

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**SUL COMPORTAMENTO DELLE ORBITE
DI ONDE INTERNE IN BILIARDI DI
FORMA PARABOLICA**

Relatore:
Prof. Marco Lenci

Presentata da:
Dimitri Corradini

Anno Accademico 2021/2022

Sommario

Si studia il comportamento di particelle in un tipo particolare di biliardo dinamico, in cui le riflessioni sul bordo avvengono attraverso l'inversione dell'angolo che la traiettoria compie rispetto a una direzione verticale fissata, invece della solita normale alla curva à la Fresnel. L'interesse in questo argomento deriva dall'evidenza sperimentale di un comportamento simile nella propagazione di onde entro fluidi stratificati: questa tipologia di biliardo è quindi spesso detta biliardo di onde interne. Lo studio di questi oggetti, sebbene puramente matematico, può dare luogo a peculiari considerazioni fisiche ed applicative. Notevolmente, la frequente presenza di attrattori in tali modelli suggerisce che fenomeni di concentrazione delle onde interne dovuti a tale regola di riflessione potrebbero avere un ruolo in alcuni sistemi reali, come la circolazione oceanica. Dopo aver passato in rassegna alcuni elementi della teoria di Poincaré degli omeomorfismi del cerchio, e alcuni risultati specifici sui biliardi di onde interne, si studia il caso particolare di un biliardo di forma parabolica, tagliato da un segmento normale al suo asse di simmetria. In quest'ultimo contesto, si dimostrano alcuni risultati originali sul comportamento delle traiettorie.

Indice

Introduzione	1
1 Le onde di gravità interne	5
1.1 L'equazione delle onde	6
1.1.1 Intuizione fisica	6
1.1.2 Da Navier-Stokes alle onde interne	7
1.2 Riflessione delle onde interne	10
1.2.1 Soluzione della riflessione nel caso inviscido	10
1.2.2 Concentrazione delle onde interne	11
1.2.3 Caratteristiche e reti	12
1.3 Esempi di onde interne in natura	13
1.3.1 Onde interne nell'atmosfera	13
1.3.2 Onde interne oceaniche	13
2 Teoria degli omeomorfismi del cerchio	16
2.1 La teoria di Poincaré	16
2.1.1 Qualche definizione	17
2.1.2 Mappe e itinerari	18
2.1.3 Rotazioni irrazionali	22
2.1.4 Il teorema di Poincaré	25
2.2 La teoria di Denjoy	28
3 Alcuni risultati sui biliardi di onde interne	30
3.1 Comportamento delle orbite per alcune geometrie	30
3.1.1 Descrizione del problema	30
3.1.2 <i>Billiard unfolding</i> e mappa di Poincaré	31
3.2 Un teorema sulle orbite	33
4 Il biliardo a forma di parabola	37
4.1 Qualche calcolo iniziale	37
4.1.1 Riscaldamento della parabola generica al caso standard	37
4.1.2 Caso <i>subcritico</i> : $ a \geq 2$	38
4.1.3 Caso <i>supercritico</i> : $ a < 2$	38
4.1.4 Riflessioni dentro la parabola	39
4.1.5 La mappa di primo ritorno	40
4.1.6 Proprietà della mappa	43
4.2 Teoremi sulle orbite	45

4.2.1	Possibili comportamenti delle orbite	45
4.2.2	Mappatura a parabola <i>vera</i> e periodi	46
4.3	Simulazioni al computer	47
	Ringraziamenti	54
	Bibliografia	55

Introduzione

Le onde interne, perturbazioni periodiche che si propagano all'interno di un fluido stratificato, sono pressoché ubiquie nell'oceano e nell'atmosfera. Nonostante esse abbiano origine da fenomeni di natura locale, i più recenti sviluppi della fisica della terra suggeriscono la loro notevolissima rilevanza per la comprensione di molti fenomeni su scala globale[8]. In particolare, il clima oceanico risente notevolmente della presenza di tali tipi di onde, che si ritengono importanti per il mescolamento delle acque necessario al mantenimento delle correnti. Tra le peculiari proprietà di tale onde, studiate negli scorsi decenni, vi è la strana legge di riflessione che esse seguono: come è possibile ricavare dalle equazioni idrodinamiche, esse sono emesse con un angolo fissato rispetto alla verticale, che dipende dalla loro frequenza[20], e all'incontro con una superficie vengono riflesse invertendo verticalmente o orizzontalmente tale angolo[17]. Questo fatto curioso è alla base della formazione, in molte circostanze simulate o osservate in laboratorio, di traiettorie attrattive. Esse sono state per la prima volta previste in un importante articolo di Maas e Lam [11], e nonostante non siano ancora stati osservati direttamente in natura, numerosi studi suggeriscono l'effettiva esistenza di tali attrattori all'interno degli oceani[6]: essi potrebbero inoltre avere un ruolo nella *cascata di energia (energy cascade)* che, a partire dalle grandi scale degli spostamenti dovuti alle maree, porta alle piccole scale in cui avviene il mescolamento irreversibile delle acque oceaniche [2].

Dal punto di vista matematico, le onde interne emergono dallo studio di un'equazione di d'Alembert con condizioni di annullamento al contorno, nel nostro caso bidimensionale corrispondente a una curva che delimita il bordo del contenitore del fluido. Come si discuterà nei prossimi capitoli, le soluzioni di tale equazione descrivono la funzione di corrente, la quale è legata al campo di velocità nel fluido. Lungo i raggi, ossia le traiettorie libere di punti materiali soggetti alla regola di riflessione descritta in precedenza, queste soluzioni presentano una grandezza invariante, detto pressione parziale, che permette di ricostruire il valore della funzione di corrente in ogni punto. In questo modo, lo studio della c.d. *dinamica dei raggi* risulta essere il primo passo per la soluzione dell'equazione iperbolica [10, 11]. In particolare, la conoscenza delle *reti* formate dai raggi che si riflettono sul bordo potrebbe permettere di determinare le condizioni necessarie e sufficienti per l'unicità della soluzione dell'equazione: se infatti la sola condizione di annullamento al contorno non è sufficiente, l'imposizione di una pressione parziale in ogni punto del bordo è eccessiva, poiché renderebbe possibile l'esistenza di due pressioni parziali differenti sulla medesima rete. Tale seconda condizione potrà pertanto essere imposta liberamente soltanto su alcuni intervalli del bordo, detti intervalli fondamentali o *fundamental intervals*, legati alla geometria del problema e, in particolare, alla propagazione dei raggi e all'eventuale esistenza di attrattori [7].

L'esistenza di attrattori di onde interne, e in generale le proprietà di riflessione di que-

ste ultime, sono state studiate dal punto di vista sia sperimentale [5, 13] che teorico [19, 15, 9]. In questo elaborato, ci si concentrerà sullo studio matematico di simili sistemi, che è possibile trattare come dei particolari tipi di biliardi e studiare attraverso la teoria dei sistemi dinamici: è in questo modo possibile ridurre il comportamento dei raggi all'interno di un contenitore all'evoluzione di un sistema unidimensionale. Tale approccio, già utilizzato in [11], e successivamente in numerosi articoli [9, 15], permette di utilizzare una potente teoria che risale a Poincaré e Denjoy [3, 4], descrivendo le traiettorie delle onde attraverso un omeomorfismo del cerchio. In [10] si riesce in tal modo a dimostrare un risultato sul comportamento delle orbite in biliardi di tipo trapezoidale generalizzato, chiarendo e giustificando in questo modo alcune osservazioni compiute già ad esempio in [9].

L'approccio seguito nella presente tesi è del tutto analogo a quello utilizzato in quest'ultimo caso; per via della sua centralità alla presente trattazione, una descrizione in dettaglio di uno dei risultati di [10] è stata riportata nel terzo capitolo. I risultati originali di questa tesi riguardano il comportamento delle orbite di onde interne in un biliardo di forma parabolica, e si vanno ad inserire in uno studio già cominciato in [11], di cui vogliono almeno in parte tentare di chiarire alcuni aspetti, quali l'unicità o lo sdoppiamento degli attrattori e il loro legame con i parametri delle onde, oltre ad estendere lo studio a traiettorie di angolo qualsiasi entro tale biliardo. In particolare si otterrà esplicitamente la mappa di primo ritorno di un sistema dinamico strettamente imparentato con la parabola vera e propria, che chiameremo *parabola incollata*, e si dimostrerà la presenza, fissato l'angolo di una traiettoria, di un massimo di due attrattori, tra loro simmetrici. Tali risultati non sono certamente esaustivi e offrono la possibilità di immediati sviluppi, come si osserverà brevemente nel capitolo ad essi dedicato.

La struttura del presente elaborato è la seguente:

- Nel primo capitolo si espone la trattazione fisica che porta alla descrizione delle onde interne nei fluidi stratificati, partendo dalla descrizione del galleggiamento per poi ricavare le equazioni delle onde interne da Navier-Stokes e ottenere la legge di riflessione sul bordo. Si descrive poi il legame che esse hanno con l'equazione iperbolica e le reti, per concludere con una breve descrizione del ruolo delle onde interne nell'atmosfera e nell'oceano.
- Nel secondo capitolo si introducono gli strumenti matematici necessari alla trattazione successiva. Si dimostrano numerosi risultati sugli omeomorfismi del cerchio, definendo tramite una procedura iterativa il concetto di *numero di rotazione* e dunque dimostrando un fondamentale risultato di Poincaré che associa tale numero all'esistenza di orbite periodiche, o di una corrispondenza tra l'omeomorfismo e una rotazione irrazionale; tale risultato è infine completato da un altro teorema, dovuto a Denjoy.
- Nella terza sezione si discute in dettaglio la prima parte dell'articolo [10], che dimostra, utilizzando i teoremi descritti nel capitolo precedente, alcuni risultati sulle orbite entro alcuni biliardi di forma simile a un trapezio.

- Nel quarto e ultimo capitolo si descrivono i risultati sul biliardo di forma parabolica. Si definisce attraverso una breve costruzione un sistema simile a quello originario, detto *parabola incollata*, semplificando notevolmente l'azione della mappa di primo ritorno, che si è in questo caso in grado di scrivere esplicitamente. Si utilizzano le proprietà di quest'ultima, in tal modo facilmente ricavabili tramite calcolo diretto, per dimostrare alcuni teoremi, analoghi a quelli del terzo capitolo, per il caso della parabola incollata; essi sono infine trasposti al caso della parabola vera e propria.

Capitolo 1

Le onde di gravità interne

Si parla di fluido stratificato per indicare un fluido in cui la densità varia con la profondità a causa della variazione di altre grandezze, quali ad esempio la temperatura o la salinità. Tale stratificazione rende possibile la propagazione entro i fluidi di onde in cui la gravità agisce da forza ristoratrice, causando il moto armonico tipico della propagazione delle onde in maniera simile a quanto avviene nelle superfici di contatto tra due fluidi di tipo diverso (le c.d. *onde di gravità di superficie*): perturbazioni interne al fluido di questo tipo sono dunque chiamate *onde interne di gravità* (in inglese *internal gravity waves* o anche solo *internal waves*). Esse sono state osservate in natura all'interno di numerosi mezzi, e alcune loro caratteristiche suggeriscono che potrebbero svolgere un ruolo importante in vari sistemi fisici. Ad esempio, negli oceani l'apporto delle onde interne potrebbe essere rilevante per alcuni meccanismi legati alle correnti e alla diffusione di energia proveniente dagli strati superficiali[2]. Si espone in questo capitolo la teoria fisica di tali onde, mettendone in risalto gli aspetti geometrici che saranno sviluppati nel seguito. L'approccio seguito ricalca pedissequamente quello esposto in [2]: si discute inizialmente il caso semplice di una piccola porzione di fluido soggetta a uno spostamento nella direzione verticale, per comprendere come la gravità agisca da forza elastica in questo tipo di sistemi; in questo contesto si definisce la frequenza di *buoyancy* (o di Brunt-Väisälä) N . In seguito si opera una trattazione più generale che ricava il comportamento delle onde a partire da un modello più dettagliato della fisica dei fluidi, descritto dall'equazione di Navier-Stokes. Infine si definisce la legge di riflessione delle onde interne e si considera qualche esempio di sistemi presenti in natura ove queste si manifestano, dettagliando come effetti di concentrazione di onde dovuti ad aspetti

geometrici possano avere rilevanza per la comprensione di alcuni fenomeni fisici.

1.1 L'equazione delle onde

Si espone in questa sezione la fisica di base delle onde interne, partendo da una descrizione microfisica intuitiva del fluido per giungere al calcolo delle grandezze che ne caratterizzano la propagazione.

1.1.1 Intuizione fisica

Si consideri un mezzo anisotropo dato da un fluido la cui densità $\rho = \rho(z)$ è funzione della coordinata verticale z . Le semplici leggi dell'equilibrio idrostatico ci ricordano

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(z)g. \quad (1.1)$$

Si prenda un volumetto di fluido posto a profondità z_V , e ne si perturbi la posizione a raggiungere un valore $z_V + \delta z$. Le forze su esso agenti saranno la spinta di Archimede $\underline{\Pi} = \rho(z_V + \delta z)g\hat{z}$ e il peso $\underline{P} = -\rho(z_V)g\hat{z}$ (per u.d.v.), donde la dinamica secondo Newton

$$\rho(z_V)\underline{a} = [\rho(z_V + \delta z) - \rho(z_V)]g\hat{z} \quad (1.2)$$

che sviluppo facilmente al primo ordine in δz come

$$\frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = \frac{g}{\rho(z_V)} \frac{d\rho}{dz}(z_V)\delta z \quad (1.3)$$

la quale è espressione di un oscillatore armonico o iperbolico a seconda del segno di $\frac{d\rho}{dz}(z_V)$: è quindi immediato che per mantenere un sistema stabile esso deve essere negativo. In tal caso posto $\sqrt{-\frac{g}{\rho(z_V)}\frac{d\rho}{dz}(z_V)} =: N(z_V)$ si ha l'equazione elastica

$$\frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = -N(z_V)^2\delta z \quad (1.4)$$

ovviamente risolta da un moto armonico

$$\delta z = A \cos(Nt) + B \sin(Nt) \quad (1.5)$$

la cui frequenza N è detta frequenza di *buoyancy*, o di Brunt-Väisälä. Seppur grandemente semplificato, è questo il meccanismo di base che, generando un moto oscillatorio che si diffonde nel fluido, permette il propagarsi delle onde di gravità. Ci si aspetta dunque che le onde possano propagarsi con frequenza angolare circa pari ad N ; per la verità, se si fa qualche considerazione di carattere geometrico, si potrebbe ragionare come segue[18]. Si consideri una porzione di fluido che si muove lungo una direzione diagonale fissata, che forma un angolo θ rispetto alla verticale. Se essa compie uno spostamento infinitesimo δs in tale direzione, l'equazione del moto è del tipo

$$\frac{d^2(\delta s)}{dt^2} = -N(z_V)^2 \cos(\theta)\delta z = -N(z_V)^2 \cos^2(\theta)\delta s \quad (1.6)$$

da cui una frequenza angolare di

$$\omega = \cos(\theta)N. \quad (1.7)$$

Queste relazioni evidenziano un certo legame tra la direzione dell'oscillazione e la sua pulsazione: come si avrà modo di apprezzare nel seguito, tale fatto ha una notevole importanza nello studio delle traiettorie delle onde. Al di là degli aspetti intuitivi, per chiarire con maggior precisione questo fenomeno è tuttavia necessario partire da un modello più accurato dei fluidi.

1.1.2 Da Navier-Stokes alle onde interne

L'equazione di Navier-Stokes è un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali che descrive il comportamento dei fluidi. Essa mette in relazione il campo che rappresenta la velocità del fluido in ogni punto con pressione, densità e viscosità. La sua espressione è la seguente:

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v} = \rho \underline{g} - \nabla P + \nu \rho \left[\nabla^2 \underline{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \underline{v}) \right] \quad (1.8)$$

ove \underline{v} è la velocità del fluido in funzione delle coordinate spaziali e del tempo, ρ la sua densità, P la pressione e infine ν la viscosità cinematica. Sfruttando la definizione di derivata materiale, per indicare il termine di sinistra dell'equazione si fa spesso uso della scrittura $\rho \frac{d\underline{v}}{dt}$. Nel caso di nostro interesse vale la condizione di incompressibilità

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (1.9)$$

che semplifica la (1.8) in

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \underline{g} - \nabla P + \nu \rho \nabla^2 \underline{v}. \quad (1.10)$$

Ponendo P pari alla sola pressione in eccesso derivante dal moto delle onde, e riscrivendo $\rho = \rho' + \bar{\rho}$, con $\bar{\rho}$ pressione all'equilibrio, si ha

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho' \underline{g} - \nabla P + \nu \rho \nabla^2 \underline{v}. \quad (1.11)$$

Infine, affinché si conservi la massa, e poiché si sta considerando un fluido in cui le differenze di salinità sono rilevanti, deve valere un'equazione diffusiva del tipo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = \kappa \nabla^2 \rho \quad (1.12)$$

ove κ è una costante diffusiva legata alla diffusione dell'agente che genera le variazioni di densità (i.e. temperatura o salinità). Si ha perciò

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \rho = \frac{d\rho}{dt} = \kappa \nabla^2 \rho. \quad (1.13)$$

Il problema si semplifica ulteriormente considerando un flusso bidimensionale sul piano xOz , indipendente dalla coordinata y . In tal caso si può definire una funzione di corrente

ψ tale che $\partial_x \psi = -v_z$ e $\partial_z \psi = v_x$. Le equazioni diventano a questo punto

$$\partial_{tz} \psi + J(\partial_z \psi, \psi) = -\frac{1}{\rho} \partial_x P + \nu \partial_z \nabla^2 \psi \quad (1.14)$$

$$\partial_{tx} \psi + J(\partial_x \psi, \psi) = \frac{\rho'}{\rho} g - \frac{1}{\rho} \partial_z P + \nu \partial_x \nabla^2 \psi \quad (1.15)$$

$$\partial_t \rho + J(\rho', \psi) = \kappa \nabla^2 \rho + \frac{d\bar{\rho}}{dz} \partial_x \psi \quad (1.16)$$

con $J(f, g) = \partial_x f \partial_z g - \partial_x g \partial_z f$. Si applica l'*approssimazione di Boussinesq*, che consiste nel supporre piccole, come è valido ad esempio negli oceani, le variazioni di densità rispetto alla densità del fluido in superficie ρ_0 . Si ottiene, derivando in z l'equazione (1.14) e in x la (1.14) e combinandole, il sistema

$$\partial_t \nabla^2 \psi + J(\nabla^2 \psi, \psi) - \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = \frac{g}{\rho_0} \partial_x \rho' \quad (1.17)$$

$$\partial_t \rho' + J(\rho', \psi) - \kappa \rho' = -N^2 \frac{\rho_0}{g} \partial_x \psi \quad (1.18)$$

che governa il comportamento dei fluidi stratificati. Trascurando i termini non lineari si ha

$$\partial_t \nabla^2 \psi - \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = \frac{g}{\rho_0} \partial_x \rho' \quad (1.19)$$

$$\partial_t \rho' - \kappa \rho' = -N^2 \frac{\rho_0}{g} \partial_x \psi \quad (1.20)$$

che poste soluzioni armoniche piane $\psi = \psi_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, $\rho' = \rho'_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ si riscrive in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} -k^2(i\omega + \nu k^2) & i \frac{g}{\rho_0} k_x \\ i N^2 \frac{\rho_0}{g} k_x & i\omega + \kappa k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \rho' \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (1.21)$$

per cui la condizione di Ker non banale implica determinante non nullo, ovvero

$$k^2(i\omega + \nu k^2)(i\omega + \kappa k^2) + N^2 k_x^2 = 0 \quad (1.22)$$

Caso inviscido e non diffusivo Se $\kappa = \nu = 0$, si ha la relazione di dispersione

$$\frac{\omega}{N} = \pm \frac{k_x}{|k|} \quad (1.23)$$

ossia, detto θ l'angolo tra la direzione verticale e quella di propagazione dell'onda

$$\frac{\omega}{N} = \pm \text{sen}(\theta). \quad (1.24)$$

da cui risulta chiaramente che il rapporto tra le due quantità deve mantenersi minore dell'unità; in caso contrario avrò onde evanescenti, che non sono in grado di propagarsi nel mezzo. Facilmente si ricavano velocità di fase e di gruppo

$$\underline{c}_\phi = \frac{\omega}{k} \hat{k} = N \frac{|k_x|}{k^3} (k_x \hat{x} + k_z \hat{z}) \quad (1.25)$$

$$\underline{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega = N \frac{\text{sign}(k_x) k_z}{k^3} (k_x \hat{x} + k_z \hat{z}) \quad (1.26)$$

Caso viscido non diffusivo Poniamo ora $\nu \neq 0$; si ottiene dalla (1.22) l'equazione quadratica

$$\left(\frac{\omega}{N}\right)^2 - i\nu \frac{k^2}{N} \frac{\omega}{N} - \frac{k_x^2}{k^2} = 0 \quad (1.27)$$

per cui è immediato vedere che soluzioni non immaginarie pure per la pulsazione dell'onda si hanno quando

$$-\nu^2 \frac{k^4}{N^2} + 4 \frac{k_x^2}{k^2} > 0 \quad (1.28)$$

e valgono

$$\omega = \omega_r + \omega_i = \pm N \sqrt{-\left(\frac{k^2 \nu}{2N}\right)^2 + \frac{k_x^2}{k^2}} + i \frac{\nu k^2}{2}. \quad (1.29)$$

Come è usuale nella meccanica ondulatoria, gli effetti dispersivi contribuiscono generando sia una variazione della pulsazione osservata (ω_r), sia un'attenuazione dell'onda (ω_i). In effetti ciò è facile da vedere sostituendole nell'espressione delle onde, p.e. nella funzione di corrente

$$\psi = \psi_0 \exp(-\omega_i t) \exp(i\omega_r t + \underline{k} \cdot \underline{x}) \quad (1.30)$$

da cui si ottiene una distanza caratteristica di attenuazione

$$d = \frac{c_g}{\omega_i} = \frac{2\sqrt{N^2 - \omega^2}}{\nu k^3} \quad (1.31)$$

avendo posto c_g pari alla velocità di gruppo del caso inviscido.

Caso generale Se $\kappa \neq 0$ si ottiene l'equazione

$$\left(\frac{\omega}{N}\right)^2 - i(\nu + \kappa) \frac{k^2}{N} \left(\frac{\omega}{N}\right) - \left(\nu \kappa \frac{k^4}{N^2} + \frac{k_x^2}{k^2}\right) = 0 \quad (1.32)$$

per cui la condizione (1.28) diventa in questo caso

$$-\nu^2 \left(1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)^2 \frac{k^4}{N^2} + 4 \frac{k_x^2}{k^2} > 0 \quad (1.33)$$

e l'equazione è risolta da

$$\omega = \omega_r + \omega_i = \pm N \sqrt{-\left[\frac{k^2 \nu}{2N} (1 - \text{Sc}^{-1})\right]^2 + \frac{k_x^2}{k^2}} + i \frac{\nu k^2}{2} (1 + \text{Sc}^{-1}). \quad (1.34)$$

con distanza caratteristica pari a

$$d = \frac{2\sqrt{N^2 - \omega^2}}{\nu k^3 (1 + \text{Sc}^{-1})} \quad (1.35)$$

ove si è posto $\text{Sc} = \frac{\nu}{\kappa}$ numero di Schmidt. In moltissimi casi di interesse fisico tale valore è sufficientemente grande da garantire la validità dell'approssimazione al caso non diffusivo.

1.2 Riflessione delle onde interne

Le relazioni di dispersione descritte nella sezione precedente implicano che, dato un certo valore del rapporto $\frac{\omega}{N}$, l'angolo di propagazione delle onde interne sia fissato: ciò da origine, come si discute ora, a effetti di riflessione diversi da quelli comuni *à la Fresnel*.

1.2.1 Soluzione della riflessione nel caso inviscido

Si consideri il caso inviscido descritto dalla (1.23), all'incontro con una superficie inclinata di un certo angolo α rispetto alla verticale, e si ponga N costante. L'onda incidente sarà del tipo

$$\psi_i = \psi_{i0} \exp(i\omega_i t - i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) \quad (1.36)$$

e quella riflessa egualmente

$$\psi_r = \psi_{r0} \exp(i\omega_r t - i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}). \quad (1.37)$$

Si definiscono coordinate

$$x_s = x \cos \alpha + z \sin \alpha \quad (1.38)$$

$$z_s = -x \sin \alpha + z \cos \alpha \quad (1.39)$$

adattate alla superficie, risp. normale e parallela alla tangente nel punto di riflessione. In tali coordinate la condizione che l'onda non possa penetrare nella superficie si scrive ponendo $v_{x_s} = 0$ in $x_s = 0 \forall z_s, t$. Ricordando che $v_x = -\partial_z \psi$, $v_z = \partial_x \psi$, ed essendo pertanto $\partial_{z_s} = -\sin \alpha \partial_x + \cos \alpha \partial_z \Rightarrow v_{x_s} = -\partial_{z_s} \psi$, in termini della funzione di corrente l'espressione alla superficie diventa

$$k_{iz_s} \psi_{i0} \exp(i\omega_i t - i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_s) + k_{rz_s} \psi_{r0} \exp(i\omega_r t - i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_s) = 0 \quad (1.40)$$

In $x_s = 0$. Si ottengono da questa le seguenti relazioni:

$$\omega_i = \omega_r =: \omega \quad (1.41)$$

$$k_{iz_s} = k_{rz_s} \quad (1.42)$$

$$\psi_{i0} = \psi_{r0} =: \psi_0 \quad (1.43)$$

per cui l'angolo di propagazione rispetto alla normale deve soddisfare la medesima relazione 1.23 sia prima che dopo la riflessione; ciò implica in particolare che la riflessione avvenga invertendo l'angolo rispetto alla verticale o all'orizzontale, a seconda di quale tra le due traiettorie si mantenga all'interno del fluido:

$$\theta_i = \theta \Rightarrow \theta_r \in \{-\theta, \pi - \theta\}. \quad (1.44)$$

Si calcolano facilmente a questo punto le componenti del vettore d'onda normali alla superficie:

$$k_{ix_s} = k_{iz_s} \tan(\theta - \alpha) \quad (1.45)$$

$$k_{rx_s} = k_{rz_s} \tan(\theta + \alpha) \quad (1.46)$$

e il rapporto tra le norme

$$\frac{k_r}{k_i} = \left| \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos(\theta + \alpha)} \right| =: \gamma \quad (1.47)$$

che qualora siano θ e $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ è maggiore di 1 e corrisponde a una progressiva diminuzione delle lunghezze d'onda

$$\lambda_r = \frac{\lambda_i}{\gamma}. \quad (1.48)$$

Vale il contrario per un'onda con $(\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0], \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}])$, ossia si hanno effetti di *defocusing*. Nel caso con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ ovviamente la situazione si inverte.

1.2.2 Concentrazione delle onde interne

Concentrazione longitudinale La relazione (1.47) tra le norme dei vettori d'onda incidente e riflesso provocano effetti di concentrazione delle onde: in effetti si calcola la densità di energia trasportata dalle onde incidenti come

$$E_i = \frac{1}{2}(v_{ix}^2 + v_{iz}^2) = \frac{1}{2}k_i^2|\psi_0|^2 \quad (1.49)$$

e egualmente per quelle riflesse

$$E_r = \frac{1}{2}(v_{rx}^2 + v_{rz}^2) = \frac{1}{2}k_r^2|\psi_0|^2 \quad (1.50)$$

da cui $E_r = \gamma^2 E_i$. Ciò è legato appunto al variare della lunghezza d'onda delle *internal waves* in seguito a riflessione. Esiste però un altro tipo di concentrazione delle onde interne, in particolare legato alla presenza di attrattori nella propagazione delle onde, per cause geometriche legate alla natura delle riflessioni.

Internal wave attractors A causa della peculiare legge di riflessione che caratterizza le onde interne, all'interno di un contenitore riempito di un fluido stratificato è sovente possibile osservare la formazione di *loop* chiusi: il moto delle onde tende nel tempo a raggiungere un'orbita periodica, spesso determinata univocamente dalla conoscenza dell'angolo θ e della geometria del contenitore. In questo modo è prodotto ancora una volta un effetto di *focusing*, per cui onde che partono distanti fra loro tendono ad accumularsi lungo l'attrattore. Al contrario, si può osservare che esistono traiettorie da cui le onde tendono ad allontanarsi velocemente: sono i cosiddetti *repulsori*, attrattori "all'inverso" (per $t \rightarrow -\infty$). Fenomeni di questo tipo sono stati studiati sperimentalmente e qualitativamente in contenitori di varia forma. Il problema di individuare le traiettorie limite, e per quali angoli esse si presentino, si presta tuttavia anche a una facile astrazione matematica che vede il contenitore come un *biliardo dinamico* con una regola di riflessione diversa da quella usuale, data dalla (1.44). Tali tipi di biliardi sono dunque detti *internal wave billiards*. In questo contesto si svolgerà la trattazione centrale del presente elaborato, che discute risultati ottenuti recentemente su geometrie trapezoidali e simili[10], estendendo alcuni di essi al caso di un biliardo parabolico, per cui alcuni risultati di carattere qualitativo e sperimentale sulla presenza e la forma degli attrattori sono già stati osservati[11]. Si evidenzia in ogni caso che gli effetti viscosi causano

un'attenuazione dell'onda, secondo la 1.30 e la 1.31; per questo motivo, attrattori più complessi saranno soppressi maggiormente dal punto di vista fisico. Come già citato, attrattori delle onde interne sono stati osservati in esperimenti in laboratorio; non si ha tuttavia ancora evidenza della loro effettiva presenza in sistemi naturali.

1.2.3 Caratteristiche e reti

Per poter arrivare a una descrizione delle onde interne che si formano in un contenitore è necessario considerare la relazione che intercorre tra la struttura geometrica definita dai raggi e le effettive funzioni di corrente. A tale scopo si considera l'equazione delle onde 1.19 nel caso inviscido e non diffusivo: derivando in t e sostituendo attraverso la 1.20 si ottiene

$$\frac{\partial^2(\nabla^2\Psi)}{\partial t^2} + N^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0. \quad (1.51)$$

Se $\Psi(x, z, t) = \psi(x, z)e^{i\omega t}$, si ricava per la parte spaziale

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{N^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{N^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.52)$$

che è un'equazione di *D'Alembert* riscalata, e espressa in coordinate spaziali. Ciò in particolare implica che le condizioni al contorno siano definite sui bordi di una data curva (condizioni *di Dirichlet*) e quindi differiscano da quelle standard in cui si affronta il problema delle onde, che sono di solito condizioni iniziali[12]. Se pongo

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{N^2}}x + \frac{\omega^2}{N^2}z \quad \text{e} \quad (1.53)$$

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{N^2}}x - \frac{\omega^2}{N^2}z \quad (1.54)$$

si ha infine

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi} = 0. \quad (1.55)$$

Poste f_+, f_- funzioni qualsiasi, la soluzione dell'equazione è

$$\psi = f_-(\eta) + f_+(\xi). \quad (1.56)$$

Siccome i valori di η, ξ si mantengono costanti lungo rette che si propagano secondo angoli θ dati dalla 1.24, i raggi che costruisco secondo le regole di propagazione e riflessione viste in precedenza saranno esattamente le traiettorie a f_+ o f_- costanti. Se considero la struttura formata dalle riflessioni di un'onda, detta a volte *rete*, posso osservare che per avere l'annullamento della funzione di corrente al contorno, nei punti di intersezione col bordo le due funzioni dovranno avere valore opposto tra loro. Avrò pertanto un valore iniziale f_1 conservato, assunto alternatamente da f_+ e $-f_-$. Tale invariante è detta a volte *pressione parziale*. Tale nomenclatura deriva dal fatto che, dal punto di vista fisico, la grandezza $-f_-(\eta) + f_+(\xi)$ è legata al campo di pressione entro il fluido. Associando il rispettivo valore di pressione parziale a ciascuna rete, e sottraendo tra loro i valori di questo tipo per le due reti che passano per ogni punto, si ottiene la funzione di corrente, e da questa densità e velocità: in questo modo si è in grado di risolvere completamente

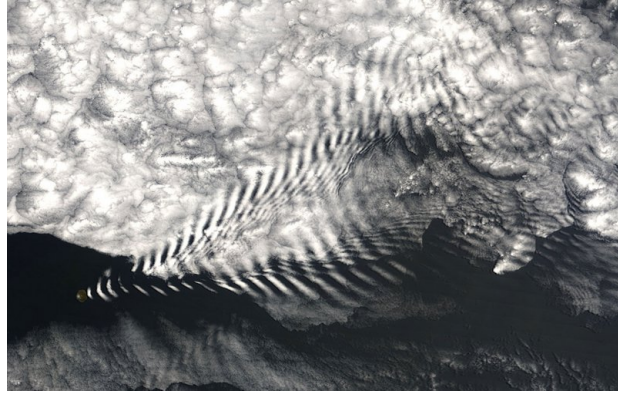


Figura 1.1: Fotografia di onde interne prodotte nell'atmosfera al di sopra dell'Isola Amsterdam, nell'Oceano Indiano. Immagine scattata nel 2005 dal NASA Earth Observatory

il problema. Si osserva che tuttavia non è sufficiente la condizione di annullamento al contorno per permettere una conoscenza univoca della soluzione: ad essa devono essere associati valori della pressione parziale assegnati in alcuni punti del bordo, in particolare in modo che a ciascuna rete ne sia assegnato uno soltanto. In generale il problema di determinare i cosiddetti *fundamental intervals* che rendono possibile ciò è tutt'altro che banale, e dipende dalla geometria della riflessione e dal tipo di curve considerate.

1.3 Esempi di onde interne in natura

L'esistenza effettiva delle onde interne è confermata dalle osservazioni in moltissimi sistemi naturali; in particolare, si farà riferimento a onde che si propagano negli oceani e nell'atmosfera.

1.3.1 Onde interne nell'atmosfera

Nell'atmosfera sono presenti moltissime onde interne; per quanto riguarda la troposfera, valori tipici della frequenza di *buoyancy* sono di 0.01 s^{-1} , con periodi di circa dieci minuti. La maggior parte delle onde interne ha piccole ampiezze e scarsa rilevanza in questo strato, ad eccezione di quelle che si vengono a generare a causa del passaggio di correnti d'aria sopra rilievi montuosi. Ben più significativa è invece l'influenza di tali onde sugli strati più alti, dove la ridotta densità dà luogo ad un'amplificazione dell'ampiezza delle onde interne. Esse sono in grado di accelerare i venti atmosferici, e danno origine a numerosi fenomeni su larga scala, come l'Oscillazione quasi biennale (QBO) dei venti della stratosfera sopra l'equatore[8].

1.3.2 Onde interne oceaniche

Negli oceani, gradienti di temperatura e di salinità producono una variazione di densità con la profondità (vedi *fig. 1.3*). In particolare, al di sotto di una zona superficiale spessa circa 100 metri, avente caratteristiche per lo più uniformi, si presenta una zona c.d. *abissale* in cui la densità è crescente in maniera lineare con la profondità. Le due

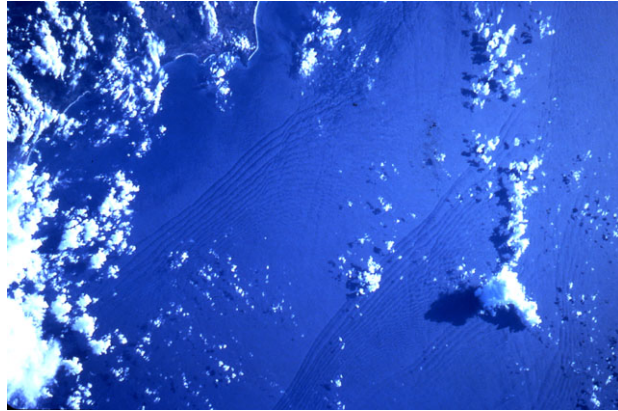


Figura 1.2: Fotografia di onde interne nel Mar Cinese meridionale. L'immagine è stata scattata nel 1983 da uno shuttle della NASA.

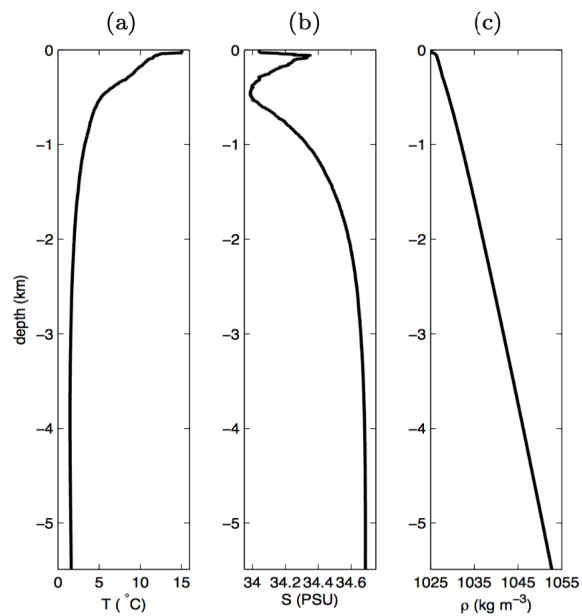


Figura 1.3: Andamento della temperatura (a), salinità(b) e densità(c) in funzione della profondità nell'Oceano Pacifico, misurata a una latitudine di 40° N. Immagine tratta da [2].

zone sono separate da un sottile strato detto picnoclino, in cui è presente un grande gradiente di densità che ostacola gli scambi tra i due strati.

Le onde interne si possono produrre per via del l'incontro tra masse d'acqua mosse da correnti o maree e ostacoli dovuti alla topografia del fondale, che sollevando tali masse generano onde. Alternativamente, l'atmosfera può indurre, ad esempio durante tempeste, perturbazioni del picnoclino oceanico tali da produrre onde interne. Esse hanno lunghezze d'onda tipiche tra i 10 metri e qualche chilometro, e a causa del loro basso numero d'onda hanno distanze caratteristiche di attenuazione molto lunghe, di circa 50000 km: possono quindi avere influenza sull'intera stratificazione a livello globale, nonostante siano prodotte da fenomeni di natura locale. Le onde interne contribuiscono al mescolamento delle acque abissali, che è centrale per il mantenimento della circolazione oceanica e in generale per il clima oceanico. Tali onde in effetti trasportano energia verso le profondità dell'oceano, dove fenomeni dissipativi che si instaurano a causa di effetti di turbolenza su piccola scala. In assenza di effetti di mescolamento di questo tipo, che influenzano in particolare l'andamento della temperatura all'interno dell'oceano, le correnti oceaniche risulterebbero molto più deboli, e sarebbero significative soltanto nella parte più superficiale dell'oceano[16].

Si osserva in ultimo che, su grande scala, il comportamento delle onde è influenzato anche dalla forza di Coriolis dovuta alla rotazione della Terra. In questa trattazione non si è tuttavia affrontato tale aspetto, che dà origine alle cosiddette *onde inerziali* (o *gravito-inerziali*, nel caso siano presenti entrambi gli effetti).

Capitolo 2

Teoria degli omeomorfismi del cerchio

Si introducono in questa sezione in maniera breve ma rigorosa alcuni teoremi sugli omeomorfismi del cerchio, giungendo in conclusione a un risultato di Poincaré assai importante, cui ci si rifarà nel seguito, il quale stabilisce una corrispondenza tra omeomorfismi del cerchio senza orbite periodiche e rotazioni di un angolo irrazionale. In seguito, si enunciano alcuni risultati di Denjoy, i quali vanno a completare la descrizione geometrica dei sistemi unidimensionali utile alla trattazione che verrà svolta nei successivi capitoli. Nell'esposizione di questi argomenti, si è seguita abbastanza dettagliatamente la trattazione proposta in [3].

2.1 La teoria di Poincaré

La teoria di Poincaré degli omeomorfismi del cerchio ha come punto di arrivo sostanzialmente la definizione del numero di rotazione degli omeomorfismi. Esso è un invariante topologico che, come si vedrà, è legato al comportamento delle orbite e in particolare alla presenza di orbite periodiche. La trattazione che se ne compie tenta di essere il più possibile rigorosa e sarà svolta, seguendo [3], da un punto di vista che si potrebbe definire abbastanza vicino alla dinamica dei sistemi.

2.1.1 Qualche definizione

Si forniscono in primis alcune definizioni fondamentali.

Definizione 2.1.1. Si dice ordinamento ciclico di un insieme A una relazione ternaria $[a, b, c]$ tra elementi di A tale che

1. $[a, b, c] \Rightarrow [b, c, a]$
2. $[a, b, c] \Rightarrow \neg[c, b, a]$
3. $[a, b, c] \wedge [a, c, d] \Rightarrow [a, b, d]$
4. $a \neq b \neq c \Rightarrow [a, b, c] \vee [c, b, a]$

In pratica si definisce in questo modo una relazione tra tre elementi, uno dei quali si trova “in mezzo” agli altri due: su un cerchio, ad esempio, potresti definire $[a, b, c]$ se procedendo in senso orario da a verso c incontro b .

Definizione 2.1.2. Sia $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si indica con $\pi(x)$ la mappa quoziente da \mathbb{R} a S_1 , e si considera su tale insieme l'ordinamento ciclico indotto dalla relazione d'ordine $<$ dei reali. Si dice omeomorfismo del cerchio una funzione continua $f : S^1 \rightarrow S^1$ invertibile, la cui inversa è continua. Si dice omeomorfismo preservante l'ordine (o l'orientazione) un omeomorfismo del cerchio f tale che sia preservato l'ordine ciclico di S_1 .

Risulta utile introdurre anche un omeomorfismo di \mathbb{R} che si comporti sostanzialmente come la funzione f , e sia ben definito sulle classi di equivalenza di S_1 .

Definizione 2.1.3. Si dice *lift* di un omeomorfismo del cerchio f una funzione omeomorfa $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\hat{f}(x) = f(\pi(x)) \forall x \in [0, 1]$, $\hat{f}(x + k) = \hat{f}(x) + k \forall k \in \mathbb{Z}$.

Allo scopo di chiarire rigorosamente cosa voglia dire che un sistema dinamico *tende a un'orbita*, si introduce la definizione formale di insiemi limite.

Definizione 2.1.4. Sia X uno spazio metrico, $f : X \rightarrow X$ una funzione definita su tale insieme e $x \in X$. Sia $\gamma = f^n(x)$ un'orbita di f . Si dice ω -limite di γ (o $\omega(x)$) l'insieme

$$\lim_{\omega} \gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) : k > n\}}$$

e α -limite di γ (o $\alpha(x)$) l'insieme

$$\lim_{\alpha} \gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) : k < n\}}$$

Si osserva che l'orbita di una rotazione $R_\alpha = x + \alpha \pmod{1}$, con α irrazionale, è densa in S^1 . R_α non può infatti avere punti periodici. Sia F la chiusura dell'orbita di x : allora F è un insieme invariante chiuso, mentre il suo complementare A è aperto e invariante a sua volta. Sia A non vuoto. Se A_0 è una componente connessa di A , anche $f^n(A_0)$ sono componenti connesse di A . Siccome hanno tutti la stessa lunghezza, questi intervalli non possono essere tutti disgiunti e quindi esiste un m t.c. R^m mappa almeno uno di questi intervalli in sè stesso. La rotazione ha quindi un punto periodico e si arriva a una contraddizione, per cui $A = \emptyset$. Non è difficile osservare un primo risultato.

Lemma 1. *Sia f omeomorfismo del cerchio preservante l'ordine. Se f^k ha un punto fisso allora tutti i punti tendono a un punto fisso di f^k . Ne risulta che l' ω -limite delle orbite dei punti di f sia un'orbita periodica di periodo k .*

Dim. Sia J un intervallo chiuso dei numeri reali, e si prenda una funzione $f : J \rightarrow J$ monotona crescente. Ne consegue che per $x \in J$ qualsiasi, se $f(x) > x$ allora $f^{n+1}(x) > f^n(x) \forall n \in \mathbb{N}$. La successione $f^n(x)$ è crescente monotonicamente e converge dunque a $y = \sup f_n(x)$. Se invece $f(x) < x$ allora $f^{n+1}(x) < f^n(x) \forall n \in \mathbb{N}$. La successione $f^n(x)$ è decrescente monotonicamente e converge dunque a $y = \inf f_n(x)$. Si consideri ora un omeomorfismo del cerchio $g : S_1 \rightarrow S_1$, che preserva l'orientazione. Se g ha un punto periodico y di periodo k , allora y è un punto fisso di g^k . Se si pone $J = S_1 \setminus \{y\}$ allora g^k ristretto a J è monotono crescente e quindi, per ogni $x \in J$, $g^{kn}(x)$ tenderà a un punto fisso. Essendo i punti fissi gli elementi delle orbite periodiche di periodo k del sistema, ogni orbita tenderà ad una di queste. \square

Se al contrario g inverte l'ordine dei punti essa ammette esattamente due punti fissi. Infatti sia x t.c. $f(x) \neq x$ e due archi $A = (p, x)$ e $B = (x, q)$ in direzioni opposte rispetto a x . Siano A, B massimi tali che $A \cap f(A) = B \cap f(B) = \emptyset$. Siccome l'ordine ciclico è invertito da f , si ha che $A, f(A)$ sono contenuti nella stessa componente connessa di $S^1 \setminus x, f(x)$, così come $B, f(B)$, e per via della massimalità si ha $p = f(p)$ e $q = f(q)$.

2.1.2 Mappe e itinerari

Risulta possibile identificare ogni omeomorfismo del cerchio con una mappa $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita come segue. Sia g un omeomorfismo senza punti fissi e \hat{g} un lift di g , e sia $c \in]0, 1[$ l'unico punto ove vale $\hat{g}(c) \in \mathbb{Z}$; si pone allora

$$f = \begin{cases} \hat{g}(x) \pmod{1} & \text{se } x \in [0, 1] \setminus c \\ 0 & \text{se } x = c. \end{cases} \quad (2.1)$$

Chiamiamo $\mathcal{S}(J)$ l'insieme di funzioni di questo tipo. Si introduce, per caratterizzare le orbite di f , una *dinamica simbolica*:

Definizione 2.1.5. Si dice *itinerario* di f in un punto $x \in [0, 1]$ l'insieme $\underline{i}_f(x) := \{i_0(x), i_1(x), i_2(x), \dots\}$ con $i_j(x) \in \{L, c, R\}$, $i_j(x) = L$ se e solo se $f^j(x) < c$, $i_j(x) = c$ se e solo se $f^j(x) = c$, $i_j(x) = R$ se e solo se $f^j(x) > c$.

Gli itinerari sono quindi elementi di $\Sigma := \{L, c, R\}^{\mathbb{N}}$, Siano $\underline{x} = \{x_0, x_1, \dots\}$, $\underline{y} = \{y_0, y_1, \dots\} \in \Sigma$. Si definisce la relazione d'ordine

$$\underline{x} \prec \underline{y} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x_i = y_i \forall i < k, x_k < y_k$$

ove si intende l'ordine formale $L < c < R$. Si introduce infine su Σ la topologia indotta dalla metrica

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} d(x_i, y_i) \quad (2.2)$$

con $d(x_i, y_i) = 1$ se $x_i \neq y_i$, $= 0$ altrimenti. Valgono per gli itinerari i seguenti risultati:

$$x < y \Rightarrow \underline{i}_f(x) \preceq \underline{i}_f(y) \quad (2.3)$$

$$\underline{i}_f(x) \prec \underline{i}_f(y) \Rightarrow x < y \quad (2.4)$$

$$\underline{i}_f(f^i(x)) = \sigma_j(\underline{i}_f(x)) := \{i_j(x), i_{j+1}(x), i_{j+2}(x) \dots\} \quad (2.5)$$

Dim. La eq.(2.5) è immediata dalla definizione di itinerario. Se $x < y$ e $\underline{i}_f(x) \neq \underline{i}_f(y)$ allora esiste un intero k t.c. $i_k(x) \neq i_k(y)$, mentre i precedenti elementi dell'itinerario coincidono. Ne risulta che $f^j(x)$ e $f^j(y)$ si trovano nella stessa componente di $J \setminus \{c\}$ per $j < k$ e pertanto f è continua e strettamente crescente in $[f^j(x), f^j(y)]$ per ciascuno di tali j . Ne risulta che sia $f^k(x) < f^k(y)$ donde il risultato (2.3). Infine il risultato (2.4) deriva banalmente dalla negazione di (2.3), invertendo tra loro x e y e considerando che ovviamente se essi sono uguali anche $\underline{i}_f(x)$ e $\underline{i}_f(y)$ lo sono. \square

Definiamo $\underline{x}_n := (x_0, x_1 \dots x_{n-1})$ e il prodotto

$$\underline{x}_n \cdot \underline{y}_m := (x_0, x_1 \dots x_{n-1}, y_0, y_1 \dots y_{m-1}) \quad (2.6)$$

e poniamo per induzione $\underline{x}_n^1 = \underline{x}_n$, $\underline{x}_n^j := \underline{x}_n^{j-1} \cdot \underline{x}_n$. Definiamo ora i due itinerari limite

$$K^+ = \lim_{x \downarrow c} \underline{i}_f(x) \quad (2.7)$$

e

$$K^- = \lim_{x \uparrow c} \underline{i}_f(x). \quad (2.8)$$

i quali risultano ben definiti proprio grazie al risultato (2.3), e pari a

$$K^+ = (R, L) \cdot \underline{i}_f(f^2(c)), \quad K^- = (L, R) \cdot \underline{i}_f(f^2(c)). \quad (2.9)$$

Si introduce ora un'altra definizione fondamentale.

Definizione 2.1.6. Due mappe f, \tilde{f} su J si dicono *combinatorialmente equivalenti* se esiste una mappa h tale che $h(f^n(c(f))) = \tilde{f}^n(c(\tilde{f}))$ per $n \in \mathbb{Z}$ preservante l'ordine, ossia se le orbite di $c(f)$ in f e $c(\tilde{f})$ in \tilde{f} hanno lo stesso ordine.

L'ordine deve essere strettamente preservato per garantire che questa sia una relazione di equivalenza: infatti in questo modo si garantisce la validità della proprietà transitiva. Un risultato piuttosto importante importante lega le sequenze K^+ viste in precedenza alla nozione appena introdotta:

Lemma 2. *Due mappe f, \tilde{f} senza punti fissi sono combinatorialmente equivalenti se e solo se $K^+(f) = K^+(\tilde{f})$.*

Dim. Se f e \tilde{f} sono combinatorialmente equivalenti, allora $K^+(f) = K^+(\tilde{f})$, poiché appunto è preservato l'ordine dell'orbita di c . Si dimostra dunque il viceversa. Sia $c := c(f)$, $\tilde{c} := c(\tilde{f})$ e $h(x) := \sup\{y : \underline{i}_{\tilde{f}}(y) \preceq \underline{i}_f(x)\}$. Dalla prima delle (2.9) deriva che $\underline{i}_f(c) = \underline{i}_{\tilde{f}}(\tilde{c})$. Dunque, poiché se $x = c$ l'uguaglianza tra i due itinerari è vera solo per $y = \tilde{c}$, e poiché vale il risultato (2.3) e il (2.4), si deve avere $h(c) = \tilde{c}$. Ne consegue che h

preserva l'ordine e $h \circ f = \tilde{f} \circ h$. Ne risulta dunque che $h(f^n(c)) = \tilde{f}^n(h(c))$, e siccome \tilde{f} non ha punti periodici l'ordine è preservato strettamente ed è così dimostrata la tesi. \square

Ne si ottiene peraltro che la sequenza K^+ sia ben definita anche per un omeomorfismo del cerchio g senza punti periodici, che pur corrispondendo a più di una mappa su J è tale che ciascuna di queste ultime possiede la stessa K^+ : presi infatti $x, y \in S^1$ qualsiasi e la mappa h definita da $h(g^n(x)) = g^n(y)$, quest'ultima preserverà strettamente l'ordine circolare di S^1 , poiché g preserva l'ordine. Dunque, siccome f, \tilde{f} mappe su J corrispondenti a g sono tali che $g^n(\pi(x)) = \pi(f^n(x))$, $g^n(\pi'(x)) = \pi'(\tilde{f}^n(x))$ (in sostanza, sto cambiando solo "origine" sul cerchio) esse sono comb. equivalenti e pertanto hanno il medesimo K^+ .

Associamo ora dei numeri a_n alle successive applicazioni della mappa f , così da caratterizzarne la dinamica. Siano J', J'' gli interni delle due componenti di $J \setminus \{c(f)\}$. Dovrà certamente avere che uno dei due è mappato da f nell'altro, ad esempio $f(J') \subset J''$: in effetti $f(1) = f(0)$ sarà o sopra o sotto a c e quindi forzerà uno dei due intervalli a essere mandato strettamente nell'altro. Se infatti $f(0) = c$ allora c è periodico di periodo 2. Si definisce *mappa di primo ritorno* di un intervallo I la mappa $\mathcal{R}(f)(x) := f^{k(x)}(x)$, con $k(x) = \min\{i > 0; f^i(x) \in I\}$. Proviamo ora un altro utile risultato.

Lemma 3. *Sia $f \in \mathcal{S}(J)$ senza punti fissi e $c = c(f)$, J' e J'' come descritti poco sopra. Sia $a(f)$ il più piccolo intero tale che J' e $f^{a(f)+1}(J')$ hanno punti in comune, e sia $\mathcal{R}(f)$ la mappa di primo ritorno a $J(f)$. Allora detta $J(f)$ la chiusura di $f^{a(f)+1}(J') \cup J'$, valgono le seguenti proposizioni:*

1. $a(f)$ è il più piccolo intero tale che la chiusura di $J' \cup f(J') \cup f^2(J') \cup \dots \cup f^{a(f)+1}(J')$ ricopre il cerchio
2. Se $f^{a(f)}(J')$ contiene c nella sua chiusura allora $f^{a(f)+1}(J') = J'$ e $f^{a(f)+1}(c) = c$, e la mappa di primo ritorno a $J(f)$ è in questo caso uguale a $f^{a(f)+1}$.
3. In caso contrario, $\mathcal{R}(f) \subset \mathcal{S}(J(f))$; $\mathcal{R}(f)$ mappa $J'' \cap J(f)$ in J' e coincide in J' con $(f|_{J''})^{a(f)} \circ (f|_{J'})$ e in $J'' \cap J(f)$ con $f|_{J''}$.

Dim. Definiamo $a'(f)$ come il più grande intero tale che $f^i(J') \subset J''$ per ogni i intero con $1 \leq i \leq a'(f)$. Si ha che tutti gli intervalli aperti $f(J'), f^2(J'), f^{a(f)+1}(J')$ sono disgiunti e hanno un estremo in comune. Infatti l'estremo di J' in c sarà mandato in un estremo in 0, mentre l'altro sarà mandato in $f(0)$ e così via. Dunque $a'(f) = a(f)$ e $J(f)$ è un intervallo. Se c è elemento della chiusura di $f^{a(f)}(J')$, allora c è un estremo di J : pertanto $f^{a(f)+1}$ manda J' in sé stesso, e $f^{a(f)+1}(c) = c$. Si considera invece il caso in cui c è elemento dell'interno di $J(f)$. Ovviamente da quanto appena discusso $a(f) + 1$ è il più piccolo intero tale che $f^{a(f)+1}(x) \in J(f) \forall x \in J'$. Assumiamo per semplicità J' sia alla destra di J'' ; in caso contrario sarà sufficiente scambiare nella discussione che segue i termini "destra" e "sinistra". L'immagine di $J(f) \cap J''$ sarà dunque data da $J' \setminus f^{a(f)+1}(J')$ e quindi sarà interamente contenuta in J' e chiaramente ne conterrà l'estremo destro. Ne segue la tesi. \square

La costruzione centrale di questo studio degli omeomorfismi, che permetterà di ottenere

successioni di interi da cui ricavare il numero di rotazione, passa attraverso l'iterazione della procedura descritta nel lemma 3. Sia $\phi_0 = f$, $J_0 = J$, e se f ha punti fissi poniamo $a_1 = \infty$. Se invece non ne ha, definiamo

$$a_1 = \begin{cases} a(f) + 1 & \text{se } J \text{ è a destra di } J'' \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$J_1 = \begin{cases} J(f) & \text{se } J \text{ è a destra di } J'' \\ J & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\phi_1 = \begin{cases} \mathcal{R}(f) & \text{se } J \text{ è a destra di } J'' \\ f & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.12)$$

In questo modo si osserva che la componente di destra di $J_1 \setminus \{c\}$ è sempre mappata in quella di sinistra. Ora si ponga $n \geq 2$; se ϕ_{n-1} non ha punti fissi si definiscono induttivamente $J_n = J(\phi_{n-1})$, $\phi_n = \mathcal{R}(\phi_{n-1})$, $a_n = a(\phi_{n-1})$, mentre se ne ha si pone $a_n = \infty$ e si termina il processo induttivo. In questo modo se J' è a destra di J'' si ha $a_n = a(\mathcal{R}^{n-1}(f))$, $\phi_n = \mathcal{R}^n(f)$, mentre se è a sinistra $a_n = a(\mathcal{R}^{n-2}(f))$ e $\phi_n = \mathcal{R}^{n-1}(f)$. Ovviamente se f non ha punti periodici, non si avrà mai una ϕ_n con punti fissi e il processo non termina. Siccome ad ogni step vale il lemma 3, se definisco J'_n come la componente a destra dell'intervallo quando n è pari, e quella di sinistra quando è dispari, e J''_n come l'altra componente, si ha che

$$J'_n = J''_{n-1} \cap J_n, \quad J''_n = J'_{n-1}. \quad (2.13)$$

Sempre dall'applicazione del precedente lemma si ha che, essendo $\phi_1|J'_1 = f$, $\phi_1|J''_1 = f^{a_1}$, varrà per ogni n

$$\phi_n|J''_n = (\phi_{n-1}|J''_{n-1})^{a(\phi_{n-1})} \circ \phi_{n-1}|J'_{n-1} \quad \text{e} \quad \phi_n|J'_n = \phi_{n-1}|J''_{n-1} \quad (2.14)$$

ossia, se si pone per induzione $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ e $q_{n+1} = q_{n-1} + a_{n+1}q_n$,

$$\phi_n|J''_n = f^{q_n} \quad \text{e} \quad \phi_n|J'_n = f^{q_{n-1}}. \quad (2.15)$$

Se f ha un punto periodico di periodo $N > 1$, allora ϕ_n avrà un'orbita periodica di periodo $< N$: questo perché, come si vide a suo tempo, le varie successive immagini di J' secondo f ricoprono J , in modo tale che ogni punto periodico sia mandato in J_1 , e da questo iterando in J_2 , e così via fino a raggiungere un ϕ_m avente un punto fisso, ove termina il processo. Ovviamente se il punto è periodico secondo f , l'elemento della sua orbita contenuto in J_n lo sarà secondo ϕ_n , che è una mappa di primo ritorno. Inoltre non tutti i punti dell'orbita periodica sono contenuti in J_n , poiché come visto in precedenza $\forall n$ J'_n è mandato in J''_n e pertanto $a_n \geq 1$.

Si ottiene dunque che $J_n = [f^{q_{n-1}}(c), f^{q_n}(c)]$ e che pertanto $J'_n = (f^{q_n}(c), c)$, $J''_n = (c, f^{q_{n-1}}(c))$, ove si intende con $[a, b]$ il più piccolo intervallo chiuso contenente a e b e con (a, b) il rispettivo intervallo aperto (a prescindere dall'ordine di a e b). Si ha inoltre che per $n \geq 1$, $0 \leq j \leq q_{n+1}$

$$f^j(c) \in J_n \iff j = q_{n-1} + q_n i \quad (2.16)$$

con $0 \leq i \leq a_{n+1}$. Infatti l'immagine di c rimarrà esterna a ogni J_n fino alla q_{n-1} -esima iterazione, quando avviene il primo ritorno a tale intervallo dato da $\phi_n|J'_n$; le successive immagini di c nell'intervallo si presenteranno dopo f^{q_n} ulteriori iterazioni, corrispondenti a $\phi_n|J''_n$. Inoltre si ha che, per i che va da 0 a q_{n-1} e j da 0 a q_n , l'unione di tutti i $f^i(J'_n)$ e degli $f^j(J''_n)$ ricopre l'intervallo, ed essi sono tutti disgiunti tra loro. Infatti il primo ritorno di tali intervalli a J_n dà luogo a due intervalli disgiunti, e pertanto dovranno essere disgiunte anche tutte le loro orbite. Siccome l'unione di $J'_n, f(J'_n), \dots, f^{q_{n-1}}(J'_n)$ ricopre J , per ogni x esiste un k minimo intero t.c. $f^{-k}(x) \in J_n$. Se $f^{-k}(x)$ è nella chiusura di J'_n , allora $k < q_{n-1}$ siccome J'_n torna in sé stesso dopo q_{n-1} iterazioni di f . In caso contrario $f^{-k}(x)$ è nella chiusura di J''_n e $k < q_n$, dato che J''_n torna in sé stesso dopo q_n iterazioni di f . Da questo risultato segue un altro lemma:

Lemma 4. *Sia $f \in \mathcal{S}$, $x \in J$, $I_{n-1}(x) := (x, f^{q_{n-1}}(x))$ e $\hat{I}_{n-1}(x) := (f^{-q_{n-1}}(x), f^{q_{n-1}}(x))$. Si ha che gli intervalli $I_{n-1}, f(I_{n-1}), \dots, f^{q_{n-1}}(I_{n-1})$ sono tra loro disgiunti e $\hat{I}_{n-1}, f(\hat{I}_{n-1}), \dots, f^{q_{n-1}}(\hat{I}_{n-1})$ ricoprono J ; ogni punto è inoltre contenuto al più in due di tali intervalli.*

Dim. Sia $y = f^{-q_n}(x)$; si ha dunque $\hat{I}_n(x) = I_n(x) \cup I_n(y) \cup \{x\}$. poiché la scelta di c è arbitraria, il risultato appena visto su $J'_n = (f^{q_{n-1}}(c), c)$, $J''_n = (f^{q_n}(c), c)$ vale ugualmente se sostituisco tali intervalli con $I_{n-1}(x)$ e $I_n(x)$, o anche con $I_{n-1}(y)$ e $I_n(y)$. Si ha perciò che $J'_n \cup J''_n \subset \hat{I}_n(x)$. Dal risultato precedente le prime q_n iterazioni di $J'_n \cup J''_n$ ricoprono J , e quelle di $I_n(x)$ sono tra loro disgiunte, così come quelle di $I_n(y)$. Un punto di J potrà dunque essere contenuto solo in un intervallo del tipo $I_n(x)$ e in uno del tipo $I_n(y)$. \square

2.1.3 Rotazioni irrazionali

Si consideri una rotazione R_α definita da $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$. Se $\alpha \in (0, 1/2]$ allora $c = 1 - \alpha$, $J' = (1 - \alpha, 1)$, $J'' = (0, 1 - \alpha)$, $J(R_\alpha) = [(n - 1)\alpha, 1]$ e $a(R_\alpha) + 1$ è il più grande intero tale che $n\alpha < 1$, ossia $n - 1 = a(R_\alpha)$. Ne consegue che

$$a(R_\alpha) = \lfloor 1/\alpha \rfloor - 1. \quad (2.17)$$

Inoltre $\mathcal{R}(R_\alpha) = x + n\alpha$ in $[1 - \alpha, 1]$, e $\mathcal{R}(R_\alpha) = x + \alpha$ in $[(n - 1)\alpha, 1 - \alpha)$. Riscalando linearmente l'intervallo $J(R_\alpha)$ attraverso una mappa h preservante l'ordine, si ottiene $h^{-1} \circ \mathcal{R}(R_\alpha) \circ h = R_{\alpha'}$, ove è $\alpha' = \frac{\alpha}{1 - a(R_\alpha)\alpha}$, elemento di $(1/2, 1]$. Se definiamo

$$G(\alpha) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor \quad (2.18)$$

allora $\alpha' = \frac{1}{1 + G(\alpha)}$.

Se al contrario $a \in (1/2, 1)$, si ottiene $J(R_\alpha) = [0, 1 - n(1 - \alpha)]$, e

$$a(R_\alpha) = \left\lfloor \frac{1}{1 - \alpha} \right\rfloor - 1 \quad (2.19)$$

. Riscalando nuovamente la rotazione si ottiene un $R_{\alpha'}$ con $\alpha' = \frac{G(1-\alpha)}{1+G(1-\alpha)} \in (0, 1/2)$.
 Si discute ora di un legame che intercorre tra la sequenza a_n (e q_n) vista in precedenza e α di una rotazione: in particolare si vedrà che se a_n è finito per ogni n , α è irrazionale. Sia $\theta_0 = \alpha$, la lunghezza dell'intervallo $(c, 1)$, e sia θ_n la lunghezza dell'intervallo $J'_n = (c, R^{q_n}(c))$. Chiaramente si ha che

$$\theta_n = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |q_n \alpha - p|. \quad (2.20)$$

Da lla trattazione precedente, sappiamo che $J'_{n+1} = J''_n \setminus [\phi_n(J'_n) \cup \dots \cup \phi_n^{a_{n+1}}(J'_n)]$ e che $J''_{n+1} = J'_n$. Ne consegue che $a_1 \theta_0 + \theta_1 = 1$ e $\theta_{n-1} = a_{n+1} \theta_n + \theta_{n+1}$. Dal lemma 3 si ha che gli intervalli $J'_n, R(J'_n), \dots, R^{q_n-1}(J'_n)$ e $J''_n, R(J''_n), \dots, R^{q_n-1}(J''_n)$ sono tutti disgiunti e ricoprono J . Ne consegue che

$$q_n \theta_{n-1} + q_{n-1} \theta_n = 1 \quad (2.21)$$

Sia p_n la successione di interi tali che $q_n \alpha - p_n = (-1)^n \theta_n$. L'esistenza di tali interi è dovuta al fatto che vale l'equazione (2.20), oltre al fatto che J'_n e J'_{n+1} sono da parti opposte rispetto a c . Si ha $p_0 = 0, p_1 = 1$ e

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= q_{n+1} \alpha - (-1)^{n+1} \theta_{n+1} \\ &= (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) \alpha - (-1)^{n+1} (\theta_n - 1 - a_{n+1} \theta_n) \\ &= a_{n+1} p_n + p_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Inoltre, usando l'equazione (2.21)

$$\begin{aligned} q_{n+1} p_n - q_n p_{n+1} &= q_{n+1} (q_n \alpha - (-1)^n \theta_n) - q_n (q_{n+1} \alpha - (-1)^{n+1} \theta_{n+1}) \\ &= (-1)^{n+1} (q_n \theta_{n+1} + q_{n+1} \theta_n) \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Si ha pertanto che q_n e p_n , se diversi da 1, sono coprimi. Inoltre

$$\left| \frac{q_n}{p_n} - \frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \quad (2.24)$$

Siccome q_n è crescente in n si ha allora

$$\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}. \quad (2.25)$$

Pertanto p_n/q_n converge; il limite è peraltro α , siccome $p_n/q_n = \alpha + (-1)^{n+1} \theta_n/q_n$, e $q_n \rightarrow \infty$. Inoltre si ha che

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}. \quad (2.26)$$

Se $\alpha = k/l$, con k, l interi, allora per la disuguaglianza (2.26) deve valere che $|q_n k - p_n l| < \frac{l}{q_n}$, e perciò < 1 se n è sufficientemente grande: siccome però tutti questi numeri sono interi, e p_n, q_n sono coprimi, ciò è impossibile.

Siccome la distanza $|R^{q_{n-1}}(c) - c|$ è maggiore di quella $|R^{q_n}(c) - c|$, e inoltre $R^j(c) \in$

$(R^{q_{n-1}}(c), R^{q_n}(c)]$ solo se $j > q_n$, deve valere che, se $j > 0$ e $|R^j(c) - c| \leq |R^{q_n}(c) - c|$, allora $j > q_n$. Ne risulta che

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, 0 < q < q_n \quad (2.27)$$

siccome il minimo $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$ è $\frac{1}{q} |R^j(c) - c|$. Si può altrimenti dire che questi rapporti sono in un certo senso le migliori possibili approssimazioni razionali di α entro il denominatore q_n .

A questo punto è possibile ottenere una formula per gli a_n . Riscalando ogni J_n a J in maniera lineare, preservandone l'ordine, ϕ_n diventa una rotazione $R_{\alpha(n)}$. Se $\alpha \in (1/2, 1)$, si ha $a_1 = 1, J_1 = J$ e $\alpha(1) = \alpha = \frac{1}{1+G(\alpha)}$. Se $\alpha \in (0, 1/2]$, si ha $a_1 = a(R_\alpha) + 1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ e $\alpha(1) = \frac{1}{1+G(\alpha)}$. Se $\alpha(1) = 1$, ϕ_1 ha punti fissi e la procedura termina; altrimenti si procede in maniera induttiva come in precedenza. Da quanto visto all'inizio di questa sezione si hanno le formule

$$\alpha(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{1+G(\alpha(n))} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{G(1-\alpha(n))}{1+G(1-\alpha(n))} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \quad (2.28)$$

da cui risulta dopo un breve calcolo induttivo

$$\alpha(n) = \begin{cases} \frac{G^n(\alpha)}{1+G^n(\alpha)} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{1}{1+G^n(\alpha)} & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases} \quad (2.29)$$

Si ottiene dunque da questo la formula

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{G^{n-1}(\alpha)} \right\rfloor \quad (2.30)$$

siccome, come si vide, valgono le equazioni (2.17), (2.19). Vediamo ora un utile lemma:

Lemma 5. *Per ogni sequenza b_n di interi positivi esiste una rotazione tale che $a_n = b_n$ per tutti gli n .*

Dim. L'insieme degli α t.c. $b_1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ è l'intervallo $E_{b_1} = (\frac{1}{b_1+1}, \frac{1}{b_1}]$. La mappa G manda questo intervallo in $[0, 1)$: se $n \geq 2$ si ha pertanto

$$\{G^{n-1}(\alpha), \alpha \in (0, 1)\} = \{G^{n-1}(\alpha), \alpha \in E_{b_1}\} \quad (2.31)$$

e dunque, per via della eq. (2.30),

$$\{a_n(\alpha), \alpha \in (0, 1)\} = \{a_n(\alpha), \alpha \in E_{b_1}\}. \quad (2.32)$$

quindi fissare a_1 non limita le possibili a_n . Posso dunque ottenere iterando queste ultime considerazioni intervalli $E_{b_1 \dots b_n}$ t.c. $a_i = b_i$ per tutti gli $i \in \mathbb{N}, i \leq n$. \square

Vediamo ora che gli a_n definiscono α attraverso l'espansione di quest'ultimo in frazione continua. Infatti

$$\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, a_2, \dots, a_n] := \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}. \quad (2.33)$$

Si ha infatti che

$$[0; a_1, a_2, \dots, a_n, x] = \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}}. \quad (2.34)$$

Ciò si dimostra per induzione: è certamente vero per $n = 1$ e usando le formule induttive viste in precedenza per p_{n+1}, q_{n+1} si ha

$$\begin{aligned} [0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, x] &= [0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} + \frac{1}{x}] \\ &= \frac{(a_{n+1} + \frac{1}{x})p_n + p_{n-1}}{(a_{n+1} + \frac{1}{x})q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{xp_{n+1} + p_n}{xq_{n+1} + q_n}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

se la formula (2.34) vale per n . Ne consegue, siccome si vede che $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha$,

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}. \quad (2.36)$$

mentre se $a_n = \infty$ si ha $\alpha = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}]$.

2.1.4 Il teorema di Poincaré

Siamo ora abbastanza vicini a dimostrare un importante risultato di Poincaré, che attraverso la frazione continua data dagli a_n di un omeomorfismo del cerchio f qualsiasi, permette di associare a questa una rotazione irrazionale. Per fare ciò sono però necessari alcuni risultati ulteriori, legati alle successioni K^+ introdotte nella sezione 2.1.2.

Lemma 6. *Sia $f \in \mathcal{S}(J)$ senza punti periodici. Allora per $n \geq 1$ intero*

$$K_{q_{2n+2}}^+ = K_{q_{2n}}^+ \cdot (K_{q_{2n+1}}^+)^{a_{2n+2}} \quad (2.37)$$

$$K_{q_{2n+1}}^+ = K_{q_{2n-1}}^+ \cdot (K_{q_{2n}}^-)^{a_{2n+1}} \quad (2.38)$$

Dim. Per dimostrare l'equazione (2.37) è sufficiente mostrare che vale

$$\underline{i}_f(f^{q_{2n}+iq_{2n+1}}(c))_{q_{2n+1}} = K_{q_{2n+1}}^+ \quad (2.39)$$

per i intero, $0 \leq i < a_{2n+2}$. Si ricorda infatti che, eccettuati i primi due suoi elementi, K^+ deve risultare uguale all'itinerario di $f^2(c)$. Dal risultato (2.16) si ha che $f^i(c)$ e $f^i(f^{q_{2n}}(c))$ non sono contenuti nell'interno di J_{2n+1} , dato da $(f^{q_{2n}}(c), f^{q_{2n+1}}(c))$, finché $i < q_{2n+1}$. Ne risulta che in questo caso, siccome i suoi due estremi si devono inoltre trovare dalla medesima parte di c , $f^i(c, f^{q_{2n}}(c))$ ha intersezione nulla con $(f^{q_{2n}}(c), f^{q_{2n+1}}(c))$. In particolare, facendo parte di quest'ultimo intervallo, $c \notin f^i(c, f^{q_{2n}}(c))$. Siccome il punto c non è contenuto in questo caso nell'intervallo, tutti i punti di questo avranno lo stesso itinerario, almeno fino al tempo q_{2n+1} poiché $f^{q_{2n}}(c) > c$, ne risulta $\underline{i}_f(x)_{q_{2n+1}} = K_{q_{2n+1}}^+$ per $x \in (c, f^{q_{2n}}(c))$. Siccome $f^{q_{2n}+iq_{2n+1}}(c) \in (c, f^{q_{2n}}(c))$ per $i < q_{2n+2}$, ne segue il risultato (2.37). Il risultato (2.38) si ottiene invece dimostrando, in maniera del tutto analoga, che $\underline{i}_f(x)_{q_{2n}} = K_{q_{2n}}^-$ se $x \in [f^{2n-1}, c)$. \square

Deriva facilmente dal lemma 6 il fatto che, se $f, \tilde{f} \in \mathcal{S}(J)$ non hanno punti periodici,

$$K^+(f) = K^+(\tilde{f}) \iff a_i(f) = a_i(\tilde{f}). \quad (2.40)$$

A questo punto è utile dare la definizione di *numero di rotazione*

Definizione 2.1.7. Sia $f \in \mathcal{S}(J)$. Si dice numero di rotazione di f (o alternativamente di un omeomorfismo del cerchio g) il numero reale dato da

$$\rho(f) = [0; a_1, a_2, \dots,] \quad (2.41)$$

se gli a_i sono tutti finiti, mentre nel caso sia $a_n = \infty$

$$\rho(f) = [0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]. \quad (2.42)$$

Veniamo ora finalmente al dunque.

Teorema 7. (Poincaré)

Sia $f \in \mathcal{S}(J)$ senza punti periodici. Allora esiste un'unica rotazione R e una mappa h continua, monotona e suriettiva t.c.

$$h \circ f = R \circ h \quad (2.43)$$

Una funzione di tale tipo è detta semiconiugazione, e f ed R si dicono semiconiugate. Scrivendo $R = x + \alpha \pmod{1}$, si ha α irrazionale e pari a $\rho(f)$, numero di rotazione di f .

Dim. Dal lemma 5, esiste una rotazione R tale che $a_i(R) = a_i(f)$, e pertanto $K^+(R) = K^+(f)$. Poniamo $c_f = c(f)$ e $c_R = c(R)$. Per via del lemma 2 la mappa h definita tra l'orbita $O_f(c_f)$ e $O_R(c_R)$ da $h(f^n(c_f)) = R^n(c_r)$ è quindi crescente monotonicamente. R non ha punti periodici, e dunque, per quanto si vide all'inizio di questa sezione, $O_R(c_R)$ è densa in J . Posso quindi estendere h con continuità alla chiusura F di $O_f(c_f)$. Sia $I = (x, y)$ una componente connessa di $J \setminus F$: essendo h monotona in F , si ha $h(x) \leq h(y)$. In realtà, si dimostra che $h(x) = h(y)$. Infatti, se fosse $h(x) < h(y)$, e

poiché $O_R(c_R)$ è densa in J , si avrebbe un n t.c. $h(x) < R^n(c_R) < h(y)$. Si ha inoltre che $f^n(c_f) < x$ oppure $f^n(c_f) > y$, poiché per definizione i è disgiunto da F : poiché tuttavia $h(f^n(c_f)) = R * n(c_R)$, si giunge in questo modo ad una contraddizione. Si può dunque estendere a I la mappa h ponendo il suo valore uguale a $h(x)$ in ogni punto, e ottenere così che siano soddisfatte le condizioni espresse nella tesi. \square

L'usuale definizione di numero di rotazione viene data in maniera piuttosto diversa da quella esposta in questa discussione. Si ponga g omeomorfismo del cerchio e sia \hat{g} un suo *lift*. Se g è una rotazione di α , il suo *lift* sarà semplicemente una traslazione $T_\alpha = x + \alpha$. Se \hat{h} è il *lift* della semiconiugazione secondo Poincaré di g, R_α , si ha che $\hat{h} \circ \hat{g} = T_\alpha \circ \hat{h}$. Si ha dalla definizione di *lift* che $\hat{h} = Id + \phi$, con ϕ funzione periodica di periodo 1; ne risulta che $\hat{g}^n(x) + \phi(\hat{g}^n(x)) = x + \phi(x) + n\alpha$. Essendo $\phi(x)$ limitata, si ottiene

$$\rho(g) = \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{g}^n(x) - x}{n} \quad (2.44)$$

che è la definizione più comunemente utilizzata di numero di rotazione.

Si osserva che se g non ha punti periodici allora $\rho(g)$ è irrazionale, mentre se ne possiede almeno uno, di periodo q_n , allora $a_{n+1} = \infty$ e perciò $\rho(g) = \frac{p_n}{q_n}$ è razionale. Ne consegue il

Lemma 8. *Un omeomorfismo del cerchio g preservante l'ordine ha punti periodici se e solo se $\rho(g) \in \mathbb{Q}$.*

Inoltre, si può dimostrare che la mappa $g \mapsto \rho(g)$ è continua. Definiamo ora il concetto di insieme di Cantor.

Definizione 2.1.8. Si dice insieme di Cantor un insieme chiuso, senza punti isolati e senza componenti connesse.

Vediamo infine un ultimo risultato sulle orbite di funzioni non aventi punti periodici.

Lemma 9. *Se un omeomorfismo del cerchio g non ha punti periodici, esiste un insieme di punti K t.c. $K = \omega(z) = \alpha(z)$ per ogni $z \in S^1$. Se K ha punti interni allora $K = S^1$, altrimenti K è un insieme di Cantor.*

Dim. Sia $z \in S^1$ e $K = \omega(z).K$ non è vuoto, è invariante e, poiché S^1 è compatto, è compatto anch'esso. Sia $y \in S^1 \setminus K$: l'orbita di y ha al più un elemento in ciascuna componente connessa di $S^1 \setminus K$, poiché in caso contrario una delle componenti di $S^1 \setminus K$ sarebbe mappata in sè stessa, dopo un certo numero di iterazioni di g , e l'omeomorfismo avrebbe punti periodici. Dunque $\omega(y), \alpha(y) \subseteq \omega(z) = K$, e similmente per $\alpha(z)$. Siccome in maniera del tutto analoga si dimostra il viceversa, si ha che $K = \omega(x) = \alpha(x) \forall x \in S^1$ e perciò K non contiene sottoinsiemi invarianti. Infine, per definizione di ω -limite, e essendo g invertibile, K non può avere punti isolati, e se possiede un punto interno allora tali sono tutti i suoi punti. \square

poiché K è un insieme non nullo, invariante e compatto che non possiede sottoinsiemi non nulli, invarianti e compatti, lo si definisce insieme minimo (o *minimal set*), e si può dunque affermare che ogni omeomorfismo possiede un unico insieme minimo. Peraltro, siccome l'orbita di una rotazione irrazionale è densa in S^1 , affinché la semiconiugazione secondo Poincaré possa essere una coniugazione (i.e. una semiconiugazione che è omeomorfismo), dovrà essere $K = S^1$.

2.2 La teoria di Denjoy

Per completezza, poiché ne si farà uso nelle successive sezioni, si espone un teorema dovuto a Denjoy che permette di determinare in quali circostanze la semiconiugazione tra mappe senza punti periodici e rotazioni irrazionali sia un omeomorfismo, ossia una coniugazione. Si inizia questa sezione osservando che se la mappa h descritta da Poincaré non è coniugazione, allora almeno un punto x del cerchio avrà un intervallo J come controimmagine, e valendo $h(f^n(J)) = R^n(x)$, si ha che $J, f(J), f^2(J), \dots$ dovranno essere disgiunti. Da ciò deriva la definizione di *wandering interval*:

Definizione 2.2.1. Si dice *wandering interval* della mappa f un intervallo J t.c. $J, f(J), \dots$ sono disgiunti a due a due, e il loro ω -limite non è uguale a un'orbita periodica.

Dunque siccome si vede che f è coniugata a rotazione irrazionale se e solo se non possiede dei *wandering interval*, ci si concentrerà nei prossimi lemmi e teoremi su quest'ultima proprietà.

Definizione 2.2.2. Sia f funzione $\in C^1$ (sul cerchio o su $[0, 1]$) e T un intervallo in cui $f'(x) \neq 0$ (i.e. f è diffeomorfa su T). Si dice distorsione di T

$$\text{Dist}(T, f) = \sup_{x, y \in T} \log \frac{|f'(x)|}{|f'(y)|} \quad (2.45)$$

Lemma 10. Siano f, T come sopra. Allora

$$\text{Dist}(T, f^n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}(f^i(T), f) \quad (2.46)$$

Dim. Dalla regola della derivata di funzione composta

$$\log \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f^i)'(x)}{(f^i)'(y)} \quad (2.47)$$

da cui, essendo $(f^i)'(x), (f^i)'(y) \in T$, la tesi □

Se f ha tali proprietà su tutto il cerchio (o su $[0, 1]$), e se la funzione $x \rightarrow \log |f'(x)|$ è una funzione di Lipschitz con costante C . Allora siccome $\text{Dist}(J, f) \leq C|J|$ per ogni intervallo J , varrà per ogni T

$$\text{Dist}(T, f^n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}(f^i(T), f) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|. \quad (2.48)$$

Se tutti questi f^i sono disgiunti, varrà quindi che

$$\text{Dist}(T, f^n) \leq C \quad (2.49)$$

Vediamo ora una definizione importante per il seguito

Definizione 2.2.3. Sia \mathcal{P} l'insieme delle partizioni di un intervallo $[a, b]$ dei reali, e si indichi x_0, \dots, x_{n_p} una singola partizione. Si dice variazione totale di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la quantità

$$\text{Var}_{[a,b]} f = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n_p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \quad (2.50)$$

Lemma 11. Sia la variazione totale su S^1 (o $[0, 1]$) tale che $\text{Var}(x \rightarrow \log |f'(x)|) \leq C$ finito. Allora per ogni T tale che $T, f(T), \dots$ sono disgiunti, si ha che

$$\text{Dist}(T, f^n) \leq C \quad (2.51)$$

Dim. Per definizione di variazione, $\text{Var}_T(x \rightarrow \log |f'(x)|) \geq \text{Dist}(T, f)$. poiché gli intervalli $f^i(T)$ sono disgiunti, vale la disuguaglianza con la variazione totale:

$$\text{Dist}(T, f^n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}(f^i(T), f) \leq C \quad (2.52)$$

come richiedeva la tesi. □

Arriviamo dunque all'ultimo risultato a noi utile:

Teorema 12. (Denjoy)

Sia $f : S^1 \rightarrow S^1$ diffeomorfismo $\in C^1$ e la sua derivata abbia variazione limitata; allora f non possiede un "wandering interval".

Dim. Sia J un wandering interval di f . Siccome $\sum_n |f^n(J)| \leq 1$, si ha $|f^n(J)| \rightarrow 0$. Siano q_n come definiti nelle precedenti sezioni e $T = [f^{-q_n}(J), J]$ il più piccolo intervallo contenente $f^{-q_n}(J)$ e J , ma non $f(J)$. Deriva dal lemma 4 che $T, f(T), \dots, f^{q_n-1}(T)$ sono disgiunti, per cui $\text{Dist}(T, f_n^q) \leq \text{Var}(\log |f'(x)|)$. Siccome per il teorema di Lagrange esistono $x \in J$ e $y \in f^{-q_n}(J)$ tali che

$$|f'(x)| = \frac{|f^{q_n}(J)|}{|J|} \text{ e } |f'(y)| = \frac{|J|}{|f^{-q_n}(J)|} \quad (2.53)$$

si ha che

$$\frac{|f'(y)|}{|f'(x)|} = \frac{|J|^2}{f^{q_n}(J)|f^{-q_n}(J)|} \leq \exp(\text{Dist}(T, f_n^q)) \leq \exp(\text{Var}(\log |f'(x)|)) \quad (2.54)$$

ma siccome $f^n(J)$ va a zero per $n \rightarrow \infty$, si è così giunti ad un assurdo. □

Un'ultima importante osservazione è che questo teorema non dipende direttamente dal fatto che f sia funzione C^1 , ma solo dal fatto che la funzione $\log |f'(x)|$ sia estendibile a tutto il dominio di f , e tale estensione abbia variazione limitata.

Capitolo 3

Alcuni risultati sui biliardi di onde interne

In questo capitolo si introduce l'approccio matematico formale al problema geometrico degli *internal wave billiards* sviluppato in [10]. Si discute in questo articolo in particolare l'applicazione dei teoremi di Poincaré appena esposti ad alcune tipologie di biliardi, ricavando le proprietà delle orbite e la loro natura da alcune caratteristiche di una mappa di primo ritorno ad esse associata.

3.1 Comportamento delle orbite per alcune geometrie

3.1.1 Descrizione del problema

Si consideri la dinamica dei raggi di onde interne in un contenitore costituito da un dominio Ω . Come si è già discusso nel primo capitolo, il primo passo per descrivere sistemi di questo tipo è lo studio della dinamica dei raggi, ossia del moto libero di una particella entro il dominio, soggetta alla regola (1.44) di riflessione sul bordo $\partial\Omega$: l'angolo θ tra la traiettoria e la direzione verticale viene trasformato in seguito alla riflessione in $\theta' \in \{-\theta, \pi - \theta\}$. Si definiscono riflessioni *orizzontali* quelle in cui $\theta' = -\theta$, e *verticali* quelle in cui $\theta' = \pi - \theta$: quale delle due avvenga dipende da quale dà luogo a una traiettoria che rimane dentro al dominio, ossia dal fatto che sia (in valore assoluto) θ risp. minore o maggiore dell'angolo della tangente a Ω nel punto di riflessione. Tralasciando la variazione di velocità che avviene in seguito a ogni riflessione,

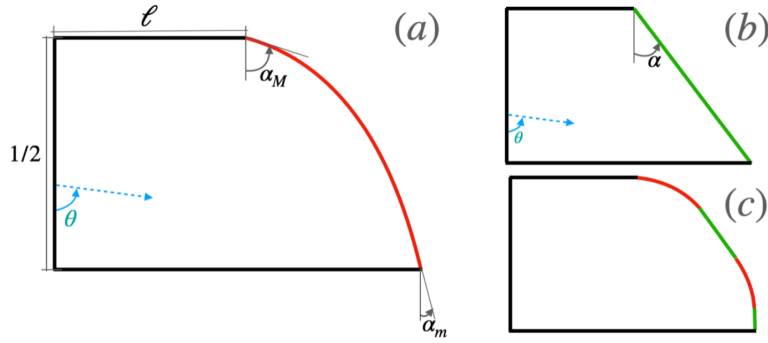


Figura 3.1: Esempi (a), (b), (c) dei domini Ω di cui si tratta in questa sezione. Immagine tratta da [10].

possiamo pensare di studiare le traiettorie da un punto di vista prettamente combinatorio e topologico: poniamo dunque $v = 1$ costante, per ottenere un sistema che definiamo biliardo di onde interne, o *internal wave billiard*. In questa sezione ci si occuperà di domini delimitati da curve che sono sostanzialmente generalizzazioni di trapezi rettangoli, costituite cioè da tre segmenti che intersecandosi formano angoli retti, e da una curva a tratti liscia e concava, strettamente decrescente, al posto del lato obliquo del trapezio, come quelle disegnate in *fig. 3.1*. Come si vede in figura, si indica con α_M il massimo angolo tra la verticale e la tangente alla curva, e con α_m quello minimo. Si definisce θ l'angolo che la traiettoria compie con la verticale, che si assume avere la direzione del segmento a sinistra in *fig. 3.1*, e ci si restringe per semplicità al caso in cui $\theta \in (\alpha_M, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi/2 + \alpha_M)$, in modo tale che le riflessioni sulla parte curva siano sempre riflessioni orizzontali. Si possono sempre assumere unità di misura tali che il segmento verticale abbia lunghezza $1/2$. Consideriamo una particella che parta da questo, e assumiamo θ come parametro della traiettoria. Infine, risulta comodo scambiare, nella trattazione che ci si appresta a compiere, le direzioni verticale e orizzontale rispetto a quanto finora descritto.

3.1.2 *Billiard unfolding* e mappa di Poincaré

Definiamo attraverso una procedura di *billiard unfolding* una quadruplica copia di Ω , Ω_4 : una traiettoria entro Ω_4 che ne raggiunga il bordo viene mandata nel punto opposto di tale bordo, con velocità nella medesima direzione (si veda *fig. 3.2*). Con punto opposto si intende, nel caso di bordo destro o sinistro, il punto che possiede medesima ordinata e ascissa opposta, mentre nel caso del bordo in alto o in basso quello con medesima ascissa e ordinata opposta, come in figura. In termini del dominio Ω_4 , le condizioni espresse in precedenza sul dominio risultano essere le seguenti: il bordo superiore di Ω_4 è dato dal grafico di una funzione $b : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^+$ che è pari, derivabile a tratti con derivata continua, concava e decrescente in $[0, 1/2]$. Definendo $\alpha(x) := \arctan(b'(x))$, come è possibile fare in quasi tutti i punti di $(-1/2, 1/2)$, dalle condizioni precedenti si vede che α è una funzione decrescente con $\alpha(-1/2) = \alpha_M$, $\alpha(1/2) = -\alpha_M$ e $\alpha(0) = \alpha_m$. Definiamo la mappa di primo ritorno come la mappa che manda ogni punto x del segmento orizzontale Σ , rappresentata in *fig. 3.2*. Per via dell'identificazione tra i suoi

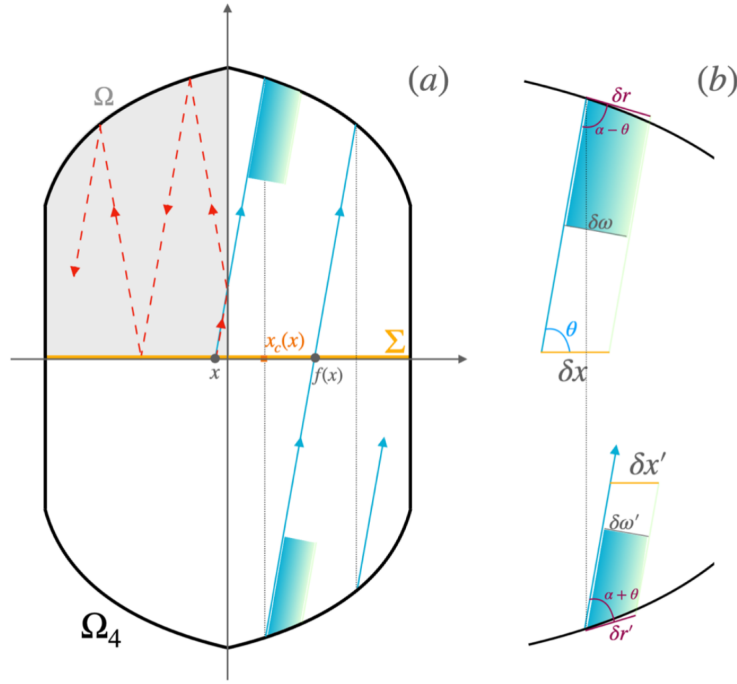


Figura 3.2: In (a) si raffigura il dominio Ω_4 e una traiettoria entro questo. f è la mappa di Poincaré, e x_c il punto descritto nel lemma 13, del quale si ha in (b) un'illustrazione. Immagine tratta da [10].

estremi da noi operata, Σ ha la topologia di un cerchio, e pertanto f è un omeomorfismo del cerchio. Poiché le traiettorie che partono da $[0, 1/2]$ sono equivalenti a quelle che partono da $[-1/2, 0]$ a meno di un'inversione della direzione, possiamo restringerci al solo caso di $\theta \in (\alpha_M, \pi/2)$. Alternativamente, si può dire che la traiettoria nel tempo futuro di un punto x corrisponde alla traiettoria di $-x$ nel passato. Vediamo ora un lemma riguardante la derivata della mappa di Poincaré.

Lemma 13. *Sia $x_c(x)$ l'ascissa del primo punto d'incontro della traiettoria con il bordo superiore del dominio Ω . Allora, per tutti i punti x ove $\alpha(x_c(x))$ è definito, si ha*

$$f'(x) = \frac{\sin(\theta + \alpha(x_c(x)))}{\sin(\theta - \alpha(x_c(x)))} \quad (3.1)$$

Dim. Sia x tale che in un suo intorno è ben definita $\alpha(x_c(x))$ e si prenda un δx sufficientemente piccolo, così che $[x, \delta x]$ sia contenuto in tale intorno. L'ampiezza del fascio di traiettorie che partono da $[x, \delta x]$ è $\delta w = \sin(\theta)\delta x$, e proietta dunque sul bordo superiore di Ω un arco di lunghezza δr per cui vale

$$\delta r = \frac{\delta w}{\sin(\theta - \alpha)} + o(\delta x) = \delta x \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta - \alpha)} + o(\delta x). \quad (3.2)$$

L'arco viene poi proiettato nei punti opposti di $\partial\Omega$, e pur avendo medesima lunghezza δr , avrà ora un'ampiezza che si può calcolare, invertendo il ragionamento precedente, da

$\delta w' = \sin(\theta + \alpha) + o(\delta x)$. esso intersecherà infine nuovamente Σ individuando su questo l'intervallo $[f(x), f(x + \delta x)]$, di lunghezza pari a $\frac{\delta w}{\sin(\theta)}$ data pertanto da

$$f(x + \delta x) - f(x) = \delta x \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} + o(\delta x). \quad (3.3)$$

che restituisce la tesi nel limite $\delta x \rightarrow 0$. \square

3.2 Un teorema sulle orbite

Ricordando i vari teoremi esposti nel capitolo 2 possiamo ora enunciare un teorema sulle possibili orbite all'interno di domini del tipo descritto nelle sezioni precedenti.

Teorema 14. *Sia $\rho(f)$ il numero di rotazione di $f : S^1 \rightarrow S^1$. Allora*

1. *Se $\rho(f)$ è irrazionale, f è coniugata a una rotazione irrazionale del cerchio. f ammette un unico insieme minimo, che è quindi denso in S^1 . Tutte le sue orbite sono dunque dense in S^1 .*
2. *Se $\rho(f)$ è razionale, scriviamo $\rho(f) = p/q$, con p, q primi tra loro (oppure $p = 0, q = 1$). Esistono allora due insiemi*

$$\mathcal{P}^\pm := \bigcup_{i=0}^{q-1} \mathcal{P}_i^\pm \quad (3.4)$$

con \mathcal{P}_i^\pm intervalli chiusi. Tutti i punti di tali insiemi sono periodici con periodo q . inoltre

$$f(\mathcal{P}_i^\pm)^n = \mathcal{P}_{i+pn}^\pm \quad (3.5)$$

e tutti i punti in $S^1 \setminus \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^-$ non sono periodici. In questo caso si hanno due possibilità:

- (a) *Entrambi gli insiemi \mathcal{P}_i^\pm si riduce a un punto x_i^\pm , e quindi tali insiemi sono orbite periodiche. Per questi punti, nell'ordine ciclico di S^1 , si impone*

$$x_0^- \leq x_0^+ \leq x_1^- \leq x_1^+ \leq \dots \leq x_{q-1}^- \leq x_{q-1}^+ \leq x_0^-. \quad (3.6)$$

Si ha che $\forall x \in (x_i^-, x_i^+)$ vale $f^n(x) \in (x_{i+pn}^-, x_{i+pn}^+)$, e inoltre $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nq}(x) = x_i^+$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^{nq}(x) = x_i^-$.

Al contrario, $\forall x \in (x_i^+, x_{i+1}^-)$ vale che $f^n(x) \in (x_{i+pn}^+, x_{i+pn+1}^-)$, e inoltre $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nq}(x) = x_{i+1}^+$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^{nq}(x) = x_{i+1}^-$. Ne risulta dunque che $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ (eventualmente coincidenti) sono risp. attrattore e repulsore del sistema, entrambi unici e globali.

- (b) *Tutti i \mathcal{P}_i^\pm sono intervalli non degeneri, e $\mathcal{P}_i^+ = \mathcal{P}_i^- =: [x_i^L, x_i^R]$. Questo caso si può verificare solo se il bordo superiore di Ω include segmenti. I punti sono ordinati secondo*

$$x_0^L < x_0^R \leq x_1^L < x_1^R \leq \dots \leq x_{q-1}^L < x_{q-1}^R \leq x_0^L \quad (3.7)$$

con la proprietà ovvia che, se per un qualche n vale l'uguaglianza tra x_n^R e x_{n+1}^L , allora essa deve valere per ogni n minore di q . Nel caso ciò avvenga, tutti i punti sono periodici di periodo q ; altrimenti vale che, $\forall x \in (x_i^R, x_{i+1}^L)$, $f^n(x) \in (x_{i+pn}^R, x_{i+pn+1}^L)$, e inoltre $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nq}(x) = x_i^R$ e $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^{nq}(x) = x_{i+1}^L$. Le orbite $\{x_0^R, x_1^R, \dots, x_{q-1}^R\}$ e $\{x_0^L, x_1^L, \dots, x_{q-1}^L\}$ sono quindi rispettivamente l'unico attrattore e l'unico repulsore (non globali) del sistema.

Dim. Da quanto visto nel capitolo 2, la teoria di Poincaré afferma che, per ogni f omeomorfismo del cerchio preservante l'ordine, si hanno due possibili casi:

1. $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$: in questo caso f è semiconiugata a una rotazione irrazionale di un angolo pari a $\rho(f)$ (Teorema 7). Inoltre essa ammette un unico insieme minimo, come si vede nel lemma 9.
2. $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$: come recita il lemma 8, ciò avviene se e solo se f ha un punto periodico di periodo q . Per il lemma 1, tutti i punti di S^1 tendono dunque a un'orbita periodica di periodo q . Se si ordinano i punti di una tale orbita in maniera da preservarne l'ordine come x_0, x_1, \dots, x_{q-1} , si ha che

$$f^n(x_i) = x_{i+pn} \quad (3.8)$$

dalla definizione di numero di rotazione. Dunque

$$f^n([x_i, x_{i+1}]) = [x_{i+pn}, x_{i+1+pn}]. \quad (3.9)$$

Per dimostrare il primo punto del teorema 14, è dunque sufficiente mostrare che la semiconiugazione tra g e la rotazione è in realtà una coniugazione: il teorema 12 di Denjoy esposto in precedenza afferma che, se $\log |f'|$ può essere esteso a una mappa con variazione limitata, ciò si verifica. Vediamo dunque un lemma che garantisce la validità di tale ipotesi.

Definizione 3.2.1. Si dice *break point* di f' un qualsiasi punto in cui

$$\Delta f'(x) = \lim_{x \rightarrow x^+} f'(x) - \lim_{x \rightarrow x^-} f'(x) \neq 0. \quad (3.10)$$

Lemma 15. *L'omeomorfismo f descritto in precedenza è tale che $\lim_{s \rightarrow x^\pm} f(s)$ esiste per ogni $x \in S^1$. Inoltre f' ha un break point in cui cresce, che indichiamo con z_0 , e al più un insieme numerabile di break point $z_i, i > 0$ in cui decresce. In tutti gli altri punti essa è continua, ed è concava sull'arco $S^1 \setminus \{z_0\}$. Infine $\log f'$ può essere esteso a una mappa con variazione limitata.*

Dim. La derivata b' della funzione b definita in precedenza ha esattamente un *break point* \bar{z}_0 ove essa aumenta e un insieme numerabile di *break point* \bar{z}_i ove essa diminuisce. Negli altri punti, essa è continua e decrescente. Dal lemma 13 sappiamo che $f' = g_\theta \circ \arctan \circ b' \circ x_c$, con

$$g_\theta := \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} \quad (3.11)$$

è una funzione $[-\alpha_M, \alpha_M] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua e strettamente crescente, e la mappa x_c è quella definita in precedenza, la quale risulta essere un omeomorfismo del cerchio preservante l'ordine. Tra i *break point* di b' e f' si ha dunque una corrispondenza, e nei

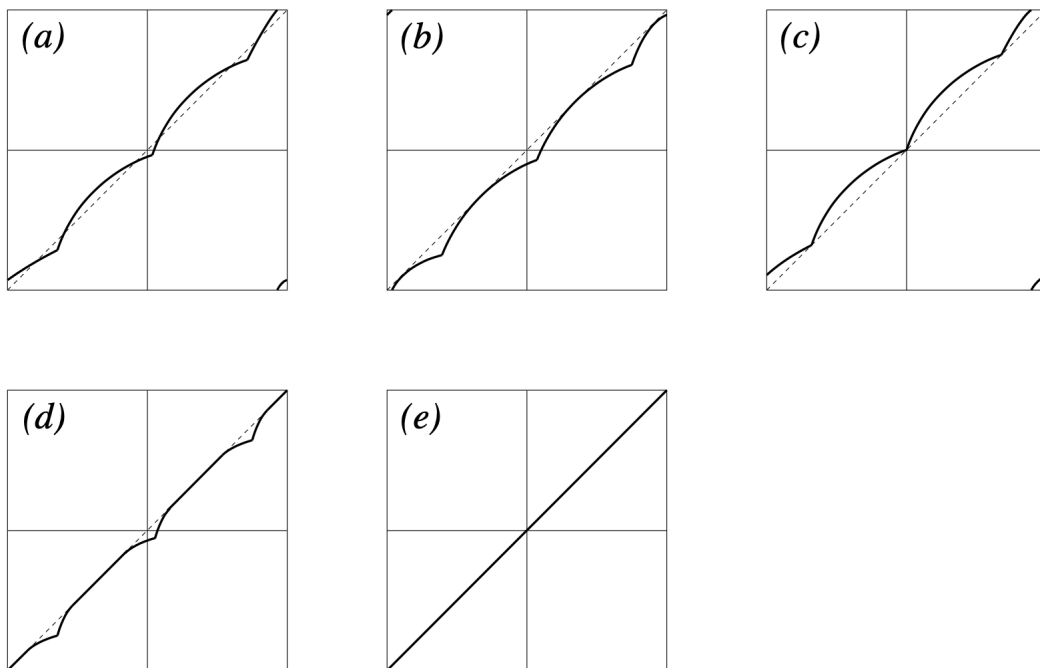


Figura 3.3: L'immagine raffigura le varie possibilità per il grafico della funzione f descritta in questa sezione. Tratta da [10]

punti che stanno in mezzo a questi le due funzioni hanno le stesse proprietà di monotonicità. Estendiamo f' ai *break point* ponendo $f'(z_i) := \lim_{s \rightarrow z_i^+} f'(s)$. Ovviamente $\text{Var}_{S^1 \setminus \{z_0\}}(\log f') = \Delta \log f(z_0)'$, e dunque $\text{Var}_{S^1}(\log f') = 2\Delta \log f(z_0)' < \infty$; il lemma è così dimostrato. \square

Veniamo ora al secondo punto del teorema. Dai teoremi di Poincaré, come si è ricordato poco sopra, f ha almeno un'orbita periodica di periodo q , ossia f^q ha almeno q punti fissi. Dal precedente lemma, e dal fatto che

$$(f^q)'(x) = \prod_{k=0}^{q-1} f'(f^k(x)) \quad (3.12)$$

si vede che f' ha al più q *break points* in cui cresce: al di fuori di tali, essa è continua e concava. Gli unici casi possibili per il grafico di f sono dunque quelli esposti in *fig. 3.2*. Si osserva che quindi l'insieme dei punti fissi di f^q è dato al più da $2q$ intervalli, eventualmente degeneri. Per via della concavità di f , il numero di tali intervalli è $2q$ se e solo se ognuno di essi corrisponde a un singolo punto x_i^\pm . Se chiamo tali punti fissi x_i^+ se sono attrattivi, x_i^- se sono repulsivi, noto facilmente (*fig. 3.2 (a)*) che essi si alternano rispetto all'ordine circolare: posso dunque ordinare tali punti secondo quanto descritto nel punto 2-(a) del teorema. Per via di quanto esposto in precedenza, vale inoltre che $f^n(x_i^\pm) = x_{i+pn}^\pm$. Se $f^q(x)$ è tangente alla retta $y = x$ dal basso, come in *fig. 3.2(b)*, allora è chiaro che i punti saranno soltanto q , e saranno attrattivi da destra e da sinistra repulsivi; il viceversa vale per il caso di tangenza dall'alto, rappresentato in *fig. 3.2(c)*. La stessa cosa deve dunque essere valida per tutti i punti dell'orbita periodica di f ; ne

consegue che f possieda una sola orbita periodica. Infine si supponga che i \mathcal{P}_i^\pm non siano degeneri, e li si indichi con \mathcal{P}_i^\pm ; si pongano poi $\mathcal{P}^+ = \bigcup_{i=0}^{q-1} \mathcal{P}_i^+$ e $\mathcal{P}^- = \bigcup_{i=0}^{q-1} \mathcal{P}_i^-$, e si prenda il più grande tra gli intervalli chiusi contenuti in $\mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^-$: si indichi quest'ultimo con \mathcal{P}_0^+ . Se esso è $\neq S^1$, allora chiaramente tutti gli intervalli $f^i(\mathcal{P}_0^+)$ sono disgiunti e chiusi, e, per via della concavità di f , non possono esservi altri punti periodici oltre a quelli di tale intervallo (*fig. 3.2(d)*). Gli estremi destri di tali intervalli saranno ovviamente punti attrattivi, mentre saranno repulsivi quelli sinistri. Se infine $\mathcal{P}_0^+ = S^1$, tutti i punti sono periodici (*fig. 3.2(e)*). In entrambi i casi indichiamo $\mathcal{P}_i^+ = \mathcal{P}_i^- = f^i(\mathcal{P}_0^+)$. Infine, è chiaro che il caso di \mathcal{P}_i^\pm non degeneri si verifica soltanto quando f non è strettamente concava, il che si verifica solo se non lo è b . \square

Capitolo 4

Il biliardo a forma di parabola

Il caso del biliardo di onde interne a forma di parabola è stato studiato in passato da un punto di vista semi-qualitativo e sperimentale, in particolare simulandone il comportamento per raggi di varia inclinazione[14]. In questa sede si propone una trattazione matematica del problema geometrico che ne sta alla base, ottenendo qualche risultato interessante sulla falsariga di [10]. La trattazione di questi aspetti qui elaborata non è esaustiva, e lascia aperti alcuni interrogativi su cui ci si propone di lavorare nel prossimo futuro.

4.1 Qualche calcolo iniziale

4.1.1 Riscaldamento della parabola generica al caso standard

A differenza di quanto svolto in molti articoli sui biliardi, per descrivere le traiettorie si utilizzerà il parametro di coefficiente angolare, e non quello della *altezza massima* della parabola. A tale scopo è necessario introdurre un riscaldamento della parabola generica. Si consideri una parabola di equazione

$$y = p - qx^2 \tag{4.1}$$

tagliata da un segmento orizzontale di equazione $y = 0$. Essa rappresenta il bordo di un biliardo di onde interne bidimensionale entro cui si formano traiettorie di coefficiente angolare a a partire da punti iniziali sul segmento di base, indicati da X_i . È facile porre

$y' = \frac{y}{p}$, $x' = \sqrt{\frac{q}{p}}x$ per ottenere l'equazione

$$y' = 1 - x'^2 \quad (4.2)$$

che si assumerà dunque da questo momento caratterizzare senza perdita di generalità la parabola. Infatti riscalamenti come quelli introdotti preservano l'identità tra gli angoli, e conseguentemente è preservata la legge geometrica di riflessione 1.24. I risultati ottenuti in questo caso sono dunque validi per ogni sistema, a condizione che il riscaldamento coinvolga anche il coefficiente angolare dei segmenti delle caratteristiche, il quale diviene $a' = \sqrt{\frac{1}{pq}}a$, e del punto iniziale, che ovviamente andrà in $X'_i = \sqrt{\frac{q}{p}}X_i$. Svolgendo tale sostituzione all'indietro è possibile mappare qualsiasi traiettoria nella parabola 4.2 al caso generico. Nel seguito si darà per scontata tale procedura, facendo cadere gli apici delle grandezze appena descritte. Possiamo restringerci inoltre al caso di a positivo: i valori negativi sono infatti facilmente descrivibili invertendo X_i , grazie alla simmetria del problema rispetto all'asse verticale centrale della parabola. Si evidenzia che a parità di X_i l'inversione di coefficiente angolare corrisponde invece a un'inversione dell'asse dei tempi. In questo modo il passato di una traiettoria con pendenza a e che si origina da X_i è descritto dal futuro, ribaltato sull'asse delle y , di una traiettoria con il medesimo coefficiente angolare che parte invece da $-X_i$. Se ad esempio quest'ultima presenta un attrattore, la prima presenterà un repulsore della stessa forma, ma ribaltato rispetto all'asse delle y .

4.1.2 Caso *subcritico*: $|a| \geq 2$

Come osservato già in [14], il caso con coefficiente angolare maggiore o uguale a 2 è di semplice risoluzione. Il valore massimo del modulo del coefficiente angolare della tangente alla parabola (4.2) è infatti proprio pari a 2, e dunque in questa situazione non è possibile che si verifichi una riflessione dell'angolo delle traiettorie sulla direzione orizzontale. Pertanto queste procederanno tutte per successive riflessioni orizzontali, avanzando verso destra (o verso sinistra per coefficienti angolari negativi) e tendendo ad accumularsi nei due punti estremi del segmento di base (si veda *fig.4.1*). Per $a \geq 2$ il punto $(1,0)$ sarà quindi l'attrattore delle traiettorie, e $(-1,0)$ il loro repulsore. Il viceversa sarà valido per le traiettorie con $a \leq -2$. Ben più complesso e interessante è il caso in cui si possano avere riflessioni dell'angolo sull'orizzontale: ad esso ci si dedicherà per la parte restante di questo capitolo.

4.1.3 Caso *supercritico*: $|a| < 2$

Se $|a| < 2$ esiste una regione della parabola ove le traiettorie riflettono i loro angoli rispetto all'orizzontale: come si comprende da un facile calcolo delle derivate, essa è data dai due intervalli delle ascisse $[-1, -\frac{a}{2}]$ e $[\frac{a}{2}, 1]$, ove la pendenza della tangente è maggiore in modulo del parametro a . Allo scopo di caratterizzare le orbite del sistema, si studia il comportamento delle coordinate x dei punti di riflessione delle traiettorie. Si consideri una particella che parte dal segmento di base del biliardo, seguendo una traiettoria lineare di equazione $y = ax + b$ e riflettendosi sul bordo curvo nel punto P_0 , con coordinata x pari a x_0 . Se la successiva riflessione avviene nella parte curva del

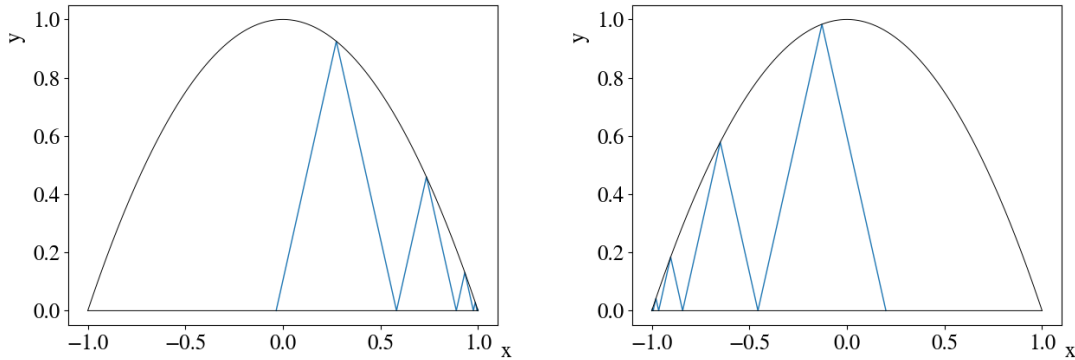


Figura 4.1: *Traiettorie nel biliardo in condizione subcritica. A sinistra: caso con $a = 3$, $X_i = -0.035$. A destra: caso con $a = -3$, $X_i = 0.199$*

biliardo, per poter trovare l'ascissa del punto P_1 ove questa avviene, dovremo risolvere l'equazione

$$-a(x - x_0) + 1 - x_0^2 = 1 - x^2. \quad (4.3)$$

di cui ovviamente una radice è x_0 , e l'altra sarà il valore da noi cercato. Sia x_1 quest'ultimo: dalle formule di Viète deriva

$$x_1 = -x_0 + a \quad (4.4)$$

che è altrettanto vero per tutte le eventuali successive riflessioni sul bordo curvo, a meno di un'inversione del segno del coefficiente a dovuta a una riflessione verticale: essa descrive, come si vede, qualcosa di simile a una semplice progressione aritmetica, la quale prosegue fintanto che la traiettoria non interseca nuovamente la base. Siano x_n le ascisse di tali punti di riflessione P_n precedenti al primo ritorno sul segmento di base. Le riflessioni verticali sulla parte curva avvengono quando $x_n \in [-a/2, a/2]$. Dato un P_i ove avviene una riflessione verticale, la differenza $x_{i-1} - x_{i+1}$ sarà sempre pari a $2a$, come da eq.(4.4): varrà infatti $x_i = -x_{i-1} + a$, $x_{i+1} = -x_i - a$. È quindi chiaro che c'è un solo evento di questo tipo tra due riflessioni della traiettoria sul segmento di base.

4.1.4 Riflessioni dentro la parabola

Per facilitare l'individuazione di una mappa di Poincaré che permetta di studiare le caratteristiche delle orbite, si può pensare, dopo ogni riflessione sul bordo del biliardo, di connettere in qualche modo le due parti della parabola aventi x positiva e negativa. A tale scopo possiamo invertire le coordinate x dopo ciascuna riflessione sul bordo curvo: per descrivere tale operazione parleremo nel seguito di *ribaltamento*. Si avranno in questo modo dei segmenti che, giunti a un punto sulla parabola di ascissa x_n con una data pendenza a , vengono mandati in $-x_n$, e da lì riprendono il loro percorso con la medesima pendenza, fino a tornare, dopo un numero R_B di ribaltamenti, al segmento di base. Questo procedimento non è indolore: in effetti, se R_B è dispari non è difficile intuire che le coordinate x sulla base saranno, al ritorno della traiettoria, completamente invertite. Per tenere traccia di quali sono le traiettorie del sistema "vero" dovrò tenere conto della parità o disparità del numero di riflessioni sul bordo tra due ritorni sulla base. Tale fatto

non ha conseguenze sulla eventuale periodicità o attrattività delle orbite individuate: come si potrà vedere, tuttavia, alcune di esse avranno un periodo differente da quello che possiedono nel sistema “vero”. Sempre a causa di questo, si manifesteranno inoltre effetti di “sdoppiamento” degli attrattori. Di tutto ciò si proverà a rendere conto in seguito. A fronte di questi problemi ulteriori, dal procedimento appena illustrato si ottiene però un notevole vantaggio nello studio delle riflessioni sul bordo curvo: dalla 4.4 deriva infatti in questo caso la semplice regola

$$x_{n+1} = a + x_n. \quad (4.5)$$

4.1.5 La mappa di primo ritorno

Per separare meglio il comportamento semplice dato dalla (4.5) da quello che avviene sulla base, si può modificare la descrizione del sistema nel modo seguente: si indichi con *punto di riflessione immediata* un punto ove avviene la riflessione di una traiettoria sul bordo curvo, la quale sia immediatamente successiva a una riflessione sulla base. Si considera, al posto della condizione iniziale espressa in termini di posizione X_i , una situazione individuata dall'ascissa x_0 del primo punto di riflessione immediata, e dalla pendenza a con cui la traiettoria si allontana dal punto ove essa avviene, che si assume positiva. Nei termini visti in precedenza, ciò corrisponde alla posizione iniziale $X_i = x_0 + \frac{1-x_0^2}{a}$, con pendenza pari a $-a$. A partire da x_1 , si invertono le coordinate x ad ogni riflessione sul bordo curvo come in precedenza. Se si considera stavolta il valore dell'ascissa di ciascun punto di riflessione x_n solo dopo il ribaltamento dell'asse x , si ha la medesima regola (4.5) del caso precedente per le riflessioni sul bordo. Quando la successione di punti di riflessione esce dall'intervallo $[-1, 1]$, si ha una riflessione sul segmento di base, che riporta la traiettoria a un secondo punto di riflessione immediata. La mappa di primo ritorno che si arriverà a esplicitare è appunto quella che manda un punto di riflessione immediata nel successivo (si veda la *fig.4.2*). Rispetto alla descrizione del sistema introdotta nella sezione precedente, che è facilmente mappata a questa, non cambia quasi nulla di sostanziale: si osserva soltanto che cambia il numero di ribaltamenti R fra due ritorni, il quale, a parità di traiettoria, è in questo caso pari a $R_B - 1$. In particolare ciò implica che un'inversione delle coordinate avviene se il numero di riflessioni che avvengono tra due ritorni, contando anche quella sul bordo, è pari. Per indicare il modello appena esposto del biliardo si parlerà in seguito di *parabola incollata*, e le sue orbite saranno anche dette *orbite incollate*. Possiamo ora finalmente cominciare la derivazione esplicita della mappa di primo ritorno, a partire dal dominio di definizione.

Derivazione esplicita della mappa di primo ritorno I punti di riflessione immediata sono i punti dell'intervallo $[-1, -1+a]$. Infatti il valore massimo che questi possono assumere si ha ovviamente nel caso in cui la riflessione sulla base avvenga nel punto di coordinate $(1, 0)$. Tale punto tuttavia giace anche sulla parabola, e quindi sarà sufficiente invertirne l'ascissa e aggiungere un termine a secondo la (4.5) per ottenere l'estremo superiore dell'intervallo.

Se il punto di riflessione immediata è in -1 , l'ultima riflessione sul bordo curvo prima della riflessione sulla base è posta in

$$\tilde{x} = a \left\lfloor \frac{2}{a} \right\rfloor - 1. \quad (4.6)$$

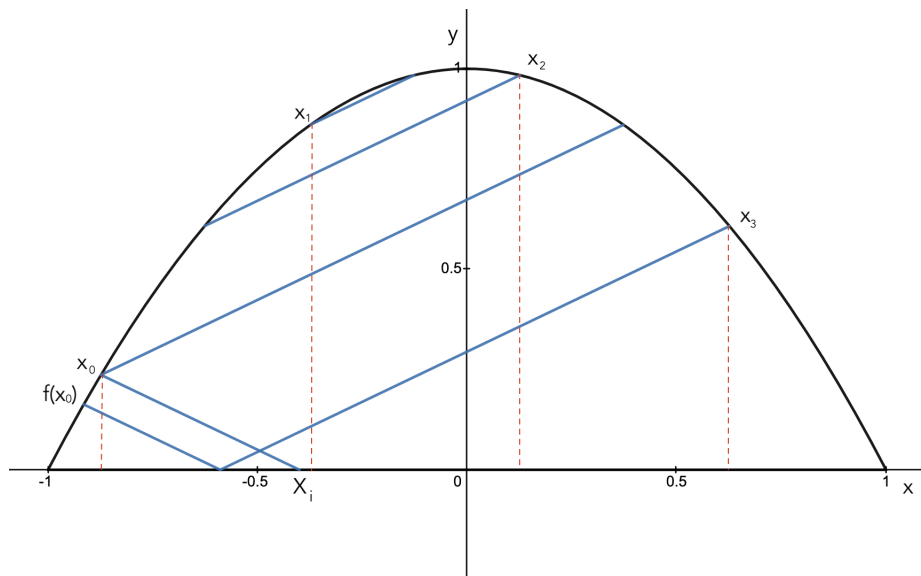


Figura 4.2: *Rappresentazione della procedura appena descritta sul biliardo a forma di parabola; la traiettoria con pendenza $a = 0.5$ è indicata dai segmenti blu continui e partendo da $x_0 = -0.8736$ interseca la parabola nei punti di ascissa x_n , ove è riflessa secondo la regola enunciata in precedenza. $f(x_0)$ rappresenta il valore della mappa di primo ritorno che si vuole ricavare. In $X_i = -0.4$ è indicata la condizione iniziale sulla base (con pendenza $-a$) corrispondente a x_0 . Le proiezioni dei punti sull'asse x , rappresentate dalle linee rosse tratteggiate, risultano essere in effetti equidistanziate.*

Tale valore corrisponde al massimo numero $\tilde{x} < 1$ che posso scrivere come $\tilde{x} = na - 1$, con $n \in \mathbb{N}$. Sia f_1 la funzione che manda i punti di riflessione immediata delle traiettorie negli ultimi punti di riflessioni sul bordo prima che esse intersechino la base. \tilde{x} è allora evidentemente l'unico punto di discontinuità di tale mappa. In corrispondenza di questo valore è infatti presente un salto nel grafico della funzione, che da $f_1(\tilde{x}^-) = 1$ passa a $f_1(\tilde{x}^+) = 1 - a$. Osservando, tra le altre cose, che $f_1(-1) = f_1(-1 + a)$, definiamo una mappa $M(x) = \pi(x + 1)$ che va dall'intervallo $[-1, -1 + a]$ a $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$, e un'altra $\tilde{M} = \pi(x - 1)$ che va da $[1 - a, 1]$ a $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$. Qui π si riferisce alla proiezione naturale di \mathbb{R} su $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$, $\pi(x) = x \bmod a$. Stiamo lavorando quindi ora su un cerchio; per caratterizzare le soluzioni del sistema originale, è sufficiente studiare come i punti su tale circonferenza cambiano sotto trasformazioni corrispondenti alle riflessioni originarie. Si nota che la funzione f_1 corrisponde ora a una semplice rotazione di $q := \tilde{x} - 1 + a$, i.e. $f_{1,\pi} := \tilde{M}(f_1(M^{-1}(x))) = x + q \bmod a$. Dobbiamo ora descrivere la funzione che manda i punti finali di riflessione delle traiettorie sulla parabola (x_F) in quelli iniziali (x_0) attraverso una riflessione sul segmento di base. Per fare ciò sulla parabola originale dobbiamo risolvere l'equazione

$$x_0^2 - 1 = a(x_0 - x_F) + 1 - x_F^2 \quad (4.7)$$

come si vede chiaramente riflettendo la parabola sull'asse delle x e studiando l'intersezione con essa della retta di pendenza a passante per x_F (si veda *fig.4.3*). Questo conduce a

$$f_2(x_F) = x_0 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2 - ax_F - x_F^2} \quad (4.8)$$

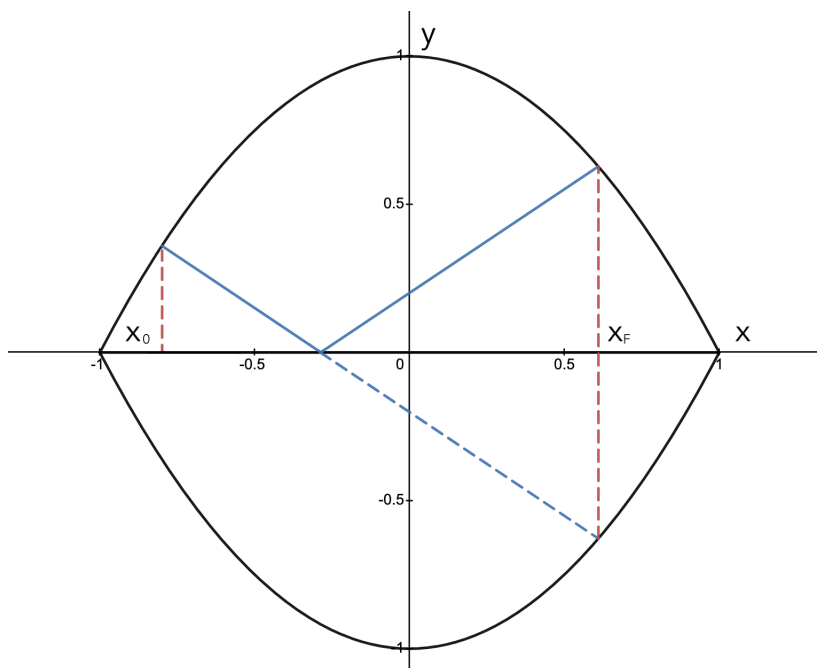


Figura 4.3: *Linea continua in blu: riflessione della traiettoria da x_F a x_0 sul segmento di base, ottenuta calcolando l'intersezione della parabola di equazione $x^2 - 1$ con la retta di pendenza a passante per x_F . La linea tratteggiata in blu rappresenta la prosecuzione della traiettoria nella parabola ribaltata, quella in rosso la proiezione delle due intersezioni sull'asse delle x , che coincidono per simmetria.*

e finalmente proiettando sul cerchio si ottiene

$$f_{2,\pi}(x) = +1 + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + ax + a + 1 - x^2 - 2x} \quad (4.9)$$

dove si intende x sul cerchio, sicché l'espressione è ben definita. In maniera simile a quanto visto prima, è facile corrispondere a tali omeomorfismi due mappe su $[0, a]$. Per $f_{1,\pi}$ si ha

$$g_1(x) = \begin{cases} x + q & \text{se } x \in [0, 1 - q] \\ x + q - 1 & \text{se } x \in (1 - q, 1] \end{cases} \quad (4.10)$$

e

$$g_2(x) = +1 + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + ax + a + 1 - x^2 - 2x} \quad (4.11)$$

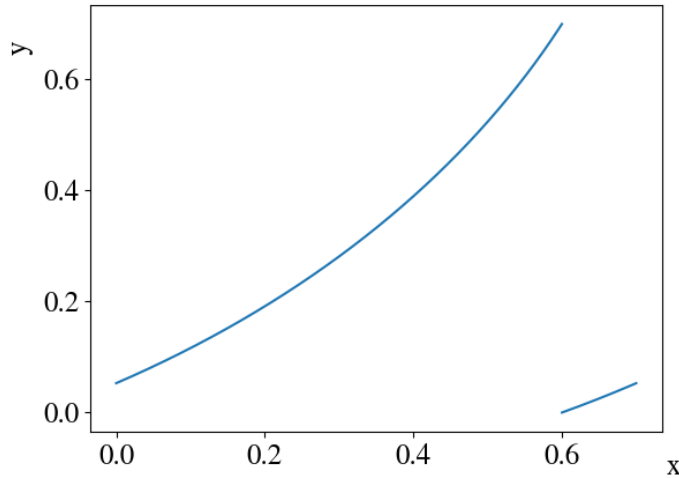


Figura 4.4: Grafico della mappa di primo ritorno g , per $a = 0.7$. La funzione, se vista su \mathbb{R}^2 , risulta essere un arco di cerchio.

La mappa di primo ritorno completa su tale intervallo, corrispondente alla mappa $f = f_{2,\pi} \circ f_{1,\pi}$ sul cerchio, è quindi data da $g = g_2 \circ g_1$:

$$g(x) = \begin{cases} +1 + \frac{a}{2} \\ -\sqrt{\frac{a^2}{4} + a(x+q) + a + 1 - (x+q)^2 - 2(x+q)} \text{ se } x \in [0, 1-q] \\ +1 + \frac{a}{2} \\ -\sqrt{\frac{a^2}{4} + a(x+q-1) + a + 1 - (x+q-1)^2 - 2(x+q-1)} \text{ se } x \in (1-q, 1] \end{cases} \quad (4.12)$$

4.1.6 Proprietà della mappa

È immediato verificare che la funzione f è continua sul cerchio, mentre g possiede un unico punto di discontinuità in $1 - q$. La sua derivata vale $g'(x) = g'_2(g_1(x))g'_1(x)$. Da calcolo esplicito

$$g'_2(x) = \frac{-a + 2x + 2}{\sqrt{a^2 + 4a(x+1) - 4(x^2 + 2x - 1)}} \quad (4.13)$$

che è ben definita per tutti gli x tali che

$$\frac{1}{2} \left(-\sqrt{2a^2 + 8} + a - 2 \right) < x < \frac{1}{2} \left(\sqrt{2a^2 + 8} + a - 2 \right) \quad (4.14)$$

e quindi in particolare lo è su $]0, a[$, siccome

$$\frac{1}{2} \left(-\sqrt{2a^2 + 8} + a - 2 \right) < 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{2a^2 + 8} + a - 2 \right) > a \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus 2. \quad (4.16)$$

L'intervallo di definizione della derivata $f'_{2,\pi}$ copre l'intero cerchio, a eccezione del punto $0 \equiv a$: infatti facilmente si ricava, per sostituzione diretta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'_2(x) = \frac{2 - a}{2 + a} \quad (4.17)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g'_2(x) = \frac{2 + a}{2 - a} \quad (4.18)$$

e quindi i due valori che la funzione $f'_{2,\pi}$ assumerebbe per il medesimo punto del cerchio non coincidono, ed essa non è ben definita in tale punto. Quando è ben definita, invece, la funzione 4.13 è sempre positiva, siccome nel caso sovracritico vale sempre $a < 2$. Questo rimane valido ovviamente anche calcolando $g'(x)$, poiché la rotazione ha derivata pari a 1 in ogni punto $\neq 1 - q$: tuttavia siccome i limiti sinistro e destro in tale punto coincidono, $f'_{1,\pi}$ è ben definita e pari a 1 sull'intero cerchio. La mappa g di primo ritorno dunque preserva a sua volta l'ordine dei punti, e ha un solo *break point* di derivata prima in $x = 1 - q$: è infatti questo il punto in cui il calcolo dell'argomento della funzione $g_1(x)$ restituisce un valore pari ad a , e la funzione $g'_2(x)$ ha valori diversi in 0 e in a . Ciò risulta dunque vero anche per l'omeomorfismo f . La funzione g è convessa in tutti gli punti ove è definita la sua derivata, come si vede facilmente da un calcolo esplicito della derivata seconda

$$g''_2(x) = \frac{4(a^2 + 4)}{(a^2 + 4a(x + 1) - 4(x^2 + 2x - 1))^{\frac{3}{2}}} \quad (4.19)$$

che è ben definita e positiva in $]0, a[$, e poiché chiaramente vale

$$g''(x) = g''_2(g_1(x))g_1'^2(x) + g'_2(g_1(x))g_1''(x) = g''_2(g_1(x)). \quad (4.20)$$

Ciò resta chiaramente valido per l'omeomorfismo f del cerchio. Inoltre, sulla falsariga di quanto visto in precedenza, questa mappa è tale che $\log |f'|$ può essere estesa a una funzione f^* a variazione limitata. A questo scopo è sufficiente infatti porre

$$f^*(x) = \log |f'(x)| \text{ se } x \neq q \text{ e} \quad (4.21)$$

$$f^*(q) = \lim_{x \rightarrow q^-} (\log |f'(x)|). \quad (4.22)$$

La sua variazione sarà certamente pari a due volte il valore dell'altezza della discontinuità di salto che essa presenta: per tutti gli altri punti essa, come f' , sarà infatti crescente. Non è difficile, a partire dalla eq.(4.17) e dalla eq.(4.18), capire che vale sull'intero cerchio

$$\text{Var}(f^*) = 4 \log \left(\frac{2 + a}{2 - a} \right). \quad (4.23)$$

Grazie agli strumenti descritti nei precedenti capitoli, siamo ora pronti ad enunciare alcuni risultati che descrivono i possibili comportamenti delle traiettorie. Si osserva che

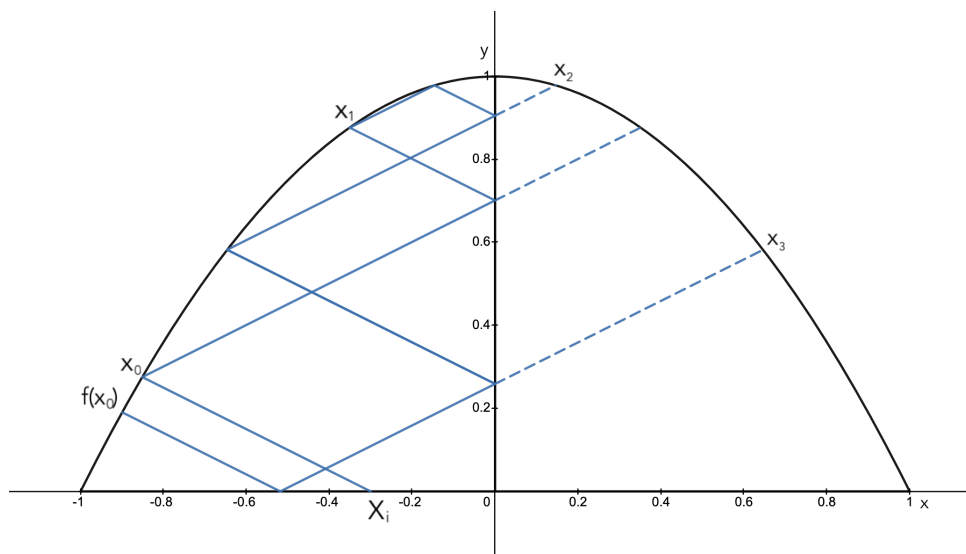


Figura 4.5: La linea blu continua rappresenta una traiettoria in un biliardo di onde interne a forma di mezza parabola; con la linea tratteggiata si indica invece la traiettoria nel biliardo unfolded. Si nota che queste ultime corrispondono a quelle del sistema descritto negli scorsi paragrafi: si riportano sulla figura i punti di riflessione e la mappa come definiti in questo contesto. Si ha in questo caso $x_0 = -0.8511$, $X_i = -0.3$, $a = 0.5$ (se considerata come pendenza da x_0)

il problema di individuare le traiettorie del sistema e le loro caratteristiche, esposto in questo modo, è esattamente equivalente a quello di un biliardo costituito da una sola metà della parabola, dopo una procedura di *billiard unfolding* simile a quella descritta nel capitolo precedente (si veda *fig. 4.5*). Ancora una volta si sottolinea che sarà necessaria l'informazione della parità o disparità del numero di ribaltamenti per mappare nuovamente questa descrizione a quella della parabola vera e propria.

4.2 Teoremi sulle orbite

4.2.1 Possibili comportamenti delle orbite

Come diretta conseguenza del teorema di Denjoy esposto nel Cap.2, e della convessità in quasi ogni punto della mappa di primo ritorno, possiamo affermare il seguente risultato, che risulta essere l'analogo del teorema (14) esposto nel Cap. 3:

Teorema 16. *Le traiettorie di un punto entro il biliardo a forma di parabola incollato possono soddisfare solo uno dei seguenti due casi:*

1. *Qualora il numero di rotazione di f sia irrazionale, essa è coniugata a una rotazione irrazionale del cerchio. f ammette un unico insieme minimo, che è quindi denso in S^1 .*
2. *Se il numero di rotazione di f è razionale, $\rho(f) = \frac{p}{q}$, il sistema possiede un'orbita periodica attrattiva e una repulsiva, di periodo q , eventualmente coincidenti e in tal caso simmetrici rispetto all'asse delle y .*

Dim. La dimostrazione è identica a quella del teorema (14), con la sola differenza che è impossibile ottenere dei casi in cui parte della mappa è formata da segmenti, escludendo dunque la presenza di fasci di orbite periodiche. Valgono infatti le ipotesi su cui questo si fondava, poiché in particolare la mappa f è continua e la sua derivata possiede un solo punto di discontinuità; in tutti gli altri punti f è convessa e infine $\log |f'|$ può essere estesa a una mappa con variazione limitata. Come già accennato, la simmetria della parabola rispetto al ribaltamento sull'asse x e la corrispondenza tra questa operazione e l'inversione dei tempi per le traiettorie implicano inoltre che a un attrattore che interseca il segmento di base in alcuni punti X_{in} corrisponda un repulsore passante per i punti di base $-X_{in}$: questi punti dovranno pertanto essere simmetrici rispetto all'origine affinché l'attrattore e il repulsore possano coincidere. \square

Si osserva peraltro che, con pochi cambiamenti, saranno validi anche in questo caso i risultati riguardanti i bacini di attrazione di ogni punto periodico di f^q presenti nell'enunciato del Teorema 14. Tali risultati non verranno però riportati per intero in questa sede, e ci si ripromette di adattarli a questa situazione nel prossimo futuro.

4.2.2 Mappatura a parabola vera e periodi

Cerchiamo ora di tradurre quanto appena osservato dalla parabola incollata al caso della parabola vera e propria. In questo secondo caso varrà il

Teorema 17. *Le traiettorie di un punto entro il biliardo a forma di parabola possono soddisfare solo uno dei seguenti due casi:*

1. *Qualora il numero di rotazione di f sia irrazionale, essa è coniugata a una rotazione irrazionale del cerchio. f ammette un unico insieme minimo, che è quindi denso in S^1 . In questo caso la parabola vera non possiede orbite attrattive o repulsive.*
2. *se il numero di rotazione di f è razionale, $\rho(f) = \frac{p}{q}$, il sistema ammette orbite chiuse di periodo q oppure orbite chiuse di periodo $2q$.*
 - (a) *Le orbite hanno periodo q se e solo se le rispettive orbite incollate si riflettono sul bordo curvo un numero pari di volte. Il primo caso il sistema possiede due orbite periodiche simmetriche l'una rispetto all'altra, una attrattiva e una repulsiva a seconda della posizione iniziale, coincidenti se e solo se coincidono le rispettive orbite della parabola incollata.*
 - (b) *Le orbite hanno periodo $2q$ se e solo se le rispettive orbite incollate si riflettono sul bordo curvo un numero dispari di volte. In tal caso l'orbita attrattiva è simmetrica e coincide con quella repulsiva.*

Dim. Il primo caso risulta la trasposizione immediata dell'analogo punto del precedente teorema. Il secondo caso, ugualmente, deriva da quanto affermato sulla parabola incollata. Qualora un'orbita della parabola incollata si rifletta un numero pari di volte sul bordo della parabola, la parabola incollata sarà corrispondentemente ribaltata un numero pari di volte: un punto di riflessione immediata x_0 della parabola incollata che torna in sé stesso corrisponde dunque a un punto di riflessione immediata della parabola vera che torna in sé stesso, poiché il segno della sua ascissa viene invertito un numero pari di

volte, secondo la procedura descritta nelle precedenti sezioni; ciò sarà valido dunque per le due orbite periodiche corrispondenti all'attrattore e al repulsore della parabola incollata. In questo caso la natura attrattiva o repulsiva di tali orbite dipenderà dal numero di ribaltamenti di ogni traiettoria, e i rispettivi bacini di attrazione e di repulsione saranno per simmetria naturalmente complementari. Qualora un'orbita della parabola incollata si rifletta un numero dispari di volte sul bordo della parabola, la parabola incollata sarà corrispondentemente ribaltata un numero dispari di volte: un punto di riflessione immediata x_0 della parabola incollata che torna in sé stesso corrisponde dunque a un punto di riflessione immediata della parabola vera che è mandato nel punto di ascissa opposta $-x_0$, poiché il segno di quest'ultima viene invertito un numero dispari di volte, secondo la procedura descritta nelle precedenti sezioni. Ripetendo un'altra volta tale processo, seguendo l'orbita periodica, $-x_0$ sarà mandato in x_0 . Ho dunque un'unica orbita periodica, simmetrica rispetto all'asse delle y ; l'orbita corrispondente al repulsore della parabola incollata sarà pertanto coincidente con quella corrispondente all'attrattore della parabola incollata. Si sono così mostrate le doppie implicazioni dei casi 2(a) e 2(b). \square

Si osserva che, dall'enunciato del Teorema 2 nel caso 1, prestando attenzione alla parità o disparità del numero di ribaltamenti, dovrebbe essere possibile ottenere un analogo risultato sulla densità dei punti di riflessione immediata nelle orbite nella parabola vera sull'intervallo $[-1, -1+a]$: anche tale considerazione non sarà qui ulteriormente discussa, e ci si ripromette di lavorare nel prossimo futuro su tali aspetti.

4.3 Simulazioni al computer

Per comprendere meglio il comportamento delle orbite del sistema, è risultato utile servirsi di programmi di simulazione, opportunamente realizzati in Python. Il codice scritto a tale scopo è reperibile all'indirizzo https://github.com/dimitricorradini/Internal_wave_parabola. In primis è stato realizzato un semplice programma per calcolare e visualizzare le orbite del sistema, risolvendo di volta in volta le equazioni che permettono di individuare i punti di riflessione delle traiettorie. Applicando più volte la mappa di primo ritorno, si è poi elaborato un programma che visualizza in maniera più astratta l'evoluzione del sistema; in questo modo è stato infine possibile scrivere un programma che individua la presenza di orbite periodiche, e quanto vale il periodo di queste. I risultati di queste simulazioni sono esposti in *figg. 4.6-4.15*.

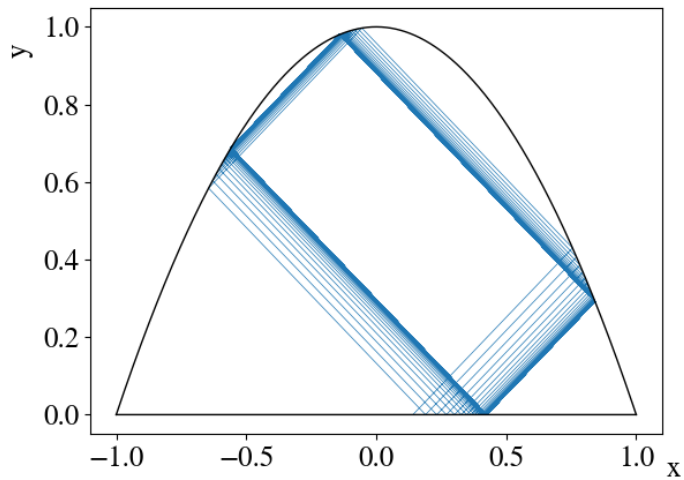


Figura 4.6: Simulazione dei primi 1000 rimbalzi della traiettoria, in blu, di onde interne in un biliardo a forma di parabola, rappresentato in nero, per $a = 0.7$, $X_i = 0.14$, ottenuta tramite l'apposito programma Python. Si nota chiaramente la presenza di un attrattore di periodo 1 (i.e. un punto fisso della mappa).

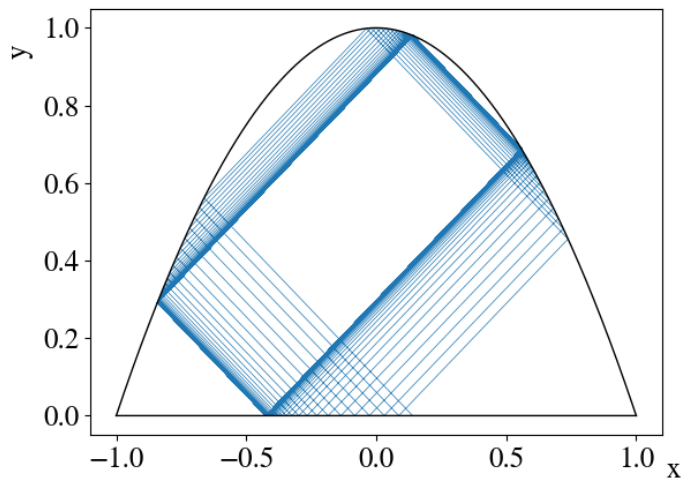


Figura 4.7: Simulazione dei primi 1000 rimbalzi della traiettoria nel passato, in blu, di onde interne in un biliardo a forma di parabola rappresentato in nero, per $a = 0.7$, $X_i = 0.14$, ottenuta tramite l'apposito programma Python. Si nota chiaramente la presenza di un repulsore di periodo 1 (i.e. un punto fisso della mappa), simmetrico rispetto a quello della *fig. 4.6*.

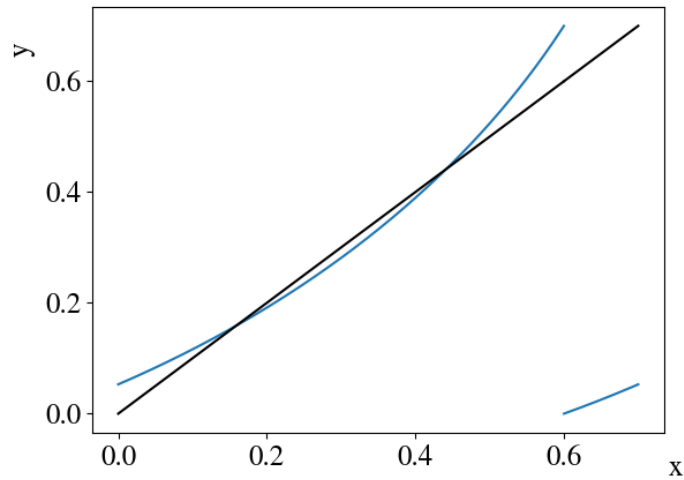


Figura 4.8: In blu è rappresentata la mappa di Poincaré f descritta in questo capitolo per un biliardo a forma di parabola incollato per $a = 0.7$, ottenuta tramite l'apposito programma Python. In nero si rappresenta la funzione identità. Si nota chiaramente la presenza di un attrattore e di un repulsore di periodo 1 (i.e. punti fissi della mappa).

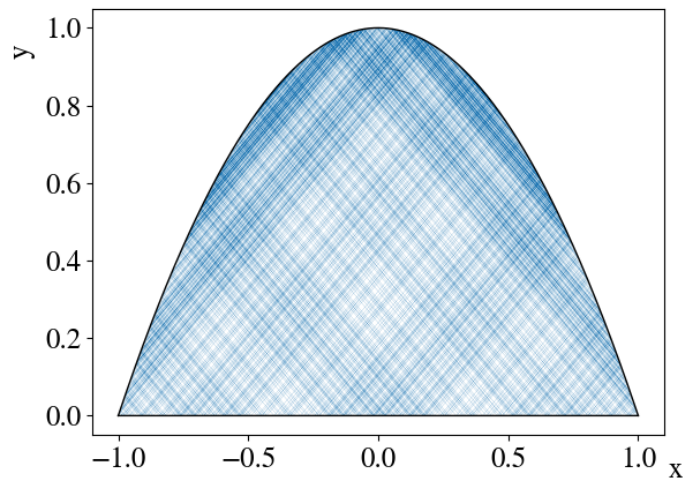


Figura 4.9: Simulazione dei primi 1000 rimbalzi della traiettoria, in blu, di onde interne in un biliardo a forma di parabola, rappresentato in nero, per $a = 0.8$, $X_i = 0.85$, ottenuta tramite l'apposito programma Python. In questo caso non è possibile distinguere immediatamente attrattori. Il programma Python apposito rileva però un periodo di 297, che per via della simmetria della figura risulta probabilmente dare luogo a un attrattore di periodo pari a 594.

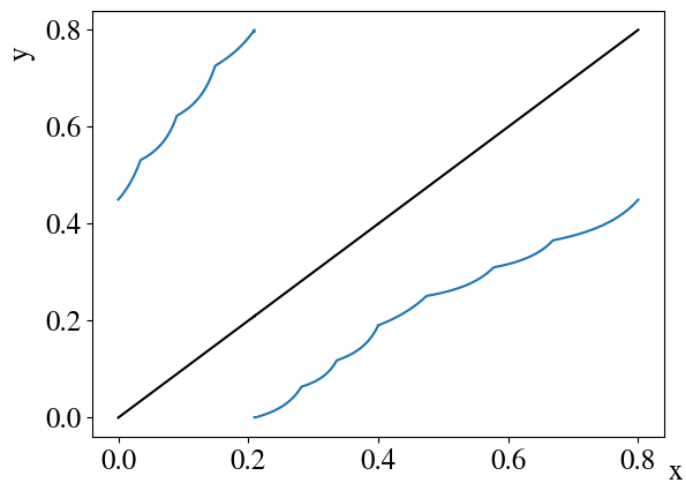


Figura 4.10: In blu è rappresentata la decima iterazione della mappa di Poincaré f descritta in questo capitolo per un biliardo a forma di parabola incollato per $a = 0.8$, ottenuta tramite l'apposito programma Python. In nero si rappresenta la funzione identità. Si nota, come ci si aspetta, la presenza di dieci punti ove la derivata è discontinua, e l'assenza di intersezioni con la retta $y = x$.

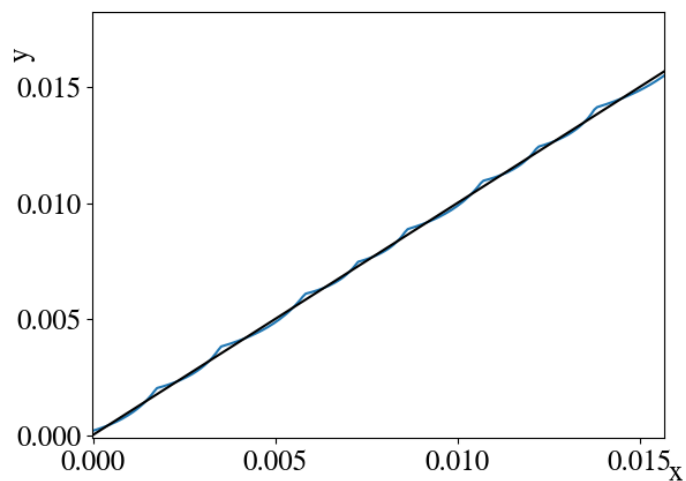


Figura 4.11: In blu è rappresentato un ingrandimento della prima porzione del grafico della 297-esima iterazione della mappa di Poincaré f descritta in questo capitolo per un biliardo a forma di parabola incollato per $a = 0.8$, ottenuta tramite l'apposito programma Python. In nero si rappresenta la funzione identità. Si nota finalmente la presenza di intersezioni con l'identità.

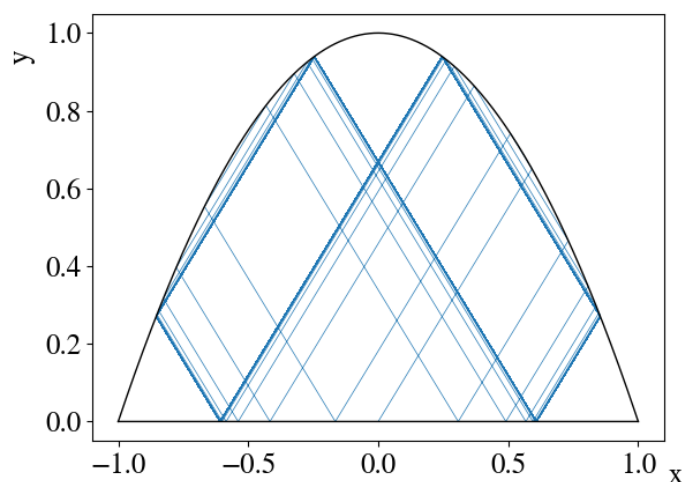


Figura 4.12: Simulazione dei primi 1000 rimbalzi della traiettoria, in blu, di onde interne in un biliardo a forma di parabola, rappresentato in nero, per $a = 1.1$, $X_i = 0$, ottenuta tramite l'apposito programma Python. Si nota chiaramente la presenza di un attrattore di periodo 2.

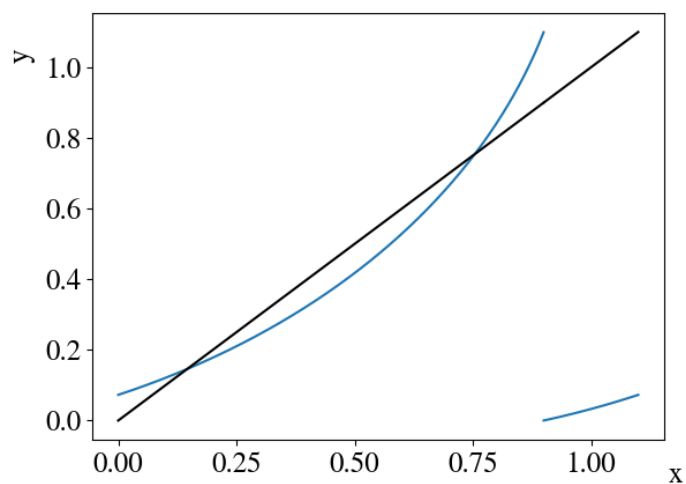


Figura 4.13: In blu è rappresentata la mappa di Poincaré f descritta in questo capitolo per un biliardo a forma di parabola incollata per $a = 1.1$, ottenuta tramite l'apposito programma Python. In nero si rappresenta la funzione identità. Si nota la presenza di due soli punti di intersezione con l'identità, che corrispondono tuttavia, per quanto visto sulla trasposizione da parabola incollata a parabola vera, a un solo attrattore simmetrico e coincidente con il repulsore.

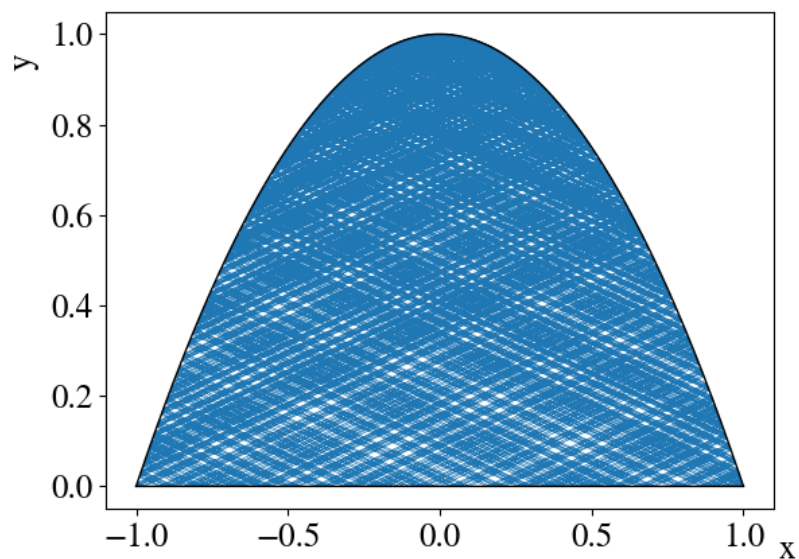


Figura 4.14: Simulazione dei primi 1000 rimbalzi della traiettoria, in blu, di onde interne in un biliardo a forma di parabola, rappresentato in nero, per $a = 0.314$, $X_i = 0$, ottenuta tramite l'apposito programma Python. Non è possibile in questo caso individuare attrattori. Il programma appositamente realizzato esclude la presenza di orbite periodiche con periodo minore o uguale a 1000.

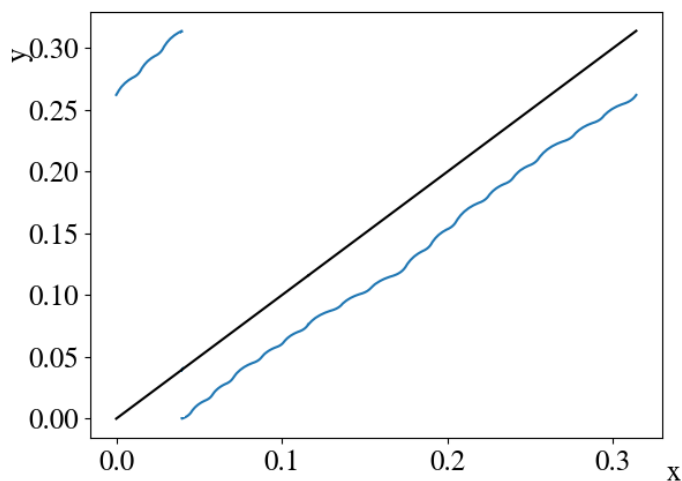


Figura 4.15: In blu è rappresentata la centesima iterazione della mappa di Poincaré f descritta in questo capitolo per un biliardo a forma di parabola incollato per $a = 0.314$, ottenuta tramite l'apposito programma Python. In nero si rappresenta la funzione identità. Non è possibile in questo caso individuare punti di intersezione con l'identità.

Ringraziamenti

Un grazie prima di tutto al prof. Lenci che mi ha da subito dato fiducia e trattato da suo pari, offrendomi come gli avevo richiesto un problema impegnativo, ma anche e soprattutto degli spunti molto interessanti e una rara prospettiva su questioni nuove e su cosa voglia dire fare ricerca. Grazie ancora per avermi guidato e sopportato nonostante le lunghe ore di discussioni un po' sconclusionate e i ritardi vari che mi sono tipici: spero non siano stati di troppo disturbo, e che questo possa essere magari l'inizio di una proficua collaborazione.

Come è usuale ringrazio i miei genitori e mia sorella: ancora e soprattutto perché hanno assistito pazientemente a tutti i miei momenti di nervosismo, condiviso i miei sollievi e qualche buon risultato. A loro ho confidato i miei pensieri, i miei dubbi e i miei obiettivi, che loro hanno sempre sostenuto pienamente e attivamente.

Ringrazio la Gio, per il suo costante supporto, per quanto, sebbene siamo stati ultimamente così impegnati entrambi, mi è sempre stata vicino e mi ha sempre spinto e motivato come nessun altro a fare del mio meglio e raggiungere i miei obiettivi; la ringrazio perché ha creduto e crede davvero molto in me, e perché la stimo profondamente e senza di lei sarei sinceramente perso. La ringrazio per tutte le nostre avventure, per quanto riesce sempre a rassicurarmi e a rendermi felice, e per quanto mi ha in qualche modo insegnato durante gli anni.

Un grazie al Gruppo Eccezionale, i miei amici, con cui ho trascorso questi tre brevi anni, per avermi rallegrato le giornate e la vita, per la compagnia e il notevole sostegno fisico e morale, per l'unicità e la condivisione di ideali e di una certa visione del mondo, e quant'altro insomma; ci rivedremo presto. Un grazie in particolare a Morgan perché è penso l'unica persona con cui ho potuto parlare di tutto, di qualsiasi idea avessi per la testa, di ogni ansia e di ogni successo, sapendo che in qualche modo mi capiva e ricevendo consigli sempre intelligenti e utili.

Un grazie ai miei amici di Reggio che sono stati al mio fianco, nonostante di recente sia periodicamente sparito dalla circolazione per studio e altri motivi. Soprattutto grazie per essere così apertamente generosi e per quanto riusciamo ad intenderci, per tutti i momenti che abbiamo passato e passeremo assieme e per quanto avete contribuito alla mia crescita e al modo in cui sono cambiato in tutti questi anni. Vi voglio molto bene, e vi sono eternamente grato.

Bibliografia

- [1] *Internal waves-wikipedia article*. https://en.wikipedia.org/wiki/Internal_wave. URL visitato il 21/08/2022.
- [2] C. BROUZET, *Internal wave attractors : from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing*, theses, Université de Lyon, July 2016.
- [3] W. DE MELO AND S. VAN STRIEN, *One-dimensional dynamics*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Springer, Berlin, Germany, 1993 ed., Aug. 1993.
- [4] A. DENJOY, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, J. Math. Pures Appl. (9), 11 (1932), pp. 333–375.
- [5] P. ECHEVERRI, T. YOKOSHI, N. J. BALMFORTH, AND T. PEACOCK, *Tidally generated internal-wave attractors between double ridges*, Journal of Fluid Mechanics, 669 (2011), p. 354–374.
- [6] Y. GUO AND M. HOLMES-CERFON, *Internal wave attractors over random, small-amplitude topography*, Journal of Fluid Mechanics, 787 (2016), p. 148–174.
- [7] U. HARLANDER, *Towards an analytical understanding of internal wave attractors*, Advances in Geosciences, 15 (2008), pp. 3–9.
- [8] J. R. HOLTON AND R. S. LINDZEN, *An updated theory for the quasi-biennial cycle of the tropical stratosphere*, Journal of Atmospheric Sciences, 29 (1972), pp. 1076 – 1080.
- [9] F.-P. A. LAM AND L. R. M. MAAS, *Internal wave focusing revisited a reanalysis and new theoretical links*, Fluid Dynamics Research, 40 (2008), pp. 95–122.
- [10] M. LENCI, C. BONANNO, AND G. CRISTADORO, *Internal-wave billiards in trapezoids and similar tables*. <https://arxiv.org/abs/2102.01654>, 2021.
- [11] L. MAAS AND F.-P. LAM, *Geometric focusing of internal waves*, Journal of Fluid Mechanics, 300 (1995), pp. 1 – 41.
- [12] L. R. M. MAAS, *Wave attractors: Linear yet nonlinear*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 15 (2005), pp. 2757–2782.
- [13] L. R. M. MAAS, D. BENIELLI, J. SOMMERIA, AND F.-P. A. LAM, *Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid*, , 388 (1997), pp. 557–561.

- [14] L. R. M. MAAS AND F.-P. A. LAM, *Geometric focusing of internal waves*, Journal of Fluid Mechanics, 300 (1995), p. 1–41.
- [15] A. MANDERS, J. DUISTERMAAT, AND L. MAAS, *Wave attractors in a smooth convex enclosed geometry*, Physica D: Nonlinear Phenomena, 186 (2003), pp. 109–132.
- [16] W. MUNK AND C. WUNSCH, *Abyssal recipes ii: energetics of tidal and wind mixing*, Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers, 45 (1998), pp. 1977–2010.
- [17] G. PILLET, L. MAAS, AND T. DAUXOIS, *Internal wave attractors in 3d geometries : a dynamical systems approach*, (2019).
- [18] B. R. SUTHERLAND, *Internal waves in uniformly stratified fluid*, Cambridge University Press, 2010, p. 141–212.
- [19] W. TANG AND T. PEACOCK, *Lagrangian coherent structures and internal wave attractors*, Chaos (Woodbury, N.Y.), 20 (2010), p. 017508.
- [20] J. S. TURNER, *Linear internal waves*, Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge University Press, 1973, p. 14–47.