Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
TESI DI LAUREA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Cartografie Rinascimentali:
dai problemi pratici alla matematica soggiacente

Candidata:
Benedetta Costa

Matricola:
978020

Relatrice:
Prof.ssa Silvia Benvenuti

Correlatore:
Prof. Eugenio Bertozzi

Luglio 2022

Viele kleine Leute die in vielen kleinen Orten viele kleine Dinge tun,
können das Geschicht der Welt verändern

Alla mia famiglia la quale mi ha insegnato la cosa più bella del mondo, amare.

Indice

Introduzione **7**

1 Oltre i confini del mondo conosciuto **8**
1.1 Breve panoramica del contesto intellettuale 8
1.1.1 L'Umanesimo 8
1.1.2 L'invenzione della stampa 11
1.1.3 La pratica matematica 13
1.2 Una nuova visione del mondo 16
1.2.1 I primi viaggi e l'allargamento dei confini geografici 16
1.2.2 L'impatto delle nuove scoperte 19
1.3 La stesura delle nuove scoperte geografiche 21
1.3.1 Le conoscenze nautiche tra XV secolo e XVII secolo 21
1.3.2 La *Geografia* di Tolomeo 24
1.3.3 *Universalis cosmographia* 28
1.3.4 La mappa di Mercatore 32

2 Dalla sfera al piano: nuovi strumenti **37**
2.1 Curvatura e caratterizzazione delle superfici 38
2.2 La geometria intrinseca 41
2.3 La geometria della sfera 49
2.4 Proiezioni 55
2.4.1 Proiezioni Azimutali 59
2.4.2 Proiezioni Coniche 62
2.4.3 Proiezioni Cilindriche 63

3 Proiezioni cartografiche rinascimentali **68**
3.1 Mappa di Waldseemüller, 1507 69
3.1.1 Come si costruisce? 70
3.2 Da un emisfero a due 71
3.2.1 Mappa di Dürer e Stabius, 1515 72
3.2.2 Mappa di Rughesi, 1597 72
3.2.3 Mappa di R. Mercatore, 1587 73
3.2.4 Mappa di G. Vespucci, 1524 74
3.3 La proiezione del globo intero 75
3.3.1 Mappa di Contarini, 1506 76
3.3.2 Mappa di Finé, 1531 77
3.3.3 Mappa di Rosselli, 1508 79
3.3.4 Mappa di Ortelius, 1570 80
3.4 Il globo in lobi 80

3.4.1 Mappa di Braun, 1574 81
3.5 Mappa di Mercatore, 1569 82
3.5.1 La mappa di Gal-Peters 85

Conclusione **87**

Bibliografia e Sitografia **88**

Introduzione

La struttura di questo progetto di tesi vuole ripercorrere le tappe della storia della cartografia del Rinascimento: prima, vestendo i panni del cartografo rinascimentale, usufruendo delle sue conoscenze legate alla praticità, e, successivamente, attraverso la lente del matematico dell'Ottocento. Sarebbe bello pensare a questo testo proprio come ad un viaggio, attraverso il quale il lettore possa acquisire nuove conoscenze e nuovi strumenti, da accomodare nella propria struttura cognitiva, per poi, infine, guardare alle vecchie conoscenze con una nuova consapevolezza, più evoluta e ampliata. Metaforicamente, è stato questo il viaggio compiuto anche dai cartografi nel tempo: vedremo che le pratiche di proiezione del globo su un piano, compiute in maniera rudimentale e senza una consapevolezza teorica durante il Rinascimento, acquistarono, dopo l'avvento della geometria differenziale dell'Ottocento, una struttura solida e consolidata.
Questo testo tratterà solamente le cartografie che rappresentano il globo intero; le carte regionali o celesti non sono state oggetto dell'analisi, anche se la storia di queste ultime sarebbe stata altrettanto interessante. Per comprendere l'esigenza di tali rappresentazioni, è necessario comprendere le motivazioni, il contesto socio-culturale, quello storico nonché intellettuale; oggetto di questa disquisizione sarà proprio il primo capitolo, nel quale si esporranno, in breve, i seguenti argomenti: il contesto intellettuale e culturale del Rinascimento, i viaggi di esplorazione attraverso territori sconosciuti e, infine, le conoscenze nautiche e geografiche. In particolare nella prima sezione si tratterà dell'Umanesimo, come contesto di rinascita della consapevolezza e delle capacità dell'uomo, della stampa, che permise la standardizzazione dei testi e una notevole accelerazione nella trasmissione del sapere, nonché della pratica scientifica, la quale pose le basi, seppur ancora in fase embrionale, alla più matura matematica del Settecento. La seconda sezione sarà dedicata alle esplorazioni in campo geografico, da Vasco de Gama a Magellano, poiché fu proprio grazie a queste che nacque l'esigenza, nella cartografia del tempo, di ampliare i propri strumenti di rappresentazione: modificando quelli preesistenti, ad esempio le proiezioni di Tolomeo, come fece Waldseemüller e il gruppo di Saint-Dié, oppure costruendone di nuove, come fece, per esempio, il cartografo Gherardo Mercatore (proiezione di Mercatore). Il primo capitolo terminerà con la presentazione, da un punto di vista di rilevanza storica, delle due proiezioni sopracitate.
Il secondo capitolo esporrà un compendio di geometria della sfera e di geometria intrinseca, opera di Riemann la prima e di Gauss la seconda, con lo scopo di comprendere, in maniera semplice, ma senza essere banale, l'impossibilità di proiettare il globo su una superficie piana senza commettere deformazioni. Al termine del capitolo verrà presentata la vasta gamma di proiezioni, classificate secondo le proprietà che intendono conservare:

aree, angoli o distanze.
L'ultimo capitolo sarà costituito da un lungo elenco di proiezioni adottate durante il Rinascimento da cartografi e artisti europei; le mappe rinascimentali, infatti, costituivano delle vere e proprie opere d'arte che venivano esposte nei grandi saloni reali o negli edifici ecclesiastici. Spesso, come verrà ricordato nel terzo capitolo, le proiezioni, adottate nelle cartografie rinascimentali, risultano complicate da riconoscere secondo la classificazione esposta nel secondo capitolo. Storici e cartografi spesso non sono giunti ad attribuire un tipo di proiezione ad una mappa; perciò, saranno analizzate solamente le cartografie che rappresentano un esemplare palese di una proiezione.
Sarà quindi un "breve" viaggio nel tempo il nostro: si salterà dal Rinascimento all'Ottocento, per poi balzare indietro nuovamente al Rinascimento, con la valigetta degli attrezzi ricca di nuovi strumenti.

1 Oltre i confini del mondo conosciuto

1.1 Breve panoramica del contesto intellettuale

L'obiettivo di questa sezione è di presentare al lettore, senza alcuna pretesa di completezza, le sostanziali tappe che portarono, a partire dalla seconda metà del Quattrocento, ad un profondo mutamento di orizzonti in campo culturale, che coinvolse ogni ambito del sapere e che prese le mosse dalla riscoperta dell'antichità classica. In particolare, nella prima parte della sezione, si esporranno i principî e i valori dell'Umanesimo, i quali costituirono i capisaldi dell'atteggiamento intellettualmente dinamico del Rinascimento. Tema del secondo paragrafo sarà l'invenzione della stampa, la quale promosse in maniera sostanziale, assieme alla fondazione di importanti centri interculturali, la vivacità intellettuale dell'epoca. La sezione si concluderà con la presentazione della figura del matematico rinascimentale: figura eclettica e ambivalente, in grado di destreggiarsi tra pratica e teoria e che, come meglio approfondiremo nella sezione *1.3*, rivestì un ruolo fondamentale nell'arte della cartografia.

1.1.1 L'Umanesimo

Figure 1: *La Scuola di Atene* (1509-1511) di Raffaello Sanzio

L'Umanesimo ebbe le sue origini nei maggiori centri cittadini dell'Italia centrosettentrionale, per poi estendersi rapidamente all'intera penisola. Certo questo termine, che all'inizio indicò probabilmente l'attività propria dei maestri (*umanistae*) delle discipline e delle arti del discorso, è ormai divenuto di uso così generico da non rispecchiare l'effettiva natura e fortuna storica di una profonda trasformazione intellettuale. Tale processo si realizzò in un ambiente caratterizzato dalla crescente importanza economica e politica del patriziato mercantile e finanziario, dallo sviluppo di notevoli attività imprenditoriali particolarmente dedite alla produzione tessile e dalla formazione di un vasto ceto artigianale, nel quale cominciavano a emergere tecnici e artisti di grande valore. In una società di questo genere (che del resto non rappresentò un fenomeno unicamente italiano) non soltanto si ebbe un relativo aumento del numero di persone acculturate, ma crebbe il prestigio delle professioni intellettuali più legate alla gestione legale degli affari (i giuristi e i notai) e del loro tipo di cultura. Inoltre, proprio tra il tardo Trecento e gli inizi del Quattrocento, i maggiori centri della vecchia Italia comunale divennero le capitali di stati regionali sempre più vasti; ciò impose la formazione di organi istituzionali e amministrativi, le cancellerie delle repubbliche o le segreterie dei prìncipi e dei signori, capaci di gestire i più delicati strumenti del potere interno e dei rapporti esterni, spesso già di misura europea.

Non meraviglia, pertanto, che, proprio tra i maestri delle arti del discorso e tra i giuristi e i notai, emergessero i primi decisi e combattivi sostenitori di una cultura che si richiamava al diretto insegnamento dei classici, evitava il gergo delle *scholae*, restituiva al linguaggio il suo potere persuasivo tanto necessario alla vita civile, ricercava nella storia e nelle testimonianze del passato insegnamenti utili anche per il presente, e invece che agli interessi metafisici o naturalistici prevalenti nella filosofia universitaria, guardava all'insegnamento etico dei pensatori antichi, a Cicerone, a Seneca, ad Aristotele, a Platone e al maggiore maestro del platonismo cristiano, Agostino. L'ispiratore di questi umanisti fu e restò sempre un grande uomo di lettere e poeta, Francesco Petrarca[1], dal quale essi ripresero la costante polemica antiscolastica, l'invito a perseguire gli *studia humanitatis* che formano la libera coscienza umana e il richiamo a una meditazione volta piuttosto alla conoscenza di sé stessi e del mondo degli uomini che all'acquisizione del sapere enciclopedico. Soprattutto ne condivisero la convinzione di vivere in un'età di decadenza non soltanto intellettuale e spirituale, ma anche religiosa e politica. Tale certezza nutrì pure la speranza di una "rinascita" in grado di restituire la perfezione di una civiltà considerata esemplare. Un'idea, questa, che indusse gli umanisti allo studio dell'Antichità, alla ricostruzione dei suoi linguaggi, vicende, istituzioni giuridiche e civili, delle sue massime espressioni letterarie e artistiche, delle concezioni politiche e filosofiche, ma che li indusse pure a recuperare le testimonianze fondamentali delle scienze e delle tecniche che avevano dato lustro alle grandi civiltà classiche.

La scelta da parte degli umanisti di un nuovo tipo di sapere di carattere storico e an-

[1] Francesco Petrarca nato ad Arezzo il 20 luglio 1304 e deceduto ad Arquà il 19 luglio 1374. Fu scrittore, poeta, filosofo e filologo italiano, considerato il precursore dell'Umanesimo e uno dei fondamenti della letteratura italiana.

tiquario, incentrato sullo studio filologico e critico del linguaggio, esteso ben presto a ogni forma di testimonianza del passato, alla verifica delle tradizioni e alla loro rigorosa discussione, costituì un momento essenziale del lento e complesso processo che portò alla formazione della mentalità scientifica moderna, valida per ogni ambito del sapere, naturalistico o storico, sperimentale o deduttivo. Soprattutto, l'attitudine critica e la rivendicazione della piena libertà nei confronti di qualsiasi *auctoritas* non verificata dall'esperienza e dall'argomentazione razionale permise alla discussione sulle cosmologie e sulle dottrine antiche di trasformarsi in una vera rivoluzione mentale che mutò tutti i rapporti tra l'uomo e la realtà di cui era parte.
Le idee fondamentali che l'Umanesimo pose come base del suo nuovo modello di formazione umana furono la ferma fiducia in un rinnovamento generale della vita e della storia umana, la rivendicazione della centralità cosmica dell'uomo e l'esaltazione della sua libertà, della sua dignità e delle sue arti di creatura destinata da Dio stesso a operare su tutte le cose, quasi per continuare la Creazione e imprimervi l'ultimo segno di perfezione. D'altro canto, la stessa Natura, nella ricchezza delle sue forme e dei suoi fenomeni, fu considerata come un immenso corpo vivente e sensibile che l'uomo poteva conoscere e comprendere con la propria esperienza razionale e i poteri dei suoi sensi. Tutti questi valori furono predicati da Sant'Agostino, il quale sosteneva che lo studio della *physica*, ovvero le cose del mondo creato, era necessario per comprendere la *sapientia*, che egli definiva "conoscenza delle cose divine". Così, come insegnavano i massimi matematici antichi, da Euclide ad Archimede, l'ordine armonico e geometrico del mondo appariva regolato dalle leggi eterne delle scienze matematiche. Dunque l'imponente ritorno dei testi greci di matematica e di meccanica, da Euclide a Pappo, da Archimede ad Apollonio di Perge, fornì un corpo organico di conoscenze, presupposto di quell'avanzamento del sapere matematico che si verificò nel corso del XVI secolo.

Non è certo il caso di soffermarsi sui molti e diversi sviluppi ed esiti dell'Umanesimo che, dopo aver prevalso nella vita intellettuale dell'Italia del Quattrocento e aver costituito nuovi importanti modelli di educazione e di formazione pedagogica, divenne, nel corso del Cinquecento, il principio comune e unificatore della cultura europea. Sta di fatto che questo nuovo tipo di cultura penetrò nelle università, i cui metodi furono spesso profondamente trasformati, lasciò il suo segno sulle nuove istituzioni scolastiche protestanti o cattoliche, riformò il diritto, la medicina e la stessa teologia, e ispirò i tentativi di costruzione di una diversa enciclopedia del sapere, già testimoniati da alcune opere esemplari della fine del secolo. Tali tradizioni erano accomunate da una fondamentale ispirazione filologica, dalla fede nella civile convivenza di ogni idea e opinione umana e dalla speranza di una pace religiosa che segnasse la fine di una feroce stagione di guerre e di sanguinose intolleranze.
Le aspirazioni umanistiche furono duramente mortificate dalla storia di un secolo di continui conflitti dinastici e religiosi, di guerre civili, di persecuzioni implacabili e di repressioni radicali, mentre nelle terre del Nuovo Mondo iniziava l'asservimento, la schiavi-

tù e lo sterminio d'intere popolazioni. Nondimeno, non scomparve mai la tradizione culturale che continuava a difendere le più elevate concezioni etiche dell'Umanesimo, che non rinunciava al mito della *renovatio* e restava fedele all'immagine dell'uomo capace di lottare contro la fatalità del caso e di difendere la libera dignità di scegliere il proprio destino; fu questa una delle ragioni che permisero alla civiltà europea di sopravvivere anche alle sue crisi più gravi e alla minaccia sempre ricorrente di rinnovate barbarie.

1.1.2 L'invenzione della stampa

L'invenzione (o re-invenzione[2]) della stampa a caratteri mobili, dovuta a Johann Gutenbeg, si assume sia avvenuta intorno al 1455, data della prima edizione della Bibbia stampata. Prima dell'invenzione della stampa tipografica erano già note le procedure di punzonatura e di stampaggio, applicate non soltanto presso le zecche per la fabbricazione in serie di monete, ma anche nella produzione di immagini sciolte e di libri silografici con l'impressione lasciata sul foglio da forme di legno intagliate e inchiostrate.

Alla metà del XV secolo, quando cominciarono a circolare i primi libri stampati, la produzione libraria aveva da molto tempo abbandonato le celle dei monasteri e la penombra dei chiostri per radicarsi, sempre più profondamente, nel tessuto culturale e produttivo delle città europee. L'arte di fabbricare codici aveva allargato il proprio pubblico con il trascorrere del tempo; agli uomini di chiesa, di ogni ordine e grado, si erano ben presto aggiunti i docenti delle università e i loro allievi che, divenuti giuristi, medici e notai, non avrebbero smesso di ricorrere all'autorità e all'ausilio dei testi scritti. La rinascita e la rilettura degli autori antichi impresse un'ulteriore accelerazione alla circolazione di libri nel tessuto urbano, alla cui produzione non si dedicavano solamente amanuensi di professione, ma una turba di copisti che scrivevano per sé, per conto di cartolai o di altri committenti. Infine, la crescita in quantità e qualità dei tradizionali insegnamenti delle arti cosiddette liberali, ma soprattutto la diffusione di opere in lingua volgare, portatrici di un sapere nato dalle pratiche del vivere e del comunicare quotidiano in ambito civile, religioso e professionale, estesero la schiera di quanti anche ai piani bassi delle residenze nobiliari, nelle case e nelle botteghe di mercanti e di artigiani avevano modo di acquisire una buona familiarità con la scrittura, con la lettura o, per lo meno, con l'ascolto di testi composti e trasmessi per rispondere alle esigenze pratiche di una vita sociale sempre più complessa. Nel giro di pochi decenni il libro, non più scritto a mano ma stampato, subì una profonda metamorfosi così da assumere una nuova fisionomia e ad essere percepito in modo diverso: non più come il frutto del paziente e tradizionale lavoro di copiatura, che aveva negli antichi scriptoria la sua cuna, ma piuttosto come il modello di un sistema di produrre in cui l'uomo si avvaleva di strumenti, di macchine e di procedure che, pur simulando l'azione diretta delle sue mani, raggiungevano livelli di perfezione e di rapidità che a esse non erano consentite. Il libro divenne in tal modo

[2] Tecniche di stampa a caratteri mobili erano conosciute in Cina già da quattrocento anni.

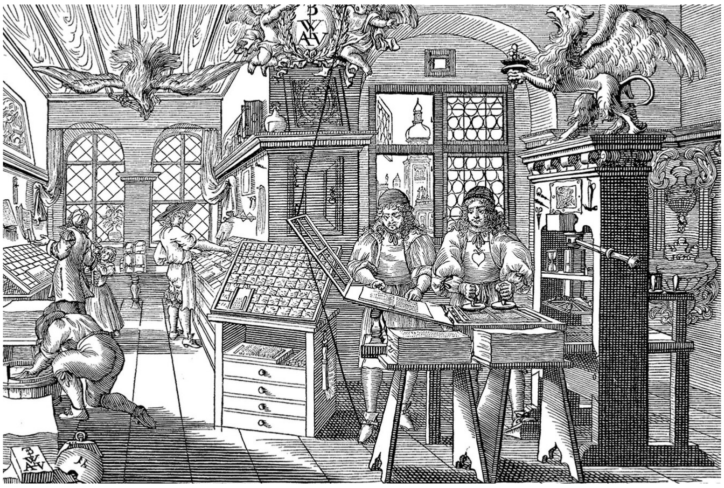


Figure 2: Raffigurazione di una stamperia

il testimone più accreditato dei tempi nuovi e si fece veicolo, nella sua stessa configurazione materiale, della diffusione e dell'affermazione del saper fare ma, soprattutto, del saper concepire e progettare che gli diedero l'attuale configurazione grafica e testuale. Le conseguenze della stampa hanno influito anche sulle comunicazioni visive, in particolare sulla cartografia. Infatti si potevano riprodurre e distribuire copie identiche delle mappe a centinaia, addirittura migliaia, con un grado di uniformità e precisione in precedenza inimmaginabile. La metamorfosi del libro a stampa non è stata estranea a quell'insieme di fattori che hanno aperto le porte alla maniera moderna – astratta e analitica – di concepire il lavoro; vi hanno contribuito sia il modello organizzativo adottato nelle varie fasi di produzione, dalla fusione dei caratteri all'assemblaggio dei fascicoli, sia soprattutto l'immagine e la fisionomia del manufatto, per forza di cose divenuto, agli inizi del Cinquecento, radicalmente diverso dal codice manoscritto nel disegno delle lettere alfabetiche, nella conformazione delle pagine, nella struttura del testo e, infine, nelle modalità stesse della sua circolazione in centinaia di esemplari. Agli occhi dei contemporanei esso finì così per perdere i significati allegorici che prefiguravano realtà eterne, e divenne, invece, un modello tecnologico di riferimento per la scoperta e per la concezione dello spazio, ormai quasi senza confini, riservato all'azione dell'uomo, cioè al suo contributo creativo nell'addomesticare le asprezze della Natura e nell'approntare strumenti e manufatti in grado di migliorare la qualità di questa esistenza terrena e renderla, in tal modo, più umana e sopportabile.

Il passaggio all'Età moderna, com'è noto, ebbe inizio in concomitanza con il recupero del pensiero degli Antichi, sia latini sia greci, diffuso in tutta l'Europa grazie alle edizioni a stampa, che furono fatte in gran copia tra la fine del Quattrocento e nel corso del Cinquecento. Da questo punto di vista, anche il moderno pensiero scientifico dovette pagare

il suo tributo all'Umanesimo; infatti la nascita e la crescita delle diverse discipline in cui esso si manifestò avvenne generalmente a partire sia dalla correzione degli errori, non più testuali ma sostanziali, riscontrati nelle opere della tradizione classica e medievale, sia dalla selezione di quanto in essi appariva ancora vivo e vitale. Un esempio di questa azione di recupero e di restauro sono le riedizioni de la *Geografia* di Tolomeo: se da una parte l'opera presentava notevoli spunti per la rappresentazione del globo terrestre sul piano, dall'altra parte essa presentava errori nel calcolo delle dimensioni della Terra, molto più piccola della realtà, e nella conformazione dell'*ecumene*, ovvero del mondo conosciuto.
A partire dagli inizi del Cinquecento la gran quantità di opere emendate e ampiamente diffuse con la stampa, contribuì a facilitare e a rendere estremamente familiare un'approfondita conoscenza degli autori classici presso le nuove generazioni. Fu quello il momento in cui, senza timori reverenziali, i testi degli Antichi e della tradizione araba e medievale cominciarono a essere sistematicamente confrontati tra loro e con quanto emergeva dalle nuove osservazioni che i Moderni andavano facendo sulla Natura circostante, sulla Terra e sugli astri, dando risposte nuove a problemi antichi, e aprendo la strada a nuove proposte di ricerca nell'astronomia, nella medicina, nelle scienze della Natura, nelle matematiche, nelle arti della ceramica e in quella dell'estrazione dei metalli. Le nuove ipotesi, le scoperte e le invenzioni finirono poi, a loro volta, per approdare in tipografia, passaggio ormai obbligato di ogni comunicazione tecnica e scientifica interessata ad allargare il suo raggio d'azione al di là degli amplissimi confini delle relazioni personali ed epistolari, a tutti i paesi europei e a quanti, a qualsiasi titolo e in qualsiasi sede, fossero interessati al progredire del sapere e delle arti.

1.1.3 La pratica matematica

A seguito di una serie di fattori, connessi principalmente alla situazione economica dell'Europa tardo-medievale e rinascimentale, nonché alle conseguenze delle scoperte e degli sviluppi tecnici, come, per esempio, l'invenzione della stampa e delle armi da fuoco, la matematica acquistò una nuova importanza. Le reali o presunte nuove possibilità di applicazione della matematica furono alla base delle rivendicazioni di un miglioramento di status economico o sociale da parte dei cultori della disciplina.

Questi richiami alla sfera applicativa trovano un riflesso in alcuni concetti contemporanei, come per esempio quello di *"pratica forestiera"* o di *"geometria practica"*. Il primo si riferiva all'ambito dell'aritmetica commerciale basata sulla regola del tre semplice, il secondo alla geodesia e all'agrimensura e ai metodi di misurazione.

Nonostante la presenza di concetti quale quello di geometria pratica, la matemati- ca applicata del Rinascimento e del XVI secolo è inscindibilmente legata alle branche classiche della matematica pura, vale a dire aritmetica, geometria, trigonometria e algebra. Di conseguenza, almeno in una certa misura, una separazione tra matematica pura e matematica pratica o applicata era pressoché inconcepibile. Anche i cultori della mate-

tica applicata, quelli che molto più tardi saranno chiamati "matematici pratici", sotto il profilo dell'ambito di attività, dei metodi usati, dello status sociale e della dipendenza economica dall'esercizio di tale attività, costituivano un gruppo assai eterogeneo. Inoltre, tra i vari settori della matematica applicata esistevano notevoli dislivelli sociali e di conseguenza anche economici. Oltre ai maestri di calcolo, o, come tradizionalmente si dice, d'abaco, e a esperti di pesi e misure, la categoria dei matematici pratici comprendeva esperti nei campi della navigazione, della geodesia, dell'artiglieria e delle fortificazioni, inventori e costruttori di strumenti matematici, cartografi e infine autori di manuali e di trattati sull'uso degli strumenti. Tali esperti erano attivi in diverse istituzioni, come, per esempio, le scuole nautiche. Nella categoria di "matematici pratici" figuravano semplici artigiani, i quali, non conoscendo il latino, erano quindi privi di un'istruzione accademica, professori universitari e matematici di corte, matematici di mestiere, cui la matematica dava da vivere, e infine amatori che la coltivavano senza scopi di lucro. Ai matematici pratici va riconosciuto il merito storico di aver da un lato conservato e divulgato le cognizioni fondamentali, principalmente matematiche, necessarie alle applicazioni pratiche, e, dall'altro lato, di aver messo a punto gli strumenti e gli apparecchi richiesti dalle scienze e dalle loro applicazioni.
Il XVI secolo fu un'epoca estremamente fiorente per le attività dei matematici pratici. Un ruolo significativo a questo riguardo fu svolto dagli umanisti, i cui sforzi mirati a preservare, pubblicare, tradurre e commentare i testi scientifici dell'Antichità si concentrarono in modo particolare sul patrimonio di conoscenze matematiche degli antichi greci e romani. Grazie alla stampa, i frutti delle loro ricerche divennero accessibili a una cerchia assai più ampia di persone. I successi applicativi offrirono a una parte dei matematici notevoli opportunità di ascesa sociale e segnarono l'ingresso delle materie da loro insegnate nei *curricula* delle università tradizionali e di nuove istituzioni destinate alla trasmissione del sapere. Nel contesto della cosiddetta rivoluzione scientifica, la matematica applicata aprì inoltre la strada a una nuova considerazione del valore dell'esperimento per la conoscenza della Natura, collegando così matematica ed esperienza, conformemente alla dottrina biblica secondo cui Dio ha creato il mondo *numero, pondere et mensura*.
L'influenza dei matematici pratici quali propagatori e produttori di un nuovo sapere matematico, nonché del nuovo stile da essi sviluppato soprattutto nel XVI secolo, non terminò nel 1600, ma proseguì sino alla prima metà del secolo successivo, soprattutto nei paesi d'oltralpe. Lo stile tipico di molti scritti dei matematici pratici derivava soprattutto dal fatto che questi autori dovevano guadagnarsi da vivere con la loro attività di maestri autonomi o al servizio di varie istituzioni. Nel XVI secolo il mercato per questi nuovi prodotti matematici era già notevolmente sviluppato.

Per divulgare le loro conoscenze i maestri d'abaco e i matematici pratici adottarono sin dal principio del XVI secolo due diverse strategie: la prima fu quella di pubblicare i risultati conseguiti in una forma adatta, secondo i criteri dell'epoca, allo studio autodidattico e la seconda fu quella di pubblicare raccolte di problemi, da intendersi come una sorta di catalogo di vendita delle loro conoscenze, le quali erano poi impartite oralmente dietro compenso.

I maestri d'abaco, in generale, non erano disposti a divulgare metodi e risultati non ancora divenuti di dominio pubblico, nel timore che gli interessati non si rivolgessero più a loro per apprenderli, ma se ne appropriassero studiando da autodidatti; per di più, la divulgazione dei loro metodi avrebbe limitato le possibilità di successo nelle sfide tra matematici all'epoca assai in voga, che stabilivano una sorta di "ordinamento di rango" e, conseguentemente, il valore di mercato in particolare dei maestri d'abaco. Queste sfide, alla cui notorietà contribuì verso la metà del XVI secolo soprattutto Niccolò Tartaglia (1499/1500-1557) in relazione alla soluzione delle equazioni di terzo grado, si diffusero anche al di fuori dell'Italia.

Un altro sistema per accrescere il proprio valore di mercato consisteva nel dimostrare di conoscere il maggior numero possibile di metodi di soluzione in pressoché tutti i campi della matematica pratica. Di conseguenza, i maestri di calcolo e i matematici pratici tendevano a frammentare le loro conoscenze in una pluralità di campi diversi e a suddividere poi anche questi ultimi in una serie di problemi singoli, le cui soluzioni erano quasi sempre fornite sotto forma di regole algoritmico-precettistiche, senza ulteriori spiegazioni o indicazioni in merito al procedimento di calcolo che si era usato. I maestri d'abaco considerati più bravi erano coloro in grado di offrire una pluralità di soluzioni, ossia di regole algoritmiche, per uno stesso problema. Non ci si preoccupava delle possibili equivalenze delle soluzioni offerte, né di ricercare forme di rappresentazione chiare e univoche o di fornire dimostrazioni, ossia passaggi del ragionamento attraverso cui arrivare alla soluzione, come accadeva nei testi allora riscoperti della matematica greca, in cui gli enunciati matematici si richiamavano a principî noti. Ben presto, di conseguenza, i problemi risolvibili dai maestri d'abaco e dai matematici pratici non furono più sufficienti a soddisfare le esigenze d'informazione matematica dei loro clienti. A ciò era connessa anche una nuova concezione del progresso: a differenza dei maestri d'abaco, i rappresentanti della nuova matematica ritenevano che si sarebbe compiuto un vero passo in avanti soltanto se i metodi di soluzione trovati, una volta eliminati quelli simili, fossero risultati essenzialmente diversi dai procedimenti già noti.

In ogni caso, fino a quando non si prese coscienza delle differenze tra maestri d'abaco e matematici pratici stipendiati da un lato, e amatori senza fini di lucro dall'altro lato, ossia tra una matematica applicata e una matematica coltivata soltanto per diletto, non poté esistere nemmeno una distinzione tra matematici pratici e matematici puri. Soltanto allorché questi ultimi cominciarono a sviluppare una propria produzione matematica, superando ben presto i matematici pratici, tale differenza poté essere percepita. Un altro motivo per cui non è possibile istituire una netta distinzione tra matematica pura e matematica pratica prima del XVII secolo è dato dal fatto che all'epoca mancava ancora in larga misura quel concetto di rigore matematico che si sarebbe sviluppato soltanto successivamente, sulla scorta della distinzione cartesiana tra soluzioni rigorose e costruzioni per approssimazione con l'ausilio di curve. Ad esempio, la mancanza di un certo rigore fu evidente quando i matematici pratici si trovarono a dover proiettare su carta le nuove dimensioni della Terra, in quanto si presentarono questioni geometriche che ancora essi non erano in grado di comprendere o padroneggiare. La situazione mutò nella seconda metà del secolo con la crescente produttività dei matematici puri, i quali, essendo interessati a una rapida diffusione dei loro risultati, crearono un nuovo stile di rappresentazione e di divulgazione della loro produzione matematica.

1.2 Una nuova visione del mondo

Questa sezione presenterà in breve le scoperte geografiche dal XV al XVI secolo a opera soprattutto dei navigatori portoghesi o italiani, al servizio di potenze marinare, impegnati nella ricerca di una rotta che conducesse ai "porti delle spezie", evitando gli itinerari mediterranei, minacciati dalla costante avanzata turca o controllati dai Veneziani. Si darà particolare importanza all'approdo di Colombo nelle terre del nuovo mondo e le altre imprese marittime e militari che lo seguirono, grazie alle quali l'idea del mondo (nelle sue dimensioni e nella sua conformazione) nell'immaginario collettivo iniziò lentamente a mutare.

1.2.1 I primi viaggi e l'allargamento dei confini geografici

Dalla prima metà del Quattrocento, una serie di spedizioni, intraprese dai portoghesi per aggirare il dominio turco nell'area orientale del Mediterraneo, avevano permesso di tracciare con estrema precisione le coste dell'Africa Occidentale fino alla Sierra Leone. Gli investimenti tecnologici del Portogallo furono decisivi in funzione delle nuove esplorazioni. Nonostante il Portogallo avesse una tradizione marinaresca antica, fu la corte di Enrico di Aviz, detto "il Navigatore", a dare una svolta agli strumenti e alle tecniche di navigazione in uso. Alla corte Enrico si riunivano astronomi, artigiani, cartografi e matematici, i quali lavoravano a lungo per aggiornare i portolani del tempo con le coste dell'Africa Occidentale e per costruire imbarcazioni o strumentazioni avanzate. In particolare, la corte di Enrico diede alla luce a un'imbarcazione di piccole dimensioni (30-40 tonnellate), molto più manovrabile, leggera e veloce, la cosiddetta caravella. Essa poteva portare una maggiore quantità di provviste, in quanto richiedeva un equipaggio ridotto, poteva navigare lontano dalle coste nonché rimanere in mare per lungo tempo. La caravella costituì un potente strumento nelle mani del Portogallo e gli permise di intraprendere le più massicce esplorazioni della seconda metà del Quattrocento. Le successive imprese del 1487, in cui l'esploratore Bartolomeo Diaz riuscì a raggiungere Capo di Buona Speranza, e del 1498, in cui il navigatore Vasco de Gama raggiunse Calicut, in India, circumnavigando l'Africa, durante il regno di Giovanni II di Aviz, nipote di Enrico, provocarono un significativo mutamento delle grandi vie di commercio e attribuirono a Lisbona una notevole importanza economica. Pochi anni prima, nel 1484, un navigatore genovese di nome Cristoforo Colombo, si presentò alla corte di Giovanni

Figure 3: Cristoforo Colombo

II con un ambizioso e dettagliato progetto: raggiungere le Indie da Occidente. In primo luogo, prima di presentare il progetto, Colombo si dedicò alla lettura di testi classici, medioevali e contemporanei a sostegno della sua idea. Non solo, egli intraprese una serie di calcoli per proprio conto, dando prova di grande acume matematico, che tuttavia lo portarono in errore. Anzitutto allungò le dimensioni dell'Eurasia, dai 177° ipotizzati da Tolomeo ai già eccessivi 225°, a cui poi aggiunse ancora 58° tenendo conto delle scoperte di Marco Polo e sulla presunta distanza tra Cina e Giappone. Sulla base di questi calcoli e ipotizzata che l'estensione della massa terrestre fosse di soli 283°, Colombo concluse fiduciosamente che, salpando dalle Canarie, gli rimanessero solamente 68° di oceano da percorrere prima di arrivare in Giappone. In secondo luogo, per Colombo l'ampiezza di un grado di longitudine era minore rispetto quella ipotizzata da Tolomeo (ovvero ridotta del 10 per cento) e da Eratostene (ridotta del 25 per cento). La circonferenza della Terra era stata in realtà calcolata quasi con esattezza da Eratostene nel III secolo a.C., ma questa lunghezza non rispecchiava quella ipotizzata dai calcoli di Colombo, che decise di scartarla e di ritenere che la lunghezza dell'arco sotteso da un grado di ampiezza fosse pari a 83km. In terzo luogo, Colombo calcolò che, se un grado di longitudine misurava 83km all'equatore, la lunghezza all'altezza di 28° di latitudine era pari a 74km e dunque, proprio a questa latitudine, egli si proponeva di attraversare l'oceano. Nonostante i dettagliati calcoli e la grande ambizione di Colombo, Giovanni II si rifiutò di finanziare la spedizione, sia perché Colombo chiedeva una ricompensa cospicua, sia perché, in quel periodo, l'obiettivo di raggiungere l'India sembrava già sul punto di realizzarsi. Nel 1492, otto anni dopo il rifiuto da parte del sovrano del Portogallo e dopo vane richieste ad altri regnanti europei, Colombo ottenne l'autorizzazione ad intraprendere la sua impresa dal regno di Spagna, i cui sovrani erano Isabella I di Castiglia e Ferdinando II d'Aragona, e il 12 ottobre dello stesso anno sbarcò su un'isola del Mar delle Antille, a cui attribuì il nome "San Salvador". Come è noto, Colombo compì altri 3 viaggi, non senza difficoltà, e, essendo stato cartografo, tracciò numerose carte delle isole e delle terre continentali

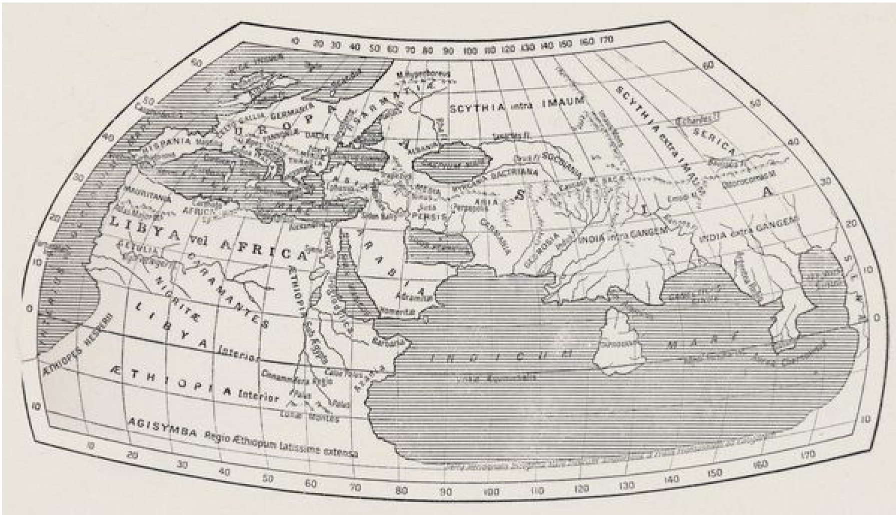


Figure 4: Raffigurazione del mondo secondo Tolomeo

(esempio *Figure 5*). Inoltre portò in patria numerose ricchezze quali oro, perle e pietre preziose, ma del grande Oriente delle spezie e dei tessuti pregiati non si ebbe traccia e

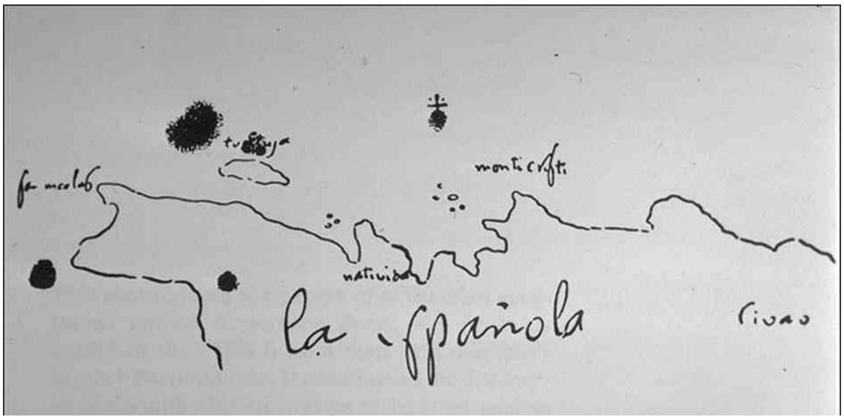


Figure 5: Schizzo di Colombo delle coste di Hispaniola

le aspettative in questo senso furono deluse alquanto, nondimeno Colombo non dubitò mai che le terre da lui scoperte fossero le Indie.
Dopo la morte di Colombo, le rotte da lui aperte vennero percorse da molti altri navigatori tanto da diventare una grossa via di commercio e prendere il nome di "circuito nordatlantico". A partire dal 1497, un banchiere e fornitore navale fiorentino, Amerigo Vespucci, riuscì a prendere parte ad una spedizione spagnola per il Nuovo Mondo e, successivamente, a due ulteriori spedizioni su designazione del re del Portogallo. Al ritorno da tali viaggi, Vespucci scrisse due lettere ad un amico di Firenze, pubblicate nel 1504 e

nel 1506, nelle quali descriveva con grande vivacità i paesaggi e i costumi indigeni nonché per primo fece riferimento esplicitamente alle terre appena scoperte come a un *Nuovo Mondo*.

Figure 6: La famosa scritta "America", Waldseemüller (1507)

In quegli anni il cosmografo tedesco Martin Waldseemüller (*Sezione 1.3.3*) lavorava a una nuova edizione della *Geografia* di Tolomeo nella quale aggiunse le nuove scoperte geografiche, incluse il Nuovo Mondo con il nome di "America", in onore di Vespucci, e, nell'introduzione della nuova edizione, scrisse: "*Poiché un'altra parte del mondo, la quarta, è stata scoperta da Americus Vesputius (...) non vedo perché si dovrebbe obiettare a chiamarla secondo il suo scopritore Americus (...)*".

Una decina d'anni dalla pubblicazione delle lettere di Vespucci, l'esploratore portoghese Ferdinando Magellano si presentò con il progetto di circumnavigare il globo davanti alla corte spagnola, il cui sovrano, ingolosito dall'idea di poter trovare una rotta occidentale per l'Asia, non esitò nel finanziare la spedizione. Così nel 1519 Magellano si imbarcò per uno dei viaggi più coraggiosi di quell'epoca. Dopo quasi tre anni di viaggio la flotta di Magellano, decimata e senza il suo capitano, ucciso dagli indigeni delle Filippine, tornò in Spagna. Il viaggio di Magellano mostrò che si poteva, non senza difficoltà, circumnavigare la Terra ed esibì una prima dimostrazione empirica della sua rotondità.

1.2.2 L'impatto delle nuove scoperte

I viaggi di esplorazione e di scoperta in cui s'impegnarono in modo più o meno sistematico molti navigatori occidentali coprono assai più di un secolo, dalla prima metà del Quattrocento alla seconda metà del Cinquecento. Nell'arco di questo periodo, gli ultimi anni del XV secolo costituiscono un momento assai particolare, che ebbe un importante impatto conoscitivo, poiché nel breve spazio di un lustro si venne a stabilire il contatto diretto via mare sia con le Indie Orientali sia con quelle Occidentali. Tuttavia la conoscenza del continente americano e degli spazi oceanici che lo contornavano era ancora ben lontana dall'essere compiuta nella seconda metà del XVI secolo (lo sarà solo nel XIX secolo).
In primo luogo va messo in rilievo che nell'insieme delle scoperte, quelle americane ebbero sì una risonanza particolare ma esse si trovarono come assorbite nel fenomeno più antico e più vasto riguardante le conoscenze sull'Africa e sull'Asia. Infatti, va messo in evidenza che la capacità degli Europei d'inquadrare scientificamente le conoscenze che si venivano accumulando fu largamente condizionata dalla tendenza a sistemare queste nuove nozioni nel patrimonio del loro sapere antecedente, armonizzandole con il retaggio classico e me-

dievale insito nelle loro visuali. Si può anzi affermare che, sostanzialmente, il Cinquecento fu occupato dal confronto e in parte dallo scontro fra le acquisizioni scientifico-religiose precedenti e la sperimentazione più o meno diretta delle nuove realtà. Questo significa che sul piano scientifico, tutto quello che si era appreso in precedenza e tutto quello in cui si era creduto resistette fortemente all'innesto dei dati che stavano sopravvenendo. Questi ultimi, durante tutto il XVI secolo, quando non furono travisati o mal assimilati, furono in genere inseriti nel sistema gnoseologico acquisito, dando talora luogo, raramente, a elaborazioni originali o che in qualche modo modificassero significativamente quelle tradizionali.

Così, in particolare al di fuori della sfera strettamente geografica, sul piano dell'impatto delle scoperte si dovrà constatare che il sapere scientifico cinquecentesco consistette largamente in un'annessione dialettica delle novità da parte del patrimonio accumulato. Quest'ultimo era, a suo modo, molto organico e vigoroso; ossia, esso non tollerava agevolmente strappi e contestazioni, in virtù della stretta connessione che lo caratterizzava tra capisaldi teologico-filosofici, conoscenze scientifiche e postulati etico-religiosi. I dati sperimentali e le nozioni tecniche erano autoritariamente ed efficacemente proiettati in una condizione d'inferiorità in quanto considerati non essenziali al vero sapere e ai valori di base della società. Si può certo dire che in virtù dei ritrovati tecnici e delle conquiste dell'esperienza si realizzò in gran parte il rinnovamento delle scienze oltre che della maggior parte delle prospettive etico-politiche ed economiche, ma questo rinnovamento rimase limitato oltre che timido sino al XVII secolo. Ci si trova, dunque, in presenza di un processo piuttosto vasto e graduale, non meno decisivo del resto per gli sviluppi che seguirono malgrado le sue esitazioni e i freni che lo caratterizzarono; bastò infatti che l'edificio culturale tradizionale cominciasse a mostrare delle crepe perché le fessure iniziali si trasformassero successivamente in falle e in guasti sempre meno riparabili.

L'esperienza che gli Europei ebbero degli altri due vecchi e vicini continenti era insomma abbastanza vasta, per quanto ben variegata e spazialmente asimmetrica. Quello che forniva loro una coscienza identitaria era costituito dalla loro appartenenza alla cristianità romana ed essi si sentivano in diritto di imporre questa identità anche ai popoli con cui venivano in contatto. È proprio quanto avvenne sin dai primi contatti con gli abitanti delle Antille e poi con le altre genti del continente americano. Questo significa che, sia pure con riserve talora importanti, al di là delle incontestabili differenze fra i vari popoli, ogni rapporto degli Europei con ciascuno di questi poggiò su una più o meno chiara coscienza o almeno sull'oscura convinzione che sussistesse un'unità fondamentale di tutti gli esseri umani e che qualcosa di essenziale li collegasse. Probabilmente questa disposizione di spirito era condivisa maggiormente dai viaggiatori, dagli esploratori e dai mercanti rispetto agli ecclesiastici. Non va inoltre dimenticato che almeno una porzione significativa di questi ultimi era acquisita da tempo a esigenze missionarie, al convincimento che quanti non erano cristiani potessero divenire tali e quindi membri più o meno a pieno titolo della stessa comunità spirituale fondamentale. Il gioco dialettico fra differenza e similarità che s'instaurò tra le realtà europee conosciute, da un lato, e quelle più o meno esotiche, dall'altro lato, rimase alla base di quasi ogni ampliamento del sapere verificatosi nel corso del Cinquecento. Tale insieme d'interrelazioni rimase, nei tempi che seguirono, il presupposto di pressoché ogni acquisizione scientifica e di ogni sperimentazione, come di ciascuna elaborazione tendenzialmente teorica.

1.3 La stesura delle nuove scoperte geografiche

In questa sezione si esporranno alcuni degli strumenti nautici e tecniche di navigazione a disposizione dei navigatori tra XV secolo e XVI secolo, attraverso i quali furono in grado di compiere le imprese esposte nel precedente capitolo. Apprese le nuove dimensioni della Terra per mezzo delle esplorazioni di Colombo e altri, i cartografi dell'epoca dovettero ricercare e adottare soluzioni tecniche innovative in grado di accogliere le nuove scoperte geografiche. A tal scopo, si vedrà, in questa sezione, come la *Geografia* di Tolomeo svolse un ruolo fondamentale in questa ricerca, anche se i metodi di proiezione esposti nell'opera non furono del tutto compresi al tempo e per questo essa non apportò rivoluzionarie modifiche ai metodi utilizzati. Alla conclusione della sezione verranno anche descritte la storia di due importanti mappe, le mappe di Waldseemüller e di Mercatore, senza tuttavia soffermarci sui dettagli tecnici della loro costruzione di cui ci occuperemo nell'ultimo capitolo.

1.3.1 Le conoscenze nautiche tra XV secolo e XVII secolo

Nel Rinascimento, l'astronomia era una disciplina già antica. Esistevano, infatti, un apparato di tecniche e di strumenti e un corpo codificato di conoscenze acquisite, entrambi ereditati dalle epoche precedenti, che le conferivano la dignità di una scienza. La nautica, invece, benché ugualmente antica, si era costituita e trasmessa come un sapere empirico, un'arte priva di basi teoretiche. Essa si fondava sull'esperienza, trasmessa di generazione in generazione, quasi sempre oralmente, e richiedeva solo pochi strumenti quali la sagola per scandaglio[3] (utilizzata fin dall'antichità), la bussola, il portolano[4] (*Figure 7*) e la carta nautica, sviluppati congiuntamente nel XII secolo. Questo sviluppo rese familiare al navigatore un ristretto numero di nozioni matematiche. Tuttavia, nel XV secolo, l'esplorazione delle coste africane indusse i Portoghesi a elaborare nuove tecniche di navigazione di tipo astronomico e matematico. Infatti, sebbene fosse possibile

[3] Strumento che serve a misurare la profondità delle acque

[4] Manuale per la navigazione costiera e portuale basato sull'esperienza e l'osservazione, contenente informazioni relative ad una delimitata regione. Un portolano riporta informazioni utili al riconoscimento dei luoghi tramite descrizioni testuali, disegni e carte geografiche; contiene informazioni sulla normativa locale, su pericoli e ostacoli alla navigazione come secche o relitti; indicazioni per l'ingresso nei porti, per l'ancoraggio ed ogni altra informazione ritenuta utile alla navigazione e alla sicurezza.

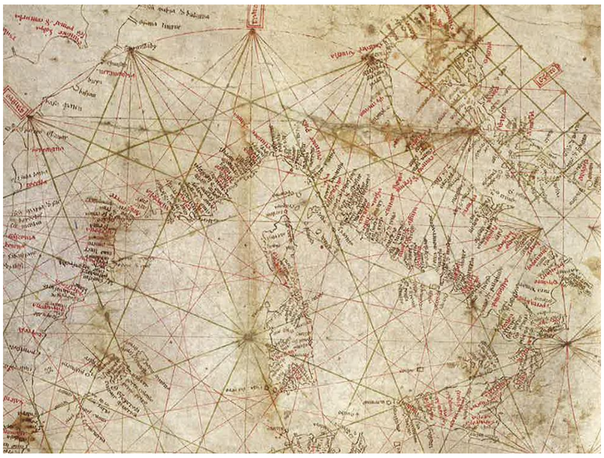


Figure 7: Esempio di carta portolanica (Carta Pisana, XII secolo)

navigare verso sud senza allontanarsi troppo dalla costa, per ritornare verso nord, a causa dell'azione dei venti dominanti, era necessario navigare verso ovest, percorrendo in mare aperto un ampio arco, per intercettare i venti necessari a dirigersi a nord-est, verso Lisbona. Per determinare la propria posizione in mare aperto gli unici punti di riferimento erano il Sole e le stelle. Ai navigatori, quindi, non restava altra scelta che apprendere alcune nozioni astronomiche e imparare a calcolare. Per rendere più semplice questo compito, fu inventata un'ampia gamma di nuovi strumenti che, combinandosi con quelli già utilizzati, formò il tipico equipaggiamento del navigatore rinascimentale.

Per chi conduceva una nave cabotiera o una nave che, dopo aver attraversato il mare aperto, doveva comunque approdare, era estremamente importante conoscere le profondità delle acque. Il vecchio scandaglio a piombo, che nel Rinascimento era quasi sempre costruito col materiale da cui deriva il suo nome, era costituito da piombi di un dato peso, legati a una fune graduata per mezzo di nodi disposti a intervalli di 6 piedi (1,8 *m* circa). Per conoscere l'andamento delle maree, il navigatore utilizzava le tavole delle maree, che associavano l'alta marea alle fasi e alle posizioni della Luna a una certa data. A partire dalla metà del XIV secolo le tavole delle maree, presentate sotto forma di diagrammi, iniziarono a essere sistematicamente inserite negli atlanti marini e talvolta incise anche nei compendi tascabili di astronomia e di misurazione del tempo che nel XVI secolo erano molto popolari tra i ceti agiati.

Una volta risolto il problema delle maree e della profondità delle acque, il navigatore doveva affrontare quello relativo alla determinazione della distanza percorsa e della velocità, e riuscire in qualche modo a registrarle. Nel Rinascimento, per risolvere il primo problema poteva essere utilizzato il solcometro. Quest'apparecchio, analogo allo scandaglio, era costituito da una fune annodata alla quale era legato un galleggiante, generalmente una tavola. Gettato a mare il galleggiante, si contavano i nodi che scorrevano tra le mani di chi reggeva la fune in un breve intervallo di tempo (in genere 30

Figure 8: Raffigurazione di due marinai nell'intento di scandagliare il fondale marino.

o 60 secondi), cronometrato da una clessidra o attraverso la ripetizione di una serie di formule verbali. Quindi, con un semplice calcolo, si determinava la velocità della nave e la distanza percorsa. Per seguire la rotta tracciata, lo strumento fondamentale era la bussola. Introdotta nella nautica europea verso la metà o alla fine del XII secolo, soltanto a partire dalla metà del XV secolo essa assunse la forma che avrebbe poi conservato nei secoli successivi. L'ago era imperniato al di sopra o al di sotto della rosa della bussola, che era costituita da un cartone leggero su cui erano dipinti i quadranti delimitati dai punti cardinali, suddivisi in 8, 16 o 32 rombi, o i nomi classici dei venti mediterranei, tradizionalmente impiegati nel Mediterraneo per indicare le direzioni. Nel corso del XVI secolo i nomi dei venti furono progressivamente sostituiti dal sistema dei rombi e l'ago fu sempre più spesso fissato a una struttura leggera che sosteneva il cerchio indicatore che, ruotando, consentiva una lettura più facile dello strumento. Verso la metà del XV secolo, tuttavia, ancora più importante fu l'individuazione da parte dei navigatori portoghesi della declinazione magnetica, cioè del fenomeno per cui l'ago che indica il Nord punta in una direzione spostata lievemente a oriente rispetto alla sua posizione geografica, che provocò lo sviluppo di un'intera gamma di bussole di declinazione. Queste ultime, dotate di una semplice meridiana applicata alla superficie concava della bussola, consentivano al navigatore d'individuare il suo meridiano locale e di determinare in quale misura l'ago divergesse da esso.

Per semplificare la consultazione delle carte, durante il Rinascimento all'equipaggiamento del navigatore furono aggiunti due strumenti, il goniometro e i regoli paralleli, che peraltro entrarono nell'uso comune soltanto alla fine di questo periodo. Tuttavia, ancora più importanti erano gli strumenti ideati per rendere possibile l'applicazione dei nuovi metodi astro-matematici di navigazione, elaborati dagli studiosi iberici per determinare la latitudine durante la navigazione in mare aperto. Nell'emisfero settentrionale, l'altezza della Stella Polare al di sopra dell'orizzonte dell'osservatore indicava la latitudine, e cioè la distanza dall'equatore, ma poiché nel corso del tempo, a causa della precessione degli

equinozi, la posizione della Stella Polare in relazione al polo reale è soggetta a variazioni, era necessario effettuare correzioni. Una volta attraversato l'equatore, una nave non può più avvistare la Stella Polare. Quindi, per determinare la sua posizione, si deve osservare l'altezza del Sole quando ogni giorno a mezzogiorno attraversa il meridiano.
I globi terrestri facevano parte dell'attrezzatura delle navi, non come strumenti di navigazione pratica, ma come congegni illustrativi per spiegare le posizioni e le relazioni tra i luoghi, mentre, a partire dalla fine del XVI secolo, le mappe nautiche (come la mappa di Mercatore) permettevano non solo di tracciare (segmenti) ma anche di seguire con facilità le rotte poiché bastava mantenere l'angolo costante tra il Nord della bussola e la prua della nave, ovvero l'ago della bussola[5]. Gli strumenti nautici elaborati nel corso del Rinascimento raggiunsero il loro massimo sviluppo e furono sfruttati al limite delle loro possibilità durante il XVI e il XVII secolo, periodo in cui contribuirono a rendere possibile l'espansione di un regolare commercio marittimo e la colonizzazione.

1.3.2 La *Geografia* di Tolomeo

La produzione cartografica *Geografia* di Claudio Tolomeo divenne accessibile da Bisanzio[6] al mondo europeo di lingua non greca soltanto attraverso la traduzione latina di Jacopo Angeli da Scarperia, dedicata a papa Alessandro V nel 1406-1410. La traduzione di Angeli produsse una versione ingarbugliata e monca delle complesse proiezioni matematiche di Tolomeo, e di conseguenza durante il XV secolo fu letta molto alla leggera. Inoltre non ha avviato la rivoluzione della cartografia, come spesso si sostiene, perché i suoi metodi erano ben poco compresi o del tutto ignorati dalla maggior parte dei suoi lettori. Anche con la pubblicazione del testo di Tolomeo con il nuovo mezzo della stampa, molte delle carte di nuova progettazione e aggiornate che lo accompagnavano venivano stampate senza coordinate matematiche, il che dimostra come fosse limitata la comprensione dei metodi scientifici di Tolomeo per proiettare la terra su una mappa.

La *Geografia* esponeva la storia tardo-antica della cartografia e dei vari tentativi di misurare le dimensioni dell'ecumene (*oikoumenē*), ovvero il mondo conosciuto, accompagnata da carte geografiche, lunghi elenchi contenenti le coordinate delle varie località e le istruzioni per il loro rilevamento e per il disegno cartografico, nonché metodi per proiettare il globo sul piano. Fin dalle prime pagine della sua opera, Tolomeo affermava con

[5]Queste rotte sono particolari linee chiamate linee lossodromiche (in breve: linee tracciate sulla sfera terrestre che mantengono angolo costante con i meridiani che intersecano) di cui si parlerà sia nella sezione *1.3.4* sia nell'ultimo capitolo.

[6]Questa copia apparve mille anni dopo la stesura originaria dell'opera e le mappe presenti al suo interno (basate perlopiù sulla prima proiezione) non è chiaro se fossero copie delle illustrazioni originali di Tolomeo oppure aggiunte di epoca bizantina basate sulle istruzioni da lui scritte.

estrema chiarezza *"che il primo passo in una trattazione di questo genere è una ricerca sistematica, in cui si raccolgono quante più conoscenze possibili traendole dalle relazioni di persone dotate di formazione scientifica che hanno visitato i singoli paesi; e che la ricerca e la presentazione delle informazioni sono in parte una questione di misurazioni della terra e in parte di osservazioni astronomiche"*. La *Geografia* può essere pensata come un'immensa banca di dati redatta dal primo geografo da tavolino, una "mente immobile" che agiva da un centro fisso per trasformare dati geografici eterogenei in uno smisurato archivio del mondo. Da questo punto di vista le carte di Tolomeo costituirono esemplari moderni di riferimento per la produzione cartografica posteriore.

Figure 9: Claudio Tolomeo

Una volta che Tolomeo ebbe stabilito la metodologia da adottare nella sua opera, egli passò ad analizzare le dimensioni della terra e le sue proporzioni in latitudine e longitudine. Uno degli aspetti più significativi riguarda le dimensioni complessive della terra rispetto all'estensione della terra rispetto all'estensione della sua parte abitata, l'*oikoumenē*. Rielaborando i calcoli di Eratostene e di Ipparco, Tolomeo divise la circonferenza del globo in 360° e stimò che un grado corrispondesse a cinquemila stadi[7]. Il valore complessivo della circonferenza terrestre che ricavò era pari a 180 mila stadi (circa 32'920 km). L'*oikoumenē* occupava ben 177° longitudinalmente, da est a ovest, ovvero una distanza di circa 72 mila stadi (circa 13'200 km), e, quanto alla sua ampiezza, essa si estendeva poco più della metà della sua lunghezza, ovvero circa 79°.
Queste misure inducono naturalmente a chiedersi come Tolomeo arrivò a calcolare i valori di latitudine e longitudine. Per ottenere i valori di latitudine, egli si servì di osservazioni astronomiche del giorno più lungo dell'anno nelle singole località. Partendo dall'equatore, dove la latitudine è uguale a 0° e il giorno dura sempre dodici ore, Tolomeo utilizzò incrementi di un quarto d'ora per ciascun parallelo fino a raggiungere quello cui corrisponde una massima durata del giorno nell'anno di quindici ore e mezzo. A quel punto passò a incrementi di mezz'ora fino a raggiungere il limite dell'*oikoumene*, che secondo le sue stime corrispondeva al parallelo di Thule[8], in cui il giorno più lungo dell'anno durava

[7]Lo stadio è un'unità di misura di lunghezza in uso presso i Greci antichi, pari a 600 piedi (182,88 m); nel sistema attico era uguale a 177,60 m, nell'alessandrino a 184,85 m.

[8]Thule è un'isola leggendaria, che compare citata per la prima volta nei diari di viaggio dell'esploratore greco Pitea, salpato dalla colonia greco-occidentale di Massalia (l'odierna Marsiglia) verso il 330 a.C. per un'esplorazione dell'Atlantico del Nord. Nei suoi resoconti si parla di Thule (in greco antico: , Thoúlē) come di una terra di fuoco e ghiaccio nella quale il sole non tramonta mai, a circa sei giorni di navigazione in direzione nord dall'attuale Gran Bretagna. Nella *Geografia* di Clau-

venti ore. Grazie a questa procedura, Tolomeo poté redigere le sue tavole di latitudine, anche se, a causa della relativa semplicità del suo metodo d'osservazione, molti dati risultavano imprecisi. Il calcolo dei valori di longitudine si rivelò ancora più difficile. Tolomeo pensava che l'unico modo per determinare la longitudine di un luogo fosse misurare la distanza tra meridiani da ovest a est in base al tempo, non allo spazio, usando il sole come orologio: da tutte le località poste sullo stesso meridiano si dovrebbe osservare il sole transitare in quel meridiano nello stesso momento. Perciò egli iniziò i suoi calcoli di longitudine nel punto più occidentale del mondo abitato e tracciò ciascun meridiano muovendosi verso est a intervalli di 5°, che corrispondevano a un terzo di ora equinoziale, per un totale di dodici ore, ovvero 180°.
Nonostante queste misurazioni fossero imprecise, il metodo di Tolomeo fu il primo metodo sistematico di ottenere dati coerenti che avrebbero permesso ai cartografi successivi di proiettare un reticolo di latitudini e longitudini sul mondo abitato, un reticolato costruito su calcoli temporali invece che spaziali.
Verso la fine del primo libro dell'opera, Tolomeo iniziò a spiegare l'altra sua grande innovazione geografica: una serie di proiezioni matematiche atte a rappresentare la terra sferica su una superficie piana. Pur riconoscendo che con un globo *"si ottiene direttamente la rassomiglianza con la forma della terra"*, Tolomeo fece notare che questo metodo non permetterebbe di ottenere una visione *"che ne abbracci l'intera superficie in un solo colpo"*. Ma egli ammise che tale scelta comporterà altri problemi e *"necessita di un metodo per ottenere una rassomiglianza con l'immagine di un globo, di modo che anche sulla superficie piatta le proporzioni tra le distanze si mantengano il più possibile conformi al vero"*. Tolomeo ricorse alle basi della geometria euclidea e all'astronomia per trovare una soluzione. Egli scrisse: *"si immagini di volgere lo sguardo dallo spazio verso il centro della terra abitata e di visualizzare dei meridiani e dei paralleli tracciati sulla sua superficie"* e poi continuò: *"i meridiani possono dare l'impressione di essere linee rette quando, ruotando* [il globo terrestre oppure lo sguardo] *da una parte all'altra, ognuno di essi si trova esattamente di fronte* [all'occhio], *e il piano su cui giace cade sul vertice della vista"*; *"i paralleli, al contrario, avranno ovviamente l'aspetto di segmenti circolari che rivolgono la loro convessità verso mezzogiorno.* Sulla base di queste osservazioni, Tolomeo propose quella che è nota come la sua prima proiezione, in cui i meridiani erano linee rette che convergevano verso un punto immaginario posto oltre il Polo Nord, mentre i paralleli erano archi di circonferenza di lunghezza differente ma tutti centrati sullo stesso punto. Questo metodo fu il primo tentativo autorevole e duraturo escogitato fino ad allora di proiettare la tera su una superficie piana. Era, come suggerisce la sua forma, il primo esempio, per quanto semplice, di proiezione cartografica

dio Tolomeo, Thule è tuttavia un'isola concreta, della quale si forniscono le coordinate (latitudine e longitudine), riferite alle estremità settentrionale, meridionale, occidentale e orientale, seppur in modo troppo approssimativo perché si possa darne un'identificazione certa. Vari autori hanno ipotizzato l'identificazione di Thule con luoghi disparati: l'Islanda, le Isole Shetland (in particolare l'isola maggiore), le Fær Øer, o l'isola di Saaremaa.

conica (*Figure 10*).

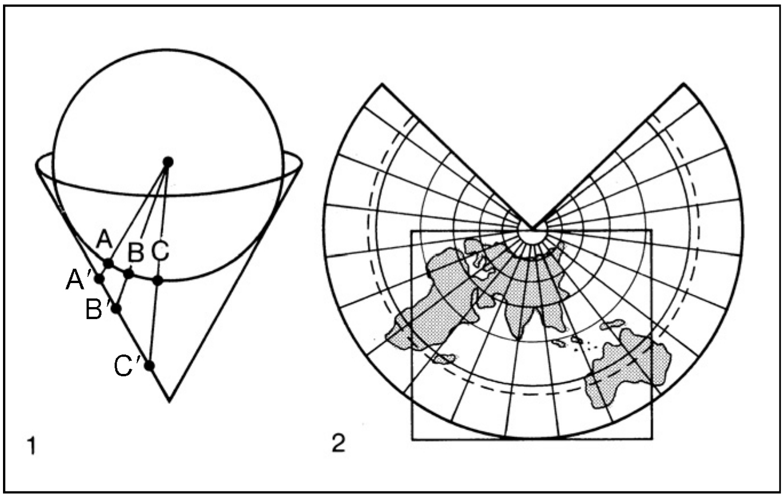


Figure 10: Esempio di proiezione conica di Tolomeo

Successivamente, sempre alla fine del primo libro dell'opera, Tolomeo propose una seconda proiezione. *"Potremmo-* scrisse- *fare una mappa dell'oikoumene sulla superficie piana ancor più simile e similarmente proporzionata* [al globo] *se prendessimo anche i meridiani a somiglianza delle linee delle linee meridiane sul globo"*. Questa seconda proiezione, scriveva, era *"superiore alla precedente"* perché non solo la rappresentazione dei paralleli ma anche quella dei meridiani era costituita da archi di circonferenza e perché in essa praticamente tutti i paralleli conservavano le corrette proporzioni (*Figure 4*). La trigonometria richiesta era più complicata che nella prima proiezione e Tolomeo continuava ad avere problemi nel conservare l'uniformità delle proporzioni lungo il meridiano centrale.
Dopo aver descritto in modo esaustivo le due proiezioni, Tolomeo concluse il primo capitolo della *Geografia* con alcune osservazioni di tono decisamente ottimistico. Pur preferendo la seconda proiezione, si rese conto del fatto che essa *"è inferiore all'altra per quanto riguarda la facilità di costruire una mappa"* e consigliava i futuri geografi di *"attenersi alle descrizioni di entrambi i metodi, a vantaggio di coloro che saranno più attratti dal più pratico dei due per la sua semplicità"*. Questo consiglio condizionò la reazione di eruditi e cartografi alla riscoperta della *Geografia* dal XIII secolo in poi. In particolare, la visione tolemaica, contenuta in una delle primissime affermazioni relative alla misurazione geometrica della terra che Tolomeo scrisse nella sua opera, sarebbe stata fonte d'ispirazione per intere generazioni di geografi ben oltre il Rinascimento, fino all'epoca dei viaggi spaziali:
"Tali cose appartengono alla più elevata e meravigliosa delle occupazioni intellettuali, cioè a dire il mostrare alla mente umana attraverso la matematica sia il cielo stesso nella sua natura fisica mentre lo vediamo ruotare introno a noi, sia la natura della terra

per tramite di una sua rappresentazione, poiché la terra reale, essendo enorme e non circondandoci, non può essere ispezionata da alcuna persona né nel suo complesso né pezzo a pezzo".

1.3.3 *Universalis cosmographia*

Secondo le parole della Library of Congress il mappamondo di Waldseemüller rappresenta un enorme passo in avanti della conoscenza, in quanto esso, non solo utilizza la nuova e rivoluzionaria tecnologia della stampa, ma modifica la comprensione del nostro mondo e del nostro posto in esso. Si tratta, in altre parole, di un documento esemplare del Rinascimento europeo. Il mappamondo di Waldseemüller del 1507 si definisce una *cosmographia*, una scienza che descrive la terra e i cieli, e proprio per questo si rappresentano in esso linee costiere e masse di terra riconoscibili nonché linee scientifiche di longitudine e latitudine. La carta di Waldseemüller si basava sugli scritti di Tolomeo e alla sua percezione geometrica dei mondi terrestre e celeste, a sottolineare l'ammirazione che Waldseemüller nutriva per il mondo ellenistico e i precedenti creatori di mappe, senza mai rinunciare alla tradizione degli oggetti più pratici, quali portolani, carte nautiche e mappe prodotte dai navigatori contemporanei.

L'*Universalis Cosmographia* nacque a Saint-Dié presso un'accademia umanistica, il

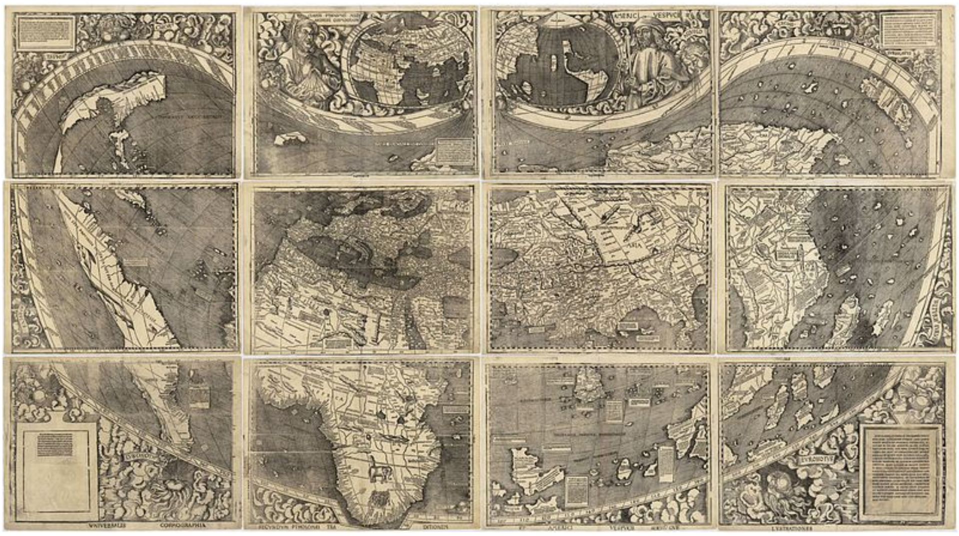


Figure 11: Il mappamondo di Martin Waldseemüller (1507)

Gymnasium Vosagense, ad opera di tre figure principali: Martin Waldseemüller, teologo e appassionato di cosmografia, Matthias Ringmann, revisore, consulente e lettore di bozze, e Jean Basin de Sendacour, un altro teologo e latinista, che si rivelò indispensabile per la traduzione di testi classici. L'ambizioso progetto del Gymnasium consisteva, almeno inizialmente, nell'approntare una nuova edizione della *Geografia* di Tolomeo. Può

sembrare sorprendente che il gruppo si dedicasse al libro di Tolomeo, vecchio di tredici secoli, proprio quando la conoscenza geografica che presentava era minata dai viaggi per mare a occidente e a oriente dell'Europa continentale, ma si trattava in realtà di una scelta logica. Infatti, il recupero e la pubblicazione della *Geografia* nel XV secolo non si limitò solo a soddisfare la curiosità filologica degli umanisti. Le tabelle di Tolomeo e le descrizioni scritte accanto alle *mappaemundi* medioevali erano gli unici modelli estesi del mondo disponibili a studiosi e navigatori, il cui approccio fu quello di riconciliare le nuove scoperte con i paradigmi classici e medievali, anche laddove i modelli sembravano contraddire quello che avevano scoperto.
In seguito, i risultati delle scoperte, diventati sempre più spesso sconcertanti e contraddittori (rispetto l'immagine del mondo descritta da Tolomeo), stimolarono ulteriori esplorazioni fisiche e intellettuali che si allontanarono sostanzialmente dalla *Geografia.* Questo fu il secondo atteggiamento adottato dal gruppo di Saint-Dié e che portò alla pubblicazione dell'*Universalis Cosmographia.*

Nel 1503, la pubblicazione di una lettera tradotta in latino, sotto il titolo sensazionale di *Mundus Novus*[9], apparentemente scritta da Amerigo Vespucci al suo mecenate fiorentino Lorenzo De' Medici, cambiò l'iniziale lavoro del gruppo di Saint-Dié. In una lettera ad un amico nel 1505, Matthias Ringmann raccontò che il piano originale degli stampatori del Gymnasium era pubblicare una nuova edizione di Tolomeo per eclissare sia le numerose edizioni italiane[10] sia la prima tedesca a Ulm, ma, non appena iniziato il lavoro, il gruppo si trovò ad affrontare testi (le lettere di Vespucci) che sembravano descrivere un mondo a ovest dell'Europa nuovo e molto diverso a quanto immaginato da Tolomeo. A quel punto i tre si dedicarono ad un progetto assai più ambizioso: la creazione di un mappamondo, che mettesse a confronto le informazioni geografiche di Vespucci con quelle di Tolomeo, e la pubblicazione, accanto alla mappa, di una descrizione dei metodi e delle ragioni per il loro allontanamento dalla *Geografia.* Il Gymnasium lavorò con notevole solerzia, e nella primavera del 1507 la loro impresa era completa.

Il progetto fu pubblicato in tre parti. La prima, la *Cosmographiae introductio* consisteva in una breve introduzione teorica alla cosmografia di quaranta pagine basata strettamente su Tolomeo, seguita poi da altre sessanta pagine contenenti una traduzione latina, opera di Jean de Sendacour, da una versione francese a stampa della *Lettera di Amerigo Vesucci delle isole nuovamente trovate in quattro suoi viaggi.* Il titolo completo

[9]La breve lettera recitava: *"tutte queste parti del mondo nuovo, alle quali io era andato con le caravelle del serenissimo re del Portogallo: e se diligentemente saranno considerate, parrà veramente che facciano un altro mondo, sì che non senza cagione l'abbiamo chiamato mondo nuovo, perché gli antichi tutti non n'ebbero cognizione alcuna, e che le cose che sono state nuovamente da noi ritrovate trapassano la loro openione".*

[10]La prima, stampata in latino a Vicenza nel 1475, non aveva mappe, ma fu rapidamente seguita nel 1477 da un'edizione a Bologna, la prima a riprodurre mappe regionali e planisferi. L'anno successivo fu stampata un'altra edizione a Roma, poi a Firenze nel 1482.

della *Cosmographiae introductio* annunciava le altre due parti del progetto: “Introduzione alla cosmografia, contenente i necessari principi di geometria e di astronomia. Inoltre i quattro viaggi di Amerigo Vespucci. Descrizione della cosmografia universale sia come globo sia come mappa, comprese tutte quelle cose che erano ignorate da Tolomeo e sono state recentemente scoperte”. Questa prima parte della *Cosmographia*, presenta una delle frasi più importanti nelle prime esplorazioni europee: *“Oggi queste parti del mondo* [Africa, Asia ed Europa] *sono state esplorate più ampiamente rispetto a una quarta parte del mondo e che è stata scoperta da Amerigo Vespucci. Poiché è noto che Europa e Asia hanno preso il nome da donne, non vedo ragione per cui qualcuno possa avere buone ragioni per contestare che questa quarta parte venga chiamata Amerige, la terra di Amerigo, o America, dall’uomo di grande abilità che l’ha scoperta”.*

La seconda parte della pubblicazione era una piccola mappa realizzata xilografica-

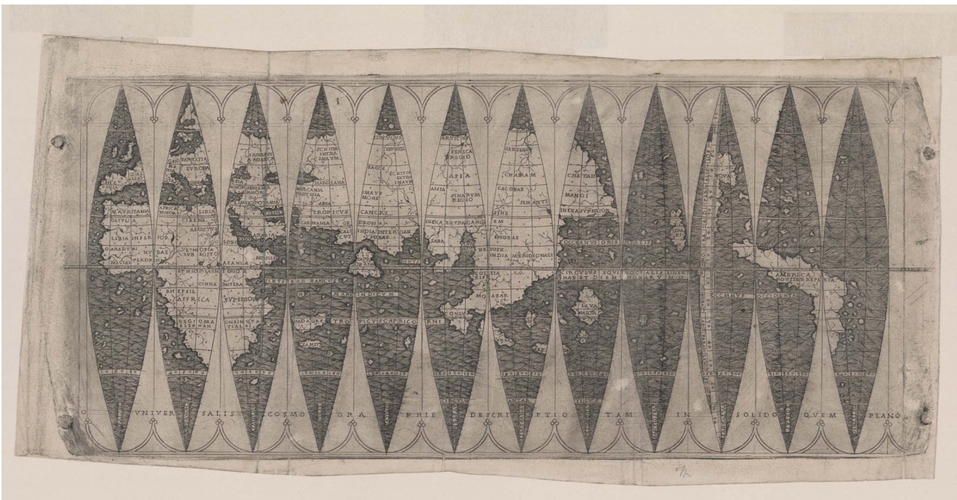


Figure 12: Lobi di globo, xilografia, Waldseemüller (1507)

mente[11](*Figure 12*) di 24x39 centimetri, interrotta a lobi, fatta cioè a strisce con i lati curvi che finiscono a punta e che, se incollate insieme su una piccola sfera, costituiscono un globo terrestre completo. Queste furono le prime mappe interrotte a lobi stampate per un globo terrestre, e accompagnate da un emisfero occidentale, con il Sud America identificato come “America”.

La terza e ultima ambiziosa parte del progetto fu il mappamondo *Universalis Cosmographia*(*Figure 11*), il primo planisfero stampato, composto da dodici fogli separati con una xilografia su ciascuno (di 45x60 centimetri). Una volta assemblati tutti i fogli, la carta misura 120x240 centimetri. La pubblicazione di quest’ultima parte del progetto

[11]Il metodo comportava la preparazione di un blocco da un’asse di legno; l’artigiano incideva le aree da no stampare con coltelli e ceselli, lasciando il disegno della mappa in rilievo, che poi veniva inchiostrato e produceva la stampa delle forme geografiche.

del Gymnasium fu una vera impresa dal punto di vista tecnico e per questo il gruppo si appoggiò alla stamperia di Strasburgo, con la sua forte tradizione artigianale e facilità di approvvigionamento di legno, carta e acqua. Per quanto riguarda l'aspetto, la mappa risulta essere peculiare, a forma di bulbo e con un evidente reticolato , essa sembra l'esito di un tentativo di rappresentare il mondo modificando la seconda delle proiezioni descritte da Tolomeo nella sua *Geografia*. La decisione di Waldseemüller di adottare la proiezione di Tolomeo mostra un cartografo che torna ai modelli classici di rappresentazione per capire e quindi descrivere i contorni di un mondo nuovo che stava emergendo. Prima dell'espansione geografica del mondo noto nel XV secolo, i cartografi erano in grado semplicemente di raffigurare il particolare emisfero che abitavano senza affrontare seriamente i problemi di proiettare il globo su una superficie piana. I viaggi di Colombo e Vespucci ponevano proprio questo problema di rappresentare sia l'emisfero orientale sia quello occidentale su una carta piana, e i loro contemporanei si resero conto del rompicapo. Il problema ammetteva sostanzialmente tre soluzioni geografiche, e tutte e tre sono rappresentate nel libro, nella mappa e nei lobi del globo pubblicati da Waldseemüller e il Gymnasium Vosagense. La prima possibilità era raffigurare entrambi gli emisferi (*Figure*

(a) Claudio Tolomeo e il Vecchio Mondo

(b) Amerigo Vespucci e il Nuovo Mondo

Figure 13: I due emisferi del globo terrestre, Waldseemüller (1507)

13), che è quello che si vede nella parte superiore della *Universalis Cosmographia*. La seconda era suddividere il mondo in parti distinte, come i lobi stampati che accompagnano la mappa e il suo testo introduttivo (*Figure 12*). L'ultima possibilità era creare una proiezione che cercasse di rappresentare la massima parte possibile del globo su una carta piana, riducendo al minimo la deformazione delle terre ai bordi. Nella *Universalis Cosmographia* questa possibilità viene realizzata ancora una volta richiamando Tolomeo e riproducendo una versione della sua seconda proiezione.

In conclusione, la mappa di Waldseemüller rappresenta un cambiamento nella mentalità dei creatori di mappe che può essere vista come rappresentativa della cartografia rinascimentale europea. Essa si basava sulla geografia classica, e in particolare di Tolomeo, e si proponeva con il nuovo ruolo di cosmografia, la scienza che descrive la terra e i cieli in un tutto armonioso, universale. Oltre a basarsi sulla geografia classica per descrivere il mondo, essa incorporava mappe e grafici che mostravano i grandi successi delle esplorazioni via mare di luoghi sconosciuti a Tolomeo e ai suoi predecessori. Infine essa venne pubblicata attraverso il nuovo mezzo della stampa, la quale permise non solo maggiore possibilità di riproducibilità esatta, di standardizzazione e di conservazione, ma cambiò l'aspetto delle carte geografiche, in particolare il modo di rappresentare i rilievi, l'ombreggiatura, i simboli e il *lettering*[12]. In questo senso la cosmografia del gruppo di Saint-Dié rappresenta in maniera esemplare la complessità dinamica del periodo rinascimentale.

1.3.4 La mappa di Mercatore

La tendenza a pubblicare libri si manifestò nella cartografia a partire dalla metà del XVI secolo e numerosi editori italiani raccolsero carte geografiche di vari autori in volumi di raccolte, spesso privi di frontespizio. Il nome di atlante fu dato a questo tipo di volumi, fino ad allora senza designazione, soltanto da Gerardo Mercatore (1512-1594). È con lui che la cartografia degli inizi dell'epoca moderna raggiunse la sua acme. Quando Gerardo aveva 5 anni, la famiglia numerosa si trasferì da Gangelt (ducato di Jülich) a Rupelmonde sulla Schelda, non lontano da Anversa, dove il fratello del padre, Gisberto, riscuoteva una prebenda come cappellano dell'ospedale. Costui si preoccupò che Gerardo imparasse il latino e lo mandò, a 15 anni, in una scuola a Bois-le-Duc dove incontrò il primo insegnante esperto di matematica e strumentazione. A 18 anni andò all'Università di Lovanio per seguire teologia, il cui studio interruppe per il maggior interesse che provava per la matematica, la cosmografia e quanto attinente alla nautica e alla cartografia. A Lovanio, Gherardo frequentò i corsi dell'anatomista e matematico Rainer Gemma Frisius[13], di soli quattro anni più grande, dal quale aveva imparato con grande abilità a realizzare strumenti per dimostrazioni e osservazioni. Per la precisione e la bellezza dell'esecuzione, i suoi strumenti ebbero acquirenti autorevoli, tra cui l'imperatore Carlo V. Sembra che questa circostanza abbia salvato la vita al geografo all'epoca in cui il sovrano spagnolo dei Paesi Bassi, Maria d'Asburgo regina d'Ungheria, sorella di Carlo V, fece arrestare numerosi cittadini di Lovanio per eresia. La maggior parte fu giustiziata dall'Inquisizione, mentre Mercatore tornò libero dopo sei mesi di prigionia. Soltanto dodici anni dopo, nel 1552, si trasferì con la famiglia e il suo laboratorio a Duisburg, dove avrebbe provveduto alla fondazione dell'università e dove rimase fino alla fine dei suoi giorni.

Gerardo iniziò la sua attività cartografica già a Lovanio, lavorando inizialmente insieme a Rainer Gemma (1536) a un mappamondo, per presentare in seguito una carta geografica a stampa della Terra Santa (1537) e un planisfero (1538). Per la carta delle

[12]Insieme di lettere disegnate.

[13]Rainer Gemma Frisio, noto anche come Jemme Reinerszoon Frisius, nato a Dongeradeel il 9 dicembre 1508 e deceduto a Lovanio il 25 maggio 1555, è stato un matematico e cartografo olandese.

Fiandre, apparsa nel 1540 su nove fogli, egli aveva eseguito delle rilevazioni topografiche. Il suo punto di forza consisteva da un lato nel raccogliere un vasto materiale informativo scritto, dall'altro nella trasposizione coscienziosa di tali dati nelle carte stesse; vi si aggiunga poi il suo senso estetico, il suo interesse per la declinazione magnetica, cioè per l'imprecisione della bussola ad ago magnetico, e infine l'utilizzazione di vari tipi di proiezioni con cui si cimentò.

La proiezione cilindrica isogona (ovvero una proiezione cilindrica[14] modificata in cui i

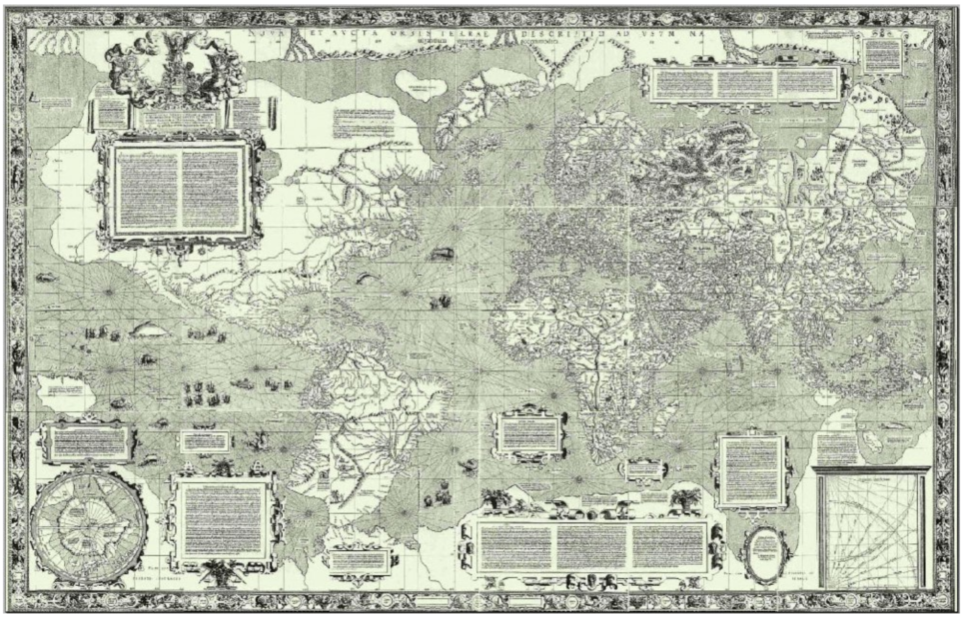


Figure 14: *Nova Et Aucta Orbis Terræ Descriptio Ad Usum Navigantium emendate accommodata* , 1569, Gherardo Mercatore

meridiani rimangono equidistanti, mentre i paralleli, spostandosi dall'Equatore ai Poli, si allontanano reciprocamente in proporzione a quanto la distanza dei meridiani è maggiorata sulla carta rispetto alla realtà), ha preso il nome di "proiezione di Mercatore", anche se non se ne può attribuire a lui la paternità, avendola già utilizzata in scala ridotta Erhard Etzlaub[15] di Norimberga intorno al 1500. Ma nel 1569 Mercatore ne fece un uso esemplare nella grande carta murale del mondo in 18 fogli, *Nova Et Aucta Orbis Terræ Descriptio Ad Usum Navigantium emendate accommodata* ovvero *"Nuova e più ampliata descrizione del globo terrestre con correzioni per l'uso della navigazione"*, pronunciandosi, come preannuncia il titolo dell'opera, anche in merito all'utilità e all'applicazione di questo metodo. Inciso su diciotto fogli, il mappamondo era enorme (misurava due

[14]Le proiezioni cilindriche si ottengono avvolgendo il globo terrestre con un cilindro tangente all'Equatore.

[15]Erhard Etzlaub (1455/1465-1532) fu astronomo, geodesista, invesntore e cartografo tedesco.

metri di lunghezza e quasi 1,3 metri in altezza) ed era stato pensato per essere appeso ad una parete. Ancora più sorprendente era la stranezza della sua impostazione. A prima vista sembrava più un *work in progress* che un momento trionfale della cartografia globale. Grandi aree erano lasciate a cartigli dalla complessa decorazione che contenevano lunghe legende e diagrammi complicati. L'America settentrionale, che sulla carta di Waldseemüller appariva come una piccola area dai confini rudimentali, era trasformata da Mercatore in *"India Nova"*, un gigante disteso, con la sua massa continentale che copriva più spazio dell'Europa e dell'Asia assieme. Nei suoi particolari più fini la carta sembra più ovviamente collocata fra una tradizione cosmografica più antica e un'idea matematica nuova della geografia. La carta di Mercatore sembra quindi mostrare uno studio della cosmografia portato ai suoi massimi limiti. Nel tentativo di combinare l'ambizione sinottica della cosmografia con il rigore matematico delle nuove tecniche di rilevamento e navigazione, la carta guardava indietro agli autori classici e medioevali, tanto quanto guardava in avanti per abbracciare una nuova concezione della geografia. Nella lunga legenda che nasconde parte dell'America settentrionale, Mercatore spiegava le tre finalità del suo lavoro. In primo luogo *"mostrare quali sono le parti dell'universo che erano note agli antichi"*. In secondo luogo, Mercatore mirava a *"rappresentare le posizioni e le dimensioni delle terre emerse, nonché le distanze fra i luoghi in accordo con la verità"*. Ma infine, ed era la cosa più importante, la sua intenzione era *"distendere su un piano la superficie della sfera in modo che le posizioni dei luoghi corrispondano in ogni senso fra loro, sia per quanto riguarda la vera direzione e la distanza, sia per quanto riguarda le longitudini e latitudini corrette; poi, che le forme delle parti siano conservate, per quanto possibile, così come appaiono sulla sfera."*.
Prima del XVI secolo, nulla di tutto questo aveva davvero importanza. La cosmografia perseguiva i suoi ideali classici, proiettando principi geometrici sulla superficie di un mondo definito in modo vago, mentre, all'estremo opposto, i portolani usati sulle navi richiedevano metodi estremamente essenziali di proiezione per la navigazione, poiché riguardavo solo una piccola parte della superficie terrestre. I navigatori sviluppavano nei portolani una fitta rete di linee rette che si incrociavano, per andare da una località ad un'altra. Queste linee rette, chiamate lossodromie[16] (dal greco *loxos*, "obliquo", e *dromos*, "rotta"), sono in realtà curve per la sfericità della terra e se fossero state estese su grandi dimensioni avrebbero mandato le navi fuori rotta. Quando però i portoghesi cominciarono a percorrere con le loro navi grandi distanze attraverso l'Atlantico, uno dei molti problemi che dovettero affrontare fu come disegnare carte con linee lossodromiche rette. Il problema di determinare le rotte lossodromiche nella navigazione in tutte le direzioni, oltre a quelle nord-sud ed est-ovest, era stato già descritto con esattezza da Rainer Gemma Frisius, sebbene senza fornire soluzioni. Anche Johann Werner[17] e Pedro

[16]Approfondiremo le linee lossodromie e le linee geodetiche nel capitolo 2. In breve: le linee lossodromiche sono linee tracciate sul globo terrestre che mantengono angolo costante con i meridiani che intersecano.

[17]Johann Werner, nato a Norimberga il 14 febbraio 1468 e deceduto a Norimberga nel maggio 1522

Nunes[18] si erano già occupati del problema. Nel 1541 Mercatore disegnò le lossodromiche sul suo mappamondo e affermò che era una condotta del tutto irresponsabile quella di fornire ai naviganti carte che li avrebbero indotti in inganno al momento di determinare la rotta con compasso e regolo. Ciò difatti accadeva con il metodo della proiezione equivalente[19], il quale trattava la rotta congiungente due punti sulla superficie della sfera terrestre come se fosse una retta, laddove in realtà si tratta di una curva (lossodromia), cioè di un segmento di spirale che si approssima asintoticamente al polo rispettivamente più vicino. Mercatore si rese conto che per la navigazione occorreva disegnare carte sulle quali queste curve apparissero come linee rette. Ciò diventa possibile quando si hanno latitudini crescenti verso nord, ovvero aumenti proporzionali delle distanze tra i paralleli man mano che ci si allontana dall'Equatore. Poiché Mercatore, come egli stesso ammetteva, aveva scarse conoscenze di matematica, la soluzione teorica di questo problema gli riuscì solo parzialmente. Sarebbe quindi più esatto dire che egli sviluppò una tecnica utile per trasferire la rappresentazione cartografica dal mappamondo a una carta la quale deve essere pensata come se fosse arrotolata a formare un cilindro avvolgente la sfera.

Da Gemma Frisius Mercatore aveva imparato quel tanto della teoria euclidea delle proporzioni necessaria per eseguire la triangolazione. Poiché ogni punto su una carta può essere visto come vertice di un angolo di cui un lato è rappresentato da un meridiano, il compito che si presentava a Mercatore era quello di trasferire dal globo soltanto l'altro lato. Ma trattandosi necessariamente di una curva, egli consigliava di ricorrere a un filo o un livello. Attraverso un'abile e precisa applicazione di questa tecnica, Mercatore riuscì a eseguire il suo famoso mappamondo in proiezione cilindrica isogona.

Prima ancora del mappamondo, Mercatore aveva già eseguito la grande carta d'Europa (1554) (*Figure 14*) e delle Isole Britanniche (1564), cui fecero seguito le carte antiche relative alla Geografia di Tolomeo, in segno di venerazione per il grande predecessore. L'edizione delle carte ultimata da Mercatore a Colonia nel 1578 (il testo latino fu edito nel 1584), è una delle più belle mai eseguite. Aiutato nel frattempo dai figli e, in seguito, anche dai nipoti, egli aveva già iniziato a progettare carte con il medesimo formato che

---

è stato un cartografo, matematico e religioso tedesco. In cartografia, raffinò e divulgò la sua proiezione omonima, una proiezione conica dalla caratteristica forma a cuore, già precedentemente sviluppata da Johannes Stabius (detto Stab) a Vienna intorno al 1500. La proiezione di Werner fu ampiamente usata per le mappe del globo e per molte mappe continentali per tutto il XVI e XVII secolo. Fu utilizzata da Mercatore, Oronce Finé, e Abraham Ortelius alla fine del XVI per le mappe dell'Asia e dell'Africa. Oggigiorno la proiezione di Werner trova impiego solo per scopi dimostrativi e divulgativi.

[18]Pedro Nunes detto Petrus Nonius Salacensis, nato a Alcácer do Sal l'11 gennaio 1502 e deceduto a Coimbra l'11 agosto 1578, è stato un matematico, cosmografo e cartografo portoghese. Nel 1534 accertò la natura corretta della linea di rotta, ponendo quindi le basi per il calcolo della navigazione lossodromica. Infatti i difetti delle carte piane per la navigazione oceanica, sui quali Pedro aveva richiamato l'attenzione fin dal 1530, si riducevano essenzialmente all'impossibilità di rappresentare correttamente su di esse la rotta realmente seguita tramite una semplice linea retta.

[19]La proiezione equivalente verrà approfondita nel capitolo 2. In breve: una proiezione che mantenga i rapporti tra aree del globo uguali.

(a) Carta dell'Europa, Mercatore

(b) Carta dell'Asia, Mercatore

Figure 15

intendeva raccogliere in volume. Nel 1585, apparvero le prime tre parti con un totale di 51 carte (*Galliae, Belgii Inferioris, Germaniae, tabulae geographicae*); nel 1589, usciva la quarta parte (*Italiae, Sclavoniae et Greciae tabulae geographicae*) con 22 carte, mentre nel 1595 veniva edita (postuma) la quinta parte con 29 carte, più 5 carte aggiunte dai suoi successori. Quest'opera, ideata sin dall'inizio come lavoro cartografico unitario composto da carte di dimensioni uguali, fu designata dallo stesso Mercatore *Atlas* (*Atlas sive cosmographicae meditationes de fabrica mundi et fabricati figura*), termine da allora diventato comune in cartografia per designare opere simili.

Mercatore ha esercitato un notevole influsso, non soltanto perché le sue matrici di rame hanno continuato a essere utilizzate, e proprio a partire da queste sono state anche copiate le sue carte, ma soprattutto per il suo stile considerato esemplare.

2 Dalla sfera al piano: nuovi strumenti

Nel capitolo precedente si è accennato al problema che i cartografi rinascimentali dovettero affrontare quando si trovarono a dover rappresentare il globo su una superficie piana. In particolare essi si resero conto che non è possibile applicare una sfera su un piano in modo che siano conservate le lunghezze. Questo problema motivò notevoli sviluppi matematici che culminarono con il fiorire della geometria differenziale, la quale vide una sua sistemazione organica nel 1827, anno in cui Carl Friedrich Gauss[20], il *princeps mathematicorum*, pubblicò le sue *Disquisitiones circa superficies curvas.* Gauss riconobbe l'importanza della geometria intrinseca delle superfici, e generalmente si conviene che la geometria differenziale, così come è nota al giorno d'oggi, abbia avuto in lui il suo iniziatore. Con geometria intrinseca delle superfici intendiamo l'insieme delle proprietà che dipendono solo dalla struttura di varietà bidimensionale della superficie, e non da una sua eventuale immersione in uno spazio esterno. Il Theorema Egregium di Gauss ci assicura che tali proprietà sono tutte e sole quelle invarianti per isometria. Per parlarne in termini volutamente informali, non tecnici, possiamo dire che le proprietà intrinseche sono tutte quelle che un esserino bidimensionale che vive sulla superficie può riconoscere e tutte quelle cose che può "fare" senza uscire dalla superficie stessa. Per esempio, l'esserino bidimensionale non può distinguere un piano da un cilindro, visto che uno può essere deformato isometricamente nell'altro (caso ideale della mappa di Mercatore), ovvero qualsiasi misura fatta sull'uno darà lo stesso risultato sull'altro. Ma, sorprendentemente, l'esserino può, senza uscire dalla superficie, distinguere se la superficie è un piano o una sfera: il Theorema Egregium di Gauss ci dice che la curvatura gaussiana è una nozione intrinseca. Vedremo che un possibile metodo per capire la natura della superficie senza uscire da essa, quindi in maniera intrinseca, è di calcolare accuratamente gli angoli interni di un triangolo geodetico: a seconda di come la somma di questi angoli si discosta da π si può dedurre qualcosa sulla curvatura gaussiana, grazie al teorema di Gauss-Bonnet. Sempre per distinguere un piano da una sfera si possono eventualmente sfruttare delle proprietà globali: la sfera è compatta e le sue *geodetiche*, nozione che approfondiremo in seguito, sono linee chiuse, cosa che non capita sul piano.
Scopo di questo capitolo non sarà esporre in maniera esaustiva e formale gli argomenti sopra citati, piuttosto quello di individuare le nozioni utili e i problemi caratteristici del rappresentare il globo sul piano, sempre nell'ottica di una matematica pratica, propria dei cartografi rinascimentali. Saranno quindi esposti, almeno inizialmente, definizioni, teoremi e proposizioni a mo' di lista, nell'idea che essi acquisteranno significato alla fine del capitolo, quando si descriveranno le proiezioni dalla sfera al piano.

[20]Johann Friedrich Carl Gauss (latinizzato in Carolus Fridericus Gauss), nato a Braunschweig il 30 aprile 1777 e deceduto a Gottinga il 23 febbraio 1855, è stato un matematico, astronomo e fisico tedesco, che ha dato contributi determinanti in analisi matematica, teoria dei numeri, statistica, calcolo numerico, geometria differenziale, geodesia, geofisica, magnetismo, elettrostatica, astronomia e ottica.

2.1 Curvatura e caratterizzazione delle superfici

Il concetto di curvatura è un concetto che, più o meno intuitivamente, ognuno di noi ha assimilato. Esibire un esempio potrebbe richiamare il concetto. Si supponga di essere in groppa ad un cavallo, il quale, essendo bravo ed allenato, mantiene la sua velocità di galoppo pressoché costante in un circuito circolare. Ad un certo punto l'istruttore vi chiede una sterzata verso l'interno del cerchio che state seguendo. La sterzata può essere compiuta sostanzialmente in due modi: quasi ad angolo retto, che richiede un buon assetto sulla sella, oppure più dolce, che va semplicemente a restringere di poco il raggio del circuito. Intuitivamente, una sterzata quasi ad angolo retto sarà decisamente più curva della seconda sterzata, molto più dolce, e quindi possiamo affermare che la prima abbia curvatura maggiore rispetto la seconda.
Tracciata una linea su un piano, in ogni suo punto (la curvatura è una proprietà locale di una curva) possiamo definire la tangente come la retta che approssima meglio la linea in quel punto. La curvatura di una linea l in un suo punto P è un numero che misura di quanto e in che verso l si discosta in P rispetto la tangente. Più precisamente, il valore assoluto della curvatura misura l'entità della piegatura, mentre il segno ne segnala il verso. Con questa descrizione, si evince che una linea ha curvatura ovunque nulla se e solo se è una retta, confermando così le aspettative intuitive. Inoltre, una circonferenza di raggio r avrà la stessa curvatura ($\neq 0$) in ogni suo punto, perché la circonferenza è infinitamente simmetrica[21] e i suoi punti sono indistinguibili l'uno dall'altro. Quindi, dal momento che la curvatura misura lo scostamento dalla tangente, essa deve essere tanto maggiore quanto più il raggio è piccolo, ovvero deve essere inversamente proporzionale al raggio; risulta perfettamente naturale definirla come $\frac{1}{r}$. Per estendere in modo rigoroso la nozione di curvatura a una qualunque curva in un suo punto, presentiamo le seguenti definizioni.

Definizione 1 (Cerchio osculatore)**.** *Dato un punto P di una curva l, si dice* cerchio osculatore *(il termine "osculatore" deriva dal latino* osculare*, che significa baciare) a l in P la circonferenza C_P^l che approssima meglio l in P.*

Il cerchio osculatore si ottiene in questo modo: si prendono tre punti sulla curva, piuttosto vicini, P', P, P''; per questi tre punti passa un solo cerchio, quindi si fanno avvicinare sempre di più i punti P' e P'' a P. Nella situazione limite in cui i tre punti coincidono, si ottiene il cerchio osculatore.

Definizione 2 (Curvatura)**.** *Si definisce* curvatura *κ di l in P la curvatura di C_P^l, ricordando che la curvatura di una circonferenza è costante e pari all'inverso del suo raggio.*

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

dove r è il raggio di C_P^l.

[21] Nel senso dell'ordine del gruppo di simmetria.

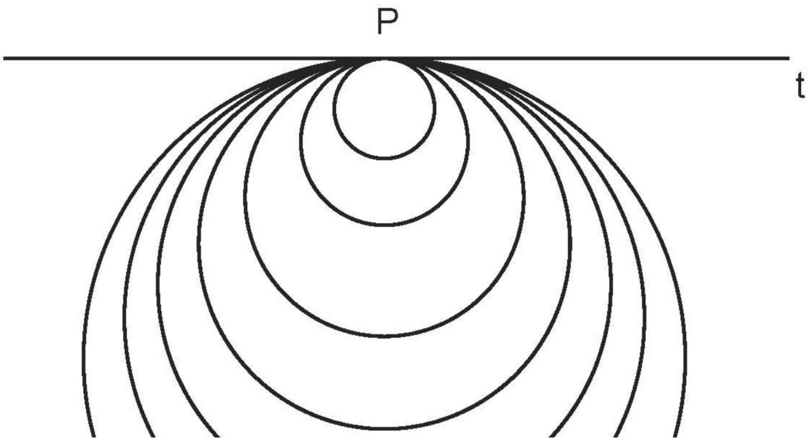


Figure 16

In maniera analoga, e altrettanto estrinseca, è possibile introdurre il concetto di curvatura per le superfici. Anche in questo caso si tratta di un numero che misura di quanto e in che modo la superficie si "stacca", in un suo punto P, da piano tangente alla superficie in tal punto. Intuitivamente un piano, come nel caso della retta, avrà curvatura nulla, in quanto coincide in ogni suo punto con il piano tangente, e allo stesso modo possiamo intuire come la sfera avrà, analogamente al caso della circonferenza, curvatura positiva costante in ogni punto, perché è una *superficie omogenea* (vedi *Definizione 4*). Se invece considerassimo una pseudosfera (*Figure 18*) o il basamento di una lampada *Teti*, come quella in *Figure 17*, avremmo curvatura negativa costante in ogni punto nella prima, in quanto superficie omogenea, mentre curvatura negativa, variabile a seconda del punto considerato, nella seconda.

Sia nel caso della sfera che in quello della pseudosfera, la superficie in esame si allontana dal piano tangente, e la curvatura, in quanto misura di un tale scostamento, risulta necessariamente diversa da zero.

Tuttavia le due soluzioni sono molto diverse l'una dall'altra: nel caso della sfera, la superficie resta tutta da una parte rispetto al piano tangente, mentre nel caso della pseudosfera, il piano tangente la taglia. La distinzione tra le due superfici si fa in termini di curvatura: la curvatura è positiva se la superficie giace tutta dalla stessa parte del piano tangente in P, mentre è negativa se la superficie sta un po' da una parte e un po' dall'altra rispetto a tale piano in P. Per dare una definizione rigorosa di curvatura di una superficie in un suo punto, consideriamo la costruzione

Figure 17: Lampada Teti

seguente. Data una qualunque superficie S, consideriamo un suo punto P, e tracciamo la retta n ortogonale ad S in P, che chiameremo *normale* a S in P. Si immagini poi di tagliare la superficie con un qualunque piano Π contenente la normale n. In questo modo si ottiene una curva, traccia di S su Π, passante per P, chiamata *sezione normale per P*. Ogni sezione normale è una curva piana, giacente sul piano Π e, in quanto tale, ha una curvatura ben definita in P. Al variare del piano con cui si effettua il taglio, cambia la forma della sezione normale che si ottiene e, di conseguenza, varia anche la curvatura nel punto P. Tra tutte le sezioni normali per P ce n'è una con la curvatura massima, κ_{max}, e una con curvatura minima, κ_{min}, dette *curvature principali*, che si trovano su piani perpendicolari, come dimostrò Eulero nel 1760. Grazie alle due curvature principali è possibile dare una prima definizione di curvatura di una superficie in un punto.

Definizione 3 (Curvatura di una superficie)**.** *Chiamiamo* curvatura gaussiana *(o più brevemente curvatura) di S in P il prodotto*

$$\kappa = \kappa_{max} * \kappa_{min}$$

delle curvature principali.

Anche nel caso delle superfici, il concetto di curvatura è di natura locale. Quindi una superficie generica potrà assomigliare localmente ad una sezione di sfera (κ positiva), in altri si appiattirà fino a coincidere con il piano tangente (κ nulla), in altri ancora avrà una forma che ricorda quella di una sella (κ negativa). È possibile dunque classificare i punti di una superficie in tre classi, a seconda della loro curvatura:

- I punti *ellittici* ove $\kappa > 0$;
- I punti *iperbolici* ove $\kappa < 0$;
- I punti *piatti* ove $\kappa = 0$. Tra questi distinguiamo due ulteriori possibilità:
  - I punti detti *planari* ove $\kappa_{max} = 0 = \kappa_{min}$;
  - I punti detti *parabolici* ove $\kappa_{max} = 0$ e $\kappa_{min} \neq 0$ oppure $\kappa_{max} \neq 0$ e $\kappa_{min} = 0$.

Il caso della superficie cilindrica è un caso molto particolare, e che discuteremo anche in seguito, in quanto ogni punto appartenente ad essa ha curvatura nulla. In particolare il cilindro circolare retto, quello di nostro interesse in questa trattazione, è ottenibile come superficie di rotazione, facendo ruotare, per esempio, una retta parallela all'asse z $(0xyz)$, parallelamente all'asse stesso. Considerando la retta normale n al cilindro in un suo punto P e un piano che la contiene, facendo ruotare il piano attorno ad n, otteniamo tutte le possibili sezioni normali del cilindro in P. Il piano perpendicolare all'asse z (asse di rotazione per costruzione del cilindro come superficie di rotazione, nel nostro esempio), taglierà il cilindro lungo una circonferenza. Se si ruotasse di poco il

piano, si otterrebbe un'ellisse come sezione, che si allunga sempre di più man mano che il piano ruota. Dalla curvatura della circonferenza (pari all'inverso del suo raggio), si passa quindi a curvature sempre più piccole, mentre l'ellisse si allunga, schiacciandosi, fino a che si arriva a sezionare il cilindro con il piano passante per il suo asse, ottenendo così una retta come sezione, la quale avrà curvatura nulla. Dunque, il cilindro avrà in ogni punto $\kappa_{max} = \frac{1}{R} \neq 0$, con R raggio del cilindro, e $\kappa_{min} = 0$, pari alla curvatura della retta ottenuta come sezione del cilindro, il cui prodotto κ è pari a 0.
Questo fatto ha una ragione molto profonda che deriva da un'osservazione molto semplice: il cilindro non è altro che un piano piegato nello spazio e per questa ragione eredita da esso alcune proprietà, tra cui appunto la curvatura. Diamo ora una definizione che sarà utile in seguito.

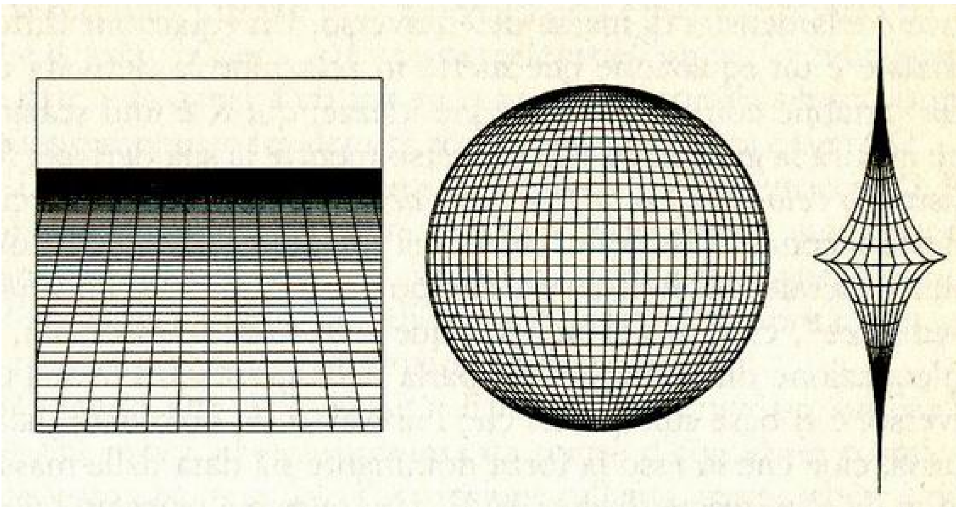


Figure 18: Piano ($\kappa = 0$), sfera ($\kappa > 0$), pseudosfera ($\kappa < 0$)

Definizione 4 (Superficie omogenea)**.** *Una superficie dotata, in ogni suo punto, di curvatura costante, sia essa positiva, negativa o nulla, è detta* omogenea*.*

Esempi di superfici omogenee sono la sfera, la pseudosfera e il piano (*Figure 18*).

2.2 La geometria intrinseca

Guardando un pallone dal di fuori, ci si accorge immediatamente del fatto che si tratta di una superficie curva. Tuttavia, come abitanti del globo terrestre, non è così immediato accorgersi della curvatura della superficie in cui viviamo, soprattutto eseguendo misurazioni sulla superficie stessa. Basti pensare che, pur essendo esseri tridimensionali, abbiamo impiegato molto tempo a capire che la Terra fosse pressoché sferica e, inoltre, siamo giunti a questa conclusione effettuando misurazioni esterne ad essa. Pur abitando

sulla superficie terrestre, gli uomini hanno ragionato come se la vedessero dal di fuori, immersa nello spazio, riuscendo a determinarne la forma. Chiamiamo *estrinseco* il punto di vista di chi studia un oggetto guardandolo da fuori, immerso in uno spazio geometrico più grande, *intrinseco* quello di chi effettua misurazioni e ragionamenti dall'interno, senza presupporre una realtà più grande in cui tutto è inglobato.
Nella prima sezione di questo capitolo, abbiamo introdotto il concetto di curvatura ragionando da un punto di vista estrinseco: per poter parlare di rette normali e piani che sezionano la superficie, dobbiamo implicitamente presupporre l'esistenza di uno *spazio ambiente* che contenga superficie, rette e piani. Tuttavia, a priori, non si può escludere che la curvatura sia una proprietà definibile anche intrinsecamente alla superficie. Infatti, Gauss nel suo saggio *Disquisitiones generales circa superficies curvas* del 1827 enunciò e dimostrò il seguente teorema:

Teorema 1 (Theorema egregium)**.** *Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

Esso stabilisce che in una superficie regolare (C^∞) nello spazio euclideo tridimensionale, la curvatura gaussiana, definita in ogni punto come il prodotto delle curvature principali in quel punto, è una grandezza intrinseca della superficie. Più precisamente, il teorema stabilisce che se P è un punto di una superficie regolare e f è una isometria dello spazio, la curvatura gaussiana in $f(P)$ è uguale alla curvatura gaussiana in P.
L'idea del saggio del 1827 è quella di studiare le superfici da un nuovo punto di vista, non più come "contorni di corpi" ma come corpi di cui una dimensione è infinitamente piccola. Una superficie va dunque immaginata come sottile velo, flessibile e inestensibile, che si può piegare e flettere a piacere, senza però tirarlo né comprimerlo in alcun modo (in sostanza, la superficie è definita a meno di isometrie). Quindi non conta come la superficie sia disposta all'interno di uno spazio ambiente tridimensionale (o di dimensione anche maggiore): le proprietà che sono "importanti" sono tutte e sole quelle misurabili "dall'interno" della superficie stessa, e, come tali, sono indipendenti dalle varie forme che la superficie può assumere in conseguenza alla sua flessibilità. In altri termini, ogni isometria di una superficie conserva la curvatura in ogni punto, mandando punti iperbolici in iperbolici, punti ellittici in ellittici e punti piatti in piatti.

I contenuti dell'opera *Disquisitiones generales circa superficies curvas* del 1827 sono di fondamentale importanza per la comprensione del teorema di Gauss e del suo pensiero. In seguito saranno esposti, seppur in maniera "superficiale", alcuni dei risultati principali dell'opera.
Una superficie, come per esempio quella della Terra, può essere pensata immersa in uno spazio tridimensionale e studiata con i classici metodi della geometria analitica cartesiana, utilizzando tre coordinate x, y, z; oppure può essere descritta utilizzando due coordinate curvilinee u, v. Nel caso della superficie terrestre queste ultime sono la longitudine e la latitudine. La latitudine è la distanza angolare di un punto dall'Equatore,

misurata in gradi e frazioni di grado, sull'arco di meridiano passante per quel punto. Alla misura in gradi bisogna aggiungere N o S a seconda che il punto si trovi nell'emisfero boreale o in quello australe. La longitudine è la distanza angolare di un punto dal meridiano di riferimento, o meridiano zero, che è quello passante per Greenwich, misurata in gradi e frazioni di grado, sull'arco di parallelo passante per quel punto. Alla misura in gradi bisogna aggiungere E o W a seconda che il punto si trovi a Est o a Ovest del meridiano fondamentale. Gauss non utilizzò, nel suo saggio, l'equazione cartesiana del tipo $f(x, y, z) = 0$, ma le equazioni parametriche

$$x = x(u, v);\ \ y = y(u, v);\ \ z = z(u, v)$$

dove u e v sono le coordinate curvilinee della superficie. Per la superficie della sfera unitaria l'equazione cartesiana è:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

quindi del tipo $f(x, y, z) = 0$. Ma le equazioni parametriche utilizzate da Gauss furono:

$$\begin{aligned} x &= cos(u)cos(v) \\ y &= cos(u)sin(v) \\ z &= sin(u) \end{aligned}$$

dove u è la latitudine, v la longitudine. Se si considera un punto t_0 del dominio in cui sono definite u e v, per esso passeranno due curve: $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$. In corrispondenza a questo punto sulla superficie vi sarà un punto: $(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$. A questo punto viene spontaneo ricercare le tangenti e le normali. Fissando prima un valore dei parametri coordinati e poi l'altro, otterremo una famiglia di curve, chiamate *linee coordinate* (che possono essere anche ortogonali):

$$\begin{cases} x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0) \\ x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v) \end{cases}$$

Da queste si ricavano derivando, rispetto a u e v, i vettori tangenti:

$$\begin{cases} \vec{T_u} = (x_u(u, v_0), y_u(u, v_0), z_u(u, v_0)) \\ \vec{T_v} = (x_v(u_0, v), y_v(u_0, v), z_v(u_0, v)) \end{cases}$$

I vettori normali sono ottenuti come prodotto esterno dei vettori tangenti, ovvero:

$$\vec{n} = \pm \vec{T_u} \times \vec{T_v}$$

e i versori normali sono dati

$$\widehat{n} = \pm \frac{\vec{T_u} \times \vec{T_v}}{\sqrt{(\vec{T_u} \times \vec{T_v})^2}}$$

Il secondo passaggio fondamentale fu quello di determinare il modo di calcolare le distanze *sulla* superficie, ovvero in maniera intrinseca. Per calcolare la lunghezza di un arco infinitesimale, Gauss si servì del teorema di Pitagora

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1}$$

Dalle equazioni parametriche

$$x = x(u, v);\ y = y(u, v);\ z = z(u, v),$$

passando ai differenziali

$$dx = adu + a'dv;\ dy = bdu + b'dv;\ dz = cdu + c'dv$$

e sostituendo nella (1) egli ottenne

$$ds^2 = E * du^2 + 2F * dudv + G * dv^2$$

dove $E = \| \vec{T_u} \|^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $F = \vec{T_u} \cdot \vec{T_v} = aa' + bb' + cc'$, $G = \| \vec{T_v} \|^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2$, nota con il nome di *prima forma fondamentale*. La formula precedente esprime la distanza tra due punti infinitamente vicini sulla superficie, $P(u, v)$ e $Q(u + du, v + dv)$, e quindi essa sarà, banalmente, invariante per isometrie; va pensata come l'informazione essenzialmente disponibile all'esserino superficiale: misurando il suo spazio con metro e goniometro (infinitesimi, cioè nello spazio tangente), usa e determina i coefficienti della prima forma fondamentale e tutto ciò che a partire da essa può essere determinato.
Un'altra importante innovazione che Gauss introdusse è la nozione di curvatura di una superficie, già introdotta nella prima sezione di questo capitolo. Nel caso delle curve, si parte dalla curvatura di un cerchio di raggio R, che per definizione si assume come il reciproco del raggio, cioè $\kappa = \frac{1}{R}$, e, successivamente, per determinare la curvatura di una curva in un punto, si considera il cerchio osculatore, il cerchio tangente alla curva nel punto P. Tuttavia, come già accennato in precedenza, l'approccio utilizzato per le curve non è generalizzabile alle superfici e, per fare ciò, Gauss prese spunto da alcune tecniche utilizzate in astronomia.
In particolare, Gauss definì originariamente la curvatura di una superficie in un punto come rapporto tra il determinante della matrice associata alla *seconda forma fondamentale* e il determinante della matrice associata alla prima forma fondamentale. I coefficienti e, f e g della seconda forma fondamentale sono definiti come prodotto scalare tra la derivata seconda rispetto a u e v dei vettori tangenti con il versore normale $\widehat{n}$, ovvero: $e = \vec{T_{uu}} \cdot \widehat{n}$, $f = \vec{T_{uv}} \cdot \widehat{n}$ e $g = \vec{T_{vv}} \cdot \widehat{n}$. A differenza dei coefficienti della prima forma fondamentale, i coefficienti della seconda sono definiti attraverso la normale, una nozione estrinseca, e quindi si potrebbe pensare che la curvatura di una superficie sia una nozione estrinseca, perché definita proprio attraverso il rapporto tra determinante della seconda forma, dipendente da e, f e g, e determinante della prima forma, dipendente da E, F

e G. Tuttavia il *Theorema egregium* dimostra che la curvatura di una superficie è una nozione intrinseca, poiché il determinante della seconda forma fondamentale è esprimibile attraverso i coefficienti della prima forma, i quali sono definiti in maniera intrinseca. In sintesi: la curvatura originale di Gauss è definita nel seguente modo

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Attraverso le definizioni dei coefficienti e alcuni calcoli, Gauss riuscì ad esprimere K per mezzo di E, F e G e delle loro derivate prime e seconde (che sono funzioni invarianti per isometrie); il che permise di concludere che anche K è invariante per isometrie.

Da qui un risultato fondamentale per lo studio delle superfici: la curvatura non dipende dallo spazio circostante, ma è una caratteristica intrinseca alla superficie stessa. In altre parole, si può stabilire se la superficie è curva o piana restando sulla superficie stessa, senza fare riferimento a un ipotetico spazio ambiente in cui è immersa. Relativamente alla superficie terrestre si può stabilire il suo grado di curvatura effettuando esclusivamente misure sulla superficie, senza fare riferimento a osservazioni astronomiche. In un passo successivo, Gauss dimostrò che la propria definizione di curvatura si poteva ottenere dal prodotto delle due curvature principali, quella minima e quella massima, e dunque che le due definizioni coincidevano: $K = \kappa = \kappa_{min} * \kappa_{max}$.

Il *Theorema egregium* comporta dei risultati di particolare importanza. In primo luogo, risolve l'annosa questione della rappresentazione di una superficie su un'altra, in particolare della rappresentazione della superficie terrestre su una carta piana. Il teorema dimostra che ciò è impossibile perché un foglio piano ha curvatura nulla, mentre la superficie della Terra ha curvatura ovunque positiva.
In secondo luogo, più importante dal punto di vista teorico, la conclusione che un pezzo di superficie, per esempio un triangolo o un'altra figura geometrica, può essere trasportato da una parte a un'altra della superficie solo se questa ha in tutti i punti la stessa curvatura, ossia la curvatura della superficie è costante.
In terzo luogo, il concetto stesso di misura si fonda sulla possibilità di trasportare l'unità di misura da una regione a un'altra senza che essa si deformi. Le superfici sulle quali si può costruire una simile geometria sono tutte quelle a curvatura costante, non solo il piano che ha curvatura costante nulla ma anche quelle che hanno curvatura costante positiva o negativa. Per esempio, la superficie della sfera, che ha curvatura costante positiva, perché in ogni punto le due curvature principali sono costanti e positive; la pseudosfera, che ha curvatura costante negativa, perché in ogni suo punto le due curvature principali hanno segno opposto.

A conclusione del saggio, Gauss costruì i primi elementi della geometria sulle superfici a partire dall'importante nozione di *geodetica*[22].

[22] Il termine "geodetica" deriva da *geodesia*, ossia la scienza della misurazione delle dimensioni e della

Definizione 5 (Linea geodetica)**.** *La* linea geodetica *è la curva più breve che congiunge due punti di uno spazio. Lo spazio in questione può essere una superficie, una più generale varietà riemanniana, o un ancor più generale spazio metrico*[23]*.*

Ad esempio, nel piano le geodetiche sono le linee rette, su una sfera sono gli archi di cerchio massimo. Nel piano le costruzioni geometriche partono dalle rette, le geodetiche del piano, e sulle superfici le costruzioni partono sempre dalle "rette", ovvero le geodetiche della superficie, che dipenderanno dalla forma della superficie stessa. Gauss così iniziò una prima trattazione dei triangoli geodetici delle superfici.
Il primo risultato fondamentale fu che la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico su una superficie curva non è 180°. Lo scarto rispetto a 180° è dato dall'integrale della curvatura esteso alla superficie del triangolo.

Teorema 2 (Teorema di Gauss-Bonnet)**.** *Sia A un triangolo geodetico sulla superficie S e sia κ la curvaura della superficie, a priori variabile da punto a punto, allora:*

$$\int\int_A \kappa \, dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

dove α, β e γ sono gli angoli del triangolo A.

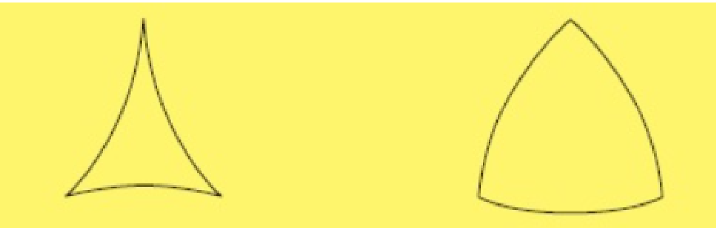


Figure 19: Triangolo iperbolico e Triangolo sferico

In pratica, la formula lega la somma degli angoli interni di un triangolo alla sua estensione e alla curvatura nei punti interni al triangolo stesso, permettendo di stabilire che rispetto al triangolo euclideo, in cui la somma degli angoli interni è di 180°, indipendentemente dalla taglia, tutti i triangoli disegnati su superfici con curvatura positiva sono "gonfiati" (ovvero con somma degli angoli interni maggiore di 180°), mentre quelli tracciati su superfici con curvatura negativa sono "sgonfiati" (ovvero con somma degli angoli interni minore di 180°)(*Figure 19*).

L'eleganza di questo risultato deriva dal fatto che esso costituisce un potente criterio unificante: fornisce la formula per l'area di un triangolo tracciato su una qualunque

forma del globo terrestre; nel suo significato originale, una geodetica era il cammino più breve tra due punti sulla superficie della Terra, ossia un arco di cerchio massimo.

[23]Questi ultimi due casi non saranno oggetto di discussione né di approfondimento.

superficie a curvatura costante. Nel caso del triangolo sferico, in cui la curvatura vale 1 in ogni punto, la formula diventa:

$$area(A) \ = \int\int_A 1 \ dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

ovvero l'area di un triangolo sferico è data dal suo eccesso angolare. Nel caso del triangolo iperbolico, in cui la curvatura vale -1 in ogni punto, la formula diventa:

$$-\ area(A) \ = \int\int_A (-1) \ dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

ovvero

$$area(A) \ = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

quindi l'area di un triangolo iperbolico è data dal suo difetto angolare. Nel caso di triangoli piatti, ove la curvatura vale 0 in ogni punto, vale la formula usuale:

$$0 \ = \int\int_A 0 \ dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

ovvero

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

A costo di sembrare ridondanti, è utile sottolineare che le precedenti considerazioni sono state fatte attuando misurazioni intrinseche alla superficie, a conferma del fatto che la sfericità della terra è sperimentalmente verificabile non solo attraverso informazioni estrinseche ma anche intrinseche. Anche se, questo tipo di misurazioni, spesso soggette ad errori sperimentali, portano a piccolissime variazioni rispetto a 180° se fatte su piccole (o neanche troppo piccole) distanze.
Guardando alla geometria del piano e della sfera è possibile comprendere quanto queste due siano differenti, sia da un punto di vista estrinseco (più evidente) che da un punto di vista intrinseco (meno evidente), soprattutto se si pensa al piano e al cilindro: due entità differenti da un punto di vista estrinseco, ma sostanzialmente "uguali"[24] da un punto di vista intrinseco.

Concludiamo questa sezione con delle definizioni che ci risulteranno molto utili nel capitolo successivo. Considerando la sfera come approssimazione ideale del globo terrestre, è lecito chiedersi quali siano i percorsi che l'omino bidimensionale, abitante della Terra, può compiere sulla sua superficie. Tra gli infiniti percorsi da un punto A a un punto B sulla superficie terrestre è possibile considerare due percorsi in particolare: il percorso più breve, detta *linea ortodromia*, oppure il percorso che mantiene un angolo costante con i meridiani attraversati, detta *linea lossodromia*.

[24]Con "uguali" ci si riferisce implicitamente all'esistenza di un'isometria locale tra punti del piano e del cilindro poiché, come si è già visto, la curvatura del piano e del cilindro è la stessa, pari a 0.

Figure 20: Linea lossodromica e Linea ortodromia

Definizione 6 (Linea ortodromia)**.** *La* linea ortodromia *consiste nella linea che segna il più breve cammino tra due punti di una superficie sferica (in particolare, della superficie terrestre).*

Nel caso specifico della superficie sferica, essa corrisponderà ad un arco di circonferenza massima, ovvero un arco di geodetica della sfera.

Definizione 7 (Linea lossodromia)**.** *La* linea lossodromia *corrisponde ad una linea appartenente a una superficie di rotazione e avente la proprietà di segare tutti i meridiani sotto uno stesso angolo.*

I meridiani stessi e i paralleli sono linee lossodromie, in quanto si ottengono quando l'angolo è, rispettivamente, nullo o retto. In particolare, su una superficie sferica, le lossodromie non rappresentano il più breve percorso tra due punti A e B (*Figure 20*), che è invece costituito dall'arco di cerchio massimo (ortodromia) di estremi A, B, ma presentano notevoli vantaggi a livello pratico-applicativo. Infatti, nelle carte nautiche (come quella di Mercatore), nelle quali i meridiani sono generalmente rappresentati da rette parallele tra loro, la linea lossodromia è tracciata sulla carta come una linea retta. Nella navigazione si preferisce pertanto seguire il percorso lossodromico, poiché è sufficiente tracciare una linea retta sulla mappa, guardare l'angolo che essa forma con i meridiani e, attraverso la rotta, proseguire ad angolo costante, tra prua (ovvero ago della bussola) e Nord della bussola.

2.3 La geometria della sfera

Immaginiamo che il nostro ambiente geometrico non sia più il piano euclideo ma la superficie di una sfera. Il piano e la superficie di una sfera sono entrambi ambienti geometrici bidimensionali. Useremo due simboli: E^2 per il piano euclideo, S^2 per la superficie di una sfera. Il concetto di dimensione di un oggetto geometrico ha un suo fondamento intuitivo: un punto ha dimensione 0, tutte le linee hanno dimensione 1, tutte le superfici hanno dimensione 2, tutte le figure solide hanno dimensione 3. Se tuttavia si vuole approfondire tale concetto si può ricorrere ai sistemi di coordinate. Sia nel caso di E^2 che nel caso di S^2 abbiamo bisogno di due parametri continui per individuare un punto P. Nel caso di E^2 si tratta delle normali coordinate cartesiane (ascissa e ordinata), nel caso di S^2 si tratta delle coordinate geografiche (longitudine e latitudine, che sono misure angolari). È importante osservare che la corrispondenza tra punti e coordinate, oltre ad essere biunivoca (eccettuando i poli), è, in entrambi i casi, bicontinua: se variamo di poco la posizione di P, cambieranno di poco le sue coordinate (e viceversa).
La superficie di una sfera è, come si è detto, un oggetto geometrico bidimensionale; e siamo abituati a concepirlo e a immaginarlo immerso nello spazio tridimensionale. La stessa definizione di superficie sferica come luogo di punti dello spazio che hanno la stessa distanza da un punto dato O (il centro della superficie sferica) richiede una terza dimensione. E tuttavia degli esseri bidimensionali che fossero confinati sulla superficie di una sfera potrebbero benissimo studiare la geometria di questo "mondo" bidimensionale, come abbiamo potuto vedere nella seconda sezione di questo capitolo. Inutile dire che un essere bidimensionale percepirebbe la superficie della sfera, cioè il suo mondo, in modo ben diverso da come lo percepiamo noi.
L'autore inglese E. A. Abbot, in un celebre libro del 1884, *Flatlandia*, descrive un mondo planare abitato da creature bidimensionali. Possiamo immaginarle come monete infinitamente sottili sulla superficie di un tavolo o come macchie di inchiostro su un foglio di carta. Gli abitanti di Flatlandia sono in realtà della figure geometriche; ecco come il Quadrato, protagonista del racconto, presenta il suo mondo:

"*Immaginate un vasto foglio di carta su cui delle Linee Rette, dei Triangoli, dei Quadrati, dei Pentagoni, degli Esagoni e altre figure geometriche, invece di restar ferme al loro posto, si muovano qua e là, liberamente, sulla superficie o dentro di essa, ma senza potersene sollevare e senza potervisi immergere, come delle ombre, insomma, consistenti, però, e dai contorni luminosi. Così facendo avrete un'idea abbastanza corretta del mio paese e dei miei compatrioti. Ahimè, ancora qualche anno fa avrei detto: "del mio universo", ma ora la mia mente si è aperta a una più alta visione delle cose.*".

Per avere un'idea del punto di vista intrinseco nello studio della geometria sferica basta pensare al punto di vista degli abitanti di Flatlandia, portati però sulla superficie di una sfera.
Gli enti geometrici su cui si basa la geometria nel piano euclideo sono punti e rette; quali sono gli enti corrispondenti sulla superficie di una sfera? Ai punti del piano corrispondono

naturalmente i punti di S^2. Ma cosa dobbiamo intendere per "linea retta" sulla superficie di una sfera?
Prima di rispondere a questa domanda è necessario fare alcune osservazioni (estrinseche) sulla geometria della sfera. Ricordiamo in primo luogo le definizioni di sfera e superficie sferica.

Definizione 8 (Sfera)**.** *Chiameremo* sfera *l'insieme dei punti dello spazio ordinario (euclideo) che hanno distanza minore o uguale a r da O (il centro della sfera).*

Definizione 9 (Superficie sferica)**.** *Chiameremo* superficie sferica *l'insieme dei punti che hanno distanza uguale a r da O.*

La sfera è un oggetto solido, tridimensionale, mentre la superficie sferica è un oggetto bidimensionale costruito nello spazio tridimensionale. Ogni piano che tagli una sfera determina per sezione un cerchio; i cerchi sezione hanno naturalmente raggi diversi: si va da una situazione limite di raggio nullo (il cerchio sezione degenera in un punto, il piano è tangente) alla situazione in cui il raggio è massimo ed è uguale al raggio della sfera. In quest'ultimo caso il piano che sega la sfera passa per il centro della sfera: diremo che la sezione è un *cerchio massimo* e sulla superficie sferica viene individuata una *circonferenza massima.*
Esaminiamo due semplici ma importanti proprietà delle circonferenze massime; è utile prima una definizione (estrinseca):

Definizione 10 (Punti antipodali)**.** *Due punti P e P' sulla superficie di una sfera si dicono* antipodali *(o* opposti*) se sono allineati con il centro O della sfera.*

In seguito le due proprietà:

Proposizione 1. *Per ogni punto P sulla superficie di una sfera passano infinite circonferenze massime.*

Proposizione 2. *Sulla superficie di una sfera, per ogni coppia P, Q di punti non antipodali passa una e una sola circonferenza massima.*

Le due proprietà si dimostrano facilmente. Per la prima osserveremo che per un punto P e il centro O passano infiniti piani (possono ruotare liberamente attorno all'asse PO): ciascuno di essi, passando per il centro O, stacca sulla superficie della sfera una circonferenza massima.
Per la seconda osserveremo che per tre punti non allineati P, Q ed O passa uno e un solo piano che, contenendo O, individua sulla superficie della sfera un'unica circonferenza massima (P, Q ed O non sono allineati perché, per ipotesi, P e Q non sono antipodali). E' chiaro invece che se i punti sono antipodali per essi passano infinite circonferenze massime. Qui si utilizza una proprietà euclidea dei piani: per tre punti non allineati dello spazio passa uno e un solo piano. Si tratta di una proprietà intuitivamente evidente che

in una trattazione formale verrebbe assunta come assioma.
Le dimostrazioni precedenti si fondano sulle proprietà dell'ordinario spazio euclideo. Dunque la costruzione del nostro modello di geometria non euclidea (la geometria sulla sfera) e lo studio delle sue proprietà si basa sulla geometria euclidea dello spazio ordinario: utilizziamo la geometria euclidea per costruire un modello non euclideo. La proprietà delle circonferenze massime ci fornisce un "indizio" molto forte su ciò che potrebbero essere, sulla superficie di una sfera, le linee "rette". Ragioneremo per analogia. Nel piano euclideo una retta è individuata in modo univoco da due punti ed è l'unica linea a godere di questa proprietà (ad esempio per individuare una circonferenza ci vogliono tre punti). Analogamente sulla superficie di una sfera una circonferenza massima è individuata in modo univoco da due punti purché non siano antipodali. Se si esclude il caso di punti antipodali, che potremmo assumere come una sorta di eccezione, per due punti passa una e una sola circonferenza massima. Possiamo allora assumere che le linee "rette" sulla superficie di una sfera siano le circonferenze massime.

Tutti sanno che il percorso più breve che collega due punti P e Q nel piano euclideo è un segmento di linea retta. Le rette sono dunque caratterizzate da una proprietà di "minimo":

Proposizione 3. *Comunque presi due punti P e Q su una retta r, il segmento PQ di r è il percorso più breve da P a Q tra tutti i percorsi possibili.*

Questa proprietà può essere efficacemente illustrata in questo modo. Se mettiamo in tensione un elastico tra due spilli, vediamo che l'elastico si dispone sul percorso minimo cioè su un segmento di linea retta. Se proviamo a spostare l'elastico e poi lo lasciamo andare, ci accorgiamo che dopo qualche oscillazione riassume lo stato di minima tensione.

Passiamo ora a considerare la superficie di una sfera. La nostra ipotesi è che le circonferenze massime abbiano lo stesso ruolo delle rette nel piano. Dovremmo allora verificare che esse ci forniscono il percorso più breve tra due punti di S^2. Procediamo sperimentalmente: prendiamo una palla di polistirolo, evidenziamo su di essa una circonferenza massima e fissiamo un elastico con degli spilli in modo che sia in leggera tensione tra due punti P e Q di tale circonferenza. Vedremo che l'elastico si dispone esattamente su un arco della circonferenza massima; e se proveremo ad allontanarlo da tale posizione, facendolo rimanere sulla superficie sferica, vedremo che, una volta lasciato libero, si ridisporrà sulla circonferenza massima. Possiamo allora concludere che l'arco minore PQ di circonferenza massima è il percorso più breve, sulla superficie sferica, tra i punti P e Q: la circonferenza massima corrisponde ad una linea geodetica della sfera, per riprendere una definizione del capitolo precedente. Sono qui necessarie due osservazioni:

- Dobbiamo precisare che si tratta dell'*arco minore*, infatti i due punti P e Q, che supponiamo non essere antipodali, staccano sulla circonferenza massima due archi, uno maggiore e l'altro minore: l'arco che a noi interessa è chiaramente l'arco minore.

- Se i punti P e Q fossero antipodali avremmo infiniti percorsi minimi (tutte le semicirconferenze massime per P e Q); qui compare una differenza con le rette euclidee. Se tuttavia ci limitiamo a considerare punti non antipodali il problema non si pone: il percorso minimo è unico ed è l'arco minore dell'unica circonferenza massima per P e Q.

Una volta determinato il percorso minimo tra due punti sulla superficie sferica è possibile introdurre una nozione intrinseca di distanza tra due punti:

Definizione 11 (Distanza tra due punti sulla sfera)**.** *La distanza tra due punti, P e Q, sulla sfera è la lunghezza dell'arco minore di circonferenza massima che collega P con Q; se i due punti fossero antipodali assumeremo come loro distanza la lunghezza di una semicirconferenza massima.*

Vale quindi la seguente proprietà delle circonferenze massime:

Proposizione 4. *Comunque presi due punti non antipodali P e Q su una circonferenza massima γ, l'arco minore PQ di γ è il percorso più breve da P a Q tra tutti quelli possibili sulla superficie della sfera.*

L'analogia tra le due proposizioni (3 e 4) è molto forte. Le linee rette del piano euclideo sono caratterizzate come "linee più brevi" così come lo sono le circonferenze massime di S^2. L'unica differenza consiste nella non unicità del percorso minimo quando si considerano, su S^2, punti antipodali. Che i punti antipodali costituiscano una situazione eccezionale lo possiamo capire anche riflettendo sul fatto che la distanza tra due punti qualsiasi P e Q di S^2, assumendo una sfera unitaria, è sempre minore o uguale a π

$$d(P, Q) \leq \pi$$

La distanza è uguale a π solo se i punti sono antipodali, quindi i punti antipodali sono i punti più lontani possibile.

È stato preparato il terreno per esaminare gli elementi fondamentali della geometria sulla sfera. I **punti** del nostro ambiente geometrico sono evidentemente i punti della superficie sferica. Chiameremo inoltre **retta** ogni linea geodetica cioè ogni circonferenza massima e **segmento** ogni arco di geodetica. È anche facile intendersi su cosa siano gli angoli e su come misurarli. Una creatura bidimensionale definirebbe gli angoli proprio come lo facciamo noi: due circonferenze massime individuano sulla sfera quattro regioni ciascuna delle quali è un **angolo** (*angolo sferico* o *fuso sferico*). Per misurare gli angoli potrebbe riferirsi all'angolo giro. Potrebbe ruotare su se stessa, rimanendo quindi nello stesso punto della superficie, e compiere un giro completo; poi potrebbe dividere tale rotazione in 360 parti. Questo è, chiaramente, il punto di vista intrinseco. Per comodità daremo anche una definizione estrinseca della misura di un angolo che conduce a valori identici a quelli intrinseci: la misura dell'angolo individuato da due segmenti con un estremo in comune è la misura dell'angolo (diedro) formato dai due piani che contengono le circonferenze massime su cui giacciono i segmenti. Nella *Tabella 1* un riassunto degli elementi di geometria della sfera, da un punto di vista intrinseco e da un punto di vista estrinseco.

Esaminiamo ora rapidamente le principali proprietà non euclidee della nostra geometria,

Punto	Punto della superficie sferica
Retta	Cerchio massimo della superficie sferica (si ottiene intersecando la superficie sferica con un qualsiasi piano passante per il centro della sfera)
Piano	Insieme di punti di una superficie sferica dello spazio euclideo
Appartenenza	Usuale appartenenza in senso euclideo
Punti antipodali	Punti diametralmente opposti della superficie sferica
Congruenza fra segmenti	Congruenza fra gli archi di cerchio massimo in geometria euclidea
Angolo tra due rette	Angolo diedro tra i due piani che tagliano la sfera secondo le due rette, oppure angolo che coincide con l'angolo delle due rette tangenti alla sfera nel punto di intersezione delle due rette e giacenti nei piani da esse individuati
Congruenza tra angoli	Congruenza tra angoli in senso euclideo

Table 1: Riassunto elementi di geometria della sfera, intrinseco (sx) ed estrinseco (dx)

assumendo d'ora in poi un raggio unitario per la sfera.

Proposizione 5. *Per due punti del piano euclideo passa una e una sola retta; lo stesso accade per due punti non antipodali di S^2, ma per due punti antipodali passano infinite rette.*

Proposizione 6. *Due rette euclidee hanno al più un punto in comune mentre due rette di S^2 hanno sempre due punti in comune.*

Proposizione 7. *Nel piano euclideo esistono rette parallele mentre non esistono rette parallele (cioè rette che non si intersechino) in S^2.*

Proposizione 8. *Nel piano euclideo esiste una e una sola retta passante per un dato punto P e perpendicolare a una data retta s; in S^2 ciò è vero se e solo se P non è un polo per s.*

Proposizione 9. *Le rette euclidee sono infinitamente estese mentre le rette di S^2 hanno tutte la stessa lunghezza finita 2π.*

Proposizione 10. *Il piano euclideo è infinitamente esteso mentre S^2 ha area finita 4π.*

Proposizione 11. *Di tre punti qualsiasi di una retta euclidea, uno e uno solo sta fra gli altri due; la stessa cosa non si può dire per una retta di S^2 trattandosi di una linea chiusa.*

La geometria di S^2 è una geometria ellittica (di Riemann[25]), nata dalla negazione del V postulato di Euclide:

Assioma (Assioma ellittico o di Riemann)**.** *Tutte le rette passanti per un punto che giace al di fuori di una retta data incontrano tale retta (quindi due rette si intersecano sempre, non esistono rette parallele).*

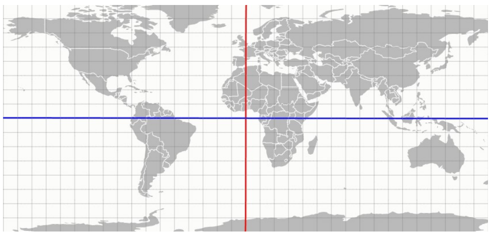
In questo modello abbiamo interpretato come piano la superficie della sfera, come punto un punto della superficie sferica e come retta una circonferenza massima. È importante osservare che nella geometria su S^2 non solo viene a cadere il quinto postulato ma cade anche l'assunzione di Euclide che per due punti distinti passi un'unica retta. Inoltre deve essere modificato il postulato $P2$, cioè che un segmento di linea retta possa essere indefinitamente prolungato in linea retta. Da questo postulato Euclide faceva discendere l'infinita lunghezza di una retta. Ogni segmento di S^2 può effettivamente essere prolungato in una retta, ma le rette di S^2 sono linee chiuse per cui un punto P può muoversi indefinitamente su di esse ma è destinato a riassumere le stesse posizioni.

In conclusione, attraverso queste tre sezioni, si sono evidenziati, in maniera elementare, i principali risultati di geometria sferica e nozioni di geometria differenziale utili al nostro scopo: descrivere le proiezioni dalla sfera, assunta come modello della Terra, al piano. Particolare enfasi è stata data al fatto che non è possibile "trasferire" in maniera fedele una porzione della sfera sul piano, senza che siano presenti deformazioni nella forma o nell'area. Un importante strumento per esplorare le deformazioni dovute a questo "trasferimento" sarà *l'indicatrice di Tissot* che introdurremo nella prossima sezione.

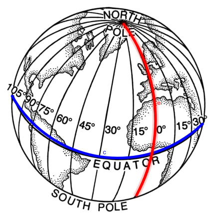
[25]Georg Friedrich Bernhard Riemann, nato a Breselenz il 17 settembre 1826 e deceduto a Selasca il 20 luglio 1866, è stato un matematico, fisico e accademico tedesco. Tra i suoi lavori in campo matematico si ricordano quelli legati alla geometria, della quale rivoluzionò l'approccio allo studio (superfici di Riemann, sfera di Riemann, tensore di Riemann), quelli relativi all'analisi, anche complessa (integrale di Riemann, Funzione zeta di Riemann) e quelli sui numeri primi.

2.4 Proiezioni

Le mappe[26] sono delle rappresentazioni grafiche del globo tridimensionale sul piano bidimensionale. Durante la nostra esperienza scolastica, e non solo, ci siamo imbattuti più volte in carte geografiche molto diverse tra loro. Come mai esistono così tanti tipi di mappe? Perché ciascuna di esse sceglie un metodo differente di rappresentare la Terra, ovvero sceglie una diversa proiezione. La mappa non potrà mai essere una rappresentazione fedele del globo terrestre, sostanzialmente per i motivi già enunciati nelle precedenti sezioni, e per questo sarà soggetta a deformazioni, diverse a seconda della proiezione considerata. Chiaramente, le proiezioni cartografiche che più si avvicinano alla realtà sono quelle riportate su di un globo (o mappamondo), che rappresenta con sufficiente corrispondenza il geoide terrestre; ogni altra rappresentazione è approssimata perché una superficie sferica non può essere sviluppata su un piano.
È noto che per localizzare un punto sulla superficie terrestre è sufficiente fissare due coordinate: latitudine e longitudine, che corrispondono a due angoli ideali misurati dal centro della Terra. Il reticolato che solitamente è rappresentato sul globo è costituito dai paralleli e dai meridiani: i paralleli sono linee di punti di latitudine fissata e i meridiani sono linee di punti di longitudine fissata. Per ottenere una proiezione cartografica è sufficiente utilizzare queste due coordinate geografiche, che denoteremo con λ (longitudine in radianti) e ϕ (latitudine in radianti), trasformate opportunamente a seconda della proiezione che si vuole ottenere, come coordinate cartesiane del piano, x coordinata orizzontale e y coordinata verticale.



(a)



(b)

Figure 21

Nell'esempio (*Figure 21*), consideriamo due assi, verticale e orizzontale: l'asse orizzontale corrisponde alla latitudine 0 (l'Equatore) e l'asse verticale corrisponde alla longitudine 0 (il Meridiano di Greenwich). Operando in questo modo otteniamo una griglia perfettamente regolare di paralleli e meridiani a distanza costante, ove ogni quadrato di questa carta rappresenta 10° di longitudine per 10° di latitudine. Tuttavia, nella realtà,

[26] *Nota*: le immagini realizzate in questo capitolo sono state possibili grazie al software grafico https://imaginary.org/program/mappae-mundi realizzato da Daniel Ramos, geometra differenziale e vincitore del primo premio del concorso *Mathematics of the Planet Earth 2013* (MPE2013).

i meridiani non sono affatto paralleli, essi convergono al polo nord e al polo sud, quindi questa mappa ha distorto la realtà.
La deformazione di una mappa è una grandezza complessa e che non può essere descritta attraverso un singolo valore. Diamo in seguito la definizione di alcuni tipi di deformazione:

Definizione 12 (Modulo di deformazione lineare)**.** *Il* modulo di deformazione lineare*, m, consiste nel rapporto fra l'elemento infinitesimo di curva sul piano della rappresentazione, ds_r, e il corrispondente elemento sulla superficie oggettiva (ellissoide), ds_e.*

$$m = \frac{ds_r}{ds_e}$$

Definizione 13 (Modulo di deformazione superficiale)**.** *Il* modulo di deformazione superficiale*, M, consiste nel rapporto fra un'area infinitesima sul piano della rappresentazione, dS_r, e il corrispondente elemento areale sulla superficie oggettiva, dS_e.*

$$M = \frac{dS_r}{dS_e}$$

Definizione 14 (Deformazione angolare)**.** *La* deformazione angolare*, δ, consiste nella differenza fra l'angolo sul piano della rappresentazione, $d\alpha_r$, e l'angolo sulla superficie oggettiva (misurato tra un meridiano e un arco di geodetica), $d\alpha_e$.*

$$\delta = \frac{d\alpha_r}{d\alpha_e}$$

Si possono costruire proiezioni che permettano di ridurre al minimo le deformazioni rispetto alla reale superficie terrestre rappresentata e che consentano di mantenere inalterate le caratteristiche almeno di punti e luoghi essenziali in rapporto allo scopo cui la carta deve rispondere. Data l'impossibilità di mantenere inalterati contemporaneamente gli angoli, le aree e le distanze reali si deve scegliere quale delle tre grandezze debba essere conservata: si mantiene la corrispondenza degli angoli quando sia necessario conservare la forma delle coste e gli angoli di rotta, come nelle carte nautiche; in tal caso le proiezioni si dicono **conformi** o **isogoniche**. Si mantengono inalterate le aree quando si vogliano rappresentare fenomeni geografici e in tal caso le proiezioni si dicono **equivalenti** o **omolografiche**. Si mantengono inalterate le distanze nelle carte stradali e simili, e in questo caso le proiezioni si dicono **equidistanti**. In particolare, a seconda delle proprietà che vanno a conservare, è possibile caratterizzare le tipologie di mappe attraverso i valori delle loro deformazioni (angolare, superficiale e lineare):

- **Rappresentazione conforme** (o **isogona**): ha deformazione angolare nulla e preservano la forma degli oggetti ($m \neq 1$ e $M \neq 1$);

- **Rappresentazione equivalente**: il modulo di deformazione superficiale è pari a 1 perché le aree vengono preservate dopo la trasformazione ($m \neq 1$ e $\delta \neq 0$);

- **Rappresentazione equidistante**: deformazione lineare pari a 1 come rapporto tra le distanze di ogni punto da uno o due punti fissi ($M \neq 1$ e $\delta \neq 0$).

Nonostante l'impossibilità di descrivere la deformazione di una mappa attraverso un semplice valore, il matematico e cartografo francese Nicolas Auguste Tissot[27] inventò nel 1859 uno strumento grafico per misurarla e, sopratutto, visualizzarla. Immaginiamo un piccolo cerchio (detto *oggettivo*) posto attorno ad un punto della Terra. Proiettando quest'infinitesimo cerchio sulla mappa, esso, a causa della distorsione, non apparirà sempre come un cerchio, ma in genere come un'ellisse (detta *soggettiva*). Quest'ultima è quindi una rappresentazione del cerchio sulla mappa. Quest'ellisse è chiamata *indicatrice di Tissot* (o *ellisse di Tissot*). L'ellisse di Tissot è un metodo grafico per mostrare come vengono deformate lunghezze, angoli e aree, e le sue proprietà come, ad esempio, direzione assiale, eccentricità e area, esplicitano graficamente le deformazioni possibili: lineare, superficiale e angolare. In particolare:

- Rappresentazione conforme: il cerchio oggettivo viene trasformato in un cerchio soggettivo di diversa area (in *Figure 22* il cerchio rosso sta ad indicare che l'area non è conservata, quando è verde viene conservata);

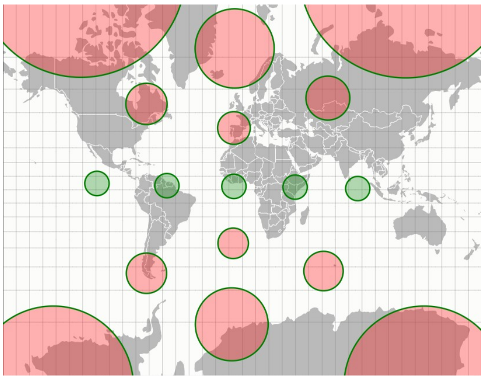


Figure 22: Indicatrice di Tissot in vari punti, **mappa conforme**

- Rappresentazione equivalente: il cerchio oggettivo viene trasformato in un'ellisse soggettiva di uguale area (in *Figure 23* l'ellisse verde sta ad indicare che l'area è conservata).

[27]Nicolas Auguste Tissot, nato il 16 marzo del 1824 e deceduto il 14 luglio 1907, fu un cartografo francese che, nel 1859 e nel 1881, pubblicò un'analisi delle distorsioni presenti nelle proiezioni cartografiche.

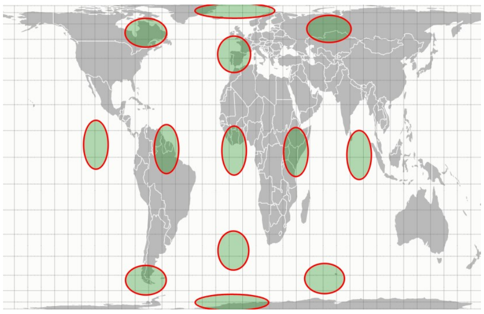


Figure 23: Indicatrice di Tissot in vari punti, **mappa equivalente**

- Rappresentazione equidistante: il cerchio oggettivo viene trasformato in ellisse, la quale, lungo i meridiani (punto fisso: Nord), mantiene l'asse minore di uguale lunghezza, ovvero lungo i meridiani la deformazione lineare è pari a 1 (*Figure 24*).

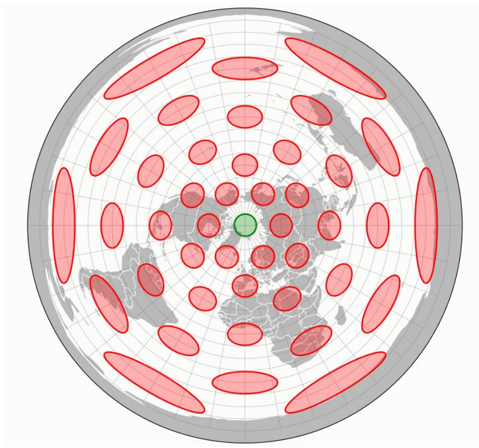


Figure 24: Indicatrice di Tissot in vari punti, **mappa equidistante (azimutale)**

Non solo l'indicatrice di Tissot rende visualizzabile la deformazione della mappa ma permette anche di praticare calcoli su di essa, in particolare per quanto riguarda le distanze e le aree. Immaginiamo di voler fare un viaggio da Venezia a Los Angeles. Chiaramente l'aereo seguirà la rotta più breve tra le due destinazioni, ovvero una linea ortodromia. Quanto misura questa rotta? Ebbene, poiché le ellissi di Tissot rappresentano cerchi uguali (nel nostro caso cerchi di raggio 1000 km), possiamo rappresentare qualche indicatrice sulla linea che rappresenta la rotta e sarà sufficiente contare (vedi *Figure 24*). Nell'immagine *25* è stata inserita anche la rotta lossodromia, per mettere a confronto le due rotte: la rotta ortodromia (circa $4,5$ ellissi, ovvero 9000 km) risulta più breve della rotta lossodromia (circa $5,5$ ellissi, ovvero 11000 km).

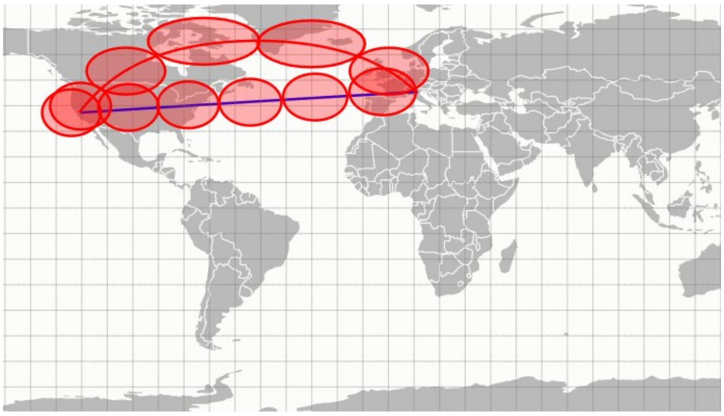
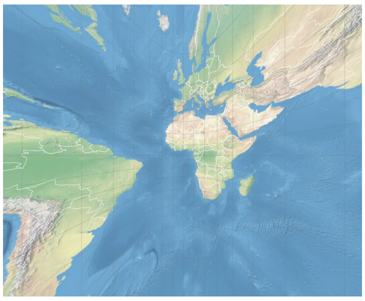


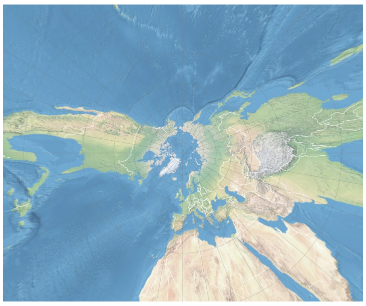
Figure 25: Rotta ortodromia e rotta lossodromia a confronto

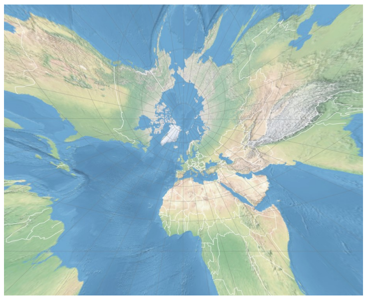
Tenendo conto delle proiezioni cartografiche più usate, si possono avere proiezioni puramente geometriche, dette **azimutali** o **prospettiche semplici**, o **zenitali** che si ottengono proiettando la zona da rappresentare su di un piano tangente la zona stessa, partendo da un punto di vista che può essere posto nel centro del globo terrestre (proiezione gnomonica), alla estremità del diametro tracciato ortogonalmente al centro del piano (proiezione stereografica), in un punto posto all'infinito rispetto alla congiungente il centro del globo e l'estremo del diametro precedente (proiezione ortografica), in un punto esterno rispetto al diametro precedente (proiezione scenografica). Dalle diverse combinazioni di questi tipi, si possono ottenere 12 proiezioni prospettiche semplici e un certo numero di proiezioni prospettiche più complesse; nelle prime si ottiene un'approssimazione relativa di tutte e tre le grandezze (angoli, aree, distanze); nelle seconde si può mantenere inalterata una delle tre grandezze fondamentali (per esempio, le proiezioni zenitali possono essere equivalenti o equidistanti). Altre proiezioni geografiche permettono di mantenere rigorosamente esatte o l'equivalenza o l'equidistanza e contemporaneamente di conoscere gli effettivi scostamenti dai valori delle altre due grandezze: tali sono le **proiezioni di sviluppo**, suddivise in cilindriche, coniche, pseudocilindriche, pseudoconiche; esse si ottengono sviluppando la superficie di un cilindro o di un cono considerati tangenti al globo terrestre e sul quale sono stati proiettati tutti i punti della zona che si vuole rappresentare. Sostanzialmente si possono individuare tre grandi famiglie di proiezioni e che analizzeremo in seguito: le proiezioni azimutali, le proiezioni cilindriche (proiezioni di sviluppo) e le proiezioni coniche (proiezioni di sviluppo).

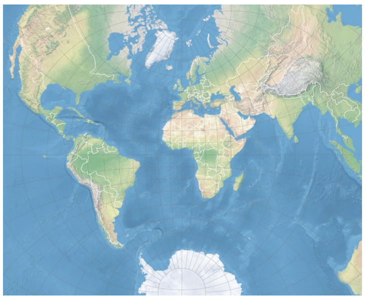
2.4.1 Proiezioni Azimutali

Le proiezioni azimutali (anche dette semplici o piane) sono realizzate proiettando la superficie terrestre su un piano tangente la sfera; le differenti posizioni del piano tangente

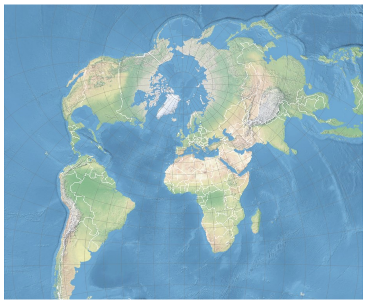

Gnomonica equatoriale

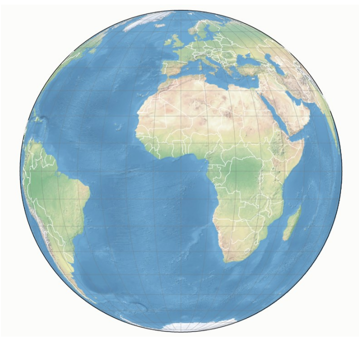

Gnomonica polare (N)

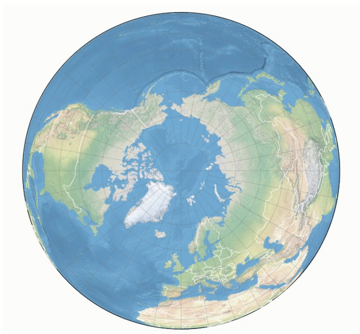

Gnomonica obliqua

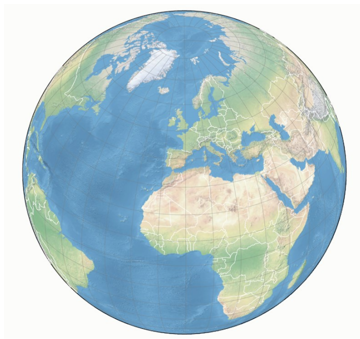

Stereografica equatoriale


Stereografica polare (N)


Stereografica obliqua


Ortografica equatoriale


Ortografica polare (N)


Ortografica obliqua

determinano variazioni di *scala*[28]. Sono dette azimutali, in quanto, in tali proiezioni, si mantengono inalterati gli angoli di direzione (*azimuth*) rispetto al punto centrale della proiezione, ovvero il punto in cui giace il piano di proiezione; in altre parole tutti i circoli massimi uscenti dal centro della proiezione sono rette.

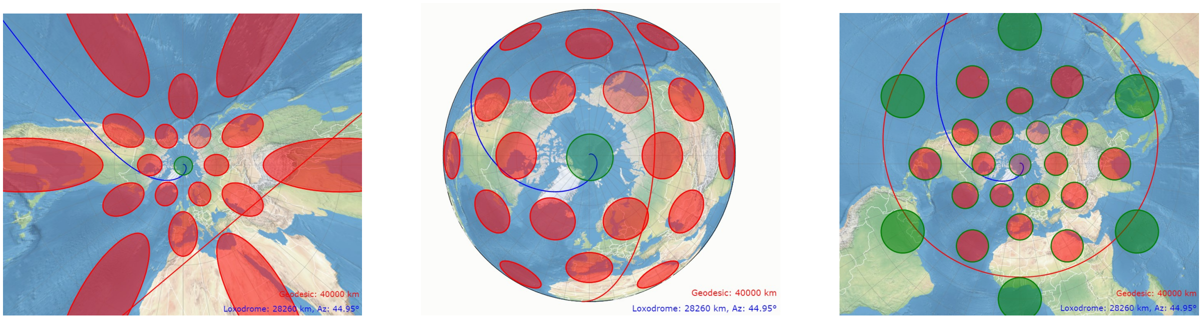
Le proiezioni azimutali prospettiche si classificano in base a:

- Posizione della sorgente luminosa (cioè il punto di vista) rispetto alla Terra: gnomonica (centro), stereografica (antipodi punto di tangenza) o ortografica (infinito);

[28]La *scala* di una carta geografica esprime il rapporto tra le dimensioni della rappresentazione sulla carta e quelle della realtà sulla superficie terrestre.

- Orientamento della superficie di proiezione rispetto alla Terra: polare o diretta (piano tangente al polo), equatoriale o trasversa (tangente all'equatore) oppure obliqua.

In seguito, si evidenzieranno le deformazioni prodotte, attraverso l'indicatrice di Tissot, che caratterizzano ciascuna delle proiezioni sopracitate (*Figure 29*):



(a) Gnomonica (b) Ortografica (c) Stereografica

Figure 29: Proiezioni polari con indicatrici di Tissot, linee ortodromie e lossodromie

- La **proiezione gnomonica** è caratterizzata dall'aumentare delle lunghezze e delle aree allontanandosi dal centro della proiezione con forti deformazioni. Caratteristica unica di questa carta è la seguente: tutti i cammini più brevi tra due punti, ovvero le rotte ortodromie, sono rappresentati da linee dritte. Se vogliamo dunque una mappa i cui il cammino più breve tra due punti sia una linea retta, è necessario deformare la carta in questo modo. Inoltre le geodetiche, in questa mappa, sono linee dritte ma non uniformi: se disegniamo delle ellissi di Tissot lungo la rotta ortodromia, si osserva che distanze uguali nella realtà sono rappresentate da segmenti di differente lunghezza sulla carta. Nondimeno si comprende l'utilità dell'impiego di tale proiezione nella aeronautica, in quanto le rotte più brevi, tipicamente seguite dagli aeromobili, sono rappresentate da linee rette. Le equazioni che descrivono le coordinate cartesiane, date le coordinate geografiche, sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = R\cot(\phi)\sin(\lambda) \\ y = -R\cot(\phi)\cos(\lambda) \end{cases} \tag{2}$$

  ove R è il raggio terrestre e $\phi > 0$.

- La **proiezione ortografica** è caratterizzata dal diminuire delle lunghezze e delle aree allontanandosi dal centro della proiezione e da una compressione nelle parti più lontane dal centro della proiezione (nella ortografica polare è evidente l'addensarsi dei paralleli in prossimità dell'equatore). Essa assomiglia ad un disegno 3D della

Terra ed è ottenuta, come la proiezione stereografica e gnomonica, come proiezione della superficie del globo a partire da una sorgente luminosa i cui raggi sono perpendicolari al piano di proiezione. Le forti deformazioni di scala e forme verso la periferia la rendono poco utile per la maggior parte degli usi. Le coordinate cartesiane della proiezione ortografica, note longitudine e latitudine, sono ottenibili come segue:

$$\begin{cases} x = R\cos(\phi)\sin(\lambda) \\ y = R\cos(\phi)\cos(\lambda) \end{cases} \tag{3}$$

ove R è il raggio terrestre e $\phi \geq 0$.

- La **proiezione stereografica** presenta una caratteristica unica: ogni cerchio sul globo è rappresentato da un cerchio anche nella proiezione. Tutti i meridiani, i paralleli e le geodetiche sono rappresentati da archi di cerchio (tranne che nella stereografica polare dove i meridiani sono rette uscenti dal polo). Nella proiezione stereografica meridiani e paralleli si intersecano ad angolo retto: la proiezione è pertanto conforme. Infatti, disegnando qualche ellisse di Tissot sulla carta, si osserva come queste siano cerchi, come nella carta di Mercatore (che tratteremo nello specifico in seguito). Contrariamente a quest'ultima, nella mappa ottenuta attraverso la proiezione stereografica, le rotte lossodromie non sono rappresentate da linee rette: se è polare, le linee lossodromie sono rappresentate da spirali logaritmiche, ove quindi la distanza dal centro aumenta esponenzialmente al variare dell'angolo di rotazione. La proiezione stereografica polare è utilizzata per la rappresentazione delle zone polari (*U.P.S. Universal Polar Stereographic*).

$$\begin{cases} x = 2R\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})\sin(\lambda) \\ y = -2R\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})\cos(\lambda) \end{cases} \tag{4}$$

ove R è il raggio terrestre e $\phi \neq \frac{\pi}{2}$.

2.4.2 Proiezioni Coniche

Le proiezioni coniche si ottengono circoscrivendo un cono alla sfera, tangente o secante, e proiettando su di esso ogni punto a partire dal centro della Terra. In generale, le deformazioni tendono ad aumentare allontanandosi dalla linea di tangenza o dalla zona compresa tra le due linee di secanza. Sono usate quasi esclusivamente nella versione diretta o polare, cioè con l'asse del cono coincidente con l'asse terrestre. Per le considerazioni esposte, questo tipo di mappe si adattano particolarmente alla rappresentazione di zone poste alle medie latitudini. Nelle proiezioni coniche polari, i meridiani sono rappresentati da linee rette uscenti dal polo, i paralleli sono cerchi concentrici intorno al polo. In genere, le variazioni riguardano la scelta dei paralleli di tangenza o secanza e la spaziatura fra i paralleli. Le proiezioni coniche si prestano bene a rappresentare porzioni della superficie terrestre perché mettono bene in evidenza, scegliendo opportunamente il meridiano centrale della carta, i particolari della zona che si vuole rappresentare. Vediamo alcune delle proiezioni coniche più comuni:

- La **proiezione conica vera**: la più semplice proiezione conica ed è costruita ponendo tangente al meridiano centrale della zona un cono retto; ne risulta che il meridiano centrale è rettilineo, gli altri meridiani convergono al vertice del cono con angoli uguali tra loro. Il parallelo centrale mantiene la sua lunghezza vera e, come tutti gli altri paralleli, è rappresentato da un arco di circonferenza; ogni parallelo risulta più corto e più curvo a mano a mano che ci si avvicina al polo, rappresentato esso pure da un arco; le maglie del reticolo diventano pertanto trapezi a basi più o meno curve a seconda della scala della mappa;

- La **proiezione conica di Lambert**[29]: proiezione conica in cui i paralleli sono rappresentati come circonferenze concentriche e i meridiani come semirette uscenti dal centro comune. In tale proiezione, il cono su cui si immagina di proiettare una determinata porzione della superficie terrestre ha l'asse coincidente con quello della rotazione del globo ed è tangente lungo un parallelo o secante lungo due paralleli. La superficie della carta viene definita entro un settore circolare, il cui angolo al vertice dipende dall'angolo di apertura del cono. Nella **proiezione conforme di Lambert**, utilizzata nella definizione di rotte, si scelgono due paralleli di riferimento che intersecano il cono lungo i quali non si ha distorsione, così assumendo la caratteristica di proiezione conforme; la distorsione diviene invece sensibile quando ci si allontana da essi;

- La **proiezione pseudoconica di Bonne**[30]: proiezione pseudoconica equivalente ottenuta con un cono tangente; i paralleli sono archi di cerchio con lunghezza proporzionale a quella vera e i meridiani sono curve ottenute facendoli passare per punti tra cui esista, lungo ciascun parallelo, una distanza proporzionale a quella vera.

2.4.3 Proiezioni Cilindriche

Le proiezioni cilindriche si ottengono circoscrivendo un cilindro alla sfera, tangente o secante, e proiettando su di esso ogni punto a partire dal centro della Terra. Le proiezioni cilindriche sono molto utilizzate sia con cilindro con asse coincidente con l'asse terrestre, e quindi con tangenza lungo l'equatore (*cilindriche dirette*), sia con cilindro orientato

[29] Johann Heinrich Lambert, in francese Jean-Henri Lambert, nato a Mulhouse il 26 agosto 1728 e deceduto a Berlino il 25 settembre 1777, è stato un filosofo, matematico, fisico e astronomo svizzero contemporaneo di Eulero. Fu un pioniere della geometria non euclidea.

[30] Rigobert Bonne, nato il 6 Ottobre del 1727 e deceduto il 2 Settembre del 1794, fu un cartografo francese, ampiamente considerato come uno dei più importanti cartografi del XVIII secolo.

perpendicolarmente all'asse terrestre, e quindi con tangenza lungo un meridiano (*cilindriche trasverse*). Nelle proiezioni cilindriche, di cui tratteremo solo le dirette (*Figure

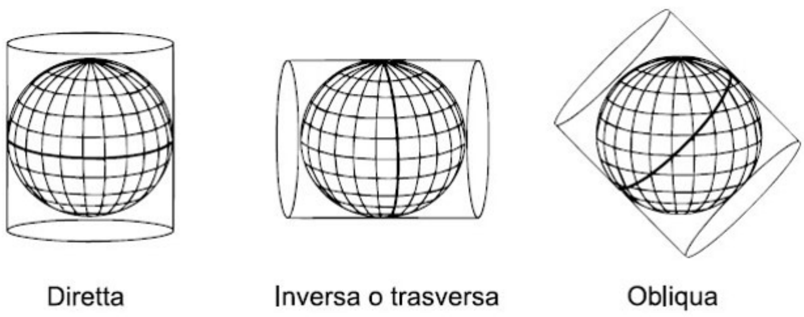


Figure 30: Proiezioni cilindriche a seconda della posizione della superficie di sviluppo

30), meridiani e paralleli si intersecano ad angolo retto determinando un reticolato rettangolare. Lungo la linea equatoriale sono rispettati i rapporti di equidistanza, mentre il polo è rappresentato da una retta. Le variazioni tra le varie proiezioni riguardano la diversa spaziatura dei paralleli:

- La **proiezione cilindrica vera** (o **Plate-Carré**): sono costruite solo per via geometrica e i paralleli tendono ad infittirsi avvicinandosi ai poli, mentre i meridiani sono spaziati in maniera costante, con conseguente progressiva esagerazione delle distanze e delle forme in senso est-ovest. La proiezione cilindrica semplice è equidistante (conserva la scala) lungo tutti i meridiani, che sono spaziati in modo uguale ai paralleli formando un reticolo a maglie quadrate. Dalla *Figure 31* si evince che il cilindro tangente alla superficie terrestre è collocato all'Equatore, in quanto area, angoli e distanze sono conservati; in altre parole, il cerchio oggettivo infinitesimale lungo i punti dell'Equatore viene trasformato in un cerchio soggettivo uguale. In seguito la trasformazione delle coordinate geografiche in coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x &= R\lambda \\ y &= R\phi \end{cases} \tag{5}$$

  ove R è il raggio terrestre.

- La **proiezione cilindrica centrale**: i paralleli tendono a distanziarsi maggiormente procedendo verso i poli, con conseguente esagerazione delle distanze e delle forme in senso nord-sud;

- La **proiezione di Mercatore** (o **cilindrica conforme**): la distanza tra paralleli è calcolata matematicamente in modo da produrre una distorsione in senso nord-sud in grado di compensare la distorsione est-ovest. Questa mappa, oltre ad essere cilindrica, quindi prodotta secondo il metodo esposto sopra, è anche conforme. Questo

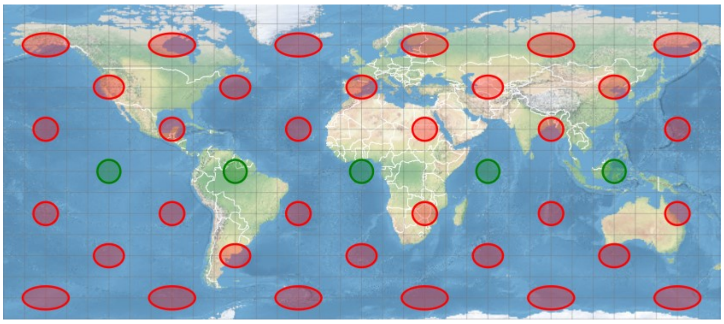


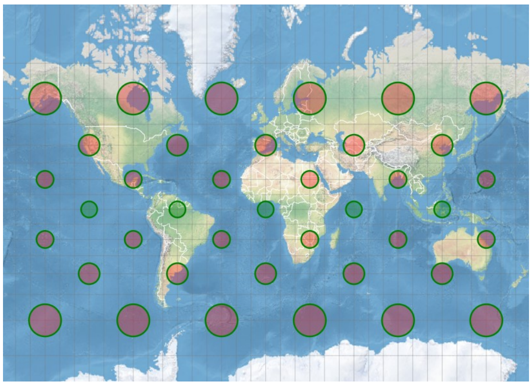
Figure 31: Mappa Plate-Carré con indicatrici di Tissot

la rende una mappa adatta alla navigazione, in quanto mantiene gli angoli costanti (deformazione angolare nulla). Il più grande difetto della mappa di Mercatore è costituito dalla elevata deformazione delle aree. Infatti, guardando la *Figure 32*, ci si rende subito conto di questo difetto. Si prenda, ad esempio, la Groenlandia e l'Africa. Osservando la carta, le due sembrerebbero avere la stessa estensione; tuttavia, incollando delle indicatrici di Tissot alle due figure, si evince che le due abbiano dimensioni differenti: per ricoprire la superficie della Groenlandia è sufficiente un cerchio (soggettivo), che rappresenta un cerchio oggettivo di raggio *1000 km*, mentre per ricoprire l'Africa ne sono necessari circa 10. Attraverso questo esempio comprendiamo anche l'importanza dell'indicatrice di Tissot come strumento di misura non solo di distanze, ma anche di aree. Vediamo in seguito la trasformazione delle coordinate geografiche in coordinate cartesiane della proiezione di Mercatore, e che verranno approfondite al capitolo 3 sezione 3.5:

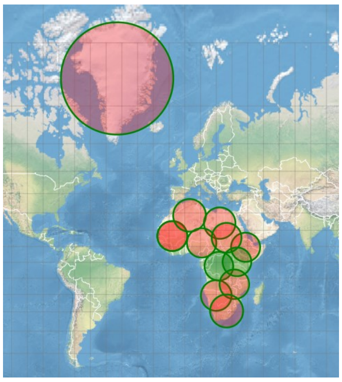
$$\begin{cases} x = R\lambda \\ y = R\ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})) \end{cases} \tag{6}$$

ove R è il raggio terrestre.

- La **proiezione pseudocilindrica di Mollweide**: è una proiezione che rappresenta la Terra su un'ellisse in cui la larghezza è doppia rispetto l'altezza e, se controlliamo le ellissi di Tissot, notiamo che esse hanno tutte la stessa area (dalla *Figure 32* sono tutte verdi), in quanto questa mappa conserva le aree. In questa mappa, il polo nord e il polo sud corrispondono a due punti, non più su tutto il bordo superiore e inferiore della mappa. Operando in questo modo abbiamo ridotto la distorsione attorno ai poli. Tuttavia, in questa proiezione, i meridiani non appaiono più come linee rette, dunque, questa carta non costituisce un buon riferimento per la navigazione. Essa può però essere utilizzata per rappresentare statistiche o dati geopolitici a livello mondiale. Il risultato delle coordinate cartesiane di questa proiezione è più complesso da ricercare e, in genere, si fa ricorso a



(a) Mappa di Mercatore con indicatrici di Tissot



(b) Confronto dimensioni

Figure 32

metodi numerici per la risoluzione di equazioni non lineari. Anzitutto va cercato

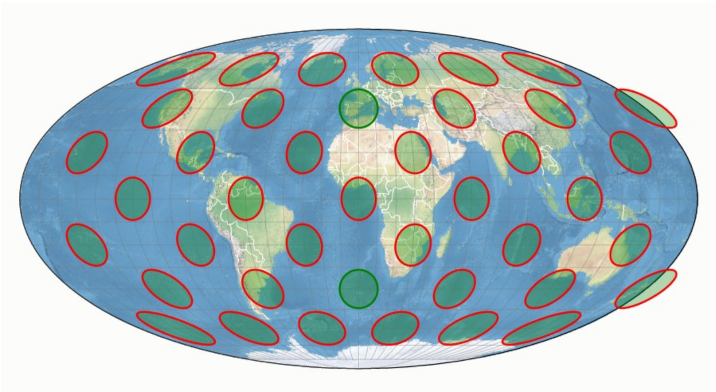


Figure 33: Mappa di Mollweide con indicatrici di Tissot

Φ per ogni ϕ tale che

$$2\Phi + \sin(2\Phi) = \pi \sin(\phi) \tag{7}$$

attraverso il metodo iterativo di Newton-Raphson con $\frac{\phi}{2}$ come iterato iniziale. Successivamente, trovato Φ, abbiamo la definizione delle coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\pi} 2\sqrt{2} R\lambda \cos(\Phi) \\ y = \sqrt{2} R \sin(\Phi) \end{cases} \tag{8}$$

ove R è il raggio terrestre e Φ è la soluzione di (7).

In questa sezione abbiamo visto una moltitudine di opzioni per disegnare mappe, tutte con degli inconvenienti ma anche alcuni vantaggi. Una proiezione è preferibile rispetto ad un'altra a seconda dell'aspetto che vogliamo privilegiare: la conservazione delle aree, delle distanze o delle direzioni. Nel prossimo capitolo vedremo applicate le moderne definizioni enunciate in questo capitolo a mappe rinascimentali, così da comprenderne gli aspetti geometrici e le intenzioni pratiche.

3 Proiezioni cartografiche rinascimentali

Quando parliamo di "mappe del mondo", è importante distinguere tra mappa del mondo conosciuto al tempo in cui la mappa fu realizzata e mappa del mondo intero di 360° di longitudine e 180° di latitudine. Durante il Rinascimento l'immagine del mondo conosciuto è lentamente cambiata e le mappe del mondo hanno dovuto accogliere tali novità modificando i propri metodi di rappresentazione; prima del Rinascimento, i cartografi dovevano solamente rappresentare un emisfero, quello dell'*oikoumene*. Dopo le esplorazioni, dovettero acquisire prima la nuova identità dell'emisfero australe, luogo ignoto, secondo la visione tradizionale tolemaica, oltre la zona torrida equatoriale, che si sviluppò grazie ai navigatori portoghesi durante il XV secolo, e poi l'emisfero occidentale, che acquisì il nome di Nuovo Mondo o America e divenne noto durante il XVI secolo. Una

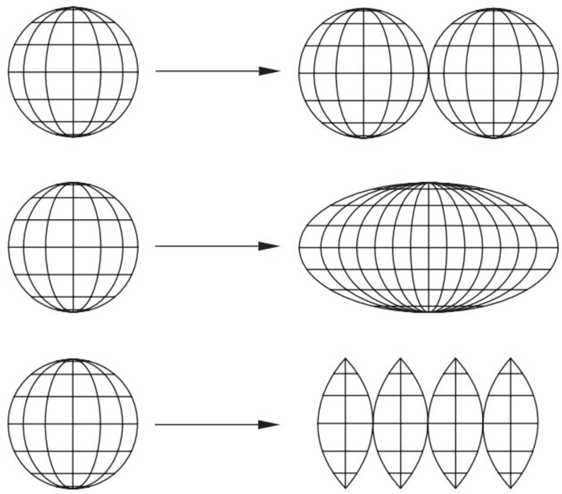


Figure 34: Tre modi per rappresentare il globo

mappa, come abbiamo già accennato nei precedenti capitoli, può essere estesa in tre modi principali (*Figure 34*): raddoppiando la tradizionale rappresentazione circolare di un emi sfero; proiettando geometricamente la superficie terrestre su un piano; o suddividendo il mondo in un numero di pezzi (lobi) i quali, ricomposti, vanno a formare il globo.

In questo capitolo verranno presentate mappe rinascimentali rappresentative di ciascuna categoria (mappe a due emisferi, mappe rappresentanti l'intero globo, mappe a lobi), arricchite dalle moderne definizioni di proiezioni trattate nel precedente capitolo. Purtroppo, la descrizione di alcune mappe sarà breve e poco approfondita: il motivo risiede sostanzialmente nelle scarse informazioni a noi pervenute circa i metodi di realizzazione e le motivazioni degli autori. È inoltre da evidenziare la mancanza di una classificazione rigorosa e organica delle mappe rinascimentali, che ha reso difficile dotare di quest'ultimo capitolo dell'auspicato arricchimento in termini di immagini e descrizioni.

Va peraltro osservato che quello che ho cercato di fare in questo capitolo è, coerentemente a quanto appena sottolineato, un piccolo contributo allo studio delle cartografie rinascimentali. Il capitolo comincerà con la descrizione grafica, e non solo, di una mappa, la mappa di Waldseemüller, in quanto credo costituisca un vero e proprio manifesto della cartografia rinascimentale: ingloba l'arte della *renovatio* e della stampa nonché rappresenta le nuove scoperte geografiche, onorando uno dei suoi scopritori, Amerigo Vespucci.

3.1 Mappa di Waldseemüller, 1507

Rispetto alla proiezione di Tolomeo, che raffigurava solo una porzione del globo terrestre, quella allora conosciuta, la mappa di Waldseemüller (*Figure 35*) mostra l'intera superficie terrestre, ad esclusione della calotta australe al di sotto del 44° parallelo. L'*ecumene* tolemaica è rappresentata al centro della mappa in base al secondo metodo cartografico di Tolomeo, che fornisce gli elementi geometrici necessari all'estensione del disegno. Dal punto di vista geometrico, infatti, il planisfero di Waldseemüller è un'estensione del secondo metodo cartografico di Tolomeo. Oltre i confini del mondo antico, si trovano le regioni dell'Asia descritte da Marco Polo e il Nuovo Mondo descritto da Amerigo Vespucci. Il mondo di Tolomeo e quello di Vespucci sono illustrati separatamente nei due piccoli emisferi disegnati nella parte alta del foglio, accanto ai ritratti dei due cosmografi. L'emisfero tolemaico coincide con la parte centrale della mappa, mentre l'emisfero di Vespucci è raffigurato per metà a sinistra e per metà a destra. Il raccordo superiore illustra le terre a nord del parallelo per Thule, fino al polo artico.

Figure 35

3.1.1 Come si costruisce?

Per il video della costruzione si rimanda il lettore al seguente link:
https://mostre.museogalileo.it/waldseemuller/iwal.php?c%5B%5D=56228
Per disegnare la sua mappa del mondo, che a differenza delle mappe tolemaiche comprendeva l'intera superficie del globo, Waldseemüller elaborò un'estensione geometrica del secondo metodo cartografico di Tolomeo, proseguendo sulla strada indicata pochi anni prima da Enrico Martello (seconda metà XV secolo), più noto come Henricus Martellus Germanus. L'estensione geometrica era suggerita dalla mappa stessa di Tolomeo, dove il prolungamento degli archi di meridiano indicava una possibile configurazione della rappresentazione cartografica a nord e a sud dei limiti dell'*ecumene*. Seguendo presumibilmente questa traccia, Waldseemüller segnò sull'asse centrale le latitudini dell'Equatore, del polo nord, del circolo polare artico e dell'ultimo parallelo scelto come limite meridionale, 40° sotto l'Equatore. Poi stabilì un centro di curvatura a 90 unità dal polo nord, poco oltre quello adottato da Tolomeo, e tracciò i principali archi paralleli. Per riportare gli intervalli variabili di 10° lungo i paralleli si servì della rappresentazione a fusi utilizzata per costruire il globo in forma solida (*Figure 12*). Servendosi di un compasso di riduzione in rapporto di 1 a 8 - questo è il rapporto di grandezza tra i fusi e la mappa - il cartografo tedesco misurò gli intervalli sull'Equatore, sul circolo polare e sull'ultimo parallelo meridionale, riportandoli sugli archi corrispondenti della mappa. Poi tracciò due paralleli intermedi, quello passante per la città di Syene, 23°30' sopra l'Equatore, e quello situato a 20° sotto l'Equatore, suddividendoli come gli altri in intervalli di 10°. A questo punto poté tracciare gli archi di meridiano sopra e sotto l'Equatore, costruendoli come curve passanti per tre punti.
Per costruire gli archi di meridiano a nord del circolo polare artico, Waldseemüller sembra aver adottato una laboriosa costruzione geometrica. Tracciò dapprima la corda dell'arco di meridiano più estremo, facendola terminare poco al di sopra del polo nord, in modo che risultasse una linea orizzontale. Tracciò poi su di essa un triangolo equilatero in modo che il vertice fungesse da centro di curvatura dell'arco di meridiano. Successivamente, tracciò la corda dell'arco di meridiano più prossimo all'asse centrale e individuò il centro di curvatura all'intersezione tra la perpendicolare alla corda e la retta orizzontale passante per il primo centro di curvatura. La retta orizzontale, a questo punto, rappresentava il luogo dei centri di curvatura di tutti gli altri archi di meridiano. Tracciò poi le corde di tutti gli archi di meridiano, individuò il centro di ciascuna di esse su un arco passante per il centro delle prime due corde, tracciò le rispettive perpendicolari e segnò i centri di curvatura degli archi di meridiano sulla retta orizzontale. Con il disegno degli archi di meridiano a nord del circolo polare artico si concluse il disegno geometrico della mappa del mondo.
Su questa griglia cartografica, Waldseemüller tracciò quindi i profili delle terre, a cominciare forse dall'ecumene di Tolomeo, che il cartografo tedesco ridisegnò senza alcun aggiornamento geografico. Disegnò poi le terre del lontano Oriente, fino all'odierno

Giappone, e quindi l'estensione meridionale dell'Africa, circumnavigata dai Portoghesi. Infine, tracciò le coste del Nuovo Mondo secondo le informazioni dei cartografi spagnoli e portoghesi. Poi completò il disegno con la localizzazione delle città, dei fiumi, dei monti, dei venti e con l'inserimento di numerose informazioni testuali; il tutto racchiuso in un apparato ornamentale di grande bellezza. Il processo di stampa non fu meno impegnativo, vista la dimensione del disegno. Waldseemüller suddivise il foglio in dodici parti, adottando una semplice costruzione geometrica per diagonali o dividendo per tre e per quattro i due lati del disegno. Poi tagliò l'intero foglio in dodici fogli più piccoli, accingendosi ad intagliare per ciascuno di essi una diversa tavola di legno. Per trasferire il disegno sulla tavola usò presumibilmente la tecnica dello spolvero, traforando l'intero disegno con un punzone. Poi girò il foglio sulla tavoletta e trasferì il disegno con un tampone di polvere colorata in modo che sul legno rimanesse la traccia del disegno in controparte. A questo punto intervenne un intagliatore, che asportò il legno da tutte le parti del disegno destinate a rimanere bianche nella stampa finale. A lavoro finito, la tavoletta venne inchiostrata e impressa su un foglio da stampa. Le dodici stampe andarono così a comporre la mappa del mondo che diede il nome all'America.

3.2 Da un emisfero a due

In genere, le proiezioni rinascimentali di un emisfero che, potenzialmente, potevano espandersi a due, raffigurando così tutto il mondo, includevano proiezioni azimutali matema ticamente molto complesse: proiezione ortografica, stereografica o azimutale equidistante. La proiezione gnomonica era utilizzata esclusivamente per gli orologi solari (come sottolinea l'etimologia, proveniente probabilmente da *gnomone*: stilo o indice di opportuna lunghezza e conveniente orientazione, la cui ombra, o l'estremo dell'ombra, serve a segnare le ore negli orologi a sole o meridiane).
Nel XIII secolo, Roger Bacon[31] descrisse uno strumento per tracciare luoghi usando i valori di longitudine e latitudine; tuttavia, durante il Rinascimento, a causa della scarsa precisione di misurazione, la quale si rifaceva spesso a racconti di esploratori e navigatori, e non di cartografi di mestiere, le mappe rimasero a lungo intrise di errori. In particolare, è difficile al giorno d'oggi distinguere tra proiezioni prospettiche semplici (di un singolo emisfero) centrate a una distanza finita dalla superficie terrestre e proiezioni ortografiche, il cui centro di proiezione è all'infinito, realizzate durante il Rinascimento. A questo proposito vediamo due esempi: la mappa di Dürer e Stabius e la mappa di Rughesi.

[31]Roger Bacon, ampiamente noto con l'appellativo latino di Doctor Mirabilis, nato a Ilchester nel 1214 circa e deceduto a Oxford nel 1292 circa, è stato un filosofo, scienziato, teologo ed alchimista inglese. Frate francescano, fu uno dei maggiori pensatori del suo tempo e va considerato come uno dei padri dell'empirismo. Per certi aspetti può considerarsi uno dei rifondatori del metodo scientifico.

3.2.1 Mappa di Dürer e Stabius, 1515

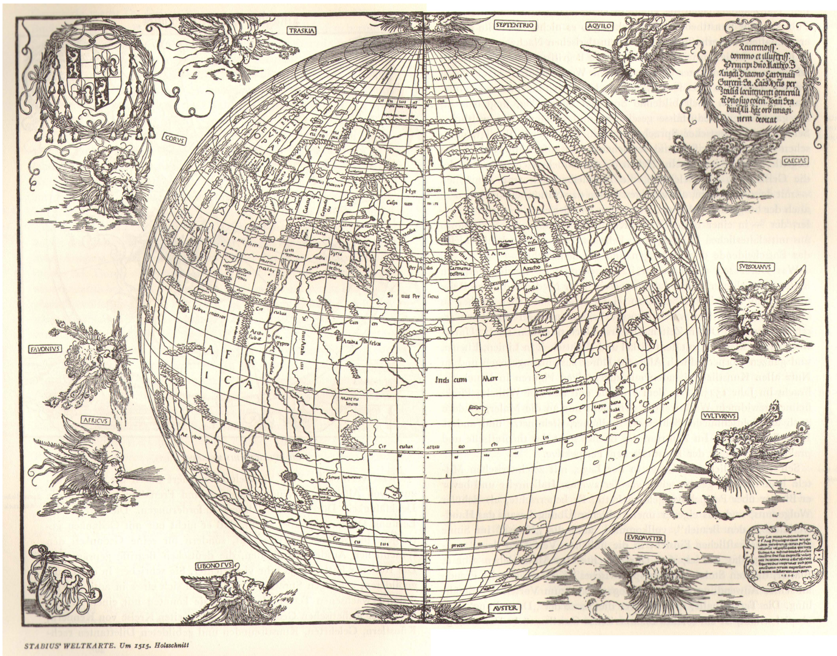


Figure 36: Grandezza dell'originale: 63.7x85 *cm*

La proiezione del globo terrestre costruita da Albrecht Dürer[32] per Johannes Stabius nel 1515 (*Figure 36*) è una proiezione del Vecchio Mondo, realizzata secondo una rappresentazione tolemaica modificata (senza l'Oceano Indiano chiuso). Questa proiezione è stata descritta come una proiezione ortografica obliqua. Tuttavia, essa sembra più assomigliare a una prospettica semplice in quanto mostra solo 150° di longitudine lungo l'Equatore, mentre la proiezione ortografica ne mostra ben 180°. Inoltre, le ellissi che rappresentano i paralleli non sono figure simili, come sono nella proiezione ortografica, ma, muovendosi dal polo nord al polo sud, appaiono progressivamente meno scorciate a parità di distanza dall'Equatore. Comparando la mappa di Dürer con la proiezione ortografica dei due emisferi di Fausto Rughesi del 1597, emergono notevoli differenze.

3.2.2 Mappa di Rughesi, 1597

La mappa di Rughesi (*Figure 37*), intitolata *Novissima orbis universi descriptio Romae accuratissime delineata*, è un'elegante costruzione che mette chiaramente in risalto l'emisfero boreale nella parte destra e l'emisfero australe nella parte sinistra, enfatizzando così le novità in campo geografico. Fu identificata come una proiezione ortografica

[32]Albrecht Dürer, nato a Norimberga il 21 maggio 1471 e deceduto a Norimberga il 6 aprile 1528, è stato un pittore, incisore, matematico e trattatista tedesco.

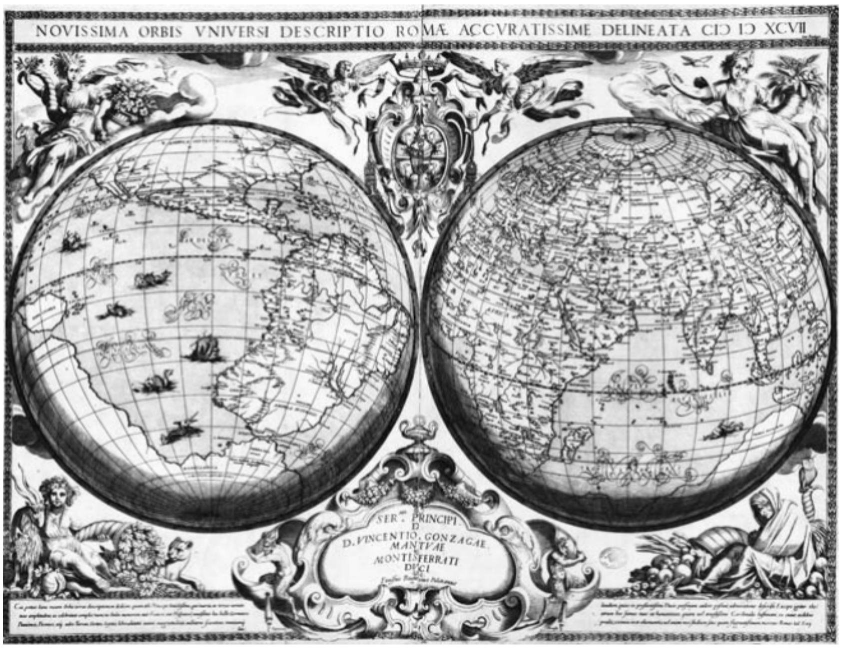


Figure 37: Gradezza dell'originale: 52.8x70 *cm*

obliqua, come la mappa di Dürer, anche se appaiono molto diverse: in quella di Rughesi, la porzione di superficie rappresentata è molto maggiore, se si considera lo stesso emisfero, e, nonostante vi siano piccoli errori, dovuti alla rappresentazione, le ellissi risultano simili.

Per quanto riguarda la proiezione stereografica, i suoi primissimi usi erano per le carte celesti; tuttavia, durante il sedicesimo secolo, l'aspetto polare, equatoriale e obliquo furono impiegati per le mappe terrestri. La proiezione stereografica obliqua era ideale per le mappe geografiche; la stereografica equatoriale, invece, non apparse come mappa del mondo fino al 1542, anno di pubblicazione del manoscritto *Boke of Idrography* di Jean Rotz. Fu la mappa in due emisferi di Rumoldus Mercatore, figlio di Gherardo Mercatore, del 1587 che lanciò quella che poi divenne la più comune rappresentazione dell'emisfero occidentale e orientale durante il XVII secolo.

3.2.3 Mappa di R. Mercatore, 1587

Nonostante non fu la primissima rappresentazione del globo terrestre attraverso la proiezione stereografica equatoriale in due emisferi, occidentale e orientale, la mappa stampata di Rumoldus Mercatore (*Figure 38*) instaurò una sorta di "moda" nelle successive mappe del mondo, facendo di questa proiezione la più comune proiezione utilizzata nel secolo a venire.

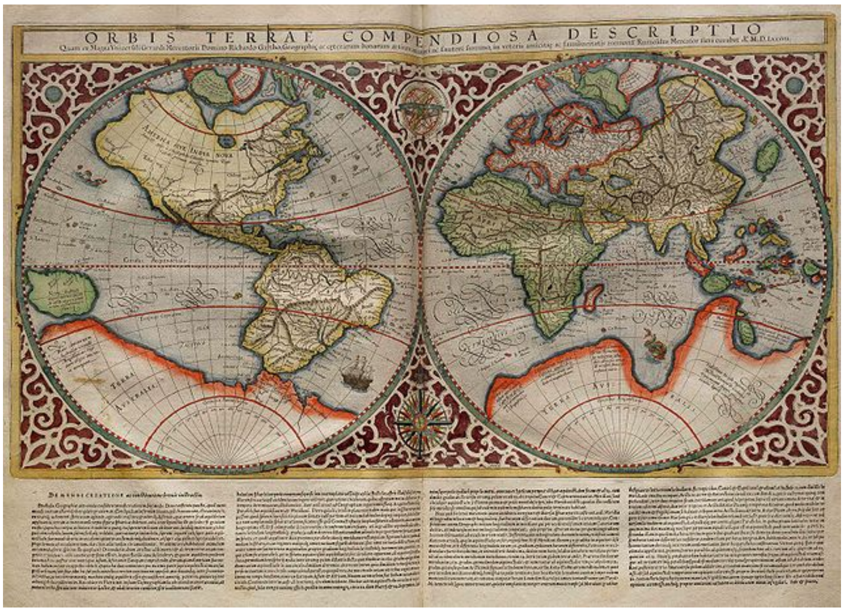


Figure 38: Grandezza dell'originale: 28.2x51.9 *cm*

Infine, nell'ambito di proiezioni separate in due emisferi, la proiezione azimutale equidistante fece la sua comparsa in una mappa celeste incompleta e rudimentale del 1426, ad opera di Conrad di Dyffenbach, e apparse più volte durante la metà del sedicesimo secolo. La forma polare equidistante della proiezione consiste nell'avere latitudini circolari ed equidistanti centrate nel polo considerato e meridiani uscenti da tale polo come raggi. Questa innovativa proiezione fu utilizzata, per esempio, da Giovanni Vespucci, nel 1524, nella sua rappresentazione dell'emisfero boreale e australe; quest'ultimo spezzato in due metà semicircolari posizionate tangenti alla rappresentazione dell'emisfero boreale.

3.2.4 Mappa di G. Vespucci, 1524

Le proiezioni basate sui poli, come quella di Giovanni Vespucci, divennero particolarmente di moda al tempo, poiché davano una nuova prospettiva sui recenti viaggi di scoperta e aprivano una nuova area potenziale di esplorazione attorno al polo nord. Mettendo un polo o l'altro al centro della carta, si otteneva il chiaro vantaggio di lasciare da parte la spinosa questione del possesso globale degli emisferi occidentale e orientale, che aveva angustiato i cartografi sin dal trattato di Tordesillas del 1494. La mappa di Vespucci (*Figure 39*) sembra esser stata ideata in occasione della *Conferenza Badajoz-Elvas*[33] del 1524, e per questo motivo il suo scopo fu presumibilmente quello di per-

[33] Nel 1524 delegazioni di Spagna e Portogallo si incontrarono a Badajoz-Elvas, sul confine tra Spagna e Portogallo, per cercare di risolvere la questione di confine dei propri regni. Delle due delegazioni facevano parte astronomi, cosmografi e navigatori con il compito di stabilire la posizione dell'antimeridiano e

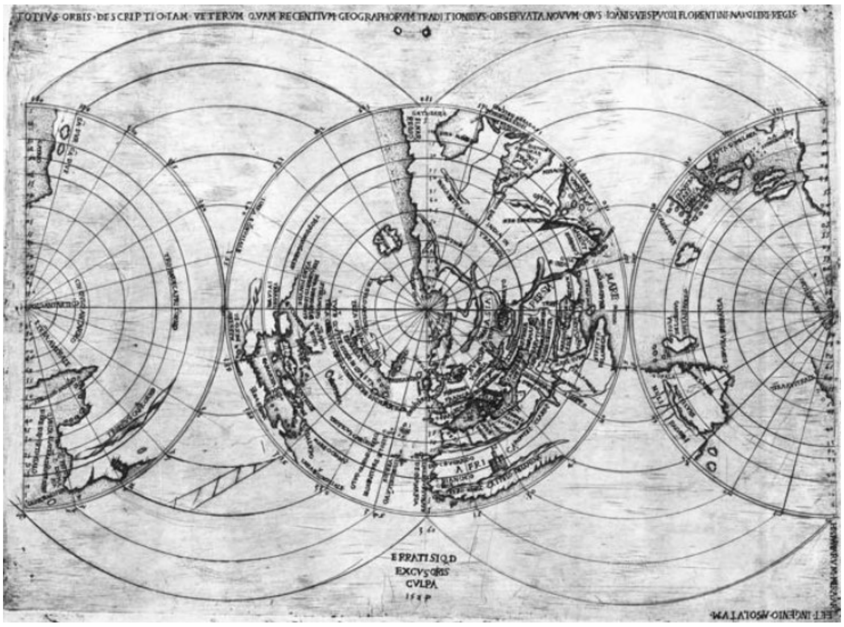


Figure 39: Grandezza dell'originale: 27.5x37.5 *cm*

mettere una visualizzazione dei regni spagnolo e portoghese nei due emisferi, occidentale e orientale.

3.3 La proiezione del globo intero

Nel secondo secolo a.C., Claudio Tolomeo introdusse nella sua *Geografia* due proiezioni coniche per realizzare mappe dell'*oikoumene* Greco-Romana, le quali consentiva di rappresentare soltanto un quarto della superficie terrestre. La prima proiezione, con i meridiani rappresentati come linee rette interrotte all'Equatore e paralleli di latitudine rappresentata da archi di circonferenza concentrici, venne utilizzata in numerosi manoscritti della *Geografia* del Rinascimento e anche nella prima edizione stampata con mappe (Bologna, 1477). La seconda proiezione di Tolomeo, la preferita dall'autore stesso, presentava archi di circonferenza equidistanti per rappresentare i paralleli, ma linee curve per i meridiani anziché linee rette. Le proiezioni di Tolomeo furono modificate durante il XV secolo per accogliere le nuove scoperte geografiche degli Europei, che andavano ben oltre l'*oikoumene* tolemaico, tuttavia non riuscivano ancora a rappresentare l'intera superficie terrestre. Per esempio, la mappa di Giovanni Matteo Contarini del 1506 modificò la prima proiezione di Tolomeo in tre modi: raddoppiò la raggiera dei meridiani, da 180° a 360°, mostrò le latitudini da polo nord al polo sud (raffigurate come archi di circonferenza) e prolungò i meridiani ininterrottamente fino al 35°S senza una piega in

quindi decretare a chi spettasse il controllo delle isole Molucche.

corrispondenza dell'Equatore.

3.3.1 Mappa di Contarini, 1506

Figure 40

Il planisfero di Giovanni Contarini (*Figure 40*), inciso a Firenze da Francesco Rosselli nel 1506, è il primo planisfero che utilizza una proiezione conica (i paralleli sono cerchi concentrici e i meridiani sono raggi centrati nel polo nord) nonché la prima carta stampata che rappresenta il Nuovo Mondo. Su questa carta, la Groenlandia e Terranova sono collegate, e formano la parte nord-orientale del continente asiatico; non esiste, tuttavia, alcun continente nordamericano. Alla sua estremità si trova una legenda che recita "*Questa terra fu scoperta dai navigatori per conto del re del Portogallo*". Sono raffigurate anche Cuba e Hispaniola, e l'America del Sud viene rappresentata come un continente separato, a sud-est dell'Asia. Nonostante questa mappa fu la prima a rappresentare il Nuovo Mondo, ebbe molto meno successo della mappa di Waldseemüller del 1507.

La seconda proiezione di Tolomeo fu modificata da Enrico Martello Germano nella sua mappa del 1490 (*Figure 41*). Quest'ultima raffigurava tutti i 360° di longitudine; inoltre, i paralleli si estendevano dal polo nord fino a 40°S, diversamente dalla proiezione di Tolomeo che si estendeva da 63°N a 16°S. La già più volte citata mappa di Waldseemüller, era stata costruita con una proiezione simile a quella di Martello, ma, diversamente da essa, presentava delle spezzate alquanto brusche a livello dell'Equatore, probabilmente legate, secondo alcuni storici, a limitazioni pratiche dovute alle dimensioni dei blocchi di legno usati per la xilografia.

Figure 41: Mappa del mondo di Enrico Martello

Sebbene Tolomeo fosse interessato alla sola rappresentazione dell'*oikoumene*, lo schema attraverso il quale descrisse la posizione dei luoghi, con longitudine e latitudine, poteva potenzialmente essere applicato a tutta la sfera terrestre. Il potenziale di un tale sistema di riferimento spaziale attrasse i cartografi fin dalla riscoperta della *Geografia* di Tolomeo. Nonostante ciò l'applicazione di tale principio alle rappresentazioni del globo intero fu molto lenta a venire, come abbiamo potuto appurare nel primo capitolo.
Intorno al 1500, Johannes Stabius, un professore di matematica a Vienna, inventò una serie di proiezioni a forma di cuore (*cordiformi*), rese pubbliche successivamente, nel 1514, da Johannes Werner di Norimberga. Tutte le tre proiezioni erano equivalenti (diversamente alle proiezioni tolemaiche): la prima proiezione sembra non sia stata utilizzata per la rappresentazione del globo, mentre la terza fu impiegata da Oronce Finé[34] nel suo planisfero del 1534/36.

La seconda proiezione di Werner (o Stabius-Werner), l'unica delle proiezioni di Werner a permettere una rappresentazione dell'intero globo, apparse inizialmente in una mappa del mondo di Apiano e, successivamente, comparse in una versione modificata in un planisfero del 1531 di Finé.

3.3.2 Mappa di Finé, 1531

La mappa di Oronce Finé (*Figure 42*), basata su una doppia proiezione polare e dall'innovativa forma a cuore, costituisce una delle più straordinarie carte del mondo. Sulla carta di Finé, l'Equatore corre verticalmente al centro della raffigurazione, dividendola in due metà, con il polo nord a sinistra e il polo sud a destra. I due archi di circonferenza più

[34]Oronzio Fineo, in francese Oronce Finé, nato a Briançon il 20 dicembre 1494 e deceduto a Parigi l'8 agosto 1555, è stato un matematico, cartografo e astrologo francese.

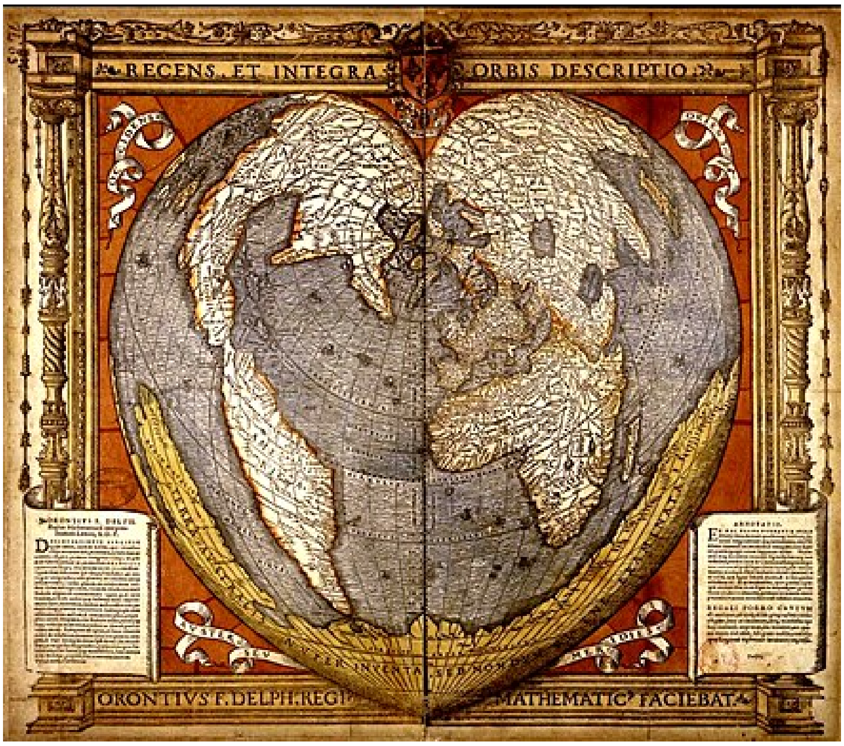


Figure 42: Grandezza dell'originale: 51x57 *cm*

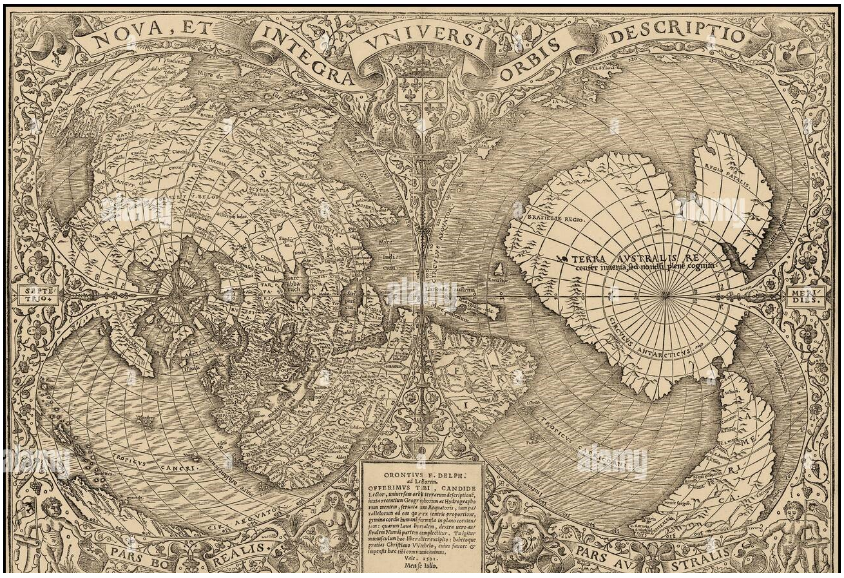


Figure 43

esterni rappresentano l'Equatore, e sono tangenti al meridiano centrale, che attraversa orizzontalmente il centro della carta. Dopo altre edizioni, la proiezione doppia cordiforme di Finé venne utilizzata da Mercatore, nella sua mappa del 1538, e da pochi altri cartografi fino al XVIII secolo, quando venne soppiantata dalla proiezione di Bonne, la quale rappresentava il globo con la seconda proiezione di Werner, ma modificata al fine di avere una minor distorsione.

Le proiezioni di forma ovale sono state prodotte in varie versioni ma tutte hanno in comune i paralleli rappresentati come linee orizzontali equidistanti e i meridiani come linee curve equidistanti in corrispondenza dell'Equatore. La prima mappa in cui la proiezione ovale fu estesa alla rappresentazione del globo intero fu la piccola mappa ovale del 1598 di Francesco Rosselli, un incisore e tipografo fiorentino. Un altro esempio di proiezione ovale, forse la più nota, è quella presentata nell'opera *Theatrum orbis terrarum* di Abraham Ortelius[35], intitolata *Tyupus orbis terrarum*, del 1570. In seguito i due esempi:

3.3.3 Mappa di Rosselli, 1508

Figure 44: Grandezza dell'originale: 18x33,5 *cm*

La piccola mappa di Francesco Rosselli (in *Figure 44* copia a colori in pergamena), a dispetto delle sue modeste dimensioni, rappresenta un vero e proprio capolavoro della cartografia rinascimentale. Il planisfero è, infatti, la prima mappa al mondo a mostrare ed ordinare l'intera superficie del globo terrestre a 360° di longitudine e 180° di latitudine all'interno di una proiezione ovale (ovvero, in termini più corretti, una proiezione pseudocilindrica). Nell'emisfero boreale vengono documentati i viaggi di Giovanni Caboto

[35] Abraham Ortelius, o in italiano Abramo Ortelio, (1527-1598) fu un cartografo eccellente e un tipico intellettuale cinquecentesco, viaggiatore curioso e appassionato di antichità.

mentre nell'emisfero australe viene disegnato il *Mundus Novus* come un nuovo continente. La carta è inoltre aggiornata al quarto viaggio di Colombo (1502-1504) che era convinto di esser approdato sulle coste del continente asiatico; così Cuba e Hispaniola sono qui rappresentate come propaggine della costa asiatica. Nel planisfero viene raffigurato anche un continente all'estremo sud, nominato *Antarticus*[36]. L'Equatore e il meridiano centrale (di Greenwich) sono suddivisi in segmenti da 10° ciascuno.

3.3.4 Mappa di Ortelius, 1570

L'opera *Theatrum Orbis Terrarum* , redatto da Abraham Ortelius, è considerato il primo vero atlante moderno e consisteva in una raccolta di mappe con testi a supporto, che formavano un libro impreziosito dalla presenza di lamine di rame egregiamente incise. L'atlante di Ortelius fu considerato il compendio della cartografia del XVI secolo, in quanto rappresentava mappe basate su fonti estremamente rare o, addirittura, non più esistenti. Fortunatamente, Ortelius allegò una preziosa lista delle fonti con i nomi dei cartografi dell'epoca, alcuni dei quali destinati altrimenti a rimanere sconosciuti.

Figure 45

Il frontespizio del primo atlante moderno (*Figure 45*) simboleggia l'immagine di un mondo mutato: un portale classicheggiante in cui troviamo le immagini allegoriche di Europa, Africa, Asia e America. In alto, in trono, il continente Europa, con uno scettro in una mano e una croce, piantata su un globo, nell'altra, signoreggia sulle figure degli altri tre continenti: a sinistra l'Asia esoticamente vestita che porge un'urna di profumi, a destra l'Africa nera coronata da un'aureola fiammeggiante, in basso il nuovo continente, il *Mundus Novus*, l'America, nuda e "scoperta", che evoca, con una testa mozzata in mano, la presenza di cannibali; sullo sfondo un'amaca e a destra un mezzo busto che ricorda il limite meridionale raggiunto dai navigatori, la Terra del Fuoco. Il planisfero *Typus Orbis Terrarum* (*Figure 46*) è stato realizzato con la tecnica di incisione su rame e, successivamente, acquerellata a mano, conferendo così all'opera un indubbio effetto scenico.

3.4 Il globo in lobi

Il più antico mappamondo sopravvissuto fino al giorno d'oggi è stato realizzato da Martin Behaim nel 1492, anche se gli storici hanno rinvenuto testimonianze di opere realizzate prima. I mappamondi del XV secolo venivano dipinti a mano direttamente sulla superficie sferica e quindi non veniva richiesta nessun tipo di proiezione per la loro realizzazione. Dalla prima metà del XVI secolo, invece, i mappamondi venivano realizzati incollando

[36] Il continente antartico non è stato scoperto fino all'inizio del XIX secolo, però esistono molte mappe, dal XV secolo al XVIII secolo, con la dicitura *Terra Australis Incognita*.

Figure 46: Grandezza dell'originale: 33.5x49.5 *cm*

strisce (lobi) stampate e poi dipinte sulla superficie del globo. I lobi, che potevano essere di vario spessore, estendersi da polo a polo o, eventualmente, da polo a Equatore, nonché avere larghezza da 10° a 30°, costituivano un tipo di proiezione cartografica. Una primissima testimonianza di proiezione a lobi è fornita dalla già citata opera di Martin Waldseemüller (*Figure 12*) del 1507, che egli preparò per la costruzione di un piccolo mappamondo. Alcune composizioni in lobi venivano "allacciate" ai poli, anziché all'Equatore, e allo sguardo risultavano molto più frammentate. Un esemplare di mappa a lobi, oltre quella di Waldseemüller, è la cordiforme interrotta di Georg Braun del 1574; la quale, più che rappresentare il globo in lobi, sembra più interrompere un qualche tipo di proiezione cartografica.

3.4.1 Mappa di Braun, 1574

La mappa di Georg Braun (*Figure 47*) è disegnata sulla forma della doppia aquila degli Asburgo, dove Africa, Europa e Asia sono i protagonisti di una proiezione ininterrotta che costituisce il corpo dell'aquila, mentre le Americhe e l'Asia Orientale rappresentano le ali. Il concetto di interrompere la proiezione di una mappa significava preservare la rappresentazione della forma e dell'area sul globo; in questa caso, Braun manipolò ingegnosamente questa tecnica per dare alla mappa la forma dell'aquila degli Asburgo.

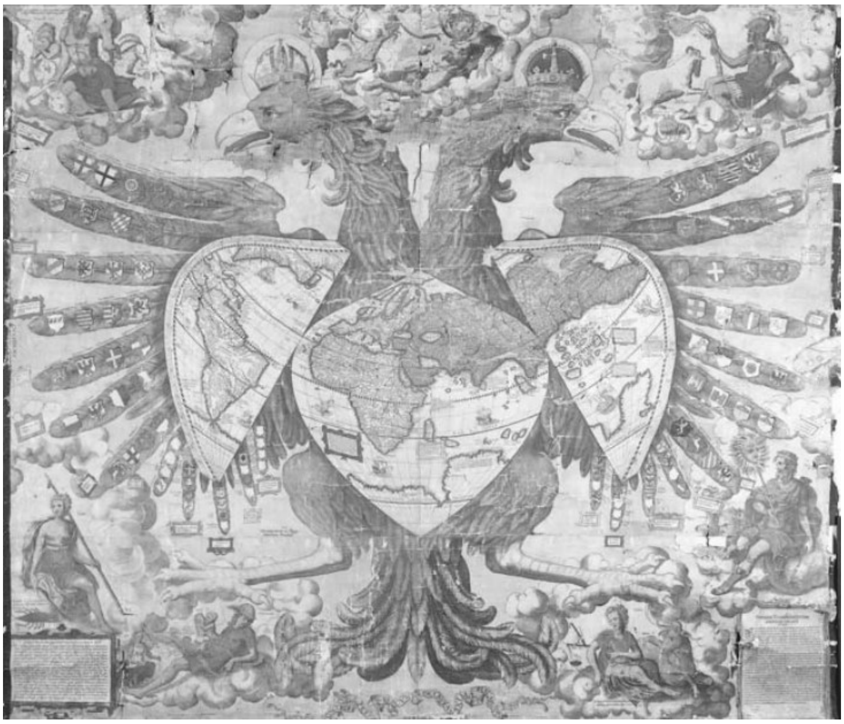


Figure 47: Grandezza dell'originale: 86x100 *cm*

3.5 Mappa di Mercatore, 1569

Indiscutibilmente, la più famosa proiezione cartografica del Rinascimento è quella cilindrica centrografica modificata di Gherardo Mercatore del 1569, che successivamente prese il nome di proiezione di Mercatore. Mercatore, che fino all'età di 82 anni si dedicò alla cartografia, inventò una nuova proiezione che consentiva di navigare con maggior sicurezza attraverso spazi oceanici inesplorati, così come dichiarava il titolo della sua mappa: *Nuova e più ampliata descrizione del globo terrestre con correzioni per l'uso della navigazione* (*Figure 48*). I marinai ne riconobbero subito il valore e la sfruttarono per la navigazione: sulla mappa, bastava semplicemente puntare l'ago della bussola nella direzione della destinazione che si voleva raggiungere e valutare l'angolo tra Nord e ago della bussola; durante la navigazione, la nave doveva mantenere la propria prua, ovvero l'ago della bussola, all'angolo ricavato sulla carta. Sullo sfondo della mappa, per facilitare il calcolo dell'angolo di intersezione tra rotta e meridiani (o, equivalentemente, paralleli), compare una griglia regolare di meridiani e paralleli perpendicolari.
Se dal punto di vista scientifico la mappa di Mercatore rappresenta una straordinaria innovazione, se la si colloca nel suo contesto storico-mitico-culturale, appaiono elementi di spicco: volgendo lo sguardo al continente africano, nel deserto del Sahara, in Nubia,

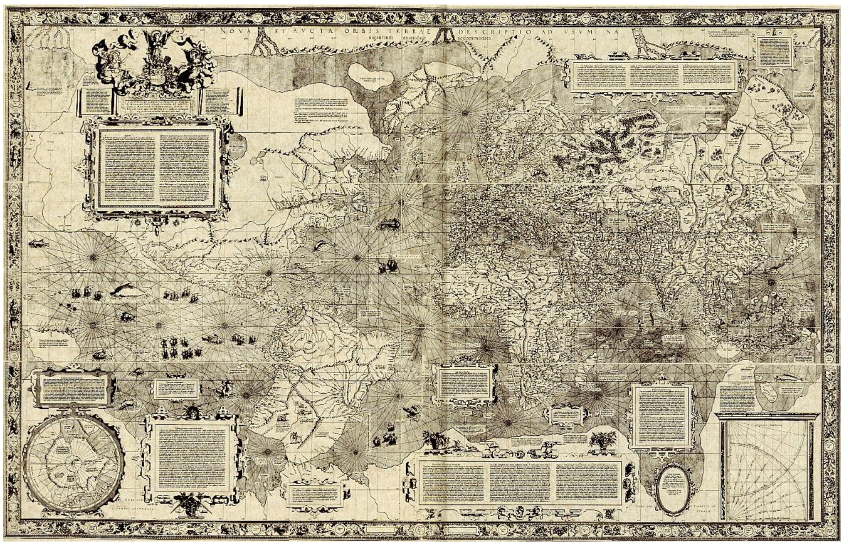


Figure 48: Grandezza dell'originale: 124x202 *cm*

appare la figura di Prete Gianni[37]; nell'estremo Oriente si trova, circondato da montagne, il luogo mitico di *Gog* e *Magog*[38], in cui abitano le popolazioni esotiche citate da Plinio nella sua *Naturalis Historia*, e qui nominati Mongoli. La cartografia di Mercatore rappresenta, inoltre, le rotte verso l'America e l'Africa, a testimonianza del suo aggiornamento rispetto al commercio internazionale.

Mercatore, visionando le varie proiezioni già esistenti, scelse come "canovaccio" da rielaborare la proiezione cilindrica centrale o centrografica per sviluppo, in quanto presentava tre grandi vantaggi:

[37]Prete Gianni è un leggendario sovrano cristiano orientale la cui origine risale alla tradizione medievale. La figura di questo personaggio divenne popolare nelle cronache e nella tradizione europea dal XII al XVII secolo. Si diceva che governasse su una nazione cristiana nestoriana. Ispirò vari racconti di origine medievale e si fecero varie ipotesi su quale potesse essere il suo regno, dall'India fino all'Etiopia. L'origine del mito risale a una lettera in latino della fine del XII secolo con la quale un misterioso personaggio, Prete Gianni, sedicente re e sacerdote di una terra orientale, descrive il proprio regno dall'enorme estensione, popolato da strani esseri come da tradizione dell'immaginario medievale sull'Oriente. Questa lettera ha interessato per secoli storici, cronisti, scrittori e viaggiatori tanto che furono numerose le traduzioni o le rielaborazioni del testo originale; il mito è rimasto tale nei secoli e anche in epoca contemporanea ha interessato scrittori e storici, tra cui Umberto Eco nel romanzo *Baudolino*.

[38]Gog e Magog sono due figure della tradizione biblica e Islamica. Citati in varie parti delle Sacre Scritture, essi sono descritti talvolta come uomini vissuti in un lontano passato, sovrani, popolazioni o territori, spesso con un'accezione negativa, incarnando nemici del popolo di Dio. Nell'Apocalisse compaiono come sostenitori di Satana in vista dell'Armageddon. Questi temi si diffusero molto nelle tradizioni d'Europa e Medio Oriente nella Tarda Antichità e nell'Alto Medioevo, sicché Gog e Magog si rinvengono in svariate leggende e opere dell'epoca, con fonti che li descrivono come giganti, mostri o altri esseri sovrannaturali.

- il parallelismo e l'equidistanza dei meridiani, che non variavano la scala delle longitudini;
- l'intersezione ortogonale tra meridiani e paralleli che permettevano la rettificazione delle lossodromie;
- l'isometria all'Equatore dovuta alla costruzione della mappa: il quadro cilindrico che avvolge la Terra è tangente all'Equatore. Ne segue la trasformazione di qualsiasi coppia di punti presi lungo l'Equatore, ad una certa distanza d, in un'altra coppia di punti la cui distanza si mantiene d.

Tuttavia presentava un enorme svantaggio, soprattutto rispetto gli obiettivi di Mercatore: la carta non era conforme. Mercatore allora modificò la proiezione cilindrica centrale in modo da renderla *isogonica* (dal greco, "*iso*" -"uguale" e -"*gonìa*" "angolo"), ovvero conforme. In particolare, egli rese la distanza tra i meridiani costante mentre la distanza tra i paralleli crescente con la latitudine. Lo scopo di questo aumento era proprio quello di mantenere corretto il rapporto fra la lunghezza di un minuto di longitudine e la lunghezza di un minuto di latitudine. Sulla sfera il cambiamento di 1' di latitudine è pari a 1855 m, ma soltanto all'Equatore il cambiamento di 1' di longitudine corrisponde a 1855 m: alla latitudine di 20°, per esempio, il cambiamento di 1' di longitudine è pari a 1744 m. Rispetto l'esempio precedente, il rapporto che si ottiene è il seguente:

$$\frac{1' \textit{ di cambiamento di longitudine}}{1' \textit{ di cambiamento di latitudine}} = \frac{1744}{1855}. \tag{9}$$

Sulla carta, a causa del parallelismo dei meridiani, la lunghezza dei tratti di parallelo tra due meridiani risulta sempre uguale: essa è quindi dilatata, al crescere della latitudine, rispetto alla situazione reale della sfera terrestre. Affinché il rapporto (9) continui a valere anche sulla carta, dove i meridiani sono tracciati a distanze uguali e ogni minuto di cambiamento è uguale a 1855 m, Mercatore aumentò la distanza fra i paralleli moltiplicandola per il fattore $\frac{1}{\cos\phi}$, ove ϕ è l'aumento di latitudine. Per esempio, a 20° di latitudine sulla sua carta, 1' di cambiamento di latitudine è uguale a una distanza di $1855m * (\frac{1}{\cos(20)}) = 1966m$. Perciò, alla latitudine di 20° sulla carta si ha:

$$\frac{1' \textit{ di cambiamento di longitudine}}{1' \textit{ di cambiamento di latitudine}} = \frac{1855}{1966},$$

e questo rapporto è circa uguale al precedente. Per esplicitare ancor meglio le precedenti considerazioni, se dx è la distanza infinitesimale tra due meridiani nella carta, dy la distanza infinitesimale tra due paralleli nella carta, $d\lambda$ la distanza infinitesimale tra due meridiani nel geoide terrestre e $d\phi$ la distanza infinitesimale tra due paralleli nel geoide terrestre, abbiamo la seguente

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{1}{\cos\phi} \Longrightarrow \frac{dy}{d\phi} = \frac{1}{\cos\phi} = \sec\phi.$$

Quindi la coordinata y è una funzione solo della latitudine, ϕ, con $y' = \sec\phi$ da cui si ricava per integrazione la funzione cercata

$$y = \ln\Big(\frac{\sin(\frac{\phi}{2}) + \cos(\frac{\phi}{2})}{\cos(\frac{\phi}{2}) - \sin(\frac{\phi}{2})}\Big) = \ln\Big(\frac{1+\sin\phi}{\cos\phi}\Big) = \ln(\sec\phi + \tan\phi) + C$$

e, imponendo l'origine delle coordinate $\phi = 0$ quando $y = 0$, si annulla la costante di integrazione C. La coordinata cartesiana y della trasformazione (6) si ottiene applicando una serie di identità trigonometriche:

$$\begin{aligned}
\ln(\sec\phi + \tan\phi) &= \ln\Big(\frac{1+\sin\phi}{\cos\phi}\Big) = \\
&= \ln(1+\sin\phi) - \frac{1}{2}\ln(1+\sin\phi) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin\phi) = \\
&= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\Big) = \\
&= \ln\sqrt{\frac{\cos^2(\phi/2) + \sin^2(\phi/2) + 2\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)}{\cos^2(\phi/2) + \sin^2(\phi/2) - 2\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)}} = \\
&= \ln\Big(\frac{\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)}\Big) = \\
&= \ln\Big(\frac{1+\tan(\phi/2)}{1-\tan(\phi/2)}\Big) = \\
&= \ln\Big(\frac{\tan(\pi/4) + \tan(\phi/2)}{1 - \tan(\pi/4)\tan(\phi/2)}\Big) = \\
&= \ln\Big(\tan\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

La proiezione cilindrica, modificata in questo modo, rispose alle esigenze di conformità prefissate da Mercatore e, così, divenne la mappa più comune per rappresentare il globo, nonché per la navigazione, fino ai nostri giorni.

3.5.1 La mappa di Gal-Peters

Sfruttando le nozioni di deformazione presentate nel secondo capitolo, nello stesso modo in cui abbiamo reso uguali la deformazione orizzontale e verticale delle lunghezze nella carta di Mercatore, possiamo compensare queste deformazioni in modo da avere tutte le ellissi di Tissot di uguale area. Operando in questo modo si ottiene la proiezione di Gal-Peters, una proiezione equivalente, dove le superfici rappresentate sulla mappa sono proporzionali alle superfici reali sulla Terra. La proiezione fu basata sul coretto e giusto rapporto fra le superfici delle varie parti del mondo, diversamente dalla proiezione di Mercatore: la mappa di Mercatore fu aspramente criticata da Peters, definita come

(a) Mappa di Gal-Peters

(b) Mappa di Gal-Peters capovolta

Figure 49

"prototipo colonialista", in quanto Stati Uniti, Europa e, all'epoca, Unione Sovietica erano rappresentati con estensioni decisamente maggiori rispetto la realtà. Chiaramente, la mappa di Mercatore costituisce una rappresentazione meramente matematica e non intendeva collocarsi su un piano politico o sociale.
Per comprendere il rivoluzionario planisfero dello storico tedesco Arno Peters[39] e cogliere l'impatto che ebbe sull'opinione pubblica mondiale, e non solo tra gli "addetti ai lavori", occorre contestualizzare il tempo storico della sua comparsa.
Gli anni Settanta del XX secolo furono testimoni della prosecuzione della lotta di liberazione da parte dei paesi dominati dal colonialismo e dal neocolonialismo europeo e dalla nascita del "*Terzomondismo*", vale a dire l'atteggiamento politicamente solidale e il sostegno economico culturale ai paesi del Sud del mondo.
Ancora una volta la geografia si prestò a interpretare efficacemente il contesto sociale coevo con il planisfero di Peters (*Figure 49.a*) che adottò una proiezione cartografica che poi prese il suo nome, ma in realtà già elaborata dall'inglese James Gall nel 1855, in grado produrre un'immagine egualitaria del mondo, rispettando le reali superfici dei continenti e degli stati. La nuova mappa del mondo di Peters venne adottata dall'UNESCO e dall'UNICEF e ricevette un convinto sostegno dalla Santa Sede e dagli organismi non governativi.
Cambiare il convenzionale orientamento di una mappa, per un fruitore abituale, è spaesante e provoca la non usuale, e non appagante, esperienza di riuscire con difficoltà a trovare il proprio posto nel pianeta Terra. Mappamondi e planisferi di ogni periodo storico interpretano il mondo, sempre, secondo determinati punti di vista, e non possono essere neutrali, perché sono realizzati da comunità umane, a loro volta espressioni del loro tempo storico. Ma il caso di questo planisfero capovolto (*Figure 49.b*), più che a logiche di potere sembra porre una riflessione sulle convenzioni sociali. Il mondo è rove-

[39] Arno Peters è stato uno storico e cartografo tedesco. Si interessò in particolare alle problematiche dell'equità economica e politica per tutte le popolazioni mondiali.

sciato e visto da un'Australia finalmente in primo piano, quasi a rivendicare la legittimità di un altro orientamento, al pari di quello convenzionalmente stabilito a Nord.

Conclusione

Ebbene, il viaggio attraverso le cartografie rinascimentali si è concluso: siamo partiti dal contesto storico e culturale rinascimentale; successivamente abbiamo visto il linguaggio della cartografia moderna, sviluppato a partire dall'opera di Gauss prima e di Riemann poi; infine, abbiamo applicato il linguaggio della cartografia moderna alle cartografie rinascimentali. Il contesto storico, intellettuale e culturale è fondamentale per apprezzare le motivazioni che hanno spinto gli intellettuali e i cartografi dell'epoca allo sviluppo di nuovi strumenti e metodi, sia nella navigazione che nella rappresentazione del globo sul piano. Per questo motivo all'inizio di questo progetto è stata data particolare attenzione alla descrizione di suddetto argomento.
Per quanto concerne il secondo capitolo, è stata posta molta attenzione alla scelta dei contenuti e del linguaggio. Le intenzioni di tali scelte sono state più volte esplicitate nel corso del progetto, ma ritengo opportuno ribadirle. La scelta di un linguaggio relativamente informale è stata fatta per essere quanto più fedeli all'approccio utilizzato nel Rinascimento. La matematica rinascimentale era molto lontana dal rigore a cui siamo abituati oggi: era formulata in modo da rispondere a problemi pratici, sia pur sempre profondi, e il modus operandi per approcciarsi ad essi era spesso "a tentoni". Senza perdere un tono di esposizione moderno, le nozioni affrontate nel secondo capitolo sono state presentate in maniera semplice, comprensibile anche al matematico dilettante, con l'obiettivo di affrontare la costruzione di una mappa. La stessa scelta dei contenuti ha perseguito questo obiettivo, in modo da fornire l'adeguata "valigetta degli attrezzi" al lettore per la comprensione dei problemi sopracitati.
Infine, attraverso il linguaggio e gli strumenti del secondo capitolo, sono state presentate alcune cartografie del Rinascimento, a partire dal planisfero di Waldseemüller del 1507 fino alla descrizione nel dettaglio della mappa di Mercatore del 1569. La selezione delle mappe, come già affermato nell'introduzione del capitolo tre, è stata alquanto ardua, non tanto per la mancanza di cartografie, la cui produzione è stata copiosa all'epoca, quanto per l'individuazione di proiezioni le cui caratteristiche fossero relativamente evidenti anche di fronte ad un occhio meno esperto. Purtroppo l'assenza di una rigorosa classificazione delle mappe rinascimentali non mi ha permesso di approfondire maggiormente la sezione delle cartografie. Colgo quindi qui l'occasione di affermare le potenzialità di un tale progetto di ricerca: ritengo che una classificazione rigorosa e organica delle cartografie rinascimentali (e non solo!) alla luce degli strumenti sviluppati nell'Ottocento, propri della cartografia moderna, come prosieguo del lavoro da me timidamente iniziato nell'ultimo capitolo potrebbe essere di estremo interesse. Concludo sperando vivamente che questa breve tesi sia stata utile e piacevole alla lettura.

Bibliografia e Sitografia

References

[1] Morris Kline, *Storia del pensiero matematico I. Dall'antichità al Settecento*, 1972, Biblioteca Einaudi

[2] Jerry Brotton, *La storia del mondo in dodici mappe*, 2012, Universale economica Feltrinelli/Saggi

[3] Patrick Gautier Dalché, *The Reception of Ptolemy's Geography (End of the Fourteenth to Beginning of the Sixteenth Century)* da *History of Carthography Volume I, Volume II and Volume III*, 1987, The University of Chicago Press

[4] John P. Snyder, *Map Projections in the Reinessance* da *History of Carthography Volume I, Volume II and Volume III*, 1987, The University of Chicago Press

[5] Gaetano Ferro, *, Le «scoperte» e la scoperta dell'America* da *L'epopea delle scoperte*, 1994, Leo S. Olschiki

[6] Enrico Giusti, Paolo Freguglia, Pier Daniele Napolitani, Pierre Souffrin, *Il Rinascimento. Verso una nuova matematica* da *Storia della Scienza*, 2001, Treccani

[7] Giorgio Montecchi, *Il Rinascimento. La stampa e la diffusione del sapere scientifico* da *Storia della Scienza*, 2011, Treccani

[8] Uta Lindgren, *Il Rinascimento. Geografia, cartografia e geologia* da *Storia della Scienza*, 2011, Treccani

[9] Alberto Tenenti, *Il Rinascimento. L'impatto delle scoperte geografiche* da *Storia della scienza*, 2001, Treccani

[10] Silvia Benvenuti, *Geometrie non euclidee*, 2015, Alpha test

[11] Maurizio Cailotto, *GTe: Geometria Topologia elementari* da Corso di Geometria 2 parte B, 2011, Dipartimento di Matematica, Università di Padova

[12] John P. Snyder, *Map Projections- A Working Manual*, 1987, United States Government Printing Office, Washington

[13] Edwin Abbott Abbott, *Flatlandia*, 1884, edizione italiana 1993, Adelphi

[14] https://mostre.museogalileo.it/waldseemuller/indice.html

[15] http://didmat.dima.unige.it/documenti/RT/volV/schede/storia/scop$_{g}eo/scheda2s.pdf$

[16] http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/File/frmset$_{i}ndice.htm$

[17] https://www.paololazzarini.it/geometria$_{s}ulla_{s}fera/geo.htm$

[18] https://www.imaginary.org/film/maps-of-the-earth

[19] Mostra *Mind the Map!* a cura di Massimo Rossi, parte del progetto *Treviso Contemporanea* e frutto della collaborazione con la *Fondazione Benetton Studi e Ricerche* e la fondazione *Imago Mundi*