

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Equazioni di stato della materia in astrofisica

Presentata da:
Matteo Cianfaglione

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa

Indice

1	Equazioni e funzioni di stato	1
1.1	Gas perfetti	3
1.2	Gas degeneri	4
2	Interni stellari	7
2.1	Gas perfetto	7
2.2	Pressione di radiazione	8
2.3	Pressione di degenerazione	9
2.4	Parametro di degenerazione	10
2.5	Piano $\log(\rho) - \log(T)$	11
2.6	Casi astrofisici	13
2.6.1	Sole	13
2.6.2	Nane bianche	14

Introduzione

Le Equazioni di Stato (EdS) sono equazioni che permettono di descrivere un qualsiasi sistema in equilibrio termodinamico mettendo in relazione varie funzioni di stato. Un esempio di questi sistemi sono i gas che possono essere gas non degeneri, come i gas perfetti che obbediscono all'equazione di stato $PV = nRT$, o gas degeneri in cui entrano in gioco importanti principi di meccanica quantistica.

Le stelle sono formate da gas a temperature molto elevate, questo fa sì che gli atomi presenti siano completamente ionizzati, formando così una separazione del gas in un gas di elettroni ed in un gas di ioni che danno contributi diversi sulla pressione totale interna della stella. Oltre a queste due pressioni è presente anche quella esercitata dai fotoni, detta pressione di radiazione. Le EdS ci permettono di descrivere gli interni stellari studiando i vari contributi alla pressione totale, permettendoci di capire quale sia quello dominante e in che regime si trovi il gas. In base alla temperatura e alla densità il gas di elettroni può comportarsi come gas perfetto o come gas degeneri, mentre il gas di ioni invece si comporta quasi sempre come gas perfetto. Per descrivere il regime di pressione presente all'interno di una stella si usa il diagramma $\log(\rho) - \log(T)$, in cui la stella è rappresentata come un punto identificato dalla densità e dalla temperatura. In questo modo si vede che le stelle di sequenza principale si trovano nel regime di gas perfetto, quindi la pressione all'interno della stella è data dalla somma della pressione esercitata dal gas di elettroni e da quella esercitata dal gas di ioni. I corpi compatti, invece, sono formati da gas degeneri, un esempio sono le nane bianche in cui il gas elettronico è in condizione di completa degenerazione. Il gas degeneri può essere non relativistico o relativistico e la differenza tra questi due regimi dipende soltanto dalla densità del gas. Nel caso di una stella in sequenza principale possiamo utilizzare l'equazione di stato e il principio di equilibrio idrostatico per ricavare la temperatura interna e il contributo della pressione di radiazione. Per le nane bianche possiamo determinare le condizioni di equilibrio, collasso ed espansione ed anche ricavare una relazione che ci permette di stimare il raggio della stella conoscendone la massa.

Capitolo 1

Equazioni e funzioni di stato

Un'equazione di stato (EdS) è un'equazione che mette in relazione diverse funzioni di stato (cioè delle funzioni di parametri termodinamici) di un sistema, un esempio è l'EdS dei gas perfetti che lega la pressione P di un gas con la sua densità ρ e la sua temperatura assoluta T , che si può esprimere come:

$$P = P(\rho, T) \quad (1.1)$$

Le EdS infatti ci permettono di descrivere un qualsiasi sistema in equilibrio termodinamico, cioè sistemi in cui le grandezze termodinamiche non dipendono dal tempo.

Per ricavare le EdS consideriamo un sistema microcanonico, cioè un sistema formato da N sotto-sistemi canonici (sistemi che possono scambiare soltanto calore con l'ambiente circostante) distinguibili e identici. Considerando n_α il numero di sotto-sistemi per un dato livello energetico ϵ_α (con α numero intero non negativo per indicare lo stato) e g_α la molteplicità del livello energetico, possiamo definire le principali relazioni che legano le funzioni di stato:

$$Z_c(T, V) = \sum_{\alpha} g_{\alpha} e^{-\beta \epsilon_{\alpha}} \quad (1.2)$$

$$E(T, V) = - \left(\frac{\partial \ln(Z_c)}{\partial \beta} \right)_V = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \quad (1.3)$$

$$S(T, V) = k \ln(Z_c) + \frac{E}{T} = k \sum_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \ln \left(\frac{g_{\alpha}}{\tilde{\rho}_{\alpha}} \right) \quad (1.4)$$

$$\Phi(T, V) = E - TS = -kT \ln(Z_c) \quad (1.5)$$

$$P(T, V) = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_T = kT \left(\frac{\partial \ln(Z_c)}{\partial V} \right)_T \quad (1.6)$$

Avendo k costante di Boltzmann e posto $\beta = \left(\frac{1}{kT} \right)$ si ha:

- Z_c funzione di partizione canonica (FPC);
- $\tilde{\rho}_{\alpha}$ probabilità che il singolo sistema occupi il livello energetico considerato;

- $S(T, V)$ entropia del sistema;
- $\Phi(T, V)$ energia libera di Helmholtz del sistema, utile per esprimere le EdS come relazione tra P , T e V e indica la quantità di lavoro macroscopico che il sistema può compiere sull'ambiente.

Quando il volume V di confinamento del sistema diventa arbitrariamente grande i livelli energetici diventano abbastanza vicini da poter utilizzare l'approssimazione del Limite del Continuo (LC), nella quale le somme si trasformano in integrali. Le trasformazioni effettuate sono le seguenti:

$$V \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

$$\epsilon_\alpha \rightarrow \epsilon \quad (1.8)$$

$$g_\alpha \rightarrow g(\epsilon; T, V)d\epsilon \quad (1.9)$$

$$\rho_\alpha \rightarrow \frac{g(\epsilon; T, V)e^{-\beta\epsilon}}{Z_c}d\epsilon = \rho_c d\epsilon \quad (1.10)$$

$$Z_c \rightarrow \int e^{-\beta\epsilon} g(\epsilon; T, V)d\epsilon \quad (1.11)$$

La quantità differenziale $g(\epsilon; T, V)d\epsilon$ rappresenta il numero di stati quantici compresi tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$, mentre $\rho_c d\epsilon$ dà la probabilità che il sistema canonico abbia energia compresa tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$ ed è detta distribuzione canonica. La condizione di validità del LC si esprime nel seguente modo:

$$(\epsilon_1 - \epsilon_0) \ll kT \quad (1.12)$$

che è la richiesta che il salto quantico tra il primo livello energetico eccitato ed il livello fondamentale sia molto minore dell'energia termica kT .

Possiamo infine dire che se è valido il Limite Termodinamico (LT):

$$\lim_{N, V \rightarrow \infty} \frac{N}{V} < \infty \quad (1.13)$$

il sistema è scomponibile in un numero N di sottosistemi (con N arbitrariamente grande) che è compatibile con il volume (anch'esso arbitrariamente grande).

Quando consideriamo un sistema di N particelle massive, puntiformi e libere di muoversi in un determinato volume possiamo avere due casi possibili di studio:

- i gas perfetti (o non degeneri);
- i gas degeneri.

Questi due casi sono trattati nelle seguenti sezioni e sono molto importanti nello studio degli interni stellari.

1.1 Gas perfetti

Il gas perfetto in generale si definisce come un sistema senza campi esterni presenti di N particelle puntiformi di massa m che non presentano struttura interna (nel caso di particelle atomiche e subatomiche si trascura quindi lo spin) e sono libere di muoversi in un volume V . Per avere un gas perfetto è necessario che sia rispettata la condizione di non degenerazione, in questo modo le particelle scambiano energia solo attraverso gli urti. La condizione di non degenerazione è data dal limite di non degenerazione:

$$\frac{n_\alpha}{g_\alpha} \ll 1 \quad (1.14)$$

dove n_α è la popolazione all'equilibrio del livello di energia minima. Questo limite ci dice che la probabilità che almeno uno dei g_α stati disponibili sia occupato da più di un sistema è molto piccola, in questo caso si traduce nella piccola probabilità che due particelle occupino lo stesso stato energetico, possiamo infatti considerare ogni particella come un sistema canonico. Nel LC le relazioni per un gas perfetto hanno le seguenti forme:

$$Z_c^{gp} = \left[\frac{V(2\pi mkT)^{3/2} e}{Nh_p^3} \right]^N \quad (1.15)$$

$$E = \frac{3}{2} NkT \quad (1.16)$$

$$S = Nk \ln \left(\frac{V(2\pi mkT)^{3/2} e^{5/2}}{Nh_p^3} \right) \quad (1.17)$$

$$\Phi = -NkT \ln \left(\frac{V(2\pi mkT)^{3/2} e}{Nh_p^3} \right) \quad (1.18)$$

$$P = \frac{NkT}{V} = \frac{nRT}{V} \quad (1.19)$$

$$\mu = -kT \ln \left(\frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{Nh_p^3} \right) \quad (1.20)$$

Dove $h_p = 6.626 \times 10^{-27}$ erg · s è la costante di Planck e μ è il potenziale chimico, cioè la quantità di energia libera che si fornisce o rimuove al sistema per aggiungere un sotto-sistema mantenendo la temperatura ed il volume costanti. È importante notare che se nella (1.17) il logaritmo fosse minore di 1 si avrebbe $S < 0$, violando però la condizione di non degenerazione. Un'altra nota importante riguarda la (1.19): è l'Equazione dei Gas Perfetti, espressa spesso nella forma $PV = nRT$ con n numero di moli ed $R = kN_A$ costante dei gas ($N_A = 6.022 \times 10^{23}$ mol⁻¹ è il numero di Avogadro).

Una proprietà importante da considerare quando si studia un gas è la distribuzione di probabilità, che si può esprimere in funzione dell'impulso \mathbf{p} , anche se per comodità di confronto con i dati sperimentali si esprime in funzione della velocità \mathbf{v} . Nel caso dei gas perfetti la distribuzione è detta distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Per ottenere

la distribuzione di probabilità si deve partire dalla Distribuzione Canonica (DC). Detto Ω lo spazio di volume V in cui è confinato il sistema, la DC è:

$$\rho_c(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{e^{-\beta \mathbf{p}^2/(2m)}}{V(2\pi mkT)^{3/2}} & \text{per } \mathbf{r} \in \Omega \\ 0 & \text{per } \mathbf{r} \notin \Omega \end{cases} \quad (1.21)$$

Se si integra questa funzione sulle componenti dell'impulso si ottiene la distribuzione di probabilità spaziale, che risulta essere uniforme in Ω e nulla al di fuori, ci dice quindi che le particelle si distribuiscono in modo uniforme nel volume perché non ci sono campi esterni che possono favorire determinate regioni spaziali. Integrando invece la DC sulle componenti della posizione si ottiene la distribuzione di probabilità in funzione dell'impulso, per esprimerla in funzione della velocità basta risolvere l'uguaglianza $\rho_p(\mathbf{p})d\mathbf{p} = \rho_v(\mathbf{v})d\mathbf{v}$ che ci porta all'espressione della distribuzione di Maxwell-Boltzmann:

$$\rho_v(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\beta m \mathbf{v}^2/2} \quad (1.22)$$

che si può vedere graficata nella figura sottostante.

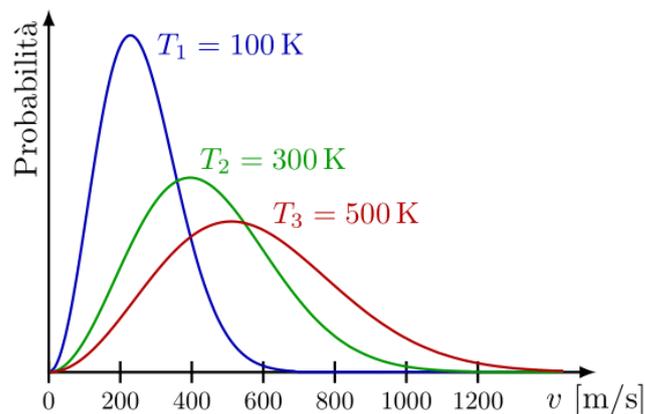


Figura 1.1: grafico della distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Sono presenti tre curve diverse in funzione della temperatura. Da notare come la velocità di spostamento più probabile cresce con la temperatura e allo stesso tempo che la curva si abbassa e si allarga, aumentando la probabilità di avere velocità maggiori.

Il massimo corrisponde alla velocità di spostamento più probabile, $v_T = \sqrt{2kT/m}$, che cresce con la radice della temperatura. Si può anche vedere che è nulla la probabilità di avere particelle completamente ferme.

1.2 Gas degeneri

I gas degeneri sono considerabili in prima approssimazione come sistemi formati da N particelle massive puntiformi in cui non è rispettata la condizione di non degenerazione.

Prima di proseguire parlando dei gas degeneri è importante distinguere due tipi di particelle:

- i Bosoni, che seguono la statistica di Bose-Einstein e hanno spin intero (per esempio i fotoni);
- i Fermioni, che seguono la statistica di Fermi-Dirac e hanno spin semi-intero (un esempio sono gli elettroni).

Nel caso dei Fermioni, per via del Principio di Esclusione di Pauli, non è possibile che due particelle occupino lo stesso stato, quindi ognuno di essi o è occupato da una singola particella o è uno stato vuoto.

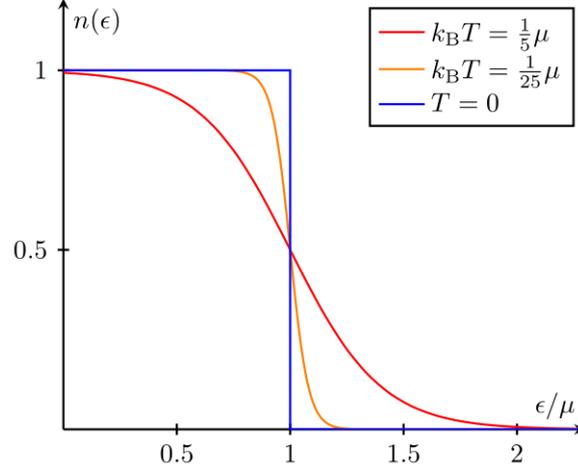


Figura 1.2: grafico della distribuzione di Fermi-Dirac. Si può vedere molto bene come per temperature tendenti allo zero assoluto gli stati energetici di energia inferiore a quella di Fermi sono tutti occupati da una sola particella, con l'aumentare della temperatura a fissato potenziale chimico l'occupazione tende a diminuire.

In figura è possibile vedere la distribuzione di Fermi-Dirac a diverse temperature, che è descritta dalla seguente funzione:

$$f(\epsilon) = \left\{ \exp\left(\frac{(\epsilon - \mu)}{kT}\right) + 1 \right\}^{-1} \quad (1.23)$$

Il più alto valore di energia occupato nello stato fondamentale è detto energia di Fermi e si indica con ϵ_F .

Sempre nel caso fermionico abbiamo che il numero di stati del gas di Fermioni indistinguibili è:

$$W_{FD} = \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}!}{n_{\alpha}!(g_{\alpha} - n_{\alpha})!} \quad (1.24)$$

mentre nel caso dei Bosoni si ha:

$$W_{BE} = \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(g_{\alpha} - 1 + n_{\alpha})!}{n_{\alpha}!(g_{\alpha} - 1)!} \quad (1.25)$$

Da qui otteniamo le popolazioni dei livelli

$$n_{\alpha} = \frac{g_{\alpha}}{\exp(\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)) \pm 1} \quad (1.26)$$

che ci permettono di ricavare le varie equazioni di stato, tra cui l'energia libera di Helmholtz:

$$\Phi = \mu N \mp kT \sum_{\alpha=0}^{\infty} g_{\alpha} \ln [1 \pm \exp(-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu))] \quad (1.27)$$

Dove nella notazione con i doppi segni \pm e \mp quelli superiori si riferiscono al caso dei Fermioni e quelli inferiori al caso dei Bosoni. Si noti anche che μ è il potenziale chimico già visto, che si può esprimere come:

$$\mu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{T,V} \quad (1.28)$$

Il potenziale chimico nel caso dei Fermioni può essere positivo e rappresenta una resistenza all'aggiunta di ulteriori particelle al sistema, generando la Pressione di Degenerazione, nel caso bosonico il termine deve essere necessariamente negativo (o nullo) e genera la Pressione di Radiazione.

Si vede che nel limite classico di bassa occupazione per livello energetico entrambe le distribuzioni tendono alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

Quando si tratta il caso del LC per i gas degeneri bisogna tenere in considerazione la possibilità che i livelli energetici ϵ_{α} dipendano dallo spin o da altri gradi di libertà interni. Quando si trascurano i campi esterni e sottintendendo il potenziale di confinamento si può scrivere l'Hamiltoniana generica di una particella nel seguente modo:

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) = \frac{p^2}{2m} + h_{int}(\xi) \quad (1.29)$$

dove ξ indica i parametri che caratterizzano la struttura interna della particella. Sempre per il LC si hanno le seguenti sostituzioni:

$$\epsilon_{\alpha} \rightarrow h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) \quad (1.30)$$

$$g_{\alpha} \rightarrow g_{\xi} \frac{d\mathbf{p}dr}{h^3} \quad (1.31)$$

$$n_{\alpha} \rightarrow n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) d\mathbf{p}dr \quad (1.32)$$

da cui scriviamo alcune funzioni di stato

$$n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) d\mathbf{p}dr = \frac{1}{h^3} \frac{g_{\xi}}{e^{\beta(h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) - \mu)} \pm 1} \quad (1.33)$$

$$\Phi = \mu N \mp \frac{kT}{h^3} \sum_{\xi} g_{\xi} \int \ln (1 \pm e^{\beta(h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) - \mu)}) d\mathbf{p}dr \quad (1.34)$$

$$N = \frac{1}{h^3} \sum_{\xi} \int \frac{g_{\xi}}{e^{\beta(h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \xi) - \mu)} \pm 1} d\mathbf{p}dr \quad (1.35)$$

Capitolo 2

Interni stellari

Per via delle temperature dell'ordine delle decine o centinaia di milioni di Kelvin presenti negli interni stellari (soprattutto nei nuclei) le stelle sono formate da un gas di elettroni e di ioni, infatti a temperature così elevate tutti gli elettroni hanno energia sufficiente per separarsi dall'atomo a cui sono legati, indipendentemente dal livello energetico occupato. Per via di questa separazione tra le particelle la materia può essere più facilmente compressa e raggiungere pressioni molto più elevate di quanto potrebbe in casi in cui gli atomi non fossero completamente ionizzati. La pressione negli interni stellari è data quindi da una combinazione tra la pressione del gas (data dalla pressione ionica e dalla pressione elettronica) e la pressione di radiazione. Si esprime in modo generale come $P = P_g + P_r$, dove P_g indica la pressione del gas e P_r è la pressione di radiazione. In base al caso astrofisico la P_r può essere molto più piccola della P_g ma anche avere valore confrontabile o maggiore.

Nella seguente tabella sono riportate alcune delle costanti fisiche ed astrofisiche che verranno utilizzate nel corso del capitolo:

Quantità	Simbolo	Valore
Numero di Avogadro	N_A	$6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Costante di Boltzmann	k	$1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$
Costante dei gas	R	$8.31 \times 10^7 \text{ erg mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Massa dell'atomo di Idrogeno	H	$1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$
Costante della pressione di radiazione	a	$7.6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$
Costante di Planck	h	$6.626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$
Massa dell'elettrone	m_e	$9.109 \times 10^{-28} \text{ g}$
Raggio del Sole	R_\odot	$6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$
Massa del Sole	M_\odot	$1.98 \times 10^{33} \text{ g}$
Costante di gravitazione universale	G	$6.67 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$

2.1 Gas perfetto

Possiamo trattare il plasma come un gas perfetto, con la condizione che l'interazione coulombiana fra particelle sia trascurabile rispetto alla loro energia cinetica. Dalla termodinamica statistica abbiamo già ricavato l'Equazione di Stato dei Gas Perfetti, che ricordiamo si può scrivere come $PV = nRT$. Sapendo che $R = kN_A$ e che il numero

totale di particelle $N = nN_A$, possiamo sostituirli nella formula ottenendo:

$$P = \frac{N_A n k T}{V} = \frac{N}{V} k T \quad (2.1)$$

Andando a moltiplicare e dividere per la massa media delle particelle del gas, che si esprime $\bar{m} = \mu H$ (con μ peso molecolare medio) e che può essere usata per ottenere la massa totale del gas $M = N\bar{m}$, si ottiene la seguente espressione per la pressione:

$$P = \frac{M}{V} \frac{k T}{\bar{m}} = \rho \frac{k T}{\mu H} \quad (2.2)$$

con ρ densità del gas. Ciò che resta da trovare è quindi il peso molecolare medio μ , che dipende dal grado di ionizzazione del gas. Negli interni stellari gli elementi più leggeri sono considerabili completamente ionizzati, possiamo quindi esprimere il peso molecolare medio nel seguente modo:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_j \frac{1 + Z_j}{A_j} X_j \quad (2.3)$$

dove Z_j è il numero atomico, A_j è il peso atomico e X_j è la frazione in massa dell'elemento considerato. Andando a sostituire quindi i valori e prendendo come approssimazione $A \simeq 2Z$ per tutti gli elementi più pesanti dell'Elio, si ottiene:

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \quad (2.4)$$

dove X è l'abbondanza di idrogeno, Y è l'abbondanza di Elio e Z è l'abbondanza di metalli. È anche importante ricordare che $X + Y + Z = 1$.

Per un gas di elettroni si ha:

$$\frac{1}{\mu_e} = \frac{1}{2}(X + 1) \quad (2.5)$$

e nel caso in cui una stella abbia bruciato tutto l'idrogeno presente $\mu_e = 2$.

2.2 Pressione di radiazione

Come è stato già anticipato anche la radiazione fornisce un proprio contributo alla pressione totale della stella che viene detta pressione di radiazione e vale:

$$P_r = \frac{aT^4}{3} \quad (2.6)$$

Questo perché i fotoni sono particelle senza massa ma con energia e di conseguenza possiedono quantità di moto e possono quindi interagire con le particelle scambiando energia attraverso i meccanismi di scattering (Thomson, Compton). La pressione di radiazione dipende maggiormente dalle interazioni con gli elettroni perché è legata alla sezione d'urto σ , che a sua volta dipende dalla massa della particella con la proporzionalità $\sigma_T \propto m^{-2}$. Si vede facilmente che la pressione di radiazione è dominante a temperature molto elevate ed è la causa dei venti stellari che si originano nelle atmosfere stellari. Dall'equazione dei gas perfetti si ricava che $T \propto P/\rho \propto M/R$, facendo il rapporto con la pressione gravitazionale ottenuta dall'equilibrio idrostatico si vede che $\frac{P_r}{P_{grav}} \propto M^2$, quindi la pressione di radiazione causa venti stellari più intensi in stelle massicce.

2.3 Pressione di degenerazione

Quando la densità del gas diventa troppo elevata o la temperatura tende allo zero assoluto si può arrivare al caso del gas degenerare e quindi alla pressione di degenerazione, per via delle proprietà già viste dei Fermioni. La degenerazione avviene in genere nelle regioni interne di stelle più evolute dove l'abbondanza di idrogeno è quasi nulla.

Vediamo quindi come determinare il limite di degenerazione, sappiamo che i Fermioni obbediscono a due principi quantistici molto importanti: il principio di esclusione di Pauli ed il principio di indeterminazione di Heisenberg.

Per via del dualismo onda-particella possiamo esprimere una lunghezza d'onda associata ad ogni particella $\lambda = \frac{h}{(2mkT)^{1/2}}$, se la distanza tra le particelle è maggiore di λ si può ignorare il comportamento ondulatorio. Possiamo interpretare il principio di esclusione come la richiesta che la distanza media fra due particelle sia maggiore delle loro lunghezze d'onda, indicando con r la distanza questa richiesta si traduce in:

$$r > \frac{h}{(2mkT)^{1/2}} \quad (2.7)$$

Questa condizione si può esprimere in funzione della temperatura, della densità e della massa delle paricelle nel seguente modo:

$$T > 2.4 \times 10^{-22} \frac{\rho^{2/3}}{m} \quad (2.8)$$

che è la condizione di non degenerazione, da qui capiamo come la degenerazione si possa ottenere per basse temperature o per alte densità. A parità di densità le particelle più leggere raggiungono prima la condizione di degenerazione, quindi è possibile, nei plasmi stellari, che gli elettroni siano in una condizione di degenerazione e gli ioni no.

Ricaviamo adesso il contributo alla pressione da parte di un gas degenerare a partire dall'espressione della distribuzione di Fermi-Dirac, che in funzione dell'impulso è data da:

$$N_e dp = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp \quad (2.9)$$

dove N_e è il numero di particelle per unità di volume. Integrando l'espressione della distribuzione otteniamo il seguente risultato:

$$N_e = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 = \frac{\rho}{\mu H} \quad (2.10)$$

A partire dall'uguaglianza, si può ricavare il valore del momento di Fermi p_F , che corrisponde alla quantità di moto della particella che si trova nel livello dell'energia di Fermi.

Sapendo che la pressione di un gas è legata alla distribuzione delle particelle secondo l'espressione:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty N(p) p v dp \quad (2.11)$$

esplicitando l'espressione della distribuzione di Fermi-Dirac otteniamo:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi}{h^3} p^3 v dp \quad (2.12)$$

in cui la velocità è lasciata esplicita perché utile per distinguere e trattare i casi di degenerazione non relativistica e di degenerazione relativistica.

Caso non relativistico: in questo caso si ha $p_F \ll m_e c$ e possiamo assumere senza problemi che $p = mv$. Sostituendo l'espressione dell'impulso nell'integrale (2.12) si ottiene la seguente espressione per la pressione:

$$P = k_1 \rho^{5/3} = 10^{13} \mu_e^{-5/3} \rho^{5/3} \quad (2.13)$$

Caso relativistico: si ha in questo caso $p_F \sim m_e c$, dobbiamo considerare l'espressione per l'impulso relativistico $p = \gamma m_e v$. Il risultato dell'integrale (2.12) è:

$$P = k_2 \rho^{4/3} = 1.2 \cdot 10^{15} \mu_e^{-4/3} \rho^{4/3} \quad (2.14)$$

2.4 Parametro di degenerazione

Per trattare il passaggio da gas perfetto a gas degenere si può utilizzare il parametro di degenerazione Ψ . È un numero reale che dipende dalla temperatura e dalla densità del gas, più è piccolo come valore e più il gas tende a comportarsi come un gas perfetto. Il parametro Ψ si esprime nel seguente modo:

$$\Psi \propto \frac{1}{kT} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (2.15)$$

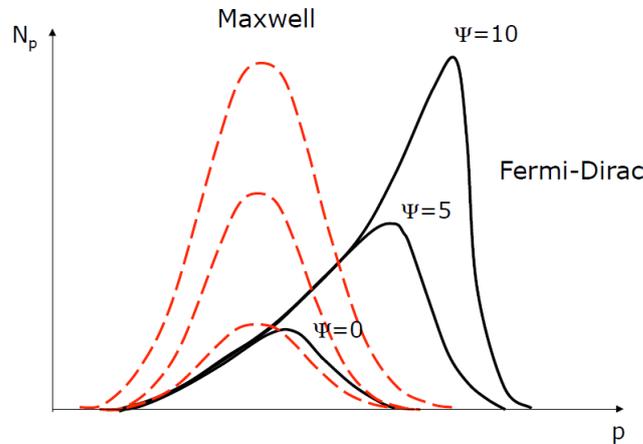


Figura 2.1: andamento della distribuzione statistica generalizzata in funzione del parametro Ψ . Le curve rosse tratteggiate indicano l'andamento del gas se non ci fosse mai condizione di degenerazione, le curve nere invece indicano l'andamento effettivo in funzione di Ψ . (Fonte: F. R. Ferraro, *Astrofisica Stellare, Dispense, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2021*.)

Il parametro di degenerazione è usato per esprimere l'indice di occupazione $\Pi(E) = n(E)/g(E)$ all'interno di un gas, dove $n(E)$ è il numero di particelle con energia E e $g(E)$ è la molteplicità dello stato energetico di energia E . Per la distribuzione di Maxwell si ha:

$$\Pi(E) \propto \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{kT} - \Psi\right)} \quad (2.16)$$

mentre per la distribuzione di Fermi-Dirac:

$$\Pi(E) \propto \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{kT} - \Psi\right) + 1} \quad (2.17)$$

Possiamo usarlo per definire una distribuzione statistica delle particelle generalizzata data dalla seguente espressione:

$$N_p dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p^2}{\exp\left(\frac{p^2}{2mkT} - \Psi\right) + 1} dp \quad (2.18)$$

Dalla Fig. 2.1 si vede che quando $\Psi \lesssim 0$ possiamo assumere la distribuzione come maxwelliana, quando invece $\Psi \gtrsim 10$ la distribuzione è quasi esattamente pari a quella di Fermi-Dirac e quindi il gas è in regime di forte degenerazione.

2.5 Piano $\log(\rho) - \log(T)$

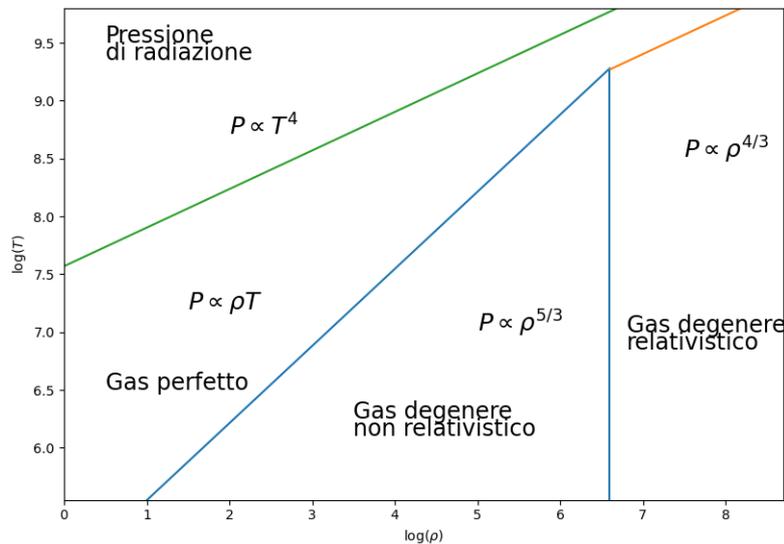


Figura 2.2: diagramma $\log(\rho) - \log(T)$. In base ai valori di densità e temperatura interne delle stelle permette di capire che regime di pressione è dominante al loro interno. È importante notare come i gas degeneri non abbiano dipendenza dalla temperatura.

L'equazione di stato per gli interni stellari si può esprimere nel seguente modo:

$$P = \frac{aT^4}{3} + \frac{k\rho T}{\mu_i H} + \begin{cases} \frac{k\rho T}{\mu_e H} & \text{gas non degenerare} \\ k_1 \rho^{5/3} & \text{gas degenerare non relativistico} \\ k_2 \rho^{4/3} & \text{gas degenerare relativistico} \end{cases} \quad (2.19)$$

In base ai valori di densità e temperatura si può avere un gas in un determinato regime di pressione rispetto ad un altro e si può determinare facilmente dal grafico 2.2, che

rappresenta il diagramma $\log(\rho) - \log(T)$. Questo grafico si ottiene considerando i vari contributi alla pressione totale, vediamo quali sono quindi i limiti tra i vari regimi:

- il limite tra il regime di pressione di radiazione e il regime di gas perfetto si ottiene eguagliando i contributi delle omonime pressioni, ottenendo la retta $\log(T) = \frac{1}{3} \log(\rho) + 7.57$, sopra questa retta si ha il regime di pressione di radiazione;
- i limiti tra pressione di gas perfetto e gas degenerare sono due, per via della possibilità di avere gas degenerare relativistico e non, nel caso di limite tra gas perfetto e gas degenerare non relativistico la retta è $\log(T) = \frac{2}{3} \log(\rho) + 4.88$ (il termine noto di questa funzione può variare tra $\simeq 4.88$ e $\simeq 5.11$ in base alle approssimazioni). Nel secondo caso la retta è $\log(T) = \frac{1}{3} \log(\rho) + 7.07$;
- il limite tra caso degenerare relativistico e non è dato dalla retta $\log(\rho) = 6.6$ perché dipende solo dalla densità.

Nel regime di gas perfetto sono presenti tutte le stelle di sequenza principale, vicino al limite di degenerazione sono presenti le giganti rosse e nel caso di degenerazione sono presenti le nane bianche e le stelle di neutroni. Quindi una stella in un certo istante è rappresentabile come un punto nel piano ed è possibile seguirne l'evoluzione nel tempo, che viene rappresentata da una curva che dipende dalla massa della stella stessa.

Nella Fig. 2.3 si può osservare l'evoluzione della pressione di stelle con masse comprese in un range da $0.1M_{\odot}$ a $100M_{\odot}$:

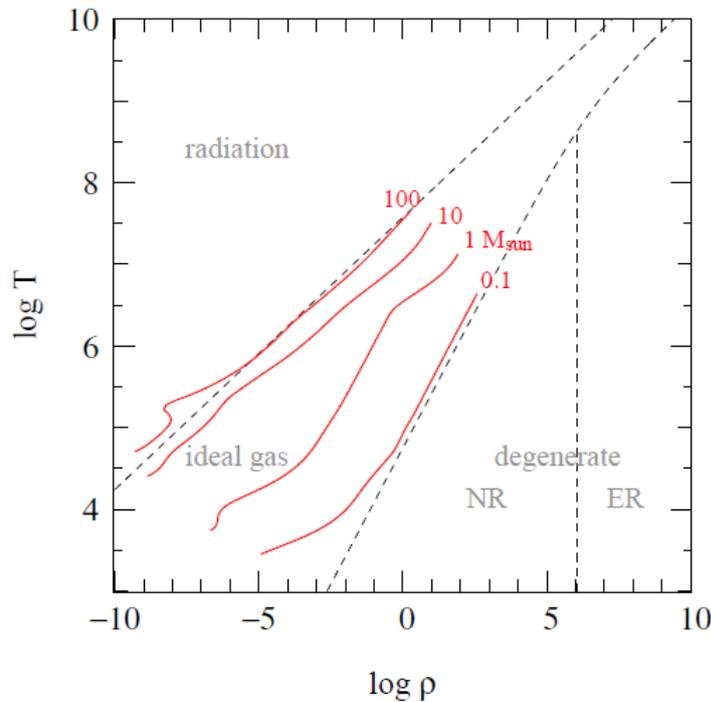


Figura 2.3: diagramma $\log(\rho) - \log(T)$. Mostra l'andamento della pressione dei nuclei di quattro stelle diverse durante il bruciamento di idrogeno. (Fonte: O. R. Pols, *Stellar Structure and Evolution*, Astronomical Institute Utrecht, 2011.)

L'immagine comprende soltanto il periodo di bruciamento di H all'interno dei nuclei stellari e per questo non si osserva l'entrata delle stelle nelle condizioni di gas degenere. Quando una stella non è più in grado di bruciare gli elementi che si formano nel nucleo viene a mancare l'equilibrio idrostatico e la forza di gravità fa collassare la stella fino a quando non entra in condizioni di degenerazione. Ciò che succede in seguito dipende dalla massa della stella, infatti corpi con $M < 8M_\odot$ diventano nane bianche, stelle più pesanti esplodono come supernovae lasciando come residui stelle di neutroni o buchi neri.

2.6 Casi astrofisici

In questa sezione verranno trattati due casi astrofisici che possono essere studiati attraverso le EdS ed il principio di equilibrio idrostatico. Gli esempi riportati sono:

- stima della temperatura e pressione interna del Sole;
- studio dei contributi di pressione nelle nane bianche per ricavare la relazione raggio-massa.

2.6.1 Sole

Vediamo come stimare la pressione e la temperatura del Sole ad una distanza di $R/2$ dal centro. Utilizziamo la condizione di equilibrio idrostatico:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \quad (2.20)$$

Ricordando che la pressione sulla superficie della stella è nulla integriamo l'equazione tra $R/2$ ed R e assumendo la densità costante $\rho(r) = \bar{\rho}$, la massa è $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \bar{\rho}$. Risolvendo l'equazione differenziale si ottiene:

$$\int_{P_{R/2}}^{P_R} dP = -\frac{4}{3}\pi \bar{\rho}^2 G \int_{R/2}^R r dr \quad (2.21)$$

Risolvendo i due integrali si ottiene la pressione alla profondità di $R/2$:

$$P_{R/2} = \frac{1}{2}\pi G \bar{\rho} R^2 \quad (2.22)$$

Tenendo conto che la densità media del Sole è $\bar{\rho} \simeq 1.4 \text{ g cm}^{-3}$, si ottiene una pressione in ordini di grandezza pari a:

$$P_{R/2} \simeq 10^{15} \text{ dyne cm}^{-2} = 10^9 \text{ atm} \quad (2.23)$$

Dall'equazione (2.2) possiamo ricavare la temperatura del Sole alla stessa distanza. Sostituendo i valori delle costanti e sapendo che $\mu = 0.62$ si ottiene $T \simeq 5 \times 10^6 \text{ K}$, possiamo ora calcolare il contributo della pressione di radiazione a questa distanza con la formula che già conosciamo, ottenendo $P_r = \frac{aT^4}{3} \simeq 1.6 \times 10^{12} \text{ dyne cm}^{-2}$. La pressione di radiazione è 10^{-3} volte la pressione totale, è quindi trascurabile e possiamo confermare che il plasma all'interno del Sole si comporta come un gas perfetto.

Attraverso questi calcoli possiamo stimare la posizione delle stelle e dei loro nuclei nel grafico $\log(\rho) - \log(T)$ in base al valore di μ . Calcoliamo la pressione del nucleo del Sole attraverso il peso molecolare medio, sapendo che le abbondanze di elementi nel nucleo sono $X = 0.4$, $Y = 0.58$ e $Z = 0.02$ e che la densità media del nucleo è $\bar{\rho} = 160 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Abbiamo che $\mu = 0.8$ e la pressione del gas perfetto vale quindi:

$$P_g \simeq 1.7 \times 10^{17} \text{ dyne} \cdot \text{cm}^{-2} \quad (2.24)$$

Abbiamo potuto considerare la pressione di gas perfetto perchè si vede facilmente che $\log(10^7) > \frac{2}{3} \log(160) + 4.88$, rispetta quindi la condizione di non degenerazione.

È stimato che il Sole diventerà una nana bianca di raggio $R \simeq 6.5 \times 10^8 \text{ cm}$, assumendo che la temperatura rimanga dell'ordine delle decine di milioni di Kelvin e che la massa rimanga circa la stessa, il Sole avrà una densità di circa $\bar{\rho} \simeq 1.7 \times 10^6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Con questo valore di densità si vede istantaneamente che $\log(10^7) < \frac{2}{3} \log(1.7 \cdot 10^6) + 4.88$, per cui la nana bianca sarà ovviamente in regime di degenerazione (non relativistica) e la pressione sarà:

$$P \simeq 7.9 \times 10^{22} \text{ dyne} \cdot \text{cm}^{-2} \quad (2.25)$$

2.6.2 Nane bianche

Le nane bianche sono una classe di stelle fuori dalla sequenza principale e sono i residui ottenuti da stelle con massa minore di $8M_{\odot}$. Hanno massa dell'ordine di una massa solare e dimensioni comparabili a quelle della Terra, presentano temperature superficiali di circa $T \simeq 25\,000 \text{ K}$ e luminosità molto inferiore a quella solare. Sono considerabili sistemi completamente degeneri anche se gli strati di materiale più esterno non sono in condizioni di degenerazione, questo perché gli strati non degeneri hanno volume molto inferiore al volume totale della stella. Nonostante solo gli elettroni siano in regime degenerare non si hanno difficoltà nel calcolo della pressione perché la pressione del gas ionico è trascurabile rispetto alla pressione di degenerazione elettronica.

Sono dei sistemi politropici, cioè dei sistemi dove la pressione dipende soltanto dalla densità e non dalla temperatura. Un qualsiasi modello politropico è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = \frac{GM_r}{r^2} \rho \\ \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad n \rightarrow \text{indice politropico} \end{cases} \quad (2.26)$$

Si ha una situazione di equilibrio tra la pressione elettronica di degenerazione, che può essere relativistica o non relativistica, e la pressione gravitazionale. Questa condizione di equilibrio si può esprimere come

$$P_e + P_g = 0 \quad (2.27)$$

Consideriamo una nana bianca di raggio R , massa M_t e densità ρ (assunta costante). La pressione gravitazionale si ottiene a partire dall'energia potenziale gravitazionale della nana bianca, per ricavarla usiamo l'equazione differenziale della stessa:

$$dU = -\frac{GM(r)dM}{r} = -\frac{3GM_t^2 r^4 dr}{R^6} \quad (2.28)$$

Integrando su tutto il raggio della stella otteniamo:

$$U(R) = -\frac{3GM_t^2}{5R} \quad (2.29)$$

La pressione gravitazionale è legata all'energia gravitazionale attraverso la forza con la seguente derivata:

$$F_g = -\frac{dU}{dR} \quad (2.30)$$

La pressione è data dalla forza sulla superficie, quindi:

$$P_g = -\frac{3GM_t^2}{20\pi R^4} \quad (2.31)$$

Abbiamo già visto i contributi alla pressione da parte di un gas degenere non relativistico e di un gas degenere relativistico, esprimiamoli in funzione del raggio della stella per comodità nella trattazione. Per il caso non relativistico $P_e \propto \rho^{5/3} \propto M_t^{5/3} R^{-5}$, per il caso relativistico si ha $P_e \propto \rho^{4/3} \propto M_t^{4/3} R^{-4}$. Facendo un rapporto tra le due pressioni si può stabilire se la stella sia in equilibrio, in fase di contrazione o in espansione. Infatti se:

$$\left| \frac{P_g}{P_e} \right| < 1 \rightarrow \text{espansione}; \quad \left| \frac{P_g}{P_e} \right| > 1 \rightarrow \text{collasso}; \quad \left| \frac{P_g}{P_e} \right| = 1 \rightarrow \text{equilibrio}$$

L'equilibrio tra le due pressioni si può avere entro un valore limite della massa, detto limite di Chandrasekhar (o massa di Chandrasekhar), che vale $M_{Ch} = 1.44M_\odot$. Se una nana bianca con massa entro il limite di Chandrasekhar non si trova all'equilibrio può raggiungerlo espandendosi, andando così a diminuire la sua densità. L'equilibrio di pressione viene raggiunto perché con l'espansione del gas la densità diminuisce e passa dall'essere gas degenere relativistico a gas degenere non relativistico. Per via delle diverse dipendenze dal raggio la pressione elettronica diminuisce più velocemente di quella gravitazionale arrivando così alla condizione di equilibrio. È presente anche la possibilità che una stella si trovi nel limite e sia già all'equilibrio non subendo nessun processo di espansione, questo avviene quando la stella ha massa pari alla massa di Chandrasekhar, che è la massa per cui la pressione di gas degenere relativistico e la pressione gravitazionale sono esattamente uguali. Nel caso di gas degenere non relativistico, eguagliando le due pressioni, possiamo ottenere una stima del raggio della stella in funzione della massa, espresso in unità di raggi solari.

Questa stima abbastanza approssimata è data dalla seguente espressione:

$$R \approx \frac{0.02}{\mu_e^{5/3} \widetilde{M}^{1/3}} R_\odot \quad (2.32)$$

dove $\widetilde{M} = \frac{M_t}{M_\odot}$. Non ci interessa conoscere l'elemento principale di cui sono composte le nane bianche poiché $X = 0$ e quindi $\mu_e = 2$, questo per via del totale bruciamento di idrogeno avvenuto nel nucleo.

Possiamo riscrivere la relazione raggio-massa nel seguente modo:

$$\frac{R}{R_\odot} \simeq \frac{0.006}{\widetilde{M}^{1/3}} \quad (2.33)$$

Invece, una nana bianca con massa maggiore della massa di Chandrasekhar non raggiungerà mai l'equilibrio perché la pressione gravitazionale sarà sempre superiore a quella del gas degenere, questo porterà al collasso della stella e darà origine ad una Supernova di tipo Ia.

Bibliografia

- [1] L. Ferrari, *Elementi di Termodinamica Statistica*, Dispense, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2019.
- [2] D. Mollica, *Equazioni di Stato della Materia in Astrofisica*, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2014.
- [3] F. R. Ferraro, *Astrofisica Stellare*, Dispense, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2021.
- [4] M. P. Kennett, *Essential Statistical Physics*, Cambridge University Press, 2021.
- [5] L. Pasquini, *Struttura della Materia*, Dispense, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, 2022.
- [6] O. R. Pols, *Stellar Structure and Evolution*, Astronomical Institute Utrecht, 2011.
- [7] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, Quinta Edizione, Springer, 2007.
- [8] G. Nazareno, *Nane bianche e limite di Chandrasekhar*, Corso di Laurea in Fisica, Università di Bologna, 2020.