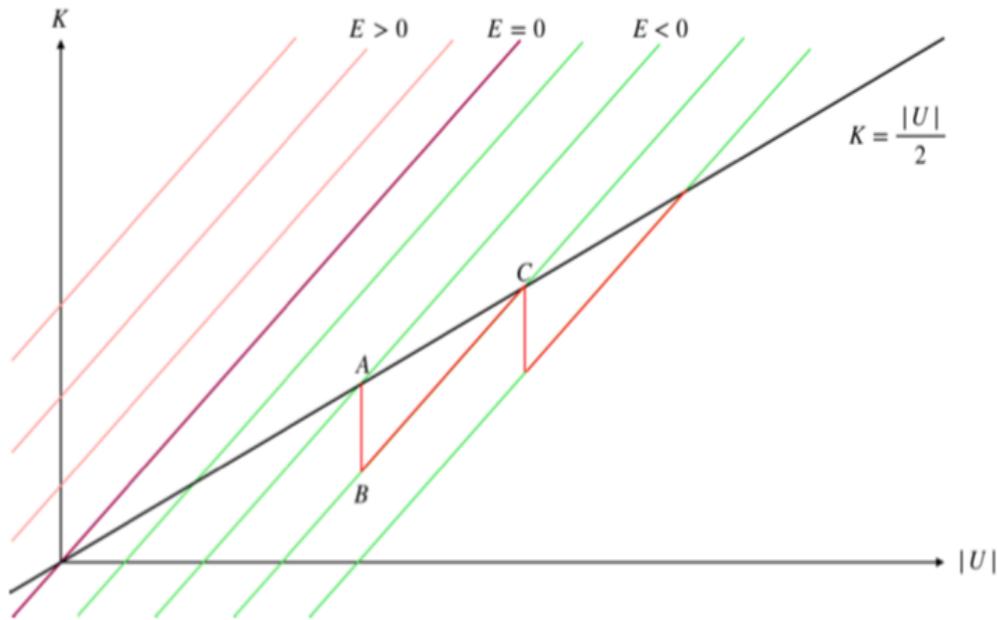


Figura 1.1: *Piano Viriale*

2. la retta del Teorema del Viriale assume la forma $K = |U|/2$ (retta *nera*), mentre la bisettrice è data dall'equazione $T = |U| + E$ dove $E = 0$ (retta *viola*);
3. sistemi con energia $E > 0$ (rette *arancioni* al di sopra della bisettrice) non possono diventare virializzati poichè le rette non intersecano mai quella del VT;
4. sistemi con energia $E < 0$ (rette *verdi* al di sotto della bisettrice) possono raggiungere l'equilibrio poichè le rette intersecano quella del VT;
5. poichè la forza di attrazione gravitazionale è di tipo conservativo, il sistema deve evolversi nel piano conservando la propria energia totale: si può muovere unicamente sulla retta fissata dalle condizioni iniziali e fermarsi su quella del VT nella posizione consistente con la sua energia totale negativa (in base al punto 4);
6. le linee ricalcate in *rosso* indicano una possibile evoluzione di un sistema con $E < 0$: nel punto **A** si trova all'equilibrio; se viene raffreddato perde energia cinetica e si posiziona nel punto **B** appartenente ad una retta a più bassa energia totale E ; a questo punto il sistema può raggiungere nuovamente l'equilibrio nel punto **C** in base alla condizione illustrata nel punto 5: incrementa la propria energia cinetica e diminuisce quella potenziale, aumentandola in modulo. Il sistema finale risulta, quindi, meno energetico (E minore), più caldo (K maggiore) e più legato ($|U|$ maggiore); al contrario, se il sistema viene riscaldato, ritornando all'equilibrio, risulta essere più energetico (E maggiore), più freddo (K minore) e meno legato ($|U|$ minore).

Capitolo 2

Tempo di rilassamento a due corpi

2.1 Accenno al problema dei due corpi

Prima di procedere è importante introdurre il **problema dei due corpi**, i cui risultati servono per derivare due scale temporali fondamentali: il tempo di rilassamento a due corpi e il tempo di frizione dinamica.

Si considerano due masse puntiformi, m_1 e m_2 , che interagiscono gravitazionalmente in un generico sistema di riferimento inerziale S_0 . In **Figura 2.1** viene schematizzato il sistema di coordinate¹:

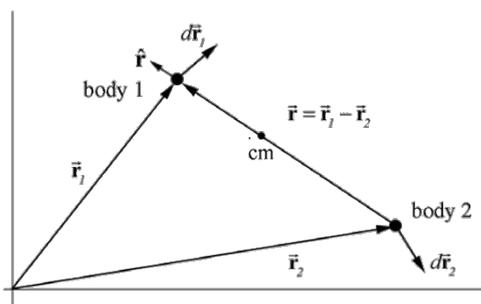


Figura 2.1: Sistema di coordinate del problema dei due corpi

\mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 indicano la posizione e la velocità delle due masse, mentre $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ sono rispettivamente il vettore posizione relativa ed il vettore velocità relativa. Si introducono, inoltre, le condizioni iniziali $\mathbf{r}_{1,0}$, $\mathbf{r}_{2,0}$, $\mathbf{v}_{1,0}$ e $\mathbf{v}_{2,0}$.

Si parte dalle equazioni del moto delle due masse

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\nabla_{\mathbf{r}_1} U \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\nabla_{\mathbf{r}_2} U = \nabla_{\mathbf{r}_1} U \end{cases} \quad (2.1)$$

dove U è l'energia potenziale gravitazionale.

A questo punto, se le (2.1) vengono sommate membro a membro, si ottiene

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \Rightarrow m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{cost} = \mathbf{P} \\ \mathbf{P} = M \mathbf{v}_{\text{CM}} = m_1 \mathbf{v}_{1,0} + m_2 \mathbf{v}_{2,0} \end{cases} \quad (2.2)$$

ovvero, la **conservazione dell'impulso totale**, dove $M = m_1 + m_2$ è la massa totale. Si osserva, dunque, che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme e che la velocità del centro di massa rimane costante.

Moltiplicando scalarmente la prima equazione in (2.1) per $\dot{\mathbf{r}}_1$ e la seconda equazione in (2.1) per $\dot{\mathbf{r}}_2$ e sommando le identità risultanti, si ricava l'espressione per la **conservazione dell'energia totale**

$$\frac{m_1 \|\mathbf{v}_1\|^2}{2} + \frac{m_2 \|\mathbf{v}_2\|^2}{2} + U = E \quad (2.3)$$

Essa si mantiene costante, ma non è un invariante, poichè dipende sia dalle condizioni iniziali che dal sistema di riferimento inerziale considerato.

¹ *Crediti immagine:* Peter Dourmashkin, Massachusetts Institute of Technology

Inoltre, sommando il prodotto vettoriale della prima equazione in (2.1) per \mathbf{r}_1 e della seconda equazione in (2.1) per \mathbf{r}_2

$$m_1 \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{J} \quad (2.4)$$

segue che la grandezza vettoriale **momento angolare totale** viene anche conservata. Si procede con la risoluzione delle equazioni in (2.1) combinandole nell'equazione differenziale per l'**orbita relativa** di m_1 rispetto ad m_2 che risulterà essenziale per la derivazione del tempo di rilassamento a due corpi (Paragrafo 2.2): dividendo la prima per m_1 e la seconda per m_2 e sottraendole membro a membro si ottiene

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}} U, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.5)$$

dove μ è la massa ridotta. L'equazione (2.5) è equivalente a quella del moto di un punto di massa μ soggetto alla forza gravitazionale del sistema dei due corpi, è un invariante per tutti gli osservatori e descrive la dinamica di un sistema non inerziale, poichè viene ottenuta riferendo le coordinate a \mathbf{r}_2 . Inoltre, non soddisfa la conservazione dell'impulso totale, ma quella dell'energia e del momento angolare totali:

$$E_r = \frac{\mu \|\mathbf{v}\|^2}{2} + U, \quad \mathbf{J} = \mu \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \quad (2.6)$$

Assumendo che la separazione iniziale tra le due masse sia infinita e che dopo l'interazione esse ritornano ad essere molto lontane ($U(\pm\infty) = 0$), dalla conservazione dell'energia totale relativa ne consegue che anche l'**energia cinetica relativa** si conserva per $t = \pm\infty$

$$\begin{cases} E_r(+\infty) = \frac{\mu}{2} \|\mathbf{v}(+\infty)\|^2 + U(+\infty) \\ E_r(-\infty) = \frac{\mu}{2} \|\mathbf{v}(-\infty)\|^2 + U(-\infty) \end{cases} \Rightarrow \|\mathbf{v}(+\infty)\| = \|\mathbf{v}(-\infty)\| \quad (2.7)$$

Infine, dalla conoscenza dell'orbita relativa \mathbf{r} è possibile ricavare le orbite \mathbf{r}_1 ed \mathbf{r}_2 per le due masse in S_0 che risultano essere versioni omotetiche della stessa, ovvero scalate dimensionalmente in funzione della massa. Per questo passaggio bisogna porsi nel sistema di riferimento del centro di massa e suddividere il problema in due parti (\mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2) e, tornando in S_0 , si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = \frac{\mu \mathbf{r}(t)}{m_1} + \mathbf{r}_{\text{CM}}(t) \\ \mathbf{r}_2(t) = -\frac{\mu \mathbf{r}(t)}{m_2} + \mathbf{r}_{\text{CM}}(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

dove $\mathbf{r}_{\text{CM}}(t)$ indica la posizione del centro di massa al tempo t . Le espressioni per la velocità prendono, dunque, la seguente forma

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1(t) = \frac{\mu \mathbf{v}(t)}{m_1} + \mathbf{v}_{\text{CM}}(t) \\ \mathbf{v}_2(t) = -\frac{\mu \mathbf{v}(t)}{m_2} + \mathbf{v}_{\text{CM}}(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

dove $\mathbf{v}_{\text{CM}}(t)$ rappresenta la velocità del centro di massa al tempo t .

2.2 Calcolo del tempo di rilassamento a due corpi

Per quantificare il tempo di rilassamento a due corpi si procede calcolando l'orbita iperbolica di una stella di prova di massa m_t con velocità iniziale $\mathbf{v}(-\infty)$ incidente in un sistema stellare e che incontra una stella di campo di massa m_f , inizialmente ferma: l'orbita viene deviata² attraverso il cosiddetto **effetto fionda**.

In seguito, per ogni interazione indipendente, assunta come a due corpi, viene calcolata la variazione di energia³ $|\Delta E|$ della stella di prova e viene confrontato l'effetto cumulativo di tutti gli incontri $\sum |\Delta E|$ con l'energia cinetica iniziale $E(-\infty)$ della stessa: nel momento in cui questi due valori sono comparabili, è come se la stella avesse *perso memoria* delle sue condizioni iniziali e si dice che è passato un tempo di rilassamento a due corpi, t_{2b} .

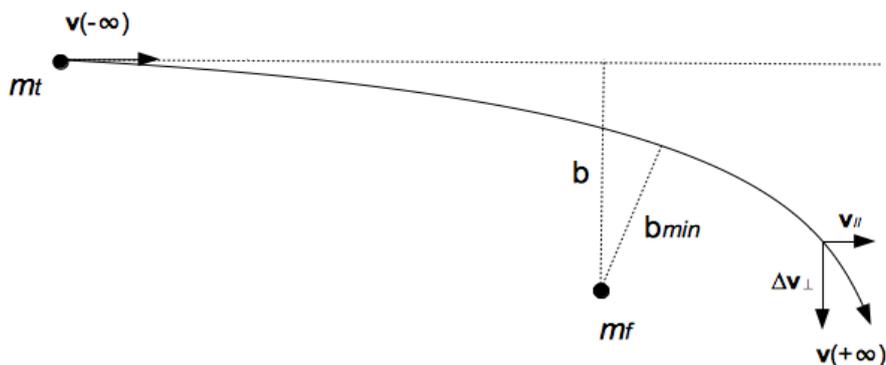


Figura 2.2: Rappresentazione dell'orbita relativa nell'interazione tra le due stelle

Nella **Figura 2.2** soprastante viene raffigurato anche il **parametro d'impatto** b , ovvero la distanza minima a cui passerebbe l'oggetto se non ci fosse interazione, e b_{min} , ovvero la distanza minima che si instaura tra i due corpi a causa della presenza di una forza: se essa risulta attrattiva, allora $b_{min} \leq b$, se repulsiva, allora $b_{min} \geq b$. Inoltre, il vettore velocità relativa ruota nel piano orbitale, e per la conservazione dell'energia totale, si osserva il cosiddetto **riscaldamento perpendicolare** dell'orbita rispetto alla velocità relativa iniziale, mentre la componente parallela si **raffredda** per frizione dinamica.

Come primo passaggio si considera il moto della stella di prova con velocità \mathbf{v}_t , data dalla prima equazione in (2.9) del problema dei due corpi visto in precedenza

$$\mathbf{v}_t = \frac{\mu \mathbf{V}}{m_t} + \mathbf{v}_{cm} \quad (2.10)$$

la cui variazione è espressa nel seguente modo

$$\Delta \mathbf{v}_t = \frac{\mu \Delta \mathbf{V}}{m_t} + \Delta \mathbf{v}_{cm} \quad (2.11)$$

dove $\Delta \mathbf{v}_{cm} = 0$ come dimostrato in (2.2).

²ogni interazione porta ad una deflessione nel piano orbitale pari a $\pi - 2\theta$ dalla direzione originaria del moto: nel momento in cui $\sum \sin^2(2\theta)$ diventa dell'ordine di 1, si può dire che la stella abbia descritto un angolo di $\pi/2$.

³energia che viene scambiata durante l'incontro fra le due stelle.

Si procede applicando l'**approssimazione di Born**⁴ per la componente perpendicolare della velocità relativa, in cui la deviazione totale dell'orbita relativa è prodotta dall'azione della forza di modulo $Gm_t m_f / b^2$ in direzione perpendicolare a $\mathbf{v}(-\infty)$ per un tempo pari a $2b/v$ con $v = \|\mathbf{v}(-\infty)\|$

$$(\Delta \mathbf{p})_{\perp} = (\mathbf{F})_{\perp} \Delta t \quad (2.12)$$

ovvero

$$\mu \|(\Delta \mathbf{v})_{\perp}\| \sim \frac{Gm_t m_f}{b^2} \frac{2b}{v} = \frac{2Gm_t m_f}{bv} \quad (2.13)$$

Elevando al quadrato la (2.12) e dividendo per m_t^2 in base alla (2.10) si ottiene

$$\|(\Delta \mathbf{v}_t)_{\perp}\|^2 = \frac{\mu^2}{m_t^2} \|(\Delta \mathbf{v})_{\perp}\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 v^2}, \quad b \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

in cui si può osservare la mancata dipendenza da m_t .

Per poter sommare questi contributi su tutti gli incontri della stella di prova bisogna innanzitutto definire la **funzione di distribuzione** delle stelle di campo (DF) considerando due condizioni:

- distribuzione **spazialmente omogenea** delle masse di campo;
- **isotropia** nella distribuzione delle velocità.

In pratica

$$f(\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_t) = n_f g(v_f), \quad v_f = \|\mathbf{v}_f\|, \quad 4\pi \int_0^{\infty} g(v_f) v_f^2 dv_f = 1 \quad (2.15)$$

dove n_f rappresenta il numero di stelle per unità di volume e g corrisponde alla funzione di distribuzione delle velocità che dipende unicamente dalla norma di \mathbf{v}_f . In secondo luogo, è rilevante stimare il numero di incontri possibili nell'intervallo di tempo Δt nel volume differenziale di velocità $d^3 \mathbf{v}_f$ e con parametro d'impatto compreso tra b e $b + db$

$$\Delta n_{enc} = 2\pi b db \cdot \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| \Delta t \cdot n_f g(v_f) d^3 \mathbf{v}_f \quad (2.16)$$

dove

- $2\pi b db$ rappresenta la sezione d'urto;
- $\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| \Delta t$ rappresenta la lunghezza del cilindro che viene percorso nel tempo Δt ;
- $n_f g(v_f) d^3 \mathbf{v}_f$ rappresenta il numero di stelle contenute nel volume differenziale di velocità $d^3 \mathbf{v}_f$.

È importante sottolineare come l'asse del cilindro di raggio b sia orientato in maniera differente a seconda del campo di stelle considerato, poichè dipende dalla direzione della velocità relativa iniziale⁵ della stella di prova; essa influisce, inoltre, sia sulla lunghezza del cilindro stesso che sul numero di oggetti presenti lungo il percorso.

⁴approssimazione impulsiva, che considera come limite un valore molto grande per il parametro d'impatto, dunque un elevato momento angolare dell'orbita relativa; difatti, essi sono legati dalla relazione $J = \mu b \|\mathbf{v}\|$

⁵dato che $v = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|$

Moltiplicando la (2.14) per la (2.16) e integrando sia sul parametro d'impatto che sullo spazio delle velocità, si quantifica, infine, l'effetto cumulativo di tutti gli incontri

$$\begin{aligned}
& \sum_{all\ enc.} \|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2 = \|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2 \cdot \Delta n_{enc} \sim \\
& \sim \int_0^\infty \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 v^2} \cdot 2\pi b db \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| \Delta t n_f g(v_f) d^3 \mathbf{v}_f = \\
& = 8\pi G^2 m_f^2 n_f \Delta t \int_0^\infty \frac{db}{b} \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{g(v_f)}{v} d^3 \mathbf{v}_f
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Nel primo integrale risulta interessante come la funzione diverga logicamente in entrambi gli estremi e, in approssimazione impulsiva, si possono distinguere due casi fondamentali:

- la **divergenza ultravioletta** per $b = 0$ (urti ravvicinati): essa rappresenta una divergenza artificiale, poichè nasce come conseguenza dell'approssimazione applicata sul parametro d'impatto⁶; difatti, in una trattazione esatta del problema tale divergenza non sarebbe stata evidente, mentre in questo caso si sostituisce il limite inferiore con un valore minimo, $b_{min} = b_0$;
- la **divergenza infrarossa** per $b = \infty$ (urti distanti): essa risulta come conseguenza dell'uso improprio dell'approssimazione a due corpi nella descrizione di incontri distanti in sistemi stellari; esso porta alla sovrastima della ΔE quando $b \leq b_{max}$ e all'esclusione del contributo di energia quando $b \geq b_{max}$; nel caso di un sistema gravitazionale infinito ed omogeneo essa non può essere eliminata facilmente e si è forzati a scegliere propriamente un limite superiore dell'ordine della dimensione del sistema stellare, ovvero b_{max} .

Si riassumono queste osservazioni introducendo un nuovo termine, il **logaritmo di Coulomb**

$$\ln \Lambda = \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$

e, dopo aver integrato sul parametro d'impatto, la (2.17) diventa

$$= 8\pi G^2 m_f^2 n_f \Delta t \ln \Lambda \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{g(v_f)}{v} d^3 \mathbf{v}_f \tag{2.18}$$

Il secondo integrale, invece, prende il nome di **potenziale di Rosenbluth** ed equivale al potenziale della distribuzione di densità $g(v_f)$ a simmetria sferica nello spazio delle velocità

$$\begin{cases} \Psi(v_t) \equiv \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{g(v_f)}{v} d^3 \mathbf{v}_f \equiv \frac{\Xi(v_t)}{v_t} + 4\pi \int_{v_t}^\infty g(v_f) v_f dv_f \\ \Xi(v_t) = 4\pi \int_0^{v_t} g(v_f) v_f^2 dv_f, \quad \Xi(\infty) = 1 \end{cases}$$

⁶viene utilizzato b al posto di $b+b_0$, dove b_0 deriva dalle orbite iperboliche che deviano di un angolo pari a 90° .

dove $\Xi(v_t)$ rappresenta ipoteticamente la massa del sistema contenuta all'interno di una sfera di raggio v_t .

Si osserva, inoltre, come per urti ad alta velocità della stella di prova rispetto alle velocità caratteristiche delle stelle di campo, il potenziale sia dominato dal termine di monopolo, $\Psi(v_t) \sim 1/v_t$, e inserendo anche questa considerazione all'interno della (2.18) si ottiene

$$= 8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda \Psi(v_t) \Delta t \quad (2.19)$$

Si è ora in grado di confrontare questo risultato con l'energia cinetica iniziale della stella di prova e di stimare il tempo necessario affinché si verifichi il riscaldamento perpendicolare alla velocità relativa iniziale. Si definisce, dunque, il **tempo di rilassamento a due corpi**

$$\begin{aligned} \sum_{all\ enc.} (\Delta E_t)_\perp = E_t(-\infty) &\Rightarrow \sum_{all\ enc.} \|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2 = \|\mathbf{v}_t\|^2 \Rightarrow \\ t_{2b} = \frac{\|\mathbf{v}_t\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda \Psi(v_t)} &\sim \frac{\|\mathbf{v}_t\|^3}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda}, \quad \|\mathbf{v}_t\| \gg 1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.2.1 Esempio: il tempo di rilassamento a due corpi per un sistema auto-gravitante

Si consideri adesso un sistema auto-gravitante virializzato a simmetria sferica di raggio R e di massa totale M in cui sono distribuite omogeneamente N stelle di uguale massa m , tale per cui $n_f = 3N/4\pi R^3$. Per questo sistema si vuole determinare il tempo di rilassamento a due corpi e confrontarlo in seguito con il tempo dinamico.

Dal Teorema del Viriale, (1.2), si ricava la seguente equazione

$$M\sigma^2 = \frac{GM^2}{R} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{GM}{R} \quad (2.21)$$

dove σ rappresenta la dispersione di velocità delle stelle nel sistema, tale per cui si possa considerare $\Psi(v_t) \sim 1/v_t$ nel limite di alte velocità. Si può scrivere, dunque, il **tempo di rilassamento a due corpi** nella seguente forma

$$t_{2b} = \frac{\sigma^3}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda} = \frac{\sigma^3}{8\pi G^2 m_f^2 \frac{3N}{4\pi R^3} \ln \Lambda} = \frac{\sigma^3 R^3}{6G^2 m_f^2 N \ln \Lambda}$$

Moltiplicando e dividendo per N , considerando $M = Nn_f$ e sostituendo la (2.21) si ottiene, infine, la seguente espressione

$$t_{2b} = \frac{NR}{6\sigma \ln \Lambda} \quad (2.22)$$

Confronto con il tempo dinamico. Il **tempo dinamico** indica il tempo impiegato dall'oggetto, in questo caso una stella, ad attraversare il sistema e viene definito come $t_{dyn} \equiv 2R/\sigma$. Confrontandolo con la (2.22) si ottiene

$$\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} \sim \frac{N}{12 \ln \Lambda} = \frac{0.1N}{\ln N}, \quad \ln \Lambda = \ln \frac{2R}{b_0} = \ln N \quad (2.23)$$

Si osserva come a fissato t_{dyn} , t_{2b} sia maggiore all'aumentare di N e quello che ci si aspetta è che la stella di prova subisca un numero maggiore di urti. Tuttavia, il **rilassamento a due corpi** non dipende unicamente dal numero di **incontri**, ma anche dalle **variazioni di energia** che si verificano; difatti, $\Delta E_t \propto N \cdot E_{exc}$, dove E_{exc} in un incontro decresce come $m_f^2 \propto N^{-2}$ per cui $\Delta E_t \propto 1/N$. Quindi gli urti acquisiscono rilevanza nel momento in cui il sistema stellare è composto da un numero minore di oggetti e per questo motivo il sistema risulta collisionale (si può ragionare in maniera inversa nel caso di sistema non collisionale).

La **Tabella 2.1** sottostante riporta alcuni esempi astrofisici.

	N_*	$t_{dyn}(yr)$	$t_{2b}(yr)$	Proprietà
Galassia ellittica	10^{11}	2×10^8	$10^{15 \div 16}$	non collisionale
Ammasso globulare	$10^{5 \div 6}$	10^6	5×10^9	collisionale
Ammasso aperto	$10^{2 \div 3}$	10^6	10^7	collisionale

Tabella 2.1: Confronto tra t_{2b} e t_{dyn} per alcuni sistemi stellari

2.3 Confronto con il tempo di frizione dinamica

La **frizione dinamica** rappresenta un fenomeno fisico che causa il cosiddetto **raffreddamento** dell'orbita relativa dovuto alle interazioni a lungo raggio tra oggetti. Esso consiste nella decelerazione in direzione parallela alla velocità relativa iniziale che subisce la massa di prova in moto all'interno di un sistema infinito e omogeneo di masse di campo ed è dato unicamente da tutte quelle stelle che presentano una velocità minore rispetto ad m_t . Il tempo scala associato prende il nome di **tempo di frizione dinamica** e assume la seguente forma

$$t_{df} \equiv \frac{\|\mathbf{v}_t(-\infty)\|}{\|d\mathbf{v}_t/dt\|} \sim \frac{\|\mathbf{v}_t\|^3}{4\pi G^2 n_f m_f (m_f + m_t) \ln \Lambda \Xi(v_t)} \quad (2.24)$$

dove al denominatore compaiono, oltre al logaritmo di Coulomb visto in precedenza, anche la densità delle stelle di campo $\rho_f = n_f m_f$ e la massa totale $M = m_f + m_t$, la quale definisce due possibili regimi: $m_t \ll m_f$ e $m_t \gg m_f$; quest'ultimo riguarda oggetti particolarmente massivi in moto, come gli ammassi globulari in sistemi stellari. Confrontando t_{df} , (2.24), con t_{2b} , (2.20),

$$\frac{t_{df}}{t_{2b}} = \frac{2m_f}{m_f + m_t} \quad (2.25)$$

appare evidente, infine, come gli effetti della frizione dinamica siano presenti unicamente nel caso in cui il tempo di rilassamento a due corpi risulta di ordine minore rispetto a t_{df} , come negli ammassi aperti, ad esempio le Pleiadi, in cui $t_{2b} = 6 \times 10^7$ anni. Un aspetto della loro evoluzione è rappresentato dalla cosiddetta *escape* di stelle, le quali possono acquisire una velocità maggiore o uguale a quella di fuga. In tale caso, la frizione dinamica è in grado di prevenire la rapida disintegrazione di questi sistemi isolati.

Capitolo 3

Evoluzione dinamica dei sistemi collisionali

Gli ambienti particolarmente densi e collisionali, come gli ammassi globulari, sperimentano fenomeni evolutivi significativi a causa delle multiple interazioni ed eventualmente degli incontri fisici diretti che avvengono tra i diversi componenti del sistema. L'origine di un ammasso di stelle prende luogo in una grande nube di gas che, sotto determinate condizioni fisiche¹, collassa internamente portando alla formazione di un elevato numero di stelle: gli ammassi aperti contengono tra le decine e le centinaia di elementi, mentre gli **ammassi globulari** possiedono fino a $10^{5\div 6}$ stelle e sono considerati tra gli oggetti più vecchi della Via Lattea. Per questo motivo, ricoprono un ruolo importante nello studio dell'evoluzione stellare e saranno i protagonisti di questa sezione.

Durante un tempo dinamico, una stella tipica si muove nel sistema descrivendo un'orbita a rosetta² e conserva sia la sua energia che il suo momento angolare totali. Su tempi scala molto più lunghi, ovvero dell'ordine del tempo di rilassamento a due corpi, si è osservato come l'incontro con altri oggetti ne modifichi l'orbita. Come risultato finale, il sistema assume una distribuzione a simmetria sferica, l'energia viene trasferita dal centro verso l'esterno (**equipartizione dell'energia**) e le stelle cominciano a scappare da esso (**evaporazione gravitazionale**); conseguentemente, le regioni interne tendono ad acquisire maggior densità causando un fenomeno chiamato **catastrofe gravotermica** e, in seguito al **core collapse**, si possono formare stelle binarie: esse fungono da importante fonte di energia per le altre, aumentando così l'evaporazione, fino a che l'ammasso stellare si è dissolto completamente. Nel mentre, il sistema è soggetto a estese fluttuazioni di densità nel nucleo che prendono il nome di **oscillazioni gravotermiche**.



M13: ammasso globulare di Ercole
(*Crediti immagine:* Pugh M., NASA, 2012)

Di seguito vengono descritti più nel dettaglio i meccanismi riportati.

¹il limite per la massa è dato dalla massa di Jeans $M_J \propto T/\rho$; per cui all'aumentare della densità e al diminuire della temperatura del sistema, esso può essere superato e si verifica il collasso.

²tipologia di moto in cui si verifica un fenomeno di precessione, ovvero l'asse maggiore dell'ellisse ruota rispetto all'ipotetica orbita Kepleriana, descrivendo in questo modo la particolare forma da cui prende il nome.

3.1 L'equipartizione dell'energia e la segregazione di massa

Un effetto del rilassamento a due corpi è quello di portare il sistema stellare ad uno stato di equilibrio termodinamico, dove le stelle che lo compongono e che si collocano in un ampio intervallo di massa ($0.1 - 0.8M_{\odot}$) si ripartiscono l'energia tra di loro. Questo fenomeno è conosciuto come **equipartizione dell'energia** e si può ragionare in maniera analoga ai sistemi gassosi, dove la velocità media di una particella risulta inversamente proporzionale alla sua massa; difatti

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Questa condizione causa il manifestarsi della **segregazione di massa**, ovvero le stelle più massive perdono energia cinetica e cadono all'interno della buca di potenziale gravitazionale, ovvero si spostano nelle regioni centrali del sistema; d'altra parte, quelle meno massive acquisiscono energia cinetica e tendono a diffondersi nelle regioni più esterne. In questo modo viene a formarsi la cosiddetta struttura *core-halo*: il nucleo più denso si riscalda, mentre l'alone si presenta più rarefatto e freddo.

Attraverso una serie di simulazioni di ammassi globulari [*P. Bianchini et al., 2016*] si mostra come la dipendenza della dispersione di velocità dalla massa stellare $\sigma(m)$ può essere descritta dalla funzione esponenziale $\sigma^2 \propto e^{-(m/m_{eq})}$, dove il parametro m_{eq} quantifica il grado di equipartizione energetica: per $m \geq m_{eq}$ la pendenza della funzione corrisponde a quella totale, mentre per $m \leq m_{eq}$ si raggiunge solamente un livello parziale del fenomeno. Inoltre, viene dimostrata la presenza di una stretta correlazione tra m_{eq} e alcune proprietà del sistema, tra cui l'età e lo stato dinamico: difatti, gli ammassi più vecchi e che hanno fatto esperienza di oltre 20 tempi di rilassamento nel *core* sono più vicini allo stato di equipartizione energetica rispetto a quelli più giovani. In **Figura 3.1** viene riportata la dispersione di velocità in funzione della massa stellare $\sigma(m)$, sia in scala logaritmica (pannello di sinistra) che in scala lineare (pannello di destra). La funzione di best-fit riguarda unicamente la condizione $m \leq m_{eq}$ in cui la normalizzazione è data dal parametro σ_0 . La linea tratteggiata mostra la legge di potenza $\sigma \propto m^{-1/2}$ che indica la condizione di totale equipartizione, mentre la retta continua orizzontale interseca la curva in $m = m_{eq}$.

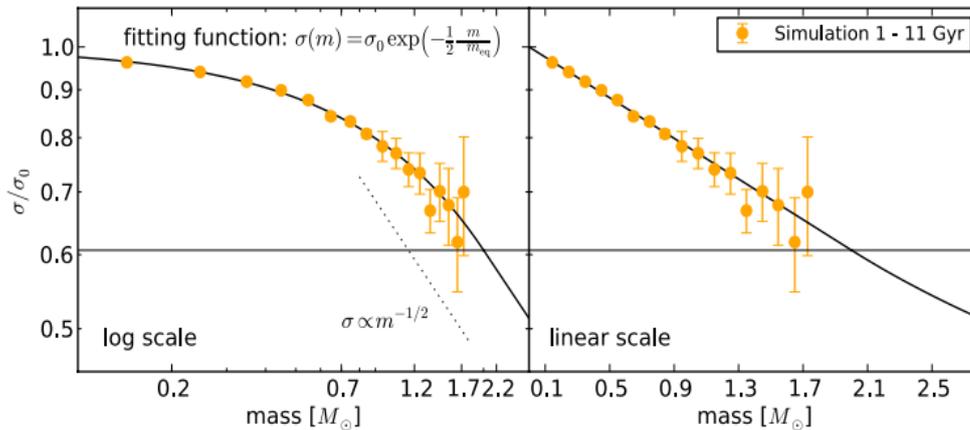


Figura 3.1: Simulazione della dipendenza della dispersione di velocità dalla massa

3.2 L'evaporazione gravitazionale e l'*ejection*

Il tempo di rilassamento a due corpi può essere anche interpretato come il tempo richiesto per impostare una distribuzione Maxwelliana³ delle velocità delle stelle e, da un punto di vista termodinamico, risulta inversamente proporzionale alla densità del sistema. Per questo motivo, l'evoluzione dovuta al rilassamento procede molto più rapidamente nelle regioni centrali rispetto a quelle più esterne, e una piccola, ma finita frazione del numero totale di stelle possiede una velocità che si trova nella coda della distribuzione ed eventualmente maggiore della velocità di fuga. Con il passare del tempo di rilassamento, ogni debole incontro rende l'orbita della stella sempre più elongata e fornisce ad essa sufficiente energia⁴ per vincere, infine, l'attrazione gravitazionale delle altre e fuggire dal sistema stellare. Risulta interessante come alcuni effetti mareali possano accelerare l'**evaporazione gravitazionale** delle stelle: il passaggio attraverso il disco galattico o il bulge per gli ammassi globulari e nelle vicinanze di nubi molecolari giganti per gli ammassi aperti. Inoltre, esiste anche un altro processo che porta alla perdita di massa dell'ammasso e che prende il nome di ***ejection***: esso consiste in una singola forte interazione a piccolo parametro d'impatto tra due stelle, in cui il cambiamento di velocità risulta confrontabile con le velocità iniziali delle due. Come risultato, una di esse viene espulsa dal sistema con $v \geq v_{esc}$.

Il tempo scala per l'evaporazione è legato al tempo di rilassamento a due corpi ed è ricavabile a partire dalla velocità di fuga in un punto \mathbf{x} di un sistema di densità $\rho(\mathbf{x})$, ovvero $v_e^2(\mathbf{x}) = -2\Phi(\mathbf{x})$. Da essa si determina la velocità di fuga media quadratica, $\langle v_e^2 \rangle = -4W/M$, dove M e W sono rispettivamente la massa totale e l'energia potenziale. In base al Teorema del Viriale, (2.1), si ottiene $\langle v_e^2 \rangle^{1/2} = 2\langle v^2 \rangle^{1/2}$, ovvero la velocità media di fuga pari a due volte la velocità media. La frazione di oggetti in una distribuzione Maxwelliana che soddisfa questa condizione è data da $\gamma = 7.38 \times 10^{-3}$, e quindi l'evaporazione è in grado di rimuovere γ stelle ogni tempo di rilassamento. Dunque, il tasso di perdita è

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\gamma N}{t_{2b}} = -\frac{N}{t_{evap}}$$

dove il **tempo di evaporazione gravitazionale** risulta pari a

$$t_{evap} = \frac{t_{2b}}{\gamma} \simeq 140t_{2b}$$

Esempio: Le Pleiadi. Le Pleiadi sono un gruppo di stelle nella costellazione del Toro che costituisce un ammasso aperto dell'età di circa 100 milioni di anni. A causa del numero ristretto di componenti, esso presenta un tempo di rilassamento non particolarmente lungo e questo gli consente di evolversi più rapidamente rispetto agli ammassi globulari. Difatti, le maggior parte delle stelle che lo compongono sono particolarmente giovani e presentano un colore bianco-azzurro. Ci si aspetta che questo ammasso si dissolva completamente per evaporazione gravitazionale nei prossimi 250 milioni di anni.

³funzione di distribuzione che fornisce la probabilità che una particella di massa m possieda una velocità compresa tra v e $v + dv$:

$$f(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

⁴ovvero $K > |U|$, tale per cui $E = K + |U| > 0$



M45: ammasso aperto delle Pleiadi
 (Crediti immagine: Fernandez-Sanchez A., NASA, 2007)

3.3 Il *core collapse* e la catastrofe gravotermica

In un ammasso globulare di tipo *core-halo* la regione centrale risulta essere fortemente auto-gravitante e presenta un calore specifico negativo. Questa condizione fa sì che la perdita di energia dovuta all'equipartizione e alla successiva evaporazione delle stelle determini il riscaldamento e la contrazione del nucleo. Conseguentemente, le stelle tendono ad aumentare la propria energia cinetica per compensare il guadagno di energia potenziale e accelerano in questo modo il restringimento, fino a causare il collasso del nucleo. Questo processo prende il nome di *core collapse* e insieme al flusso di calore diretto verso l'alone più freddo costituisce la **catastrofe gravotermica**.

La contrazione del nucleo comporta un aumento della densità centrale che porterebbe al manifestarsi di una singolarità, ovvero il raggiungimento di un punto di densità infinita in un tempo finito. Quest'ultimo processo può essere fermato dalla presenza di una fonte di energia, che per le stelle è rappresentata dalla combustione nucleare, mentre per gli ammassi globulari dalle **stelle binarie**. In questo caso bisogna considerare la possibilità che nella regione interna si verifichino incontri ravvicinati: essi possono generare una forte deformazione per effetto mareale con conseguente modifica delle orbite (*tidal capture*), oppure costituire temporanei sistemi a tre corpi che si riducono velocemente a due per la perdita del componente meno massivo (*3-body capture*). Tutti questi meccanismi sono in grado di formare sistemi binari che traferiscono energia cinetica tramite il rilassamento a due corpi a tutte quelle stelle che passano nelle vicinanze, favorendo l'evaporazione. Le cosiddette *hard binaries*, ovvero che possiedono un'energia di legame molto più intensa rispetto a quella media presente tra gli oggetti dell'ammasso, si trovano nella zona centrale e sono dunque particolarmente massive; esse tendono a raffreddarsi durante l'interazione con un'altra stella e a diventare sempre più legate, andando in questo modo a fermare il collasso del nucleo. Difatti, l'energia gravitazionale di formazione viene rilasciata come energia disponibile al sistema, causando l'espansione e il raffreddamento del nucleo, che a sua volta si contrae seguendo il principio esposto in precedenza. Queste ripetute espansioni e contrazioni sono note come **oscillazioni gravotermiche**, possono variare la densità centrale di qualche ordine di magnitudine e costituiscono un'instabilità dinamica. In **Figura 3.2** si riporta in scala semi-logaritmica la densità centrale in funzione del tempo (in unità del tempo di rilassamento di metà massa, t_{rh}): il picco iniziale è dato dal *core collapse*; l'evoluzione per sistemi con $N \leq 8000$ si mantiene stabile, mentre all'aumentare di N le oscillazioni assumono caratteristiche sempre più forti.

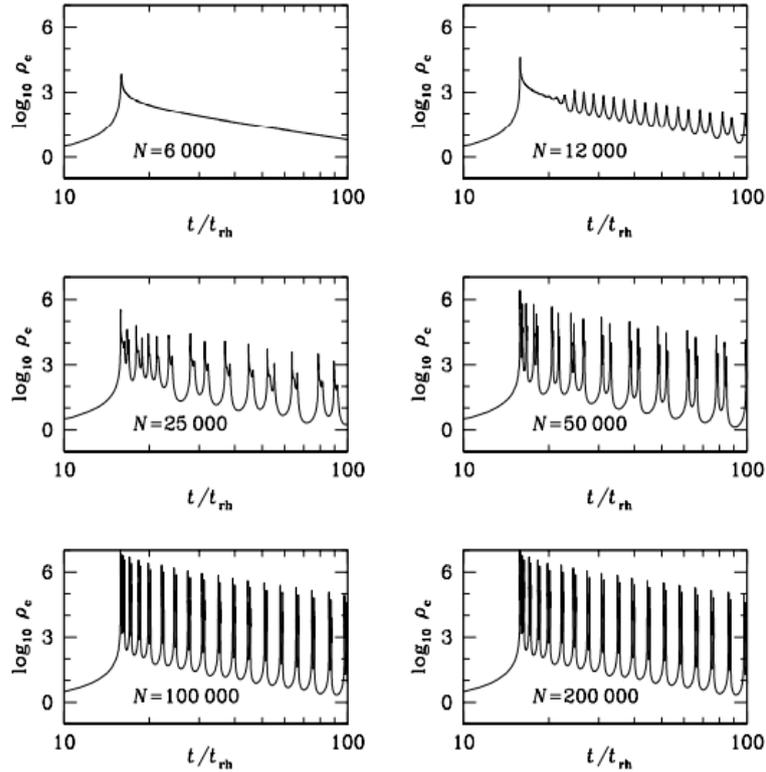


Figura 3.2: Oscillazioni gravotermiche in base al numero di componenti N (Crediti immagine: Breiden & Cohn, 1995)

Infine, sono state scoperte alcune stelle molto più giovani e massive rispetto alle altre, in grado di mantenersi nella sequenza principale al di sopra del punto *turn-off*: esse sono conosciute come **blue stragglers stars**, ovvero *stelle vagabonde blu* (vedi **Figura 3.3**). Si pensa che questa peculiarità sia dovuta ai processi che caratterizzano la loro formazione e le ipotesi avanzate sono diverse: il trasferimento di idrogeno da una compagna all'altra oppure la formazione di una stella più calda per collisione *head-on*.

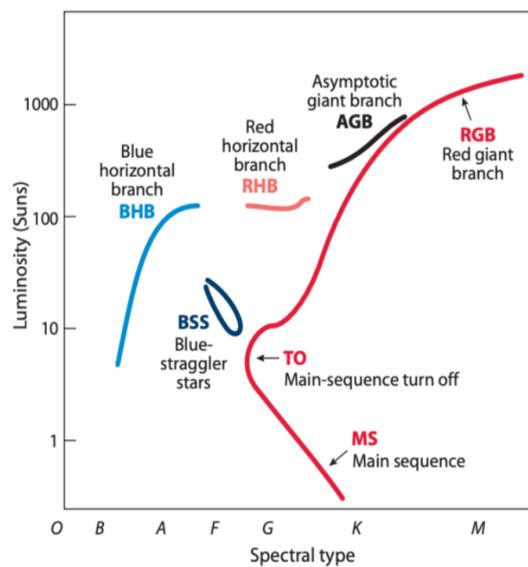


Figura 3.3: Diagramma HR: si evidenzia la posizione delle BSS rispetto alla sequenza principale e ai bracci orizzontali

Appendice A

Urti in astrofisica

Sentendo la parola **collisione** risulta naturale ed immediato ricondursi al concetto di **urto**, trattato in particolare in meccanica, chimica e termodinamica, e che dunque rappresenta un fenomeno diffuso e frequente nella realtà quotidiana: basti pensare che affinché si formino i legami e quindi si verifichino le reazioni chimiche, è necessario che avvenga un'interazione di questo tipo fra atomi e molecole.

Si consideri adesso un sistema stellare sferico di raggio r ed un numero N_* di stelle non puntiformi, distribuite omogeneamente al suo interno e aventi raggio caratteristico pari a quello solare ($R_\odot = 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$). L'urto geometrico tra due stelle si verifica nel momento in cui la distanza fra i due centri risulta minore di $2r$ e la sezione d'urto geometrica è data da $\sigma_* = 4\pi\sigma R_\odot^2$. Ad ogni stella risulta associato un volume totale spazzato pari a $\lambda_g\sigma_*$, il quale, eguagliato al volume totale a disposizione, fornisce

$$N_*\lambda_g\sigma_* = \frac{4\pi}{3}r^3 \quad (\text{A.1})$$

ovvero

$$\frac{\lambda_g}{2r} = \left(\frac{r}{R_\odot}\right)^2 \frac{1}{6N_*} \quad (\text{A.2})$$

Il parametro λ_g indica una stima, come ordine di grandezza, del percorso medio che una stella può effettuare senza sperimentare collisioni geometriche con un qualunque altro oggetto del sistema. Per ricavarlo si può considerare, ad esempio, una galassia ellittica ed un ammasso globulare aventi rispettivamente come valori per N_* ed r le coppie (1011; 104 pc) e (106; 10 pc) e velocità caratteristiche delle stelle v_* dell'ordine di qualche centinaio di chilometri al secondo e di poche decine di chilometri al secondo: nel primo caso si ottiene $\lambda_g/2r \simeq 3 \times 10^{11}$, mentre nel secondo $\lambda_g/2r \simeq 3 \times 10^{10}$; nell'ipotesi in cui questi sistemi possiedano l'età dell'Universo, risulta $\lambda_g/v_*t_H \simeq 10^9$ per le galassie ellittiche e $\lambda_g/v_*t_H \simeq 10^6$ per gli ammassi globulari.

Dunque, nei sistemi stellari di questo tipo si può **escludere** la possibilità di collisioni geometriche anche su scale temporali molto più lunghe dell'età stessa dell'Universo, poiché le stelle dovrebbero percorrere decine se non centinaia di miliardi di volte il raggio del sistema affinché si verifichi questo fenomeno. È comunque importante ricordare che in determinate condizioni astrofisiche, come ad esempio in zone di densità stellare particolarmente elevata, quali le regioni centrali delle galassie, la probabilità di avere collisioni fisiche tra stelle non è trascurabile.

Bibliografia

- [1] **L. Ciotti**, *Astrofisica extragalattica*, appunti lezione, 2022
- [2] **L. Ciotti**, *Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol 5-A – La Matematica nella Società e nella Cultura, n.1, p. 97-141, 2002
- [3] **L. Ciotti**, *Appunti di dinamica stellare*, Bertinoro, 2006
- [4] **L. Ciotti**, *Introduction to stellar dynamics*, Cambridge University Press, 2021
- [5] **S. Chandrasekhar**, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover Phoenix Edition, I - II edizione, 1960 - 2005
- [6] **J. Binney, S. Tremaine**, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, II edizione, 2008
- [7] **G. Bertin**, *Dynamics of Galaxies*, Cambridge University Press, 2014
- [8] **H. Karttunen, P. Kroeger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner**, *Fundamental Astronomy*, Springer Berlin Heidelberg, 2016
- [9] **P. Bianchini, G. van de Ven, M. A. Norris, E. Schinnerer, A. L. Varri**, *A novel look at energy equipartition in globular clusters*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 458:3644–3654, 2016, <https://doi.org/10.1093/mnras/stw552>
- [10] **J. D. Adams, J. R. Stauffer, D. G. Monet, M. F. Skrutskie, C. A. Beichman**, *The mass and structure of the Pleiades star cluster from 2mass*, The Astronomical Journal, 121:2053-2064, 2001, <https://doi.org/10.1086/319965>
- [11] **S. G. Djorgovski**, *The Dynamic Lives of Globular Clusters*, Sky Publishing Corporation, 1998
- [12] **M. J. Benacquista, J. M. B. Downing**, *Relativistic Binaries in Globular Clusters*, Living Reviews in Relativity, 16, 4, 2013, <https://doi.org/10.12942/lrr-2013-4>

Ringraziamenti

Non sono mai stata una persona di molte parole, ma di pochi ed essenziali pensieri e le righe che seguono rispecchieranno a pieno questa parte del mio carattere.

In primis, vorrei ringraziare i miei genitori, mio fratello maggiore e la mia famiglia in generale che con pazienza e ottimismo hanno saputo seguirmi e supportarmi non solo in questo percorso, ma anche in tutta la fase precedente di costruzione della persona che sono oggi.

L'esperienza universitaria è ricca di novità e di emozioni, sia positive che negative, e mi ritengo fortunata ad aver avuto amici veri e sinceri con cui condividere questi momenti speciali: compagni di una vita a Bolzano, impareggiabili coinquilini e colleghi a Bologna.

Un grazie sentito alla mia migliore amica che ormai da tempo è il mio punto di riferimento, la mia consigliera fidata e la mia sostenitrice numero uno.

Un pensiero anche ai miei nonni che ormai non ci sono più e che avrei tanto voluto fossero presenti in questo giorno importante. A loro dedico questo mio lavoro.

Infine, ringrazio me stessa, per la tenacia, la pazienza e la costanza che mi hanno permesso di raggiungere sempre gli obiettivi prefissati. Sono fiera di aver concluso questo capitolo della mia vita ed entusiasta di aprire le porte a quello futuro.