

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

# VARIETÀ TORICHE

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Luca Migliorini

Presentata da:  
Francesca Tripaldi

II Sessione  
Anno Accademico 2010/2011

*A Liz Hanbury  
e John Bolton*



# Introduzione

Questa tesi contiene una breve esposizione sull'argomento delle varietà toriche. I metodi qui utilizzati per la loro costruzione stabiliscono una corrispondenza fra varietà toriche e corpi convessi in un reticolo. Tale corrispondenza sarà poi utile per costruire le varietà ed analizzarne le proprietà algebro-geometriche. Uno degli aspetti più interessanti della geometria torica è infatti la possibilità, attraverso gli strumenti della geometria algebrica, di descrivere certe proprietà dei corpi convessi analizzando le proprietà delle varietà toriche e viceversa.

Lo studio delle varietà toriche è nato innanzitutto come problema di compattificazione (parziale) di un toro algebrico (si tratta per l'appunto di un oggetto non compatto), un cosiddetto *ricoprimento torico*. Una varietà torica complessa  $n$ -dimensionale  $X$  contiene un toro algebrico complesso  $n$ -dimensionale  $T = (\mathbb{C}^*)^n$  e un'azione  $T \times X \rightarrow X$  che estende l'azione  $T \times T \rightarrow T$  di  $T$  su se stesso. Se  $X$  è affine allora i caratteri  $\chi : T \mapsto \mathbb{C}^*$  tali che il monomio  $x^\chi$  è una funzione definita su tutto  $X$ , definiscono un cono convesso nel reticolo dei caratteri di  $T$ . Si tratta di una prima corrispondenza tra varietà toriche e corpi convessi.

Possiamo utilizzare le varietà toriche anche come spazi ambiente per varietà (sia affini sia proiettive). Spesso le proprietà più interessanti di un polinomio (visto come *funzione polinomiale*)  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_m x^m$  o della varietà associata  $\{f = 0\}$  dipendono, più che dal valore dei coefficienti  $a_m$ , dal fatto che essi siano o meno nulli. Il *politopo di Newton* di  $f$  viene definito come l'involuppo convesso su  $\mathbb{Z}^n$  dei valori  $m$  per cui  $a_m \neq 0$  e la varietà torica associata a questo politopo determina uno spazio ambiente utile per lo studio di  $f$ . Dato un polinomio non degenere  $f$ , è possibile esprimere gran

parte delle sue proprietà algebriche/geometriche in termini del politopo di Newton.

Lo studio delle varietà toriche si è inoltre dimostrato utile nella *Teoria delle Stringhe*. Una delle idee centrali della teoria delle stringhe è che esistano delle dimensioni spaziali *nascoste* in aggiunta allo spazio tridimensionale che ci circonda e alla quarta dimensione temporale. Si tratterebbe di dimensioni talmente piccole da non poter essere osservate direttamente. A scopo illustrativo può essere utile immaginare un tubo da giardino appeso tra due scogliere distanti tra loro. Una formica che attraversasse il tubo potrebbe muoversi lungo due dimensioni, lo percorrerebbe in lunghezza e lungo la circonferenza. Un osservatore che si trovasse lontano dal tubo e dalle scogliere non sarebbe in grado di percepire entrambe le dimensioni: riuscirebbe a vederne la lunghezza ma non il diametro interno. Lo spessore del tubo rappresenta in questo caso la *dimensione nascosta*. La teoria delle stringhe sostiene che nel nostro universo queste dimensioni nascoste abbiano la forma di una *varietà di Calabi-Yau*, la cui costruzione si basa su coppie di politopi riflessivi.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Varietà toriche</b>	<b>1</b>
1.1 Varietà algebriche . . . . .	1
1.2 Varietà toriche . . . . .	3
<b>2 Lo spettro di un anello</b>	<b>5</b>
<b>3 Cono poliedrale convesso</b>	<b>11</b>
<b>4 Costruire una varietà torica</b>	<b>19</b>
<b>5 Caratteri e sottogruppi a un parametro</b>	<b>27</b>
<b>6 Politopi</b>	<b>31</b>
<b>Conclusioni</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>41</b>



# Elenco delle figure

3.1	Esempio 3.4 . . . . .	13
3.2	Esempio 3.5 . . . . .	13
4.1	Esempio 4.6 . . . . .	23
5.1	Esempio 5.2 . . . . .	29
6.1	Esempio 6.6 . . . . .	33
6.2	Esempio 6.6 . . . . .	34
6.3	Esempio 6.7 . . . . .	35
6.4	Esempio 6.9 . . . . .	36
6.5	Esempio 6.10 . . . . .	37





# Capitolo 1

## Varietà toriche

In questo primo capitolo introdurremo alcuni concetti necessari per una definizione rigorosa di varietà torica.

### 1.1 Varietà algebriche

Vogliamo definire le varietà algebriche sia nel caso dello spazio affine  $n$ -dimensionale  $\mathbb{A}_K^n$  sia nello spazio proiettivo  $n$ -dimensionale  $\mathbb{P}_K^n$ .

In quest'esposizione il campo  $K$  su cui lavoreremo è un campo algebricamente chiuso, ovvero un campo che contiene tutti gli zeri dei polinomi a coefficienti presi in  $K$  stesso.

**Definizione 1.1.** Varietà affini

Sia  $F \in K[x_1, \dots, x_n]$ , un punto  $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$  è uno zero di  $F$  se  $F(P) = F(a_1, \dots, a_n) = 0$ .

Più in generale, dato un insieme di polinomi  $S \subset K[x_1, \dots, x_n]$ , un insieme algebrico affine è definito come

$$V(S) = \{\underline{x} \in \mathbb{A}_K^n \mid f(\underline{x}) = 0, \forall f \in S\}$$

Un insieme algebrico  $V \subset \mathbb{A}_K^n$  viene detto *riducibile* se  $V = V_1 \cup V_2$  dove  $V_1, V_2$  sono sottoinsiemi algebrici per cui  $V_i \neq V, i = 1, 2$ . In caso contrario  $V$  è detto *irriducibile*.

Un insieme algebrico irriducibile viene denominato *varietà affine*.

**Definizione 1.2.** Varietà proiettive

Un punto  $P = [x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}_K^n$  è uno zero di un polinomio  $F \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$  se è uguale a zero per ogni possibile scelta nelle coordinate omogenee di  $P$ , ovvero  $F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = 0 \quad \forall \lambda \neq 0$  e scriveremo  $F(P) = 0$ .

Sia  $S \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$  un sistema di polinomi omogenei di grado  $d$ <sup>1</sup> su  $\mathbb{P}_K^n$ , allora

$$V(S) = \{\underline{x} \in \mathbb{P}_K^n \mid f(\underline{x}) = 0, \forall f \in S\} \subset \mathbb{P}_K^n$$

è detto insieme algebrico proiettivo.

In maniera analoga al caso affine, un insieme algebrico proiettivo non vuoto che non può essere espresso come l'unione di due sottoinsiemi algebrici propri è irriducibile. Un insieme algebrico proiettivo irriducibile è detto *varietà proiettiva*.

**Osservazione 1.3.** Come conseguenza del teorema della base di Hilbert, abbiamo che un numero finito di equazioni è sufficiente per definire una varietà algebrica, ovvero

$$\forall V, \text{ varietà algebrica, } \exists S \subset K[x_1, \dots, x_n], S := \{f_i\}_{i=1}^s \text{ tale che } V = V(S)$$

**Definizione 1.4.** Varietà normali

Per una varietà affine  $V$  definita dalle equazioni polinomiali  $f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_n]$  risulta

- $K[V] = \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{(f_1, \dots, f_s)}$  l'anello delle coordinate di  $V$  su  $K$
- $K(V) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in K[V] \right\}$  il campo dei quozienti di  $K[V]$

Un elemento  $f \in K(V)$  è detto *integrale* su  $K[V]$  se esiste un polinomio monico  $x^n + g_{n-1}x^{n-1} + \dots + g_1x + g_0 = 0$  con  $g_{n-1}, \dots, g_0 \in K[V]$  per cui  $f$  sia una radice.

$K[V]$  come sottoinsieme di  $K(V)$  viene detto *integralmente chiuso* in  $K(V)$  se ogni  $f \in K(V)$  che sia integrale su  $K[V]$  appartiene a  $K[V]$ .

Una varietà algebrica affine  $V$  è detta *normale* se e solo se  $K[V]$  è un sottoinsieme integralmente chiuso di  $K(V)$ . Nel caso  $V$  non sia una varietà

<sup>1</sup>Un polinomio viene detto omogeneo se è la somma di monomi dello stesso grado  $d$  (viene anche detto *forma* o più precisamente *d-forma*)

affine, ci si riconduce al caso affine considerando un ricoprimento con aperti affini.

Per una varietà  $V$  che non sia normale, possiamo prendere la chiusura integrale di  $K[V]$  in  $K(V)$  aggiungendo quegli elementi  $f \in K(V)$  che sono integrali su  $K[V]$ .

**Osservazione 1.5.** Vedremo che prendere lo spettro  $\text{Spec}$  della chiusura integrale corrisponde al cosiddetto processo di *normalizzazione* di  $V$ , che rende  $V$  una varietà normale.

**Esempio 1.6.** Prendiamo in considerazione il caso della conica cuspidale  $V = \{y^2 - x^3 = 0\}$ , avremo

$$K[V] = \frac{\mathbb{C}[x, y]}{y^2 - x^3}$$

Nell'equazione  $\xi^2 - x = 0$  abbiamo che  $f := \frac{y}{x} \in K(V)$  rappresenta una soluzione di quest'equazione in quanto  $f^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} = x$ .

Per cui  $f$  è integrale su  $K[V]$ . Tuttavia, poiché  $f \notin K[V]$ ,  $V$  non è normale.

## 1.2 Varietà toriche

**Definizione 1.7.** Toro algebrico

Sia  $K$  un campo, denotiamo  $K^* = K \setminus \{0\}$ .

Allora il toro algebrico  $n$ - dimensionale è semplicemente definito come  $T = (K^*)^n = K^* \times K^* \times \dots \times K^*$ ,  $n$  volte.

**Definizione 1.8.** Topologia di Zariski

La *topologia di Zariski* è definita partendo dai suoi insiemi chiusi. Prendiamo come insiemi chiusi quelli che possono essere espressi come l'insieme degli zeri di un dato insieme di equazioni, ovvero

- Un sottoinsieme  $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$  è aperto nella topologia di Zariski se e solo se  $C(V)$  (il *complementare* di  $V$ ) è un insieme algebrico affine;
- Un sottoinsieme  $V \subseteq \mathbb{P}_K^n$  è aperto nella topologia di Zariski se e solo se  $C(V)$  è un insieme algebrico proiettivo.

**Definizione 1.9.** Varietà torica

Una varietà torica di dimensione  $n$  è una varietà normale  $X$  con le seguenti proprietà:

- $X$  contiene un sottoinsieme aperto e denso per la topologia di Zariski, isomorfo al toro  $n$ -dimensionale, che identificheremo, con un leggero abuso, con  $T$  stesso;
- è definita un'azione  $T \times X \rightarrow X$  di  $T$  su  $X$  che estende l'azione naturale di  $T$  su se stesso per prodotto.

## Capitolo 2

# Lo spettro di un anello

**Definizione 2.1.** Ideale radicale

Sia  $R$  un anello commutativo unitario. Il sottoinsieme  $I \subseteq R$  è detto *ideale di  $R$*  se è un sottogruppo (additivo) normale e  $r \cdot I \subseteq I \quad \forall r \in R$ .

Il *radicale* di un ideale  $I$  è

$$\text{Rad}(I) = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{Z} : r^n \in I\}$$

Se  $I = \text{Rad}(I)$  allora  $I$  viene detto *radicale*.

**Definizione 2.2.** L'ideale di un insieme algebrico

Per tutti i sottoinsiemi  $X \subseteq \mathbb{A}_K^n$  consideriamo i polinomi che hanno zeri su  $X$ . Questi formano un ideale in  $K[x_1, \dots, x_n]$ , l'*ideale di  $X$* :

$$I(X) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in X\}$$

In maniera analoga, per gli insiemi  $X \subset \mathbb{P}_K^n$ , abbiamo

$$I(X) = \{f \in K[x_1, \dots, x_{n+1}] \mid \text{ogni } P \in X \text{ è uno zero di } f\}$$

E  $I(X)$  viene detto l'*ideale di  $X$* .

Prendiamo in considerazione l'ideale di un insieme algebrico.

- Affine

Per ogni sottoinsieme  $X \subset \mathbb{A}_K^n$  consideriamo i polinomi che si annullano su  $X$ , per poi prendere l'ideale di  $X$ ,  $I(X)$ . Le proprietà seguenti mostrano alcune delle relazioni tra ideali e insiemi algebrici:

- i. se  $X \subseteq Y \Rightarrow I(X) \supseteq I(Y)$  ;
- ii.  $I(\emptyset) = K[x_1, \dots, x_n]$  ,  
 $I(\mathbb{A}_K^n) = 0$  ,  
 $I(\{(a_1, \dots, a_n)\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$  dove  $a_i \in K$  ;
- iii.  $I(X)$  è un ideale radicale per ogni insieme  $X \subseteq \mathbb{A}_K^n$  .

Dato un tale ideale  $J \subset K[x_1, \dots, x_n]$ , possiamo definire l'insieme algebrico affine associato

$$V(J) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_K^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall f \in J\} \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

- iv.  $I(V(S)) \supseteq S \quad \forall S \subset K[x_1, \dots, x_n]$  ,  
 $V(I(X)) \supseteq X \quad \forall X \subset \mathbb{A}_K^n$  ;

- Proiettivo

Nello spazio proiettivo possiamo definire per ogni insieme  $X \subseteq \mathbb{P}_K^n$  l'ideale

$$I(X) = \{f \in K[x_1, \dots, x_{n+1}] \mid f(P) = 0 \quad \forall P \in X\}$$

Un ideale  $I \subset K[x_1, \dots, x_{n+1}]$  è detto *omogeneo* se per ogni  $F = \sum_{i=1}^m f_i \in I$  dove  $f_i$  è una forma di grado  $i$ , risulta  $f_i \in I$ . Per ogni insieme  $X \subset \mathbb{P}_K^n$ ,  $I(X)$  è un ideale omogeneo.

Dato un ideale omogeneo  $I \subset K[x_1, \dots, x_{n+1}]$  possiamo associargli un insieme algebrico proiettivo

$$V(I) = \{P = [x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}_K^n \mid f(P) = 0 \quad \forall f \in I\}$$

**Osservazione 2.3.** Se  $V$  è un insieme algebrico in  $\mathbb{P}_K^n$  definiamo il seguente insieme

$$Cone(V) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{A}_K^{n+1} \mid (x_1, \dots, x_{n+1}) \in V \text{ o } (x_1, \dots, x_{n+1}) = \underline{0}\}$$

detto *cono su  $V$* .

Se  $V \neq \emptyset$  allora  $I_{aff}(Cone(V)) = I_{proj}(V)$  e se  $I$  è un ideale omogeneo in  $K[x_1, \dots, x_{n+1}]$  tale che  $V_{proj}(I) \neq \emptyset$ , allora  $Cone(V_{proj}(I)) = V_{aff}(I)$ .

Questo permette di ricondurre molti dei problemi relativi a  $\mathbb{P}_K^n$  a problemi sullo spazio affine  $\mathbb{A}_K^n$ .

**Teorema 2.4.** Teorema degli zeri di Hilbert (Nullstellensatz)

Sia  $J \subset K[x_1, \dots, x_n]$ . Se  $g \in K[x_1, \dots, x_n]$  è identicamente nullo su  $V(J)$ , allora  $\exists m \in \mathbb{N}$  tale che  $g^m \in J$ .

**Corollario 2.5.** Sia  $S \subseteq \mathbb{A}_K^n$  un sottoinsieme algebrico di uno spazio affine  $n$ -dimensionale su  $K$ , ovvero  $S = V(J)$  per un ideale  $J \subset K[x_1, \dots, x_n]$ . Allora  $V(I(S)) = S$ .

*Dimostrazione.*  $V(I(S)) = V(I(V(J)))$ . Per (2.4)  $I(V(J)) = \text{Rad}(J)$  e  $V(I(S)) = V(\text{Rad}(J))$ .

Ora

$$\begin{aligned} p \in V(\text{Rad}(J)) \\ \iff f(p) = 0 \quad \forall f \in K[x_1, \dots, x_n] \text{ tale che } f^k \in J \text{ per un certo } k \in \mathbb{N} \\ \iff f(p) = 0 \quad \forall f \in J \iff p \in V(J), \end{aligned}$$

per cui  $V(\text{Rad}(J)) = V(J)$ . Abbiamo quindi che  $V(I(S)) = V(\text{Rad}(J)) = V(J) = S$ .  $\square$

Sia  $J \subset K[x_1, \dots, x_n]$  un ideale radicale.  $J$  è allora generato da un insieme di polinomi irriducibili  $\{f_1, \dots, f_m\}$  e  $V(J) = \{\underline{x} \in \mathbb{A}_K^n \mid f(\underline{x}) = 0 \forall f \in J\}$ . Chiameremo questo insieme algebrico  $S$ . Allora  $I(V(J)) = J$ , ossia  $I(S) = J$ . Se cominciamo con un insieme algebrico  $S$  possiamo lavorare in direzione contraria per trovare un ideale radicale (unico) in  $K[x_1, \dots, x_n]$ . Porremo  $J = I(S) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(\underline{x}) = 0 \forall \underline{x} \in S\}$ , per cui  $V(J) = V(I(S))$  che è uguale a  $S$  (vedi (2.5)). Abbiamo quindi un corrispondenza biunivoca tra ideali radicali in  $K[x_1, \dots, x_n]$  e sottoinsiemi algebrici di  $\mathbb{A}_K^n$ .

Ora siano  $J_1, J_2 \subset K[x_1, \dots, x_n]$  due ideali radicali, avremo che

$$\begin{aligned} p \in V(J_1 J_2) &\iff f(p) = 0 \quad \forall f \in J_1 J_2 \\ (f \in J_1 J_2 &\iff f = hg_1 g_2 \text{ per } g_1 \in J_1, g_2 \in J_2, h \in K[x_1, \dots, x_n]) \\ &\iff g_1(p) = 0 \quad \forall g_1 \in J_1 \text{ o } g_2(p) = 0 \quad \forall g_2 \in J_2 \\ &\iff p \in V(J_1) \text{ o } p \in V(J_2) \iff p \in V(J_1) \cup V(J_2). \end{aligned}$$

Per cui se un ideale radicale  $J$  non è primo (ovvero può essere scritto come prodotto di sottoideali  $J_i$ ) l'insieme algebrico  $V(J)$  associato è riducibile e



può essere espresso come unione di insiemi algebrici  $V(J_i)$ . Tuttavia se l'ideale è primo  $H$ , sarà un ideale radicale e perciò esiste un insieme algebrico associato  $V(H)$ . Poiché  $H$  è primo,  $V(H)$  è irriducibile. Abbiamo perciò una corrispondenza biunivoca tra ideali primi (un sottoinsieme degli ideali radicali) e insiemi algebrici irriducibili (un sottoinsieme degli insiemi algebrici).

Questa costruzione viene generalizzata agli anelli commutativi con unità.

**Definizione 2.6.** *Spec*

Sia  $R$  un anello unitario. Allora lo *spettro* di  $R$  viene definito come

$$\text{Spec}(R) := \{I \mid I \subseteq R \text{ è un ideale primo in } R\}$$

$\text{Spec}(R)$  viene solitamente associato alla topologia di Zariski.

**Teorema 2.7.** Topologia di Zariski su  $\text{Spec}(R)$

Definire gli insiemi chiusi su  $\text{Spec}(R)$  come  $\{V(J) \mid J \subseteq R \text{ è un ideale}\}$  produce una topologia:

- i.  $\emptyset, R$  sono chiusi;
- ii. L'intersezione di insiemi chiusi è chiusa:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} V(J_i) = V\left(\sum_{i=1}^{\infty} J_i\right) \quad \text{per una qualsiasi famiglia di ideali } \{J_i\}.$$

- iii. L'unione finita di insiemi chiusi è chiusa :

$$V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 J_2) \quad \text{per tutti gli ideali } J_1, J_2 \subseteq R.$$

- iv.  $V(J_1) \subseteq V(J_2) \iff \text{Rad}(J_2) \subseteq \text{Rad}(J_1)$ .

*Dimostrazione.* .

- i.  $V(R) = \emptyset, V(0) = \text{Spec}(R)$ .
- ii. Sia  $P$  un ideale primo. Assumendo  $P \in V(\sum_i J_i)$ , ovvero  $\sum_i J_i \subseteq P$ , allora  $J_i \subseteq P \forall i$ , per cui  $\bigcap_i J_i \subseteq P$ , ossia  $P \in \bigcap_i V(J_i)$ . Sia  $P \in \bigcap_i V(J_i)$ , allora  $P \in V(J_i) \forall i$ , cioè  $J_i \subseteq P$ , per cui  $\sum_i J_i \subseteq P$  dato che  $\sum_i J_i$  è il più piccolo ideale che contiene ogni  $J_i$ .

- iii. Se  $J_1 \subseteq P$  o  $J_2 \subseteq P$ , allora  $J_1 J_2 \subseteq P$  siccome  $J_1 J_2 \subseteq J_1, J_2$ . Sia  $J_1 J_2 \subseteq P$ .  
 Se  $J_1 \subseteq P$  allora  $V(J_1 J_2) \subseteq V(J_1) \cup V(J_2)$ . In caso contrario  $\exists j \in J_1$  tale che  $j \notin P$ . Ma a partire da quest'ipotesi  $j \cdot J_2 \subseteq P \Rightarrow J_2 \subseteq P$  dato che  $P$  è primo.
- iv.  $Rad(J_1)$  è l'intersezione di tutti gli ideali primi che contengono  $J_1$  per cui

$$\begin{aligned} V(J_1) \subseteq V(J_2) &\iff J_2 \text{ è contenuto in più ideali di } J_1 \\ &\iff Rad(J_2) \subseteq Rad(J_1) \end{aligned}$$

□

**Esempio 2.8.**  $R = K[x]$ .

$Spec(R) = \{(0)\} \cup \bigcup_{a \in K} (x - a)$ . Sia  $f \in K[x]$ . Poiché  $K$  è algebricamente chiuso,  $f$  può essere scritto come

$$f(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_s)^{\alpha_s} \text{ per } a_i \in K.$$

Allora

$$V((f)) = V(((x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_s)^{\alpha_s})) = \{(x - a_1), \dots, (x - a_s)\} \subseteq Spec(R)$$

che è proprio l'insieme degli ideali in  $Spec(R)$  che corrisponde ai punti  $\{a_1, \dots, a_s\} \subseteq \mathbb{A}_K$ .

Abbiamo perciò ottenuto una corrispondenza tra gli elementi di  $Spec$  e certi elementi di uno spazio geometrico corrispondente. In particolare per  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  otteniamo la seguente corrispondenza, data dal teorema degli zeri di Hilbert:

$$\begin{aligned} K[x_1, \dots, x_n] &\leftrightarrow \mathbb{A}_K^n \\ \text{Ideale radicale} &\leftrightarrow \text{Insieme algebrico} \\ \text{Ideali primi} &\leftrightarrow \text{Varietà} \\ \text{Ideali massimali} &\leftrightarrow \text{Punti in } \mathbb{A}_K^n \end{aligned}$$

Ci soffermeremo sugli elementi di  $Spec$  che corrispondono ai punti in  $\mathbb{A}_K^n$ . Questi saranno tutti e soli gli ideali massimali in  $K[x_1, \dots, x_n]$ , per cui denotiamo come  $Specm(R)$  il sottoinsieme di  $Spec(R)$  di cui fanno parte gli ideali massimali in  $Spec(R)$ . Esiste quindi una corrispondenza tra una varietà in  $\mathbb{A}_K^n$  definita da un polinomio  $f$  e un anello  $R$  modulo l'ideale  $(f)$ ,

ossia  $\mathbb{A}_K^n \supseteq \{f = 0\} \longleftrightarrow \frac{R}{(f)}$ .

In altre parole  $Spec$  contiene quegli ideali che corrispondono a varietà in  $\mathbb{A}_K^n$ , che sono gli insiemi chiusi irriducibili della topologia di Zariski, oltre a contenere l'insieme dei punti di  $\mathbb{A}_K^n$  che corrispondono a  $Specm(R)$ .

D'ora in avanti considereremo il caso  $K = \mathbb{C}$

**Esempio 2.9.**  $R = \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_1x_2 - x_3x_4}$ . Gli ideali primi in  $R$  sono quelli generati dai polinomi della forma  $f(\underline{x}) = \underline{x} - \underline{a}$  con  $\underline{a} \in \mathbb{C}^4$  quoziente l'ideale  $(x_1x_2 - x_3x_4)$ . Quindi abbiamo

$$Spec(R) = \frac{\{0\} \cup \bigcup_{\underline{a} \in \mathbb{C}^4} (\underline{x} - \underline{a})}{(x_1x_2 - x_3x_4)} \quad \text{e}$$

$$Specm(R) = \{\underline{x} \in \mathbb{C}^4 \mid x_1x_2 - x_3x_4 = 0\} \subset \mathbb{C}^4$$

Possiamo prendere in considerazione la controparte proiettiva di quello che abbiamo fatto precedentemente, lavorando con ideali omogenei di un anello  $R$ . Tuttavia, come è stato chiarito in (2.3), possiamo ricondurci nelle nostre considerazioni al caso affine.

## Capitolo 3

# Cono poliedrale convesso

Per il primo metodo di costruzione di varietà toriche cominceremo con un *ventaglio di coni poliedrali convessi* in uno spazio vettoriale reale generato da un reticolo (isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ ). Vedremo definizioni e considerazioni sui coni poliedrali convessi, prima di passare a quei risultati necessari alla costruzione delle varietà toriche.

**Definizione 3.1.** Cono poliedrale convesso

Sia  $N$  un reticolo con base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e sia  $S = \{v_1, \dots, v_s\}$  un sottoinsieme finito di  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Definiamo *cono poliedrale convesso*  $\sigma$  in  $N_{\mathbb{R}}$  generato da  $S$  come

$$\sigma = \{r_1 v_1 + \dots + r_s v_s \mid r_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, v_i \in N_{\mathbb{R}}\}$$

$v_i \in S$  sono detti *generatori* di  $\sigma$  e la *dimensione* di un cono  $\sigma$  è data da  $\dim(\sigma) = \dim(\mathbb{R} \cdot \sigma) = \dim(\sigma + (-\sigma))$ .

$\sigma$  è detto *strettamente convesso* se non contiene raggi per l'origine, ossia  $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ , e *razionale* se i suoi generatori sono elementi di un reticolo  $N$ .

Una *faccia*  $\tau$  di un cono  $\sigma$  è l'intersezione di  $\sigma$  con un qualsiasi iperpiano di supporto<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Sia  $D \subset \mathbb{A}_K^n$ . Diremo che l'iperpiano  $H = \{\underline{x} \in \mathbb{A}_K^n \mid \langle \underline{x}, u \rangle = \alpha\}$  *taglia*  $D$  se entrambe le metà aperte dello spazio create da  $H$  contengono punti di  $D$  ( $\exists \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in D$  tali che  $\langle \underline{x}_1, u \rangle < \alpha$  e  $\langle \underline{x}_2, u \rangle > \alpha$ ). Diremo invece che  $H$  è un iperpiano di *supporto* di  $D$  se  $H$  non taglia  $D$  ma la distanza tra  $D$  e  $H$  è zero. In altre parole,  $H$  è un supporto  $D$  se  $\sup\{\langle \underline{x}, u \rangle \mid \underline{x} \in D\} = \alpha$  o  $\inf\{\langle \underline{x}, u \rangle \mid \underline{x} \in D\} = \alpha$

Un cono è una faccia di se stesso, mentre le altre facce vengono dette *facce proprie* e una faccia di codimensione uno è detta *facet* (in uno spazio di dimensione  $n$  una facet avrà dimensione  $n - 1$  ).

**Definizione 3.2.** Ventaglio (fan)

Un *ventaglio*  $\Sigma$  in un reticolo  $N$  è un insieme finito di coni poliedrali razionali strettamente convessi  $\sigma$  in  $N_{\mathbb{R}}$  tali che:

- i. Ogni faccia di un cono in  $\Sigma$  è ancora un cono in  $\Sigma$ ;
- ii. L'intersezione di due coni in  $\Sigma$  è una faccia di entrambi.

L'insieme  $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$  è detto *supporto* di  $\Sigma$  e  $\Sigma(d)$  si riferisce all'insieme delle facce di dimensione  $d$  dei coni in  $\Sigma$ .

**Definizione 3.3.** Ventaglio/ Cono duale

Denotiamo con  $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$  il *reticolo duale* di  $N$ . Definiremo il *cono duale*  $\sigma^{\vee}$  in  $M_{\mathbb{R}}$  come

$$\sigma^{\vee} = \{u \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle u, v \rangle \geq 0 \forall v \in \sigma\}$$

Una faccia  $\tau$  di un cono  $\sigma$  può essere espressa come:

$$\tau = \sigma \cap u^{\perp} = \{v \in \sigma \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ per } u \in \sigma^{\vee}\}$$

Possiamo trovare un insieme di generatori per  $\sigma^{\vee}$  procedendo come segue. Per ciascun insieme  $\tau$  di  $n - 1$  generatori linearmente indipendenti di  $\sigma$  (ovvero una facet di  $\sigma$ ), risolvere per un vettore  $u$  che annulla l'insieme. Se  $u$  risulta non negativo su tutti i generatori di  $\sigma$  allora  $u_{\tau} = u$  è un generatore di  $\sigma^{\vee}$ . In caso contrario sarà l'opposto  $-u$  ad essere non negativo e quindi sarà quest'ultimo  $u_{\tau} = -u$  il generatore cercato.

Questo metodo mostra inoltre che se  $\sigma$  è razionale, allora anche  $\sigma^{\vee}$  sarà razionale. L'insieme di tali  $u_{\tau}$  è finito, il che implica che anche  $\sigma^{\vee}$  è un cono poliedrale convesso.

Definiamo il *ventaglio duale*  $\Sigma^{\vee}$  come il ventaglio di cui fanno parte i coni  $\sigma^{\vee}$  per ogni  $\sigma \in \Sigma(n)$  e tutte le loro facce.

Vediamo ora alcuni esempi di coni e ventagli nel nostro reticolo  $N$  e dei loro duali.

**Esempio 3.4.** Siano  $N$  un reticolo generato da  $\{e_1, e_2\}$ ,  $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$  il reticolo duale generato da  $\{e_1^*, e_2^*\}$  e  $\sigma$  il cono in  $N_{\mathbb{R}}$  generato da  $\{e_1, e_1 + e_2\}$ . Per trovare  $\sigma^\vee$  in  $M_{\mathbb{R}}$  dobbiamo prima trovare i suoi generatori prendendo ciascun generatore di  $\sigma$  e un vettore in  $M_{\mathbb{R}}$  che lo annulli. Abbiamo che  $\langle e_1, u \rangle = 0$  è soddisfatto per  $u = \pm e_2$  e che  $e_2$  è non negativo su tutti i generatori di  $\sigma$  quindi possiamo prendere  $e_2^*$  come primo generatore. Inoltre la condizione  $\langle e_1 + e_2, u \rangle = 0$  è soddisfatta per  $u = \pm(e_1 - e_2)$  per cui prendiamo  $e_1^* - e_2^*$  come secondo generatore. Abbiamo quindi  $\sigma^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle$ .

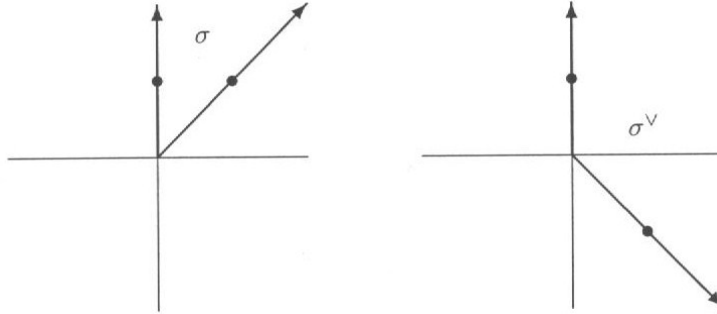


Figura 3.1:

**Esempio 3.5.** Siano  $\sigma_0 = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1, e_2 \rangle$ ,  $\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_2, -e_1 - e_2 \rangle$ ,  $\sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1, -e_1 - e_2 \rangle$  coni in  $N_{\mathbb{R}}$  e sia  $\Sigma$  un ventaglio in  $N_{\mathbb{R}}$  che contiene questi coni e tutte le loro facce. Avremo i coni duali  $\sigma_0^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1^*, e_2^* \rangle$ ,  $\sigma_1^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle -e_1^*, -e_1^* - e_2^* \rangle$ ,  $\sigma_2^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle -e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle$  in  $M_{\mathbb{R}}$  e il ventaglio duale  $\Sigma^\vee$  (ventaglio in  $M_{\mathbb{R}}$  che contiene  $\sigma_0^\vee, \sigma_1^\vee$  e  $\sigma_2^\vee$  e tutte le loro facce).

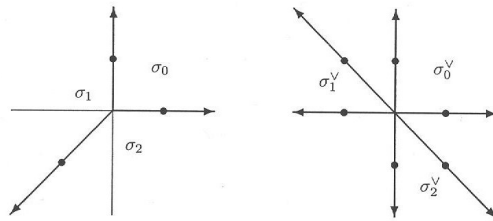


Figura 3.2:

**Esempio 3.6.** Sia  $N = \mathbb{Z}\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  il nostro reticolo e  $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1, e_2, e_1 + e_2 + e_3 \rangle$  un cono in  $N_{\mathbb{R}}$ . Usando il metodo descritto in (3.3) prendiamo ciascuno insieme degli  $n - 1 = 2$  generatori di  $\sigma$  per poi trovare quell' $u$  che annulla l'insieme e se  $u$  o  $-u$  è non negativo su tutti i generatori di  $\sigma$ , prenderemo quest'ultimo come il generatore di  $\sigma^\vee$ .

Generatori di $\sigma$	$\pm u$	generatore di $\sigma^\vee$
$e_1, e_2$	$\pm e_3$	$e_3^*$
$e_1, e_1 + e_2 + e_3$	$\pm(e_2 - e_3)$	$e_2^* - e_3^*$
$e_2, e_1 + e_2 + e_3$	$\pm(e_1 - e_3)$	$e_1^* - e_3^*$

Per cui avremo che  $\sigma^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_3^*, e_2^* - e_3^*, e_1^* - e_3^* \rangle$ .

**Lemma 3.7.** Se  $\sigma$  è un cono poliedrale convesso e  $v_0 \notin \sigma$ , esiste un  $u_0 \in \sigma^\vee$  per cui  $\langle u_0, v_0 \rangle < 0$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $v_0 \notin \sigma$  esiste un semispazio che separa  $v_0$  e  $\sigma$ : esiste un  $u_0$  tale che  $\langle u_0, v_0 \rangle < 0$  e  $\langle u_0, v \rangle \geq 0 \forall v \in \sigma$ , ossia  $u_0 \in \sigma^\vee$ .  $\square$

**Teorema 3.8.** Teorema di dualità

Per un cono poliedrale convesso  $\sigma$ ,  $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ .

*Dimostrazione.* Per  $v_0 \notin \sigma$  esiste  $u_0 \in \sigma^\vee$  tale che  $\langle u_0, v_0 \rangle < 0$ . Se anche  $v_0$  appartenesse a  $(\sigma^\vee)^\vee$  si avrebbe che  $\forall u \in \sigma^\vee$ ,  $\langle v_0, u \rangle \geq 0$ , per cui  $v_0 \notin (\sigma^\vee)^\vee$  e  $\sigma \not\supseteq (\sigma^\vee)^\vee$ . Per  $w_0 \notin (\sigma^\vee)^\vee$  esiste  $u_0 \in \sigma^\vee$  tale che  $\langle w_0, u_0 \rangle < 0$ . Ora  $u_0 \in \sigma^\vee \Rightarrow \langle u_0, v \rangle \geq 0 \forall v \in \sigma$  quindi  $w_0 \notin \sigma$  e  $\sigma \not\subseteq (\sigma^\vee)^\vee$ .  $\square$

**Lemma 3.9.** Ogni faccia  $\tau$  di un cono poliedrale convesso  $\sigma$  è a sua volta un cono poliedrale convesso.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\sigma$  sia generato da  $v_1, \dots, v_n$ . Allora  $\tau = \sigma \cap u^\perp$  è generato dai  $v_i$  che soddisfano  $\langle u, v_i \rangle = 0$ .  $\square$

**Lemma 3.10.** Lemma di Gordan

$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  è un semigruppò finitamente generato<sup>2</sup>.

*Dimostrazione.* Si prendano  $u_1, \dots, u_s$  in  $\sigma^\vee \cap M$  tali che  $\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0} \langle u_1, \dots, u_s \rangle$ . Poniamo  $K = \{ \sum_{i=0}^s \alpha_i u_i \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1 \}$ . Poiché  $K$  è chiuso e limitato  $K$  è compatto, e poiché  $M$  è discreto  $|K \cap M| < \infty$ . Sia  $u \in S_\sigma$ , allora  $u = \sum_{i=0}^s r_i u_i$  dove  $r_i \geq 0$ . Avremo che  $r_i = m_i + t_i$  per un  $m_i \geq 0$ ,  $0 \leq t_i \leq 1$ , da cui  $u = \sum_{i=0}^s t_i u_i + \sum_{i=0}^s m_i u_i = u' + \sum_{i=0}^s m_i u_i$  per un  $u' \in K \cap M$ . La ripetizione del processo mostra che  $u \in \mathbb{Z} \langle M \cap K \rangle$  e quindi  $S_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0} \langle M \cap K \rangle$  è finitamente generato.  $\square$

**Definizione 3.11.** Per  $S_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0} \langle u_1, \dots, u_s \rangle$ , denotiamo con  $A_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma]$  la  $\mathbb{C}$ -algebra commutativa determinata da  $S_\sigma$ .  $A_\sigma$  avrà una base  $\chi^{u_1}, \dots, \chi^{u_s}$  la cui moltiplicazione è determinata dall'addizione in  $S_\sigma$ :

$$\chi^u \cdot \chi^{u'} = \chi^{u+u'}.$$

L'unità 1 in  $A_\sigma$  sarà perciò  $\chi^0$ .

Il seguente corollario segue immediatamente dal lemma di Gordan.

**Corollario 3.12.**  $A_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma]$  è una  $\mathbb{C}$ -algebra commutativa finitamente generata.

**Lemma 3.13.** Sia  $\sigma$  un cono poliedrale convesso e sia  $u$  in  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ . Allora  $\tau = \sigma \cap u^\perp$  è un cono poliedrale convesso razionale. Tutte le facce di  $\sigma$  hanno questa forma e  $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$ .

*Dimostrazione.* Se  $\tau$  è una faccia, allora  $\tau = \sigma \cap u^\perp$  per ogni  $u$  nell'interno di  $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ , e  $u$  può essere preso in  $M$  poiché  $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$  è razionale. Dato  $w \in S_\tau$ ,  $w + p \cdot u$  è in  $\sigma^\vee$  per  $p$  positivo e grande abbastanza, e prendere  $p$  in  $\mathbb{Z}$  mostra che  $w$  appartiene a  $S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$ .  $\square$

<sup>2</sup>Un *semigruppò*  $(A, +)$  è un insieme munito di un'operazione binaria associativa. Viene detto *finitamente generato* se l'insieme dei generatori di  $A$  è finito



**Lemma 3.14.** Relazioni lineari positive

Sia  $X = \{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{Z}^n$  un insieme arbitrario e sia  $\tilde{X} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^r \times \mathbb{R}_{\geq 0}^r \mid \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^r \mu_i a_i\}$  l'insieme di tutte le *relazioni lineari positive* su  $X$ . Allora  $\tilde{X} \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0}^r \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^r)$  è un monoide finitamente generato.

*Dimostrazione.* Se abbiamo  $x, y \in \tilde{X}$  allora  $x + y \in \tilde{X}$  e  $cx \in \tilde{X} \forall c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , per cui esprimendo  $\tilde{X}$  come un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{2k}$  con elementi in  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{2k}$ , vediamo che  $\tilde{X}$  è un cono poliedrale convesso. Per (3.10) avremo che  $\tilde{X} \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0}^r \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^r)$  è finitamente generato.  $\square$

**Teorema 3.15.** Se  $S_\sigma$  è generato da  $u_1, \dots, u_t$  e  $A_\sigma = \mathbb{C}[\chi^{u_1}, \dots, \chi^{u_t}] = \frac{\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_t]}{I}$

allora  $I$  è generato da polinomi nella forma  $Y_1^{a_1} \cdot Y_2^{a_2} \cdot \dots \cdot Y_t^{a_t} - Y_1^{b_1} \cdot Y_2^{b_2} \cdot \dots \cdot Y_t^{b_t}$ , dove  $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$  sono interi non negativi che soddisfano l'equazione

$$a_1 u_1 + \dots + a_t u_t = b_1 u_1 + \dots + b_t u_t$$

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_t]$ ,  $U = (u_1, \dots, u_t) \in (\mathbb{Z}^n)^t$  e siano i vettori  $A$  della forma  $(a_1, \dots, a_t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^t$  allora

$$\begin{aligned} f &= \sum_{A \in \hat{A}} \lambda_A Y^A = \sum_{A \in \hat{A}} \lambda_A Y_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Y_t^{a_t} = \sum_{A \in \hat{A}} \lambda_A \chi^{A \cdot U} = \\ &= \sum_{A \in \hat{A}} \lambda_A (\chi^{u_1})^{a_1} \cdot \dots \cdot (\chi^{u_t})^{a_t} \end{aligned}$$

per  $\hat{A} = \{A_1, \dots, A_s\}$ ,  $\lambda_A \in \mathbb{R}$ . Per ogni  $u \in \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n$  il coefficiente di  $\chi^u$  è

$$\sum_{A \in \hat{A} \mid A \cdot U = u} \lambda_A = c_u$$

Allora avremo che  $f$  è una relazione (ossia un elemento di  $I$ ) se e solo se  $c_u = 0 \forall u \in \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ . Se  $\lambda \neq 0$  per un certo  $A \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^t$  allora  $\exists B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^t$ ,  $B \neq A$  tale che  $A \cdot U = B \cdot U$  e  $\lambda_B \neq 0$ . Allora risulta che  $\lambda_A (Y^A - Y^B)$  è una relazione in  $I$ , e analogamente anche  $f' = f - \lambda_A (Y^A - Y^B)$  è una relazione in  $I$  con un numero di elementi strettamente inferiore a  $f$ . Ripetendo questo procedimento vediamo che  $f$  è una combinazione lineare di relazioni della forma  $(Y^A - Y^B)$ , per cui  $I$  è generato da binomi di questa forma.  $\square$

**Corollario 3.16.** Se  $S_\sigma$  è generato da  $u_1, \dots, u_t$  e

$$A_\sigma = \mathbb{C}[\chi^{u_1}, \dots, \chi^{u_t}] = \frac{\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_t]}{I},$$

allora  $I$  è finitamente generato.

*Dimostrazione.* Da (3.15) sappiamo che  $I$  è generato dai binomi della forma  $(Y^A - Y^B) = 0$  e che

$$\begin{aligned}(Y^A - Y^B) = 0 &\iff (\chi^{A \cdot U} - \chi^{B \cdot U}) = 0 \\ \chi^{A \cdot U} = \chi^{B \cdot U} &\iff A \cdot U = B \cdot U\end{aligned}$$

Per cui applicando (3.14),  $I \cong \{(A, B) \mid A \cdot U = B \cdot U\}$  è finitamente generato.  $\square$



## Capitolo 4

# Costruire una varietà torica

Possiamo ora costruire una varietà torica a partire da un ventaglio di coni poliedrali convessi. Questo metodo assegnerà a ciascun cono del ventaglio una varietà torica affine e una varietà torica verrà creata incollando tra loro queste varietà toriche affini mediante isomorfismi di incollamento che come vedremo sono definiti dalle facce comuni dei coni. Alla fine del capitolo esamineremo le orbite dell'azione torica. Sia  $\Sigma$  nel reticolo  $N$

**Lemma 4.1.** Se  $\tau$  è una faccia di  $\sigma$ , sia

$$\begin{aligned} S_\sigma &= \sigma^\vee \cap M, & S_\tau &= \tau^\vee \cap M, \\ A_\sigma &= \mathbb{C}[S_\sigma], & A_\tau &= \mathbb{C}[S_\tau], \\ U_\sigma &= \text{Spec}(A_\sigma), & U_\tau &= \text{Spec}(A_\tau) \end{aligned}$$

allora  $U_\tau$  è un sottoinsieme principale (aperto) di  $U_\sigma$ .

*Dimostrazione.* Per il lemma (3.13), esiste un  $u \in S_\sigma$  con  $\tau = \sigma \cap u^\perp$  e  $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$ . Di conseguenza ciascun elemento della base di  $\mathbb{C}[S_\tau]$  può essere scritto nella forma  $\chi^{w-pu} = \frac{\chi^w}{(\chi^u)^p}$  per  $w \in S_\sigma$  e  $p \in \mathbb{Z}$ . Perciò  $A_\tau = (A_\sigma)_{\chi^u}$  e quest'anello localizzato contiene  $A_\sigma$ .

Il fatto che  $A_\tau$  sia una sottoalgebra di  $A_\sigma$  definisce la mappa  $U_\tau \rightarrow U_\sigma$  che identifica  $U_\tau$  a un sottoinsieme principale (aperto) di  $U_\sigma$ : si ha infatti  $U_\tau = \{x \in U_\sigma \mid u(x) \neq 0\}$   $\square$

**Lemma 4.2.** Sia  $N = \mathbb{Z}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ ,  $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle e_1^*, \dots, e_n^* \rangle$  e sia  $\Sigma$  un ventaglio su  $N$ . Per ciascun  $\sigma \in \Sigma$  sia  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  e  $A_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma]$ .  $S_\sigma$

è un semigrupp finitamente generato (segue da 3.10) e  $A_\sigma$  è una  $\mathbb{C}$ -algebra commutativa finitamente generata (3.12). Sia  $U_\sigma = \text{Spec}(A_\sigma)$ .

Ogni coppia di coni  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  ha una faccia in comune  $\tau$ , per cui per (4.1) esistono le mappe  $\Phi : U_\tau \rightarrow U_\sigma$  e  $\phi : U_\tau \rightarrow U_{\sigma'}$ , che identificano  $U_\tau$  ad un sottoinsieme aperto principale di  $U_\sigma$  e  $U_{\sigma'}$ . Allora applicando la seguente identificazione:

$$\begin{aligned} f : \Phi(U_\tau) &\rightarrow \phi(U_\tau) \\ x &\mapsto \phi(\Phi^{-1}(x)) \end{aligned}$$

con inversa

$$y \mapsto \Phi(\phi^{-1}(y))$$

per ogni  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  da cui si ottiene la varietà torica  $X(\Sigma)$ .

*Dimostrazione.*  $S_\sigma$  è un semigrupp finitamente generato e sia  $\{u_1, \dots, u_k\}$  un insieme di generatori di  $S_\sigma$ , con  $u_i = (u_i^1, \dots, u_i^n) \in \mathbb{Z}^n$ . Sia  $t = (t_1, \dots, t_n) \in T$  e  $x = (x_1, \dots, x_k) \in U_\sigma$ . Allora avremo l'azione di  $T$  su  $U_\sigma$  data da

$$\begin{aligned} T \times U_\sigma &\longrightarrow U_\sigma \\ (t, x) &\mapsto t \cdot x = (t^{u_1} x_1, \dots, t^{u_k} x_k) \end{aligned}$$

dove  $t^{u_i} = t_1^{u_i^1} \cdot \dots \cdot t_n^{u_i^n} \in \mathbb{C}^*$ . Perciò ciascun  $U_\sigma$  estende l'azione del toro su se stesso.

Ora fissiamo  $X_i = \chi^{e_i^*}$ , gli elementi di  $\mathbb{C}[M]$  che corrispondono alla base di  $M$ . Si consideri l'origine  $\{0\}$  (si tratta di un cono) e una faccia di un qualsiasi altro cono in  $N$ . Avremo che  $S_{\{0\}} = M$  con generatori  $\pm e_1^*, \dots, \pm e_n^*$ , per cui  $A_{\{0\}} = \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$ , e quindi  $U_{\{0\}} = (\mathbb{C}^*)^n$ . Poiché  $\{0\}$  è la faccia di ogni cono  $\sigma \in \Sigma$ , ciascuna  $U_\sigma$  conterrà il toro algebrico  $U_{\{0\}}$  ricoperto come un sottoinsieme aperto principale per (4.1). Perciò le  $U_\sigma$  sono varietà toriche affini. Inoltre poiché  $X(\Sigma)$  è costruita incollando assieme diverse varietà toriche affini,  $X(\Sigma)$  conterrà il toro algebrico come sottoinsieme principale aperto ed estenderà l'azione del toro su se stesso, e sarà perciò una varietà torica.

In [5, § I.2] viene dimostrato che tutte le varietà toriche normali vengono costruite in questo modo, in altre parole ogni varietà torica normale è determinata da un ventaglio.  $\square$

In vista degli esempi seguenti imponiamo  $N = \mathbb{Z}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$  con  $e_1, \dots, e_n$ , base canonica per  $\mathbb{R}^n$ , e denotiamo le facce che siano intersezione dei coni  $\sigma_i$  nel nostro ventaglio con  $\sigma_{ij} = \sigma_i \cap \sigma_j$  per  $i \neq j$  e  $\sigma_{ijk} = \sigma_i \cap \sigma_j \cap \sigma_k$  per  $i \neq j \neq k$ .

**Esempio 4.3.** Sia  $n = 1$  e  $\Sigma$  sia il ventaglio formato dai coni  $\mathbb{R}_{\leq 0}$ ,  $\{0\}$  e  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Allora abbiamo  $\mathbb{R}_{\leq 0}^\vee = \mathbb{R}_{\leq 0}$ ,  $\{0\}^\vee = \mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}_{\geq 0}^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}$  e  $A_{\mathbb{R}_{\leq 0}} = \mathbb{C}[X^{-1}]$ ,  $A_{\{0\}} = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$  e  $A_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = \mathbb{C}[X]$ . Questi daranno origine alle varietà toriche affini  $U_{\mathbb{R}_{\leq 0}} = \mathbb{C}_{(X^{-1})}$ ,  $U_{\{0\}} = \mathbb{C}^*$  e  $U_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = \mathbb{C}_{(X)}$ . Siano  $[Z_0 : Z_1]$  le coordinate omogenee per  $\mathbb{P}^1$  e sia  $X = \frac{Z_1}{Z_0}$  (e  $X^{-1} = \frac{Z_0}{Z_1}$ ). Allora si ha che

$$U_{\mathbb{R}_{\leq 0}} = U_1 = \left\{ \left[ \frac{Z_0}{Z_1} : 1 \right] \mid Z_1 \neq 0 \right\} \text{ e}$$

$$U_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = U_0 = \left\{ \left[ 1 : \frac{Z_1}{Z_0} \right] \mid Z_0 \neq 0 \right\}$$

Poiché  $\{0\}$  è faccia di entrambi  $\mathbb{R}_{\leq 0}$  e  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  otterremo le mappe:

$$\begin{aligned} \Phi : U_{\{0\}} &\rightarrow U_{\mathbb{R}_{\leq 0}} & \phi : U_{\{0\}} &\rightarrow U_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \\ (x, x^{-1}) &\mapsto (x^{-1}) & (x, x^{-1}) &\mapsto (x) \end{aligned}$$

Tramite l'identificazione

$$\begin{aligned} f : \phi(U_{\mathbb{R}_{\geq 0}}) &\rightarrow \Phi(U_{\mathbb{R}_{\leq 0}}) \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

sull'intersezione otteniamo  $X(\Sigma) = \mathbb{P}^1$

**Esempio 4.4.** Sia  $n = 2$  e  $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1, e_2 \rangle$ . Allora abbiamo  $\sigma^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1^*, e_2^* \rangle$ . Perciò  $S_\sigma$  è generato da  $\{e_1^*, e_2^*\}$  e  $A_\sigma = \mathbb{C}[X, Y]$ . Perciò la varietà torica affine generata dal ventaglio costituito da  $\sigma$  e dalle sue facce sarà dato da  $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[X, Y]) = \mathbb{C}^2$ .

**Esempio 4.5.** Sia  $n = 2$  e si prenda il ventaglio  $\Sigma$  come in (3.5) costituito da

$$\sigma_0 = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1, e_2 \rangle, \quad \sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_2, -e_1 - e_2 \rangle, \quad \sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1, -e_1 - e_2 \rangle$$

e le loro facce  $\sigma_{ij} = \sigma_i \cap \sigma_j$  per  $i \neq j$  e  $\sigma_{ijk} = \sigma_i \cap \sigma_j \cap \sigma_k$  per  $i \neq j \neq k$ . Allora avremo i coni duali<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\sigma_0^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1^*, e_2^* \rangle, & \sigma_1^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle -e_1^*, -e_1^* + e_2^* \rangle & \sigma_2^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle -e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle, \\ \sigma_{01}^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1^*, -e_1^*, e_2^* \rangle & \sigma_{02}^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1^*, e_2^*, -e_2^* \rangle, \\ \sigma_{12}^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1^* - e_2^*, -e_1^* + e_2^*, -e_1^* \rangle\end{aligned}$$

Imponendo  $\chi^{e_1^* - e_2^*} = U$  e  $\chi^{-e_1^* + e_2^*} = V$  abbiamo le  $\mathbb{C}$ -algebre corrispondenti:

$$\begin{aligned}A_{\sigma_0} &= \mathbb{C}[X, Y], & A_{\sigma_1} &= \mathbb{C}[X^{-1}, V], & A_{\sigma_2} &= \mathbb{C}[U, Y^{-1}], \\ A_{\sigma_{01}} &= \mathbb{C}[X, X^{-1}, Y], & A_{\sigma_{02}} &= \mathbb{C}[X, Y, Y^{-1}], & A_{\sigma_{12}} &= \mathbb{C}[U, V, X^{-1}]\end{aligned}$$

e le varietà toriche affini

$$\begin{aligned}U_{\sigma_0} &= \mathbb{C}_{(X, Y)}^2, & U_{\sigma_1} &= \mathbb{C}_{(X^{-1}, V)}^2, & U_{\sigma_2} &= \mathbb{C}_{(U, Y^{-1})}^2, \\ U_{\sigma_{01}} &= \frac{\mathbb{C}^3_{(X, X^{-1}, Y)}}{\langle XX^{-1}-1 \rangle}, & U_{\sigma_{02}} &= \frac{\mathbb{C}^3_{(X, Y, Y^{-1})}}{\langle YY^{-1}-1 \rangle}, & U_{\sigma_{12}} &= \frac{\mathbb{C}^3_{(U, V, X^{-1})}}{\langle UV-1 \rangle},\end{aligned}$$

Queste vengono unite attraverso l'identificazione data dalle mappe:

$$\begin{aligned}\Phi_{01} : U_{\sigma_{01}} &\rightarrow U_{\sigma_0} & \phi_{01} : U_{\sigma_{01}} &\rightarrow U_{\sigma_1} \\ (x, x^{-1}, y) &\mapsto (x, y) & (x, x^{-1}, y) &\mapsto (x^{-1}, x^{-1}y) \\ \Phi_{02} : U_{\sigma_{02}} &\rightarrow U_{\sigma_0} & \phi_{02} : U_{\sigma_{02}} &\rightarrow U_{\sigma_2} \\ (x, y, y^{-1}) &\mapsto (x, y) & (x, y, y^{-1}) &\mapsto (xy^{-1}, y^{-1}) \\ \Phi_{12} : U_{\sigma_{12}} &\rightarrow U_{\sigma_1} & \phi_{12} : U_{\sigma_{12}} &\rightarrow U_{\sigma_2} \\ (u, v, x^{-1}) &\mapsto (x^{-1}, v) & (x, v, x^{-1}) &\mapsto (u, ux^{-1})\end{aligned}$$

ovvero le identificazioni:

$$\begin{aligned}f_{ij} : \Phi_{ij}(U_{\sigma_{ij}}) &\rightarrow \phi_{ij}(U_{\sigma_{ij}}) \\ x &\mapsto \phi_{ij}(\Phi_{ij}^{-1}(x))\end{aligned}$$

con inversa

$$y \mapsto \Phi_{ij}(\phi_{ij}^{-1}(y))$$

<sup>1</sup>Per  $\sigma_{12}^\vee$  possiamo scegliere  $-e_1^*$  o  $-e_2^*$  come generatori di  $\sigma_{12}^\vee$ , e la varietà torica risultante sarà la stessa.

Se imponiamo  $X = \frac{Z_1}{Z_0}$  e  $Y = \frac{Z_2}{Z_0}$ , allora le nostre varietà toriche affini  $U_{\sigma_i}$  per  $i = 0, 1, 2$  corrispondono a copie di  $\mathbb{C}^2$ , i sottoinsiemi di  $\mathbb{P}^2$  dove  $Z_i \neq 0$ , e potremo quindi dividere le nostre coordinate omogenee  $[Z_0 : Z_1 : Z_2]$  per  $Z_i$  e ottenere così  $U_{\sigma_i} = \{[\frac{Z_0}{Z_i} : \frac{Z_1}{Z_i} : \frac{Z_2}{Z_i}] \mid Z_i \neq 0\}$ . Le nostre identificazioni diventano le mappe:

$$\begin{aligned} f_{01} : U_{\sigma_0} \setminus (\frac{Z_1}{Z_0} = 0) &\rightarrow U_{\sigma_1} \setminus (\frac{Z_0}{Z_1} = 0) \\ (1 : x : y) &\rightarrow (\frac{1}{x} : 1 : \frac{y}{x}) \\ f_{02} : U_{\sigma_0} \setminus (\frac{Z_2}{Z_0} = 0) &\rightarrow U_{\sigma_2} \setminus (\frac{Z_0}{Z_2} = 0) \\ (1 : x : y) &\rightarrow (\frac{1}{y} : \frac{x}{y} : 1) \\ f_{12} : U_{\sigma_1} \setminus (\frac{Z_2}{Z_1} = 0) &\rightarrow U_{\sigma_2} \setminus (\frac{Z_1}{Z_2} = 0) \\ (x : 1 : y) &\rightarrow (\frac{x}{y} : \frac{1}{y} : 1) \end{aligned}$$

E queste tre varietà toriche affini si incollano insieme a formare  $X(\Sigma) = \mathbb{P}^2$ .

**Esempio 4.6.** Sia  $n = 2$  e sia  $\Sigma$  formato dai coni

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \mathbb{R}_{\geq} \langle e_1, e_2 \rangle, & \sigma_1 &= \mathbb{R}_{\geq} \langle e_1, -e_2 \rangle, \\ \sigma_2 &= \mathbb{R}_{\geq} \langle -e_1, e_2 \rangle, & \sigma_3 &= \mathbb{R}_{\geq} \langle -e_1, -e_2 \rangle. \end{aligned}$$

e dalle loro facce. Qui i  $\sigma_i$  sono tutti autoduali, ovvero  $\sigma_i = \sigma_i^\vee$ . Allora

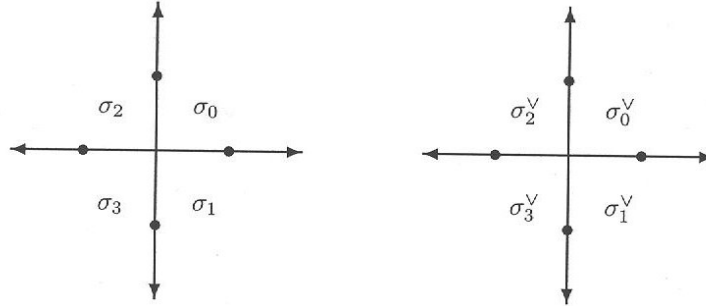


Figura 4.1:

avremo

$$\begin{aligned} U_{\sigma_0} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[X, Y]), & U_{\sigma_1} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[X, Y^{-1}]), \\ U_{\sigma_2} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[X^{-1}, Y]), & U_{\sigma_3} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[X^{-1}, Y^{-1}]). \end{aligned}$$

e le incolleremo usando le identificazioni



$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \longleftrightarrow & (x, y^{-1}) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ (x^{-1}, y) & \longleftrightarrow & (x^{-1}, y^{-1}) \end{array}$$

per ottenere  $X(\Sigma) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

**Esempio 4.7.** Sia  $\sigma$  il cono con generatori  $e_1, \dots, e_k$  per  $k \in \mathbb{N}$  con  $1 \leq k \leq n$ . Allora

$$S_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot e_1^* + \dots + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot e_k^* + \mathbb{Z} \cdot e_{k+1} + \dots + \mathbb{Z} \cdot e_n^*$$

Perciò  $A_\sigma = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, X_{k+1}^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$  e

$$U_\sigma = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \dots \times \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$$

Ne segue che se  $\sigma$  è generato da  $k$  elementi che possono essere estesi ad una base di  $N$ , allora  $U_\sigma$  è un prodotto di  $k$ -spazi affini e un toro algebrico  $(n-k)$ -dimensionale.

**Esempio 4.8.** Sia  $n = 3$ ,  $\sigma_0 = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  e  $\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1, -e_2, e_3 \rangle$ . Allora abbiamo i coni duali  $\sigma_0^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1^*, e_2^*, e_3^* \rangle$  e  $\sigma_1^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1^*, -e_2^*, e_3^* \rangle$  e le varietà affini corrispondenti  $U_{\sigma_0} = \text{Spec}(\mathbb{C}[X, Y, Z])$  e  $U_{\sigma_1} = \text{Spec}(\mathbb{C}[X, Y^{-1}, Z])$ . Incollandole assieme usando le identificazioni  $(x, y, z) \mapsto (x, y^{-1}, z)$  otterremo che  $X(\Sigma) = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ .

Poiché il toro  $(\mathbb{C}^*)^n$  agisce su  $X(\Sigma)$  possiamo studiare le orbite di  $X(\Sigma)$  tramite l'azione del toro. Esisterà un'orbita di questo tipo  $O_\sigma$  per ciascun cono  $\sigma \in \Sigma$  e  $X(\Sigma)$  sarà l'unione disgiunta di queste orbite. Indichiamo con  $V(\sigma)$  la chiusura di  $O_\sigma$ .

**Esempio 4.9.** Sia  $X = \mathbb{C}^n$  con toro  $T = (\mathbb{C}^*)^n$ . Le orbite sono insiemi della forma

$$O(I) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = 0 \text{ per } i \in I, z_i \neq 0 \text{ per } i \notin I\}$$

con  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Sia  $\sigma$  il cono generato da  $\{e_i \mid i \in I\}$ , l'orbita  $O_\sigma$  che corrisponde a  $\sigma$  è proprio l'orbita  $O(I)$ . Se  $\dim(\sigma) = k$  avremo che  $O_\sigma \cong (\mathbb{C}^*)^{n-k}$ .

In particolare si vede che le orbite di codimensione uno corrispondono ai raggi del ventaglio associato a  $X$ .

**Esempio 4.10.** Sia  $e_0 = -e_1 - \dots - e_n$  e sia  $\Sigma$  il ventaglio generato dai sottoinsiemi di  $\{e_0, \dots, e_n\}$ , avremo  $X(\Sigma) = \mathbb{P}^n$ . Se  $\sigma$  è il cono generato da  $\{e_i \mid i \in I\}$  l'orbita associata sarà  $O_\sigma = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n \mid z_i = 0, i \in I, z_i \neq 0, i \in I^c\}$  con chiusura  $V(\sigma) = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n \mid z_i = 0 \text{ per } i \in I\}$ .

Questa costruzione delle varietà toriche fornisce una corrispondenza tra le proprietà combinatorie di  $\Sigma$  e la geometria della varietà torica  $X(\Sigma)$ . Ogni cono  $\sigma$  in  $\Sigma$  corrisponde alla chiusura di un'unica orbita  $V(\sigma)$ . Si ha inoltre:

- $X(\Sigma)$  è *completa* (e *compatta*) se e solo se  $|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$ . In questo caso  $\Sigma$  è detto *completo*;
- $X(\Sigma)$  è *liscia* (varietà non singolare) se e solo se i generatori di ciascun cono in  $\Sigma$  appartengono a una  $\mathbb{Z}$ -base di  $N$  (vedi (4.7)) e  $\Sigma$  è detto *liscio*.



## Capitolo 5

# Caratteri e sottogruppi a un parametro

Nell'introduzione è stato suggerito che la corrispondenza tra i ventagli e le varietà toriche sia dovuta al fatto che l'insieme dei monomi  $x^\chi$  (per il carattere  $\chi$ ) che sono regolari su  $X$  formi un cono convesso nel reticolo di  $(\mathbb{C}^*)^n$ . Ci soffermeremo su questo più in dettaglio.

**Definizione 5.1.** Caratteri e sottogruppi ad un parametro

Sia

$$\begin{aligned}\chi^m : (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto t^m = \prod_{i=1}^n t_i^{m_i}\end{aligned}$$

un omomorfismo di gruppi per  $m \in \mathbb{Z}^n$ . Allora  $\chi^m$  viene detto *carattere*.

Sia

$$\begin{aligned}\lambda^u : \mathbb{C}^* &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \\ t &\mapsto (t^{u_1}, \dots, t^{u_n})\end{aligned}$$

un omomorfismo di gruppi per  $u \in \mathbb{Z}^n$ . Allora  $\lambda^u$  è detto *sottogruppo ad un parametro*.

Ora definiamo  $M$  il gruppo dei caratteri e  $N$  il gruppo dei sottogruppi ad un parametro.

$$\begin{aligned}M &:= \{ \chi : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^* \mid \chi \text{ è un carattere} \} \\ N &:= \{ \lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \mid \lambda \text{ è un sottogruppo ad un parametro} \}\end{aligned}$$

Notiamo che

- $M \cong \mathbb{Z}^n$  dove  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$  dà

$$\chi^m(t_1, \dots, t_n) = t_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_n^{m_n}$$

- $N \cong \mathbb{Z}^n$  dove  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$  dà

$$\lambda^u(t) = t^{u_1} \cdot \dots \cdot t^{u_n}$$

Dato  $\chi^m \in M$  e  $\lambda^u \in N$  abbiamo la composizione

$$\begin{aligned} \chi^m \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ t &\mapsto \chi^m \circ \lambda^u(t) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \chi^m \circ \lambda^u(t) &= \chi^m(t^{u_1, \dots, t^{u_n}}) = t^{u_1 m_1} \cdot \dots \cdot t^{u_n m_n} = \\ &= t^{u_1 m_1 + \dots + u_n m_n} = t^{\langle \chi^m, \lambda^u \rangle} \end{aligned}$$

**Esempio 5.2.** Sia  $N \cong \mathbb{Z}^2$ . Un punto  $u = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$  corrisponde ad un sottogruppo ad un parametro  $\lambda^u \in N$ , con

$$\begin{aligned} \lambda^u : \mathbb{C}^* &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^2 \\ t &\mapsto (t^a, t^b) \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}^*)^2 \subset \mathbb{P}^2$  per cui possiamo considerarlo come la mappa

$$\begin{aligned} \lambda^u : \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ t &\mapsto [1 : t^a : t^b] \end{aligned}$$

$\mathbb{P}^2$  è uno spazio completo per cui esistono i limiti  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ . Calcolandoli otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} [1 : t^a : t^b] = \\ &= \begin{cases} [1 : 0 : 0] & a, b, > 0 \\ [1 : 0 : 1] & a > 0, b = 0 \\ [1 : 1 : 0] & a = 0, b > 0 \\ [1 : 1 : 1] & a = b = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} [t^{-b} : t^{a-b} : 1] = [0 : 0 : 1] & a > b, b < 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} [t^{-a} : 1 : t^{b-a}] = [0 : 1 : 0] & a < 0, a < b \\ \lim_{t \rightarrow 0} [1 : t^a : t^a] = \lim_{t \rightarrow 0} [t^{-a} : 1 : 1] = [0 : 1 : 1] & a < 0, a = b \end{cases} \end{aligned}$$

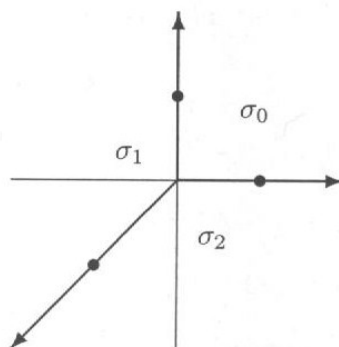


Figura 5.1:

Disegnando queste regioni che danno limiti diversi in  $\mathbb{R}^2 = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  otteniamo la figura (5.1) e raggruppando si ha:

- il punto  $a = b = 0$
- i raggi aperti:  $a > 0, b = 0$ ;  $a = 0, b > 0$ ; e  $a < 0, a = b$
- gli insiemi aperti:  $a, b > 0$ ;  $a > b, b < 0$ ; e  $a < 0, a < b$

e quello che si ottiene sono le 0-facce, 1-facce and 2-facce del ventaglio  $\Sigma$  di (3.5) e (4.5) da cui abbiamo costruito  $\mathbb{P}^2$  come varietà torica.

Questo è l'altro metodo di costruzione dato nel Capitolo 4, iniziando da una varietà torica e trovando il ventaglio corrispondente in  $N$ .

In generale, se per un  $u \in \mathbb{Z}^2$ , il limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$  non esiste (ovvero  $X(\Sigma)$  non è completa), allora il punto  $\lambda^u$  non sarà un elemento di  $|\Sigma|$ . Analogamente se  $\lambda^u \notin |\Sigma|$  il limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$  non esisterà. Questo è il motivo per cui una varietà torica è completa (e quindi compatta) se e solo se  $|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$ .



## Capitolo 6

# Politopi

Vedremo ora i politopi convessi e come da essi possiamo costruire le varietà toriche e il loro rapporto con i ventagli.

**Definizione 6.1.** Un *politopo convesso*  $\Delta$  in uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita è l'inviluppo convesso di un insieme finito di punti (ovvero il sottoinsieme convesso minimo di  $V$  che contiene tutti questi punti).  $\Delta$  è detto *integrale* se è l'inviluppo convesso di punti in un reticolo e la *dimensione* di  $\Delta$  è la dimensione del sottospazio generato da  $\{v_1 - v_2 \mid v_1, v_2 \in \Delta\}$ . Assumiamo che  $\Delta$  sia  $n$ -dimensionale e che contenga l'origine nel suo interno. Dati i politopi convessi  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  in  $V$ , possiamo creare un nuovo politopo prendendo l'inviluppo convesso di  $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_k$  denotato con  $\text{conv}(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$ . Possiamo inoltre definire la loro *somma di Minkowski* come  $\Delta_1 + \dots + \Delta_k = \{v_1 + \dots + v_k \mid v_i \in \Delta_i\}$ .

Sia  $k\Delta = \Delta + \dots + \Delta$  ( $k$  volte), allora avremo che  $k\Delta = \{kv \mid v \in \Delta\}$  dato che  $\Delta$  è convesso. Una *faccia*  $F$  (propria) di  $\Delta$  è l'intersezione di  $\Delta$  con un iperpiano affine di supporto:

$$F = \{v \in \Delta \mid \langle u, v \rangle = r\}$$

dove  $u \in V^*$  è una funzione con  $\langle u, v \rangle \geq r \forall v \in \Delta$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .  $\Delta$  viene considerato una faccia di se stesso. Una *facet* è una faccia di codimensione 1.

Useremo il termine politopi per indicare i politopi convessi se non specificato altrimenti.



**Definizione 6.2.** Insieme polare

Per un politopo convesso  $\Delta$ , l'*insieme polare* o semplicemente il *polare* di  $\Delta$  è definito come:

$$\Delta^\circ = \{u \in V^* \mid \langle u, v \rangle \geq -1 \forall v \in \Delta\}.$$

Per una faccia  $F$  di  $\Delta$  abbiamo la faccia polare (faccia di  $\Delta^\circ$ )

$$F^* = \{u \in \Delta^\circ \mid \langle u, v \rangle = -1 \forall v \in F\},$$

Vedremo in seguito che il polare è ancora un politopo.

**Esempio 6.3.** Se  $\Delta$  è l'involuppo convesso dei punti  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , dato da un cubo, avremo che  $\Delta^\circ$  è l'involuppo convesso dei punti  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$  e  $(0, 0, \pm 1)$ , ovvero l'ottaedro.

**Definizione 6.4.** Faccia normale/ ventaglio normale

Per una faccia  $F$  di un politopo  $\Delta$  in  $M_{\mathbb{R}}$  sia

$$\sigma_F^\vee = \{\lambda(m - m') \mid m \in \Delta, m' \in F, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset M_{\mathbb{R}}.$$

Allora definiamo la *faccia normale* di  $F$  come  $\sigma_F = (\sigma_F^\vee)^\vee$  e il *ventaglio normale* di  $\Delta$  come  $\Sigma_\Delta = \{\sigma_F \mid F \text{ è una faccia non vuota di } \Delta\}$ .

**Teorema 6.5.** Sia dato un politopo  $\Delta$  che contenga l'origine al suo interno. Allora il ventaglio in  $N_{\mathbb{R}}$  formato dai coni generati da elementi delle facce proprie di  $\Delta^\circ$  è il ventaglio normale di  $\Delta$ .

*Dimostrazione.* E' sufficiente mostrare che  $\sigma_F = \{\lambda v \mid v \in F^*, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$  per ogni faccia propria  $F$  di  $\Delta$ . Avremo che  $v \in \sigma_F$  se e solo se

$$\langle \lambda(m - m'), v \rangle \geq 0 \iff \langle (m - m'), v \rangle \geq 0 \iff \langle m, v \rangle \geq \langle m', v \rangle$$

per ogni  $m \in \Delta$ ,  $m' \in F$ . Abbiamo inoltre che per  $v \neq 0$   $\langle m', v \rangle < 0$ , poiché altrimenti  $\langle m, v \rangle \geq 0$  per ogni  $m \in \Delta$ , però questo è impossibile per  $m = 0$ , ma  $0 \notin \Delta$  poiché  $0$  è nell'interno di  $\Delta$ . Se  $v \in F^*$ , allora  $\langle m', v \rangle = -1$ , per cui  $\langle m, v \rangle \geq -1$ , e quindi  $\lambda v \in \sigma_F$ . Per  $v \in \sigma_F$ , avremo che  $\langle m, v \rangle \geq \langle m', v \rangle$  per ogni  $m \in \Delta$ ,  $m' \in F$ , e che per  $v \neq 0$  e  $m'$  non nel relativo interno di  $F$ ,  $\langle m', v \rangle < 0$ . Sia  $\langle m', v \rangle = -\lambda$  per un certo  $\lambda > 0$  allora

possiamo scrivere  $v = \lambda v'$  e perciò  $\langle m, v' \rangle \geq \langle m', v' \rangle = -1$  per ogni  $m \in \Delta$ .  $\langle m, v' \rangle \geq -1$  implica che  $v' \in \Delta$ , e allora  $\langle m', v' \rangle = -1$  implica che  $v' \in F^*$  e  $v = \lambda v' \in \{\lambda v' \mid v' \in F^*, \lambda \geq 0\}$ . Perciò  $\sigma_F = \{\lambda v \mid v \in F^*, \lambda \geq 0\}$ .  $\square$

**Esempio 6.6.** Indichiamo con  $\Delta$  il politopo in  $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{Z}^2$  con vertici  $F_0 = (-1, -1), F_1 = (2, -1)$  e  $F_2 = (-1, 2)$ . Se prendiamo l'intersezione degli

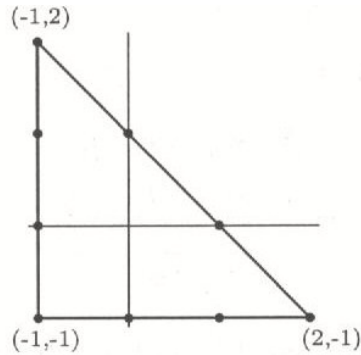


Figura 6.1:

insiemi di punti  $u$  per cui valga  $\langle u, v \rangle \geq -1$  per ciascun vertice  $v$ :

$$\begin{aligned} S_{(-1, -1)} &= \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle u, (-1, -1) \rangle \geq -1\} = \{(x, y) \mid y \leq -1 - x\}, \\ S_{(2, -1)} &= \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle u, (2, -1) \rangle \geq -1\} = \{(x, y) \mid y \leq 3x + 1\}, \\ S_{(-1, 2)} &= \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle u, (-1, 2) \rangle \geq -1\} = \{(x, y) \mid 3y \geq x - 1\}, \end{aligned}$$

allora vediamo che  $\Delta^\circ$  è il politopo in  $N_{\mathbb{R}}$  con vertici  $(0, 1), (1, 0)$  e  $(-1, -1)$ .

Prendendo i coni sulle facce di  $\Delta^\circ$  otteniamo il ventaglio  $\Sigma$  formato dai coni

$$\sigma_0 = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1, e_2 \rangle, \quad \sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_2, -e_1 - e_2 \rangle, \quad \sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1, -e_1 - e_2 \rangle,$$

e le loro facce come in (3.5) e (4.5). Troviamo i coni normali delle 1-facce  $F_0, F_1, F_2$ , e le 2-facce  $F_{ij}$  che uniscono i vertici  $F_i$  e  $F_j$ . Avremo i coni

$$\begin{aligned} \sigma_{F_0}^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1^*, e_2^* \rangle, & \sigma_{F_1}^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle -e_1^*, -e_1^* + e_2^* \rangle, \\ \sigma_{F_2}^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle -e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle, & \sigma_{F_{01}}^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1^*, -e_1^*, e_2^* \rangle, \\ \sigma_{F_{02}}^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1^*, e_2^*, -e_2^* \rangle, & \sigma_{F_{12}}^\vee &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle e_1^* - e_2^*, -e_1^* + e_2^*, -e_1^* \rangle, \end{aligned}$$

I ventagli duali sono quindi

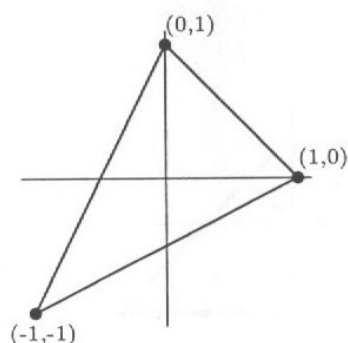


Figura 6.2:

$$\begin{aligned}\sigma_{F_0} &= \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1, e_2 \rangle, & \sigma_{F_1} &= \mathbb{R}_{\geq 0}\langle -e_1, e_1 + e_2 \rangle, \\ \sigma_{F_2} &= \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1, -e_1 + e_2 \rangle, & \sigma_{F_{01}} &= \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_2 \rangle, \\ \sigma_{F_{02}} &= \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1 \rangle, & \sigma_{F_{12}} &= \mathbb{R}_{\geq 0}\langle -e_1 - e_2 \rangle,\end{aligned}$$

Vediamo quindi che il ventaglio normale  $\Sigma_\Delta$  formato da questi coni è proprio il ventaglio sulle facce di  $\Delta^o$ .

Per ciascuna facet  $\tilde{F}$  di  $\Delta$  esiste un unico vettore primitivo<sup>1</sup> normale (che punti all'interno)  $n_{\tilde{F}} \in N$  e un intero  $a_{\tilde{F}}$  tale che

$$\Delta = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n_{\tilde{F}} \rangle \geq a_{\tilde{F}} \forall \text{ facet } \tilde{F} \text{ di } \Delta\}$$

Data una faccia  $F$  di  $\Delta$ , indichiamo con  $\sigma_F$  il cono generato da  $\{n_{\tilde{F}} \mid \tilde{F} \text{ è una facet che contiene } f\}$ . Questo sarà il cono normale di  $F$ . Allora ponendo  $\Sigma_\Delta = \{\sigma_F \mid F \text{ è una faccia di } \Delta\}$  dà un altro metodo per trovare il ventaglio normale di un politopo. Prendendo l'involuppo convesso del ventaglio normale si ha un metodo alternativo per trovare il politopo polare.

**Esempio 6.7.** Per  $F_{01}$ ,  $F_{02}$ ,  $F_{12}$ , le facet di  $\Delta$  come in (6.6), abbiamo i vettori primitivi normali (diretti verso l'interno e unici)

$$n_{F_{01}} = e_2, \quad n_{F_{02}} = e_1 \quad \text{e} \quad n_{F_{12}} = -e_1 - e_2.$$

Per cui abbiamo i coni normali:

<sup>1</sup>Un vettore n-dimensionale è detto *primitivo* se le sue coordinate sono relativamente coprime come n-upla

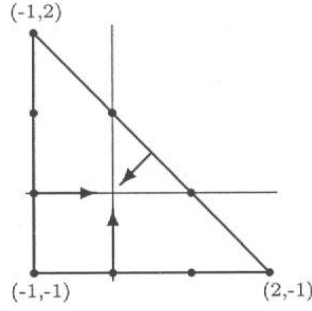


Figura 6.3:

$$\begin{aligned}\sigma_{F_0} &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle n_{F_{01}}, n_{F_{02}} \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle & \sigma_{F_1} &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle n_{F_{01}}, n_{F_{12}} \rangle = \langle e_1, -e_1 - e_2 \rangle \\ \sigma_{F_2} &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle n_{F_{02}}, n_{F_{12}} \rangle = \langle e_2, -e_1 - e_2 \rangle & \sigma_{F_{01}} &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle n_{F_{01}} \rangle = \langle e_2 \rangle \\ \sigma_{F_{02}} &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle n_{F_{02}} \rangle = \langle e_1 \rangle & \sigma_{F_{12}} &= \mathbb{R}_{\geq 0} \langle n_{F_{12}} \rangle = \langle -e_1 - e_2 \rangle\end{aligned}$$

Perciò  $\Sigma_{\Delta} = \{\sigma_{F_0}, \sigma_{F_1}, \sigma_{F_2}, \sigma_{F_{01}}, \sigma_{F_{02}}, \sigma_{F_{12}}\}$  è il ventaglio normale di  $\Delta$ .

**Teorema 6.8.** Una qualsiasi proprietà di dualità dei coni poliedrali convessi produce una proprietà equivalente sulla polarità dei politopi convessi.

*Dimostrazione.* Possiamo assumere senza perdere di generalità che  $\Delta$  sia un politopo convesso che abbia l'origine al suo interno. Sia  $\sigma_{\Delta}$  il cono su  $\Delta \times 1$  nello spazio vettoriale  $E \times \mathbb{R}$ . Ora  $\sigma_{\Delta} = \{\lambda(v, 1) \mid v \in \Delta, \lambda \in \mathbb{R}\}$ , per cui avremo

$$\begin{aligned}\sigma_K^{\vee} &= \{(u, r) \mid \langle (u, r), (\lambda v, \lambda) \rangle \geq 0 \forall v \in \Delta, \lambda \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(u, r) \mid \langle (u, r) \rangle + r \geq 0 \forall v \in \Delta\}.\end{aligned}$$

Inoltre  $\Delta^{\circ} \times 1 = \{(u, 1) \mid \langle u, v \rangle \geq -1 \forall v \in \Delta\}$ , quindi

$$\begin{aligned}\sigma_{K^{\circ}} &= \{r(u, 1) \mid \langle u, v \rangle \geq -1 \forall v \in \Delta\} = \{(ru, r) \mid \langle ru, v \rangle \geq -r \forall v \in \Delta\} \\ &= \{(u, r) \mid \langle u, v \rangle + r \geq 0 \forall v \in \Delta\}\end{aligned}$$

Perciò abbiamo che  $\sigma_{\Delta} = \sigma_{\Delta^{\circ}}^{\vee}$  da cui segue che una qualsiasi proprietà di dualità dei coni determina una proprietà equivalente sulla polarità dei politopi convessi.  $\square$

In particolare possiamo vedere che anche  $\Delta^\circ$  è un politopo convesso,  $(\Delta^\circ)^\circ = \Delta$ , e che se  $\Delta$  è integrale allora anche  $\Delta^\circ$  è integrale.

Sia  $\Delta$  un politopo convesso in  $M_{\mathbb{R}}$  e consideriamo i monomi della forma  $t_0^k \chi^m$  con  $m \in k\Delta$  per cui la moltiplicazione sia data da  $t_0^k \chi^m \cdot t_0^l \chi^{m'} = t_0^{k+l} \chi^{m+m'}$ ,  $m \in k\Delta$ ,  $m' \in l\Delta$  per cui  $m + m' \in (k+l)\Delta$ .

Sia  $\deg(t_0^k \chi^m) := k$ , allora la  $\mathbb{C}$ -algebra generata dai  $t_0^k \chi^m$  che indichiamo con  $S_\Delta$  è un anello graduato<sup>2</sup>. Chiamiamo  $S_\Delta$  l'*anello dei politopi* di  $\Delta$ . Imponiamo ora che  $\mathbb{P}_\Delta = \text{Proj}(S_\Delta)$  sia la varietà proiettiva associata a  $\Delta$ . Può essere provato che  $\mathbb{P}_\Delta$  è la varietà torica associata al ventaglio normale di  $\Delta$  o (segue da (6.5)) il ventaglio sulle facce proprie di  $\Delta^\circ$ .

**Esempio 6.9.** Sia  $\Delta$  definito come in (6.6). Allora per (4.5) abbiamo che  $\mathbb{P}_\Delta = \mathbb{P}^2$ . La solita figura schematica per  $\mathbb{P}^2$  con coordinate  $[Z : X : Y]$  è data da:

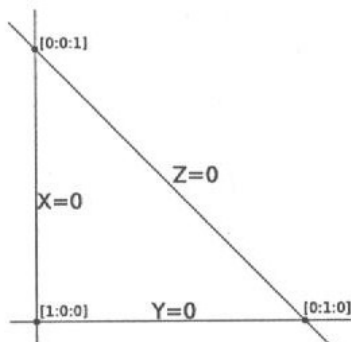


Figura 6.4:

E' da notare la somiglianza tra questa e  $\Delta$ . Non si tratta di una coincidenza e in generale un diagramma di questo tipo per  $\mathbb{P}_\Delta$  assomiglierà a  $\Delta$ .

**Esempio 6.10.** Sia  $\Delta$  il politopo in  $\mathbb{Z}^2$  con vertici  $(\pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ , dove  $\Delta^\circ$  è il politopo con vertici  $(\pm 1, \pm 1)$ . Prendendo i coni sulla faccia di  $\Delta^\circ$  otteniamo il ventaglio formato dai coni

<sup>2</sup>Un anello graduato  $R$  è un anello che ha una decomposizione in una somma diretta di gruppi (abeliani) additivi  $R_i \subset R$ ,  $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  tali che  $\forall x \in R_a, y \in R_b \Rightarrow xy \in R_{a+b}$ . Gli elementi di  $R_n$  sono detti *elementi omogenei di grado n*

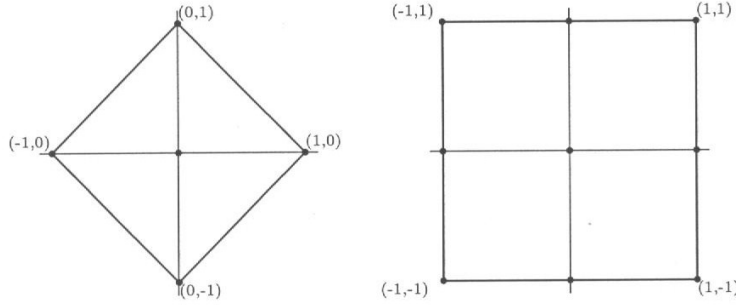


Figura 6.5:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \mathbb{R}_{\geq 0}\langle e_1 + e_2, e_1 - e_2 \rangle, & \sigma_1 &= \mathbb{R}_{\geq 0}\langle -e_1 - e_2, e_1 - e_2 \rangle, \\ \sigma_2 &= \mathbb{R}_{\geq 0}\langle -e_1 - e_2, -e_1 + e_2 \rangle, & \sigma_3 &= \mathbb{R}_{\geq 0}\langle -e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle,\end{aligned}$$

con duali  $\sigma_i^\vee = \sigma_i$ , che dà le corrispondenti  $\mathbb{C}$ -algebre

$$\begin{aligned}A_0 &= \mathbb{C}[XY, XY^{-1}], & A_1 &= \mathbb{C}[Y^{-1}X, XY^{-1}], \\ A_2 &= \mathbb{C}[X^{-1}Y^{-1}, X^{-1}Y], & A_3 &= \mathbb{C}[X^{-1}Y, XY],\end{aligned}$$

che vengono incollate assieme per dare la varietà torica  $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

**Definizione 6.11.** Politopi riflessivi

Un politopo integrale  $\Delta$  è detto *riflessivo* se e solo se  $\Delta^\circ$  è integrale. Per di più poiché  $\Delta^\circ$  è riflessivo se e solo se  $\Delta = (\Delta^\circ)^\circ$  è integrale, abbiamo che  $\Delta$  è riflessivo se e solo se  $\Delta^\circ$  è riflessivo.

La varietà torica associata a un politopo riflessivo viene detta *Fano*.

**Esempio 6.12.** Sia  $\Delta$  definito come in (6.6) con vertici  $(-1, -1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(-1, 2)$  e  $\Delta^\circ$  con vertici  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, -1)$ . Allora  $\Delta$  e  $\Delta^\circ$  sono entrambi politopi riflessivi.

Esistono (a meno di isomorfismi) 16 2-politopi riflessivi, 4319 3-politopi riflessivi e 473800776 4-politopi riflessivi. E' anche vero che (sempre a meno di isomorfismi) l'unico punto interno di un 2-politopo riflessivo è l'origine (caratteristica che ci aiuta a identificare i 16 diversi 2-politopi riflessivi).

**Definizione 6.13.** Ventaglio fortemente politopale

Un ventaglio  $\Sigma$  è detto *fortemente politopale* se può essere ottenuto proiettando le facce di un politopo convesso.

**Teorema 6.14.** Criterio di proiettività

Risulta che

$$X(\Sigma) \text{ è proiettiva} \iff \Sigma \text{ è fortemente politopale.}$$

L'esistenza di varietà non proiettive complete è risaputa da tempo, essendo state studiate separatamente dai sottoinsiemi affini. Il teorema 6.14 riconduce la costruzione di varietà toriche complete non proiettive alla costruzione di ventagli non fortemente politopali: per un esempio si veda [3] pag.71.

# Conclusioni

Nei capitoli iniziali di questa relazione sono stati descritti brevemente quegli aspetti di algebra commutativa e geometria algebrica necessari ad introdurre le varietà toriche. Abbiamo visto che queste possono essere descritte come una compattificazione di tori algebrici e che la costruzione attraverso un ventaglio di coni poliedrali convessi descrive questa relazione. Nel capitolo sui coni sono stati presentati quei risultati che permettono di costruire e di definire le proprietà delle varietà toriche. Prendendo in esame i caratteri e i sottogruppi ad un parametro dell'azione del toro abbiamo chiarito questa corrispondenza attraverso un esempio pratico. È stato introdotto anche un secondo metodo per la costruzione di varietà toriche: i politopi convessi (che in generale danno origine a varietà toriche complete). I politopi forniscono inoltre un criterio di proiettività per varietà toriche associate a un ventaglio.





# Bibliografia

- [1] D.Cox *What is a toric variety?*,
- [2] W. Fulton *Algebraic geometry, Advanced book classics series, third edition 1989.*
- [3] W. Fulton *Introduction to Toric Varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1993.
- [4] B. Grunbaum *Convex polytopes*, volume 16 of *Pure and applied mathematics series*. Interscience publishers, 1967
- [5] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat *Torioidal Embeddings I*, volume 339 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag
- [6] M. Reid *Review of Convex Bodies and Algebraic Geometry: An introduction to Toric Varieties by T. Oda*, Bull. AMS 21 (1989), 360-364