

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

STATISTICHE DI CONTEGGIO DI FOTONI:
ASPETTI TEORICI E SPERIMENTALI

Relatore:
Prof. Minardi Francesco

Presentata da:
Giovanni Zotti

Correlatore:
Dott. Marco Bellini

Anno Accademico 2021/2022

Sommario

Il seguente elaborato si prefigge l'obiettivo di fornire una panoramica completa ed esauritiva sullo studio delle statistiche di fotoconteggio, ricavando i fondamentali risultati di natura teorica e al contempo illustrando le procedure di determinazione sperimentale. Il principale traguardo conseguibile in tale ambito è l'inequivocabile dimostrazione della natura quantizzata della luce, rendendo definitivamente superato l'alternativo modello semiclassico, in cui l'ipotesi di quantizzazione è limitata all'interazione radiazione-rilevatore, mentre la luce viene considerata interamente trattabile come onda. Se infatti entrambi gli approcci forniscono previsioni in accordo con le osservazioni sperimentali per quanto riguarda sorgenti coerenti e termiche, che producono rispettivamente distribuzioni Poissoniane o Super-Poissoniane, il secondo modello non è in grado di motivare in alcun modo l'esistenza delle distribuzioni Sub-Poissoniane, caratterizzate matematicamente da una varianza inferiore al valor medio di conteggi \bar{n} .

Il primo capitolo è dedicato a ricavare la forma delle statistiche di fotoconteggio basandosi sul modello a fotoni, riportando le più rilevanti dimostrazioni matematiche;

il secondo capitolo ha invece l'obiettivo di analizzare i risultati forniti dal modello semiclassico, rivelando la perfetta compatibilità con quelli ottenuti nel capitolo precedente per quanto riguarda sorgenti di tipo classico;

nel terzo capitolo si illustra una serie di esperimenti svolti presso il "Laboratorio di Ottica Quantistica dell'Istituto Nazionale di Ottica-CNR", nel polo scientifico di Sesto Fiorentino, realizzati con l'obiettivo di confermare la validità delle conclusioni di natura teorica esposte nei primi due capitoli;

infine il quarto capitolo si prefigge lo scopo di dare un breve accenno alle distribuzioni di tipo Sub-Poissoniane, attraverso una breve trattazione matematica e illustrando alcune modalità di osservazione sperimentale.

Indice

1	Statistiche di conteggio previste dal modello a fotoni	5
1.1	Sorgente coerente: la statistica Poissoniana	5
1.2	Statistica Super-Poissoniana: caso termico	8
1.3	Statistica Super-Poissoniana: luce caotica	12
2	Statistiche di conteggio previste dal modello semiclassico	15
2.1	Fattori di distorsione delle statistiche	15
2.2	La statistica Poissoniana nel modello semiclassico	17
2.3	La formula di Mandel: caso coerente e caso termico	19
3	Approccio sperimentale per la verifica del modello semiclassico	23
3.1	Introduzione	23
3.2	Apparato sperimentale e svolgimento	28
3.2.1	Strumentazione	28
3.2.2	Valutazione dark count rate	29
3.2.3	Campionamenti per sorgente coerente e pseudotermica	32
3.3	Risultati e discussione	34
3.4	Conclusioni sperimentali	37
4	La statistica Sub-Poissoniana	45
4.1	Introduzione	45
4.2	Radiazioni Sub-Poissoniane ricavate dall'utilizzo di sorgenti elettriche	48
5	Conclusioni	55

Introduzione

Lo studio della natura della luce, o, più in generale, della radiazione elettromagnetica, ha da sempre rappresentato uno dei più proficui e rilevanti settori nella storia della fisica. È assolutamente straordinario pensare a quanto radicalmente sia cambiata nel tempo la concezione di ciò che ci consente ogni giorno di godere del senso della vista, il principale strumento che abbiamo per orientarci nello spazio e conoscere la realtà che ci circonda: dalla trattazione dei raggi come semplici segmenti rettilinei, la cui propagazione nello spazio è dettata da rigorose regole geometriche; passando per una descrizione ondulatoria, che trova il suo apice nella formulazione delle leggi di Maxwell, uno dei vertici della fisica classica e che costituirà il nucleo fondamentale per lo sviluppo della relatività ristretta; approdando infine alla trattazione quantistica, forse la più affascinante, in cui alla radiazione elettromagnetica viene riconosciuta una doppia natura ondulatoria-corpuscolare, capace quindi di conciliare due aspetti all'apparenza irrimediabilmente antinomici. Se le proprietà ondulatorie sono state indagate a fondo, portando ad una descrizione assolutamente completa e coerente, quelle corpuscolari presentano ancora alcuni punti oscuri, lacune che è necessario colmare: questo è il compito di quella branca di studi che prende il nome di ottica quantistica.

La trattazione dei raggi luminosi come flussi di fotoni piuttosto che come onde, a dispetto di quello che si potrebbe pensare, porta ad una serie di divergenze molto sottili rispetto alle previsioni della teoria classica, rilevabili solo con strumenti di notevole efficienza e precisione. Per questo motivo, solo in tempi relativamente recenti si è riusciti a dimostrare in modo inequivocabile la natura intrinsecamente corpuscolare della luce. Uno degli ambiti in cui è possibile ottenere risultati decisivi in tal senso è lo studio della statistica di fotoni, soggetto principale di questo elaborato.

Il più semplice apparato sperimentale pensabile per poter ricavare la statistica di un flusso fotonico è riportato in figura 1: esso risulta costituito da un rivelatore di notevole sensibilità, ad esempio un fotomoltiplicatore a tubo (PMT) o un fotodiodo a valanga (APD), connesso ad un contatore elettronico. Il rivelatore ha il compito di produrre un debole impulso elettrico in seguito all'assorbimento di un fotone, attivando così l'azione di conteggio. Il numero fornito dal contatore ad ogni misura è dato dal numero di impulsi elettronici ricevuti in un determinato intervallo di tempo, impostato preventivamente dallo sperimentatore.

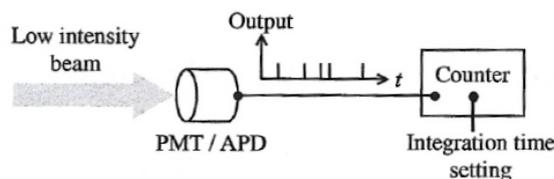


Figura 1: *Rappresentazione schematica del più semplice apparato sperimentale pensabile per la ricostruzione delle statistiche di fotoconteggio, tratta da [1], pag 75. Esso è costituito da un fotorilevatore ad alta sensibilità, di solito un PMT, connesso ad un contatore.*

Chiaramente, il tasso medio di conteggio è determinato in modo univoco dall'intensità del raggio incidente, mentre il valore di conteggio effettivo risulta avere un valore fluttuante, che varia da misura a misura. Tale variabilità è facilmente spiegabile assumendo per vera la suddivisione del raggio luminoso in pacchetti energetici discreti, come verrà illustrato formalmente nel capitolo successivo: la statistica fotonica caratterizzante la natura del raggio determina la statistica osservata sperimentalmente, in analogia con altri fenomeni di natura randomica, quale, ad esempio, il conteggio di decadimenti radioattivi. Il problema, assolutamente non intuitivo, deriva dal fatto che è difficile dedurre come conseguenza di tale variabilità un risultato cruciale quale la quantizzazione della radiazione elettromagnetica: come verrà descritto in dettaglio successivamente, la grande maggioranza delle statistiche osservabili risulta infatti pienamente in accordo con una formulazione semiclassica del fenomeno, in cui cioè ad essere quantizzata non è la luce, che viene trattata come un'onda classica, bensì l'interazione della stessa con il rivelatore, detta effetto fotoelettrico. Le fluttuazioni statistiche del numero di conteggi, quindi, possono essere dovute a due diverse cause: una è la natura statistica del processo di fotorilevazione, l'altra è la statistica fotonica costitutiva del raggio luminoso. Il dibattito su come distinguere e trattare tali termini, sorto già nel 1905 in seguito alla spiegazione di Einstein dell'effetto fotoelettrico, fu piuttosto lungo e tortuoso, e per anni mise in discussione la possibilità di ricavare, limitandosi a studiare la statistica fotonica, una prova schiacciante e inconfutabile della natura quantistica della luce. Di seguito verranno riportati i risultati più importanti emersi durante tale percorso, partendo dalla caratterizzazione degli effetti propriamente dovuti alla statistica intrinseca della radiazione per poi passare a quelli relativi al processo di rilevazione. Le previsioni del modello semiclassico verranno giustificate, oltre che dal punto di vista teorico, anche da quello sperimentale, illustrando nel dettaglio una serie di misure svolte presso il "Laboratorio di Ottica Quantistica dell'Istituto Nazionale di Ottica-CNR", nel polo scientifico di Sesto

Fiorentino. Sulla statistica sub-Poissoniana, che costituisce l'unica divergenza osservabile tra modello semiclassico e modello quantistico della luce, si darà qualche accenno teorico nella parte conclusiva.

1

Statistiche di conteggio previste dal modello a fotoni

1.1 Sorgente coerente: la statistica Poissoniana

Per poter trattare gli effetti della statistica intrinseca dei fotoni nella determinazione della distribuzione di probabilità finale, osservabile con un apparato sperimentale analogo a quello in figura 1, conviene partire dal caso più semplice, quello cioè caratterizzato da una radiazione incidente perfettamente monocromatica, di frequenza angolare ω e intensità I costanti, descrivibile quindi come una funzione del tipo

$$\xi(r, t) = \xi_0 e^{i(kr - \omega t)} \quad (1.1)$$

dove I risulta proporzionale al quadrato dell'ampiezza ξ_0 .

Siccome assumiamo che il raggio luminoso possa essere pensato come una corrente fotonica, è possibile introdurre il flusso di fotoni Φ , dato dal numero medio di questi pacchetti energetici che attraversano la sezione trasversale nell'unità di tempo. Questa grandezza è facilmente calcolabile come

$$\Phi = \frac{IA}{\hbar\omega} \quad (1.2)$$

dove A è la sezione trasversale e \hbar la costante di Planck ridotta, cioè come il rapporto tra l'energia totale trasportata nell'unità di tempo e il quanto di energia caratteristico di quella determinata frequenza.

Un parametro fondamentale di cui è necessario tener conto è l'*efficienza quantica*, tipicamente indicata con η , definita come il rapporto tra il numero di fotoconteggi e il numero effettivo di fotoni incidenti. A questo punto, il numero medio di conteggi in un intervallo di tempo T sarà semplicemente esprimibile come

$$N(T) = \eta\Phi T = \frac{\eta IA}{\hbar\omega} T \quad (1.3)$$

Per comodità si introduce inoltre il rate di conteggio medio R , definito come

$$R = \frac{N}{T} = \eta\Phi \quad (1.4)$$

Gli apparati sperimentali sono sempre caratterizzati da una soglia massima di rate di conteggio, fortemente dipendente dal cosiddetto *dead time*, il tempo che occorre al rivelatore per resettarsi in seguito ad una rilevazione e durante il quale, quindi, non può aumentare il numero di conteggi. Tipicamente tale intervallo si aggira intorno al $1 \mu\text{s}$, ponendo un limite superiore al count rate attorno ai 10^6 counts/s. Questo è il motivo per cui negli esperimenti di determinazione della statistica fotonica si utilizzano sorgenti a debole intensità, solitamente dell'ordine di 10^{-12} W.

Se sia il flusso fotonico che il count rate risultano delle proprietà medie, univocamente determinate dai valori di intensità e frequenza, nondimeno il valore del numero di conteggi effettivamente osservato mostrerà inevitabili fluttuazioni al ripetersi della misura, tanto più evidenti quanto minore è il tempo impostato sul counter. Un esempio molto semplice, ma piuttosto chiaro ed esaustivo, che consente di spiegare al meglio questo fatto è proposto in [1] e di seguito riportato: si consideri il caso di una radiazione incidente monocromatica caratterizzata da un valore di potenza costante pari ad 1 nW e da un'energia fotonica di 2.0 eV. Il flusso di fotoni medio, dato dalla (1.2), risulterà quindi 3.1×10^9 photons/s. Se pensiamo il raggio incidente come un cilindro contenente fotoni, un suo tratto di lunghezza 3×10^8 m, uguale cioè alla distanza attraversata dalla luce in 1 s, dovrà contenere un numero di fotoni uguale a 3.1×10^9 . Se riduciamo però la scala di lunghezza, considerando per esempio quella attraversata in 1 ns, tale numero decresce a 3.1 (un'illustrazione semplice ma efficace è riportata in figura 1.1).

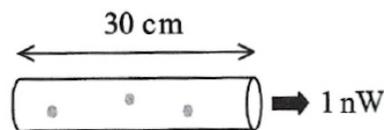


Figura 1.1: Se prendiamo in considerazione una sezione, di lunghezza 30 cm, del raggio luminoso di potenza 1 nW e lunghezza d'onda 633 nm, approssimato ad un cilindro per comodità, essa dovrà contenere in media tre fotoni. L'illustrazione è tratta da [1], pag 78.

Visto che i fotoni sono definiti come pacchetti discreti di energia il loro numero dovrà essere intero, pertanto il valore ottenuto non potrà che essere interpretato come il numero medio di una quantità intrinsecamente variabile, le cui fluttuazioni sono dovute

alla "granulosit " del raggio luminoso.

L'esempio appena descritto consente di concludere che, lavorando con tempi sufficientemente piccoli, si devono avere fluttuazioni statistiche del numero di fotoni che raggiungono il detector. Per ricavarne in modo formale la distribuzione possiamo procedere a generalizzare le considerazioni fatte: consideriamo un tratto del raggio luminoso di lunghezza L . Se il flusso di fotoni   costante, vero per le caratteristiche scelte per la radiazione incidente, allora il numero medio di fotoni che popolano tale segmento   dato da $\bar{n} = \Phi L/c$. Assumiamo a questo punto che L sia sufficientemente grande affinch  \bar{n} sia intero e procediamo a suddividere il tratto in N sottosegmenti, con N scelto in modo tale che:

- sia piccola la probabilit  associata a trovare un fotone in un determinato sottosegmento, data da $p = \bar{n}/N$;
 - sia trascurabile la probabilit  di trovare due o pi  fotoni in uno stesso sottosegmento.
- Se N soddisfa queste condizioni, cio    grande, possiamo agilmente calcolare la probabilit  associata al trovare, all'interno di un tratto di lunghezza L , n sottosegmenti popolati da un singolo fotone, $N - n$ vuoti, data dalla binomiale

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \quad (1.5)$$

Ricordando che $p = \bar{n}/N$ possiamo riscrivere

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} \quad (1.6)$$

Tale riarrangiamento dei termini consente di calcolare il limite per $N \rightarrow +\infty$, in cui N risulta grande a piacere e quindi soddisfa le due condizioni enunciate. Come illustrato in appendice, si pu  dimostrare che

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N!}{(N-n)!N^n} = 1 \quad (1.7)$$

Possiamo inoltre sviluppare in serie di Taylor l'ultimo termine al limite, ottenendo

$$\left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = 1 - (N-n)\frac{\bar{n}}{N} + \frac{1}{2!}(N-n)(N-n-1)\left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^2 - \dots \rightarrow 1 - \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{2!} - \dots \quad (1.8)$$

che   la serie associata all'esponenziale $e^{-\bar{n}}$. In conclusione otteniamo

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (1.9)$$

cio  la distribuzione di Poisson.

Tale distribuzione di variabile discreta caratterizza un enorme numero di fenomeni noti

in fisica, tra cui il già citato conteggio Geiger, ed è completamente determinata dal valore di un unico parametro, \bar{n} . Presenta un picco in corrispondenza di tale valore, tanto più ampio quanto maggiore è la media, e ha una varianza pari a

$$\sigma_n^2 = \bar{n} \quad (1.10)$$

la cui formula è ricavata in appendice. Tale espressione è estremamente utile, poiché fornisce un primo indizio sperimentale sul fatto che la statistica osservata sia effettivamente di tipo Poissoniano. Inoltre, come sarà illustrato a breve, la varianza viene utilizzato come principale parametro discriminante nella classificazione delle diverse distribuzioni.

1.2 Statistica Super-Poissoniana: caso termico

Come dimostrato nel paragrafo precedente, assumere per vera la quantizzazione della luce ci consente di concludere che la statistica di conteggio fotonico relativa ad una radiazione incidente monocromatica, ad intensità costante, dovrà essere di tipo Poissoniano. Una simile tipologia di radiazione si può ricavare sperimentalmente, in ottima approssimazione, impiegando un laser a singolo modo, in regime lontano dalla condizione di *threshold*. La luce monocromatica costituisce la forma più stabile e ordinata di radiazione possibile dal punto di vista classico, per tanto è intuitivo aspettarsi che la statistica relativa a sorgenti soggette ad un qualche tipo di fluttuazione classica in intensità debba caratterizzarsi per una maggiore variabilità del numero di conteggi, ovvero, quantitativamente, per un maggiore valore di varianza. Le statistiche di questo tipo, descritte dalla condizione matematica $\sigma_n^2 > \bar{n}$, prendono il nome di statistiche *Super-Poissoniane*. Esempi particolarmente significativi, che verranno trattati in modo approfondito a breve, sono la radiazione termica emessa da un corpo nero o quella prodotta da una lampada a scarica, di solito chiamata luce caotica o parzialmente coerente.

Statistiche caratterizzate invece da una varianza minore di quella poissoniana, quindi descritte dalla condizione $\sigma_n^2 < \bar{n}$, prendono il nome di statistiche *Sub-Poissoniane*. Una radiazione capace di produrre una simile tipologia di distribuzione dovrà quindi essere, in linea di principio, più ordinata, meno rumorosa della luce monocromatica, cosa impossibile limitandosi all'elettromagnetismo classico. Provare l'esistenza di una statistica Sub-Poissoniana consente di dimostrare, in modo inequivocabile, la non completezza del modello semiclassico, e quindi la correttezza dell'ipotesi di natura quantizzata della luce. Una tabella riassuntiva delle tre tipologie di statistiche è riportata qui di seguito:

Tipo di statistica	Equivalente classico	I(t)	σ_n^2
Super Poissoniana	Luce termica, incoerente, caotica	Variabile	$> \bar{n}$
Poissoniana	Luce perfettamente coerente	Costante ¹	$= \bar{n}$
Sub Poissoniana	Nessuno(puramente quantistico)	Costante	$< \bar{n}$

Si prenda adesso in esame il caso di una radiazione incidente di tipo termico, emessa da un corpo nero ideale. La trattazione dello spettro di corpo nero, formulata agli inizi del '900 da Planck e riproposta in modo più dettagliato in appendice, fornisce gli strumenti per poter ricavare formalmente la statistica di conteggio di fotoni associata. I punti fondamentali che è necessario ricordare sono i seguenti:

- la radiazione consiste in una sovrapposizione di onde monocromatiche, distribuite su uno spettro continuo di modi di oscillazione, ciascuno trattabile come un oscillatore armonico indipendente;
- l'energia associata all'intervallo di frequenze angolari $\omega, \omega + d\omega$ è data da

$$\rho(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_b T}} d\omega \quad (1.11)$$

Tale espressione è ricavabile solo imponendo la quantizzazione dell'energia degli oscillatori armonici, che potrà assumere esclusivamente valori multipli interi del quanto $\hbar\omega$, cioè

$$E_n = n\hbar\omega \quad (1.12)$$

In ottica quantistica il numero n viene interpretato come il numero di fotoni eccitati alla frequenza angolare ω nel corrispondente modo di oscillazione. La probabilità associata all'avere n fotoni di frequenza ω in un determinato modo sarà quindi facilmente calcolabile usando la distribuzione di Boltzmann, ovvero

$$P_\omega(n) = \frac{e^{-E_n/k_b T}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-E_n/k_b T)}} \quad (1.13)$$

Utilizzando la (1.12) otteniamo

$$P_\omega(n) = \frac{e^{-n\hbar\omega/k_b T}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-n\hbar\omega/k_b T)}} \quad (1.14)$$

che, chiamando $x = e^{-\hbar\omega/k_b T}$, si può riscrivere come

$$P_\omega(n) = \frac{x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n} \quad (1.15)$$

Sfruttando le proprietà della progressione geometrica, mostrate in appendice, otteniamo infine

$$P_\omega(n) = x^n(1 - x) = (1 - e^{-\hbar\omega/k_b T})e^{-n\hbar\omega/k_b T} \quad (1.16)$$

¹È importante sottolineare che, nel caso di una sorgente coerente sperimentale, ad esempio un laser, l'intensità non è esattamente costante, ma si può considerare tale lavorando su scale di tempo opportune.

Per poter confrontare tale espressione con quella Poissoniana, e verificare l'effettiva appartenenza alle statistiche Super-Poissoniane, conviene esprimerla in funzione del numero medio di fotoni \bar{n} . Esso è dato da

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} n P_{\omega}(n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n (1-x) = \\ &= (1-x) x \frac{d}{dx} (\sum_{n=0}^{+\infty} x^n) = (1-x) x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \\ &= (1-x) x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x} \end{aligned} \quad (1.17)$$

per cui $x = \bar{n}/(\bar{n} + 1)$. Questo permette di ricavare l'espressione del numero medio \bar{n}

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_b T} - 1} \quad (1.18)$$

e di riscrivere quella della probabilità

$$P_{\omega}(n) = \frac{1}{\bar{n} + 1} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n \quad (1.19)$$

che è la nota espressione della distribuzione di Bose-Einstein. A scopo esemplificativo, in figura 1.2 viene riportato il confronto tra la distribuzione Poissoniana e quella di BE, entrambe scelte con $\bar{n} = 10$. La seconda si caratterizza per la presenza del massimo in corrispondenza di $n = 0$ e per una larghezza della curva decisamente maggiore, sinonimo di un maggiore valore della varianza.

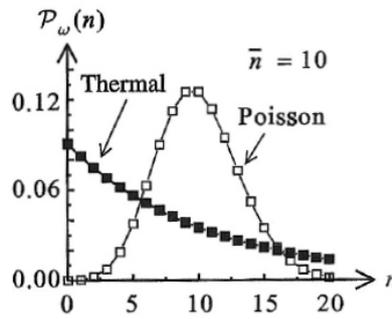


Figura 1.2: Confronto tra la distribuzione Poissoniana e quella di Bose-Einstein, entrambe prese con $\bar{n} = 10$. In ordinata è presente il valore di probabilità, in ascissa il numero di fotoconteggi. L'illustrazione è tratta da [1], pag 85.

In appendice si dimostra che tale valore è dato da

$$\sigma_n^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 \quad (1.20)$$

rivelando l'appartenenza alle statistiche Super-Poissoniane come atteso.

Come si è già puntualizzato, la distribuzione di BE si applica ad un singolo modo di oscillazione della radiazione termica, e non allo spettro continuo di modi in cui essa consiste. Per completezza si riporta l'espressione della varianza nel caso generale, ricavata formalmente in [2], data da

$$\sigma_n^2 = \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{N_m} \quad (1.21)$$

dove N_m è il numero di modi termici a frequenza simile. Nel limite in cui $N_m \rightarrow +\infty$ tale espressione si riduce a quella della Poissoniana, fatto ampiamente verificato sperimentalmente. Un semplice calcolo riportato in appendice, tratto da [1], consente di dimostrare che l'utilizzo di filtri interferenziali standard non consente di osservare una distribuzione diversa da quella Poissoniana usando come sorgente un corpo nero. Pertanto è necessario cercare un approccio alternativo, di cui si parlerà in seguito. È importante sottolineare che anche il tempo di conteggio ha una grande rilevanza nel determinare la distribuzione, fatto che sarà puntualizzato più in dettaglio successivamente.

Un'interessante interpretazione dell'espressione (1.20) è ricavabile partendo da una serie di considerazioni pensate da Einstein, in alcuni articoli inerenti alla termodinamica statistica scritti tra il 1904 e il 1909. Il fisico partì dallo studio di due sistemi posti all'equilibrio termico, il primo con energia variabile E , il secondo costituito da un bagno termico a temperatura T . La distribuzione di Boltzmann è in grado di fornire l'espressione generale per l'energia di equilibrio del primo sistema $\langle E \rangle$, data da

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} E e^{-\beta E} \omega(E) dE}{\int_0^{+\infty} e^{-\beta E} \omega(E) dE} \quad (1.22)$$

dove $\beta = 1/k_b T$ mentre $\omega(E)$ è la densità degli stati con energia E . Einstein dedusse dalla (1.22) una formula per il calcolo del valor medio del quadrato della fluttuazione energetica, o, più semplicemente, della varianza, data da

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = -\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = k_b T^2 \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \quad (1.23)$$

Se sfruttiamo la conoscenza dell'espressione della densità di energia ρ nell'intervallo $\omega, \omega + d\omega$ (l'equazione (1.11)) possiamo riscriverla nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (\Delta E^2) d\omega &= k_b T^2 \frac{\partial}{\partial T} (V \rho d\omega) = \\ &= k_b T^2 V d\omega \frac{\partial \rho}{\partial T} = (\rho \hbar \omega + \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2} \rho^2) V d\omega \end{aligned} \quad (1.24)$$

Le fluttuazioni energetiche saranno chiaramente in relazione con le fluttuazioni del numero di fotoni, fatto che ci consente di scrivere in loro funzione la varianza del numero di conteggi. A tale scopo, possiamo procedere ad esprimere ΔE^2 come il prodotto tra la densità di stati, data dall'equazione (5.11) in appendice, la fluttuazione energetica per ciascun modo, pari a $\Delta(n\hbar\omega)^2$, e infine il volume V . Troviamo quindi

$$(\Delta E^2) d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} (\Delta n)^2 (\hbar\omega)^2 V d\omega \quad (1.25)$$

Sostituendo la (1.25) nella (1.24) otteniamo infine

$$(\Delta n)^2 = \sigma_n^2 = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} \rho + \left(\frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} \rho \right)^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 \quad (1.26)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dall'utilizzo della (1.18) nella (1.11).

Tale trattazione permette di concludere che il primo dei due termini, responsabile della statistica Poissoniana, deriva dalla quantizzazione dell'energia della radiazione ed è pertanto di natura puramente quantistica, mentre il secondo trova la sua causa nelle fluttuazioni energetiche di origine termica, ed è pertanto di natura classica.

1.3 Statistica Super-Poissoniana: luce caotica

Per poter trattare, dal punto di vista formale, la statistica di conteggio determinata da una sorgente caotica, occorre impiegare alcuni risultati storicamente emersi con lo sviluppo del modello semiclassico, in cui quindi ad essere quantizzata non è la radiazione in sé, bensì il processo di fotorilevazione, poi facilmente riconducibili al modello a fotoni per mezzo di opportuni aggiustamenti. Siccome tale formulazione verrà affrontata in modo esaustivo nel capitolo successivo, tali risultati verranno qui solo brevemente accennati.

Una fondamentale caratteristica di una sorgente parzialmente coerente, quale ad esempio una lampada a scarica, è il cosiddetto *tempo di coerenza*, solitamente indicato con la notazione τ_c , definito come il tempo durante il quale si mantiene costante la fase del treno d'onda emesso. Ciò significa che, nota la fase in un determinato punto r al tempo t_1 , sarà nota con un alto grado di certezza la fase nello stesso punto al tempo t_2 se $|t_2 - t_1| \ll \tau_c$, con un basso grado se $|t_2 - t_1| \gg \tau_c$. Può essere poi utile introdurre la *lunghezza di coerenza* L_c , definita semplicemente come lo spazio percorso dalla luce nel tempo di coerenza. Immaginiamo ora una lampada estremamente semplice, costituita da un gas di atomi liberi di muoversi all'interno di un recipiente chiuso. Il fenomeno di emissione della radiazione è dovuto alla presenza di atomi in uno stato eccitato, dove quest'ultimo ha una durata limitata. Si può dimostrare l'esistenza di una relazione tra la larghezza spettrale $\Delta\omega$ della luce emessa e tale tempo di vita, data da

$$\Delta\omega = 1/\tau_{lifetime} \quad (1.27)$$

Nel caso illustrato, $\tau_{lifetime}$ è essenzialmente determinato dal tempo che intercorre tra una collisione e l'altra, τ_{coll} , che intuitivamente definisce anche un limite per il tempo di coerenza. Possiamo allora scrivere

$$\tau_c \approx 1/\Delta\omega \quad (1.28)$$

una relazione che ha in realtà carattere generale, applicabile a qualsiasi tipo di sorgente. Ciò permette di concludere, ad esempio, che il tempo di coerenza di una sorgente monocromatica è divergente all'infinito, mentre quello di un corpo nero ideale deve tendere a 0.

Un metodo estremamente accurato per valutare il tempo di coerenza è dato dal calcolo della cosiddetta *funzione di correlazione al primo ordine*, definita dall'espressione

$$g^{(1)}(t') = \frac{\langle \xi^*(t)\xi(t+t') \rangle}{\langle |\xi(t)|^2 \rangle} \quad (1.29)$$

dove la notazione $\langle \dots \rangle$ sta ad indicare il valor medio per un tempo T , cioè

$$\langle \xi^*(t)\xi(t+t') \rangle = \frac{1}{T} \int_T \xi^*(t)\xi(t+t') dt \quad (1.30)$$

Per $0 < t' < \tau_c$ si dovrà avere $g^{(1)}(t')$ vicino a 1, mentre per $t' > \tau_c$ la funzione tenderà a 0.

Fatte queste doverose premesse, introduciamo una grandezza che sarà fondamentale anche nel capitolo successivo, l'*intensità integrata* W , definita come

$$W = \int \int_A \int_t^{t+T} I(x, y; t') dx dy dt' \quad (1.31)$$

dove A è l'area su cui incide l'onda, espressione che si semplifica notevolmente quando $I = I(x, y; t) = I(t)$ è uniforme, ottenendo

$$W = A \int_t^{t+T} I(t') dt' \quad (1.32)$$

Riprendendo il concetto di flusso di fotone, tale funzione può essere messa in relazione con il numero medio di conteggi tramite l'equazione

$$\bar{n} = \frac{\eta W}{\hbar\omega} = \alpha W \quad (1.33)$$

La trattazione semiclassica consente di esprimere anche la varianza del numero di conteggi in funzione di W , tramite la relazione

$$\sigma_n^2 = \alpha \bar{W} + \alpha^2 \sigma_W^2 \quad (1.34)$$

dove \bar{W} è il valor medio di W , σ_W^2 la sua varianza. A tali termini si può associare un'evidente significato fisico: il primo, proporzionale all'energia totale incidente durante la misura, risulta chiaramente riconducibile al valor medio di n , quindi al contributo Poissoniano; il secondo, proporzionale alla varianza, è invece determinato dalle fluttuazioni di W , e quindi alle variazioni classiche in intensità. Queste saranno complessivamente trascurabili lavorando per tempi maggiori di quello di coerenza, mentre daranno un contributo determinante su scale di tempo inferiori. In appendice si dimostra questo fatto, a titolo esemplificativo, per una sorgente di Gauss-Lorentz.

2

Statistiche di conteggio previste dal modello semiclassico

2.1 Fattori di distorsione delle statistiche

Prima di illustrare i principali aspetti del modello semiclassico, è opportuno descrivere brevemente quelli che sono i maggiori fattori di distorsione delle statistiche di conteggio. L'esempio certamente più intuitivo è rappresentato da un mezzo avente trasmittanza non unitaria, posto tra sorgente e rivelatore. Se continuiamo ad assumere per valido il modello a fotoni, tale mezzo agirà escludendo dalla rilevazione, e quindi dal conteggio finale, una frazione pari a $1 - T$, dove T è la trasmittanza, del numero totale di fotoni emessi, selezionandoli in modo assolutamente casuale. Operando in questo modo, la statistica finale non potrà che essere soggetta a fluttuazioni maggiori rispetto a quella originale, così come il flusso fotonico finale sarà caratterizzato da una maggiore irregolarità. A livello qualitativo, si può immaginare che l'effetto della non perfetta trasmissibilità sia quello di aumentare la randomicità degli intervalli temporali che separano i diversi fotoni che compongono il raggio, fenomeno che si può pensare associato anche alla presenza di un beam splitter caratterizzato da un rapporto di splitting $T : 1 - T$, come efficacemente illustrato in figura 2.1.

Il "modello a beam splitter" risulta particolarmente efficace come strumento per affrontare le distorsioni statistiche, consentendo di ricondurre alla medesima trattazione diversi fattori di perdita, tra cui i più rilevanti sono:

- perdite di fotoni a livello di componenti ottiche, dovute a fenomeni di assorbimento, scattering o riflessione;
- presenza di mezzi a bassa trasmittanza, a causa dei quali solo una certa frazione dei fotoni iniziali è in grado di raggiungere il rivelatore;

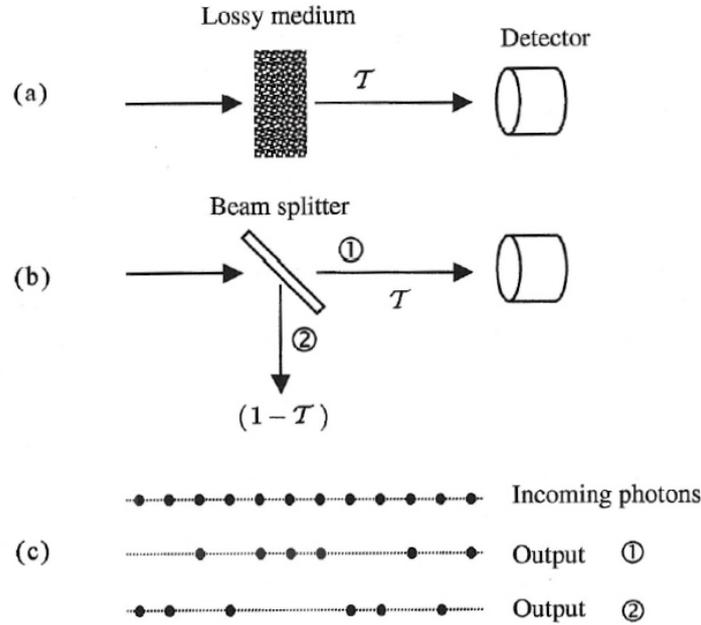


Figura 2.1: L'effetto di un mezzo con trasmittanza inferiore 1, posto tra sorgente e rivelatore, è essenzialmente equivalente a quello determinato da un beam splitter con rapporto di splitting pari a $T : 1 - T$, dove T è chiaramente la trasmittanza. In entrambi i casi, l'effetto distorsivo sulla statistica finale è dovuto alla selezione randomica dei fotoni che effettivamente raggiungeranno il rivelatore. L'immagine è presa da [1], pag 88.

- inefficienza del processo di rilevazione, dovuta all'utilizzo di rivelatori caratterizzati da un parametro η di efficienza quantica inferiore a 1.

É da sottolineare che, sebbene tutti questi termini contribuiscano a degradare la statistica finale, i primi due agiscono modificando la statistica intrinseca alla radiazione, mentre l'ultimo interviene a livello del processo di fotorilevazione (una trattazione leggermente più approfondita di quest'ultimo punto è riportata, per completezza, in appendice). In tutti i casi il processo di deformazione opera facendo tendere la distribuzione finale ad una Poissoniana, motivo per il quale occorre prestare particolare attenzione alla scelta della strumentazione per poter ricavare sperimentalmente le statistiche Super-Poissoniane o, estremamente più fragili, Sub-Poissoniane.

2.2 La statistica Poissoniana nel modello semiclassico

Come si è più volte avuto modo di puntualizzare, la teoria semiclassica della fotorilevazione si basa su una trattazione esclusivamente ondulatoria della radiazione elettromagnetica incidente e sulla quantizzazione dell'interazione tra la stessa e il rivelatore, descrivibile rifacendosi ai risultati conseguiti da Einstein per spiegare l'effetto fotoelettrico. Ricordando che il rivelatore è solitamente costituito da un fotomoltiplicatore, tale processo di interazione è suddivisibile in tre tappe:

- assorbimento di un quanto di energia da parte della superficie del rivelatore e sua conseguente conversione in energia di eccitazione elettronica.;
- rilascio dell'elettrone eccitato, spesso chiamato *fotoelettrone*, dalla superficie e suo successivo raggiungimento della regione di moltiplicazione del tubo;
- azione di triggering da parte dell'elettrone eccitato, che provoca il rilascio di un gran numero di altri elettroni, in un processo a valanga, venendo a definire una corrente sufficientemente intensa da venir registrata dal contatore.

Nel loro insieme, tali tappe definiscono quello che viene solitamente chiamato *fotoevento*, mentre il numero di fotoeventi che si osservano in un certo intervallo di tempo, definito dallo sperimentatore, definisce il fotoconteggio.

Tre sono anche gli assunti fondamentali della teoria semiclassica della fotorilevazione, che consentiranno di dimostrare la natura statistica dei fotoconteggi e di definirne i possibili andamenti:

(1) La probabilità di emissione di un singolo fotoelettrone da una porzione dell'area del rivelatore ΔA inferiore a quella di coerenza (su cui, cioè, l'intensità della radiazione si può assumere costante), in un intervallo di tempo Δt inferiore al tempo di coerenza della sorgente, deve essere proporzionale all'intensità dell'onda incidente, alla durata dell'intervallo temporale e alla porzione di area;

(2) si assume che la probabilità di osservare più di un fotoevento nell'intervallo Δt sia trascurabile rispetto a quella di osservarne uno o nessuno;

(3) si assume che gli eventi di fotoemissione registrati in intervalli di tempo distinti, non sovrapposti, siano statisticamente indipendenti gli uni dagli altri.

Dalla 1 possiamo scrivere la probabilità associata all'osservare un singolo fotoevento nell'intervallo $t, t + \Delta t$, cioè

$$P(1; t, t + \Delta t) = \alpha \Delta t \Delta A I(x, y; t) \quad (2.1)$$

dove α è un opportuno fattore di proporzionalità. Siccome ΔA è per ipotesi inferiore all'area di coerenza, allora I risulta indipendente dalle coordinate x e y , mentre il prodotto $\alpha \Delta A$ assume un valore costante che possiamo indicare con ζ , per cui vale

$$P(1; t, t + \Delta t) = \zeta I(t) \Delta t \quad (2.2)$$

Ora, dall'assunzione 2 possiamo concludere che debbano essere complementari la probabilità di osservare un evento e quella di non osservarne alcuno, da cui

$$P(0; t + \Delta t) = 1 - P(1; t + \Delta t) = 1 - \zeta I(t) \Delta t \quad (2.3)$$

Per poter ricavare la statistica dei fotoconteggi, occorre calcolare la probabilità associata all'osservare n fotoeventi nell'intervallo $0, t + \Delta t$, e questo è possibile sfruttando l'assunzione 3: se gli eventi sono statisticamente indipendenti e Δt è piccolo, infatti, esistono solo due possibilità perché ciò avvenga, cioè l'averne n nell'intervallo $0, t$ e 0 nell'intervallo $t, t + \Delta t$ oppure $n - 1$ nel primo e 1 nel secondo. Possiamo pertanto scrivere la relazione

$$\begin{aligned} P(n; 0, t + \Delta t) &= P(n; 0, t)P(0; t, t + \Delta t) + P(n - 1; 0, t)P(1; t, t + \Delta t) = \\ &= P(n; 0, t)(1 - \zeta I(t) \Delta t) + P(n - 1; 0, t) \zeta I(t) \Delta t \end{aligned} \quad (2.4)$$

Introducendo per comodità la notazione $P_n(t) \equiv P(n; 0, t)$ e riordinando i termini otteniamo

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \zeta I(t) [P_{n-1}(t) - P_n(t)] \quad (2.5)$$

ricordando che Δt è piccolo, possiamo passare al limite per $\Delta t \rightarrow 0$. Il termine a sinistra diventa quindi il limite del rapporto incrementale, cioè la derivata, per cui

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \zeta I(t) [P_{n-1}(t) - P_n(t)] \quad (2.6)$$

La risoluzione di questa equazione differenziale ricorsiva, con condizione al contorno $P_0(0) = 1$ (intuitiva, la probabilità di osservare 0 eventi all'istante 0 deve essere uguale a 1), pur essendo estremamente complessa, fornisce una soluzione analitica precisa, data da

$$P_n(t) = \frac{[\int_0^t \zeta I(t') dt']^n}{n!} \exp(-\int_0^t \zeta I(t') dt') \quad (2.7)$$

Una notevole semplificazione di tale espressione si ottiene nel caso in cui l'intensità I risulti costante e, quindi, indipendente dal tempo. Possiamo quindi porre $\zeta I = C$ costante e, sostituendo nella (2.6), ottenere

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + CP_n(t) = CP_{n-1}(t) \quad (2.8)$$

Tale equazione è risolvibile ricorsivamente, per i dettagli si rimanda all'appendice, e fornisce l'espressione finale

$$P_n(t) = \frac{(Ct)^n}{n!} e^{-Ct} \quad (2.9)$$

Ricordando a questo punto l'equazione (2.2), risulta evidente che il prodotto $\zeta I = C$ è interpretabile come la probabilità associata all'osservare un singolo evento nell'unità di tempo. Questo significa, se $I(t)$ è costante, che il numero medio di eventi osservanti nell'intervallo $0, t$ dovrà essere dato da $\bar{n} = \zeta It = Ct$. Usando tale risultato nella (2.9) ritroviamo la familiare espressione

$$P_n(t) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (2.10)$$

cioè la distribuzione Poissoniana.

Abbiamo così dimostrato che l'utilizzo di una radiazione monocromatica, ad intensità costante, determina una statistica per i fotoconteggi di tipo Poissoniano senza richiedere in alcun modo la quantizzazione della luce o il concetto di fotone. L'unica assunzione necessaria è che il processo di emissione di un fotoelettrone sia di natura probabilistica, provocato dall'assorbimento di un quanto di energia così come descritto per l'effetto fotoelettrico. Nel prossimo paragrafo vedremo che anche le statistiche Super-Poissoniane sono derivabili dalle sole ipotesi del modello semiclassico, recuperando anche alcuni risultati lasciati in sospeso nel paragrafo 1.3.

2.3 La formula di Mandel: caso coerente e caso termico

Per poter ricavare la distribuzione di BE a partire dalla trattazione semiclassica della fotorilevazione, occorre illustrare in primis un risultato chiave di tale teoria, la formula di Mandel. A tale scopo, recuperiamo la definizione di intensità integrata W , enunciata nell'equazione (1.31): tale funzione consente di riscrivere la formula per la probabilità (2.1) come $P(1; t, t + \Delta t) = \alpha W(t \rightarrow t + \Delta t)$ e, sostituita nella (2.7), dove al posto di ζ bisognerebbe considerare in generale $\alpha \int \int_A dx dy$, restituisce

$$P_n(t) = \frac{(\alpha W(0 \rightarrow t))^n}{n!} e^{-\alpha W(0 \rightarrow t)} \quad (2.11)$$

La prima delle due modifiche ci consente di interpretare il termine $\alpha W(0 \rightarrow t)$ come il numero medio di fotoeventi osservati nell'intervallo $0, t$, nonché di assegnare ad α il valore $\eta/\hbar\omega$, considerato il suo significato fisico. Se $W(0 \rightarrow t)$ assume un valore preciso, e cioè la radiazione cambia la propria intensità in maniera totalmente deterministica, allora la (2.11) si riduce ad una Poissoniana.

Questo fatto non è spesso applicabile nella realtà, poiché l'onda incidente sul rivelatore risulta in generale di tipo stocastico, cioè parzialmente coerente e parzialmente polarizzata, venendo a caratterizzarsi per fluttuazioni in intensità completamente randomiche. Possiamo quindi interpretare la distribuzione Poissoniana come una distribuzione di probabilità condizionata, che si ottiene solo quando risulta completamente nota la funzione

W , mentre la statistica dei fotoconteggi sarà determinata dalla distribuzione di probabilità non condizionata. Se supponiamo di conoscere la funzione di densità di probabilità dell'intensità integrata, che indichiamo con $\rho_W(W)$, questa sarà calcolabile come

$$\begin{aligned} P(n) &= \int_0^{+\infty} P(n|W)\rho_W(W) dW = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha W)^n}{n!} e^{-\alpha W} \rho_W(W) dW \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove $P(n|W)$ è la notazione standard per la probabilità condizionata. Questa equazione rappresenta uno dei risultati cardine del modello semiclassico e prende il nome di *formula di Mandel*, in onore del suo scopritore. Tale formula non solo consente di ricavare analiticamente la distribuzione dei fotoeventi per una notevole varietà di sorgenti, grazie alla sua assoluta generalità, ma fornisce anche un'espressione quasi universale per la varianza della stessa, già riportata nell'equazione (1.34). Per dimostrarla si può procedere nel seguente modo:

calcoliamo innanzitutto il k -esimo momento fattoriale della distribuzione $P(n)$, definito come il valore di aspettazione $\langle n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \rangle$. Si può scrivere

$$\begin{aligned} \langle n(n-1)\dots(n-k+1) \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)P(n) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha W)^n}{n!} e^{-\alpha W} \rho_W(W) dW \end{aligned} \quad (2.13)$$

scambiamo l'ordine di sommatoria e integrazione, ottenendo

$$\int_0^{+\infty} dW \rho_W(W) \sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1)\dots(n-k+1)] \frac{(\alpha W)^n}{n!} e^{-\alpha W} \quad (2.14)$$

se interpretiamo il prodotto αW come un valor medio, il termine all'interno della sommatoria diventa il k -esimo momento fattoriale per una distribuzione di tipo Poissoniano con media proprio αW . Questo ha valore noto, dato da $(\alpha W)^k$ (dimostrazione in appendice), e pertanto possiamo riscrivere il tutto come

$$\langle n(n-1)\dots(n-k+1) \rangle = \int_0^{+\infty} (\alpha W)^n \rho_W(W) dW = \alpha^n \bar{W}^n \quad (2.15)$$

A questo punto, il valor medio di fotoeventi \bar{n} sarà semplicemente uguale al momento primo, da cui $\bar{n} = \alpha \bar{W}$, mentre la varianza sarà calcolabile sviluppando la ben nota relazione

$$\sigma_n^2 = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 \quad (2.16)$$

dove il primo termine è riscrivibile tenendo conto che $\langle n(n-1) \rangle = \bar{n}^2 - \bar{n}$, ottenendo infine

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \langle n(n-1) \rangle + \bar{n} - \bar{n}^2 = \alpha^2 \overline{W^2} + \alpha \bar{W} - \alpha^2 \overline{W^2} = \\ &\alpha \bar{W} + \alpha^2 (\overline{W^2} - \bar{W}^2) = \alpha \bar{W} + \alpha^2 \sigma_W^2\end{aligned}\tag{2.17}$$

Per verificare la correttezza della formula di Mandel e vedere un primo esempio di applicazione, possiamo prendere in considerazione, ancora una volta, il caso di una sorgente coerente, monocromatica e ad intensità costante. Comunque preso un intervallo di tempo di durata t , l'intensità integrata sarà immediatamente esprimibile utilizzando la semplice uguaglianza $W = I_0 At$. La funzione densità di probabilità ρ_W sarà invece riconducibile ad una Delta di Dirac, $\rho_W(W) = \delta(W - I_0 At)$. Sostituendo tali espressioni nella formula di Mandel otteniamo

$$\begin{aligned}P(n) &= \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha W)^n}{n!} e^{-\alpha W} \delta(W - I_0 At) dW = \\ &= \frac{(\alpha I_0 At)^n}{n!} e^{-\alpha I_0 At}\end{aligned}\tag{2.18}$$

che è subito riconducibile alla Poissoniana notando che $\bar{n} = \alpha \bar{W} = \alpha W = \alpha I_0 At$. Abbiamo quindi ritrovato il risultato atteso.

Per ricavare la distribuzione di BE nella formulazione semiclassica, consideriamo una sorgente di tipo termico a singolo modo, lavorando su scale di tempo inferiori al tempo di coerenza. Nella realtà è estremamente complesso raggiungere quest'ultima condizione, considerato che si dovrebbe impostare un tempo di conteggio dell'ordine del picosecondo, ma è realizzabile in buona approssimazione sfruttando una cosiddetta sorgente pseudo-termica. Vedremo, nel capitolo seguente, che una sorgente di questo tipo si può ottenere sempre impiegando un laser a singolo modo, posto di fronte ad un disco di vetro caratterizzato da una certa granulosità, messo in rotazione. Procedendo in questa maniera, il tempo di coerenza aumenta considerevolmente, rendendo fattibile l'osservazione della statistica Super-Poissoniana.

Nel caso descritto, lavorando per un intervallo di tempo di durata t , l'espressione dell'intensità integrata diventa semplicemente $W = I(t) At$, dove i valori di $I(t)$ sono randomici ed obbediscono ad una statistica di tipo esponenziale, sperimentalmente nota. Dalla formula di W risulta chiaro che anche l'intensità integrata dovrà seguire tale statistica, pertanto possiamo scrivere

$$\rho_W(W) = \frac{1}{\bar{W}} e^{-\frac{W}{\bar{W}}}\tag{2.19}$$

Effettuiamo quindi la sostituzione nella formula di Mandel, ricavando

$$\begin{aligned}
 P(n) &= \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha W)^n}{n!} e^{-\alpha W} \frac{1}{\bar{W}} e^{-W/\bar{W}} dW = \\
 &= \frac{\alpha^n}{n! \bar{W}} \int_0^{+\infty} W^n \exp[-W(\alpha + \frac{1}{\bar{W}})] dW
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

chiamiamo a questo punto il termine $\alpha + 1/\bar{W} = \tau$ per comodità, da cui

$$\begin{aligned}
 P(n) &= \frac{\alpha^n}{n! \bar{W}} \int_0^{+\infty} W^n e^{-\tau W} dW = \\
 &= \frac{\alpha^n}{n! \bar{W}} \frac{n!}{\tau^{n+1}} = \frac{1}{1+\alpha \bar{W}} \left(\frac{\alpha \bar{W}}{1+\alpha \bar{W}} \right)^n
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

dove il primo passaggio si ricava integrando per parti. Ricordando ancora una volta che $\bar{n} = \alpha \bar{W}$, ritroviamo la distribuzione di BE come atteso.

In conclusione, abbiamo dimostrato che i risultati ricavabili dalle ipotesi del modello semiclassico, e quindi in cui la quantizzazione riguarda esclusivamente lo scambio di energia tra radiazione incidente e rivelatore, riproducono in modo perfetto le statistiche Poissoniane e Super-Poissoniane previste dal modello a fotoni, rendendo impossibile dimostrare, a partire dall'osservazione sperimentale di queste, la natura quantizzata della luce. L'esclusiva osservazione di una statistica di tipo Sub-Poissoniano, imprevedibile utilizzando questo approccio, è in grado di costituire una prova inconfutabile in tal senso: ecco perché tale evento, realizzato solo negli anni '90 grazie alla messa a punto di tecniche di generazione e rivelazione della luce estremamente raffinate ed efficienti, rappresenta una delle pietre miliari nello sviluppo dell'ottica quantistica.

Nel prossimo capitolo, come anticipato nell'introduzione, verrà illustrata una serie di misure sperimentali realizzate allo scopo di verificare la correttezza delle conclusioni del modello semiclassico, e quindi al dimostrare l'effettiva compatibilità delle statistiche osservate con quelle di tipo Poissoniano o Super-Poissoniano.

3

Approccio sperimentale per la verifica del modello semiclassico

3.1 Introduzione

Per poter realizzare la serie di esperimenti aventi lo scopo di verificare le previsioni del modello quantizzato della fotorilevazione, svolta presso il "Laboratorio di Ottica Quantistica dell'Istituto nazionale di Ottica-CNR" di Sesto Fiorentino, si è fatto riferimento, in modo particolare, allo studio [3], articolo in cui si illustrano due semplici modalità di riproduzione di una statistica Poissoniana e di una di Bose Einstein, ottenute grazie all'utilizzo di un laser a singolo modo. Come rimarcato più volte, uno strumento storicamente essenziale in tale tipologia di esperienze è rappresentato dal tubo a fotomoltiplicatore, indicato con la sigla PMT, di cui si riportano schema strutturale e principio di funzionamento in figura 3.1.

Nel nostro caso la scelta del rivelatore non è però ricaduta su un PMT, bensì su un fotodiodo a valanga, tipicamente indicato con la sigla APD (Avalanche PhotoDiode). Tale decisione è presto spiegata: il vantaggio di tali dispositivi sta nell'essere caratterizzati da un valore superiore di efficienza quantica η e nell'avere una soglia di saturazione più elevata, rendendo così possibile impiegare sorgenti più intense che nel caso dei PMT. Ciò consente una ricostruzione decisamente più precisa della statistica fotonica, rendendo la scelta dei fotomoltiplicatori tradizionali obsoleta (soprattutto nel caso si vogliano ricavare distribuzioni di tipo Sub-Poissoniano).

La struttura di un APD è rappresentata schematicamente in figura 3.2:

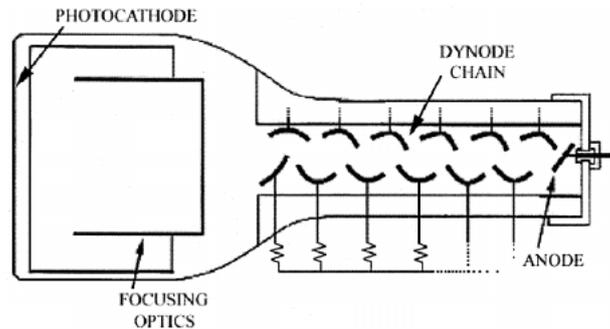


Figura 3.1: Schema strutturale di un tubo fotomoltiplicatore. Gli elementi essenziali che lo costituiscono sono due: il fotocatodo, superficie il cui scopo è assorbire i pacchetti energetici della radiazione e impiegarli nell'emissione di fotoelettroni, e una serie di dinodi, elettrodi che reagiscono all'arrivo di un fotoelettrone emettendo elettroni secondari, determinando così il processo di moltiplicazione. L'illustrazione è tratta da [4], pag 295.

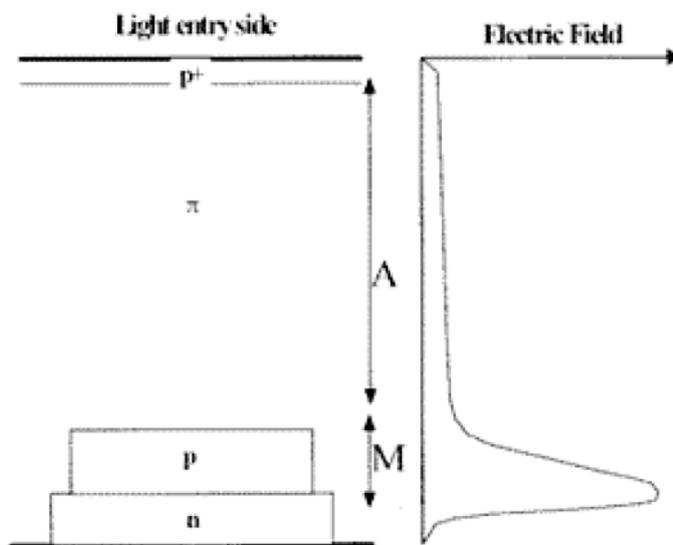


Figura 3.2: Rappresentazione schematica della struttura di un APD, affiancata dall'andamento qualitativo del campo elettrico. Da notare le quattro regioni di semiconduttore, con diversi drogaggi. L'immagine è tratta da [5], pag 2.

esso si caratterizza per la presenza di quattro regioni semiconduttrici in totale, nello specifico una regione n e una regione p^+ fortemente drogate, che fungono da catodo e anodo rispettivamente, una regione priva di particolari drogaggi, indicata con π , e infine una regione debolmente drogata p . Applicando una tensione negativa in segno tra catodo e anodo, e cioè polarizzando inversamente la giunzione, si determina la formazione di

un campo elettrico caratterizzato dall'andamento qualitativo visibile sempre in figura. Esso assume un valore pressapoco costante nella vasta regione π , mentre mostra un deciso picco in corrispondenza della giunzione pn , che prende il nome di *regione di moltiplicazione*. Quando un fotone viene assorbito in corrispondenza della regione p^+ , esso viaggia quasi indisturbato fino alla regione p , dove ha energia sufficiente per decadere in una coppia elettrone-lacuna. L'elettrone emesso dovrà muoversi verso la regione n , a causa dell'effetto della polarizzazione inversa, non potendo quindi che entrare nella regione di moltiplicazione. Tale ingresso corrisponderà ad una brusca accelerazione e quindi ad un decisivo aumento di energia cinetica, tale da produrre ulteriori coppie-lacuna in seguito all'urto con gli atomi. Gli elettroni liberati vengono poi immessi in un circuito ohmico esterno, venendo così a costituire una corrente, detta *fotocorrente*, il cui valore è dato da

$$i = \eta e \phi = \eta e \frac{P}{\hbar\omega} \quad (3.1)$$

dove P è la potenza del raggio luminoso incidente. Solitamente il circuito esterno è del tipo rappresentato in figura 3.3, caratterizzato dalla presenza di una resistenza di carico R_L , attraverso cui scorre la fotocorrente, determinando una caduta di potenziale $V(t) = R_L i(t)$ in generale funzione del tempo, e da un condensatore C , il cui scopo è bloccare la corrente diretta ed evitare così la saturazione dell'amplificatore (necessario per via del solitamente basso fattore di moltiplicazione proprio del solo fotodiodo).

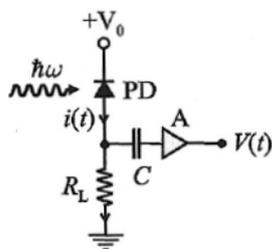


Figura 3.3: *Rappresentazione del circuito esterno collegato al fotodiodo. Esso è caratterizzato dalla presenza di una resistenza di carico e di un condensatore. L'immagine è presa da [1], pag 95.*

Il rilevatore è infine completato da un discriminatore, direttamente connesso al contatore, il cui segnale di output è di tipo TTL: un segnale alto determinerà un incremento del numero di conteggi, mentre un segnale basso lo manterrà invariato. Un ultimo aspetto di cui è importante tenere conto è il *dark count rate*, cioè il numero di conteggi che non corrispondono effettivamente a fotoeventi, ma che derivano da fluttuazioni inevitabili del segnale, di natura termica. Nel paragrafo successivo si illustrerà in quale modo si è

affrontato tale termine così da rendere il più fedeli possibili le distribuzioni finali. Come visto più volte, una distribuzione di conteggio di particolare interesse e, almeno in linea di principio, facilmente osservabile è quella Poissoniana, caratteristica di una sorgente monocromatica, coerente e ad intensità costante. Questa si può riprodurre impiegando un laser a singolo modo, operante ben al di sopra della condizione di *threshold*: anche nel caso in cui tale sorgente fosse soggetta a deboli fluttuazioni in intensità, infatti, il tempo di coerenza sarebbe talmente ridotto da soddisfare la già incontrata condizione $T \gg \tau_c$, che determina comunque una distribuzione Poissoniana. Più complessa è invece l'osservazione della distribuzione di Bose-Einstein, di tipo Super Poissoniano e prevista per una sorgente di tipo termico. Per quanto tali tipologie di sorgenti siano piuttosto comuni e facili da realizzare, ad esempio le comuni lampade ad incandescenza o a scarica, esse si caratterizzano per tempi di coerenza estremamente ridotti, per cui bisognerebbe impostare un tempo di conteggio dell'ordine del picosecondo per soddisfare la condizione $T \ll \tau_c$ e non ricadere così nuovamente nel caso Poissoniano. Una possibile soluzione, adottata in [3] e già anticipata, è quella di realizzare una sorgente pseudo termica a partire dall'utilizzo del laser. Questa si può ricavare sfruttando lo *scattering* della radiazione monocromatica da parte di un grande numero di centri scatteratori, in movimento e distribuiti in modo casuale. A tale scopo, si può procedere in due diversi modi, ideati già a partire dagli anni '60:

- sfruttare lo scattering della luce da parte di sferette in plastica, di dimensione inferiore al micron, sospese in un liquido;
- riprodurre lo stesso effetto impiegando un disco di vetro smerigliato posto in rotazione di fronte al laser.

Quest'ultima è la soluzione utilizzata in [3] e che si è deciso pertanto di adottare. Per comprendere il processo di scattering determinato dall'utilizzo della rotella, conviene osservare la figura 3.4: innanzitutto, il fascio luminoso viene fatto convergere, per mezzo di un'apposita lente, su un punto specifico del disco.

Questo si caratterizza per una superficie fortemente irregolare, suddivisibile in un gran numero di porzioni elementari di area, di dimensione essenzialmente casuale. In presenza di una radiazione incidente, tali aree si comporteranno come tanti centri scatteratori, sorgenti di onde sferiche per il principio di Huygens Fresnel, e l'onda complessiva sarà pertanto ricavabile applicando il principio di sovrapposizione. Siccome i valori di ampiezza e fase di ciascun contributo sferico dipendono rispettivamente dalla dimensione e dalla posizione relativa delle aree scatteratrici, essi risulteranno assolutamente randomici, dando vita ad un campo d'onda complessivo la cui intensità varia notevolmente a seconda del punto di osservazione (in figura definito dal *pinhole*). Questo fenomeno, ampiamente conosciuto e studiato in letteratura, prende il nome di *speckle*, una caratteristica tipologia di interferenza granulare. Ogni traslazione del disco di vetro in direzione

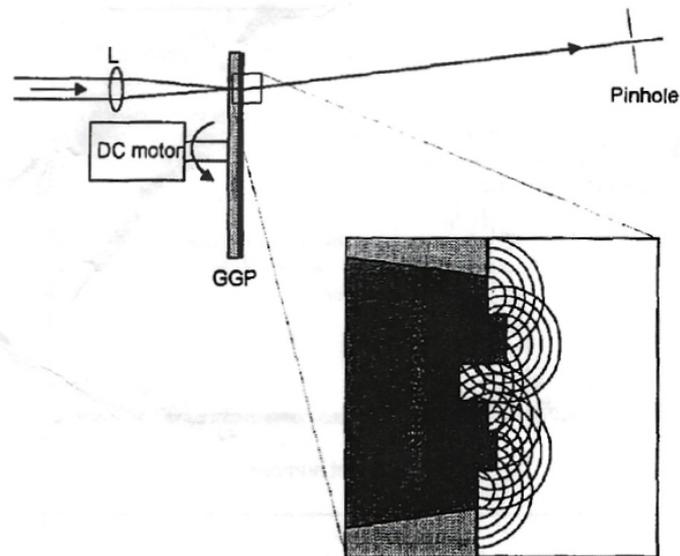


Figura 3.4: *Rappresentazione schematica del principio di realizzazione di una sorgente pseudotermica impiegando un laser a singolo modo e un disco di vetro smerigliato, posto in rotazione a bassa velocità. L'ingrandimento mostra come le singole porzioni di area sul disco si comportino come sorgenti di onde sferiche, di fase e ampiezza randomiche, secondo il principio di Huygens-Fresnel. L'immagine è tratta da [3], pag 242.*

ortogonale rispetto a quella di provenienza del raggio, o rotazione avente come asse quest'ultima, produce notevoli fluttuazioni del campo d'onda in corrispondenza del pinhole. Si può dimostrare in particolare (si rimanda per i dettagli a [6]) che, quando il diametro di apertura del pinhole è molto inferiore alle dimensioni dei grani dello speckle, le fluttuazioni in corrispondenza dell'apertura possono essere descritte da una formula perfettamente analoga a quella della luce termica. Riassumendo, i requisiti fondamentali per realizzare una sorgente pseudotermica sono l'utilizzo di un disco di vetro dalla superficie irregolare, la sua messa in rotazione, ottenuta collegandolo ad un motore DC, e la scelta di un pinhole di dimensione opportuna. I vantaggi non si limitano all'avere un tempo di coerenza notevolmente più grande, rendendo possibile l'osservazione di una distribuzione Super-Poissoniana, ma anche alla possibilità di controllare con facilità e quasi continuità tale tempo, variando semplicemente la velocità di rotazione del disco.

3.2 Apparato sperimentale e svolgimento

3.2.1 Strumentazione

Si elenca di seguito la strumentazione utilizzata per l'esperienza:

- Rivelatore a singolo fotone, modello 10244, Excelitas Technologies. Le specifiche più rilevanti per l'esperimento, a cui si farà più volte riferimento, sono riportate nella tabella qui di seguito:

	min	valore atteso	max	unità di misura
Dark counts		68	100	Hz
Saturazione	10	15.6		MHz
Dead time		50.3	65	ns
Pulse width		35.1		ns

Esso è costituito, come anticipato, da un APD, dotato di circuito esterno, amplificatore e discriminatore.

Occorre sottolineare che, avvicinandosi alla regione di saturazione, corrispondente a 15.6 Mc/s (milioni di conteggi al secondo), diventa necessario introdurre un fattore di correzione sul numero di conteggi, il cui andamento sperimentale è riportato in figura 3.5. Da qui in avanti si potrà trascurare questo aspetto, poiché per lo stato coerente si lavorerà nella regione ($10^3, 2 \times 10^4$) counts/s, mentre per quello pseudotermico nell'intervallo $(0.2, 1.6) \times 10^7$ counts/s, in cui il fattore di correzione vale 1 in ottima approssimazione.

- Contatore Fluke Philips PM6680B. Tale dispositivo è stato programmato in modo tale da restituire il numero di conteggi effettuati in un certo intervallo di tempo T , salvando e ripetendo la misura per un totale di N volte, con T ed N comodamente settabili da Personal Computer.

- Il circuito ottico impiegato risulta essenzialmente riconducibile a quello riportato in figura 3.6: esso è costituito da

- una sorgente laser in titanio-zaffiro, in grado di emettere radiazione pulsata in regime di *mode-locking*, intorno agli 800 nm di lunghezza d'onda. L'emissione è un treno di impulsi di durata di circa 1 ps e frequenza di ripetizione 82 MHz, a tutti gli effetti considerabile come un'emissione continua per questa tipologia di misure. La potenza media di uscita è intorno ad 1 W;
- una serie di filtri neutri, fissi e variabili, per portare il raggio alla regione di potenze utili per l'esperimento. Nel loro complesso essi si comportano analogamente a tre filtri P1, P2 e P3, i primi due neutri fissi ma con il secondo abbassabile, l'ultimo neutro e ad attenuazione variabile;

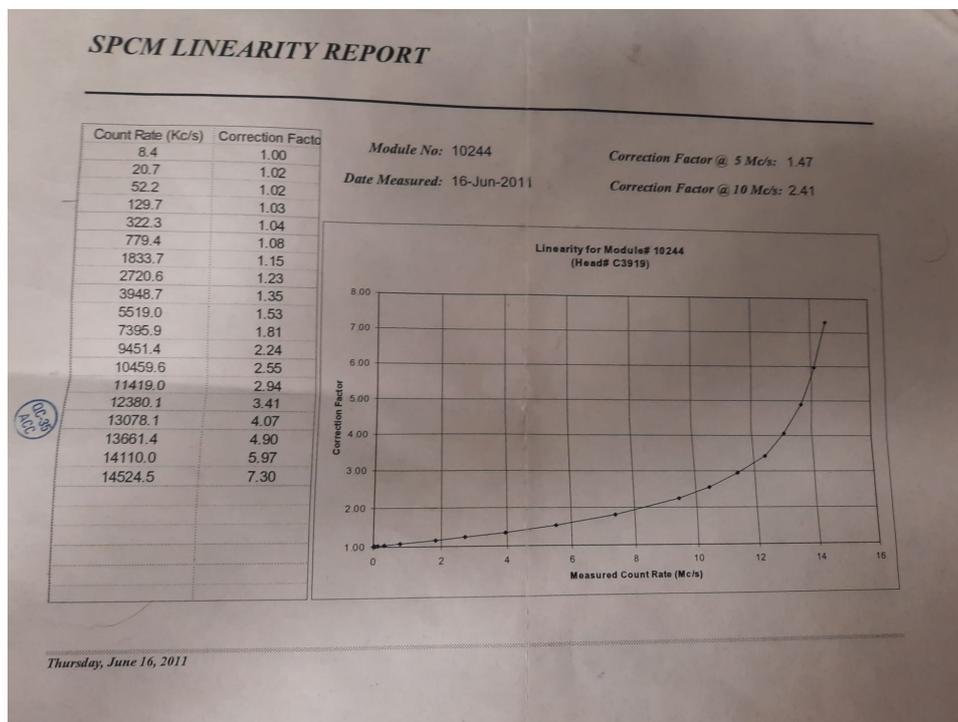


Figura 3.5: Andamento del fattore di correzione valutato sperimentalmente. I punti effettivamente ottenuti sono riportati nella tabella a sinistra.

- una lente di focale 50 mm utilizzata per focalizzare il fascio all'ingresso di una fibra ottica a singolo modo, per la sorgente coerente, o sul disco smerigliato, per produrre la sorgente pseudotermica. In quest'ultimo caso una parte della radiazione viene diffusa in maniera leggermente disassata rispetto alla direzione del fascio laser, per poi venire raccolta dalla solita fibra collegata all'altro capo al rivelatore APD. Da notare che la regione del *core* della fibra nuda ha la funzione di pinhole, selezionando solo una regione molto ristretta della radiazione diffusa dal vetro.

3.2.2 Valutazione dark count rate

Prima di poter iniziare la fase di campionamento volta alla determinazione delle statistiche dei fotoconteggi, si è ritenuto necessario effettuare alcune misure per la determinazione del dark count rate, in modo tale da valutarne l'entità e minimizzarne gli effetti. A tale scopo, si è isolato in una camera oscura il rivelatore e si sono raccolte alcune misure di conteggio, impostando inizialmente un tempo di azione del counter pari a 1 s, poi ridotto a 1 ms (quest'ultimo corrisponde alla scala temporale con cui si sono poi effet-

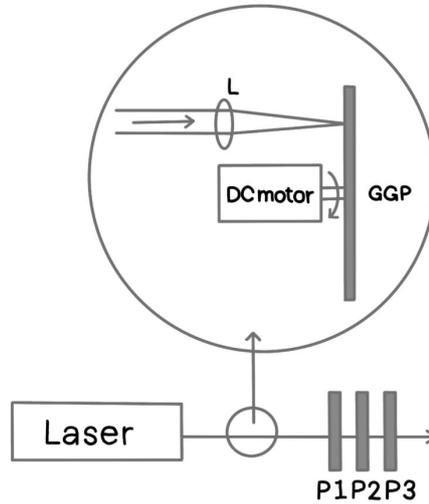


Figura 3.6: *Rappresentazione schematica del circuito ottico impiegato per le misure. L'apparato in alto mette in evidenza la modalità di realizzazione della sorgente pseudo-termica, ottenuta focalizzando il fascio sul disco di vetro smerigliato, opportunamente collegato ad un piccolo motore a corrente continua per la messa in rotazione.*

tuate le misurazioni per ricostruire la distribuzione dello stato coerente). L'istogramma ottenuto nel primo caso è riportato in figura 3.7: il ridotto numero di misure, pari a 62, è giustificato dal fatto che lo scopo di tale campionamento non è quello di valutare esattamente il valor medio di dark counts, bensì di verificarne la compatibilità con il valore dichiarato dal costruttore, circa uguale a 68 counts/s e garantito inferiore a 100 counts/s.

Tale criterio è soddisfatto dal valor medio ottenuto, pari a (70.5 ± 1.0) counts/s, dove l'incertezza è stata valutata come la deviazione standard della media, secondo la prassi. Cambiando il tempo di conteggio sarebbe spontaneo aspettarsi un valor medio analogo (quindi opportunamente riscaldato a 0.070 counts/ms passando al nuovo tempo di integrazione): non può quindi che sorprendere, a prima vista, il risultato effettivamente ottenuto, riportato in figura 3.8.

Tale istogramma rivela infatti una media pari a (1.069 ± 0.008) counts/ms, calcolata su un totale di 1000 misure, e ha 0 occorrenze nel bin $0 - 1$, che ci aspetteremmo essere il più probabile. Tale andamento è presto spiegato: fino a che almeno un fotone non

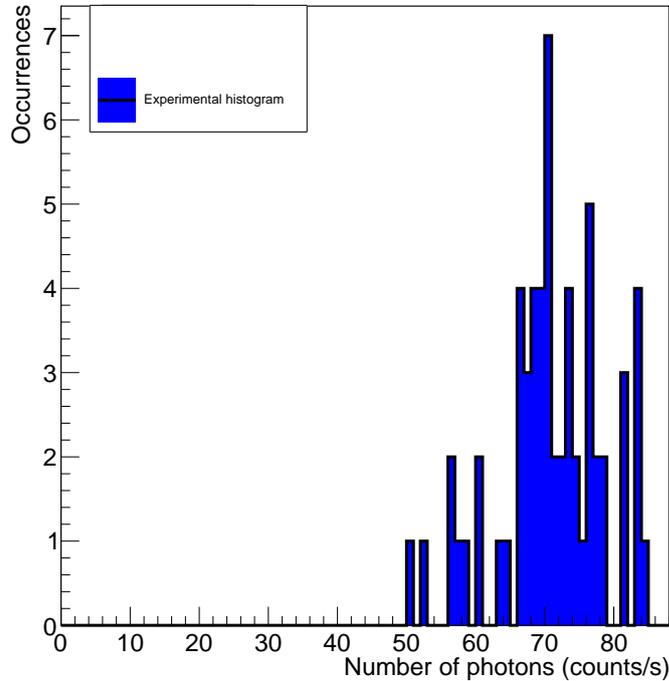


Figura 3.7: *Istogramma delle misure di fotoconteggio effettuate isolando in una camera oscura il rivelatore, in modo da quantificare il dark count rate. Il tempo di integrazione impostato è pari ad 1 s, il numero di misure a 62.*

raggiunge il rivelatore, l'output in ingresso del contatore rimane uno stato logico basso e, pertanto, il conteggio non ha inizio. Dal momento in cui ne arriva almeno uno, il contatore setta un valore predefinito di conteggio pari a 1, aggiungendo a quest'ultimo il numero di impulsi ricevuti dal fotodiode. La corretta distribuzione si ottiene, quindi, sottraendo tale valore di default a tutti gli ingressi, ricavando l'istogramma in figura 3.9, caratterizzato da una media pari a (0.069 ± 0.008) counts/ms, compatibile con i valori visti in precedenza.

Questo accorgimento va tenuto per tutte quelle misure in cui il tempo di conteggio è talmente piccolo da determinare una bassa probabilità di incidenza di un fotone, fatto sicuramente vero per tutte le misure che andremo a considerare in seguito. Non è necessario apportare ulteriori correzioni, in quanto il valor medio dei *dark counts* effettivi è trascurabile rispetto all'ordine di grandezza dei valori presi in esame, pari ad almeno 10^3 counts/s.

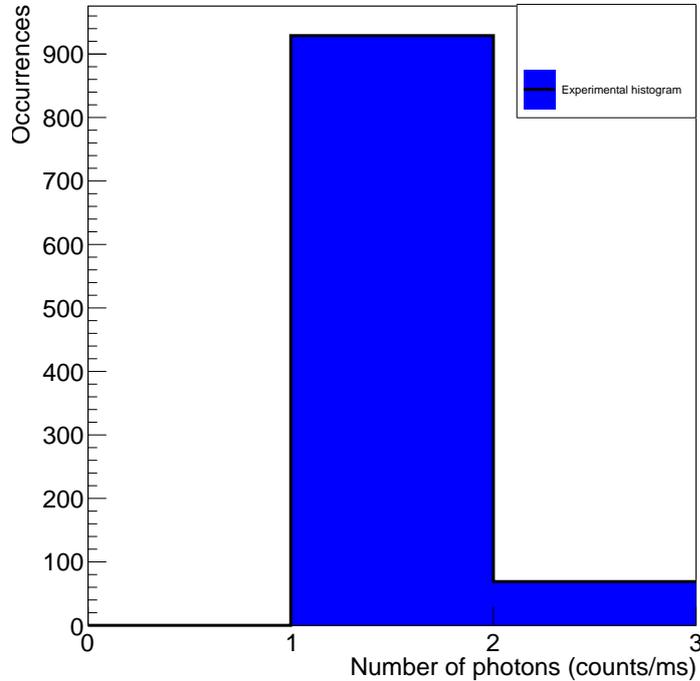


Figura 3.8: *Istogramma per la valutazione del dark count rate, ottenuto impostando un tempo di conteggio pari ad 1 ms. Il numero di misure è invece uguale a 1000.*

3.2.3 Campionamenti per sorgente coerente e pseudotermica

Per realizzare i campionamenti necessari alla caratterizzazione della sorgente coerente si è innanzitutto alzato il filtro P2, facendolo così attraversare dal raggio luminoso, e si è regolata la posizione di P3 in modo tale da impostare il valor medio di fotoconteggi vicino a quello desiderato. Occorre sottolineare che, durante tale fase di regolazione, è opportuno settare un tempo di conteggio abbastanza elevato, circa 1/10 s, così da garantire una maggiore stabilità del valore osservato sul monitor. Fatto ciò, si può dare inizio alla fase di raccolta dati, reimpostando il tempo di integrazione ad un valore ragionevole, nel nostro caso pari ad 1 ms, e scegliendo un numero N abbastanza grande da riprodurre fedelmente la statistica, nel nostro caso 10^4 . La misura si è svolta per cinque diversi valori medi di fotoconteggi, rispettivamente vicini a 1, 5, 10, 15 e 20 counts/ms. Gli istogrammi ottenuti sono riportati e commentati nel paragrafo successivo.

Per quanto riguarda i campionamenti per la caratterizzazione della sorgente pseudotermica, invece, si è montato il disco di fronte al laser, si è abbassato il filtro P2 e si è regolato il filtro P3, procedendo in modo analogo a quanto fatto per il caso coerente. Nella prima operazione occorre tener conto di alcuni piccoli ma rilevanti accorgimenti: innanzitutto

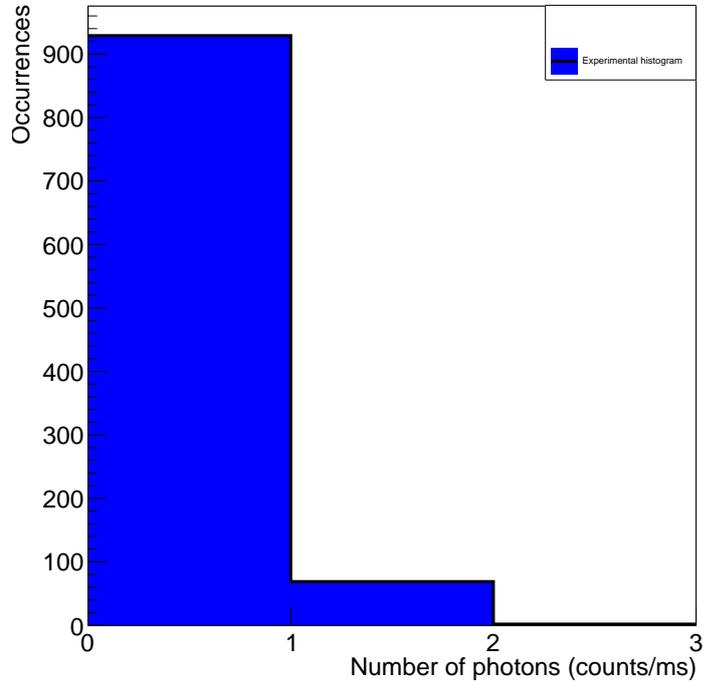


Figura 3.9: *Istogramma per la valutazione del dark count rate, ottenuto impostando un tempo di integrazione pari ad 1 s e tenendo conto del valore 1 di conteggio aggiunto di default su scale di tempo ristrette.*

il disco deve essere lievemente decentrato rispetto all'asse ottico, espediente che serve ad evitare che il fascio laser trasmesso incida direttamente sulla fibra, aumentando così il contributo termico e diminuendo quello coerente, sebbene al prezzo di un'inevitabile riduzione dell'intensità della luce raccolta. Inoltre, la semplice variazione della velocità di rotazione della rotella, o in alternativa della distanza dall'asse, permette di regolare su un ampio intervallo il tempo di coerenza della radiazione pseudotermica prodotta, in modo quasi continuo. Per scegliere un tempo di integrazione adeguato per il campionamento finale si può procedere in due modi: nello studio [3] esso viene stabilito dopo aver effettuato una stima del tempo di coerenza, realizzata utilizzando un fotodiodo posto in corrispondenza del primo pinhole e collegato ad un oscilloscopio. L'osservazione del segnale su quest'ultimo consente, in linea di principio, di ricavare la stima cercata, solo che tale procedura è spesso di difficile realizzazione, in quanto estremamente sensibile a fonti di rumore; un metodo alternativo, adottato nell'esperienza qui descritta, consiste nell'impostare la minima velocità possibile della rotella per poi procedere ad effettuare piccoli ma significativi campionamenti (nel nostro caso da 1000 misure) al variare del

tempo di integrazione, lavorando intorno ad un valore di riferimento ragionevolmente piccolo ($100 \mu s$ nel nostro caso). Il valore ideale sarà quello per cui la varianza del campione è ben approssimata dalla formula (1.20): il calcolo della varianza fornisce infatti un'ottima indicazione su quanto bene la distribuzione ottenuta sia approssimabile con un certo andamento noto. Lavorando in questa maniera si è scelto di impostare un tempo di integrazione pari a $50 \mu s$. Per quanto tale valore si sia rivelato un'ottima opzione, come vedremo, esso ha decisamente ristretto il range di possibili valori medi di conteggio, considerata la necessità di non uscire dalla regione con fattore di correzione diverso da 1. In particolare, i campionamenti effettuati hanno medie vicine a 1, 2, 5, e 8 counts/ $50 \mu s$, i cui istogrammi sono riportati e commentati nel prossimo paragrafo.

3.3 Risultati e discussione

Prendiamo ora in esame i risultati ottenuti: in analogia con quanto fatto nello studio di riferimento, si è scelto di analizzare gli istogrammi di probabilità, ricavabili semplicemente normalizzando quelli delle occorrenze, che risultano di più facile lettura e maggiormente significativi. Tali istogrammi sono stati messi a confronto con quelli corrispondenti alle distribuzioni attese, Poissoniane nel caso coerente, di Bose Einstein nel caso pseudotermico. È noto che tali distribuzioni sono dipendenti da un unico parametro, il valor medio di conteggi: per ricavarlo si è eseguito un fit dei dati sperimentali con l'andamento atteso, opportunamente espresso in forma discretizzata e non continua. Il programma di analisi, realizzato tramite una macro in grado di sfruttare il pacchetto software ROOT, è pensato in modo tale da restituire tale stima direttamente su schermo, fornendo un valore che si può poi mettere a confronto con l'effettiva media sperimentale, rappresentando così un significativo criterio per validare la bontà del fit.

Gli istogrammi ottenuti sono riportati nelle figure 3.10 e 3.11:

ad un primo esame qualitativo, essi mostrano un ottimo accordo con i dati attesi, rappresentanti in rosso, con un'eccellente compatibilità in quasi ogni bin (le barre di errore, restituite in automatico dal programma in seguito alla chiamata del metodo Sumw2 della classe TH1, sono date dalla radice quadrata del numero di occorrenze di quel bin, poi normalizzata a probabilità). Per rendere più quantitativo il confronto, si è scelto di considerare quattro parametri:

- la compatibilità tra la media sperimentale e il valore stimato dal fit;
- la compatibilità tra la deviazione standard ricavata sperimentalmente e quella attesa, data dalla radice quadrata della formula (1.10);
- il calcolo del coefficiente di determinazione R^2 ;

- il calcolo del $\tilde{\chi}^2$ (il numero di gradi di libertà sarà uguale al numero di bin meno 2, dove al vincolo standard per gli istogrammi si aggiunge il parametro libero del fit).

La tabella riassuntiva dei risultati ottenuti è riportata qui di seguito:

caso	media(c/ms)	$\bar{n}(c/ms)$	dev.std(c/ms)	$\sqrt{\bar{n}}(c/ms)$	R^2	$\tilde{\chi}^2$	gdl
coh 1	1.000 ± 0.010	0.999 ± 0.010	1.003 ± 0.016	1.000 ± 0.005	0.999	0.442	7
coh 5	4.80 ± 0.02	4.81 ± 0.02	2.198 ± 0.016	2.191 ± 0.005	0.999	0.643	15
coh 10	9.95 ± 0.03	9.95 ± 0.03	3.191 ± 0.016	3.154 ± 0.005	0.999	0.974	25
coh 15	15.28 ± 0.04	15.28 ± 0.04	3.905 ± 0.016	3.909 ± 0.005	0.999	0.597	33
coh 20	19.86 ± 0.04	19.86 ± 0.04	4.468 ± 0.016	4.456 ± 0.005	0.999	0.893	39

Tutte le compatibilità richieste risultano soddisfatte, con la sola eccezione delle due stime del valore di deviazione standard nel caso coh15, per cui i due intervalli di confidenza distano giusto 0.016 counts/ms, inferiore all'1% del valore attendibile. I valori dei coefficienti di determinazione sono tutti dell'ordine di 0.999 (si ricorda che il criterio standard per validare il fit è $R^2 > 0.98$) e anche i valori di $\tilde{\chi}^2$ risultano compresi tra 0.5 e 1, corrispondenti ad un'ottima probabilità che i dati seguano il modello atteso. La parte dell'esperienza relativa allo stato coerente ha permesso quindi di dimostrare con assoluta attendibilità la correttezza della statistica Poissoniana. Per completezza, si spiegano in dettaglio le modalità di stima delle incertezze:

- l'incertezza sulla media è stata posta uguale alla deviazione standard della media $\sigma_{\bar{n}} = \sigma_n / \sqrt{N - 1}$, secondo la prassi;
- le incertezze associate alla deviazione standard e alla sua stima sono calcolate usando il metodo standard di propagazione delle incertezze, considerandole funzioni del valor medio;
- l'incertezza relativa alla stima della media \bar{n} è stata calcolata in automatico dal programma in seguito al fit.

Per analizzare i campioni caratteristici del caso pseudotermico si è adottata una procedura essenzialmente analoga, sempre basata sulla costruzione degli istogrammi di probabilità normalizzati e il successivo confronto con quelli attesi, forniti da un opportuno fit eseguito mantenendo come unico parametro libero il valor medio. Questi sono riportati nelle figure 3.12 e 3.13.

Anche in questo caso, un esame qualitativo ci consente di concludere che la distribuzione approssima efficacemente i dati, mostrando qualche discrepanza da segnalare solo nei primi bin (particolarmente evidente nei casi term5 e term8), fatto tra l'altro già rilevato in letteratura (viene sottolineato anche in [3]). Dal punto di vista dell'approccio di

analisi quantitativa, invece, le uniche differenze da segnalare sono la diversa stima della deviazione standard, chiaramente calcolata utilizzando la radice quadrata della formula (1.20), e nel mancato utilizzo del test del chi quadro, risultato non significativo a causa della sottostima delle incertezze. La tabella conclusiva è riportata qui di seguito:

caso	media($c/50\mu s$)	$\bar{n}(c/50\mu s)$	dev.std($c/50\mu s$)	$\sqrt{\bar{n} + \bar{n}^2}(c/50\mu s)$	R^2
term1	0.877 ± 0.013	0.867 ± 0.012	1.272 ± 0.009	1.286 ± 0.014	0.999
term2	1.77 ± 0.02	1.76 ± 0.02	2.244 ± 0.016	2.21 ± 0.02	0.999
term5	5.44 ± 0.06	5.37 ± 0.07	6.28 ± 0.04	5.92 ± 0.06	0.996
term8	6.77 ± 0.08	6.65 ± 0.08	7.55 ± 0.05	7.25 ± 0.08	0.996

Se le due stime del valor medio risultano compatibili in tutti i casi, non lo sono quelle di deviazione standard nei già citati casi term5 e term8, in cui la discrepanza tra gli intervalli di confidenza risulta comunque estremamente ridotta se confrontata con i valori attendibili. La minore bontà del fit si riscontra anche nel valore inferiore del coefficiente di determinazione, pari a 0.996 in entrambi i casi, che comunque consente di confermare con un buon grado di sicurezza l'ipotesi di distribuzione fornita dalla teoria.

Un'ulteriore analisi che si è deciso di svolgere, non presente nell'articolo di riferimento, riguarda gli effetti di un aumento della velocità del disco di vetro sulla distribuzione finale. Intuitivamente, l'incremento della velocità di rotazione dovrebbe essere collegato ad una diminuzione del tempo di coerenza, e quindi ad un comportamento più poissoniano della distribuzione di fotoconteggi. Per verificare la correttezza di tale ipotesi possiamo assumere che, mantenendo invariato il tempo di integrazione, la distribuzione finale sia sempre, almeno in prima approssimazione, esprimibile come una combinazione lineare di un termine di BE e di uno Poissoniano, cioè nella forma

$$P(n) = A \frac{1}{1 + \bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n + B \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (3.2)$$

con A e B coefficienti puri di valore opportuno. Se questo è vero, possiamo aspettarci che la diminuzione del periodo di rotazione porti ad un aumento del contributo Poissoniano, cioè del coefficiente B , e ad una diminuzione di quello Super-Poissoniano, cioè del coefficiente A , idea interessante poiché verificabile quantitativamente. Quello che si è fatto è stato campionare, per un totale di 3000 misure, il numero di fotoconteggi in un intervallo di tempo pari a $50 \mu s$, lavorando per due valori di velocità di rotazione, con $v_2 > v_1$. La procedura si è svolta per tre diversi valori medi, circa uguali a 1, 2 e 5 counts/ $50\mu s$. Dai dati ottenuti si sono poi ricavati gli istogrammi di probabilità, opportunamente fittati con una distribuzione descritta dalla (3.2) mantenendo come parametri liberi i coefficienti A e B e la media. I risultati finali sono riportati nelle figure 3.14, 3.15 e 3.16.

Per verificare la bontà del fit a livello quantitativo si è ancora una volta tenuto conto della compatibilità tra le due stime della media, oltre che del valore del coefficiente di determinazione. La tabella finale è la seguente

caso	A	B	media($c/50\mu s$)	\bar{n} ($c/50\mu s$)	R^2
term1 vup	0.78 ± 0.05	0.22 ± 0.04	1.11 ± 0.03	1.09 ± 0.02	0.999
term1 vupII	0.67 ± 0.05	0.33 ± 0.05	0.99 ± 0.02	0.98 ± 0.02	0.999
term2 vup	0.96 ± 0.04	0.03 ± 0.03	1.85 ± 0.04	1.83 ± 0.04	0.997
term2 vupII	0.88 ± 0.04	0.12 ± 0.03	1.90 ± 0.04	1.88 ± 0.04	0.998
term5 vup	0.97 ± 0.03	0.02 ± 0.02	5.40 ± 0.11	5.21 ± 0.10	0.990
term5 vupII	0.92 ± 0.03	0.06 ± 0.02	5.66 ± 0.11	5.54 ± 0.11	0.980

Anche in questo caso gli alti valori del coefficiente di determinazione e la compatibilità tra le due stime della media consentono di assumere con un buon grado di sicurezza la correttezza dell'ipotesi di combinazione lineare. L'andamento dei coefficienti A e B rispetta quello previsto in tutti i casi, rendendo evidente il tendere della statistica a quella di tipo Poissoniano al diminuire del tempo di coerenza.

3.4 Conclusioni sperimentali

L'esperienza svolta ha consentito di rivelare un ottimo accordo tra i risultati sperimentali e quelli attesi dalla teoria, ricavabili sia dal modello a fotoni che dalla trattazione semiclassica. La compatibilità delle statistiche osservate con i profili attesi, di tipo Poissoniano per la sorgente coerente e di Bose-Einstein per il caso termico, è stata verificata in molteplici modalità indipendenti, ciascuno delle quali ha dato esito positivo o ha evidenziato differenze estremamente sottili e facilmente spiegabili tenendo conto delle imperfezioni dell'apparato sperimentale o di fonti di rumore esterne, come l'illuminazione della stanza. Anche l'analisi degli effetti apportati dall'aumento della velocità di rotazione del vetro, seppur basata su un'ipotesi semplicistica e valida solo in prima approssimazione, ha permesso di rimarcare la veridicità del modello, mostrando un aumento del contributo Poissoniano in seguito ad una diminuzione del tempo di coerenza. Purtroppo la procedura sperimentale non ha consentito di appurare l'esistenza della statistica Sub-Poissoniana, per osservare la quale è necessario adottare metodologie ad hoc. L'unica conclusione che può quindi essere tratta è la quantizzazione dell'interazione radiazione-rilevatore, ma non la natura intrinsecamente corpuscolare della luce.

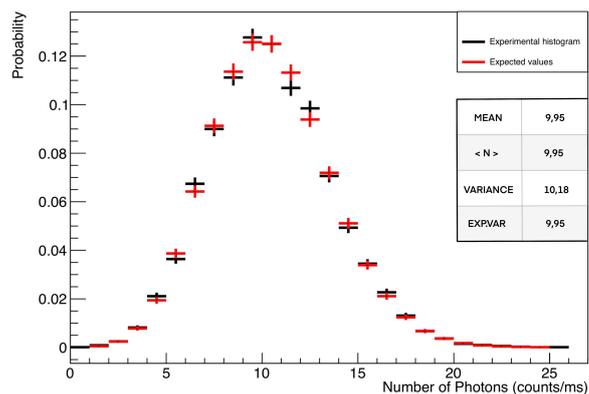
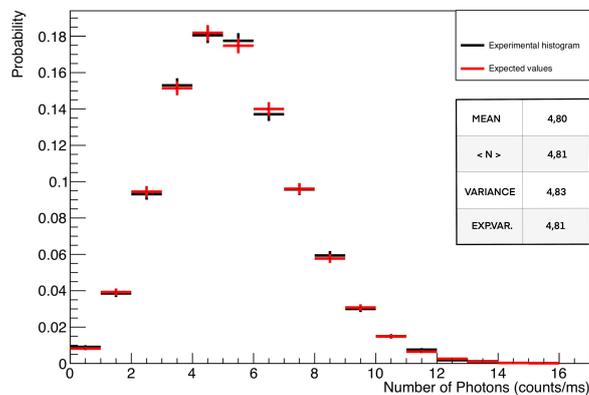
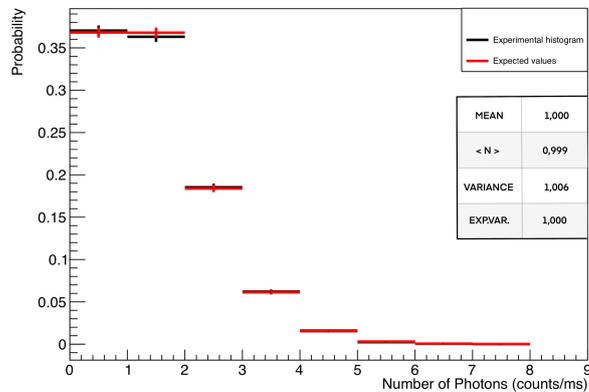


Figura 3.10: *Istogrammi delle probabilità di fotoconteggio per la ricostruzione delle statistiche con sorgente coerente, con valor medi vicini a 1, 5, 10 rispettivamente. Le linee rosse rappresentano i valori attesi da una distribuzione di tipo Poissoniano, il cui parametro \bar{n} è stato stimato dal programma fittando i dati sperimentali.*

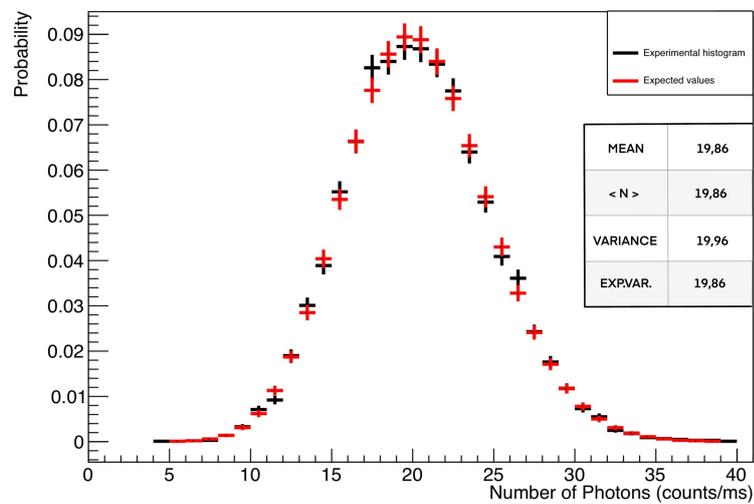
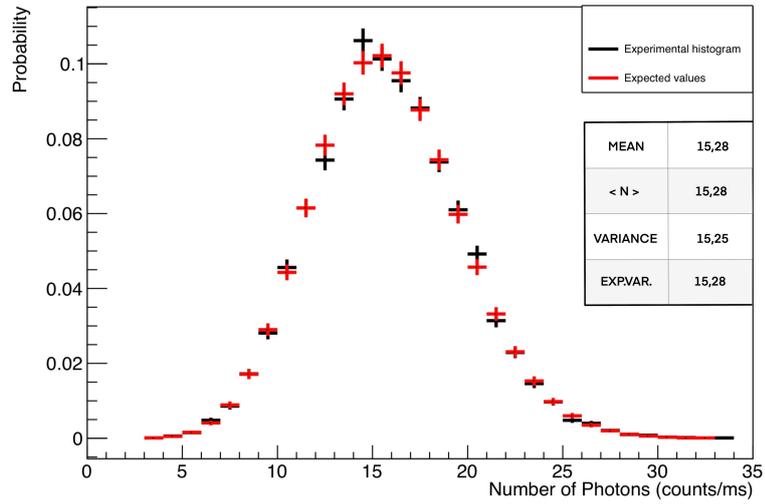


Figura 3.11: *Istogrammi delle probabilità di fotoconteggio per la ricostruzione delle statistiche con sorgente coerente, con valor medi vicini a 15 e 20 rispettivamente. Le linee rosse rappresentano i valori attesi da una distribuzione di tipo Poissoniano, il cui parametro \bar{n} è stato stimato dal programma fittando i dati sperimentali.*

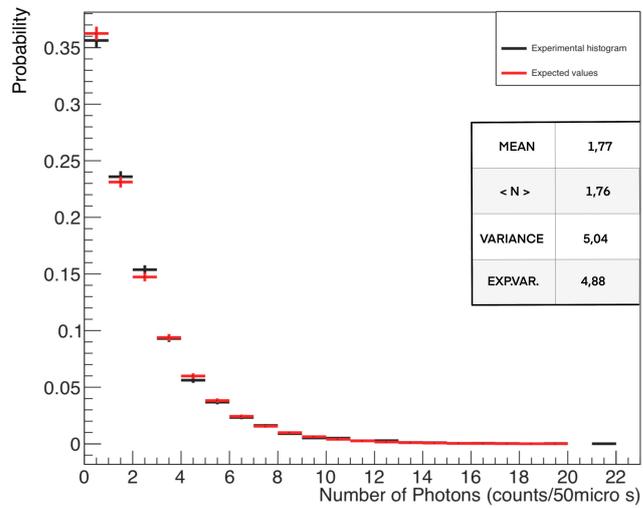
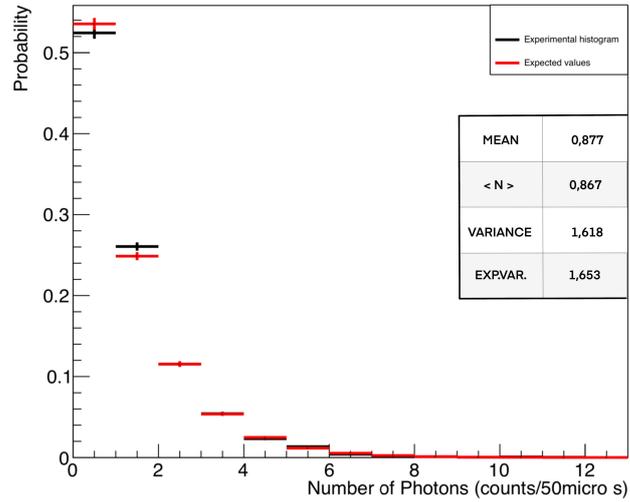


Figura 3.12: *Istogrammi delle probabilità di fotoconteggio per la ricostruzione delle statistiche con sorgente pseudotermica, con valor medi vicini a 1 e 2 rispettivamente. Le linee rosse rappresentano i valori attesi da una distribuzione di BE, il cui parametro \bar{n} è stato stimato dal programma fittando i dati sperimentali.*

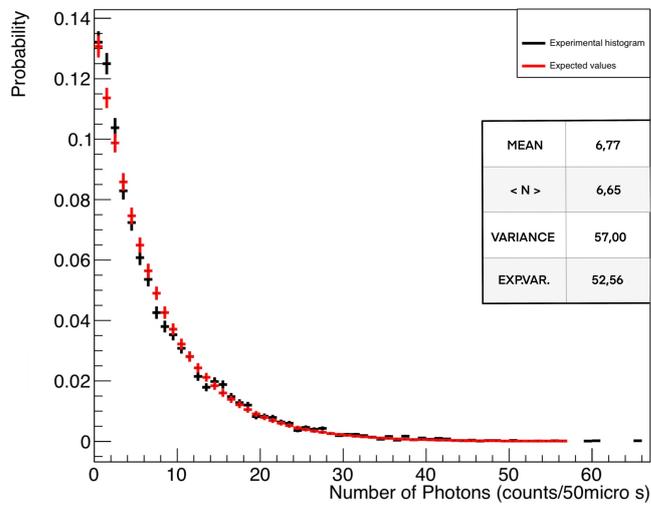
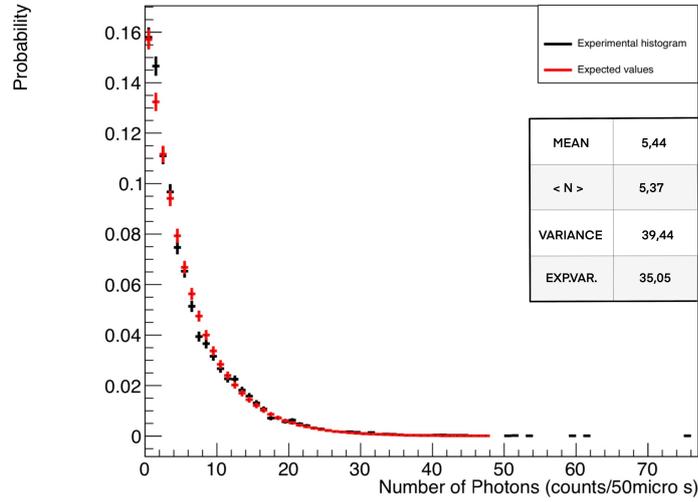


Figura 3.13: *Istogrammi delle probabilità di fotoconteggio per la ricostruzione delle statistiche con sorgente pseudotermica, con valor medi vicini a 5 e 8 rispettivamente. Le linee rosse rappresentano i valori attesi da una distribuzione di BE, il cui parametro \bar{n} è stato stimato dal programma fittando i dati sperimentali.*

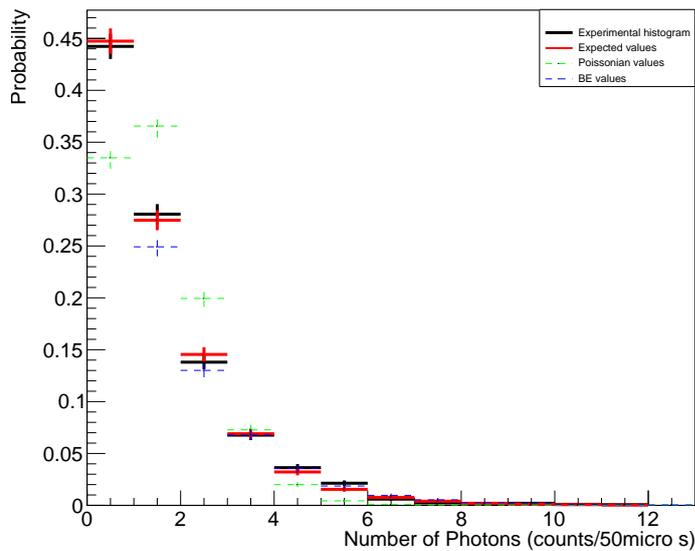
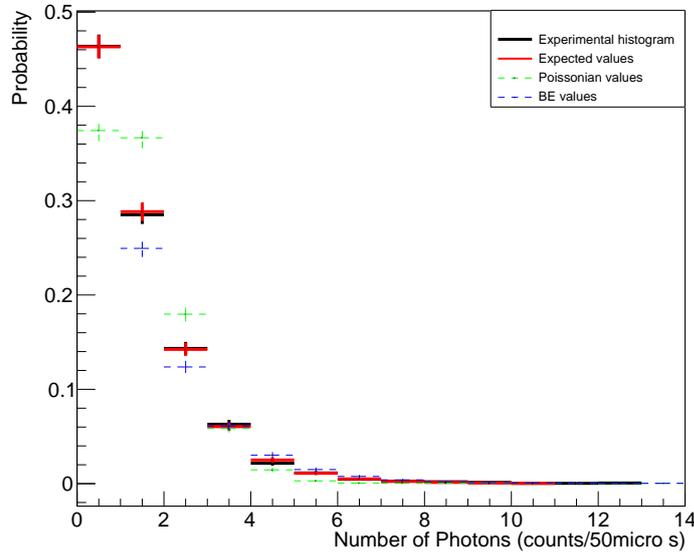


Figura 3.14: *Istogrammi normalizzati delle occorrenze di fotoconteggi ottenuti in seguito ad un aumento della velocità di rotazione del vetro smerigliato, mantenendo costanti il tempo di integrazione ($50 \mu\text{s}$) e il numero medio di conteggi, in questo caso uguale a 1. La velocità è crescente dall'alto in basso. Le linee rosse rappresentano i valori attesi da una distribuzione esprimibile come combinazione lineare di una Poissoniana e di un termine di BE, i cui coefficienti A e B e il cui parametro \bar{n} sono stati stimati dal programma fittando i dati sperimentali. I tratti verdi rappresentano invece i dati previsti per una Poissoniana e quelli blu per una distribuzione di BE.*

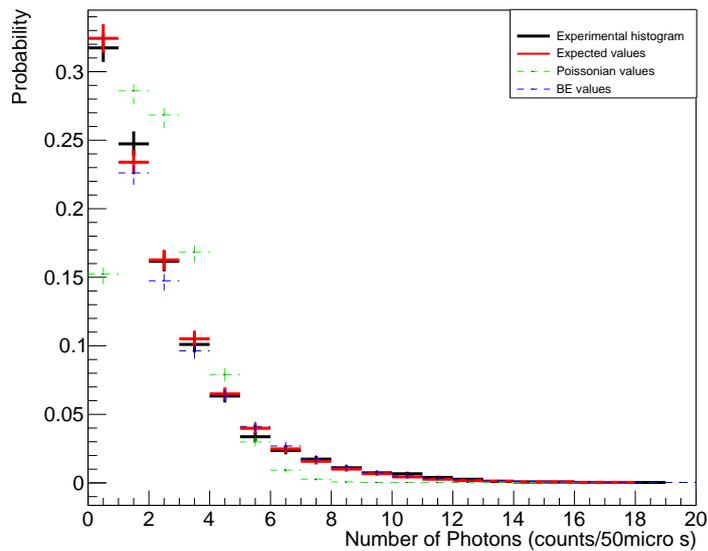
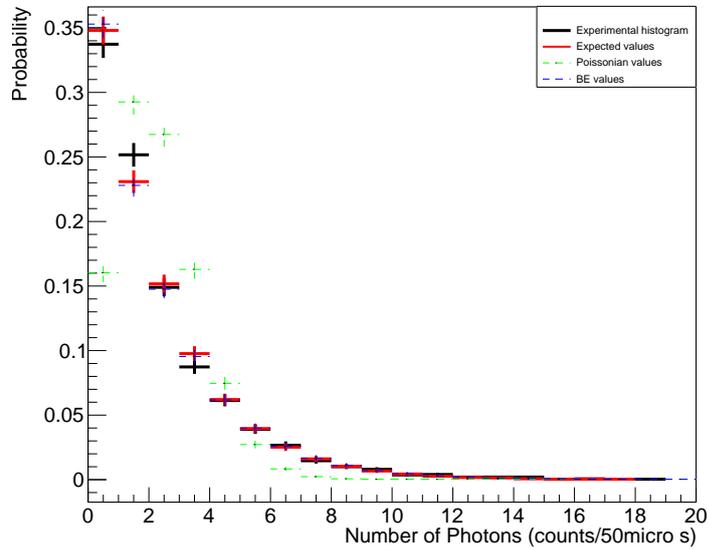


Figura 3.15: Istogrammi normalizzati delle occorrenze di fotoconteggi ottenuti in seguito ad un aumento della velocità di rotazione del vetro smerigliato, mantenendo costanti il tempo di integrazione ($50 \mu\text{s}$) e il numero medio di conteggi, in questo caso uguale a 2. La velocità è crescente da sinistra verso destra. Le linee rosse rappresentano i valori attesi da una distribuzione esprimibile come combinazione lineare di una Poissoniana e di un termine di BE, i cui coefficienti A e B e il cui parametro \bar{n} sono stati stimati dal programma fittando i dati sperimentali. I tratti verdi rappresentano invece i dati previsti per una Poissoniana e quelli blu per una distribuzione di BE.

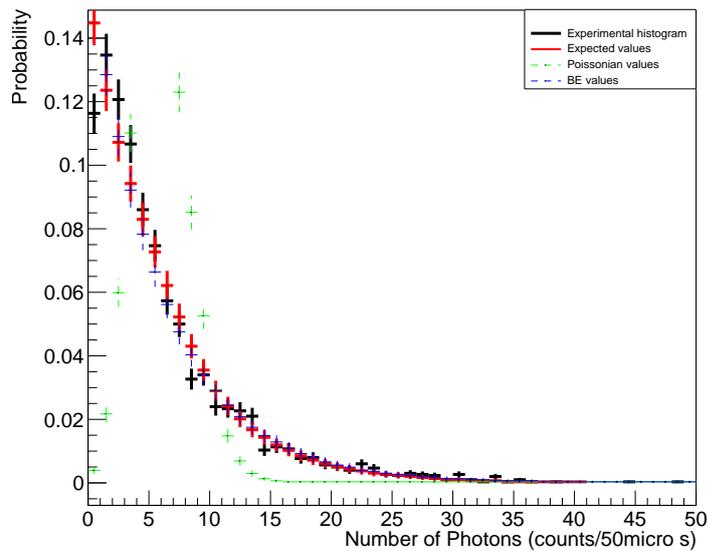
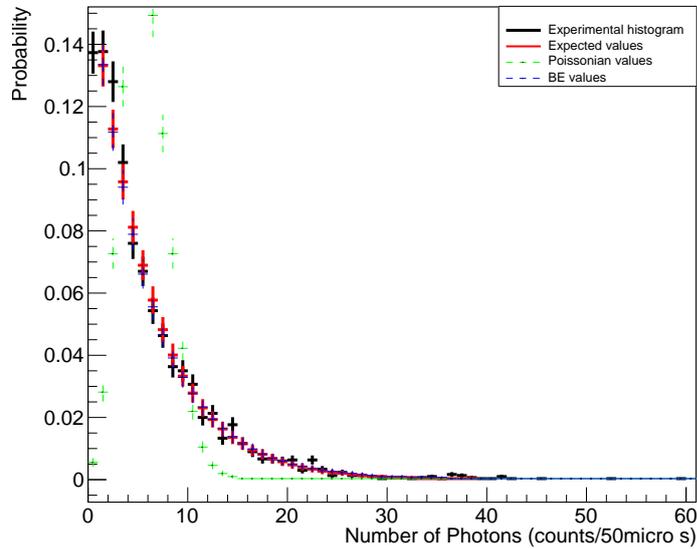


Figura 3.16: *Istogrammi normalizzati delle occorrenze di fotocontergi ottenuti in seguito ad un aumento della velocità di rotazione del vetro smerigliato, mantenendo costanti il tempo di integrazione ($50 \mu\text{s}$) e il numero medio di conteggi, in questo caso uguale a 5. La velocità è crescente da sinistra verso destra. Le linee rosse rappresentano i valori attesi da una distribuzione esprimibile come combinazione lineare di una Poissoniana e di un termine di BE, i cui coefficienti A e B e il cui parametro \bar{n} sono stati stimati dal programma fittando i dati sperimentali. I tratti verdi rappresentano invece i dati previsti per una Poissoniana e quelli blu per una distribuzione di BE.*

4

La statistica Sub-Poissoniana

4.1 Introduzione

Come già anticipato, la possibilità di dimostrare, in modo inconfutabile, la quantizzazione della luce a partire dalla sola analisi delle statistiche di conteggio si limita alla verifica dell'esistenza di statistiche Sub-Poissoniane, cioè caratterizzate da un valore di varianza $\sigma_n^2 < \bar{n}$, dove \bar{n} è quello determinato da una sorgente coerente, monocromatica e ad intensità costante. Quest'ultima è la forma classicamente più ordinata di radiazione, pertanto una sorgente di tipo Sub-Poissoniano è spiegabile e descrivibile solo ragionando in termini puramente quantistici. L'esempio in assoluto più semplice di radiazione Sub-Poissoniana a cui possiamo pensare è una tipologia di flusso fotonico solitamente denominata *photon number state*: in questo caso, il raggio luminoso si caratterizza per una disposizione dei pacchetti energetici perfettamente regolare, in cui è quindi costante l'intervallo temporale Δt tra un fotone e l'altro (una rappresentazione efficace è riportata in figura 4.1).

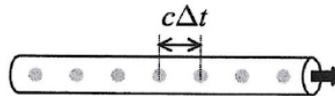


Figura 4.1: *Rappresentazione del photon number state. Tutti i fotoni sono disposti regolarmente ad una distanza fissa $c\Delta t$. L'immagine è presa da [1], pag 88.*

Il numero di fotoconteggi in un certo tempo di integrazione T sarà determinato, in tali condizioni, dall'integrale

$$N = \int \eta \frac{T}{\Delta t} \quad (4.1)$$

che assume esattamente lo stesso valore per tutte le misure. L'istogramma associato ha la forma riportata in figura 4.2, con un'incertezza $\Delta n = 0$ e quindi chiaramente propria di una statistica Sub-Poissoniana.

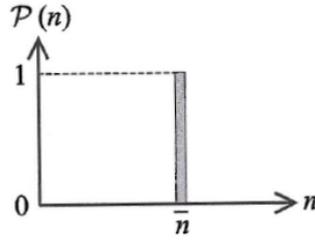


Figura 4.2: L'istogramma di fotoconteggi previsto per un photon number state. Chiaramente tutte le misure danno lo stesso numero, pari a \bar{n} , e pertanto la varianza è nulla. L'immagine è tratta da [1], pag 88.

Sperimentalmente è molto difficile ottenere un photon number state, ma è comunque possibile produrre forme di radiazione in cui gli intervalli temporali sono più regolari che nel caso Poissoniano, pur non essendo esattamente uguali. Nel paragrafo successivo verranno illustrate alcune modalità di produzione di tali tipologie di luce, impiegate a livello sperimentale, ma prima di presentarle è necessario fornire alcuni risultati di natura teorica.

Prendiamo in esame il valore della fotocorrente $i(t)$, ricordando che essa corrisponde al flusso di elettroni emesso dal fotodiodo in un circuito esterno del tipo in figura 3.3: la sua variabilità è dovuta essenzialmente a due effetti, uno di natura puramente classica, il secondo legato alla variabilità intrinseca nel numero di fotoconteggi. Nel loro insieme, queste fluttuazioni vengono indicate con il termine rumore, o più comunemente *noise* in inglese. Tenendo conto di questo fatto, la fotocorrente $i(t)$ sarà in generale scrivibile come la somma di due contributi, il valor medio $\langle i \rangle$, indipendente dal tempo, e un termine variabile $\Delta i(t)$, cioè

$$i(t) = \langle i \rangle + \Delta i(t) \quad (4.2)$$

Chiaramente il secondo termine dovrà avere media $\langle \Delta i \rangle = 0$, mentre $(\Delta i)^2$, la varianza della fotocorrente, dovrà essere maggiore di 0. Per comodità, si è soliti introdurre il cosiddetto *noise power*, definito come

$$P_{noise}(t) = (\Delta i(t))^2 R_L \quad (4.3)$$

cioè l'entità delle oscillazioni in energia dissipata per effetto Joule. Esso viene solitamente espresso in unità di dBm, ricavabile secondo la formula di conversione

$$P_{noise}(\text{dBm}) = 10 \times \log_{10}(P_{noise}/1\text{mW}) \quad (4.4)$$

Prendiamo ora in esame il caso di una sorgente iniziale monocromatica classica e cerchiamo di ricavare la varianza della fotocorrente senza tener conto delle inevitabili fluttuazioni termiche, limitandoci quindi a considerare le sole conseguenze della variabilità del numero di fotoni. In appendice si dimostra che

$$(\Delta i)^2 = 2e\Delta f \langle i \rangle \quad (4.5)$$

cui corrisponde il valore di noise power

$$P_{noise}(f) = 2eR_L\Delta f \langle i \rangle \quad (4.6)$$

dove Δf è l'ampiezza della banda di frequenze considerata. Tale valore non dipende in alcun modo dalle condizioni al contorno (geometria del circuito, temperatura...), ma esclusivamente dai valori delle componenti circuitali e dal numero medio di conteggi. Esso viene quindi preso come una sorta di riferimento, indicato con il termine *shot noise*. In figura 4.3 è riportato il tipico andamento del noise power totale in funzione della frequenza f : come si può vedere, il contributo classico può essere trascurato lavorando per valori sufficientemente alti di frequenza, purché inferiori a $1/\tau$ dove τ è il tempo di risposta del fotodiodo, valore oltre il quale non si misura alcuna fotocorrente.

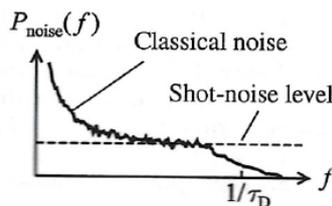


Figura 4.3: Andamento del rumore classico messo a confronto con il livello di shot noise. L'immagine è presa da [1], pag 95.

In alternativa, si può diminuire fortemente il rumore classico anche abbassando la temperatura: in appendice si mostra infatti che il *thermal noise* associato ad un generico circuito ohmico con resistenza R , derivante dalle fluttuazioni della densità elettronica all'interno del conduttore per agitazione termica, è dato dalla formula di Johnson-Nyquist

$$(\Delta i)_{therm}^2 = 4k_bT\Delta f/R \quad (4.7)$$

risultando quindi direttamente proporzionale alla temperatura T . Tale legge consente inoltre di dimostrare che, dato un determinato circuito ohmico, il thermal noise risulterà inferiore allo shot noise purché la caduta di potenziale sul resistore sia più grande di $2k_bT/e$. In tal caso si ha infatti $(\Delta i)_{shot}^2 = 2e\Delta fV/R > 4k_bT\Delta f = (\Delta i)_{thermal}^2$. Questo risultato verrà sfruttato nel capitolo successivo.

4.2 Radiazioni Sub-Poissoniane ricavate dall'utilizzo di sorgenti elettriche

Le premesse del capitolo precedente consentono di illustrare alcune modalità sperimentali di generazione di radiazioni Sub-Poissoniane. La prima, proposta già negli anni '80, prevede lo sfruttamento di un tubo di Franck-Hertz a vapori di mercurio, secondo lo schema riportato in figura 4.4.

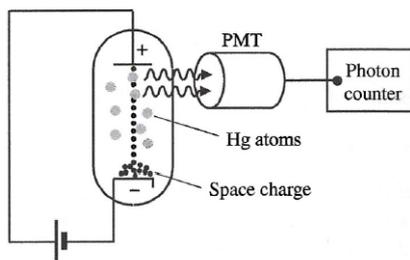


Figura 4.4: *Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale volto ad osservare una statistica Sub-Poissoniana sfruttando un tubo di Franck-Hertz. L'immagine è presa da [1], pag 100.*

Tale dispositivo è costituito da un tubo di vetro, riempito di gas di Hg e al cui interno sono montate tre piastre metalliche, il catodo N, l'anodo P e una griglia posta in posizione intermedia G (solitamente ravvicinata a P). Mentre i potenziali dei primi due sono fissati, il potenziale di G è variabile, mantenendo però sempre valida la catena di disuguaglianze $V_N < V_P < V_G$. Sperimentalmente, si osservano dei minimi di corrente al variare di $\Delta V = V_G - V_N$, in corrispondenza di multipli interi di un preciso valore di ddp indicato con V_0 , pari a 4.887 eV. Questo fatto si spiega con un aumento degli urti di tipo anelastico tra gli elettroni emessi termoionicamente dal catodo e gli atomi del gas, fenomeno che si realizza solo se l'energia cinetica degli e^- è tale da colmare il salto tra lo stato stazionario e uno degli stati eccitati. Chiaramente, poco dopo l'urto l'atomo eccitato tenderà a tornare allo stato fondamentale, emettendo un fotone di energia opportuna $h\nu$. L'andamento

energetico di tali pacchetti è descritto in figura 4.5, dove si evidenzia che l'emissione è possibile solo quando l'energia cinetica, fornita dall'azione del campo elettrico, è maggiore del lavoro di estrazione dal catodo, $e\theta$, e per specifici valori della ddp, rappresentati come crocette.

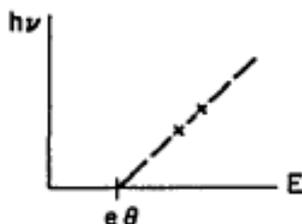


Figura 4.5: *Andamento dell'energia fotonica in funzione del campo elettrico esercitato ai capi del tubo di Franck-Hertz. L'emissione effettiva avviene solo per valori di ddp multipli interi di V_0 , rappresentati con delle crocette. L'immagine è tratta da [7].*

Il numero di fotoni emessi, e quindi l'intensità del loro flusso, dipende invece esclusivamente dal numero di elettroni, ovvero dall'intensità della corrente che attraversa il tubo, secondo una relazione di proporzionalità diretta. Se prendiamo ora in considerazione la loro statistica, essa dovrà ricalcare quella degli elettroni emessi dal catodo, a meno di un certo fattore corrispondente all'inefficienza del processo di eccitazione elettrone-atomo. A prima vista sarebbe spontaneo assumere che un processo randomico come l'effetto termoionico determini una statistica di tipo Poissoniano: in realtà è sperimentalmente noto che, lavorando con valori di ΔV prossimi a V_0 , si formi spontaneamente una nuvola di carica negativa attorno alla superficie del catodo. Questa agisce modificando localmente il campo elettrico, sopprimendo l'emissione degli elettroni a più bassa energia e limitando la corrente elettrica. La statistica degli elettroni eccitati risultante sarà di tipo più ordinato rispetto a quella Poissoniana, come efficacemente illustrato in figura 4.6.

Anche la distribuzione di fotoconteggi osservata, quindi, risulterà in linea di principio Sub-Poissoniana, pur differendo inevitabilmente da quella originale a causa di vari fattori di distorsione aggiuntivi, come l'efficienza quantica del PMT o le imperfezioni del circuito ottico. I risultati più precisi ottenuti con un test di questo tipo hanno permesso di osservare una statistica finale con varianza inferiore al valor medio dello 0.16%, pur-troppo ben lontani dal fornire un verdetto definitivo.

Un'alternativa notevolmente più efficiente è rappresentata dall'utilizzo di emettitori allo

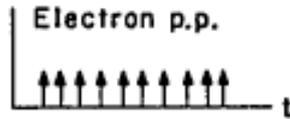


Figura 4.6: *Rappresentazione qualitativa degli elettroni in uscita dal catodo per valori di ddp prossimi a V_0 . Si noti la forte regolarità della distribuzione, maggiore che nel caso Poissoniano. L'immagine è presa da [7].*

stato solido, ad esempio LED, caratterizzati da un'efficienza estremamente più alta rispetto al dispositivo di Franck-Hertz. L'apparato da realizzare a tale scopo è riportato in figura 4.7: esso presenta un circuito di polarizzazione della giunzione pn, detto di guida e costituito banalmente da un generatore e da un resistore R , opportunamente posizionato nelle vicinanze di un fotodiodo, a sua volta connesso al circuito già incontrato in figura 3.3. Il circuito di guida è di tipo ohmico, quindi possiamo utilizzare la formula (4.7) per descrivere la varianza della corrente al suo interno.

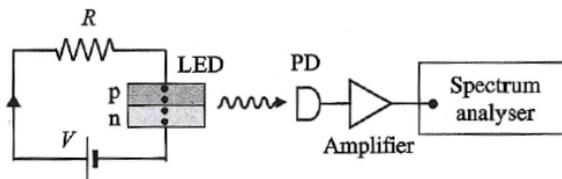


Figura 4.7: *Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale volto a verificare l'esistenza delle statistiche Sub-Poissoniane basato sull'impiego di un LED. L'immagine è presa da [1], pag 101.*

Se quindi impostiamo $V > 2k_bT/e, \approx 50$ mV in condizioni standard, per quanto dimostrato nel paragrafo precedente la statistica della corrente, cioè degli elettroni in circolo, dovrà risultare “più stretta” di una con $(\Delta i)^2 = (\Delta i)_{shot}^2$, che abbiamo visto essere associata ad una radiazione coerente monocromatica, e non potrà che rientrare quindi nella famiglia delle distribuzioni Sub-Poissoniane. Di questo tipo dovrà essere anche la statistica dei fotoni emessi dal LED, riproduzione fedele di quella degli elettroni sempre a meno di un fattore di inefficienza, questa volta però ragionevolmente piccolo. In figura 4.8 sono riportati i risultati ottenuti in uno studio di questo tipo, descritti approfonditamente in [8]: è evidente che, per valori di frequenza intorno ad 1 MHz, il rumore della fotocorrente prodotta dal fotodiodo vale circa 1.1 dB in meno del corrispondente valore di shot-noise, con una discrepanza di circa il 21%.

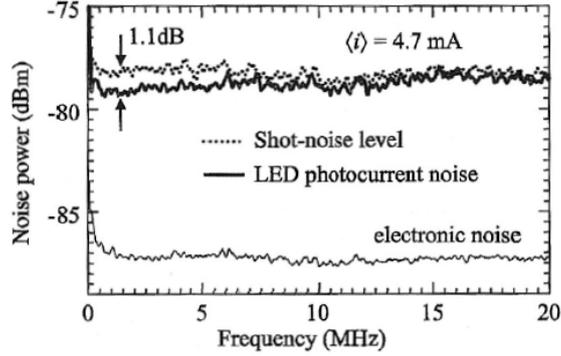


Figura 4.8: Risultati sperimentali ottenuti nello studio [8]. Qui viene riportato il confronto tra il rumore della fotocorrente nel circuito di scarico del fotodiodo e il livello di shot noise nel circuito di guida. Si può notare che, per valori sufficientemente bassi di frequenza, il primo è inferiore al secondo.

Per rendere il più quantitativa possibile l'analisi dei dati forniti da questi test è estremamente utile introdurre il *fattore di Fano*, indicato con F_{Fano} , definito come il rapporto tra il rumore misurato e il livello di shot noise. Per un circuito complesso, come quello dell'esperienza descritta, il fattore di Fano totale può essere calcolato come

$$F_{Fano} = \eta_{tot} F_{dr} + (1 - \eta_{tot}) \quad (4.8)$$

dove F_{dr} corrisponde al fattore di Fano del circuito di guida, η_{tot} rappresenta il fattore di inefficienza complessivo. Si noti che per $F_{dr} = 1$ si ha $F_{Fano} = 1$ indipendentemente dal valore di η_{tot} , mentre con $F_{dr} \rightarrow 0$ si ha $F_{Fano} \rightarrow 1 - \eta_{tot}$. L'equazione (4.8) consente di ottenere una stima di η_{tot} , essendo gli altri termini ricavabili sperimentalmente: siccome tale parametro è calcolabile anche a partire dai fattori di efficienza dei singoli strumenti, dichiarati nelle specifiche, l'eventuale compatibilità delle due stime costituisce un buon criterio di validazione dei risultati ottenuti. Lo studio [8] ha fornito un fattore di Fano pari a 0.79, dimostrando così con un ottimo grado di sicurezza l'esistenza di una statistica di tipo Sub-Poissoniano.

Le sorgenti descritte, pur essendo storicamente molto rilevanti, risultano ormai obsolete: è possibile ricostruire statistiche Sub-Poissoniane con un'efficienza decisamente maggiore impiegando quelle comunemente indicate come *sorgenti a singolo fotone*, di cui si riporta uno schema generico in figura 4.9. L'idea di base è quella di isolare una singola specie emittente (la più semplice a cui possiamo pensare è un atomo), per poi bombardarla con un laser di intensità opportuna così da portarla ad uno stato eccitato.

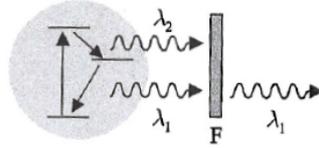


Figura 4.9: *Illustrazione schematica di una generica sorgente a singolo fotone. F rappresenta il filtro opportunamente scelto per trasmettere una sola lunghezza d'onda. La figura è tratta da [1], pag 120.*

In generale, lo spontaneo ritorno al livello a riposo determinerà la formazione di una cascata di fotoni, ciascuno di lunghezza d'onda corrispondente al suo rispettivo salto energetico. È quindi possibile, impiegando un filtro opportuno, selezionare una sola di tali lunghezze d'onda, isolando così un unico fotone. Il tempo che intercorre tra il *trigger* fornito dal laser e l'emissione del fotone sarà una quantità intrinsecamente variabile, essendo il processo di rilassamento probabilistico, con un valore medio detto *tempo di radiazione*, solitamente indicato come τ_R . Una volta conclusa l'emissione, la sorgente può essere riportata allo stato eccitato, con una frequenza che dipende chiaramente da quella degli impulsi di trigger, $f_{trigger}$. Se impostiamo $1/f_{trigger} \gg \tau_R$ possiamo assumere, in ottima approssimazione, che la sorgente emetta esattamente un fotone di specifica lunghezza d'onda ogni volta che si applichi un impulso di trigger. Una rappresentazione efficace è riportata in figura 4.10, dove viene evidenziata la grande regolarità del flusso fotonico (gli intervalli temporali differiscono leggermente solo nei tempi tra eccitazione(linee) ed emissione(frecce)), chiaramente in grado di determinare una statistica di tipo Sub-Poissoniano.

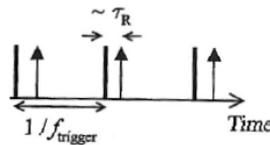


Figura 4.10: *Illustrazione schematica della distribuzione dei fotoni provenienti da una sorgente a singolo fotone. Le linee corrispondono alle eccitazioni, le frecce alle emissioni di fotoni. La figura è tratta da [1], pag 120.*

Il processo descritto avviene per qualunque tipo di sorgente solida, ma a causa del solitamente alto numero di atomi coinvolti, ciascuno dei quali caratterizzato da processi

di eccitazione ed emissione statisticamente indipendenti, la distribuzione finale risulterà estremamente variabile, di tipo Poissoniano o Super-Poissoniano. Un esempio celebre è l'esperimento riportato in [9], del 1977, dove venne utilizzato come sorgente un campione estremamente diluito di sodio (contenente uno/due atomi), in modo da sfruttare la transizione $3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ di energia nota, corrispondente ad un fotone di $\lambda = 589.0\text{nm}$. Esistono modalità alternative all'isolamento di atomi per realizzare sorgenti a singolo fotone. Le principali sono:

- molecole ad alta fotoluminescenza: in questo caso il principio di base è estremamente semplice, si triggera la transizione della molecola dallo stato fondamentale ad uno dei livelli vibrazionali del primo stato di singoletto eccitato, sfruttando poi l'azione di un filtro opportuno per isolare i fotoni corrispondenti alla transizione dal livello eccitato ad energia inferiore (il processo è schematizzato in figura 4.11.)



Figura 4.11: *Illustrazione schematica della transizione energetica sfruttata per ottenere una sorgente a singolo fotone a partire da una molecola fotoluminescente. L'immagine è tratta da [10].*

Particolarmente efficace si è rivelato l'utilizzo di molecole fluorescenti posizionate all'interno di un cristallo organico detto *p-terfenile*, caratterizzato da forte stabilità;

- centri azoto-vacanza nel diamante, solitamente indicati come *NV centers*: questi sono una particolare tipologia di difetto strutturale del cristallo, costituita da un atomo di azoto, che sostituisce un atomo di carbonio, e da una vacanza del reticolo, posta nella posizione più vicina possibile. Il primo atomo risulta caratterizzato da una coppia elettronica libera, mentre la vacanza da un tripletto di elettroni disposti secondo una geometria trigonale. Possiamo immaginare che due di questi formino un legame quasi covalente mentre il terzo rimanga isolato, con però un continuo

scambio di ruolo in modo da preservare la simmetria del sistema. Tali centri godono di peculiari proprietà di fotoluminescenza ben note, in particolare emettono fotoni tra i 600 e gli 800 nm quando illuminati con radiazione verde (532 nm), fatto che li rende dei candidati ideali per realizzare una sorgente a singolo fotone. La procedura per conseguire tale obiettivo è affrontata approfonditamente in [11];

- quantum dots: questi consistono in particolari nanostrutture di materiale semiconduttore, in grado di comportarsi come buche di potenziale tridimensionali e venendo quindi a caratterizzarsi per la discretizzazione dei livelli energetici, di distanza calcolabile. Ponendo un quantum dot isolato all'interno della regione attiva di un LED, esso agirà confinando un certo numero di portatori, il cui valore dipenderà dall'intensità degli impulsi di trigger. Viste le ridotte dimensioni spaziali della buca, è intuitivo concludere che al suo interno debbano essere estremamente forti le interazioni di tipo Coulombiano, a causa delle quali il tempo di ricombinazione in questa regione può variare rispetto a quello per le coppie elettrone-lacuna libere: in particolare, è possibile dimostrare che se il primo è più lungo del secondo allora ogni impulso di trigger è in grado di determinare al più una singola fotoemissione corrispondente alla transizione fondamentale, fatto che ci consente di sfruttare il quantum dot come un'ottima sorgente a singolo fotone. Per i dettagli si rimanda a [12].

5

Conclusioni

In questo elaborato di tesi si è cercato di affrontare in modo esaustivo l'affascinante studio delle statistiche di fotoconteggio: partendo da considerazioni di natura puramente teorica, che ci hanno consentito di ricavare le espressioni esplicite delle distribuzioni nel caso coerente e nel caso termico, nonché di verificare la perfetta compatibilità tra le conclusioni del modello a fotoni e del modello semiclassico, siamo poi passati ad illustrare una serie di esperienze sperimentali volte a confermare tali risultati, ricavando misure in ottimo accordo con le previsioni. Si è scelto infine di dare un breve accenno alle statistiche di tipo Sub-Poissoniano, unica divergenza in grado di fornire una prova definitiva della correttezza dell'ipotesi di quantizzazione della luce, menzionando alcuni risultati matematici e illustrando al contempo le modalità di osservazione storicamente più rilevanti.

Appendice

- Per poter dimostrare che il limite del primo termine, ottenuto riarrangiando la distribuzione binomiale, tende a 1, conviene dimostrare che il limite del suo logaritmo vale 0, così da poter sfruttare l'approssimazione di Stirling, ovvero

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln N! = N \ln N - N \quad (5.1)$$

Si ottiene infatti

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{N!}{(N-n)!N^n}\right) &= \ln N! - \ln(N-n)! - \ln N^n = \\ &= N \ln N - N - (N-n) \ln(N-n) + (N-n) - n \ln N = \\ &= N \ln N - N - (N-n) \ln(N-n) + N - n \ln N = \\ &= N \ln N - (N-n) \ln(N-n) - n \ln N = \\ &= N \ln\left(\frac{N}{N-n}\right) + n \ln\left(\frac{N-n}{N}\right) = \\ &= (N-n) \ln\left(\frac{N}{N-n}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

dimostrando quanto richiesto.

- Per poter dimostrare l'espressione della varianza della distribuzione Poissoniana occorre partire dalla definizione, data da

$$\sigma_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n - \bar{n})^2 P(n) \quad (5.3)$$

sviluppando il quadrato otteniamo

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 2n\bar{n} + \bar{n}^2)P(n) = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(n) - 2\bar{n} \sum_{n=0}^{+\infty} nP(n) + \bar{n}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(n) - 2\bar{n}\bar{n} + \bar{n}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(n) - \bar{n}^2 =
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Consideriamo il termine all'interno della sommatoria. Esso può essere riscritto come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n + n)P(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(n) + \bar{n} \tag{5.5}$$

sostituendo a $P(n)$ la sua espressione possiamo semplificare il primo termine nel seguente modo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(n) &= e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \frac{\bar{n}^n}{n!} = \\
&= e^{-\bar{n}} (0 + 0 + 2\frac{\bar{n}^2}{2!} + \dots) = \bar{n}^2 e^{-\bar{n}} (1 + \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{2!} + \dots) = \\
&= \bar{n}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} = \bar{n}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) = \\
&= \bar{n}^2
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Riprendendo l'espressione iniziale ricaviamo infine

$$\bar{n}^2 + \bar{n} - \bar{n}^2 = \bar{n} \tag{5.7}$$

- Per poter giustificare i due punti chiave della trattazione di Planck impiegati per ricavare la distribuzione di Bose-Einstein occorre ripercorrere una serie di risultati di fondamentale importanza, la cui formulazione richiede l'utilizzo degli strumenti propri della termodinamica statistica. Il primo punto da evidenziare è che la radiazione di corpo nero risulta, in maniera del tutto generale, esprimibile come una sovrapposizione di onde monocromatiche, quindi scrivibili nella forma

$$\psi_t = \psi_0 e^{-i\omega t} \tag{5.8}$$

Tale espressione sinusoidale risulta matematicamente soluzione dell'equazione 1-dimensionale dell'oscillatore armonico, data da

$$\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial t^2} + \omega^2 \psi_t = 0 \tag{5.9}$$

Siccome ψ_t è una funzione del vettore posizione, si potrebbe pensare, ad un primo approccio, che ad ogni punto dello spazio corrisponda un oscillatore di questo tipo. Questo non è corretto, in quanto il termine ψ_0 deve soddisfare l'equazione di Helmholtz, cioè la versione a $t = 0$ dell'equazione di D'Alembert, data da

$$\nabla^2 \psi_0 + k^2 \psi_0 = 0 \quad (5.10)$$

Tale equazione differenziale e spaziale mette in relazione i valori dei campi d'onda, quindi delle oscillazioni, in punti diversi dello spazio, riducendo il numero di oscillatori armonici indipendenti a quello delle soluzioni monocromatiche indipendenti dell'equazione d'onda. Inoltre, il fatto che tali onde monocromatiche si sovrappongono per dare origine alla radiazione totale non ne altera in alcun modo la singola dinamica, motivo per il quale i diversi oscillatori possono essere considerati non interagenti. Per questi motivi lo studio dello spettro di corpo nero si può ricondurre, a tutti gli effetti, a quello di un gas ideale di oscillatori armonici. Queste osservazioni consentono innanzitutto di ricavare l'espressione della densità volumetrica di oscillatori armonici nell'intervallo $\omega, \omega + d\omega$, che, tenendo conto delle due possibili direzioni di polarizzazione della luce, viene fornita dalla formula

$$n_\omega \Delta\omega = \frac{\omega^2 \Delta\omega}{\pi^2 c^3} \quad (5.11)$$

di cui si tralascia la dimostrazione completa, in quanto irrilevante per gli scopi di questo elaborato. Possiamo a questo punto scrivere l'equazione ponte per ricavare il contributo all'energia libera di Helmholtz degli oscillatori nello stesso intervallo di frequenze, ovvero

$$F_\omega \Delta\omega = -k_b T V n_\omega \Delta\omega \ln Z_\omega = -\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V k_b T \ln Z_\omega \Delta\omega \quad (5.12)$$

dove Z_ω è la funzione di partizione associata all'oscillatore armonico di frequenza ω . Il contributo all'energia interna della radiazione sarà quindi ricavabile come

$$U_\omega \Delta\omega = -T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \right) \left(\frac{F_\omega \Delta\omega}{T} \right) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V k_b T^2 \left(\frac{\partial \ln Z_\omega}{\partial T} \right) \Delta\omega \quad (5.13)$$

Dividendo per il volume e per l'ampiezza dell'intervallo $\Delta\omega$ troviamo l'equazione della densità di energia,

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_b T^2 \left(\frac{\partial \ln Z_\omega}{\partial T} \right) \quad (5.14)$$

Prima di Planck l'espressione utilizzata per la funzione di partizione era data da $Z_\omega = \frac{2\pi k_b T}{\omega}$, cioè l'integrale nello spazio delle fasi dell'espressione classica dell'energia $E(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$, scelta che aveva però come conseguenza la ben nota

catastrofe dell'ultravioletto. L'intuizione del fisico fu quella di imporre la quantizzazione dei livelli energetici dell'oscillatore, secondo l'espressione (1.12), ricavando per la funzione di partizione la nuova espressione

$$Z_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\hbar\omega n/k_b T} = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega/k_b T}} \quad (5.15)$$

che, sostituita nella (5.14), fornisce l'espressione cercata.

- È noto che la serie geometrica soddisfa la relazione

$$\sum_{i=0}^{k-1} r^i = \frac{1 - r^k}{1 - r} \quad (5.16)$$

Per calcolare la sommatoria in oggetto, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, è necessario studiare il limite a $+\infty$ del secondo membro: questo chiaramente divergerà per $r > 1$ e andrà a $1/(1 - r)$ per $r < 1$. Siccome $x = e^{-\hbar\omega/k_b T} < 1$ si ottiene l'espressione cercata.

- Per calcolare la varianza della distribuzione di Bose-Einstein occorre innanzitutto ripercorrere i primi passaggi svolti per determinare la varianza della Poissoniana. Partiamo quindi dal risultato

$$\sigma_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(n) + \bar{n} - \bar{n}^2 \quad (5.17)$$

Procediamo a sviluppare la sommatoria sostituendo l'espressione di $P(n)$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \frac{1}{\bar{n}+1} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}\right)^n = \\ & = 0 + 0 + \frac{2}{(\bar{n}+1)^3} \bar{n}^2 + \frac{6}{(\bar{n}+1)^4} \bar{n}^3 + \frac{12}{(\bar{n}+1)^5} \bar{n}^3 + \dots = \\ & = \frac{2}{(\bar{n}+1)^3} \bar{n}^2 \left(1 + 3\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} + 6\frac{\bar{n}}{(\bar{n}+1)^2} + \dots\right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

chiamando x il rapporto $\bar{n}/(\bar{n}+1)$ possiamo riscrivere il termine tra parentesi come

$$S = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots \quad (5.19)$$

Consideriamo ora i seguenti termini

$$\begin{aligned} Sx &= x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \dots \\ S - Sx &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \\ x(S - Sx) &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots \end{aligned} \quad (5.20)$$

Se ora scriviamo

$$(S-Sx)-x(S-Sx) = S(1-x)-xS(1-x) = S(1-x)(1-x) = 1+x+x^2+x^3 \quad (5.21)$$

ritroviamo la progressione geometrica, di serie all'infinito nota. Questo ci permette di concludere

$$\begin{aligned} S(1-x)^2 &= \frac{1}{1-x} \\ S &= \frac{1}{(1-x)^3} = (\bar{n}+1)^3 \end{aligned} \quad (5.22)$$

che, sostituito nella (5.18), fornisce

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{2}{(\bar{n}+1)^3} \bar{n}^2 (\bar{n}+1)^3 + \bar{n} - \bar{n}^2 = 2\bar{n}^2 + \bar{n} - \bar{n}^2 = \\ &= \bar{n} + \bar{n}^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

cioè il risultato cercato.

- Si consideri la radiazione emessa da un corpo nero ideale filtrata attraverso un filtro interferenziale standard, definito da una larghezza di banda pari a 0.1 nm, centrata in corrispondenza del valore 500 nm. Per stimare il numero di modi di vibrazione incidenti sul detector possiamo utilizzare l'espressione della densità di modi vibrazionali fornita dalla trattazione di Planck. Riprendiamo quindi l'equazione (5.11) e, ricordando che $\omega = 2\pi c/\lambda$, riscriviamola in funzione della lunghezza d'onda, ottenendo

$$n_\lambda d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad (5.24)$$

Nel nostro caso, il numero di modi sarà quindi dato da

$$N_m = \frac{8\pi}{(5 \times 10^{-7})^4} 10^{-10} = 4 \times 10^{16} \quad (5.25)$$

che, sulla base dell'espressione della varianza (1.20), determinerà una statistica di tipo Poissoniano

- Nel caso di una sorgente di Gauss-Lorentz, utilizzando la (1.34), si può calcolare un'espressione esplicita per la varianza del numero di conteggi, data da

$$\sigma_n^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 (\tau_c^2 / 2T^2) [e^{-2T/\tau_c} - 1 + (2T/\tau_c)] \quad (5.26)$$

(per la dimostrazione si rimanda a [13], considerato che uscirebbe dagli scopi del presente elaborato). In entrambe le condizioni limite tale espressione risulta facilmente semplificabile. Per $T \ll \tau_c$ si ottiene infatti, sviluppando l'esponenziale in serie di Taylor al secondo ordine:

$$\sigma_n^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 (\tau_c^2 / 2T^2) [1 - (2T/\tau_c) + (2T^2/\tau_c^2) - 1 + (2T/\tau_c)] = \bar{n} + \bar{n}^2 \quad (5.27)$$

ovvero la distribuzione di BE. Prendendo invece $T \gg \tau_c$ si ricava

$$\sigma_n^2 = \bar{n} + \bar{n}^2(\tau_c^2/2T^2)[2T/\tau_c] = \bar{n} + \bar{n}^2(\tau_c/T) \quad (5.28)$$

cioè la distribuzione di Poisson trascurando il secondo termine.

- Il contributo sulla statistica finale determinato dall'impiego di rilevatori con efficienza quantica η inferiore ad 1 può essere studiato nel dettaglio sfruttando i risultati della teoria quantistica della fotorilevazione, scopo della quale è mettere in relazione le statistiche di fotoconteggio con quelle intrinseche della radiazione. Consideriamo un apparato sperimentale analogo a quello in figura 1, in cui il tempo di azione del contatore viene impostato pari a T . Si può dimostrare (si rimanda a [13]) l'esistenza di un preciso legame tra la varianza del numero di fotoconteggi, σ_N^2 , e la corrispondente varianza del numero di fotoni incidenti sul rilevatore nello stesso lasso di tempo, σ_n^2 , descritta da

$$\sigma_N^2 = \eta^2(\sigma_n^2) + \eta(1 - \eta)\bar{n} \quad (5.29)$$

Da tale espressione possiamo trarre alcune interessanti conclusioni:

- se $\eta = 1$, cioè il rilevatore è perfetto, le due varianze coincidono, e pertanto la statistica dei fotoconteggi riproduce esattamente quella intrinseca dei fotoni;
- se la luce incidente si caratterizza per una statistica di tipo Poissoniano, quindi con $\sigma_n^2 = \bar{n}$, allora dalla (5.29) otteniamo

$$\sigma_N^2 = \eta^2\bar{n} + \eta\bar{n} - \eta^2\bar{n} = \eta\bar{n} = \bar{N} \quad (5.30)$$

Ciò significa che anche la statistica dei fotoconteggi risulterà di tipo Poissoniano, indipendentemente dal valore di η ;

- se si utilizza un rilevatore poco efficiente, quindi caratterizzato da $\eta \ll 1$, si ottiene $\sigma_N^2 \approx \eta\bar{n} = \bar{N}$. Ciò significa che la statistica ottenuta sperimentalmente sarà Poissoniana indipendentemente dalla tipologia di statistica propria della radiazione.

Queste osservazioni consentono di spiegare il ruolo cruciale dell'efficienza quantica negli esperimenti di fotoconteggio: solo se η è sufficientemente alta risulta possibile osservare statistiche diverse da quella Poissoniana, motivo per il quale è stato necessario attendere lo sviluppo di rilevatori di straordinaria qualità per dimostrare l'esistenza della statistica di tipo Sub-Poissoniano.

- Per poter risolvere l'equazione (2.8) occorre procedere in maniera ricorsiva. A tale scopo, risolviamo innanzitutto l'equazione imponendo $n = 0$. In tal caso, il termine $P_{n-1}(t)$ non potrà che essere nullo, in quanto non negativo per definizione di probabilità e associato all'osservazione di un numero negativo di eventi. Otteniamo quindi l'equazione differenziale

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -CP_0(t) \quad (5.31)$$

Ricordando la condizione al contorno $P_0(0) = 1$, essa avrà come soluzione

$$P_0(t) = e^{-Ct} \quad (5.32)$$

Per $n \geq 1$ consideriamo invece la seguente catene di uguaglianze

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{Ct}P_n(t)) &= Ce^{Ct}P_n(t) + e^{Ct}\frac{dP_n(t)}{dt} = \\ &= Ce^{Ct}P_n(t) + e^{Ct}(CP_{n-1}(t) - CP_n(t)) = Ce^{Ct}P_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (5.33)$$

dove il primo passaggio è giustificato dalla regola della catena, il secondo dall'utilizzo della (2.8) stessa. Integrando ambo i membri otteniamo

$$P_n(t) = e^{-Ct} \int_0^t Ce^{Ct'} P_{n-1}(t') dt' \quad (5.34)$$

Possiamo a questo punto sfruttare l'espressione di $P_0(t)$ e scrivere ricorsivamente

$$\begin{aligned} P_1(t) &= e^{-Ct} \int_0^t Ce^{Ct'} P_0(t') dt' = (Ct)e^{-Ct} \\ P_2(t) &= e^{-Ct} \int_0^t Ce^{Ct'} P_1(t') dt' = \frac{(Ct)^2}{2!}e^{-Ct} \\ P_3(t) &= e^{-Ct} \int_0^t Ce^{Ct'} P_2(t') dt' = \frac{(Ct)^3}{3!}e^{-Ct} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ P_n(t) &= e^{-Ct} \int_0^t Ce^{Ct'} P_{n-1}(t') dt' = \frac{(Ct)^n}{n!}e^{-Ct} \end{aligned} \quad (5.35)$$

che è il risultato cercato.

- Per calcolare il k -esimo momento fattoriale per una distribuzione di probabilità Poissoniana, di media μ , si può partire semplicemente dalla definizione, procedendo nel seguente modo

$$\begin{aligned} \langle n(n-1)\dots(n-k+1) \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \mu^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \mu^k \end{aligned} \quad (5.36)$$

cioè il risultato cercato.

- Una derivazione intuitiva dell'espressione dello shot noise può essere ottenuta ragionando nel seguente modo: sappiamo che esso corrisponde alla varianza della fotocorrente nel caso di una sorgente monocromatica coerente, pertanto possiamo scrivere

$$\Delta i_{shot}^2 = \langle (i(t) - \langle i \rangle)^2 \rangle \quad (5.37)$$

In un certo intervallo di tempo Δt il valor medio della fotocorrente sarà semplicemente dato da $\langle i \rangle = \frac{e\bar{n}}{\Delta t}$, mentre $i(t)$ varrà analogamente $i(t) = \frac{en(t)}{\Delta t}$, dove $n(t)$ è il numero di fotoconteggi all'istante t (nello specifico si prende come Δt il più piccolo intervallo di tempo oltre il quale il comportamento della corrente corrisponde a quello nel limite per tempi lunghi). Chiaramente tale numero dovrà seguire una distribuzione di tipo poissoniano con media \bar{n} , ma visto che i flussi fotonici in gioco sono molto intensi si ha $\bar{n} \gg 1$ e quindi possiamo approssimare la Poissoniana con una Gaussiana di media e σ^2 entrambe uguali a \bar{n} . Diventa quindi possibile scrivere

$$P(n(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(n(t)-\bar{n})^2/2\bar{n}} \quad (5.38)$$

da cui ricaviamo $\langle (n(t) - \bar{n})^2 \rangle \approx 2\bar{n}$. Sostituendo nella (5.37) troviamo

$$\begin{aligned} \Delta i_{shot}^2 &= \left(\frac{e}{\Delta t}\right)^2 \langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \left(\frac{e}{\Delta t}\right)^2 2\bar{n} = \\ &= 2 \frac{e}{\Delta t} \langle i \rangle \end{aligned} \quad (5.39)$$

che corrisponde al risultato cercato chiamando $\Delta f = 1/\Delta t$.

- Per poter dimostrare la formula del contributo del rumore termico alla varianza della fotocorrente occorre rifarsi ad un risultato storico, ottenuto da H.Nyquist in suo articolo del 1928. Il fisico mostrò che il calcolo dell'ampiezza del noise in un circuito ohmico di resistenza R generico può essere sempre ricondotto al calcolo della somma dei contributi energetici associati ai modi normali di oscillazione della corrente lungo una linea di trasmissione cortocircuitata, connessa a due resistenze di valore R (per i dettagli si rimanda a [14]). Dal principio di equipartizione dell'energia, è noto che a ciascun modo normale è associato un contributo medio pari a $k_b T$. Lavorando in un'opportuna regione del dominio delle frequenze, in cui cioè i diversi modi normali aventi valori corrispondenti di frequenza risultano sufficientemente vicini, possiamo passare ad una trattazione con dominio continuo, che ci consente di scrivere il contributo energetico della banda di frequenze df come

$$dP = k_b T df \quad (5.40)$$

La varianza della differenza di potenziale ai capi del circuito equivalente è data da

$$\begin{aligned}dV^2 &= d(2RI)^2 = \\(2R)^2 dI^2 &= 4R^2 dI^2 = \\4R^2 dP/R &= 4Rk_b T df\end{aligned}\tag{5.41}$$

dove il penultimo passaggio è giustificato dalla legge dell'effetto Joule, applicata al circuito originale, mentre l'ultimo dall'applicazione della (5.40). A questo punto, la varianza della corrente sarà semplicemente calcolabile applicando la legge di Ohm al circuito originale, da cui

$$dV^2 = d(RI)^2 = R^2 dI^2 = 4Rk_b T df\tag{5.42}$$

che fornisce subito il risultato cercato isolando dI^2 .

Bibliografia

- [1] F. Mark, *Quantum Optics: An Introduction*. Oxford University Press, 2006.
- [2] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [3] P. Koczyk, P. Wiewior, and C. Radzewicz, “Photon counting statistics-undergraduate experiment,” *American Journal of Physics - AMER J PHYS*, vol. 64, pp. 240–245, 03 1996.
- [4] R. Yotter and D. Wilson, “A review of photodetectors for sensing light-emitting reporters in biological systems,” *Sensors Journal, IEEE*, vol. 3, pp. 288 – 303, 07 2003.
- [5] PerkinElmer Inc., “Avalanche photodiodes: A user’s guide,” 2003.
- [6] E. Jakeman, C. J. Oliver, and E. R. Pike, “A measurement of optical linewidth by photon-counting statistics,” *Journal of Physics A: General Physics*, vol. 1, pp. 406–408, may 1968.
- [7] M. Teich and B. Saleh, “Observation of sub-poisson franck-hertz light at 2537 nm,” *Journal of The Optical Society of America B-optical Physics - J OPT SOC AM B-OPT PHYSICS*, vol. 2, 02 1985.
- [8] F. Wöfl, G.-M. Schucan, A. M. Fox, and J. F. Ryan, “Improved photon-number squeezing in light-emitting diodes,” *Journal of Modern Optics*, vol. 45, no. 6, pp. 1147–1153, 1998.
- [9] H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel, “Photon antibunching in resonance fluorescence,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 39, pp. 691–695, Sep 1977.
- [10] M. W. Lounis B, “Single photons on demand from a single molecule at room temperature,” *Nature*, vol. 407, pp. 491–493, Sep 2000.
- [11] C. Kurtsiefer, S. Mayer, P. Zarda, and H. Weinfurter, “Stable solid-state source of single photons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 290–293, Jul 2000.

- [12] P. Michler, A. Kiraz, C. Becher, W. V. Schoenfeld, P. M. Petroff, L. Zhang, E. Hu, and A. Imamoglu, “A quantum dot single-photon turnstile device,” *Science*, vol. 290, no. 5500, pp. 2282–2285, 2000.
- [13] R. Loudon, *The quantum Theory of Light*. Oxford University Press, 2000.
- [14] H. Nyquist, “Thermal agitation of electric charge in conductors,” *Phys. Rev.*, vol. 32, pp. 110–113, Jul 1928.
- [15] J. W. Goodman, *Statistical Optics*. John Wiley & Sons Inc., 2000.
- [16] A. Pais, *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford University Press, 1982.
- [17] W. Martienssen and E. Spiller, “Coherence and fluctuations in light beams,” *American Journal of Physics*, vol. 32, no. 12, pp. 919–926, 1964.
- [18] L. Mandel, “Fluctuations of photon beams: The distribution of the photo-electrons,” *Proceedings of the Physical Society*, vol. 74, pp. 233–243, sep 1959.
- [19] R. J. Glauber, “Coherent and incoherent states of the radiation field,” *Phys. Rev.*, vol. 131, pp. 2766–2788, Sep 1963.
- [20] J. A. Earl, “Undergraduate experiment on thermal and shot noise,” *American Journal of Physics*, vol. 34, no. 7, pp. 575–579, 1966.
- [21] D. Perepelitsa, “Johnson noise and shot noise,” 2006.
- [22] M. A. C. and N. Jim, *Experiments in Modern Physics, Second Edition*. Academic Press, 2003.
- [23] MIT Department of Physics, “The franck-hertz experiment and the ramsauer-townsend effect: Elastic and inelastic scattering of electrons by atoms.” <http://web.mit.edu/8.13/www/JLEperiments/JLExp07.pdf>, 2019. Accessed: 2018-07-15.