

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

LA CLASSIFICAZIONE DALLA GEOMETRIA ALLA DIDATTICA

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Silvia Benvenuti

Presentata da:
Sara Tommesani

Sessione Estiva
Anno Accademico 2021/2022

«Se il nostro pensiero e la nostra parola debbono muovere l'attività del discepolo, bisogna che qualcosa di vivo che è in noi passi nello spirito di lui, come scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco.»

Federigo Enriques, *L'insegnamento dinamico*, 1921

Introduzione

Troppo spesso la matematica che si studia al liceo è molto lontana da quella che poi si può incontrare all'università nei percorsi di laurea scientifica, ed è in particolare del tutto slegata dalla matematica contemporanea e dalla ricerca attuale. Questo, unito al fatto che quasi mai si sottolinea il percorso storico che ha portato allo sviluppo di certi strumenti matematici, fa sì che l'idea che uno studente della scuola superiore si fa della matematica sia del tutto irrealistica: una materia arida, immobile, con risultati indiscutibili e stabiliti nell'antichità più remota. Questo, oltre ad essere obiettivamente falso, certamente inibisce negli studenti l'interesse nei confronti di questa disciplina, che invece di risultare una costruzione culturale collettiva in costante evoluzione, viene percepita come un insieme slegato di intuizioni da parte di personaggi tanto geniali quanto estranei alla vita di tutti i giorni e comunque molto lontani dalle legittime aspirazioni di qualsiasi studente, anche se bravo. Alla luce di ciò si può pensare di proporre agli studenti di scuola secondaria di secondo grado attività didattiche che li stimolino e li motivino nell'ottica di modificare l'insieme delle convinzioni sulla matematica che gli allievi possiedono. La matematica che viene insegnata a scuola non dovrebbe essere, infatti, completamente separata dalla ricerca. Paolo Salmon, fondatore della scuola di algebra commutativa in Italia, nel 1979 in un convegno UMI diceva: «la riflessione critica sulle teorie elevate deve portare ad uno sforzo continuo di elementarizzazione di tutti i contenuti di tali teorie»¹. Nell'articolo *Mathematical Education* del 1990 Thurston scrive alcune

¹Salmon [18], p. 311.

riflessioni proprio riguardo a questo tema: sostiene che gli insegnanti siano talvolta intimiditi dalla matematica avanzata e che faticino ad avvicinarsi a ricercatori e docenti universitari. Thurston denuncia quindi un limitato contatto generale tra coloro che insegnano matematica nelle scuole superiori e il mondo accademico. Inoltre, anche le *Indicazioni Nazionali* richiedono che al termine del percorso scolastico gli studenti acquisiscano «una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico».

L'obiettivo di questa tesi è quella di proporre alcuni contenuti di topologia, argomento che non si studia a scuola e che in particolare mostra un modo diverso di vedere la geometria. Nello specifico, si parlerà di varietà e del problema della classificazione. Classificare le varietà di dimensione 1 è abbastanza semplice poiché esistono solo due varietà topologiche: la circonferenza S^1 e la retta \mathbb{R} . Ogni altra curva connessa è infatti omeomorfa a una di queste due. Riguardo alle superfici topologiche connesse e chiuse, cioè compatte e senza bordo, si è giunti ad una classificazione grazie al contributo di numerosi matematici tra cui Riemann, Möbius, Klein, Poincaré, Seifert, Jordan. Nel caso delle 3-varietà, la ricerca di un teorema di classificazione risale agli inizi del '900 con Poincaré. Sono stati fatti tentativi con tecniche molto diverse fra loro. Negli anni '70 del Novecento Thurston introduce un approccio completamente diverso, che fa uso di strutture geometriche, e formula la sua famosa congettura di geometrizzazione, dimostrata da Perelman nel 2001, che non dà luogo ad una classificazione delle 3-varietà, ma avvicina di molto ad una soluzione del problema.

Per scrivere questa tesi ho inizialmente studiato questi temi di topologia e geometria soffermandomi non solo sulla genesi e, quando possibile, sulla strategia dimostrativa, ma anche sulla valenza didattica, con riferimento a una loro narrazione nel contesto della scuola superiore di secondo grado, con particolare riferimento ai licei scientifici. In particolare, dopo aver dimostrato

in dettaglio il teorema di classificazione delle superfici topologiche connesse e chiuse, ho affrontato il problema della generalizzazione alla classificazione delle 3-varietà. Questo porta naturalmente a enunciare la congettura di Poincaré e, seguendo la storia dei tentativi di dimostrazione della stessa, a inserirla nella più ampia congettura di geometrizzazione di Thurston. Il passo successivo del lavoro di tesi è stato quello di selezionare gli argomenti che potevano essere effettivamente compresi ed apprezzati dagli studenti. In questa fase mi sono resa conto che la parte più tecnica sulle 3-varietà era troppo avanzata per essere presentata in modo fruibile e fertile agli studenti di scuola secondaria, di conseguenza non ci sono pretese di completezza e precisione, dal momento che l'obiettivo finale di questa tesi è la progettazione di attività didattiche per tali studenti. Nell'ultimo capitolo è presente un percorso didattico che, partendo dal caso delle superfici topologiche, arriva all'enunciato del teorema di geometrizzazione attraverso la narrazione di una storia tutt'altro che lineare, ma anzi intessuta di errori e difficoltà.

In questa tesi, dunque, è presente sia una parte dedicata all'esposizione dei temi topologici e geometrici e sia una parte dedicata alla progettazione di un percorso didattico. Nel dettaglio, il primo capitolo è dedicato al quadro teorico di riferimento, ovvero gli studi che sostengono che la performance in matematica sia influenzata non solo da fattori cognitivi ma anche da fattori affettivi; nel secondo capitolo è presente un'introduzione alle 2-varietà e alle 3-varietà per poi passare alle nozioni più generali sulle n -varietà e ai richiami teorici di geometria riemanniana. Il terzo capitolo è dedicato alla classificazione topologica delle superfici e alla descrizione delle geometrie bidimensionali, mentre nel quarto capitolo mi sono occupata del passaggio alle 3-varietà. Infine, nell'ultimo capitolo ho progettato un possibile percorso didattico sulla classificazione delle varietà che segue il percorso storico con cui si è cercato di arrivare alla soluzione.

Indice

Introduzione	i
1 Quadro teorico di riferimento	1
1.1 I fattori affettivi	1
1.2 Le tre dimensioni dell'atteggiamento	3
1.2.1 Disposizione emozionale	4
1.2.2 Autoefficacia	5
1.2.3 Visione della matematica	6
1.3 Un contenuto matematico di ricerca attuale per un atteggiamento positivo	7
2 Le varietà	9
2.1 Un'introduzione allo studio delle varietà	9
2.1.1 La 3-sfera	12
2.1.2 Il 3-toro	14
2.2 n -varietà	16
2.3 Richiami di geometria riemanniana	23
3 Il caso delle 2-varietà	29
3.1 Classificazione topologica delle superfici	29
3.2 Geometrie bidimensionali	46
3.2.1 Il modello \mathbb{R}^2	46
3.2.2 Il modello S^2	46
3.2.3 Il modello \mathbb{H}^2	47

4	Il caso delle 3-varietà	57
4.1	Decomposizione in fattori primi	58
4.2	Superfici incompressibili e decomposizione JSJ	65
4.3	Cenni alla congettura di geometrizzazione	70
5	Progettazione di attività didattiche	73
5.1	Il laboratorio e la sua valenza didattica	73
5.2	La classificazione	75
5.3	Laboratorio sulla classificazione delle superfici topologiche chiuse	76
5.4	Le varietà tridimensionali	86
	Conclusione	93
	Bibliografia	97
	Ringraziamenti	99

Capitolo 1

Quadro teorico di riferimento

1.1 I fattori affettivi

Lo studio dei fattori affettivi nell'ambito della ricerca in didattica della matematica nasce nel contesto dell'analisi delle difficoltà che incontrano gli studenti nello studio di questa disciplina e delle possibili azioni di recupero. Le modalità tradizionali di osservazione e di intervento sono sempre state contestualizzate in ambito puramente cognitivo, interpretando la difficoltà come mancanza di conoscenza. Questa spiegazione presenta però dei limiti. Uno dei primi ricercatori, il cui lavoro in questo campo diventa un punto di riferimento, è Aiken. Nel 1961 conduce proprio alcuni studi in cui sostiene che la performance in matematica sia influenzata non solo da fattori cognitivi ma anche da fattori che chiama *nonintellective*. Aiken cerca di stabilire statisticamente una correlazione tra atteggiamento e successo e quindi ipotizza un'influenza dell'atteggiamento su processi decisionali più complessi, ma limitandosi a correlazioni di tipo statistico. Negli anni '80 si comincia a parlare sempre di più di influenza dei fattori affettivi nella matematica con la nascita di un filone di studi focalizzato inizialmente sulle convinzioni (*beliefs*) degli studenti. Questi studi nascono con l'obiettivo di interpretare, all'interno di attività di problem solving, fenomeni difficili da spiegare in termini puramente cognitivi (Schoenfeld, 1983) e inizia a convincersi che la sfera cognitiva e

quella affettiva siano indissolubilmente legate. Il termine *affect* viene usato per racchiudere tutti quegli aspetti del pensiero umano che non riguardano la pura cognizione, come ad esempio le emozioni, le convinzioni, l'atteggiamento, il valore, la motivazione, i sentimenti e gli obiettivi. In particolare, Schoenfeld (1992) ha messo in risalto come gli studenti vedano e concettualizzino in modo diverso la matematica e come la loro visione della disciplina influenzi il loro comportamento e la loro presa di decisioni mentre affrontano e risolvono un problema matematico. Nello stesso periodo, basandosi sugli studi di Thompson (1992), l'interesse di questo filone di ricerca si è spostato anche sulle convinzioni degli insegnanti riguardo la matematica, mettendo in evidenza come la visione della matematica di un docente influenzi le sue scelte didattiche (Calderhead, 1996; Hodgen & Askew, 2011; Sbaragli, 2006) nonché le interazioni con gli studenti (Buehl, Alexander & Murphy, 2002). Questo filone di ricerca ha aperto un campo completamente inesplorato, infatti, fino a quel momento, le ricerche condotte nel contesto della formazione degli insegnanti si erano focalizzate sul determinare quali saperi disciplinari, didattici e pedagogici, fossero necessari per insegnare la matematica a diversi livelli scolastici, con risultati sicuramente molto interessanti prodotti nel filone di quella che viene chiamata la *Mathematical Knowledge for Teaching*. D'altra parte, l'esclusione della sfera affettiva dalle ricerche sullo sviluppo professionale dei docenti ha comportato nel tempo importanti lacune nell'interpretazione di fenomeni legati all'insegnamento e all'apprendimento. È ormai infatti assodato che ogni individuo si avvicina ai saperi da acquisire e da insegnare in modi personali fortemente dipendenti da aspetti affettivi, quali le emozioni che ha provato e prova nei confronti della disciplina nella sua esperienza come studente, le competenze che crede di possedere, le convinzioni sui contenuti disciplinari da apprendere o da spiegare agli altri e la propria identità come insegnante di matematica.

1.2 Le tre dimensioni dell'atteggiamento

Nel campo della ricerca in didattica della matematica è stato elaborato un modello teorico ormai consolidato che descrive l'atteggiamento nei confronti della matematica come un costrutto tridimensionale (Di Martino & Zan, 2011) composto da emozioni associate alla matematica, convinzioni su se stessi in relazione alla matematica e convinzioni sulla matematica. L'atteggiamento verso la matematica viene dunque descritto e analizzato considerando tre componenti e le loro relazioni: la *disposizione emozionale*, il *senso di autoefficacia*, la *visione della disciplina*. La disposizione emozionale verso la disciplina si manifesta tipicamente con espressioni quali «mi piace/non mi piace la matematica perché...»; la percezione di riuscire o non riuscire in matematica, ovvero il senso di autoefficacia individuato in letteratura come *competenza percepita* (Pajares & Miller, 1994), si trova espressa in forme linguistiche del tipo «riesco/non riesco...»; infine, la visione della matematica è tipicamente introdotta da frasi che cominciano nel seguente modo: «la matematica è...».

Le analisi condotte con il modello tridimensionale dell'atteggiamento (Di Martino & Zan, 2011) hanno mostrato come le tre componenti siano profondamente interconnesse. Sono emerse, in particolare, interessanti relazioni tra disposizioni emotive negative verso la matematica e le altre componenti dell'atteggiamento. Nello specifico, gli studi condotti da Di Martino e Zan hanno mostrato come una disposizione emozionale negativa verso la matematica possa essere dovuta a diversi fattori legati al senso di autoefficacia e alla visione della matematica. Inoltre, il senso di autoefficacia in matematica è strettamente legato alla visione che lo studente ha del successo e dell'errore in matematica (Di Martino & Zan, 2011).

Nel seguito approfondiremo ciascuna delle tre dimensioni dell'atteggiamento verso la matematica.

1.2.1 Disposizione emozionale

In ambito educativo, Pekrun e il suo gruppo di ricerca hanno condotto interessanti studi sulle emozioni legate all'apprendimento (Pekrun, 2006; Pekrun, Frenzel, Goetz & Perry, 2007; Pekrun, Vogl, Muis & Sinatra, 2017) considerandole come «processi multidimensionali e coordinati di sottosistemi psicologici, compresi i processi fisiologici affettivi, cognitivi, motivazionali, espressivi e periferici.»¹ Il modello teorico proposto da Pekrun e dai suoi colleghi risulta sufficientemente flessibile per descrivere e classificare le emozioni associate all'apprendimento, sia relative a situazioni e attività che gli studenti hanno vissuto o possono immaginare di affrontare (emozioni di riuscita legate all'attività ed emozioni epistemiche innescate dalle caratteristiche cognitive del compito), sia relative a risultati ottenuti (emozioni di riuscita legate ai risultati). A partire da questi studi, e in linea con altre ricerche condotte nello stesso campo (si vedano ad esempio: Raccanello & Brondino, 2017; Russel, 1980), le emozioni possono essere categorizzate come in Tabella 1.1, distinguendo tra:

- positive, se sono piacevoli, e negative, se sono spiacevoli;
- attivanti o deattivanti, a seconda che attivino o meno il soggetto dal punto di vista fisiologico con reazioni quali, ad esempio, arrossamento, sudorazione, aumento del battito cardiaco.

Usando tali categorizzazioni, Pekrun e i suoi colleghi osservano che emozioni positive attivanti nei confronti di un'attività o di un risultato hanno influenze positive sulla motivazione dello studente, lo rendono flessibile nella scelta delle strategie di apprendimento e supportano la sua capacità di auto-regolazione, influenzando positivamente, nella maggior parte dei casi, la sua performance scolastica. Al contrario, le emozioni negative deattivanti, come sconforto e noia, possono ridurre la motivazione e la partecipazione dello studente, avendo conseguenze negative anche sulla sua performance (Pekrun,

¹Pekrun [15], p. 316.

	Attivanti	Deattivanti
Positive	Piacere Speranza Orgoglio Gratitudine Sorpresa (in senso positivo) Curiosità	Sollievo Calma Appagamento
Negative	Rabbia Ansia Vergogna Frustrazione Paura Disgusto Confusione	Sconforto Noia Tristezza Delusione Affaticamento

Tabella 1.1: Categorizzazione delle emozioni legate all'apprendimento.

2006). Per quanto riguarda le emozioni positive deattivanti o quelle negative attivanti, gli effetti sono più complessi da interpretare, nel senso che tali emozioni possono favorire o al contrario ostacolare l'apprendimento degli allievi (Rowe & Fitness, 2018).

1.2.2 Autoefficacia

Bandura (1997) definisce l'autoefficacia come l'insieme delle convinzioni o percezioni che un individuo ha delle proprie abilità. Nel quadro della sua teoria sociale cognitiva viene ipotizzato che un individuo sviluppi e maturi le convinzioni sulla propria autoefficacia basandosi su quattro fonti:

- *mastery experience*, ossia l'interpretazione personale dei propri risultati raggiunti; l'individuo interpreta e valuta i risultati ottenuti, crea e rivisita, in base a tali interpretazioni, giudizi personali sulle proprie competenze acquisite.

- *Vicarious experience*, ossia la misura delle proprie capacità accademiche, grazie al confronto con le performance positive o negative di altri compagni o di adulti scelti come punti di riferimento.
- *Social persuasion*, data dai feedback, dai rinforzi positivi o negativi che lo studente riceve dagli altri (genitori, insegnanti, compagni).
- *Emotional and physiological states*, che lo studente impara a interpretare come un indicatore di competenza personale valutando le proprie prestazioni in diverse situazioni.

Usher e Pajares (2009) hanno ripreso in seguito queste quattro dimensioni, proponendo e validando una batteria di item specifici per misurare ciascuna fonte di autoefficacia nel contesto dell'apprendimento della matematica a livello di scuola secondaria. Tale studio dimostra che le fonti di autoefficacia individuate hanno un impatto significativo anche sulla motivazione e sulla riuscita degli studenti in matematica. Risulta inoltre confermato, come aveva già ipotizzato Bandura (1997), che la *mastery experience* è la più influente tra le fonti di autoefficacia.

1.2.3 Visione della matematica

L'insieme delle convinzioni che un individuo possiede sulla matematica è, come già ricordato, uno dei primi focus di studio nell'ambito della ricerca su *affect* e insegnamento della matematica (Thompson, 1992). Molti studenti ritengono che la matematica sia una disciplina basata su regole e procedure da memorizzare. Ritengono, inoltre, che esista solitamente una sola strategia o comunque una strada migliore rispetto a tutte le altre per arrivare alla soluzione, anch'essa solitamente considerata unica, in quanto pensano che in matematica ogni cosa sia completamente giusta o completamente sbagliata. Un altro pregiudizio vede la matematica principalmente come una disciplina i cui risultati sono stati stabiliti da chissà chi millenni di anni fa e non sono suscettibili di revisione. In relazione a tutto questo vi è la convinzione diffusa

che la matematica sia complessa, fredda, distante dalla vita quotidiana e difficile da imparare.

1.3 Un contenuto matematico di ricerca attuale per un atteggiamento positivo

Alla luce di quanto esposto fino ad ora, è molto importante motivare e stimolare gli studenti. Troppo spesso, infatti, la matematica che si studia a scuola è molto lontana da quella che poi si può incontrare all'università nei percorsi di laurea scientifica, ed è in particolare del tutto slegata dalla matematica contemporanea e dalla ricerca attuale. Questo, unito al fatto che quasi mai si sottolinea il percorso storico che ha portato allo sviluppo di certi strumenti matematici, fa sì che l'idea che uno studente della scuola superiore si fa della matematica sia del tutto irrealistica e si rischia di inibire negli studenti l'interesse nei confronti di questa materia, che invece di risultare una costruzione culturale collettiva in costante evoluzione, viene percepita come un'insieme slegato di intuizioni da parte di personaggi tanto geniali quanto estranei alla vita di tutti i giorni, e comunque molto lontani dalle legittime aspirazioni di qualsiasi studente, anche se bravo.

Come anche sostiene Thurston non ci deve essere separazione tra mondo accademico e mondo della scuola. Nell'articolo *Mathematical Education* del 1990 scrive alcune riflessioni proprio riguardo a questo tema. Sostiene che gli insegnanti siano talvolta intimiditi dalla matematica avanzata e che faticano ad avvicinarsi a ricercatori e docenti universitari. Thurston denuncia quindi un così poco contatto generale tra coloro che insegnano matematica nelle scuole superiori e il mondo accademico. La conseguenza è che pochi professori universitari sono consapevoli dei problemi educativi presenti nelle scuole.

In linea di principio, presentare in classe argomenti strettamente legati alla ricerca attuale, o comunque recente, può contribuire a combattere quest'idea pregiudiziale della materia. Nei capitoli successivi verranno proposti

contenuti di geometria e topologia, argomento che non si studia a scuola e che in particolare mostra un modo diverso di vedere la geometria. Verrà presentato il problema della classificazione delle 2-varietà e delle 3-varietà e verrà analizzato come alcuni di questi si possano declinare in modo fruibile e fertile per gli studenti di scuola secondaria di secondo grado.

Capitolo 2

Le varietà

2.1 Un'introduzione allo studio delle varietà

Continuando a leggere l'articolo di Thurston *Mathematical Education*, si arriva ad un paragrafo in cui spiega la sua visione della matematica.

To me, these utilitarian goals are important, but secondary. Mathematics has a remarkable beauty, power, and coherence, more than we could have ever expected. It is always changing, as we turn new corners and discover new delights and unexpected connections with old familiar grounds. The changes are rapid, because of the solidity of the kind of reasoning involved in mathematics. Mathematics is like a flight of fancy, but one in which the fanciful turns out to be real and to have been present all along. Doing mathematics has the feel of fanciful invention, but it is really a process of sharpening our perception so that we discover patterns that are everywhere around. In his famous apology for mathematics, G.H. Hardy praised number theory for its purity, its abstraction, and the self-evident impossibility of ever putting it to practical use. Now this very subject is applied very widely, particularly for encoding and decoding communications. My experience as a mathematician has convinced me that the aesthetic goals and the utilitarian goals for mathematics turn out, in the end, to be quite close. Our aesthetic instincts draw us to mathematics of

a certain depth and connectivity. The very depth and beauty of the patterns makes them likely to be manifested, in unexpected ways, in other parts of mathematics, science, and the world. To share in the delight and the intellectual experience of mathematics - to fly where before we walked - that is the goal of a mathematical education.

Thurston è dunque convinto della bellezza e dell'eleganza della matematica indipendentemente da eventuali sue applicazioni, sebbene gli obiettivi estetici e gli obiettivi utilitaristici risultino, alla fine, abbastanza vicini. Per stimolare però la curiosità degli studenti potrebbe essere utile partire da un contenuto semplice, concreto e ben noto, come per esempio la forma della Terra. Questo è proprio il punto di partenza dell'articolo divulgativo *The Mathematics of Three-dimensional Manifolds* di William P. Thurston e Jeffrey R. Weeks, in cui gli autori cercano proprio di spiegare cosa siano le varietà tridimensionali.

Migliaia di anni fa molti pensavano che la Terra fosse piatta poiché così appariva a chiunque avesse spaziato con lo sguardo, ad esempio, sull'oceano o su una vasta prateria. Da queste semplici osservazioni si argomentava, e non del tutto senza ragione, che la superficie della Terra dovesse essere o infinita o avere un bordo. Oggi sappiamo che questo non è vero, ma ciò di cui ci si rende conto meno spesso è che le medesime osservazioni locali potrebbero essere determinate da un numero infinito di forme terrestri. Per esempio, sarebbe coerente con queste osservazioni locali che la Terra avesse una forma irregolare o quella di un toro. Non è possibile conoscere con certezza la forma del nostro pianeta prima di aver tracciato con precisione le mappe di tutte le sue regioni.

Per poter proseguire è necessario adottare una terminologia specifica. La nozione più importante è quella di *varietà bidimensionale* o di *superficie*. Arriviamo a questa nozione pensando alle possibili forme che un pianeta potrebbe avere ed è possibile immaginare le varietà bidimensionali come dei modelli di mondi sui quali potremmo vivere. Più in dettaglio, stabiliamo che una *varietà bidimensionale* o *superficie* è un oggetto matematico le cui aree possono essere rappresentate su una mappa disegnata su un foglio di carta.

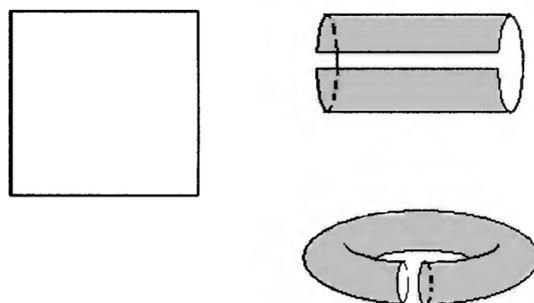


Figura 2.1: congiungendo il margine superiore e quello inferiore del rettangolo sulla sinistra otteniamo il cilindro in alto a destra. Congiungendo quindi il margine destro e quello sinistro del cilindro, otteniamo un toro. [12]

Il termine *bidimensionale* si riferisce al fatto che dato un punto qualunque di un tale oggetto, i punti ad esso vicini possono essere espressi in termini di due direzioni indipendenti. Questo è particolarmente importante poiché la cartografia richiede la possibilità di determinare la relazione tra i diversi punti: le mappe e i fogli di carta su cui vengono rappresentati i punti del pianeta sono, quindi, bidimensionali. Una raccolta di mappe che copre l'intera superficie, cioè tale che ogni punto della superficie sia rappresentato su almeno una delle mappe, è detta *atlante*. Una varietà bidimensionale o superficie è, quindi, un oggetto rappresentato da un atlante, che consiste dell'insieme di tutte le mappe e di quello delle istruzioni per incollarle tra loro.

Cosa succede se cerchiamo di indagare la forma dell'universo? Proprio come avviene sulla Terra, anche un atlante dell'universo sarebbe costituito da una raccolta di mappe. Tuttavia, la mappa di una regione dell'universo non sarebbe una porzione rettangolare di carta, ma assomiglierebbe ad una scatola solida. L'atlante consisterebbe, quindi, in una collezione di scatole, tali che ogni regione può essere rappresentata in almeno una di esse. A differenza di quello che accade con il pianeta Terra, ad oggi non possiamo vedere l'universo nel suo complesso, in uno sguardo di insieme, e non possiamo dunque unire tutte le singole mappe per riprodurlo nella forma che gli è propria. Questo dipende dal fatto che non è possibile portarsi fuori dal-

l'universo. Se abbandoniamo la superficie del nostro pianeta a bordo di un razzo, possiamo poi osservarla dall'esterno. Dal momento che noi vediamo le cose in tre dimensioni, e dato che la superficie terrestre è una sfera, possiamo vedere il globo curvarsi in una terza dimensione e visualizzare facilmente la sua forma complessiva. L'universo è però tridimensionale e questo significa che, anche qualora potessimo uscirne, dovremmo comunque essere in grado di vedere in almeno quattro dimensioni per poter visualizzare la sua forma. Questo chiaramente non è possibile, ma naturalmente non significa che l'universo non abbia una forma. L'oggetto matematico corrispondente alle varietà bidimensionali che costituisce un modello per il nostro universo è la *varietà tridimensionale* o *3-varietà*. Essa consiste in un insieme in cui ogni punto appartiene ad una regione che può essere mappata all'interno di una scatola. In altre parole, la regione intorno ad ogni punto si presenta come uno spazio anziché come un piano. Come nel caso precedente, diciamo che un atlante è una raccolta di mappe in cui ogni punto appartiene a qualche regione coperta da una delle mappe, corredata dalle istruzioni di incollamento delle mappe, con intersezione non vuota. Una 3-varietà è dunque un oggetto che è coperto dalla totalità delle mappe di un atlante. Tra le diverse 3-varietà, le *3-varietà con bordo* risultano un po' più facili da raffigurare. Un esempio è costituito da una palla solida: una superficie sferica, che costituisce il bordo, e tutto ciò che c'è all'interno. Analogamente, anche un toro solido è una 3-varietà con bordo e il bordo è nuovamente costituito da una varietà bidimensionale. Inoltre, una 3-varietà è detta *compatta* o *finita* se un suo atlante è composto da un numero finito di mappe. La più semplice 3-varietà compatta è la sfera tridimensionale o 3-sfera.

2.1.1 La 3-sfera

Consideriamo due palle solide, ognuna delle quali bordata da una sfera bidimensionale. Ora immaginiamo che queste due palle vengano incollate insieme lungo il loro bordo. In altre parole, dichiariamo che i punti corrispondenti situati sulle due sfere bordanti sono di fatto lo stesso punto. Noi non possiamo

incollare fisicamente le sfere bordanti restando nello spazio tridimensionale, ma possiamo immaginare con esattezza come si vivrebbe in un simile universo: quando viaggiamo passando attraverso la sfera che prima costituiva il bordo di una delle due palle, ci troviamo immediatamente a proseguire il viaggio nell'altra palla. Allo stesso modo, quando guardiamo attraverso l'ex bordo di una palla, vediamo direttamente nell'altra. È come se attraversassimo semplicemente l'equatore sulla nostra Terra: possiamo vedere attraverso di esso senza che la nostra visione sia ostacolata dalla presenza di una linea di demarcazione reale.

Un altro modo di pensare la rappresentazione di una 3-sfera è quello di immaginare le palle solide come le mappe dell'universo, quelle che prima avevamo descritto come scatole. In particolare, ciascuna palla rappresenta metà universo e all'interno di esse sono mappate immagini diverse tranne che per gli oggetti sul bordo, che corrispondono.

È interessante osservare che numerosi studiosi hanno sostenuto in modo convincente che l'universo immaginato da Dante Alighieri nella *Divina Commedia* è una 3-sfera, anche se, naturalmente, non usava questo termine. Dopo essere risalito dall'Inferno fino alla superficie della Terra e aver raggiunto la sommità del monte del Purgatorio, nel Paradiso Dante ascende attraverso i gusci sferici concentrici in cui si trovano i vari pianeti, supera il cielo delle stelle fisse e raggiunge il Nono Cielo, o Primo Mobile. Qui, in cima al Primo Mobile, egli contempla assieme a Beatrice sia la metà dell'universo che ha appena attraversato (guardando verso il basso), sia l'altra metà, quella celestiale, che consiste in una serie di gusci sferici concentrici dove vivono gli angeli, poi gli arcangeli e quindi, procedendo verso l'interno, le schiere angeliche di grado più elevato. La sfera bidimensionale posta al margine esterno di quel guscio sferico che costituisce il Primo Mobile corrisponde all'equatore; da lì lui e Beatrice osservano l'universo. La Terra, e l'Inferno al suo centro, si trovano a un polo, mentre all'altro polo c'è il regno dei serafini. Nella figura 2.2, ognuna delle metà rappresenta una palla solida nella quale abbiamo tagliato una sezione conica in modo da poter vedere il suo interno. La Terra è

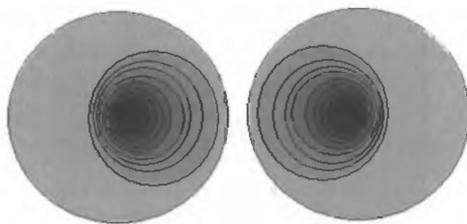


Figura 2.2: a sinistra c'è una sezione che mostra i gusci sferici concentrici del semi-universo visibile: il guscio sferico più esterno è il Primo Mobile, al cui bordo si trovano Dante e Beatrice; quindi, procedendo verso l'interno, troviamo il guscio sferico delle stelle fisse, seguito da quelli di Saturno, di Giove, di Marte, del Sole, di Venere, di Mercurio e della Luna, con la Terra posta infine al centro. A destra c'è invece l'Empireo, l'universo angelico riempito, procedendo anche qui verso l'interno, dai gusci sferici degli angeli, degli arcangeli, dei principati, delle potestà, delle virtù, delle dominazioni, dei troni, dei cherubini e, infine, dei serafini. [12]

posta al centro della palla di sinistra e il regno dei serafini al centro di quella di destra. Dobbiamo immaginare che Dante e Beatrice stiano guardando in un'apertura conica che dà sul centro luminoso della palla solida davanti ai loro occhi e dobbiamo interpretare gli anelli di angeli come i bordi circolari - situati lungo la linea di taglio dell'apertura conica - dei gusci sferici. Questi ultimi, quindi, proseguono anche dietro il centro luminoso, anche sono nascosti alla vista dell'osservatore.

2.1.2 Il 3-toro

Un altro esempio di 3-varietà si ottiene considerando un parallelepipedo. Il suo bordo è costituito da sei facce, tre coppie di rettangoli paralleli. Supponiamo di connettere le facce opposte stabilendo che i punti che si trovano l'uno direttamente di fronte all'altro sono lo stesso punto. questo significa che se usciamo da destra, rientriamo da sinistra, se usciamo dall'alto rientriamo dal basso e se usciamo da dietro rientriamo da davanti. Anche in questo caso

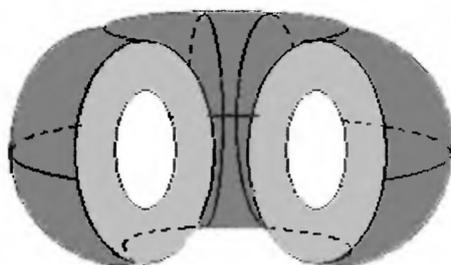


Figura 2.3: il 3-toro si ottiene connettendo i punti corrispondenti sui toro interno ed esterno di un guscio toroidale. [12]

è importante sottolineare che se ci muoviamo all'interno di questa varietà non incontriamo alcun ostacolo: abbiamo costruito il toro tridimensionale o 3-toro. La rappresentazione del toro bidimensionale come un rettangolo con i lati opposti attaccati ci offre un altro modo per pensare il 3-toro. Consideriamo il parallelepipedo con cui siamo partiti come se fosse composto da innumerevoli fogli di carta rettangolari impilati uno dietro l'altro. Collegando la faccia superiore del solido con quella inferiore e la faccia destra con quella sinistra, colleghiamo automaticamente il margine superiore di ogni foglio di carta con quello inferiore e il margine destro con quello sinistro. In altre parole, ci ritroviamo con un solido formato da tori bidimensionali impilati uno sull'altro. Quello che abbiamo ottenuto è un *guscio toroidale*, ovvero una regione solida compresa fra due tori bidimensionali, uno all'interno dell'altro, e riempita da tori concentrici via via più grandi. Il bordo consiste di due tori bidimensionali, corrispondenti al primo e all'ultimo foglio di carta della pila, come mostrato nella figura 2.3. Per ottenere un 3-toro, connettiamo i due tori bidimensionali che costituiscono il bordo. Se vivessimo all'interno di questa varietà, potremmo immaginare di vivere in un guscio toroidale dove il toro esterno coincide con il toro interno: dal nostro punto di vista, questi bordi non esisterebbero e passando attraverso uno di essi riemergeremmo dall'altro.

2.2 n -varietà

In questa sezione presenteremo una descrizione formale di quanto visto fino ad ora, generalizzando la nozione di varietà. Vedremo che ci sono sia varietà topologiche che differenziabili e, in più, vedremo alcuni importanti risultati. Chiaramente tali contenuti non possono essere presentati in questo modo ad uno studente di scuola secondaria. È sufficiente che l'insegnante comunichi quale sia l'idea di varietà, per esempio come mostrato nel capitolo precedente, e introduca il concetto di operazioni con le varietà, in particolare il taglia e incolla e la somma connessa. Sono concetti abbastanza intuitivi, se presentati accompagnati da oggetti concreti, ad esempio a partire da figure bidimensionali. Infine bisogna introdurre gli studenti al problema della classificazione delle varietà, ovvero quello che consiste nel trovare un algoritmo capace di stabilire, in un numero finito di passi, se due varietà topologiche sono o meno omeomorfe. Si tratta di un argomento che ha visto impegnati numerosi matematici negli ultimi due secoli. Se da una parte sono stati raggiunti risultati importanti in questo campo, dall'altra vi sono questioni ancora aperte. In particolare, per le varietà reali connesse, compatte e con bordo vuoto, in dimensione 1 la loro classificazione è banale, in quanto ogni varietà con tali proprietà è omeomorfa alla circonferenza. Per quanto riguarda la classificazione delle superfici reali, compatte e con bordo vuoto, il problema ha visto impegnati molti matematici nel corso dei due secoli scorsi, come ad esempio Möbius, Klein, Riemann, Seifert e Jordan. Si è giunti quindi ad una soluzione del problema e la formulazione del teorema di classificazione si deve a Von Dick (1888).

Definizione 2.1 (n -varietà topologica). Una *varietà topologica* M di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile e che sia localmente omeomorfo a \mathbb{R}^n , cioè tale per ogni $x \in M$ esista un intorno aperto U di x e un omeomorfismo f tra U e un aperto V di \mathbb{R}^n . Si definiscono *curve* le 1-varietà e *superfici* le 2-varietà.

Definizione 2.2 (Carta locale). Data una n -varietà M , si chiama *carta*

locale la coppia (U, f) dove $U \subseteq M$ è un aperto e $f : U \rightarrow f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo.

Definizione 2.3 (Atlante). Se M è una varietà topologica, una famiglia di carte $\mathcal{U} = \{(U_i, f_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ che ricoprono M , ovvero tali che

$$M = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i,$$

è detta *atlante*.

Definizione 2.4 (Mappa di transizione). Sia M una varietà topologica, consideriamo l'atlante $\mathcal{U} = \{(U_i, f_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, una mappa della forma $f_j \circ f_i^{-1} : f_i(U_i \cap U_j) \rightarrow f_j(U_i \cap U_j)$ si chiama *mappa di transizione*.

Definizione 2.5 (Varietà topologica di dimensione n con bordo). Una *varietà topologica di dimensione n con bordo* è uno spazio topologico M di Hausdorff, a base numerabile e tale che sia localmente omeomorfo a $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. inoltre si chiama *bordo* di M , e si indica con ∂M , l'insieme dei punti che corrispondono, nelle carte locali, a punti di $\{x_n = 0\}$, ovvero il bordo di \mathbb{R}_+^n .

Osservazione 2.1. Dato che $\partial \mathbb{R}_+^n$ è omeomorfo a \mathbb{R}^{n-1} , allora ∂M è una $n - 1$ varietà.

Le varietà topologiche sono difficili da indagare, la loro definizione è troppo generica e permette di definire e dimostrare direttamente solo poche cose. Anche la nozione di dimensione non è banale: per dimostrare, ad esempio, che un aperto di \mathbb{R}^k non è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^h per k e h differenti dobbiamo usare costruzioni non banali come l'omologia. È anche difficile trattare i sottospazi topologici. Abbiamo bisogno di definire oggetti "regolari".

Definizione 2.6 (Atlante differenziabile). Sia M è una varietà topologica e $\mathcal{U} = \{(U_i, f_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ un atlante. Se tutte le mappe di transizione sono lisce, cioè C^∞ , l'atlante è detto *differenziabile*.

Definizione 2.7 (Varietà differenziabile). Una *varietà differenziabile* è una varietà topologica con un atlante differenziabile.

Definizione 2.8 (Sottovarietà differenziabile). Sia N una varietà differenziabile di dimensione n . Un sottoinsieme $M \subset N$ è una *sottovarietà differenziabile* di dimensione $m \leq n$ se ogni $p \in M$ ha un intorno aperto $U \subset N$ diffeomorfo ad un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ tramite una mappa $\phi : U \rightarrow V$ che manda $U \cap M$ in $V \cap L$, dove L è un sottospazio lineare di dimensione m .

Definizione 2.9 (Varietà differenziabile con bordo). Una *varietà differenziabile con bordo* è una varietà topologica con bordo con un atlante differenziabile.

Il più importante esempio di varietà con bordo è il *disco*

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Più in generale, un *disco* in una n -varietà N è una sottovarietà con bordo $D \subset N$ diffeomorfa a D^n .

Definizione 2.10 (Varietà orientata). Una *varietà differenziabile* è orientata se ha un atlante in cui tutte le mappe di transizione conservano l'orientamento, ovvero se il determinante del loro differenziale in ogni punto è positivo.

Una varietà che può essere orientata è detta *orientabile*.

Esempio 2.1. In dimensione 2 la sfera S^2 e il toro $T = S^1 \times S^1$ sono esempi di varietà orientabili, mentre il nastro di Möbius è un esempio di varietà non orientabile. In dimensione 3, la 3-sfera e il 3-toro sono esempi di varietà orientabili.

Definizione 2.11 (Fibrato differenziabile). Siano E e B due varietà differenziabili. Un *fibrato liscio* o (*differenziabile*) è una mappa regolare

$$\pi : E \rightarrow B$$

tale che fissata una varietà differenziabile F , ogni punto p di B possiede un intorno aperto U tale che la controimmagine $\pi^{-1}(U)$ è diffeomorfa al prodotto $U \times F$ e π , letta su questo prodotto, è la proiezione sul primo fattore. La varietà B è detta *base*, F è la *fibra*, E è detto *spazio totale*, mentre π è la *proiezione*.

Esempio 2.2 (Fibrato banale). Il prodotto topologico $B \times F$ di due spazi è, con la proiezione sul primo fattore, un fibrato sopra la base B . Un tale fibrato è detto *banale*.

Definizione 2.12 (Sezione). Una *sezione* di un fibrato è una funzione continua

$$s : B \rightarrow E$$

tale che $\pi \circ s = id_B$.

Definizione 2.13 (Fibrato vettoriale). Un *fibrato vettoriale* liscio è un fibrato liscio in cui ogni fibra $\pi^{-1}(p)$ ha la struttura di uno spazio vettoriale reale n -dimensionale che varia in modo regolare con p . Formalmente chiediamo che $F = \mathbb{R}^n$ e che $\phi_i(p, \cdot) : F \rightarrow \pi^{-1}(p)$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni ϕ_i .

Proposizione 2.2. Un fibrato vettoriale su una base B contraibile è banale, cioè è $B \times \mathbb{R}^n$.

Definizione 2.14 (Sezione nulla). La *sezione nulla* di un fibrato vettoriale liscio è la sezione $s : B \rightarrow E$ che manda p in $s(p) = 0$, lo zero nello spazio vettoriale $\pi^{-1}(p)$. L'immagine $s(B)$ della sezione nulla è tipicamente identificata con B attraverso S .

Definizione 2.15 (Fibrato tangente e fibrato normale). Sia M una varietà differenziabile di dimensione n . L'unione di tutti gli spazi tangenti

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

è una varietà differenziabile di dimensione $2n$, chiamata *fibrato tangente*. Il fibrato tangente TM è un fibrato vettoriale.

Sia $M \subset N$ una sottovarietà differenziabile di N . Lo *spazio normale* ad un punto $p \in M$ è lo spazio vettoriale quoziente $\nu_p M = T_p N / T_p M$. Il *fibrato normale* νM è l'unione

$$\nu M = \bigcup_{p \in M} \nu_p M$$

ed è un fibrato vettoriale liscio su M .

Proposizione 2.3. Sia N una n -varietà orientabile e sia $M \subset N$ una sottovarietà di dimensione $n - 1$, allora M è orientabile se e solo se νM è banale, cioè se $\nu M = M \times \mathbb{R}$.

Definizione 2.16 (Immersione ed embedding). Un'applicazione differenziabile $F : M \rightarrow N$ tra due varietà è un'*immersione* se il differenziale $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ è iniettivo per ogni $p \in M$. Diremo che F è un *embedding* se è anche un diffeomorfismo con l'immagine, quindi questo significa che F è iniettiva, la sua immagine è una sottovarietà e $F : M \rightarrow F(M)$ è un diffeomorfismo.

Siano X e Y spazi topologici. Ricordiamo che un'*omotopia* tra due mappe continue $\phi, \psi : X \rightarrow Y$ è una mappa continua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $F_0 = \phi$ e $F_1 = \psi$, dove $F_t = F(\cdot, t)$.

Definizione 2.17 (Isotopia). Siano ora M e N due varietà differenziabili. Un'*isotopia* liscia tra due embeddings $\phi, \psi : M \rightarrow N$ è un'omotopia liscia F tra ϕ e ψ tale che ogni mappa F_t è un embedding.

Un'*isotopia ambientale* di N è un'isotopia tra la funzione identità id_N e un altro diffeomorfismo $\phi : N \rightarrow N$. Inoltre, diremo che due embeddings $\phi, \psi : M \rightarrow N$ sono *ambientalmente isotopi* se c'è un'isotopia ambientale F di N tale che $\psi = F_1 \circ \phi$.

Definizione 2.18 (Intorno tubolare). Sia $M \subset N$ una sottovarietà differenziabile. Un *intorno tubolare* di M è un aperto $U \subset N$ con un diffeomorfismo $\nu M \rightarrow U$ che manda identicamente la sezione zero in M .

Teorema 2.4. Sia $M \subset N$ una sottovarietà differenziabile chiusa. L'intorno tubolare per M esiste ed è unico a meno di isotopia in M , quindi in particolare a meno di un diffeomorfismo.

A questo punto vogliamo formalizzare un'operazione che prende il nome di *taglia e incolla*. Se $M \subset N$ una sottovarietà di dimensione $n - 1$ chiusa e orientabile di una n -varietà orientabile N , ha un intorno tubolare diffeomorfo a $M \times \mathbb{R}$ per la proposizione 2.3. L'operazione di *tagliare* N lungo M consiste nel rimuovere la porzione $M \times (-1, 1)$. La varietà risultante N' ha due nuovi bordi $M \times \{-1\}$ e $M \times \{1\}$, entrambi diffeomorfi a M . Per l'unicità dell'intorno tubolare, la varietà N' dipende (a meno di diffeomorfismi) solo dalla classe di isotopia di $M \subset N$.

Osservazione 2.5. Si può osservare che l'operazione *tagliare* è ben definita ogni volta che νM è banale, cioè $\nu M = M \times \mathbb{R}$ e quindi ogni volta che M è contraibile.

Definizione 2.19 (Sottovarietà separante). Siano M ed N connessi con $M \subset N$. La sottovarietà M è *separante* se, tagliando N lungo M , ottengo due componenti connesse distinte.

Siano M e N una n -varietà con bordo e sia $\phi : \partial M \rightarrow \partial N$ un diffeomorfismo. È possibile *incollare* M e N lungo ϕ e ottenere una nuova n -varietà come segue. Un semplice approccio consiste nel considerare lo spazio topologico $M \sqcup N := (M \times \{0\}) \cup (N \times \{1\})$ e identificare p con $\phi(p)$ per ogni $p \in M$. Lo spazio quoziente risultante è infatti una varietà topologica, ma la costruzione dell'atlante liscio non è immediato. Un metodo veloce consiste nel prendere due collari $\partial M \times [0, 1)$ e $\partial N \times [0, 1)$ e considerare lo spazio topologico

$$(M \setminus \partial M) \sqcup (N \setminus \partial N).$$

Ora identifichiamo i punti (p, t) e $(\phi(p), 1 - t)$ dei collari aperti, per ogni $p \in \partial M$ e per ogni $t \in (0, 1)$. Avendo ora identificato due sottoinsiemi aperti

di $M \setminus \partial M$ e $N \setminus \partial N$, un atlante differenziabile per la nuova varietà è immediatamente derivata dagli atlanti di M e N .

Definizione 2.20 (Somma connessa). Siano M_1 e M_2 n -varietà connesse. Si considerino due aperti $U_1 \subseteq M_1$ e $U_2 \subseteq M_2$. Essi sono omeomorfi a B^{n-1} , le loro chiusure sono omeomorfe a D^{n-1} , mentre il loro bordo è omeomorfo a S^{n-1} . Sia ϕ l'omeomorfismo $\phi : \partial U_1 \rightarrow \partial U_2$ (se le varietà sono orientabili con un'orientazione fissata su entrambe, si chiede che ϕ inverta le orientazioni fissate) e $Y = (M_1 \setminus U_1) \cap (M_2 \setminus U_2)$. Si chiama *somma connessa* di M_1 e M_2 , denotata con $M_1 \# M_2$, la n -varietà così definita:

$$M_1 \# M_2 = Y / \sim,$$

dove \sim è la relazione di equivalenza che identifica ogni $x \in \partial U_1$ con l'immagine $\phi(x) \in \partial U_2$. La somma connessa di M_1 e M_2 è quindi definita come lo spazio che si ottiene rimuovendo le due palle aperte da M_1 e da M_2 ed incollando successivamente i nuovi bordi sferici tramite la mappa ϕ .

Si può osservare che $M_1 \# M_2$ dipende dagli aperti U_1, U_2 e dall'omeomorfismo ϕ . Se però le varietà M e N sono differenziabili e ogni omeomorfismo nella definizione è un diffeomorfismo, allora la scelta degli aperti non influisce nel risultato.

Proposizione 2.6. Se M_1 e M_2 sono n -varietà orientabili e una delle due è tale che esiste un diffeomorfismo da se stessa in se stessa che ne inverte l'orientazione, allora la somma connessa è ben definita, indipendentemente da ϕ .

Proposizione 2.7. La n -varietà orientata $M_1 \# M_2$ dipende, a meno di diffeomorfismi, solo da M_1 e M_2 . L'operazione di somma connessa $\#$ è commutativa, associativa e S^n è l'elemento neutro.

L'osservazione 2.5 ci permette di definire la somma connessa anche per superfici non orientabili, infatti, B^{n-1} è contraibile.

2.3 Richiami di geometria riemanniana

Introduciamo ora qualche nozione di geometria riemanniana che ci servirà poi nel seguito. Osserviamo che una varietà differenziabile è priva di molte nozioni geometriche che a noi sembrano perfettamente naturali, come la distanza tra due punti o la lunghezza di un cammino. Aggiungiamo quindi un concetto matematico utile a questo scopo: la *metrica riemanniana*.

Definizione 2.21. Una *metrica riemanniana* g su una varietà differenziabile M è una funzione che ad ogni punto p di M associa un prodotto scalare g_p , definito sullo spazio tangente T_pM , che dipende in modo C^∞ da p .

Definizione 2.22 (Varietà riemanniana). Una *varietà riemanniana* è una coppia (M, g) dove M è una varietà differenziabile e g una metrica riemanniana su M .

Esempio 2.3. Lo *spazio euclideo* è una varietà $M = \mathbb{R}^n$ dotata della metrica *euclidea* $g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ in ogni spazio tangente $T_pM = \mathbb{R}^n$.

Esempio 2.4. Ogni sottovarietà differenziabile N in una varietà riemanniana M è anch'essa riemanniana: è sufficiente restringere la metrica su T_pM a T_pN , per ogni $p \in N$. Ad esempio la sfera unitaria

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

è una sottovarietà di \mathbb{R}^{n+1} e quindi è riemanniana.

La metrica g definisce in particolare una norma per ogni vettore tangente. Sia ora $\gamma : I = [t_1, t_2] \rightarrow M$ una curva, la *lunghezza* di γ può essere definita come

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)| dt$$

e può essere finita o infinita.

Osservazione 2.8. Sia $\eta : J \rightarrow M$ una riparametrizzazione di γ ottenuta come $\eta = \gamma \circ \phi$, dove $\phi : J \rightarrow I$ è un diffeomorfismo di intervalli. Si ha che $L(\eta) = L(\gamma)$, ovvero la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Definizione 2.23 (Velocità). Sia $\gamma : I \rightarrow M$ una curva, allora $|\gamma'(t)|$, per ogni $t \in I$, prende il nome di *velocità*.

Definizione 2.24. Sia $|\gamma'(t)| \neq 0$, per ogni $t \in I$. La quantità

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\gamma'(\tau)| d\tau, \quad t \in I$$

è lo spazio percorso dal moto nell'intervallo $[t_0, t]$ ed è detta *ascissa curvilinea*. La funzione $t \mapsto s(t)$ è invertibile perchè strettamente crescente. Sia $s \mapsto t(s)$ la funzione inversa di $t \mapsto s(t)$, $s(t)$ si chiama *lunghezza d'arco*.

Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa. Abbiamo definito la lunghezza di una curva su M . Questo viene usato per definire il concetto di *distanza* su M .

Definizione 2.25 (Distanza). La distanza $d(p, q)$ tra due punti $p, q \in M$, è

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

dove γ varia tra tutte le curve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

La varietà M dotata della distanza d è uno spazio metrico, compatibile con la topologia iniziale di M .

Definizione 2.26 (Geodetica). Una *geodetica* è una curva $\gamma : I \rightarrow M$ in cui la velocità $|\gamma'(t)|$ è costante per ogni $t \in I$ e che coincide localmente con la distanza. Questo significa che ogni $t \in I$ ha un intorno chiuso $[a, b] \subset I$ tale che $d(\gamma(a), \gamma(b)) = L(\gamma|_{[a,b]}) = k(b - a)$, dove $k := |\gamma'(t)|$.

La curva costante $\gamma(t) = p_0$ è una geodetica con velocità costante $k = 0$ ed è chiamata geodetica *banale*.

Esempio 2.5. Le geodetiche non banali nello spazio euclideo \mathbb{R}^n sono le porzioni di rette affini, mentre le geodetiche non banali sulla sfera S^n sono le porzioni di cerchi massimi.

Si può osservare che una curva che coincide localmente con la distanza, non sempre coincide con essa globalmente.

Una varietà riemanniana (M, g) è uno spazio metrico e quindi in particolare se ne può studiare la completezza in quanto tale. Ricordiamo che uno spazio metrico si dice completo se tutte le successioni di Cauchy sono convergenti ad un elemento dello spazio. In particolare, una varietà riemanniana compatta è sempre completa. La completezza per una varietà riemanniana può essere espressa in diversi modi:

Teorema 2.9 (Teorema di Hopf-Rinow). Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa. Sono equivalenti:

- (a) M è completa;
- (b) ogni sottoinsieme $N \subset M$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato;
- (c) ogni geodetica $\gamma : I \rightarrow S$ può essere estesa ad una geodetica con dominio \mathbb{R} .

Teorema 2.10. Se M è completa, allora, per ogni coppia di punti $p, q \in M$, esiste una *geodetica minimizzante* γ che li congiunge, ovvero esiste una curva γ tale che $L(\gamma) = d(p, q)$.

Definizione 2.27 (Isometria). Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow N$ tra due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) è un'*isometria* se conserva il prodotto scalare, cioè per ogni $p \in M$ e per ogni $v, w \in T_p M$, vale:

$$\langle v, w \rangle_p = \langle (d_p f)(v), (d_p f)(w) \rangle_{f(p)},$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{f(p)}$ rappresentano rispettivamente il prodotto scalare in $T_p M$ e in $T_{f(p)} N$.

Diciamo che due varietà riemanniane (M, g) ed (N, h) sono *isometriche*, $M \simeq N$, se esiste un'isometria tra M ed N . L'insieme delle isometrie da M in se stessa formano un gruppo con l'operazione di composizione e si denota con $\text{Isom}(M)$.

Definizione 2.28 (Isometria locale). Un'*isometria locale* $f : M \rightarrow N$ tra due varietà riemanniane è una mappa in cui ogni $p \in M$ ha un intorno aperto U tale che $f|_U$ sia un'isometria in ogni punto di U .

Definizione 2.29 (Varietà riemanniana omogenea). Una varietà riemanniana connessa (M, g) è *omogenea* se per ogni $p, q \in M$ esiste un'isometria di M che porti p in q .

Definizione 2.30 (Varietà riemanniana localmente omogenea). Una varietà riemanniana connessa (M, g) è *localmente omogenea* se per ogni $p, q \in M$ esiste un intorno U di p , un intorno V di q e un'isometria $f : U \rightarrow V$.

Definizione 2.31 (Varietà riemanniana isotropa). Una varietà riemanniana connessa (M, g) è *isotropa* se per ogni $p \in M$ e per ogni coppia di vettori $v, w \in T_p M$ di norma unitaria esiste una isometria f di M tale che $f(p) = p$ e $d_p f(v) = w$.

Si può dimostrare che una varietà riemanniana connessa, completa e isotropa è anche omogenea. Gli esempi fondamentali di spazi isotropi sono S^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n .

Diamo ora la definizione di *struttura geometrica* per le due varietà.

Definizione 2.32. Sia X uno tra \mathbb{H}^2 , S^2 , \mathbb{R}^2 e sia Γ un sottogruppo di $\text{Isom}(X)$. Se M è una 2-varietà tale che $M \simeq X/\Gamma$ e la proiezione $X \rightarrow X/\Gamma$ è un rivestimento, allora diciamo che M ha una *struttura geometrica modellata su X* .

Generalizzando a una dimensione arbitraria, possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 2.33. Una varietà riemanniana (M, g) ha una *struttura geometrica* se è completa e localmente omogenea.

Proposizione 2.11. Se (M, g) è una varietà riemanniana di dimensione n che ammette una struttura geometrica (definizione 2.33) e X è il suo rivestimento universale, allora esiste un sottogruppo Γ di $\text{Isom}(X)$ tale che M è isometrico a X/Γ .

Segue che possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 2.34. Una varietà riemanniana M ha una struttura geometrica modellata su X se $M \simeq X/\Gamma$, dove Γ è un sottogruppo del gruppo di isometrie di X .

Nei capitoli successivi ci occuperemo della classificazione delle superfici per poi passare alle varietà tridimensionali. È utile osservare che la categoria DIFF studia le varietà differenziabili a meno di diffeomorfismi e le applicazioni C^∞ tra varietà differenziabili. Nella categoria TOP si studiano, invece, le varietà topologiche a meno di omeomorfismi e le applicazioni continue tra varietà topologiche. Osserviamo che ogni varietà differenziabile è anche una varietà topologica. Tuttavia due varietà equivalenti in TOP non è detto che lo siano in DIFF, in quanto è richiesto un diffeomorfismo C^∞ e non un semplice omeomorfismo. È interessante chiedersi che relazione ci sia tra le categorie TOP e DIFF, la risposta è nel seguente teorema

Teorema 2.12. In dimensione 0,1,2,3, dati gli spazi topologici A e B , sono equivalenti:

- (i) A e B sono varietà topologiche omeomorfe;
- (ii) A e B sono varietà differenziabili diffeomorfe.

Capitolo 3

Il caso delle 2-varietà

3.1 Classificazione topologica delle superfici

Si può dimostrare che esistono solo due varietà topologiche di dimensione 1: la circonferenza S^1 e la retta \mathbb{R} . Ogni altra curva connessa è infatti omeomorfa a una di queste due.

Le varietà di dimensione 2 sono più variegate: tra queste troviamo la sfera S^2 , il toro $S^1 \times S^1$, il nastro di Möbius, la bottiglia di Klein e molte altre. In realtà anche solo le superfici orientabili sono infinite. Consideriamo, ad esempio, i g -tori, ovvero i tori con g buchi, esse sono superfici topologicamente distinte al variare di $g \in \mathbb{N}$. Più nel dettaglio, sia S_g la somma connessa

$$S_g = \underbrace{T \# \dots \# T}_g,$$

dove $T = S^1 \times S^1$ è il toro. Per definizione poniamo $S_0 = S^2$ e $S_1 = T$. Il numero g è il *genere* della superficie chiusa S_g . La superficie S_g può essere rappresentata in diversi modi in \mathbb{R}^3 , ad esempio si veda la figura 3.1

Esiste un teorema che permette di classificare completamente, a meno di equivalenze topologiche, le 2-varietà senza bordo, connesse e compatte.



Figura 3.1: una superficie di genere 3 può essere rappresentata in vari modi. [9]

Teorema 3.1 (Teorema di classificazione delle superfici). Ogni superficie senza bordo, connessa e compatta è omeomorfa ad una e una sola delle seguenti superfici:

- la sfera S^2 ,
- la somma connessa di g tori $S^1 \times S^1 \# \dots \# S^1 \times S^1$,
- la somma connessa di g piani proiettivi $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Ci sono varie dimostrazioni di questo teorema; quella che vedremo utilizza la rappresentazione delle superfici tramite incollamento dei lati di un poligono. Quindi prima di analizzare la dimostrazione vediamo come è possibile costruire superfici partendo da poligoni piani.

Sia P un poligono di \mathbb{R}^2 con un numero pari di lati. Considereremo superfici topologiche ottenute come spazi quoziente di P attraverso opportune identificazioni dei lati tra loro a coppie, nel modo che ora descriveremo. Fissato un vertice v , ed un verso di percorrenza del bordo di P , consideriamo simboli a_1, \dots, a_n , ed un monomio in a_1, \dots, a_n con esponenti ± 1 , in cui ogni a_i compaia esattamente due volte. A questo monomio corrisponde una “etichettatura” con un simbolo a_i di ognuno dei $2n$ lati ed una orientazione di ognuno di essi che è concorde o discorde con il verso di percorrenza del bordo di P a seconda che l’esponente sia $+1$ oppure -1 . In questo modo ad ogni lato è assegnato lo stesso simbolo di uno ed un solo altro lato, ed esiste un unico omeomorfismo lineare tra i due lati che rispetta le orientazioni indotte su di essi dal monomio. Questi omeomorfismi tra i lati di P a coppie inducono una relazione di equivalenza su P . Lo spazio quoziente S è una superficie

topologica compatta e connessa che verrà denotata con lo stesso simbolo. Verifichiamolo:

- $[P] = \{P\}$ se P è interno.
- $[P] = \{P, P'\}$ se P e P' sono punti interni di lati accoppiati. Infine se P è un vertice del poligono la cardinalità di $[P]$ dipende dalle scelte fatte, ma in ogni caso è facile verificare che l'unione di opportuni intornoi dei punti in $[P]$ è un disco.

Esempio 3.1 (Toro). Consideriamo, ad esempio, il caso $2n = 4$ e chiamiamo $a_1 = a$ e $a_2 = b$. La superficie $aba^{-1}b^{-1}$ è omeomorfa al toro $T = S^1 \times S^1$.

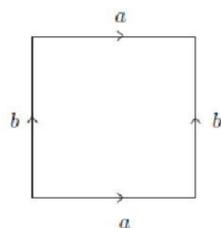


Figura 3.2: costruzione del toro considerando un quadrato e incollando i lati opposti.

Esempio 3.2 (Multitoro). La superficie $a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}a_3a_4a_3^{-1}a_4^{-1}$ è il 2 -toro. Più in generale, per ogni intero $g \geq 1$ la superficie

$$a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}a_3a_4a_3^{-1}a_4^{-1}\dots a_{2g-1}a_{2g}a_{2g-1}^{-1}a_{2g}^{-1}$$

quoziente di un poligono P_{4g} è il *multitoro di genere g* o *g -toro*, cioè la somma connessa di g tori, e si indica con gT .

Esempio 3.3 (Piano proiettivo). La superficie $a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}$ è omeomorfa al piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

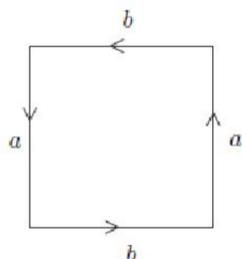


Figura 3.3: una rappresentazione del piano piano proiettivo.

Esempio 3.4 (Multipiano proiettivo). Un'altra superficie importante è

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$$

che si chiama *multipiano proiettivo di genere g* , cioè la somma connessa di g piani proiettivi, e si indica con $g\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Esempio 3.5 (Bottiglia di Klein). La superficie $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2$ è la bottiglia di Klein.

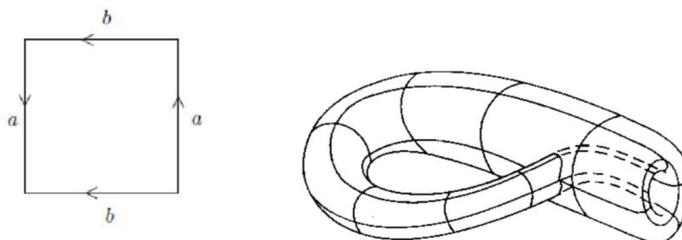


Figura 3.4: bottiglia di Klein.

Consideriamo anche la sfera come un quoziente, e precisamente come il quoziente del disco unitario chiuso D^2 , ottenuto identificando tra loro i punti simmetrici rispetto ad un qualunque diametro. Considereremo D^2 come un poligono generalizzato a 2 lati (le due semicirconferenze in cui r divide $S^1 = \partial D^2$), ed il suo quoziente S^2 corrisponderà al monomio aa^{-1} . Il quoziente aa

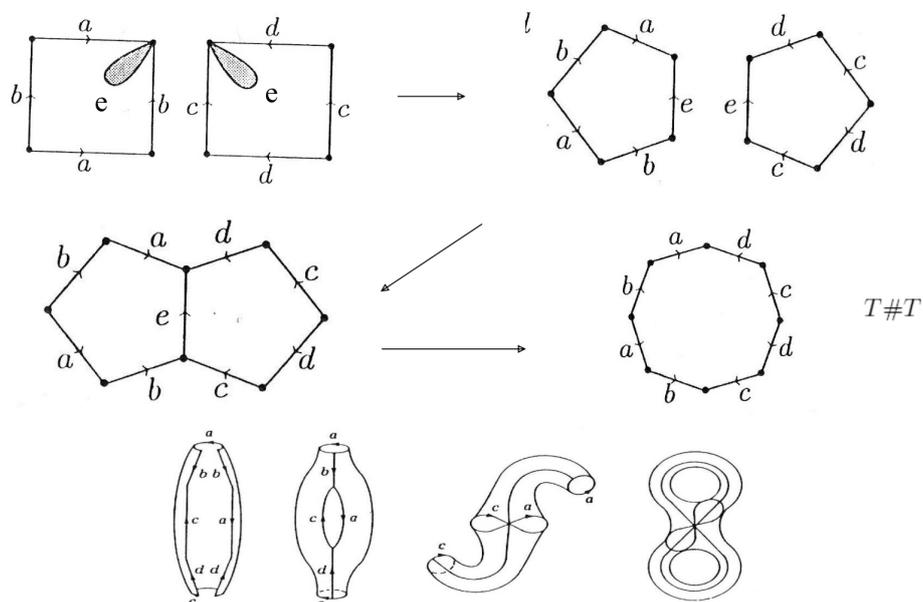


Figura 3.5: costruzione del 2-toro $T\#T$, ponendo $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $a_4 = d$.

di D^2 è invece il piano proiettivo. Confrontando con la rappresentazione di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ data in precedenza vediamo in particolare che una data superficie può essere ottenuta in corrispondenza a monomi diversi.

Definizione 3.1. Due poligoni etichettati si dicono equivalenti se le corrispondenti superfici quoziente sono omeomorfe.

Una coppia di lati del poligono P si dice una *coppia del primo tipo* se i

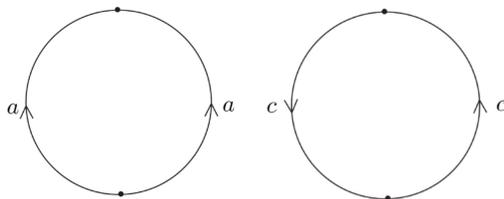


Figura 3.6: a sinistra il quoziente del disco omeomorfo alla sfera S^2 , mentre a destra il quoziente del disco omeomorfo al piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

due lati sono identificati tra loro e sono orientati in modo discorde, cioè se le loro etichette sono uguali ma con esponenti opposti. Se invece i due lati hanno etichette ed esponenti uguali essi costituiscono una *coppia del secondo tipo*.

Proposizione 3.2. Se il poligono P possiede una coppia di lati del secondo tipo, allora la superficie quoziente contiene un sottospazio chiuso omeomorfo ad un nastro di Möbius.

Dimostrazione. Supponiamo che l_1 ed l_2 costituiscano una coppia del secondo tipo. Siano $\lambda_1 \subset l_1$ e $\lambda_2 \subset l_2$ segmenti chiusi non contenenti alcuno degli estremi di l_1 ed l_2 e aventi la stessa immagine nella superficie S . Il quadrilatero chiuso $R \subset P$ i cui vertici sono gli stessi di λ_1 e di λ_2 ha per immagine in S un nastro di Möbius. \square

La dimostrazione del teorema 3.1 (classificazione delle superfici) è strutturata nel seguente modo:

- dimostrare che una superficie quoziente di un poligono etichettato è omeomorfa ad una sfera, ad un multitoro di genere g , con $g \geq 1$, oppure ad un multipiano proiettivo.
- dimostrare che se S è una superficie connessa, compatta e triangolabile allora S è omeomorfa al quoziente di un poligono convesso opportunamente etichettato, ricordando che ogni superficie è triangolabile.
- dimostrare che le superfici elencate nell'enunciato del teorema sono a due a due non omeomorfe, cioè che la classificazione data non è ridondante.

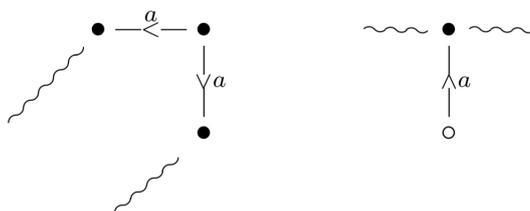
Teorema 3.3. Ogni superficie quoziente di un poligono etichettato è omeomorfa ad una sfera, ad un multitoro di genere g , con $g \geq 1$, oppure ad un multipiano proiettivo.

Dimostrazione. La dimostrazione è ottenuta attraverso successive sostituzioni del poligono etichettato P con un altro ad esso equivalente. Nelle figure

rappresenteremo con $\sim\sim\sim$ una successione di lati che non ci occorre specificare in dettaglio, con \bullet un vertice e con \circ un punto interno al poligono.

Innanzitutto, se il poligono etichettato P ha una sola lettera ripetuta due volte, per esempio a , allora essa individua o una coppia di lati adiacenti del primo tipo aa^{-1} che corrisponde ad una sfera, oppure una coppia di lati adiacenti del secondo tipo aa , che corrisponde ad un piano proiettivo e la dimostrazione è conclusa. Se invece P presenta almeno due lettere diverse ripetute si procede.

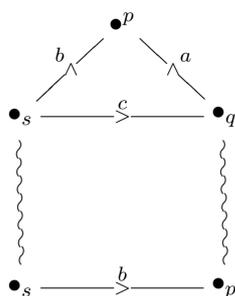
Primo passo: Eliminazione di coppie di lati del primo tipo adiacenti. Una coppia di lati del primo tipo adiacenti può essere eliminata sostituendo a P il poligono a $2n - 2$ lati ottenuto identificando tra loro i due lati.



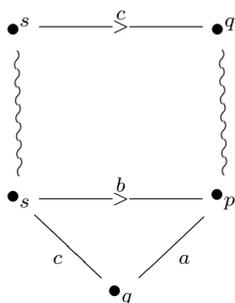
Dopo aver effettuato questa operazione per tutte le coppie di lati del primo tipo adiacenti si otterrà un poligono in cui non ci sono più coppie di lati siffatte. Se si ottiene uno dei poligoni etichettati dell'enunciato il teorema è vero, altrimenti procediamo con il successivo passo della dimostrazione.

Secondo passo: Identificazione di tutti i vertici ad un solo punto. Per quanto dimostrato sopra, possiamo supporre che il poligono P sia etichettato da un monomio in cui non vi sono coppie del primo tipo adiacenti. I vertici di P sono suddivisi in classi di equivalenza, ognuna delle quali è costituita da vertici che hanno la stessa immagine in S . Denoteremo tutti i vertici di una stessa classe con la stessa lettera. Supponiamo che non tutti i

vertici siano equivalenti tra loro. Allora esiste una coppia di vertici adiacenti non equivalenti, siano essi p e q , e sia $a = a_i$ il lato compreso. L'altro lato di cui p è vertice non è etichettato con a perché altrimenti i due lati costituirebbero una coppia del secondo tipo, contraddicendo il fatto che p e q non sono equivalenti. Sia dunque b l'altro lato di vertice p , ed s il secondo estremo di b . Consideriamo il segmento c congiungente s e q , e sia Δ il triangolo chiuso di vertici p, q, s .



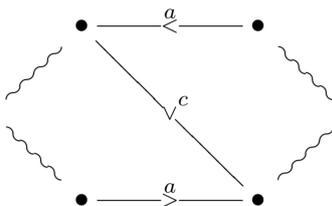
Tagliando P lungo c ed identificando il lato b con l'altro lato etichettato b , otteniamo un nuovo poligono etichettato Q equivalente a P , ed avente lo stesso numero di lati, come illustrato dalla figura seguente:



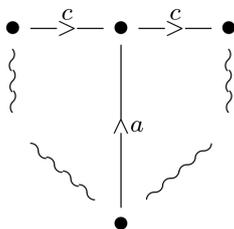
Con questa operazione la classe di equivalenza di p ha perso un elemento, mentre quella di q ne ha acquistato uno, ed il numero di elementi di tutte le altre classi è rimasto invariato. Iterando questo procedimento e riapplicando il primo passo, se necessario, è possibile far aumentare gli elementi di una classe di equivalenza a spese di tutte le altre, ottenendo alla fine che tutti i vertici siano equivalenti tra loro.

Terzo passo: normalizzazione di coppie di lati del secondo tipo.

Supponiamo di aver effettuato i primi due passi e che il poligono ottenuto, che chiameremo ancora P , contenga una coppia di lati del secondo tipo non adiacenti. Supponiamoli etichettati con la lettera a .



Con l'operazione di taglio ed identificazione illustrata dalla figura seguente è possibile sostituire P con un altro poligono Q in cui la coppia è sostituita da un'altra costituita da lati adiacenti, mentre le adiacenze delle altre coppie non vengono modificate, e i vertici rimangono tutti equivalenti tra loro.

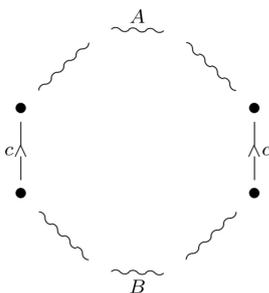


Iterando questo procedimento otteniamo un poligono equivalente a P in cui le coppie del secondo tipo, se ce ne sono, sono tutte normalizzate. Se il poligono etichettato così ottenuto, che chiameremo ancora P , è quello che definisce un multipiano proiettivo allora la dimostrazione è terminata. Altrimenti ci sono coppie di lati del primo tipo e si procede al passo successivo.

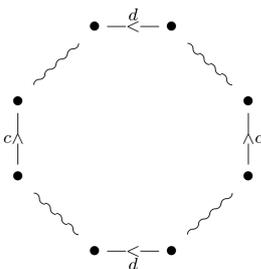
Quarto passo: normalizzazione di coppie di lati del primo tipo.

Supponiamo che P contenga una coppia di lati del primo tipo, etichettati c . Grazie al primo passo della dimostrazione, i due lati non sono adiacenti. Inoltre esiste un'altra coppia di lati del primo tipo, etichettati d , che separa i due lati c , cioè tale che i lati di ogni coppia si alternino a quelli dell'altra

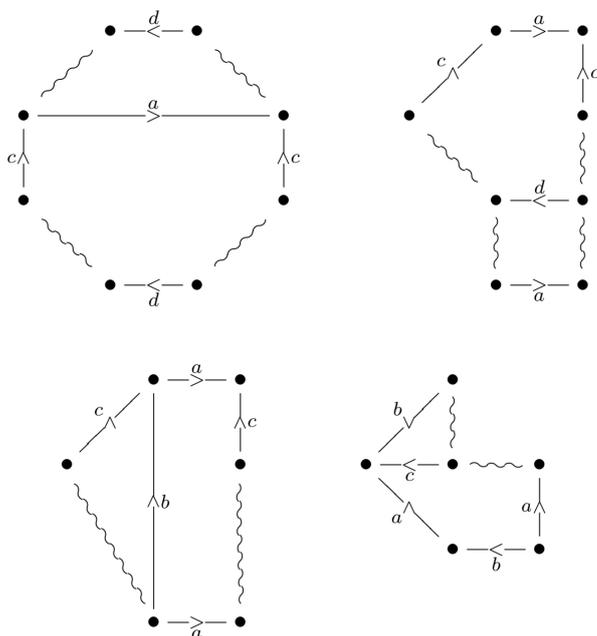
lungo il perimetro. Infatti, se così non fosse, si avrebbe una situazione come quella descritta nella figura seguente, in cui nessun vertice della regione A sarebbe equivalente ad uno della regione B , contraddicendo il fatto che tutti i vertici sono equivalenti.



Abbiamo la situazione seguente:

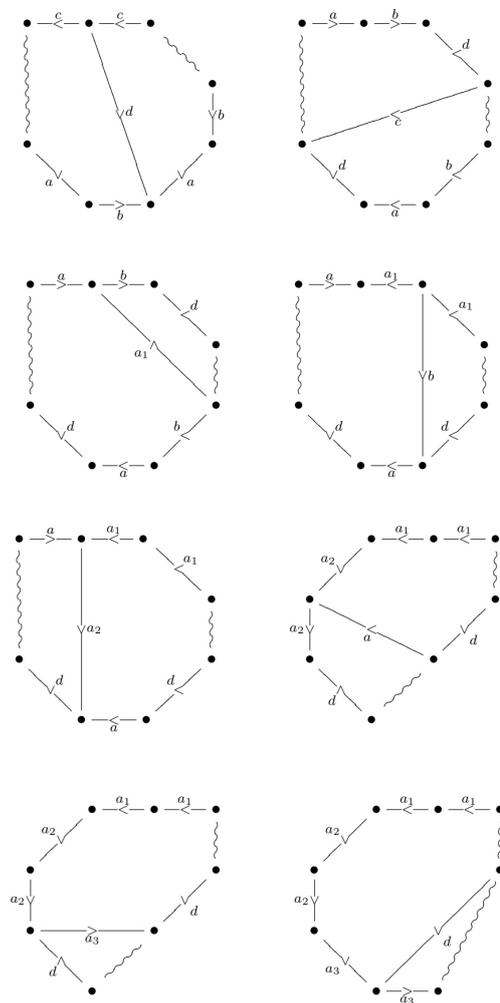


Mediante la successione di tagli ed identificazioni illustrati dalle figure seguenti si passa ad un poligono equivalente a P , in cui le due coppie di lati del primo tipo c , d vengono sostituite da due coppie del primo tipo normalizzate.



Se dopo aver normalizzato tutte le coppie di lati del primo tipo si arriva ad un poligono etichettato che definisce un multitoro, il teorema è dimostrato. Altrimenti il nuovo poligono, che denoteremo ancora con P , possiede sia coppie di lati del primo che del secondo tipo, tutte normalizzate. In tal caso è necessario un ulteriore passo.

Quinto passo: trasformazione di coppie di lati del primo tipo in coppie di lati del secondo tipo. Il poligono etichettato P possiede sia coppie di lati del primo tipo che del secondo tipo, tutte normalizzate. La successione di tagli ed identificazioni illustrati dalle figure seguenti mostra come, data una coppia di lati del secondo tipo e due coppie del primo tipo normalizzate, è possibile trasformare le coppie del primo tipo in coppie del secondo tipo normalizzate.



Iterando questo procedimento è possibile ottenere un poligono etichettato equivalente a P in cui vi sono solo coppie normalizzate del secondo tipo. Pertanto S è un multipiano proiettivo ed il teorema è dimostrato. \square

A questo punto bisogna mostrare che ogni superficie compatta e connessa è omeomorfa al quoziente di un poligono opportunamente etichettato. Per questa dimostrazione è necessario introdurre il concetto di *triangolazione*.

Sia S una superficie topologica. Un *triangolo* in S è una coppia (T, ϕ) dove $T \subset S$ è un sottoinsieme compatto e ϕ è un omeomorfismo di T su un

triangolo chiuso di \mathbb{R}^2 . I lati di T sono le controimmagini tramite ϕ dei lati di $\phi(T)$ e i vertici di T sono le controimmagini tramite ϕ dei vertici di $\phi(T)$. Con abuso di notazione denoteremo spesso un triangolo (T, ϕ) con la sola lettera T , supponendo implicitamente assegnato l'omeomorfismo ϕ .

Definizione 3.2 (Triangolazione). Una *triangolazione* di S è una famiglia $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$ di triangoli di S con le seguenti proprietà:

- $\bigcup_{i \in I} T_i = S$;
- se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ per qualche $i \neq j$, allora $T_i \cap T_j$ è un vertice o un lato di entrambi i triangoli;
- ogni lato di ogni triangolo T_i è anche lato di uno ed un solo altro triangolo T_j ;
- per ogni vertice v di qualche triangolo, i triangoli T_i che lo contengono sono un numero finito ≥ 3 , e si possono ordinare circolarmente in modo che due triangoli siano consecutivi se e solo se hanno un lato in comune.

Se possiede almeno una triangolazione S si dice *triangolabile*. Una triangolazione $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$ di S si dice *finita* se I è un insieme finito, cioè se τ consiste di un numero finito di triangoli. Poiché l'unione di un numero finito di compatti è compatto, dalla prima condizione della definizione di triangolazione segue che se S possiede una triangolazione finita, allora è compatta. Viceversa:

Proposizione 3.4. Se S è una superficie compatta e triangolabile, ogni sua triangolazione è finita.

Dimostrazione. Sia $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$ una triangolazione di S . Per ogni indice $i \in I$ scegliamo un punto $p_i \in \text{Int}(T_i)$. Poniamo:

$$U_i = S \setminus \overline{\{p_j : j \neq i\}}$$

Si ha $T_i \subset U_i$, per ogni $i \in I$, dunque $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di S . Inoltre $p_i \notin U_j$ per ogni $i \neq j$ e pertanto $\{U_i\}_{i \in I}$ non possiede sottoricoprimenti propri. Dato che S è compatta, l'unica possibilità è che il ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ sia finito, e quindi che I sia finito. \square

Proposizione 3.5. Se S è una superficie connessa, compatta e triangolabile allora S è omeomorfa al quoziente di un poligono convesso opportunamente etichettato.

Dimostrazione. Sia $\tau = \{T_1, \dots, T_n\}$ una triangolazione di S . Ordiniamo T_1, \dots, T_n in modo che per ogni $2 \leq i \leq n$ il triangolo T_i abbia un lato l_i in comune con qualche T_j , $j < n$, sia questo il lato m_{i-1} . Tale ordinamento esiste per la connessione di S . Sia T l'unione disgiunta dei triangoli T_1, \dots, T_n e sia P il quoziente ottenuto da T identificando tra loro i lati l_i ed m_{i-1} , con $i = 2, \dots, n$. P è omeomorfo ad un poligono a $2n$ lati, che corrispondono ai lati di T_1, \dots, T_n non ancora identificati tra loro e che S è un quoziente di P , ottenuto dall'identificazione di tali lati a due a due in modo corrispondente alla triangolazione τ . \square

Teorema 3.6. Ogni superficie topologica è triangolabile.

Proposizione 3.7. Ogni superficie compatta e connessa è omeomorfa o alla sfera S^2 , o ad un multitoro di genere g , per qualche $g \geq 1$, oppure ad un multipiano proiettivo.

Dimostrazione. Segue dal teorema 3.3 e dalla proposizione 3.5. \square

A questo punto, per ottenere una classificazione completa delle superfici compatte e connesse, resta da dimostrare che le superfici elencate nell'enunciato del teorema sono a due a due non omeomorfe. Prima però ricordiamo la definizione di *caratteristica di Eulero*.

Alcuni spazi topologici possono essere costruiti in modo iterativo a partire da un numero finito di punti e attaccando alcuni dischi, chiamati *celle*, di dimensione crescente.

Definizione 3.3 (Complesso di celle). Un *complesso di celle* finito di dimensione n , detto anche *n -complesso* o *CW-complesso* di dimensione n , è uno spazio topologico ottenuto in modo iterativo nella seguente maniera:

- uno 0-complesso X^0 è un insieme finito di punti;
- un n -complesso X^n è ottenuto da un $(n-1)$ -complesso X^{n-1} è ottenuto attaccando un numero finito di n -celle, che sono copie di D^n attaccate lungo mappe continue $\phi : \partial D^n \rightarrow X^{n-1}$.

Definizione 3.4 (k -scheletro). il sottoinsieme chiuso $X^k \subset X^n$ è detto *k -scheletro*, per ogni $k < n$.

Spesso si parla di un n -complesso X , confondendo lo spazio topologico dato dal sostegno di X con la sua struttura di n -complesso. Bisogna però tenere presente che uno stesso spazio topologico X può avere diverse strutture di n -complesso, e che, per assegnare una struttura di n -complesso, occorre specificare il sostegno, quante celle sono previste in ogni dimensione e anche le relative funzioni di attaccamento.

Definizione 3.5 (Caratteristica di Eulero). La *caratteristica di Eulero* di un n -complesso X è il numero intero

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_i,$$

dove C_i è il numero di i -celle in X .

A priori, la caratteristica di Eulero $\chi(X)$ dipende dalla struttura di n -complesso di X e non solo dallo spazio topologico che ne è il sostegno. Si può però dimostrare che la caratteristica di Eulero è un invariante topologico (anzi, omotopico): dipende quindi solo dal sostegno X . Dunque, n -complessi che hanno sostegni omeomorfi (o anche solo omotopicamente equivalenti) hanno la stessa caratteristica di Eulero.

A questo punto vogliamo calcolare la caratteristica di Eulero di alcune superfici.

Esempio 3.6 (Sfera). Vediamo due diversi esempi di strutture di complessi di celle sulla sfera S^2 .

1. Una 0-cella e una 2-cella con la funzione costante come funzione di attaccamento, ovvero l'unica possibile. Gli scheletri X_0 e X_1 coincidono e si riducono ad un punto, mentre il 2-scheletro è tutta la sfera S^2 . Segue che

$$\chi(X) = 1 - 0 + 1 = 2.$$

2. Una 0-cella, una 1-cella e due 2-celle. Lo 0-scheletro X_0 si riduce ad un punto, X_1 è una circonferenza S^1 e non è necessario specificare la funzione di attaccamento della 1-cella. Dobbiamo invece specificare le funzioni di attaccamento delle due 2-celle e questi sono degli omeomorfismi $f : S^1 \rightarrow X_1$. Segue che

$$\chi(X) = 1 - 1 + 2 = 2.$$

3. Possiamo considerare il quoziente del disco omeomorfo alla sfera S^2 , come in figura 3.6, e a questo punto avremo due 0-celle (i due vertici), una 1-cella (i due lati sono identificati) e una 2-cella (l'interno del disco). Segue che

$$\chi(X) = 2 - 1 + 1 = 2.$$

Esempio 3.7 (Toro). Il toro T può avere una struttura di complesso di celle con una 0-cella, due 1-celle e una 2-cella. Le funzioni di attaccamento delle due 1-celle sono necessariamente costanti e quindi l'1-scheletro è un bouquet di 2 circonferenze. La funzione di attaccamento della 2-cella è $f : S^1 \rightarrow X^1$ che possiamo descrivere, ricordando la descrizione del toro come poligono con identificazioni (figura 3.2), come $aba^{-1}b^{-1}$. Segue che

$$\chi(X) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Esempio 3.8 (Piano proiettivo). Anche in questo caso possiamo considerare il quoziente del disco omeomorfo al piano proiettivo (figura 3.6). Avremo una 0-cella, una 1-cella e una 2-cella. Segue che

$$\chi(X) = 1 - 1 + 1 = 1.$$

Per la somma connessa valgono le seguenti proprietà:

Proposizione 3.8. Sia S una superficie chiusa (compatta e senza bordo) di genere g , allora si ha che $\chi(S) = 2 - 2g$ se S è orientabile, $\chi(S) = 2 - g$ se S non è orientabile.

Dimostrazione. Siano S, S' superfici e $D \subset S, D' \subset S'$ dischi. si ha che

$$\chi(S \# S') = \chi(S \setminus D) + \chi(S' \setminus D') - \chi(S^1) = \chi(S) - 1 + \chi(S') - 1 = \chi(S) + \chi(S') - 2.$$

Il risultato segue procedendo per induzione su g . \square

Corollario 3.9. Si ha che:

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(gT) = 2 - 2g, g \geq 1$
- $\chi(g\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = 2 - g, g \geq 1$.

In particolare due multitori di generi diversi non sono omeomorfi, e due multipiani proiettivi di generi diversi non sono omeomorfi.

Dimostrazione. La caratteristica di Eulero e quindi il genere sono invarianti topologici. \square

Proposizione 3.10. La somma connessa di due superfici S e S' è orientabile se e solo se S e S' sono orientabili.

Dimostrazione. Se S e S' sono entrambe orientabili allora la somma connessa è necessariamente orientabile. Viceversa, sia $S \# S'$ orientabile devo dimostrare che sia S che S' sono orientabili. Supponiamo per assurdo che una delle due superfici non sia orientabile, ad esempio S . Questo significa che S contiene un cammino non orientabile γ e quindi $S \# S'$ è non orientabile perché γ è ancora presente. \square

Proposizione 3.11. Due superfici connesse, compatte e senza bordo sono omeomorfe se e solo se hanno la stessa caratteristica di Eulero e se sono entrambe orientabili oppure entrambe non orientabili.

Dimostrazione. Segue dal corollario 3.9 e dalla proposizione 3.10. \square

3.2 Geometrie bidimensionali

In questa sezione illustreremo che ogni superficie connessa e chiusa ammette una geometria ellittica, piatta o iperbolica. In realtà questo risultato è vero più in generale per tutte le superfici connesse, ma noi ci limiteremo solo al caso di quelle connesse e chiuse.

Cominciamo analizzando i possibili spazi modello, ovvero le varietà riemanniane di dimensione 2 connesse e semplicemente connesse. Il teorema di Uniformizzazione ci assicura che sono solo tre: \mathbb{R}^2 , S^2 e \mathbb{H}^2 . Le descriviamo adesso in dettaglio.

3.2.1 Il modello \mathbb{R}^2

Il modello di geometria euclidea può essere descritto come \mathbb{R}^2 con la metrica definita da $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Questa è semplicemente la distanza con cui siamo abituati a lavorare nel piano. Sia $\gamma : I = [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e sia $P(t) = \gamma(t) = (x(t), y(t))$ la corrispondenza fra un parametro t e un punto del piano. Quindi

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 \right) dt.$$

Segue immediatamente che la lunghezza della curva piana γ è

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{ds^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 \right)} dt.$$

Ricordiamo poi che le geodetiche sono porzioni di rette e la distanza tra due punti $P = (P_x, P_y)$ e $Q = (Q_x, Q_y)$ di \mathbb{R}^2 è

$$d(P, Q) = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}.$$

3.2.2 Il modello S^2

La sfera S^2 può essere immersa in \mathbb{R}^3 , di conseguenza possiamo considerare S^2 con la metrica indotta $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Le geodetiche sono porzioni

di cerchi massimi e si può osservare che, considerando due punti P e Q sulla sfera, l'arco minore \widehat{PQ} del cerchio massimo è il percorso più breve, sulla superficie sferica, tra i punti P e Q . Se i punti P e Q sono antipodali ci sono infiniti percorsi minimi, ovvero tutte le semicirconferenze massime per P e Q . La distanza tra P e Q sulla superficie sferica è la lunghezza dell'arco minore \widehat{PQ} del cerchio massimo o, se P e Q sono antipodali, la lunghezza di una semicirconferenza massima per P e Q .

3.2.3 Il modello \mathbb{H}^2

A differenza di S^2 e \mathbb{R}^2 , lo spazio iperbolico \mathbb{H}^2 può essere definito in vari modi equivalenti, nessuno dei quali è prevalente in letteratura. Ciascuno di questi modi equivalenti è un modello per \mathbb{H}^2 . Tali modelli sono l'iperboloide, il disco di Poincarè e il semipiano.

L'iperboloide

Questo modello verrà illustrato più in generale per \mathbb{H}^n , poi sarà sufficiente porre $n = 2$. Sappiamo che la sfera S^n è il luogo dei punti di norma 1 in \mathbb{R}^{n+1} , considerato con l'usuale prodotto scalare (e quindi norma) euclideo. Analogamente, possiamo definire \mathbb{H}^n come il luogo dei punti di norma -1 in \mathbb{R}^{n+1} , dotato del prodotto scalare detto *lorentziano*. Questo luogo dei punti ha due componenti connesse e ne sceglieremo una.

Definizione 3.6 (Prodotto scalare lorentziano). Consideriamo \mathbb{R}^{n+1} , allora il prodotto scalare *lorentziano* standard è definito come:

$$\langle x, y \rangle_l = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}.$$

Un vettore $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ è detto di tipo *tempo*, *luce* o *spazio* a seconda che $\langle x, x \rangle_l$ sia rispettivamente negativo, nullo o positivo.

Il modello dell'iperboloide I^n è definito nel seguente modo:

$$I^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_l = -1, x_{n+1} > 0\}$$

L'insieme dei punti x con $\langle x, x \rangle = -1$ è un iperboloide a due falde, e l'insieme I^n è la componente connessa (falda) con $x_{n+1} > 0$. Si può mostrare che I^n è effettivamente una varietà riemanniana. In particolare osserviamo che il prodotto scalare lorentziano non è definito positivo e ha segnatura $(n, 1)$, tuttavia il prodotto scalare ristretto allo spazio tangente di I_n è definito positivo. Infatti si può dimostrare che lo spazio tangente $T_x I^n$ in x a I^n è l'iperpiano

$$T_x I^n = \{y \mid \langle x, y \rangle_l = 0\} = x^\perp$$

ortogonale a x secondo il prodotto scalare lorentziano. Dato che x è di tipo tempo, allora la restrizione del prodotto scalare a x^\perp ha segnatura $(n, 0)$.

Per ottenere I^2 si considera \mathbb{R}^3 e il prodotto scalare *lorentziano*

$$\langle v, w \rangle_l = x_v x_w + y_v y_w - z_v z_w.$$

Allora

$$I^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, p \rangle_l = -1, z > 0\}.$$

Si tratta precisamente della falda superiore dell'iperboloide di equazione:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

Le curve geodetiche dell'iperboloide I^2 con la metrica descritta sono tutte e soli i rami di iperbole di I^2 intersezioni con i piani di \mathbb{R}^3 passanti per l'origine.

Il disco di Poincaré

Consideriamo il disco unitario

$$\Delta^2 = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\|^2 = x^2 + y^2 < 1\}.$$

Sia $p_0 = (0, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$. L'applicazione

$$f: I^2 \rightarrow \Delta^2$$

$$p \mapsto f(p) = \text{retta}(pp_0) \cap \mathbb{R}^2,$$

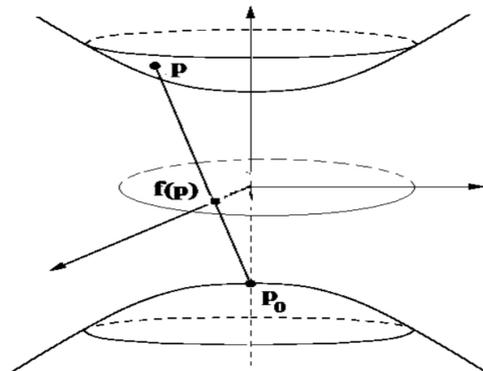


Figura 3.7: proiezione stereografica iperbolica.

dove \mathbb{R}^2 è il piano $z = 0$ di \mathbb{R}^3 , è detta *proiezione stereografica iperbolica* (figura 3.7). Con facili calcoli si trova:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

Chiaramente $f(p) \in \Delta^2$ in quanto:

$$\|f(p)\|^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+z)^2} = \frac{z^2 - 1}{(1+z)^2} = \frac{z-1}{z+1} < 1, \text{ per ogni } p \in I^2.$$

Inoltre, usando il prodotto scalare lorentziano, si ha:

$$\langle p - p_0, p - p_0 \rangle_l = x^2 + y^2 - (z+1)^2 = -2((1+z)), \text{ per ogni } p \in I^2,$$

e quindi l'applicazione f si può esprimere anche con

$$f(p) = p_0 - \frac{2(p - p_0)}{\langle p - p_0, p - p_0 \rangle_l}, \text{ per ogni } p \in I^2.$$

L'applicazione f è invertibile e la sua inversa è l'applicazione

$$\begin{aligned} \bar{f} &= f^{-1}: \Delta^2 \rightarrow I^2 \\ p &\mapsto f(p) = \text{retta}(pp_0) \cap I^2, \end{aligned}$$

quindi

$$p \mapsto \bar{f}(p) = f^{-1}(p) = \left(\frac{2x}{1 - \|p\|^2}, \frac{2y}{1 - \|p\|^2}, \frac{1 + \|p\|^2}{1 - \|p\|^2} \right).$$

Mediante la proiezione stereografica iperbolica \bar{f} possiamo definire nel disco Δ^2 una metrica riemanniana che risulta essere:

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Le geodetiche del disco iperbolico Δ^2 sono tutti e soli i diametri e gli archi di circonferenza che incontrano ortogonalmente il bordo $\partial\Delta$.

Il semipiano di Poincarè

Il *semipiano di Poincarè*, detto anche *piano iperbolico*, è una varietà riemanniana (D, g) dove D è il semipiano superiore

$$\mathbb{R}_+^2 = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$$

e la metrica riemanniana è

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

Le geodetiche massimali del semipiano di Poincarè \mathbb{R}_+^2 sono tutte e sole le semirette parallele all'asse y e le semicirconferenze con centro sull'asse x (figura 3.8).

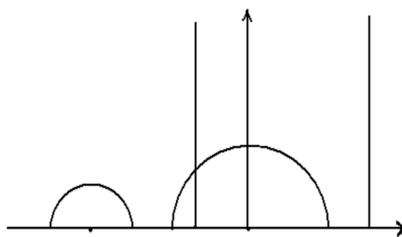


Figura 3.8: geodetiche del semipiano di Poincarè.

Siano g la metrica iperbolica di Poincarè nel semipiano \mathbb{R}_+^2 e d la corrispondente distanza iperbolica, ovvero la distanza riemanniana indotta da g .

Vogliamo determinare in forma esplicita la distanza tra due arbitrari punti di \mathbb{R}_+^2 . Distinguiamo due casi.

Caso 1. Siano $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ due punti di \mathbb{R}_+^2 che appartengono ad una semiretta parallela all'asse y , quindi $x_1 = x_2 = a$. In questo caso la geodetica che li congiunge è il segmento

$$\gamma_0(t) = t(p_2 - p_1) + p_1 = (a, y_1 + t(y_2 - y_1)), \quad t \in [0, 1].$$

Inoltre si ha che

$$L(\gamma_0) = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|.$$

Infatti, $\dot{\gamma}_0(t) = (0, y_2 - y_1)$, per cui

$$\|\dot{\gamma}_0(t)\|_g = \frac{1}{y_1 + t(y_2 - y_1)}(y_2 - y_1), \quad \text{assumendo } y_2 \geq y_1,$$

e quindi,

$$L(\gamma_0) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_0(t)\|_g dt = [\ln(y_1 + t(y_2 - y_1))]_0^1 = \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Sia ora $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$, una generica curva differenziabile che congiunge p_1 e p_2 (si potrebbe considerare anche differenziabile a tratti).

Allora,

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} dy = \ln \frac{y_2}{y_1} = L(\gamma_0). \end{aligned}$$

Ciò implica che la curva γ_0 realizza la distanza tra p_1 e p_2 . Dunque, se p_1, p_2 individuano una semiretta parallela all'asse y , con $y_2, y_1 > 0$ arbitrari, abbiamo

$$d(p_1, p_2) = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|.$$

Caso 2. Siano q_1, q_2 due punti di \mathbb{R}_+^2 che non appartengono ad una semiretta parallela all'asse y . In questo caso, la geodetica passante per q_1, q_2 è la semicirconferenza γ per q_1 e q_2 , con centro $C_0(c, 0)$ sull'asse x e di raggio r . Quindi:

$$\gamma(t) = (c + r \cos t, r \sin t), \quad t \in]0, \pi[$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t) \quad \text{e} \quad \|\dot{\gamma}(t)\|_g = \frac{1}{\sin t}.$$

Posto $q_1 = (c + r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ e $q_2 = (c + r \cos \beta, r \sin \beta)$, con $\beta \geq \alpha$, si ha:

$$L(\gamma(q_1, q_2)) = L(\gamma|_{[\alpha, \beta]}) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \left[\ln \tan \frac{t}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} = \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2}.$$

Per $\alpha, \beta \in]0, \pi[$ arbitrari, si ha:

$$L(\gamma(q_1, q_2)) = \left| \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} \right|.$$

La trasformazione, detta *trasformazione di Möbius*,

$$\begin{aligned} f_1 : z = x + iy \mapsto f_1(z) &= \frac{az - b}{az + b} \\ &= \left(\frac{a^2(x^2 + y^2) - b^2}{(ax + b)^2 + (ay)^2}, \frac{2aby}{(ax + b)^2 + (ay)^2} \right), \end{aligned}$$

con $ab > 0$, è un'isometria del piano iperbolico che trasforma la semiretta $\gamma_0(t) = (0, t)$, $t > 0$, nella semicirconferenza $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$. L'omotetia

$$f_2 : z \mapsto f_2(z) = rz, \quad r > 0,$$

è un'isometria che trasforma la semicirconferenza γ_1 nella semicirconferenza $\gamma_2 : x^2 + y^2 = r^2$, $y > 0$. Infine, la traslazione

$$f_3 : z \mapsto f_3(z) = z + c$$

trasforma la semicirconferenza γ_2 nella semicirconferenza $\gamma : (x-c)^2 + y^2 = r^2$, $y > 0$. Pertanto, l'isometria

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

trasforma la semiretta γ_0 nella semicirconferenza γ , e quindi i punti $p_1 = f^{-1}(q_1)$ e $p_2 = f^{-1}(q_2)$ appartengono alla semiretta γ_0 che è il semiasse delle y . Poiché le isometrie conservano lunghezze e distanze, e tenendo anche presente il caso 1, si ha

$$L(\gamma(q_1, q_2)) = L(\gamma_0(p_1, p_2)) = d(p_1, p_2) = d(f^{-1}(q_1), f^{-1}(q_2)) = d(q_1, q_2).$$

Di conseguenza, nel caso 2, si ottiene:

$$d(q_1, q_2) = \left| \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} \right|.$$

Usando le formule di bisezione:

$$\frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

e tenendo presente che

$$x_1 - c = r \cos \alpha, \quad x_2 - c = r \cos \beta, \quad y_1 = r \sin \alpha, \quad y_2 = r \sin \beta,$$

si ha

$$d(q_1, q_2) = \left| \ln \left(\frac{x_1 - c + r}{x_2 - c + r} \cdot \frac{y_2}{y_1} \right) \right|.$$

Adesso ci occupiamo del caso generale, ovvero cerchiamo di descrivere le strutture geometriche ammesse da una qualunque superficie chiusa e connessa.

Teorema 3.12. Ogni superficie chiusa e connessa ammette una struttura geometrica modellata su \mathbb{R}^2 , S^2 o \mathbb{H}^2 .

Dimostrazione. (idea)

La classificazione topologica delle superfici (teorema 3.1) ci dice che ogni superficie chiusa e connessa è omeomorfa o ad una sfera, o alla somma connessa di g tori o alla somma connessa di g piani proiettivi. Inoltre abbiamo visto che se S è una sfera, allora ha $\chi(S) = 2$, se S è una somma connessa di g tori ha $\chi(S) = 2 - 2g$, se, invece, è una somma connessa di g piani proiettivi, allora ha $\chi(S) = 2 - g$ ($g \geq 1$). Bisogna distinguere 3 casi: $\chi(S) > 0$, $\chi(S) = 0$ e $\chi(S) < 0$.

- Se $\chi(S) > 0$, allora S è omeomorfa o ad una sfera o ad un piano proiettivo. Nel primo caso S ammette banalmente una struttura geometrica modellata su S^2 . Riguardo al piano proiettivo, sappiamo che si può vedere come S^2 con una relazione di equivalenza che identifica i punti antipodali. Dato che la mappa antipodale $x \mapsto -x$ è un'isometria di S^2 , allora il piano proiettivo ammette una struttura geometrica modellata su S^2 .

- Se $\chi(S) = 0$, allora S è omeomorfa o ad un toro o a alla somma connessa di due piani proiettivi. Una traslazione intera di \mathbb{R}^2 è una traslazione $x \mapsto x + b$ di un vettore $b \in \mathbb{Z}^2$. Le traslazioni intere formano un sottogruppo discreto Γ di $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ isomorfo a \mathbb{Z}^2 . Il quoziente \mathbb{R}^2/Γ è in modo naturale omeomorfo al toro bidimensionale:

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \cong S^1 \times S^1.$$

Di conseguenza il toro ammette una struttura geometrica modellata su \mathbb{R}^2 .

In dimensione 2 può essere utile disegnare un *dominio fondamentale* per l'azione di Γ .

Definizione 3.7 (Dominio fondamentale). Sia M una varietà. Un dominio fondamentale per $G < \text{Isom}(M)$ è un chiuso connesso $D \subset M$ che interseca ogni orbita in almeno un punto e che sia la chiusura di un aperto D' che interseca ogni orbita in al più un punto.

In presenza di un dominio fondamentale D , lo spazio quoziente può essere ottenuto semplicemente quozientando D identificando i punti di ∂D che stanno sulla stessa orbita. Ad esempio un dominio fondamentale per Γ è il quadrato D mostrato in figura 3.2.

La somma connessa di due piani proiettivi è la bottiglia di Klein ed è ottenuta prendendo come Γ il gruppo generato dalle seguenti isometrie:

$$\tau : (x, y) \mapsto (x + 1, y), \quad \eta : (x, y) \mapsto (1 - x, y + 1).$$

Un dominio fondamentale per la bottiglia di Klein è mostrato in figura 3.4 (a sinistra). Si può osservare che $\mathbb{R}^2 / \langle \tau \rangle$ è un cilindro infinito e $\mathbb{R}^2 / \langle \eta \rangle$ è un nastro di Möbius infinito.

Segue che anche la somma connessa di due piani proiettivi (bottiglia di Klein) si può descrivere come un quoziente di \mathbb{R}^2 attraverso un sottogruppo di $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ e quindi ammette una struttura geometrica modellata su \mathbb{R}^2 .

- Se $\chi(S) < 0$, allora S è un g -toro con $g \geq 2$ o una somma connessa di g piani proiettivi con $g \geq 3$. Si può dimostrare che ognuna di essa ha una struttura geometrica modellata su \mathbb{H}^2 ma non è sempre facile descrivere esplicitamente il sottogruppo Γ di isometrie di \mathbb{H}^2 .

□

Il teorema 3.12 ci assicura che possiamo mettere una struttura piatta sul toro, una ellittica sulla sfera e una iperbolica su una qualunque superficie di genere $g \geq 2$. Non stiamo affermando nulla a proposito dell'eventuale unicità di questa struttura, e non abbiamo dimostrato che il tipo della struttura è univocamente determinato dal genere (ovvero che il toro ammette solo strutture piatte, la sfera solo strutture ellittiche e le altre solo strutture iperboliche). Questa affermazione più forte è vera, cioè è vero che in dimensione 2 la topologia "prescrive" la metrica, ma la dimostrazione esula dagli scopi di questo lavoro.

Capitolo 4

Il caso delle 3-varietà

Abbiamo visto che esiste una classificazione completa delle varietà bidimensionali. La classificazione delle 3-varietà reali, invece, rimane ad oggi un problema irrisolto. È però possibile semplificare le 3-varietà, tagliando lungo superfici incluse in esse, decomponendole in varietà più semplici. Inoltre, come abbiamo visto, le 3-varietà non sono facilmente visualizzabili e il loro studio è una branca importante della topologia. Osserviamo che nei casi in cui $n \leq 3$ la categoria delle varietà topologiche e applicazioni continue, e la categoria delle varietà differenziabili e diffeomorfismi, sono equivalenti. Possiamo quindi parlare indifferentemente di omeomorfismi o di diffeomorfismi tra varietà. Questo non sarebbe stato possibile in dimensione $n > 3$.

Studiando questi contenuti mi sono resa conto che non possono essere presentati agli studenti di scuola secondaria di secondo grado; di conseguenza non ci sono pretese di completezza e precisione, dal momento che l'obiettivo finale di questa tesi è la progettazione di attività didattiche per tali studenti. Potrebbe essere, invece, molto interessante soffermarsi sulla storia del problema della generalizzazione alla classificazione delle 3-varietà. Questo porta naturalmente ad enunciare la congettura di Poincaré e, seguendo la storia dei tentativi di dimostrazione della stessa, a inserirla nella più ampia congettura di geometrizzazione di Thurston.

4.1 Decomposizione in fattori primi

Definizione 4.1 (3-varietà irriducibile). Una 3-varietà connessa M è *irriducibile* se ogni 2-varietà differenziabile S omeomorfa a una sfera in essa contenuta borda una palla.

Una 3-varietà che non è irriducibile è detta *riducibile*.

La prima 3-varietà che esamineremo è \mathbb{R}^3 e mostreremo che è irriducibile. Per questa dimostrazione è necessario fare qualche richiamo alla teoria di Morse. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa e $f(x, y, z) = z$ la funzione altezza. La funzione f è detta *funzione di Morse* per S se $f|_S$ ha un numero finito di punti critici e in ogni punto critico l'Hessiana di $f|_S$ è non singolare (l'Hessiana è letta in una carta per S , ma la definizione è indipendente dalla carta scelta). Un punto critico può essere un punto di minimo locale, un punto di sella o un punto di massimo locale, in base alla segnatura dell'Hessiana.

Lemma 4.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa. Se ruotiamo S di un arbitrario angolo piccolo, la funzione altezza f è una funzione di Morse per S .

Teorema 4.2 (Teorema di Alexander). Lo spazio \mathbb{R}^3 è irriducibile.

Dimostrazione. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una 2-sfera. Applicando una piccola rotazione, possiamo supporre che la funzione altezza $f|_S$ sia una funzione di Morse e, dopo un'altra piccola rotazione, possiamo supporre che i k punti critici di $f|_S$ siano ad altezze distinte $z_1 < \dots < z_k$. Scegliamo $u_i \in (z_i, z_{i+1})$ per ogni $i = 1, \dots, k - 1$. Il piano orizzontale $P : z = u_i$ interseca S trasversalmente in cerchi. Partendo da quello più interno, tagliamo S lungo questi cerchi e copriamo aggiungendo coppie di duchi come in figura 4.1. La superficie risultante non interseca più P .

Ad ogni taglio la sfera viene decomposta in due sfere. Se ripetiamo questo procedimento per ogni $i = 1, \dots, k - 1$ otteniamo diverse sfere del tipo mostrato in figura 4.2, ciascuna delle quali contiene al più un punto critico.

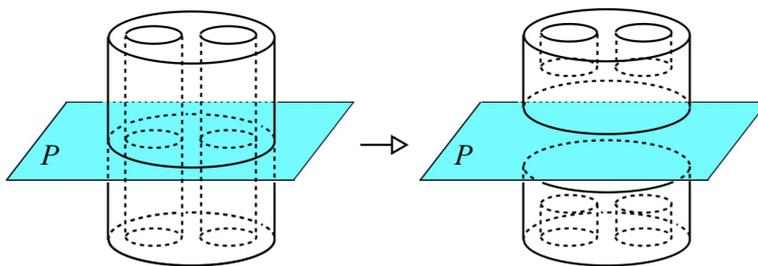


Figura 4.1: il piano P interseca S in cerchi. A partire dal più interno tagliamo S lungo i cerchi e copriamo aggiungendo una coppia di dischi. La superficie risultante non interseca più P . [9]

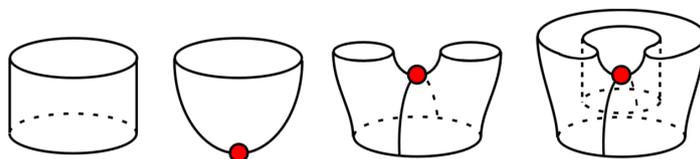


Figura 4.2: modelli a cui possiamo ricondurci dopo aver tagliato lungo cerchi e coperto con una coppia di dischi. [9]

Si osserva che ciascuna di queste delimita una palla in \mathbb{R}^3 . A questo punto, con procedimento inverso a questo, proviamo induttivamente che ad ogni passo otteniamo un insieme di sfere che bordano palle. In particolare, ad ogni passo sostituiamo due sfere S_1 e S_2 , che delimitano le palle B_1 e B_2 , con una sfera S . Isotopiamo S_1 ed S_2 , così si intersecano in un disco D . Se gli interni di B_1 e B_2 sono disgiunti, allora S borda la palla $B_1 \cup B_2$. Se non sono disgiunti, allora una è contenuta nell'altra. Se supponiamo, ad esempio, $B_1 \subset B_2$, allora S borda la palla $B_2 \setminus \text{int}(B_1)$.

□

Corollario 4.3. Ogni 2-sfera S in S^3 è bordo di una palla da entrambe le parti.

Dimostrazione. Scegliamo due punti $p, q \notin S$ che siano da parti opposte rispetto ad S . Abbiamo che $S^3 \setminus p = S^3 \setminus q = \mathbb{R}^3$, quindi S è contenuta in \mathbb{R}^3 in due modi e in ognuno di essi è bordo di una palla. □

Proposizione 4.4. Ogni sottovarietà compatta di dimensione 3 $M \subset S^3$ con bordo connesso è irriducibile.

Dimostrazione. Ogni sfera $S \subset M$ borda due palle in S^3 . Dal momento che ∂M è connesso, allora è contenuto in una delle due, quindi l'altra è contenuta in M . \square

Definizione 4.2 (3-varietà prima). Una 3-varietà M connessa e orientata è *prima* se in ogni somma connessa $M = M_1 \# M_2$ è *banale*, cioè se si ha che o M_1 o M_2 è una 3-sfera.

Osserviamo che l'operazione inversa della somma connessa $M = M_1 \# M_2$ consiste nel tagliare lungo una sfera separante $S \subset M$ e tappare le due varietà risultanti N_1 e N_2 con delle palle. La varietà tappata N_i è S^3 se e solo se N_i è una palla. Dunque la somma connessa è banale se e solo se S borda una palla da una parte. Segue che M è prima se e solo se ogni sfera separante $S \subset M$ borda una palla.

La definizione di 3-varietà irriducibile è equivalente a quella di 3-varietà prima con un'unica eccezione.

Proposizione 4.5. Ogni 3-varietà orientata $M \neq S^2 \times S^1$ è prima se e solo se è irriducibile.

Dimostrazione. Se M è irriducibile è chiaramente prima. Mostriamo che se M è prima e non irriducibile, cioè esiste una sfera non separante $S \subset M$ che non borda una palla, allora è omeomorfa a $S^2 \times S^1$. Dato che S è non separante, esiste una curva semplice chiusa $\gamma \subset M$ che interseca S trasversalmente in un solo punto. Consideriamo ora un intorno tubolare di $S \cup \gamma$, il quale è una varietà N il cui bordo ∂N è una sfera S' . La sfera S' è separante e M è prima, quindi S' borda una palla B da un lato e $M = N \cup B$. Possiamo immergere in modo naturale $S \cup \alpha$ in $S^2 \times S^1$ con $S = S^2 \times y$ e $\alpha = x \times S^1$. Decomponiamo $S^2 = D \cup D'$ in due dischi e $S^1 = I \cup I'$ in due intervalli. La varietà N si immerge in $S^2 \times I \cup D \times S^1$ e il suo complementare $B = D' \times I'$ è una palla. Segue che $M = S^2 \times S^1$.

\square

Proposizione 4.6. La varietà $S^2 \times S^1$ non è irriducibile ma è prima.

Dimostrazione. $S^2 \times S^1$ non è irriducibile perché contiene una sfera non separante. Vediamo ora che è prima. Sia $S \subset S^2 \times S^1$ una sfera separante: vogliamo mostrare che borda una palla. La sfera divide $S^2 \times S^1$ in due varietà M e N e da un'applicazione del teorema di Van Kampen sappiamo che $\pi_1(M) * \pi_1(N) = \pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$. Questo implica che o $\pi_1(M)$ o $\pi_1(N)$ deve essere banale. Supponiamo che lo sia $\pi_1(M)$. Dal momento che M è semplicemente connessa, una copia M' di M si solleva al rivestimento universale $S^2 \times \mathbb{R}$ di $S^2 \times S^1$. Possiamo identificare $S^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Questa copia M' ora sta in \mathbb{R}^3 e $\partial M' = S^2$ implica che M' è una palla per il teorema di Alexander. \square

Introduciamo ora un'importante 3-varietà compatta con bordo: il *corpo con manico*. Prima, però, è necessario dare una definizione di *manico*.

Definizione 4.3 (Manico). Sia M una n -varietà con bordo e $0 \leq k \leq n$. Un k -manico è una varietà $D^k \times D^{n-k}$ attaccata a M con un diffeomorfismo $\phi : \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow Y \subset \partial M$, quindi si ottiene una nuova varietà.

Vediamo ora qualche esempio. Uno 0-manico è $D^0 \times D^n = D^n$ attaccato a nulla, dal momento che $\partial D^0 = \emptyset$. Questo significa che attaccare uno 0-manico a M consiste nell'aggiungere a M un disco disgiunto D^n . Ad esempio, aggiungere uno 0-manico al vuoto significa creare un disco D^n . Un 1-manico è un $D^1 \times D^{n-1}$ attaccato lungo $\partial D^1 \times D^{n-1} = S^0 \times D^{n-1}$, cioè due copie di D^{n-1} . Alcuni esempi in dimensione $n = 2, 3$ sono mostrati in figura 4.3. Un 2-manico è un $D^2 \times D^{n-2}$ attaccato lungo $\partial D^2 \times D^{n-2} = S^1 \times D^{n-2}$. Se $n = 2$ un 2-manico è un disco attaccato lungo il suo bordo.

Definizione 4.4 (Corpo con manico). Un *corpo con manico* è una 3-varietà connessa e orientabile che si decompone in 0-manici e 1-manici.

Proposizione 4.7. Il bordo di un corpo con manico è S_g per qualche $g \geq 0$. Due corpi con manici sono diffeomorfi se e solo se g è lo stesso.

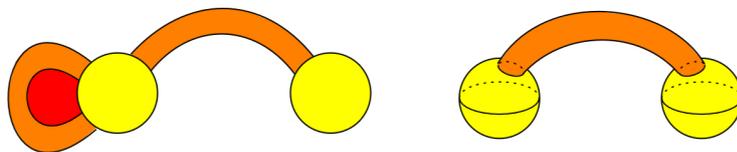


Figura 4.3: nell'immagine di sinistra, in dimensione 2: due 0-manici (in giallo), due 1-manici (in arancione) e un 2-manico (in rosso). Nell'immagine di destra, in 3 dimensioni: due 0-manici (in giallo) e un 1-manico (in arancione). [9]

Il *genere* di un corpo con manico H_g è g della superficie che forma il suo bordo.

Proposizione 4.8. I corpi con manici sono irriducibili.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla proposizione 4.4. \square

Mostriamo ora che l'operazione di somma connessa su 3-varietà orientate si comporta come il prodotto di numeri naturali: ogni oggetto si decompone in modo unico in fattori primi.

Teorema 4.9. Ogni 3-varietà senza bordo compatta e orientabile M si decompone in varietà prime:

$$M = M_1 \# \dots \# M_k$$

Questi fattori primi sono unici a meno di permutazioni e di aggiunte di S^3 .

Questo importante risultato è noto come Teorema della decomposizione in fattori primi per 3-varietà. L'esistenza di una decomposizione è stata dimostrata da Kneser nel 1929, mentre la sua unicità da Milnor nel 1962. Alla luce di questo risultato, i topologi hanno da tempo limitato la loro attenzione alle 3-varietà prime, o, in modo quasi equivalente, alle 3-varietà irriducibili.

La strategia di tagliare canonicamente una 3-varietà lungo superfici ha avuto successo con le sfere, quindi ci si può chiedere se si può fare la stessa cosa con

altre superfici. Iniziamo con i dischi, considerando necessariamente soltanto varietà con bordo. Si è ipotizzato che i dischi dovrebbero comportarsi più o meno come sfere.

Sia M una 3-varietà compatta con bordo. Una superficie $S \subset M$ propriamente embedded (cioè tale che $\partial S = \partial M \cap S$) è ∂ -parallela se è ottenuta spingendo leggermente all'interno di M l'interno di una superficie compatta $S' \subset \partial M$, con bordo, o, più formalmente se M è isotopa a una superficie compatta $S' \subset \partial M$. Dal momento che D e S sono propriamente embedded, possiamo affermare che:

- una sfera $S \subset M$ è *essenziale* se non delimita una palla;
- un disco $D \subset M$ è *essenziale* se non è ∂ -parallelo.

Ora, la varietà M è:

- *irriducibile* se non contiene sfere essenziali;
- ∂ -*irriducibile* se non contiene dischi essenziali.

Si può mostrare che i dischi essenziali si comportano grosso modo come le sfere essenziali, nel senso che esiste una specie di teorema di decomposizione in fattori primi anche per i dischi. Questo permette di dimenticare delle sfere e dei dischi essenziali ed è quindi sufficiente concentrarsi sulle 3-varietà che non li contengono.

Teorema 4.10. Ogni 3-varietà compatta, orientata e irriducibile M è ottenuta aggiungendo una maniglia alle 3-varietà connesse, irriducibili e ∂ -irriducibili

$$M_1, \dots, M_k.$$

Questi fattori primi sono unici a meno di permutazioni e di aggiunte o rimozioni di palle.

Definizione 4.5 (Sistema di dischi). Sia M una 3-varietà compatta con bordo (possibilmente vuoto). Un *sistema di dischi* in M è un insieme di coppie disgiunte e non ∂ -parallele di dischi essenziali.

Ora vogliamo tagliare varietà irriducibili lungo dischi essenziali. Osserviamo innanzitutto che l'operazione opposta al tagliare una varietà lungo un disco propriamente embedded è l'aggiunta di un manico.

Vediamo ora l'analogo del teorema 4.9 in questo contesto. Possiamo notare che M è irriducibile per ipotesi, quindi abbiamo già eliminato le sfere essenziali. Rimangono da eliminare solo i dischi essenziali.

Dimostrazione. Se tagliamo M lungo un sistema massimale di dischi otteniamo varietà connesse M_1, \dots, M_k . Ogni M_i è ∂ -irriducibile perché il sistema di dischi è massimale ed è irriducibile perché ogni sfera in $M_i \subset M$ borda una palla B in M e B è necessariamente contenuta in M_i .

Proviamo l'unicità. Scegliamo due insiemi di dischi $S, S' \subset M$ tali che tagliando lungo ognuno di essi otteniamo componenti irriducibili e ∂ -irriducibili. Dobbiamo mostrare che queste componenti sono le stesse a meno di aggiunte o rimozioni di palle. Assumiamo che S e S' si intersechino trasversalmente. Un cerchio $S \cap S'$ che è più interno rispetto a S è delimitato da due sottodischi $D \subset S$ e $D' \subset S'$, che insieme formano una sfera: questa sfera, a sua volta, delimita una palla perché M è irriducibile. Possiamo usare questa palla per allontanare in modo isotopo S' da S e ridurre le intersezioni in $S \cap S'$. Dopo un numero finito di isotopie non ci sono più cerchi in $S \cap S'$. Rimangono da considerare gli archi in $S \cap S'$. Osserviamo che aggiungendo più dischi a S o S' otteniamo un insieme di dischi che ∂ -riduce M nella stessa lista di M_i , più possibilmente alcune palle. A questo punto possiamo tagliare un qualche disco $D_0 \subset S$ lungo un arco in $D_0 \cap S'$ e trasformarlo in due dischi $D_1 \sqcup D_2$, entrambi disgiunti da S e con meno intersezioni con S' . L'insieme $S \sqcup D_1 \sqcup D_2$ è ancora un insieme riducente per gli M_i . Se togliamo D_0 da questo nuovo sistema, nel complementare togliamo solo una palla: quindi possiamo sostituire D_0 con $D_1 \sqcup D_2$. Dopo un numero finito di passi otteniamo $S \cap S' = \emptyset$

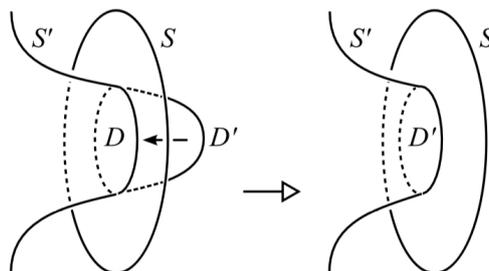


Figura 4.4: i due dischi D e D' formano una sfera che borda una palla dato che M è irriducibile. Possiamo usare questa palla per allontanare in modo isotopo S' da S .

e quindi $S \cup S'$ è un insieme riducente che genera gli stessi M_i di S e S' fino alle palle. \square

4.2 Superfici incompressibili e decomposizione JSJ

Abbiamo visto che ogni 3-varietà compatta e orientata si decompone lungo sfere e dischi essenziali in alcuni pezzi canonici che non contengono più sfere o dischi essenziali. Vorremmo proseguire con questa strategia con altre superfici, ad esempio i tori. Oltre alla decomposizione in fattori primi, esiste un'ulteriore decomposizione canonica per le varietà irriducibili, compatte e orientabili. Si trova tagliando la varietà non più lungo sfere, ma proprio lungo tori. È stata scoperta soltanto a metà degli anni '70 dai matematici Johannson e Jaco-Shalen, da cui il nome *Decomposizione JSJ*. Per fare questo abbiamo bisogno di introdurre l'importante nozione di superficie *incompressibile* in una 3-varietà.

In tutta questa sezione M denota una 3-varietà orientabile compatta e senza bordo.

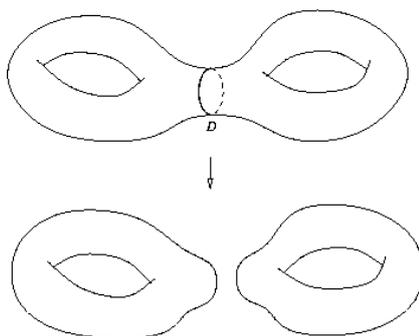


Figura 4.5: compressione di una superficie lungo un disco D . In questo caso la superficie risultante ha due componenti connesse, entrambe con caratteristica di Eulero maggiore di quella della superficie iniziale.

Definizione 4.6 (Disco di compressione). Sia S una superficie orientabile propriamente embedded. Un *disco di compressione* per S è un disco $D \subset M$ con $\partial D = D \cap S$, tale che ∂D non borda un disco in S .

L'operazione di *compressione* consiste nel rimuovere da S un anello intorno alla curva ∂D e sostituirlo con due copie del disco D . La superficie S viene trasformata in una nuova superficie $S' \subset M$, più semplice di S .

Proposizione 4.11. La superficie S' può avere una o due componenti connesse S'_i e $\chi(S'_i) > \chi(S)$ con $i = 1, 2$.

Dimostrazione. Abbiamo che $\chi(S') = \chi(S) + 2$. Se S' ha una sola componente segue immediatamente la tesi, altrimenti supponiamo che $S' = S'_1 \sqcup S'_2$. Dato che ∂D non borda un disco in S , allora nessuna delle S'_i è una sfera, quindi $\chi(S'_i) \leq 1$. Segue che $\chi(S'_i) > \chi(S)$ per ogni $i = 1, 2$. \square

Una superficie $S \subset M$ connessa orientabile propriamente embedded con $\chi(S) \leq 0$ è *compressibile* se ha un disco di compressione, altrimenti è detta *incompressibile*. La richiesta che S abbia caratteristica di Eulero non positiva equivale a chiedere che non sia una sfera, un disco o un piano proiettivo. Queste tre superfici non possono in nessun caso avere dischi di compressione e per questo motivo vengono esclusi dalla definizione.

Corollario 4.12. Sia $S \subset M$ una superficie propriamente embedded. Dopo aver applicato un numero finito di volte l'operazione di compressione, S viene trasformata in un'unione disgiunta di sfere, dischi e superfici incompressibili.

Dimostrazione. Comprimiamo S per quanto possibile e, dopo un numero finito di passi, ci dobbiamo fermare per la proposizione 4.11. \square

Dalla definizione sappiamo che una varietà è ∂ -irriducibile se e solo se il suo bordo consiste in componenti incompressibili.

Vediamo ora un semplice criterio di per stabilire se una superficie è incompressibile. Prima di dimostrare questa proposizione è necessario presentare il seguente lemma

Lemma 4.13. Sia γ una curva semplice chiusa in S_g , allora vale che:

- se γ è omotopicamente banale, borda un disco;
- se γ non è omotopicamente banale, è primitiva in $\pi_1(S_g)$.

Proposizione 4.14. Sia $S \subset M$ una superficie orientabile, connessa, propriamente embedded e con $\chi(S) \leq 0$. Se la mappa $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ indotta dall'inclusione è iniettiva, allora S è incompressibile.

Dimostrazione. Supponiamo che un disco D comprima S . Dal lemma precedente possiamo dire che il bordo ∂D è un elemento non banale in $\pi_1(S)$ perché non borda un disco in S , ma è chiaramente banale in $\pi_1(M)$. Siamo dunque arrivati ad una contraddizione. \square

È vero anche il viceversa di questa proposizione ma la dimostrazione è molto più complicata. Per i nostri scopi è sufficiente la seguente proposizione.

Proposizione 4.15. Se $S \subset M$ è incompressibile, ogni componente di ∂S è non banale in ∂M .

Dimostrazione. Se una componente di ∂S è banale in ∂M , borda un disco $D \subset \partial M$. Prendendone uno più interno otteniamo $D \cap S = \partial D$, e, spingendo D all'interno di M troviamo un disco di compressione per S . \square

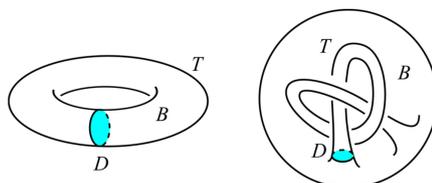


Figura 4.6: un toro in una 3-varietà irriducibile è o incompressibile, o è bordo di un toro solido (sinistra), o è contenuto in una palla (destra). [9]

La prima superficie chiusa che analizzeremo è il toro.

Proposizione 4.16. Sia $T \subset M$ un toro in una 3-varietà irriducibile, allora vale una delle seguenti affermazioni:

- (1) T è incompressibile,
- (2) T borda un toro solido,
- (3) T è contenuto in una palla.

Dimostrazione. Se T non è incompressibile, possiamo comprimerlo lungo un disco D . Il risultato della compressione è necessariamente una sfera $S \subset M$, che borda una palla B dato che M è irriducibile. Se B è disgiunto da T , allora T borda un toro solido come in figura 4.6 (a sinistra). Se B contiene T , allora vale l'affermazione (3), come illustrato in figura 4.6 (a destra). \square

Se $M = S^3$ il caso (3) può essere escluso: se T è contenuto in una palla B , allora è bordo di un toro solido "all'esterno" usando la palla complementare $S^3 \setminus B$. Possiamo anche escludere il caso (1) perchè S^3 non contiene superfici incompressibili.

Esiste anche una ∂ -versione di incompressibilità.

Definizione 4.7 (Superfici ∂ -incompressibili). Sia $S \subset M$ una superficie orientata propriamente embedded in una 3-varietà M . Un ∂ -disco di compressione per S in un disco D con $\partial D = \alpha \cup \beta$, dove α sta in S e β in

∂M . Richiediamo anche che α non bordi un disco in S' , cioè non c'è nessun sottodisco $D' \subset S$ con $\partial D' = \alpha \cup \beta'$ e $\beta' \subset \partial S$.

Proposizione 4.17. La superficie S' può avere una o due componenti S'_i e $\chi(S'_i) > \chi(S)$ per ogni componente.

Dimostrazione. Abbiamo che $\chi(S') = \chi(S) + 1$. Se S' ha una sola componente segue immediatamente la tesi, altrimenti supponiamo che $S' = S'_1 \sqcup S'_2$. Dato che α non borda un disco in S e nessuna delle S'_i è un disco, allora $\chi(S'_i) \leq 0$. Segue che $\chi(S'_i) > \chi(S)$ per ogni $i = 1, 2$. \square

Una superficie propriamente embedded connessa orientabile $S \subset M$ con $\chi(S) \leq 0$ è ∂ -compressibile se ha un ∂ -disco di compressione ed è ∂ -incompressibile altrimenti.

Corollario 4.18. Sia $S \subset M$ una superficie propriamente embedded. Dopo aver applicato un numero finito di volte l'operazione di ∂ -compressione, S viene trasformata in un'unione disgiunta di sfere, dischi e superfici ∂ -incompressibili.

Il termine *essenziale* viene usato per riassumere varie nozioni ragionevoli in una sola parola. Sappiamo già cosa sono le sfere essenziali e i dischi essenziali. Passiamo ora alle superfici con caratteristica di Eulero non positiva.

Definizione 4.8 (Superficie essenziale). Sia M una 3-varietà compatta orientata e sia $S \subset M$ una superficie compatta, connessa, propriamente embedded con $\chi(S) \leq 0$. Diciamo che S è *essenziale* se è incompressibile, ∂ -incompressibile e non ∂ -parallela.

Definizione 4.9 (Varietà atoroidale). Sia M irriducibile e ∂ -irriducibile. M è detta *atoroidale* se non contiene tori essenziali.

Le varietà atoroidali, intuitivamente, sono per i tori incompressibili quello che le varietà irriducibili sono per le sfere essenziali. Quello che ci aspettiamo ora, grazie all'analogia con la decomposizione in fattori primi, è di poter

tagliare lungo tori finché non abbiamo decomposto la varietà di partenza in pezzi atoroidali. Osserviamo che nella decomposizione in fattori primi non si tagliava fino ad avere tutti pezzi irriducibili ma ci si accontentava eventualmente di fattori del tipo $S^2 \times S^1$, non irriducibili ma comunque soddisfacenti. Una volta arrivati a quel punto, non si proseguiva tagliando lungo una sua sfera essenziale, ma ci si fermava. Nello stesso modo anche nella decomposizione JSJ ci sono delle varietà non atoroidali, ma comunque soddisfacenti. Quando si incontrano non si va avanti a tagliare lungo tori incompressibili in esse, ma ci accontenteremo di quelle. Tali varietà sono dette *varietà di Seifert*.

Teorema 4.19 (Decomposizione JSJ). Sia M una 3-varietà compatta, orientabile e irriducibile. Allora esiste una collezione finita $T = T_1, \dots, T_n \subset M$ di tori incompressibili disgiunti tale che ogni componente connessa di $M|T$ è atoroidale oppure è una varietà di Seifert. Una collezione minima di questo tipo è unica a meno di isotopia.

4.3 Cenni alla congettura di geometrizzazione

Esiste una piccola variazione della decomposizione JSJ, che prende il nome di *decomposizione geometrica*. Al termine di tale decomposizione si ottengono tori incompressibili e bottiglie di Klein.

Enunciamo ora la congettura di Geometrizzazione, proposta da Thurston nel 1982 e dimostrata vent'anni dopo da Perelman nel 2002 e quindi diventata un teorema.

Teorema 4.20 (Teorema di Geometrizzazione). Sia M una 3-varietà compatta e orientabile, ogni componente della decomposizione geometrica ammette una struttura geometrica modellata su:

$$S^3, E^3, \mathbb{H}^3, S^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \text{Nil}, \text{Sol}, \widetilde{SL}_2.$$

Teorema 4.21 (Congettura di Poincaré). Ogni 3-varietà M chiusa e semplicemente connessa è diffeomorfa a S^3 .

Dimostrazione. (Usando la geometrizzazione)

Attraverso la decomposizione in primi possiamo restringerci al caso in cui M è prima, quindi irriducibile. Il gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ è banale e quindi non contiene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Segue che ogni toro in M è compressibile e la decomposizione geometrica è banale. Dal teorema di geometrizzazione M stessa ammette una struttura geometrica. Si può dimostrare che l'unica geometria con gruppo fondamentale finito, se M è una superficie chiusa modellata su una delle otto geometrie, è S^3 e quindi $M = S^3/\Gamma$ è ellittica. Dato che M è semplicemente connessa, il gruppo $\Gamma = \pi_1(M)$ è banale e dunque $M = S^3$.

□

Capitolo 5

Progettazione di attività didattiche

In questo capitolo verrà presentata un'attività didattica, che può essere svolta con diversi livelli di profondità, in cui si vuole introdurre gli studenti al problema della classificazione delle varietà attraverso la narrazione della storia di un problema che presenta diversi motivi di interesse: classico ma risolto in tempi moderni, frutto di un processo di pensiero collettivo e che mostra come la matematica sia una materia in costante evoluzione, nella quale l'approccio interdisciplinare può essere vincente rispetto a quello settoriale. Sono poi previste attività laboratoriali che fanno uso sia di oggetti materiali che di tecnologie virtuali. Questo percorso è pensato per studenti del triennio di un liceo scientifico.

5.1 Il laboratorio e la sua valenza didattica

Sono molte le accezioni con cui il termine laboratorio compare sia nella letteratura relativa all'insegnamento della matematica, sia nei testi di riferimento dei docenti, sia nella prassi scolastica corrente. Possiamo sintetizzare dicendo che un'attività laboratoriale è un esempio di situazione a-didattica tale che:

- gli studenti abbiano un ruolo attivo, abbandonando la parte di ascoltatori, per operare concretamente, lavorando a piccoli gruppi e discutendo fra di loro, per costruire le proprie conoscenze;
- gli insegnanti assumano il ruolo della guida esperta che osserva e ascolta, che risponde ad eventuali domande e che aiuta gli allievi, alla fine, a trarre le conclusioni dell'attività che hanno svolto.

In generale, uno degli obiettivi del laboratorio in matematica è trasmettere la bellezza di questa disciplina, facendo conoscere agli alunni i nuclei fondanti del sapere matematico e facendo in modo che ciascun allievo raggiunga in tutta serenità, senza ansia da prestazione, il massimo dei risultati a cui potenzialmente può accedere. Inoltre, si tratta di una situazione di rovesciamento dei ruoli, in cui lo studente può fare esperienza diretta e assumere una posizione attiva e coinvolta.

L'idea del laboratorio di matematica si diffonde in Italia all'inizio del Novecento. Ricordiamo la figura di Giovanni Vailati che si è occupato attivamente di problemi relativi all'insegnamento e all'istituzione scolastica, proponendo il modello di una scuola laboratorio da lui intesa come luogo «dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a misurare e soprattutto a misurarsi e a mettersi alla prova di fronte a ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa»¹. Negli anni successivi continua la riflessione sul laboratorio di matematica e viene messa in risalto da un lato l'importanza di manipolare strumenti per costruire la matematica, dall'altro quella di un approccio di laboratorio interno alla matematica e non finalizzato ai suoi usi applicativi che permetterebbe di accostarsi all'apprendimento degli aspetti più teorici con atteggiamento di ricerca. Il laboratorio presenta tuttavia alcune problematiche. Innanzitutto, necessita un importante lavoro preparatorio da parte dell'insegnante: serve un ripensamento approfondito della gerarchia dei contenuti che si vogliono veicolare

¹G. Vailati, *Idee pedagogiche di H.G. Wells*, «Rivista di Psicologia Applicata alla Pedagogia e alla Psicopatologia», (II), (1906).

e una riflessione puntuale su modi, tempi, nodi concettuali ed ostacoli cognitivi dell'apprendimento. Inoltre, l'organizzazione di un laboratorio in classe potrebbe richiedere diverso tempo. Occorre dunque riflettere attentamente su quali attività risultano più efficaci: è opportuno pensare ad attività laboratoriali effettivamente realizzabili in classe relativamente ai tempi e al materiale da utilizzare.

5.2 La classificazione

Un buon insegnamento della matematica non mette mai tutti gli argomenti sullo stesso piano, ma li organizza intorno ad alcuni temi fondanti, che vengono affrontati nei diversi anni, ogni volta con un livello di consapevolezza maggiore, in quello che viene chiamato *percorso a spirale*. L'individuazione di questi temi fondanti costituisce un punto chiave per l'insegnamento scolastico. La classificazione, con la definizione di uguaglianza che ne segue, è sicuramente uno di tali temi. Si tratta di un nodo concettuale importante presente in tutto il percorso scolastico, dalle prime classi della scuola primaria fino agli studi universitari. In matematica la si incontra in tanti ambiti diversi, ma il concetto di classificazione si trova spesso anche al di fuori di questa disciplina: nella vita quotidiana siamo abituati a continue operazioni legate al problema di "mettere in ordine" e "raggruppare". Questo comporta spesso semplificazioni, per avere la possibilità di considerare solo i contenitori in cui sono sistemati gli oggetti anziché i particolari contenuti.

Per il matematico, che sta ragionando sulle proprietà geometriche o topologiche di certi enti, la diversità fra due oggetti non appare più come una proprietà che sia loro intrinseca, ma appare, con maggiore o minore evidenza, come una proprietà che dipende dai parametri scelti per studiarli. In questo modo la realtà assume parvenze diverse, che risentono fortemente dalle modalità con cui le si indaga. Si potrebbe pensare che il tema dell'uguaglianza sia un tema banale, tuttavia basta ragionarci un attimo per vedere come, affrontandolo, si apra una gamma vastissima di questioni che spesso diamo

per sottintese. Anche ai bambini, per esempio, già quando imparano a leggere e scrivere, viene richiesto che distinguano due lettere e viene dato per sottinteso che la lettera si scriva in un certo modo rispetto al foglio (quindi le traslazioni sono ammesse, ma le rotazioni sono vietate, se vogliamo parlare in termini di trasformazioni). Al contrario, in una diversa situazione, vogliamo per esempio che riconoscano che un quadrato è un quadrato anche se si trova in una posizione "non canonica", ovvero con i lati non paralleli ai bordi del foglio su cui è disegnato, e quindi ora anche le rotazioni sono ammesse. Questo è un esempio di riconoscimento di forme in cui, nelle due situazioni, si fa riferimento ad un concetto diverso di uguaglianza. Si vuole, dunque, aiutare i ragazzi a capire che in matematica i criteri di uguaglianza secondo cui classificare cambiano in base al contesto e, quindi, si vuole portarli a riconoscere l'inconsistenza di uno dei più diffusi pregiudizi riguardanti la matematica, cioè quello che la vede come una scienza dogmatica e monolitica. In questo modo gli studenti possono capire che fare matematica può essere un'esperienza di grande libertà e creatività.

5.3 Laboratorio sulla classificazione delle superfici topologiche chiuse

Questa attività ha come scopo l'indagine delle superfici topologiche e la loro classificazione, cercando di riconoscere superfici tratte da rappresentazioni virtuali, ma anche prese in prestito dagli oggetti di uso comune.

Per addentrarci nel problema della classificazione in matematica potrebbe essere utile richiamare i concetti di relazione da un insieme in se stesso, relazione di equivalenza, classe di equivalenza e insieme quoziente. Questi contenuti sono stati affrontati nel corso della classe prima. A questo punto si presenta in modo informale il concetto di *omeomorfismo*:

Definizione 5.1 (Omeomorfismo). Un *omeomorfismo* tra due oggetti F e F' è una corrispondenza tra i punti P di F e quelli P' di F' con le seguenti

due proprietà:

- la corrispondenza è biunivoca, ovvero ad ogni punto di F corrisponde uno ed un solo punto di F' e viceversa;
- la corrispondenza è continua nei due versi, ovvero rispetta la vicinanza tra punti. In altre parole, dati $P, Q \in F$ se muoviamo P verso Q in modo che la sua distanza da Q tenda a zero allora anche la distanza tra i punti corrispondenti P' e Q' tende a zero e viceversa.

Due oggetti sono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo tra essi. L'essere omeomorfi è una relazione di equivalenza che indicheremo con \cong . Dati due oggetti $F \cong F'$, quali operazioni sono consentite affinché rimangano omeomorfi? È possibile:

1. muovere rigidamente (congruenza);
2. dilatare o contrarre (similitudine);
3. deformare (isotopia);
4. tagliare, muovere o deformare e poi ricucire i bordi del taglio nello stesso modo della situazione di partenza, ovvero senza effettuare torsioni.

Per questo percorso didattico verranno prese in considerazione solo le superfici chiuse, ovvero quelle compatte e senza bordo. Per dare agli studenti un'idea di cosa sia la compattezza, si può usare la seguente definizione:

Definizione 5.2 (Superficie compatta). Una superficie S è detta *compatta* se è possibile ricoprirla con un insieme finito di (figure omeomorfe a) dischi (triangoli, quadrati, ...) chiusi.

Esempio 5.1. La sfera ed il toro sono esempi di superfici compatte.

Esempio 5.2. Un esempio di superficie non compatta è il piano.

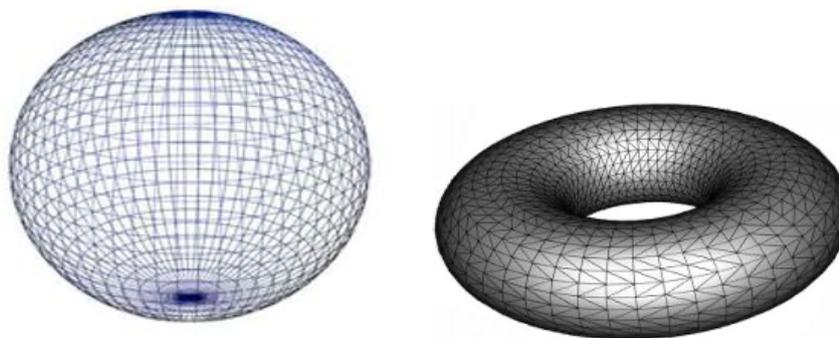


Figura 5.1: la sfera (a sinistra), il toro (a destra).

Da questo momento in poi considereremo solo superfici connesse e chiuse, cioè compatte e senza bordo, quindi con il termine "superficie" si intenderà superficie connessa e chiusa.

Il passo successivo è quello di spiegare che le superfici possono essere rappresentate tramite poligoni con un numero pari di lati. Nello specifico una superficie topologica è ottenuta come spazio quoziente del poligono attraverso opportune identificazioni dei lati tra loro a coppie (per maggiori dettagli si veda la sezione 3.1). Agli studenti è sufficiente dire che ogni volta che trovano due lati con la stessa lettera devono incollare questi due lati e la freccia indica il verso in cui incollare. Per comprendere meglio questo passaggio si può proporre un'attività laboratoriale in cui viene fornita una scheda con la rappresentazione di alcune superfici in modo schematico tramite poligoni. L'obiettivo è riconoscere quale superficie rappresenta ciascun poligono. È possibile aiutarsi con modelli in carta, forbici e scotch, tuttavia non tutte le identificazioni indicate potranno essere concretamente realizzate con i modelli di carta. Bisogna, quindi, supplire a queste carenze con l'immaginazione, ricordando che in topologia al posto della carta occorrerebbe un materiale che si possa deformare liberamente. Uno degli scopi del proporre questi problemi è proprio quello di forzare i ragazzi ad una mescolanza di sperimentazione e immaginazione, che può rivelarsi, in molti casi, determinante per formare una solida base per l'astrazione.

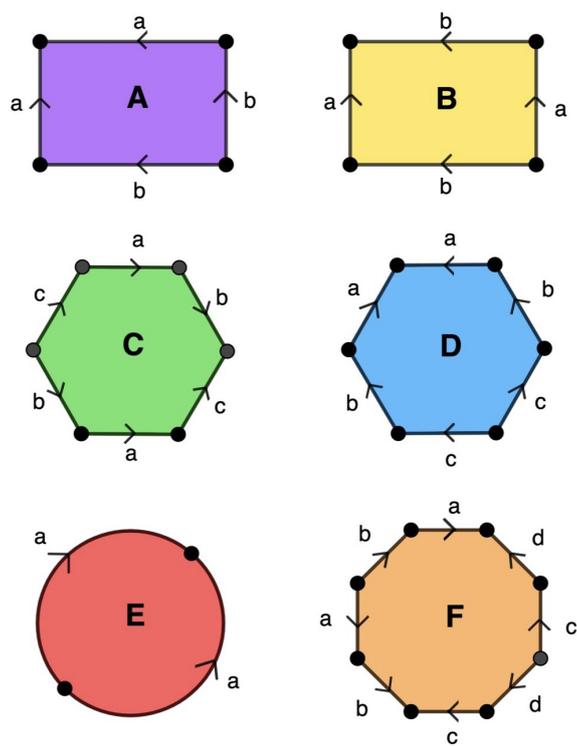


Figura 5.2: esempio di scheda con la rappresentazione schematica di alcune superfici.

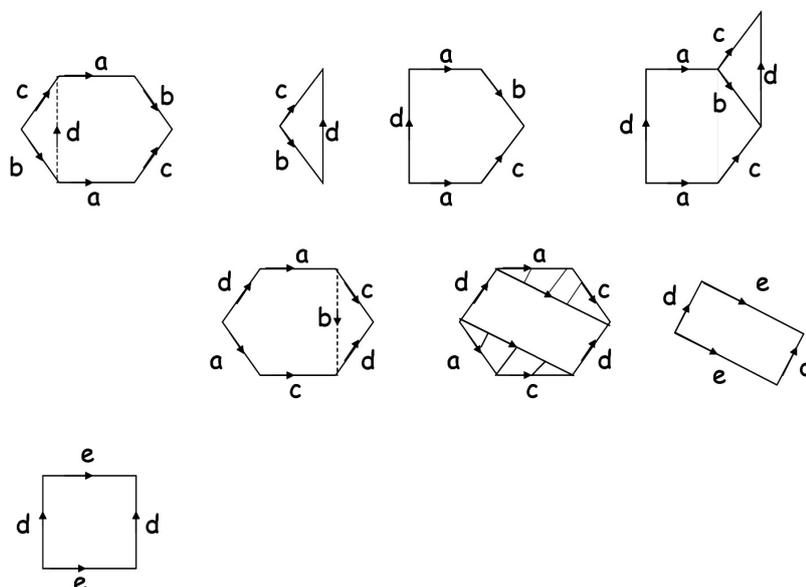


Figura 5.3: l'immagine C della scheda rappresenta un toro.

Un esempio di scheda è mostrato nella figura 5.2. Le immagini A, D, E rappresentano una sfera, le immagini B, C rappresentano un toro, mentre l'immagine F rappresenta un bitoro. Nella figura 5.3 è mostrata una possibile soluzione per l'immagine C, mentre nella figura 3.5 si può vedere la costruzione del bitoro a partire dalla figura F. Osserviamo che l'immagine E non è propriamente un poligono, ma si può vedere come un poligono generalizzato a 2 lati.

Dopo questa attività, che dovrebbe aver aiutato gli studenti a comprendere meglio la corrispondenza tra superfici e poligoni con lati identificati, l'obiettivo sarà arrivare alla classificazione topologica delle superfici chiuse. Potrebbe essere interessante arrivarci attraverso alcune attività che permettano di capire che un unico invariante non è sufficiente: sono infatti necessari sia il genere (o la caratteristica di Eulero - che è la stessa cosa) che il carattere di orientabilità.

Prima di tutto è, quindi, necessario ricordare agli studenti che per classificare le superfici bisogna ricercare gli *invarianti*, ovvero quelle caratteristiche

che sono uguali in oggetti omeomorfi. Il primo esempio di invariante che si può mostrare è la caratteristica di Eulero. Ci sono diversi modi per introdurre questo concetto, uno di questi è quello presentato in questa tesi attraverso i complessi di celle (definizione 3.5). Questo approccio, che potrebbe in apparenza sembrare eccessivamente complicato per dei ragazzi di scuola secondaria, è didatticamente molto interessante, evitando le questioni più tecniche, dal momento che gli studenti hanno appena lavorato sulla corrispondenza tra superfici e poligoni. È - infatti - sufficiente spiegare che i poligoni che rappresentano le superfici sono un insieme di 0-celle (i punti), 1-celle (i lati), 2-celle (la parte interna del poligono). La definizione di *caratteristica di Eulero* si può esporre in questo modo:

Definizione 5.3 (Caratteristica di Eulero). Sia S una superficie rappresentata in modo schematico da un poligono E con le identificazioni dei lati a coppie. Allora la *caratteristica di Eulero* di S , indicata con $\chi(S)$, è:

$$\chi(S) = C_0 - C_1 + C_2,$$

dove C_0 è il numero di 0-celle, C_1 il numero di 1-celle, C_2 il numero di 2-celle.

Bisogna fare attenzione al fatto che la superficie S è ottenuta come spazio quoziente del poligono attraverso opportune identificazioni dei lati, di conseguenza alcuni vertici e alcuni lati coincidono e quindi bisogna contarli una sola volta.

Si consiglia di proporre il calcolo della caratteristica di Eulero della sfera e del toro. Per la sfera, si consiglia di utilizzare l'immagine E della scheda proposta in figura 5.2, mentre per il toro l'immagine B. Lo svolgimento si può trovare, rispettivamente, negli esempi 3.6 (terzo punto) e 3.7. La caratteristica di Eulero non dipende dal poligono scelto per rappresentare la superficie. Si potrebbe, ad esempio, calcolare la caratteristica di Eulero della sfera e del toro utilizzando altri poligoni.

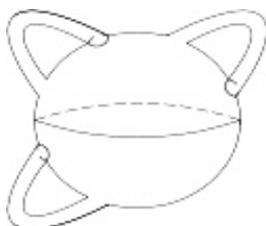
Strettamente legato alla caratteristica di Eulero è il concetto di *genere* di una superficie, che può essere definito come il massimo numero di curve semplici

chiuse, prive di intersezioni tra loro, lungo le quali si può tagliare la superficie senza separarla. Una curva su una superficie è detta *semplice* se è priva di autointersezioni. Il genere è solitamente indicato con g . Proprio come la caratteristica di Eulero, anche il genere è invariante per omeomorfismi.

Esempio 5.3. Il genere di una sfera è 0, mentre il genere del toro è 1.



Esempio 5.4. Il genere di una sfera con g manici è g .



Fino a questo momento del percorso didattico ci siamo sostanzialmente concentrati solamente su due superfici, la sfera e il toro, tuttavia dalla nostra esperienza sappiamo che ne esistono moltissime altre. Per un primo momento ci concentreremo su quelle orientabili. In questo caso, come dimostrato nella proposizione 3.8, il legame tra genere e caratteristica di Eulero di una superficie S è

$$\chi(S) = 2 - 2g.$$

La successiva attività prevede che gli studenti analizzino alcune immagini, che possono essere sia fotografie di oggetti comuni che figure virtuali, e classifichino le superfici in base al genere. È importante spiegare che gli

oggetti tridimensionali che vedono vanno considerati "vuoti" affinché siano effettivamente dei modelli di superfici. Uno degli obiettivi trasversali di questo percorso è quello di sviluppare negli studenti la capacità di visualizzare oggetti tridimensionali partendo da un'immagine bidimensionale. Si vuole favorire il passaggio dalla manipolazione concreta alla formalizzazione e alla registrazione schematica astratta, e stimolare lo spirito di osservazione e l'immaginazione.

Nel seguito sono riportati esempi di immagini che possono essere utilizzate, tratte dalla pagina web *Immagini per la Matematica* a cura del centro Ma-teMatita (<http://www.matematita.it/materiale/>). In questo sito, nella sezione topologia-superfici, si possono reperire ulteriori immagini da classificare. Osserviamo che, se inizialmente si è portati a pensare che il genere di una superficie possa essere identificato con il "numero di buchi", questa attività mostra che la questione non è così immediata. Basta pensare alla figura 5.8 per capire che non è affatto ovvio definire cosa sia un buco.



Figura 5.4: superficie di genere 0.



Figura 5.5: superficie di genere 1.



Figura 5.6: superficie di genere 2.



Figura 5.7: superficie di genere 3.

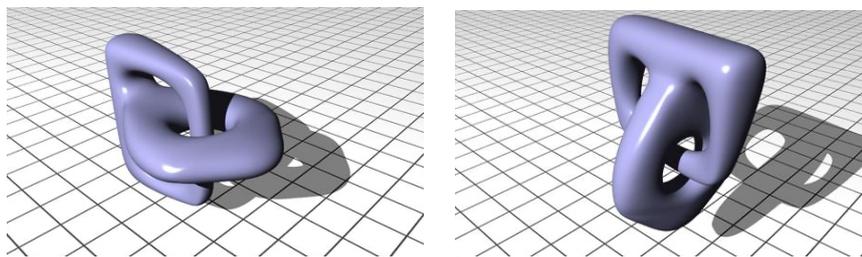


Figura 5.8: superficie di genere 2 vista da due angolature diverse.



Figura 5.9: superficie di genere 4.

A questo punto gli studenti potrebbero pensare che il genere (o la caratteristica di Eulero) sia sufficiente per classificare tutte le superfici chiuse. Tuttavia non è così e per comprendere il motivo bisogna mostrare loro l'esistenza di superfici non orientabili. Per spiegare in modo informale il concetto di orientabilità si potrebbe dire che una superficie non è orientabile se "ha una faccia sola", mentre è orientabile se ne ha due. In pratica in una superficie non orientabile non è possibile distinguere l'interno dall'esterno. Il classico esempio di superficie non orientabile è il nastro di Möbius. Si tratta, però, di una superficie con bordo e di conseguenza non rientra tra le superfici che vogliamo classificare, tuttavia può essere utile farlo costruire agli allievi per aiutarli a comprendere il concetto di orientabilità. L'essere orientabile o meno è un invariante per omeomorfismo.

Le superfici chiuse non orientabili che possono essere presentate sono il piano proiettivo e la bottiglia di Klein. Per i nostri scopi non è necessario definire il piano proiettivo in modo formale, è sufficiente spiegare che può

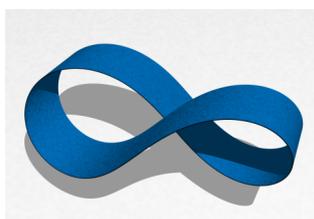


Figura 5.10: il nastro di Möbius.

essere costruito partendo da un nastro di Möbius aggiungendo un copercchio. Se la visualizzazione tridimensionale può essere abbastanza difficile, la rappresentazione tramite poligoni è invece abbastanza semplice (figure 3.3 e 3.6). Anche per la bottiglia di Klein è molto più semplice una presentazione tramite la rappresentazione con poligoni (figura 3.4). La difficoltà nell'immaginare queste superfici deriva dal fatto che non esistono superfici omeomorfe al piano proiettivo o alla bottiglia di Klein nello spazio tridimensionale. Le immagini che si possono trovare servono solo per dare un'idea, come la figura 5.11.

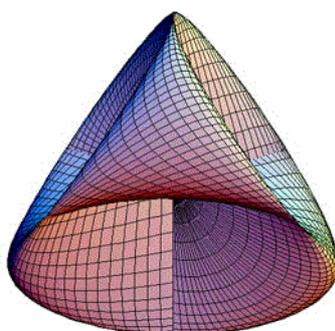


Figura 5.11: tentativo di rappresentazione del piano proiettivo nello spazio tridimensionale.

A questo punto si ricorda che le definizioni di caratteristica di Eulero e di genere valgono in generale per tutte le superfici, quindi anche per quelle non orientabili. Si può far calcolare la caratteristica di Eulero del piano proiettivo, come mostrato nell'esempio 3.8. La relazione tra genere e caratteristica di

Eulero per una superficie S non orientabile è la seguente:

$$\chi(S) = 2 - g.$$

La bottiglia di Klein è la somma connessa di due piani proiettivi, quindi è un multipiano proiettivo di genere 2. Non è necessario parlare agli studenti di somma connessa, ma è sufficiente far notare che il genere è 2 e, quindi, la caratteristica di Eulero è 0. La conseguenza è che il toro e la bottiglia di Klein hanno la stessa caratteristica di Eulero, ma sono due superfici topologiche diverse poiché abbiamo detto che l'orientabilità è un invariante per omeomorfismi. Per la classificazione delle superfici topologiche chiuse sono quindi necessari due invarianti: la caratteristica di Eulero, o equivalentemente il genere, e l'orientabilità. Si può dimostrare che questi due invarianti sono anche sufficienti. Segue, quindi, il seguente teorema:

Teorema 5.1 (Classificazione delle superfici topologiche chiuse). Due superfici topologiche connesse e chiuse sono omeomorfe se e solo se hanno lo stesso genere e sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili.

5.4 Le varietà tridimensionali

A questo punto viene spontaneo chiedersi come si procede per la classificazione in altre dimensioni. In dimensione 1 la classificazione è molto semplice poiché ogni curva, cioè ogni varietà di dimensione 1, è omeomorfa ad una circonferenza, se è compatta, o ad una retta, se non è compatta. In dimensione 3, invece, la classificazione non è affatto banale. Anche storicamente il percorso che ha portato alla dimostrazione di una congettura che avvicinebbe ad una classificazione delle varietà compatte di dimensione tre è stato lungo e per nulla lineare. Per un secolo intero matematici di prim'ordine si sono confrontati senza successo con questo problema e gli insuccessi hanno portato allo sviluppo di molta matematica significativa. Raccontare questa storia potrebbe essere didatticamente molto utile nell'ottica di favorire la

motivazione degli studenti verso lo studio della matematica. Potrebbe costituire uno strumento per gli allievi attraverso cui liberarsi di alcune idee legate alla matematica che, per influenze socio-culturali, per le scelte didattiche dei docenti o per esperienza personale, possono albergare le loro menti. Nello specifico, mi riferisco all'idea che la matematica sia una disciplina strutturata e chiusa, un sistema di regole determinate e fissate in qualche contesto spazio-temporale remoto, che la disciplina in questione sia relegata a una dimensione eterea, astratta, avulsa dalla realtà e priva di valore concreto. Inoltre, come accennato, l'errore, che solitamente viene recepito come un qualcosa di negativo, in questo contesto si è rivelato essere determinante poiché i tentativi falliti hanno portato allo sviluppo di nuovi strumenti matematici.

Prima di tutto è necessario spiegare agli allievi cosa significa lavorare con le varietà tridimensionali. Qui, ancora di più che con le superfici, è richiesto un certo livello di immaginazione e astrazione, per cui potrebbe essere molto utile servirsi di alcuni software open source. In particolare potrebbero essere utilizzati *Torus games* e *Spazi curvi*, reperibili sul sito <https://www.geometrygames.org>. Entrambi sono disponibili sia come software scaricabili sul computer che come app per tablet o smartphone e, quindi, sono facilmente accessibili agli studenti. *Torus games* contiene diversi giochi ambientati in mondi pluriconnessi, tra cui il toro bidimensionale e il toro tridimensionale. Particolarmente significativo per avvicinarsi alle 3-varietà è il labirinto sul 3-toro. *Spazi curvi* è invece un simulatore di volo per universi pluriconnessi, nei quali la luce proveniente da una singola galassia può seguire un'infinità di cammini diversi per arrivare all'osservatore. Un tale spazio si riavvolge su se stesso e un suo abitante avrebbe l'illusione di vivere in un universo in cui le galassie si ripetono in una struttura cristallina, come le immagini in una stanza degli specchi, ma senza riflessione. Questo software è abbastanza avanzato, si consiglia di mostrare solo come sarebbe vivere in un toro tridimensionale.

La narrazione della storia della classificazione delle 3-varietà potrebbe

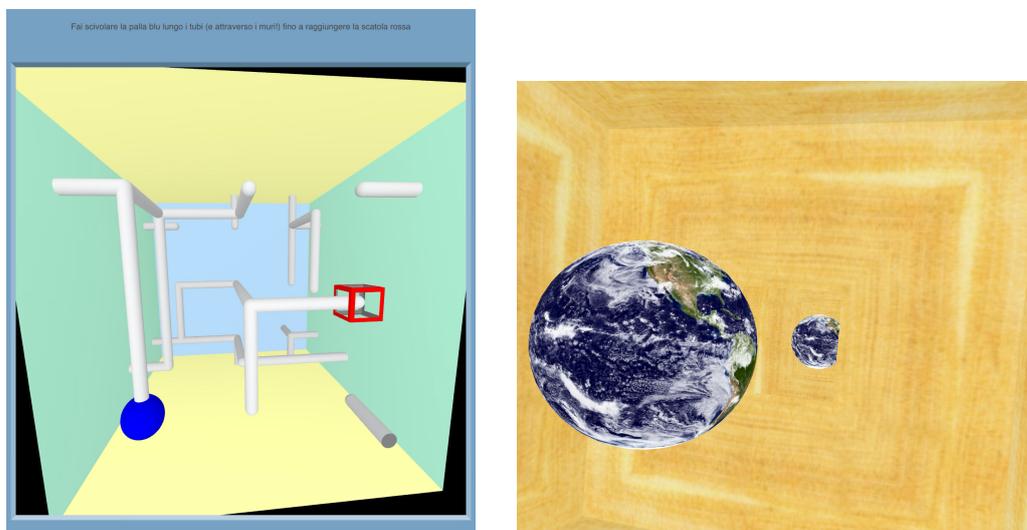


Figura 5.12: a sinistra un labirinto sul 3-toro (*Torus games*), a destra vivere in un 3-toro (*Spazi curvi*).

cominciare dall'enunciato del teorema di Poincaré in due dimensioni, che segue immediatamente dal teorema di classificazione delle superfici topologiche chiuse (teorema 5.1). È proprio con Poincaré che la topologia assume una forma moderna. In particolare a lui si deve proprio il concetto fondamentale di semplice connessione.

Definizione 5.4. Una superficie si dice *semplicemente connessa* se ogni curva su di essa si può deformare in modo continuo ad un punto.

Esempio 5.5. La sfera è semplicemente connessa, mentre il toro non è semplicemente connesso.

Teorema 5.2. Una superficie chiusa semplicemente connessa è omeomorfa alla sfera.

Poincaré si chiede se questo teorema sia vero anche in dimensione più alta di due, con particolare interesse verso la dimensione 3. Nel 1904 sui *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* Poincaré propone la famosa congettura, oggi teorema.

Teorema 5.3 (Congettura di Poincaré). Ogni varietà tridimensionale chiusa e semplicemente connessa è omeomorfa alla 3-sfera.

Molti sono stati i tentativi falliti di provare o confutare la congettura di Poincaré con tecniche esclusivamente topologiche. La maggior parte delle linee dimostrative utilizzate partivano da un ipotetico controesempio alla congettura, cercavano di trasformarlo attraverso deformazioni e chirurgie, mantenendone le proprietà topologiche, per poi dimostrare che l'oggetto ottenuto era la sfera e quindi arrivare ad un assurdo. Nessuno per circa un secolo ebbe successo procedendo in questo modo.

Osserviamo che è importante soffermarsi sul ruolo dell'errore per far capire agli studenti che molto spesso in matematica si procede per tentativi e prima di giungere ad una soluzione a volte si percorrono strade inconcludenti.

Dopo i numerosi tentativi falliti si comincia ad ipotizzare che la topologia sia troppo "flessibile" e potrebbe quindi essere necessario "irrigidire" la situazione. Nella topologia mancano molte nozioni geometriche naturali, come la distanza tra due punti o la lunghezza di un cammino. La svolta si ha verso la fine degli anni '70, quando Thurston propone di adottare un punto di vista completamente diverso, formulando la sua congettura di geometrizzazione. Questa congettura era molto più ambiziosa di quella di Poincaré, poiché puntava alla classificazione di tutte le 3-varietà chiuse. L'idea era quella di dotare le 3-varietà di strutture geometriche "rigide", cioè di metriche riemanniane localmente omogenee. Rispetto a una tale struttura la topologia globale risulta in un certo senso "uniformemente distribuita", e questo ne facilita lo studio attraverso gli strumenti della geometria differenziale. Qualcosa di simile aveva già fatto Poincaré per le superfici. In questo caso, a meno di cambiamenti di scala, ci sono solo tre geometrie possibili: euclidea, sferica e iperbolica (figura 5.13). Il teorema di uniformizzazione di Riemann implica che ogni superficie chiusa ammette una e una sola di queste geometrie, in particolare solo il toro e la bottiglia di Klein ammettono la geometria euclidea, solo la sfera e il piano proiettivo quella sferica, mentre

tutte le altre superfici chiuse sono di tipo iperbolico.

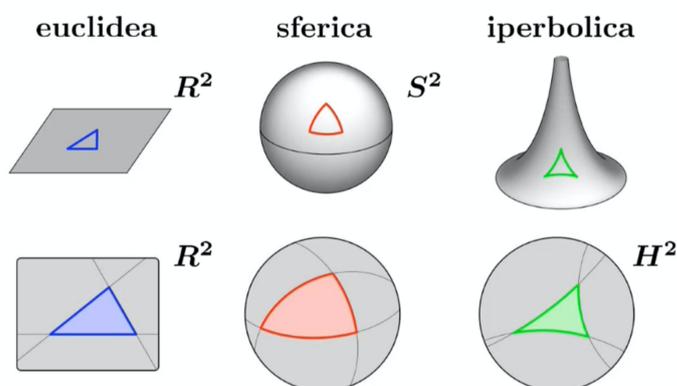


Figura 5.13: le geometrie per le superfici.

In dimensione 3 le cose non sono altrettanto semplici. Le possibili geometrie diventano otto (figura 5.14) e, a differenza di quanto visto per le superfici, non tutte le 3-varietà chiuse ammettono una struttura geometrica. La congettura di Thurston, in modo informale, afferma che

Teorema 5.4 (Congettura di geometrizzazione). Ogni 3-varietà chiusa può essere decomposta tagliandola lungo sfere e tori “non banali”, in modo che ciascun pezzo, dopo aver “tappato i buchi sferici”, ammetta una struttura geometrica.

In particolare, poiché una 3-varietà chiusa semplicemente connessa non contiene superfici “non banali”, dovrebbe essere essa stessa geometrica e l’unica geometria possibile sarebbe quella sferica. Da qui alla 3-sfera il passo è breve, e la congettura di Poincaré sarebbe dimostrata. Thurston riuscì a provare la propria congettura solo per le 3-varietà chiuse che contengono una superficie “non banale”, cioè in quasi tutti i casi, escluso però proprio quello della congettura di Poincaré. La dimostrazione della congettura di Poincaré viene completata da Perelman, matematico russo, grazie ai risultati di Hamilton e di Ricci Curbastro tra il 2002 e il 2003. Perelman rifiuta la medaglia Fields, così come il premio conferitogli dall’European Mathematical Society

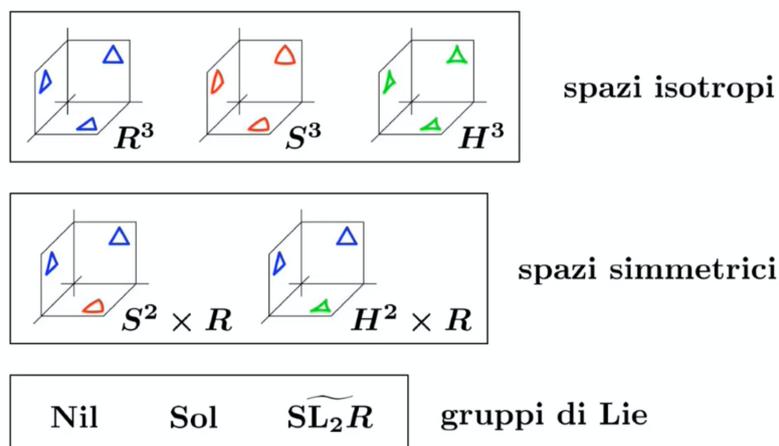


Figura 5.14: le otto geometrie per le varietà tridimensionali.

e il milione di dollari del Millennium Prize istituito dal Clay Mathematics Institute, poiché riteneva il suo contributo inferiore a quello di Hamilton.

Un'ultima curiosità che può essere raccontata, è cosa succede alla congettura di Poincaré in dimensione maggiore o uguale a 4. Apparentemente si potrebbe pensare che all'aumentare della dimensione le cose diventino più complesse, ma in realtà non è così. La congettura per $n \geq 5$ è stata dimostrata da Stephen Smale nel 1966, mentre per $n = 4$ da Michael Freedman nel 1986. Entrambi vinsero la medaglia Fields.

La storia termina così. Una storia che testimonia quanto un risultato matematico sia molto di più che la semplice conseguenza di una catena di deduzioni logiche; quanto il suo conseguimento sia un'impresa collettiva tutt'altro che lineare, in cui si avvicendano intuizioni, errori, aggiustamenti, risultati intermedi; quanto una prospettiva puramente specialistica possa divenire sterile e fertile invece possa essere la contaminazione tra discipline diverse, caratterizzate da metodi e tematiche apparentemente distanti.

Conclusione

Il percorso didattico proposto non è stato sperimentato in classe ma potrebbe essere realizzato in futuro. Ci si potrebbe chiedere se proporre attività che permettano agli studenti di avvicinare problemi di matematica contemporanea mediati dalla narrazione della loro storia e con l'aiuto di attività laboratoriali può cambiare la dimensione affettiva degli studenti nei confronti della matematica, attraverso la costruzione di strumenti di osservazione e interpretazione dei dati raccolti.

Bibliografia

- [1] L. Avraamidou / J. Osborne, *The role of narrative in communicating science*, «International Journal of Science Education», 31 (2009), pp. 1683-1707.
- [2] A. Baccaglini Frank / P. Di Martino / R. Natalini / G. Rosolini, *Didattica della matematica*, Milano: Mondadori Università, 2017.
- [3] J. Bruner, *La costruzione narrativa della "realtà"*, in *Rappresentazioni e narrazioni*, a cura di M. Ammanniti / D.N. Stern, Laterza, Roma-Bari 1991, pp.17-38.
- [4] E. Colombo / M. Dedò, *Uguale o diversi: la matematica delle classificazioni*, Milano: Mimesis Edizioni, 2013.
- [5] P. Di Martino / R. Zan, *Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions*, «ZDM - International Journal on Mathematics Education» 43 (August 2011), pp. 471-482.
- [6] N. Grady, *The eight geometries of the geometrization conjecture*, (<https://ir.library.oregonstate.edu/downloads/5999n421t>).
- [7] A. Hatcher, *Notes on Basic 3-Manifold Topology*, 1980 (<https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3M.pdf>).
- [8] R. Koch, *Classification of surfaces*, Novembre 2005 (<https://pages.uoregon.edu/koch/math431/Surfaces.pdf>).
- [9] B. Martelli, *An introduction to geometric topology*, 2016.

- [10] B. Martelli, *Lezioni di geometria iperbolica*, 2012.
- [11] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, New York: Springer-Verlag, 1977.
- [12] D. O'Shea, *La congettura di Poincaré*, trad. it. di D. Didero, Milano: Rizzoli, 2007.
- [13] R. Osserman, *Poesia dell'universo: l'esplorazione matematica del cosmo*, trad. it. di L. Sosio, Milano: TEA, 2000.
- [14] M. Panero / P. Di Martino / L. Castelli / S. Sbaragli, *L'evoluzione degli atteggiamenti verso la matematica e il suo insegnamento degli insegnanti di scuola elementare in formazione iniziale*, «Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula» 8 (2020), pp. 48-77.
- [15] R. Pekrun, *The control-value theory of achievement emotions: Assumptions, corollaries, and implications for educational research and practice*, «Educational psychology review» 18 (2006), pp. 315-341.
- [16] D. Perrone, *Un'introduzione alla Geometria Differenziale di curve e superfici*, Quaderni di Matematica Università del Salento, 2017. (<http://siba-ese.unisalento.it/index.php/quadmat/issue/view/1477>).
- [17] M. Peterson, *Dante and the 3-sphere*, «American Journal of Physics» 47 (1979), pp. 1031-1035.
- [18] P. Salmon, *Per una didattica collegata alla ricerca*, Atti XI Congresso UMI, Palermo: Edigraphica Sud Europa, 1979, pp. 309-312.
- [19] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, London Mathematical Society, 1983.
- [20] E. Sernesi, *Classificazione delle superfici topologiche* (<http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/GE30809/superfici.pdf>)

-
- [21] W. P. Thurston, *Mathematical Education*, «Notices of the AMS» 37:7 (September 1990), pp. 844-850.
- [22] W. P. Thurston / J. R. Weeks, *The Mathematics of Three-dimensional Manifolds*, «Scientific American» Vol. 251, No.1 (July 1984), pp. 108-121.
- [23] G. Vailati, *Idee pedagogiche di H.G. Wells*, «Rivista di Psicologia Applicata alla Pedagogia e alla Psicopatologia», (II), (1906).

Ringraziamenti

Ringrazio la mia relatrice, Silvia Benvenuti, che con molta pazienza mi ha aiutato e sostenuto durante tutto il percorso di laurea magistrale. Vorrei ringraziare anche la professoressa Alessia Cattabriga sia per il suo contributo alla stesura di questa tesi sia per la grande disponibilità mostrata in questi due anni. Ringrazio poi tutti quei docenti che mi hanno aiutata quando ho avuto bisogno e che, con entusiasmo e professionalità, hanno indicato una strada e non solo nozioni tecniche. Vorrei ringraziare i miei genitori per il sostegno e l'affetto che mostrano ogni giorno. Inoltre, un pensiero va anche ai miei amici, con i quali ho condiviso i momenti belli e quelli meno piacevoli.