

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITY OF BOLOGNA

School of Science
Department of Physics and Astronomy
Master Degree in Physics

**Dal concetto di azione a distanza al
concetto di campo: percorso storico e
applicazione alla didattica**

Supervisor:
Prof.ssa Silvia Benvenuti

Submitted by:
Anna Cesari

Academic Year 2021/2022

Abstract

Il passaggio dalla concezione delle forze come azioni a distanza a quella che le vede come azioni che avvengono per contatto, attraverso un mezzo descrivibile con una teoria di campo, costituisce un punto di svolta importante nell'evoluzione della fisica. Da un'analisi storica e filosofica, emerge una molteplicità di aspetti che hanno contribuito a questo cambiamento. Rivestono un ruolo importante le concezioni filosofiche che caratterizzano un periodo storico, gli strumenti matematici, i modelli e le analogie. Questa molteplicità rende il passaggio da un paradigma newtoniano a uno maxwelliano un tema significativo per la didattica. L'obiettivo di questo lavoro di tesi è quello di costruire un percorso didattico indirizzato agli studenti del quarto anno di Liceo Scientifico attraverso i concetti principali dell'elettrostatica, vista come punto di congiunzione tra diversi paradigmi concettuali e tra differenti metodi di rappresentazione matematica. Le ricerche sull'uso della storia della fisica come mezzo per la didattica mettono in luce il parallelismo tra i profili concettuali degli studenti di diverse età con i profili newtoniano e maxwelliano, e attribuiscono le difficoltà nel passaggio da un profilo a un altro a una didattica che non evidenzia la necessità di questo cambiamento. Attraverso un'analisi storica dello sviluppo dell'elettrostatica ho dunque identificato alcuni punti significativi per favorire il cambiamento concettuale, dai quali sono partita per costruire un percorso che si compone di 3 unità in cui sono rese esplicite le motivazioni che portano da un'azione a distanza al concetto di campo e di azione tramite un mezzo. I concetti dell'elettrostatica vengono così trattati attraverso una molteplicità di rappresentazioni e facendo uso di analogie tratte dalla storia della fisica, in maniera coerente con le indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici e con le ricerche sulla didattica della fisica che riguardano i diversi aspetti toccati.

Indice

Introduzione	4
1 Il rapporto tra matematica e fisica	6
1.1 Punto di vista storico e disciplinare	6
1.2 Punto di vista didattico	8
2 Modelli e analogie nella didattica della fisica	13
2.1 Definizioni di modello matematico	13
2.2 La modellizzazione matematica nella fisica	15
2.3 Analogie e modelli analogici nella fisica	17
3 Storia della modellizzazione matematica in fisica: dall'azione a distanza al concetto di campo	21
3.1 La nascita della modellizzazione matematica in fisica	21
3.2 La crisi dell'azione a distanza e il concetto di campo	27
4 L'evoluzione matematica dell'elettrostatica	32
4.1 La dimostrazione geometrica di Newton	32
4.2 L'analogia matematica di Coulomb e Cavendish	37
4.3 La teoria del potenziale e la formalizzazione del modello newtoniano	41
4.4 La reinterpretazione di Maxwell della teoria del potenziale con le idee di Faraday	46
5 La storia della fisica come mezzo per la didattica	53
5.1 La storia della fisica e l'evoluzione cognitiva degli studenti	53
5.2 La storia della scienza come veicolo per trasmettere la natura della scienza	56
6 Percorso didattico	58
6.1 Unità 1: dalla legge di gravitazione universale alla legge di Coulomb	60
6.2 Unità 2: Il campo elettrico e il potenziale	66
6.3 Unità 3: la teoria di campo e l'azione tramite un mezzo	71

7	Considerazioni didattiche sul percorso	77
7.1	L'approccio costruttivista	77
7.2	Considerazioni didattiche sul percorso	78
7.3	Riscontro degli obiettivi nelle indicazioni nazionali per i licei	81
	Conclusioni	85
A	Philosophie Naturalis Principia Mathematica	87
A.1	Lemma VII	87
A.2	Proposizione II. Teorema II.	88
A.3	Lemma XII	89
A.4	Proposizione IV. Teorema IV.	89
A.5	Proposizione VI. Teorema V	90
B	An Attempt to Explain Some of the Principal Phaenomena of Electricity, by means of an Elastic Fluid	92
B.1	Lemma IV	92
B.2	Lemma V	92
B.3	Prop. V. Problem 1.	93
C	Le Indicazioni Nazionali per i licei scientifici	95
	Bibliografia	106

Introduzione

Questa tesi nasce da una riflessione storica e filosofica sull'evoluzione che portò al progressivo superamento del concetto di forza vista come azione a distanza in favore di una forza come azione per contatto in un mezzo descritto in termini di una teoria di campo. Mettere in evidenza le motivazioni, le concezioni storiche e filosofiche che caratterizzano un cambiamento concettuale così importante, porta a vedere questo tema come un crocevia in cui si incontrano diversi aspetti. Il ruolo dei modelli e delle analogie, le diverse rappresentazioni matematiche e le scelte epistemologiche che portano all'evoluzione di un concetto fisico, sono aspetti che rivestono una grande importanza nella nascita della concezione newtoniana delle interazioni e nel suo superamento. L'idea alla base del lavoro è che, grazie a questa molteplicità di aspetti che emergono dall'analisi storica, si possa costruire un percorso didattico che favorisca un apprendimento significativo di alcuni concetti della fisica.

L'obiettivo è dunque quello di costruire un percorso didattico nell'ambito dei fenomeni elettrostatici che accompagni lo studente nel delicato cambiamento dal paradigma concettuale dell'azione a distanza a quello dell'azione tramite un mezzo grazie all'introduzione del concetto di campo. L'elettrostatica infatti può essere vista come un punto di congiunzione tra diverse descrizioni concettuali delle forze e tra diversi metodi di rappresentazione matematica che forniscono punti di vista molteplici da cui osservare i fenomeni e poterli meglio comprendere.

Nel capitolo 1 verrà analizzato il rapporto tra matematica e fisica a partire dalla letteratura che ha trattato questo legame da un punto di vista storico, disciplinare e didattico. Da un'analisi storica emerge come lo sviluppo delle due discipline sia profondamente legato, tanto da suscitare stupore di fronte all'osservazione dell'efficacia della loro interazione, capace di portare a una loro evoluzione quasi simbiotica. Questa relazione porta a delle riflessioni in ambito didattico da cui emerge una difficoltà nell'utilizzo dei metodi e del linguaggio della matematica e della fisica fuori dal contesto delle singole discipline.

Nel capitolo 2 verranno presentati due strumenti che possono favorire il superamento delle barriere tra matematica e fisica: i modelli matematici e le analogie. In particolare verrà evidenziato il loro ruolo nella didattica. Il modello matematico permette di rappresentare matematicamente un sistema reale in modo tale da semplificarne l'interpretazione. Da solo, tuttavia, non è sufficiente per la comprensione di un fenomeno: occorrono modelli che facciano

uso di analogie e di concetti familiari per gli studenti in modo da comprendere e interpretare il modello matematico integrandolo con i propri schemi concettuali.

Nel capitolo 3 verrà affrontato da un punto di vista storico e filosofico il passaggio da un modello di forza come azione a distanza a un modello di interazione tramite un mezzo. Verranno evidenziate in particolare le scelte alla base dei modelli matematici utilizzati da Newton e Maxwell e come queste abbiano influenzato la fisica, non solo nel suo sviluppo concettuale ma anche in quello epistemologico.

In seguito, nel capitolo 4 si andrà nel dettaglio dei principali passaggi che caratterizzano il passaggio dall'azione a distanza al concetto di campo all'interno dell'ambito dell'elettrostatica. In particolare, si seguirà come filo conduttore la descrizione delle forze centrali con la legge dell'inverso del quadrato della distanza, partendo dalla descrizione geometrica della forza di gravitazione universale di Newton per arrivare alla forza elettrostatica. Verrà messo in luce come questa legge sia stata utilizzata e interpretata con concezioni e strumenti matematici diversi, arrivando a mostrare il fatto che all'interno dell'elettrostatica queste diverse rappresentazioni portino a risultati che si equivalgono.

Il capitolo 5 servirà per giustificare le scelte metodologiche alla base del percorso didattico delineato nel capitolo successivo. Verrà infatti analizzato l'uso della storia della fisica come mezzo per la didattica attraverso la letteratura e, in particolare, verranno presentati degli studi che mettono in correlazione l'evoluzione della fisica con quella cognitiva degli studenti. Verrà sottolineato anche come la storia della fisica nell'ambito dell'insegnamento permetta di mostrare un'immagine più completa della natura della scienza.

Nel capitolo 6 viene proposta un'applicazione alla didattica del percorso storico approfondito nei capitoli 3 e 4, pensata per gli studenti del quarto anno di Liceo Scientifico. Il percorso, suddiviso in 3 unità, affronta l'elettrostatica seguendo le tappe principali che hanno caratterizzato la storia della fisica, in modo da accompagnare la costruzione dei concetti mettendo in evidenza le motivazioni che hanno portato alla necessità di un cambiamento da un paradigma concettuale newtoniano a uno maxwelliano. Per ogni unità verranno messi in particolare evidenza gli aspetti storici e filosofici, l'utilizzo delle analogie e la relazione tra matematica e fisica.

Infine, nel capitolo 7 verrà contestualizzato il percorso didattico all'interno di un quadro di riferimento costituito da tre aspetti. Il primo riguarda l'approccio didattico adottato e consente di confrontare il percorso con i principi che caratterizzano un approccio di tipo costruttivista. Il secondo riguarda le considerazioni che derivano dalla letteratura scientifica sulla didattica degli argomenti trattati in ogni unità alle quali il percorso si propone di rispondere. L'ultimo aspetto è costituito dalle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici, con le quali il percorso verrà confrontato in modo da collocare il lavoro in un contesto istituzionale.

Capitolo 1

Il rapporto tra matematica e fisica

In questo capitolo si analizzerà il rapporto tra le discipline della matematica e della fisica a partire dalla letteratura. Questo legame verrà trattato da tre punti di vista diversi: quello storico, legato a quello disciplinare, e quello didattico. Storicamente lo sviluppo delle due discipline è sempre stato particolarmente legato. La loro interazione si è spesso rivelata costruttiva, in un rapporto stretto in cui i passi fatti da una disciplina ha condizionato lo sviluppo dell'altra. Dagli studi in ambito didattico emerge tuttavia un rapporto conflittuale tra la matematica e la fisica, dovuto alla difficoltà di integrare i linguaggi e i metodi delle due discipline.

1.1 Punto di vista storico e disciplinare

La matematica ha da sempre avuto un ruolo tanto grande quanto anomalo all'interno della conoscenza umana. Mamone Capria in *Matematica e fisica fra linguaggio e realtà* [26] attribuisce questa anomalia al carattere astratto della matematica, che parla di cose lontane dalla realtà ma che rimangono in qualche modo ad essa connesse. Data la lontananza della matematica dalla realtà sensibile, è sorprendente quanto essa, più di ogni altra scienza, produca proposizioni intersoggettive, che “costringono all'assenso”. La perfezione e l'universalità della matematica la rendevano, secondo Platone, una disciplina fondamentale da studiare, in quanto forniva una bellezza e un appagamento spirituale che si contrapponeva alla corruzione umana. Nel corso dei secoli gli argomenti a supporto dell'apprendimento della matematica sono diventati più pratici e utilitaristici ed emergono tuttora anche nell'ambito dell'insegnamento. Anche nel rapporto tra le discipline della matematica e della fisica spesso la matematica viene vista come un modo per descrivere e calcolare. Tuttavia, se si va più nel profondo, a partire da un punto di vista storico, del rapporto tra matematica e

fisica, si riscontra una funzione fondamentale della matematica nell'evoluzione della conoscenza fisica.

Giorgio Israel in *Le immagini della matematica come strumento per l'interpretazione della realtà* [24] afferma che non si possa parlare di un rapporto organico tra matematica e fisica fino al Seicento, quando si inizia a intravedere una nuova fisica, con al centro la meccanica e una nuova matematica adatta a descriverla, costituita dal calcolo infinitesimale. Prima di questo nodo fondamentale la descrizione dei fenomeni avveniva in maniera qualitativa e non quantitativa. Se questo passaggio si compie con Newton, è con Galileo che si inizia ad affermare la possibilità di utilizzare degli oggetti matematici astratti per descrivere la realtà fisica concreta. Questo passaggio è fondamentale nella storia del rapporto tra matematica e fisica. Viene infatti superata la distinzione pre-galileiana tra la fisica terrestre, imperfetta e non descrivibile matematicamente e quella celeste, l'unica descrivibile dalla perfezione della matematica, in quanto anch'essa perfetta e incorruttibile.

Secondo Galileo tutta la realtà può essere descritta e studiata tramite la matematica se prima ci si allontana da ciò che si percepisce con i sensi e si guarda la realtà attraverso un modello matematico. Il passo fondamentale compiuto da Galileo, come afferma ancora Mamone, è quello di guardare oltre all'aspetto qualitativo dei fenomeni, e ritenere che la modellizzazione matematica sia possibile se si riescono a "difalcare gli impedimenti della materia". Un esempio significativo si può vedere nella matematizzazione della caduta dei gravi. Affermare che la caduta di una piuma abbia un aspetto quantitativo identico a quella di un sasso è quantomeno poco intuitivo, bisogna superare l'impedimento dell'aria, cioè immaginare che un elemento che fa parte della nostra quotidianità non ci sia. Facendo questa operazione si può capire cosa, in ogni fenomeno di caduta di gravi, rimane invariato, cioè una variazione della velocità, l'accelerazione. Questo concetto di variazione di una variazione non può essere dato per scontato, implica una velocità variabile istante per istante e non solo una velocità media calcolata su intervalli di tempo. Questa sembra una contraddizione: se la velocità è una media data dal rapporto tra una distanza rispetto al tempo in cui viene percorsa, allora cosa rappresenta la media rispetto a un solo istante? Non è una domanda banale, e Mamone cita diversi filosofi, tra cui Aristotele, che si erano già imbattuti nella difficoltà a concepire il "mutamento di un mutamento". Nonostante l'introduzione di concetti geometrici da parte di Galileo per districarsi nella matematizzazione del moto uniformemente accelerato, è con l'introduzione del calcolo infinitesimale che si può superare il problema di pensare a una velocità istantanea. Questo viene fatto tramite la rappresentazione geometrica del moto all'interno di uno spazio e un tempo assoluti, visti come continui geometrici. La velocità istantanea in questa rappresentazione assume una forma visibile, una tangente a una curva in un punto.

Storicamente la spazializzazione del moto non ha risolto i problemi legati ai concetti cinematici, ma li ha trasformati in problemi legati a concetti geometrici. Emerge cioè la necessità di un maggiore rigore matematico, cosa che viene ricercata con sempre maggiore precisione. Mantenendo l'esempio della tangente a una curva, si sono susseguite definizioni sempre più vicine alla definizione

moderna, quindi con formalizzazioni sempre meno intuitive e più rigorose del concetto di limite. È interessante notare, sottolinea Mamone, che gran parte dell'evoluzione dell'analisi matematica è avvenuta senza delle definizioni totalmente ineccepibili delle nozioni di base. C'è il rischio di vedere la matematica come qualcosa di immutabile, di una disciplina nata come viene insegnata oggi, mentre è affascinante mettere in evidenza come la matematica, nei suoi metodi, nel suo linguaggio, si sia evoluta, spesso di pari passo con la fisica, in un arricchimento reciproco che ha portato vantaggio a entrambe le discipline.

Nel parlare di questa relazione tra matematica e fisica Mamone cita Eugen Wigner, che nel 1960 parlava di una “irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali”. Questa affermazione era dettata dallo sviluppo scientifico recente, che attingeva a teorie matematiche create seguendo criteri di bellezza e di rigore logico interni ad alla disciplina, ma che si adattavano perfettamente alle esigenze della fisica.

Allo stesso modo il contributo della fisica teorica nello sviluppo di formalismi matematici avanzati è stato sempre più importante. Hilbert riteneva che lo sviluppo della matematica non fosse dettato dalla sua assiomatizzazione, quanto dalla necessità di trovare soluzioni a dei problemi. Alcuni di questi problemi sono interni alla disciplina della matematica, ma molti altri derivano dalla ricerca di soluzioni a problemi che emergono da altre discipline, in particolare la fisica. La matematizzazione della fisica ha un significato molto profondo, che va oltre la necessità di quantificare e oltre l'idea di matematica come linguaggio della fisica. A partire dal Seicento, infatti, la matematica diventa il “cuore della concettualizzazione scientifica”. Parlare di “applicazione” della matematica alla fisica per descrivere l'incontro tra le due discipline è troppo riduttivo, piuttosto si dovrebbe parlare di un'interazione costruttiva che porta a un'evoluzione di entrambe.

1.2 Punto di vista didattico

Come appena mostrato, le discipline della matematica e della fisica sono profondamente correlate tra loro e traggono significato l'una dall'altra. Tuttavia, nel contesto della didattica, spesso la matematica all'interno della fisica viene vista come un semplice strumento di calcolo e la fisica all'interno della matematica come un campo di applicazione dei concetti matematici.

Giorgio Israel [24] analizza questa situazione nel contesto italiano e afferma che è stata proprio la tradizione matematica nostrana, con la grande attenzione ai punti di vista empiristici e al legame tra analisi matematica e fisica-matematica che si ritrova in scienziati come Betti, Volterra e Levi-Civita a produrre una reazione verso il formalismo e il modello assiomatico. Nel secondo dopoguerra l'approccio analitico subì un forte incremento in Italia, mentre altrove, dove la tradizione empiristica non era stata così forte, era già in declino. In questo approccio si possono ritrovare alcuni elementi vicini all'approccio “bourbakista”.

Questo punto di vista, che vede una separazione netta tra matematica e scienza, porta alla diffusione dell'immagine della matematica come sintassi del pensiero puro, come una struttura astratta che in qualche modo misterioso si adatta alla descrizione della realtà. Si riconosce quindi una connessione tra i fenomeni sperimentali e le strutture matematiche, ma la causa di ciò rimane sostanzialmente un'incognita. Questo è l'approccio più estremo tra le concezioni assiomatiche, sono presenti molte altre posizioni intermedie che riconoscono i rischi di una netta separazione della matematica dal campo delle ricerche empiriche.

Tuttavia, secondo Israel, è prevalso in Italia un punto di vista vicino a quello "bourbakista", ed il motivo può essere ricondotto alla riforma Gentile dell'insegnamento. Questa riforma aprì all'idea che il contenuto del pensiero scientifico e matematico sia di competenza della filosofia. Le idee e la produzione scientifica di pensatori come Newton, Galileo o Descartes rientrano nell'insegnamento secondario solo nell'ambito della filosofia. La funzione conoscitiva della realtà è relegata quindi alla filosofia, e la matematica, insieme alle altre discipline scientifiche, ha principalmente una funzione pratica. Si crea così una separazione tra l'obiettivo che dovrebbe avere l'insegnamento della filosofia, cioè imparare a pensare, e quello delle materie scientifiche, cioè una sorta di addestramento a compiere delle operazioni tecniche. In questo modo la matematica appare come un insieme di regole rigide, da applicare in diversi contesti, un'immagine sterile, priva di valore concettuale.

Il ruolo della matematica nella storia, nella cultura e nel suo rapporto con le altre discipline tuttora non è cambiato di molto e la trattazione della relazione tra matematica e fisica rimane quasi inesistente nell'insegnamento secondario. Secondo Israel è necessario riprendere tra gli oggetti dell'insegnamento della matematica i contenuti culturali e non solo quelli pratici. Si possono identificare dei nodi tematici fondamentali nella comprensione dei metodi e dei concetti utilizzati nell'analisi matematica della realtà. Esempi di applicazione di questa metodologia nascono proprio dall'analisi storica fatta in precedenza. Infatti, osserva Israel, "una delle più grandi 'riforme' nell'insegnamento della matematica e del suo ruolo applicativo, sarebbe quella di evidenziare sempre l'aspetto concettuale di questioni che si presentano sotto una veste che solo in apparenza è esclusivamente tecnica".

La modalità con cui negli anni è stata tramandata l'immagine della matematica e della fisica ha contribuito a creare delle difficoltà negli studenti non solo nell'approccio alle singole discipline ma anche nel loro rapporto reciproco. Michelsen [30] evidenzia come spesso l'obiettivo che dovrebbe avere l'educazione di promuovere un pensiero trasversale alle singole discipline, in modo da saperle integrare e utilizzare in maniera costruttiva nei problemi della vita quotidiana, viene perso di vista. In genere le discipline rimangono ben separate tra loro e nell'istruzione prevale un approccio monodisciplinare in cui la conoscenza rimane confinata entro le singole discipline in maniera frammentata.

Questa suddivisione può essere attribuita a una crescente mole di conoscenza scientifica, che ha portato nel tempo a una sempre maggiore specializzazione che ha modificato il modo di fare ricerca degli scienziati. Se prima si cercava

una conoscenza in campi diversi e si cercava un'unificazione, pian piano si iniziò a ricercare l'originalità e frontiere sempre nuove della conoscenza. Una specializzazione così alta ha portato a riconoscere con maggiore precisione l'identità delle diverse discipline. La suddivisione in discipline e in campi di ricerca rimane la modalità con cui è organizzata la ricerca e la didattica, e questo porta al rischio di un'eccessiva rigidità e chiusura all'interno dei confini delle discipline.

Il tema del linguaggio

Osborne in *Science Without Literacy: a ship without a sail?*, mostra come il linguaggio sia un tema centrale nella scienza [35]. Citando Postman e Weingarter:

Almost all of what we customarily call 'knowledge' is language, which means that the key to understanding a subject is to understand its language. A discipline is a way of knowing, and whatever is known is inseparable from the symbols (mostly words) in which the knowing is codified.

Fare scienza è un processo complesso in cui entrano non solo i contenuti scientifici, ma anche il ragionamento e l'argomentazione. Occorre identificare gli aspetti significativi di un fenomeno, occorre ipotizzare delle teorie e verificarle, occorre confrontare più teorie di uno stesso fenomeno e argomentare per valutare la migliore. Occorre, in sostanza, qualcosa in più rispetto alla sola conoscenza dei contenuti, cioè la capacità di comprendere e utilizzare il linguaggio della scienza.

In una prospettiva didattica, l'immagine della scienza e del suo linguaggio appare diversa. Osborne sottolinea che spesso il linguaggio della scienza è visto dagli insegnanti come un modo condiviso e univoco per rappresentare il mondo fisico. Le difficoltà dell'apprendimento sono quindi legate al dover acquisire concetti e procedimenti mentali complessi. L'obiettivo, legato al linguaggio, dell'educazione scientifica dovrebbe invece essere quello di insegnare agli studenti a usare il linguaggio della scienza per costruire dei significati. La comprensione di un concetto fisico complesso passa attraverso la capacità degli studenti di muoversi all'interno di diverse rappresentazioni matematiche dello stesso. Il significato del concetto non emerge da ciascuna di queste rappresentazioni, ma proprio dalla loro molteplicità. Questa varietà è la causa della complessità del linguaggio della scienza, composto da tanti elementi diversi che si integrano tra loro, tra cui parole, immagini, equazioni, grafici e tabelle. In questo quadro il linguaggio della matematica diventa un tassello fondamentale e necessario, perché i fenomeni fisici e le loro interazioni sono descritti perfettamente dalla matematica, che fa da ponte tra il linguaggio verbale e il significato concettuale che gli scienziati vogliono esprimere. Il linguaggio della matematica entra quindi nella fisica in maniera complessa, e non stupiscono le molte difficoltà riscontrate nell'insegnamento per quanto riguarda la relazione tra le due discipline.

Molti studi che indagano il rapporto tra matematica e fisica nella didattica pongono al centro il problema del linguaggio. Le due materie a scuola vengono viste come materie correlate, soprattutto per l'uso della matematica nella fisica.

Suppose the temperature on a rectangular slab of metal is given by $T(x, y) = k(x^2 + y^2)$ where k is a constant.

What is $T(r, \theta)$?

Figura 1.1: Problema tratto da <https://bridge.math.oregonstate.edu/ideas/functions/> [9]

Questa correlazione sfocia in modelli di integrazione che, secondo Michelsen, in genere si basano su due presupposti:

- Insegnare la matematica in relazione alla scienza aiuta l'apprendimento degli studenti in quanto fornisce dei contesti significativi di applicazione di concetti matematici astratti, cosa che incentiva anche un atteggiamento positivo nei confronti della disciplina;
- La matematica offre all'interno dell'insegnamento della scienza gli strumenti per quantificare, rappresentare e analizzare i fenomeni, fornendo anche un senso di oggettività della scienza.

La dicotomia tra la concezione della matematica come strumento per calcolare e la fisica come contesto di applicazione crea dei problemi agli studenti nell'apprendimento delle due discipline.

Diversi studi hanno evidenziato una correlazione tra un rendimento positivo degli studenti in matematica e in fisica in diversi gradi di istruzione. Questa correlazione, secondo Meltzer [29], non implica una correlazione positiva anche per quanto riguarda la comprensione concettuale della fisica. Redish [37] sostiene che questa distanza sia dovuta al fatto che il linguaggio della matematica è diverso se usato all'interno della matematica o all'interno della fisica. Un linguaggio non è universale, necessita sempre di un contesto. L'approccio all'insegnamento deve quindi tenere in considerazione le difficoltà che derivano dal dover apprendere due linguaggi differenti. Quello che spesso manca, secondo Redish, è l'unione tra matematica e fisica nella didattica, unione necessaria per una comprensione profonda della fisica. La matematica non permette solo di calcolare, fare previsioni e descrivere leggi e teoremi, ma apre a una conoscenza concettuale ed epistemologica della fisica.

Dray e Manogue [9] portano come esempio di come la matematica possa dare significato alla fisica il problema in figura 1.1. Un fisico e un matematico tendenzialmente affronteranno la domanda in modo differente. Un matematico, che tenderà a considerare T come una funzione matematica dipendente da due variabili, scriverà $T(r, \theta) = k(r^2 + \theta^2)$. Un fisico, invece, dato il contesto del problema, interpreterà T come una funzione fisica, la temperatura in un certo punto nello spazio, per cui $T = T(x, y)$ sarà la temperatura in coordinate cartesiane, mentre $T = T(r, \theta)$ sarà la temperatura in coordinate polari. La risposta di molti fisici sarà pertanto che $T(r, \theta) = kr^2$, risposta non presa in considerazione dai matematici in quanto T sarebbe usato come nome di due

funzioni differenti. Questo, commentano Redish e Kuo [38], è un esempio portato all'estremo, in quanto si considerano un matematico e un fisico che non escono dal proprio ambito disciplinare, ma è interessante per mostrare come i simboli matematici nella fisica assumano significati diversi rispetto al contesto della pura matematica.

Queste differenze che emergono tra i linguaggi delle discipline si riflettono in problematiche a livello didattico. È frequente che nell'insegnamento si vedano le due discipline in maniera totalmente separata, complice anche l'organizzazione strutturale della scuola e spesso la mancanza di comunicazione tra i docenti per stabilire linee comuni.

Un altro problema messo in evidenza dalle ricerche in didattica della fisica è costituito dalle idee e dalle credenze che gli studenti hanno nei confronti della fisica. Un'idea spesso radicata è che le equazioni servano solo per dare delle misure, per fare dei calcoli. Redish [37] sottolinea la frequenza con cui gli studenti sostituiscono i numeri all'interno delle equazioni il prima possibile, per ricondurre l'equazione a una forma più simile a quelle viste in matematica. Questa abitudine, oltre a portare al rischio di errori nel calcolo o nell'uso delle giuste unità di misura, genera una visione limitata della fisica nel suo rapporto con la matematica.

Pietrocola [36] ha evidenziato due modalità con cui l'insegnamento della matematica in fisica consente l'apprendimento della fisica. La prima si basa sulle *technical skills*, cioè le competenze nella gestione di sistemi matematici, come operazioni, equazioni e costruzione di grafici. La seconda si basa sulle *structural skills*, le capacità di utilizzare queste conoscenze matematiche per strutturare delle situazioni fisiche. Le *structural skills* non si possono sviluppare fuori dall'ambito della fisica e, di conseguenza, la capacità di utilizzare le conoscenze matematiche nella matematica non è di per sé sufficiente per garantire la capacità di utilizzare questa conoscenza nella fisica. L'abilità strutturale permette un'appropriazione totale della conoscenza fisica ed è quindi un obiettivo che si pone la didattica della fisica.

Attualmente un'area di ricerca molto importante che si propone di sviluppare capacità strutturali è quella della modellizzazione matematica. Come verrà approfondito nel prossimo capitolo, infatti, in un processo di modellizzazione matematica si incontrano aspetti fisici, nell'osservazione e nella selezione degli elementi da concettualizzare, aspetti matematici, nella rappresentazione e interpretazione che permette di trovare nuovi risultati e aspetti comunicativi alla fine del processo.

Capitolo 2

Modelli e analogie nella didattica della fisica

Nel capitolo precedente è stato mostrato il legame profondo tra la matematica e la fisica e la difficoltà che può nascere nell'interazione tra le due discipline. In questo capitolo verrà presentato uno strumento che permette di rappresentare matematicamente un sistema fisico: il modello matematico. Il modello matematico assume un ruolo centrale all'interno della fisica, ma emerge anche la sua importanza nella didattica come strumento per superare la distanza che può crearsi tra la disciplina della matematica e della fisica. Oltre ai modelli, assumono un ruolo importante nella fisica e nella didattica anche le analogie, che possono aiutare nello sviluppo di modelli mentali intuitivi che permettano di interpretare fenomeni fisici e modelli matematici poco accessibili.

2.1 Definizioni di modello matematico

Nonostante il concetto di modello matematico fosse noto da molto, troviamo la definizione enunciata per la prima volta nel 1955 da von Neumann [32]:

By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct solely and precisely that it is expected to work - that is, correctly to describe phenomena from a reasonably wide area. Furthermore, it must satisfy certain esthetic criteria - that is, in relation to how much it describes, it must be rather simple.

Il primo passo nella costruzione del modello è quindi semplificare la situazione reale, compiere un processo di astrazione che porti a prendere in considerazione solo le proprietà fondamentali.

In accordo con Mogens Niss, Werner Blum e Peter Galbraith [4], un modello matematico può essere definito come la relazione tra la matematica e la realtà.

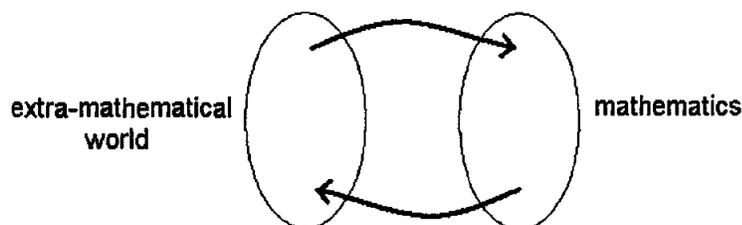


Figura 2.1: Ciclo di modellizzazione di Blum et al. [4].

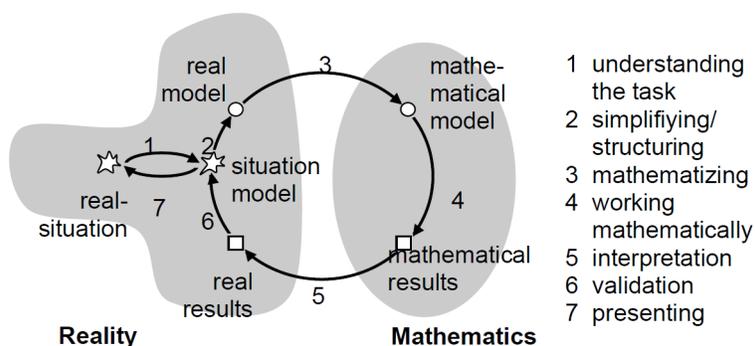


Figura 2.2: Ciclo di modellizzazione di Blum e Leiss riportato da Borromeo Ferri [12].

Il modello è quindi costituito da un dominio extra-matematico (D), un dominio matematico (M) e da una mappatura che stabilisce una relazione tra i due domini. Il processo consiste nella selezione di tutto ciò che è rilevante nel dominio D e nella sua traduzione in termini matematici nel dominio M. In questo dominio è possibile utilizzare la matematica per trovare risultati che vengono poi interpretati nel dominio D. Questo ciclo di modellizzazione, rappresentato nella figura 2.1, può essere ripetuto quante volte necessario.

Una rappresentazione del ciclo di modellizzazione usato da Blum e Leiss, coerente con la precedente, anche se più dettagliata, è riportata da Borromeo Ferri [12]. Come si evince dalla figura 2.2, vengono individuate sei fasi e sette processi che descrivono il passaggio tra due fasi differenti.

Le sei fasi sono le seguenti:

1. *Real situation*: la situazione reale, il problema da risolvere.
2. *Situation Model*: rappresentazione mentale della situazione reale.
3. *Real Model*: rappresentazione del modello reale.

4. *Mathematical Model*: modello matematico che rappresenta il modello reale.
5. *Mathematical Results*: risultati ricavati dalla risoluzione del modello matematico.
6. *Real Results*: risultati trovati dal modello matematico interpretati nel mondo reale.

I sette processi descrivono la transizione tra due fasi e sono le seguenti:

1. *Understanding the task*: partendo dalla situazione reale, è il processo che porta al riconoscimento del problema e alla sua rappresentazione mentale.
2. *Simplifying/Structuring the task*: partendo dalla rappresentazione reale del problema, è il processo che permette il raggiungimento del modello reale tramite la selezione delle informazioni importanti per identificare gli aspetti essenziali del problema in termini non matematici.
3. *Mathematizing*: processo di traduzione in termini matematici del modello reale.
4. *Working mathematically*: uso del linguaggio della matematica per trovare dei risultati dal modello matematico.
5. *Interpreting*: interpretazione dei risultati matematici all'interno del dominio extra-matematico.
6. *Validation*: confronto dei risultati reali con la rappresentazione mentale iniziale in modo da capire se il modello è utile.
7. *Presentation*: se il modello è valido viene presentato in termini reali.

2.2 La modellizzazione matematica nella fisica

Il modello è riconosciuto all'interno della scienza come uno strumento necessario a collegare la teoria alla realtà. Il modello è una rappresentazione di un fenomeno prodotto con lo scopo di semplificarlo e poterlo spiegare. Alcuni studi propongono la suddivisione delle teorie fisiche in modelli fisici e modelli matematici. Per esempio, Greca e Moreira [16] sostengono che il modello fisico sia l'insieme di semplificazioni fatte in un sistema fisico, mentre il modello matematico la struttura sintattica, priva di contenuto, con cui si descrive il sistema. Sono visti quindi come oggetti diversi ma profondamente connessi, in quanto il modello matematico nella fisica assume significato grazie all'interpretazione che può fornire il modello fisico. La visione più condivisa attualmente è che la distinzione non sia così netta. Boniolo e Budnich [5] sostengono che non si possa vedere la matematica come oggetto esterno alla fisica, al contrario, la fisica è intrinsecamente matematica:

the physical theory is not something to which mathematics might be added externally, thereby asking ourselves the reason for this effectiveness. The modern and the contemporary physical theories are physical-mathematical signs. They are something that cannot be divided into a mathematical part and nonmathematical part.

Questa relazione profonda tra matematica e fisica non può essere ignorata nel contesto dell'insegnamento e apprendimento della fisica.

La modellizzazione matematica in didattica della fisica

Abbiamo parlato nel capitolo 1 del rapporto tra la fisica e la matematica e l'importanza di quest'ultima non solo per descrivere la fisica e fornirle un linguaggio, ma anche per darle gli strumenti per dedurre nuova conoscenza e per dare significato ai concetti. In questa sezione viene mostrato come la modellizzazione matematica all'interno della didattica della fisica possa essere uno strumento per superare la distanza tra le due discipline.

I modelli e i processi di modellizzazione matematica sono considerati un punto fondamentale nell'insegnamento della fisica: diversi studi, come quello di Hestenes [22] li posizionano proprio al centro della didattica. Secondo Hestenes, nell'insegnamento della fisica spesso il modello matematico viene identificato con le sue equazioni, viene cioè meno l'interpretazione del modello, senza la quale un'equazione è sterile e non rappresenta altro che una relazione tra variabili matematiche. Si riscontra quindi il problema sottolineato nel capitolo 1 riguardo all'utilizzo della matematica nella fisica, vista spesso solo come uno strumento per fare i calcoli. Diventa perciò necessario, secondo Hestenes, insegnare esplicitamente strategie e tecniche di modellizzazione. La conoscenza scientifica può essere suddivisa in due tipologie: fattuale e procedurale. La conoscenza fattuale consiste nell'insieme delle leggi, teorie e concetti della fisica. La conoscenza procedurale consiste invece nelle tecniche e strategie utili per sviluppare e utilizzare la conoscenza fattuale. Questo secondo tipo di conoscenza è spesso trascurato nell'insegnamento. Un modo per sviluppare la conoscenza procedurale è quello di esplicitare e insegnare i processi di modellizzazione. Questi processi possono essere suddivisi in quattro fasi: la descrizione del sistema da modellizzare, la formulazione delle equazioni del sistema, la ramificazione, cioè la specificazione del modello sulla base delle condizioni iniziali del problema in esame e infine la validazione del modello. L'attività di modellizzazione richiede dunque qualcosa di più rispetto allo studio e all'applicazione di una serie di formule e concetti.

Oltre al modello matematico esterno, per una comprensione di un fenomeno fisico è necessario un modello mentale che permetta di interpretarlo. A questo scopo è particolarmente indicato l'utilizzo di diverse rappresentazioni, che rivestono un ruolo essenziale per aiutare lo studente a sviluppare un'intuizione fisica. Per permettere questo è necessario esplicitare la relazione che la rappresentazione, sotto forma di un diagramma, un grafico o un'equazione, ha con la fisica. Un esempio di rappresentazione utilizzata nell'insegnamento è il diagramma delle forze, che unisce aspetti geometrici con aspetti fisici. È necessario

mostrare chiaramente le ipotesi fisiche che vengono compiute in una rappresentazione, ipotesi che spesso sono ritenute scontate da chi è abituato a risolvere problemi fisici, ma non per gli studenti che devono imparando a muoversi e maneggiare rappresentazioni differenti dei concetti fisici.

2.3 Analogie e modelli analogici nella fisica

Abbiamo visto le definizioni e il ruolo del modello matematico nella disciplina della fisica. I filosofi della scienza si sono sempre interrogati su cosa sia una teoria scientifica e su come modelli e analogie si rapportano con essa.

Tra le teorie che sono state sviluppate da diversi filosofi della scienza sul rapporto tra teoria modelli e analogie si nota il pensiero di Hesse [21]. In *Models and Analogies in Science* vengono messe a confronto le posizioni di due filosofi della scienza riguardo alle teorie scientifiche. Da una parte Duhem vedeva una teoria fisica ideale come un sistema matematico con una struttura deduttiva simile a quella degli *Elementi* di Euclide, dall'altra Campbell sosteneva la possibilità di utilizzare una teoria come modello per una nuova teoria, che viene così ridotta a una più familiare tramite l'analogia. L'analogia per Campbell non è relegata a un aiuto per la formulazione di una teoria ma ne è parte integrante. Hesse, pur non considerando risolta questa contrapposizione, ritiene che il modello è un elemento fondamentale nella struttura delle teorie fisiche. Senza il modello non è possibile la deduzione del fenomeno in quanto esso stesso fornisce associazioni e analogie non schematizzabili in una struttura deduttiva rigorosa. Hesse sostiene che l'analogia è necessaria per il funzionamento dei modelli come interpretazioni di teorie scientifiche.

La parola *analogia* viene dal greco ἀναλογία e significa “proporzione”. L'analogia infatti è intesa come una somiglianza tra relazioni in due domini differenti, cioè A è correlato a B come C è correlato a D . Gentner [15] ha proposto l'idea di analogia come un isomorfismo matematico $M : B \rightarrow T$, dove B è il dominio base (per esempio il sistema solare) e T è il dominio di destinazione (per esempio la struttura atomica). Utilizzare una analogia equivale quindi a fare una mappatura da un dominio a un altro.

Nella scienza è frequente l'uso di *analogie formali*, in cui gli oggetti dei due domini non devono condividere le stesse proprietà materiali per essere confrontati. Un esempio è l'analogia tra il moto dei pianeti attorno al sole e il moto degli elettroni attorno al nucleo: gli oggetti nei due domini differiscono molto nelle proprietà e nella causa del moto ma esiste un'analogia formale tra le teorie con cui i due fenomeni sono descritti.

Un esempio significativo dell'utilizzo delle analogie per lo sviluppo di teorie fisiche è fornito da Maxwell. Bellone in *I modelli e la concezione del mondo nella fisica moderna da Laplace a Bohr* afferma che Maxwell percorse la via delle analogie formali per evitare due pericoli: quello di adottare una ipotesi fisica sulla natura dei fenomeni studiati e quello di ridurre il fenomeno a un insieme di formule matematiche. Maxwell si ispirò ai lavori di William Thomson sulle analogie tra il calore e l'elettrostatica per arrivare ad utilizzare teorie di domini

differenti per arrivare a nuova conoscenza riguardo ai fenomeni elettromagnetici. Come si vedrà nel Capitolo 3, Maxwell diede una struttura matematica alle idee intuitive di Faraday, per il quale l'azione di tutte le forze non avveniva a distanza ma si propagava in un mezzo descrivibile tramite linee di forza. Per costruire una teoria matematica compatibile con le idee di Faraday e con le leggi già note, Maxwell si servì di modelli idrodinamici e di meccanica dei solidi elastici in modo da dare un aiuto nella comprensione dei fenomeni elettromagnetici ma anche per utilizzare gli strumenti matematici sviluppati all'interno di queste teorie per arrivare a nuova conoscenza fisica. Le linee di forza introdotte da Faraday fornivano solo un modello geometrico del fenomeno fisico e, pur potendo rappresentare le direzioni delle forze, non poteva rappresentarne le intensità. Maxwell si servì della teoria idrodinamica per rappresentare le linee di forza come dei tubi a sezione variabile in cui scorreva un fluido immaginario soggetto alle leggi della meccanica. Questo non significava fare un'ipotesi sulla costituzione fisica di un mezzo, a potersi servire degli strumenti matematici della meccanica dei fluidi per studiare i fenomeni elettromagnetici.

Come emerge da questo esempio l'analogia nella scienza condivide con i modelli la loro funzione esplicativa. Il principio alla base dell'analogia, secondo Achinstein [1], è proprio quello di facilitare la comprensione di concetti attraverso la somiglianza con altri più familiari. Oltre all'aiuto nella comprensione di fenomeni, l'analogia suggerisce le modalità per arricchire la teoria di un fenomeno seguendo le orme di un fenomeno simile e più conosciuto. Nonostante modelli e analogie abbiano in comune questo potere esplicativo, sono oggetti ben diversi, anche se spesso connessi tra loro. L'analogia indica la relazione tra diversi oggetti o fenomeni mentre il modello è un processo che permette di rappresentare la realtà attraverso un determinato impianto teorico.

Le analogie nella didattica della fisica

Questo forte potere esplicativo delle analogie che deriva dal mettere in relazione domini diversi, è il motivo per cui sono state parecchio studiate nell'ambito della didattica della fisica. Spesso le analogie vengono utilizzate per condividere idee con il pubblico con lo scopo di trasmettere nuova conoscenza scientifica. Rimanendo sull'esempio fatto precedentemente, l'analogia tra il sistema solare e l'atomo di Rutherford è spesso utilizzata per insegnare il modello di atomo agli studenti.

Il ragionamento tramite analogie è una caratteristica fondamentale in una prospettiva costruttivista, per la quale per apprendere ogni nuovo concetto è necessario confrontarlo con qualcosa già assimilato. Secondo Piaget un processo cognitivo è il risultato di una progressiva costruzione di strutture tramite due modalità: l'assimilazione, tramite cui l'individuo incorpora un nuovo dato in schemi preesistenti, e l'accomodamento, tramite cui l'individuo modifica e amplia i propri schemi mentali per dare spazio a un dato che, confrontato con quelli già acquisiti, non assomiglia a nessun altro. Nella psicologia dell'educazione si affermò l'idea che i concetti appresi siano organizzati in schemi e strutture. Secondo i principi del costruttivismo, ogni nuovo concetto insegnato

viene confrontato dallo studente con gli schemi preesistenti. Se il nuovo concetto è compatibile con le conoscenze pregresse esso verrà inserito negli schemi mentali arricchendo le concezioni già acquisite (assimilazione). Se invece il nuovo concetto è in contrapposizione con gli schemi mentali verrà effettuata una loro ristrutturazione in modo da fare spazio alla nuova conoscenza (accomodamento). Questo secondo processo si può indicare come *cambiamento concettuale*.

Secondo Duit [10] le analogie sono strumenti efficaci per il cambiamento concettuale in quanto i nuovi schemi concettuali vengono sviluppati cercando analogie tra i domini più familiari a quelli meno familiari. I processi di apprendimento richiedono una continua ristrutturazione degli schemi concettuali degli studenti e l'analogia può facilitare questo cambiamento. Nonostante i vantaggi che derivano dall'uso di analogie nella didattica, è necessario prestare attenzione all'utilizzo improprio di analogie, per esempio estendendo proprietà relative a un certo dominio a un altro non pertinente. Un altro rischio è l'utilizzo di analogie che hanno significato per l'insegnante ma non per lo studente, che si trova in una fase conoscitiva differente.

La fisica, come sottolineato precedentemente, è una scienza in cui la capacità di astrazione ha un ruolo fondamentale e questo porta a difficoltà nella comprensione di concetti che talvolta discostano dall'esperienza quotidiana. Per questo motivo storicamente il ragionamento tramite analogie è stato un aiuto nello sviluppo di nuove teorie fisiche. Cruz-Hastenreiter [7] sottolinea che secondo Poincaré le analogie possono essere suddivise in diversi livelli. Il primo è quello delle "analogie primitive", che si basano sull'intuizione mentre il più complesso è quello delle "analogie matematiche", che si basano su una relazione strutturale e non solo di apparenza. Le analogie di questo ultimo tipo sono una vera e propria forma di ragionamento che comprende il pensiero rappresentativo. Anche a livello educativo le analogie permettono quindi la visualizzazione di concetti astratti e possono fungere da ponte tra il mondo dell'esperienza concreta e il dominio astratto.

Besson [3] osserva che le analogie e i modelli basati sulle analogie sono fondamentali nella didattica. Come già detto nella sezione precedente, per una comprensione completa e reale della fisica, oltre al modello matematico è necessario per lo studente sviluppare un modello mentale che permetta di interpretare il modello matematico. Questi modelli possono essere basati su analogie. Nonostante l'utilizzo di analogie e di modelli mentali basati sull'intuizione possano condurre a concezioni errate, i vantaggi del loro utilizzo sono elevati. Pertanto è opportuno includerli nell'insegnamento e aiutare lo studente ad arricchire o modificare il proprio modello mentale.

I modelli basati su analogie sono in genere costituiti da un oggetto o un fenomeno che costituiscono il bersaglio, e un altro oggetto o fenomeno che rappresenta il bersaglio, detto sorgente. Si possono distinguere due tipi di modelli analogici. Il primo è un modello puramente analogico, basato pertanto sulla similitudine tra oggetti e fenomeni di domini diversi. Il comportamento del bersaglio viene simulato attraverso il comportamento della sorgente. Per altri modelli invece non si richiede solo la simulazione di un comportamento in analogia con la sorgente ma si va oltre, cercando le cause di quel comportamento

e chiedendosi quali meccanismi avvengono effettivamente nel bersaglio. In questo caso il modello assume una funzione esplicativa e un significato strutturale. Questo è un tipo di modello che all'interno della didattica può essere particolarmente utile perché, pur basandosi su analogie, vuole dare una rappresentazione coerente con la struttura reale dell'oggetto di studio. In questo modo questi modelli possono fungere da mediatori tra i modelli mentali degli studenti e il modello scientifico.

Capitolo 3

Storia della modellizzazione matematica in fisica: dall'azione a distanza al concetto di campo

In questo capitolo verranno analizzate da un punto di vista storico e filosofico le motivazioni e le concezioni che hanno portato al passaggio da un modello newtoniano di azione a distanza al modello di campo di Maxwell. Il filo conduttore sono le scelte e le ipotesi alla base dei modelli utilizzati dai principali interpreti di questo cambiamento, influenzate dalle idee personali e dalle concezioni radicate nella cultura di ciascun periodo storico.

3.1 La nascita della modellizzazione matematica in fisica

I secoli XVI e XVII sono stati fondamentali per lo sviluppo della matematica, in particolare nella sua relazione con la fisica. Nonostante ci siano sempre state connessioni tra matematica e fisica, è dallo sviluppo della meccanica che la matematica entra in modo sistematico nella descrizione della realtà. Infatti, si supera quella concezione aristotelica che separava il mondo terrestre, imperfetto e quindi non descrivibile matematicamente, dalla sfera celeste, lontana dalla corruzione umana e quindi descrivibile perfettamente dall'oggettività della matematica. Un cambiamento fondamentale avvenne con Galileo, ma fu l'introduzione dello strumento del calcolo infinitesimale da parte di Newton a siglare definitivamente la svolta nell'idea di fisica che influenzerà i secoli successivi.

La matematica di Galileo

Il principale interprete dei cambiamenti storici del suo tempo, che vedevano uno sviluppo della tecnica e dell'ingegneria attraverso l'uso di strumenti matematici, fu Galileo Galilei. Oltre a ribadire l'utilità della matematica per questi fini pratici, Galileo la riconosceva come essenza della natura, e quindi come linguaggio attraverso cui si può descrivere la realtà. Questa indagine doveva avvenire attraverso il modello matematico, qualcosa di perfetto che, sotto determinate condizioni, poteva portare alla descrizione di fenomeni fisici.

La concezione aristotelica considerava la matematica non adatta a descrivere il mondo terrestre in quanto qualsiasi oggetto fisico, per quanto si potesse avvicinare al corrispettivo matematico, non ne avrebbe mai raggiunto la perfezione. Galileo criticò questa idea e in un brano del *Dialogo sopra i due massimi sistemi* si evince il significato che lo scienziato attribuiva ai modelli. Si tratta di uno scambio tra Salviati e Simplicio, il quale sottolinea l'incompatibilità tra la realtà e il modello matematico poiché, considerando il caso di una sfera su un piano, nel modello i due oggetti si toccheranno in un solo punto, mentre nella realtà questo non può avvenire. Il passo fondamentale fatto da Galileo ed espresso da Salviati non è quello di dire che una sfera e un piano nel mondo fisico si possano toccare in un solo punto, ma consiste nel dire che, togliendo gli aspetti trascurabili, si può vedere dietro un fenomeno fisico il modello matematico a cui può essere approssimato. Il modello matematico, dunque, non rappresenta in modo perfetto la realtà, ma nella sua astrazione riesce a corrispondere alla realtà:

Ma io vi dico che anco in astratto una sfera immateriale, che non sia sfera perfetta, può toccare un piano immateriale, che non sia piano perfetto, non in un punto, ma con parte della sua superficie; talché sin qui quello che accade in concreto, accade nell'istesso modo in astratto [...]. Però, quando voi aveste una sfera ed un piano perfetti, benché materiali, non abbiate dubbio che si toccherebbero in un punto; e se questo era ed è impossibile ad aversi, molto fuor di proposito fu il dire che sphaera aenea non tangit in puncto. [14]

Newton

Galileo ha dunque posto le basi per la matematizzazione della fisica, ma è con Newton che iniziò quella che è diventata la modellizzazione moderna. Isaac Newton studiò a Cambridge, dove fece le sue prime scoperte in ambito matematico. In particolare, scoprì il teorema sui binomi, che permette di sviluppare qualunque potenza di un binomio in una serie infinita di termini il cui limite è la potenza del binomio stessa. Questi primi ragionamenti gli hanno consentito di sviluppare concetti alla base del calcolo infinitesimale, lo strumento matematico che userà per esprimere le leggi della meccanica.

La concezione del rapporto tra matematica e fisica per Newton nacque dalle radici poste da Galileo ma si evolse in una matematica dinamica, che doveva mutare per avvicinarsi alla fisica e poterla descrivere. La matematica non era

più l'essenza della natura, il linguaggio intrinseco del mondo, ma uno strumento in mano all'uomo per la descrizione dei fenomeni.

Philosophie naturalis principia mathematica

Il lavoro più importante di Newton, che racchiude i suoi studi che più influenzeranno il pensiero scientifico, è *Philosophie naturalis principia mathematica*, pubblicato nel 1687. L'opera è divisa in tre parti ed ha una struttura sistematica e assiomatico-deduttiva. Si apre, infatti, con alcune definizioni e assiomi, che fanno da premessa ai tre libri. I primi due costituiscono la parte in cui Newton sviluppa il linguaggio matematico, con una serie di proposizioni dimostrate geometricamente e strettamente connesse tra loro; il terzo libro, *De mundi systemate*, quello più legato al mondo fisico, utilizza tutte le proposizioni e i corollari dimostrati precedentemente per fondare ogni proposizione.

Le leggi del moto Gli assiomi, da cui si sviluppano tutti i libri, sono tre e sono noti come leggi del moto. Questi sono il fondamento non solo della fisica di Newton, ma anche della sua idea profonda del rapporto tra matematica e fisica.

1. *Ciascun corpo preserverà nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, a meno che non sia costretto a cambiare il suo stato da una forza impressa su di esso.*
2. *La velocità del cambiamento della quantità di moto è proporzionale alla forza motrice impressa e si svolge nella direzione della linea retta in cui è impressa la forza.*
3. *A ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.*

Determinismo Il secondo assioma, noto come seconda legge del moto, stabilisce una relazione di proporzionalità, un legame causale tra la forza impressa a un corpo e la sua accelerazione. Nel caso di un punto materiale la legge si può esprimere in questo modo:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

dove \mathbf{F} è la forza impressa, m la massa del punto materiale e \mathbf{a} la sua accelerazione. Siccome l'accelerazione è la derivata seconda dello spazio s rispetto al tempo, si può riscrivere la formula come:

$$\mathbf{F} = m\ddot{s}$$

Questa è una delle prime equazioni differenziali studiate e quella che più ha influenzato e determinato la scienza moderna.

Quello che fece Newton fu costruire un modello matematico basato su alcune ipotesi che non possono essere date per scontate. La prima è proprio quella di poter schematizzare un corpo, piccolo rispetto al problema considerato, come un punto materiale, un oggetto senza dimensioni ma con una massa. La seconda è legata alla colonna che regge la meccanica classica, il principio del

determinismo. Noto lo stato iniziale di un punto materiale, infatti, l'equazione determina in modo univoco la sua traiettoria e velocità. In *Modelli matematici*, Giorgio Israel sottolinea un punto importante: l'equazione differenziale descrive un processo deterministico ma la prevedibilità del moto non è dovuta alla sua legge matematica. La matematica riporta ciò che per ipotesi ci si mette dentro: il determinismo del moto è un principio alla base della modellizzazione attuata da Newton e, di conseguenza, la legge ha carattere deterministico [23]. Quindi, l'ipotesi di Newton di un mondo deterministico e non casuale si palesa nella formula del moto, che vale per un punto materiale ma che può essere estesa a ciascun sistema di corpi, a patto di considerare la materia come una struttura corpuscolare, formata pertanto da corpuscoli schematizzabili come punti materiali. Il moto di tutta la materia si può quindi descrivere con un sistema di n equazioni differenziali del tipo:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

Queste ipotesi che stanno alla base della modellizzazione matematica fatta da Newton sono molto forti, e in particolare l'idea di fondo del determinismo non è solo dovuta a osservazioni empiriche, ma anche a idee filosofiche molto profonde.

L'estensione della descrizione deterministica non si fermò al moto dei corpi, questa ipotesi era talmente radicata che dopo Newton ci fu il cosiddetto riduzionismo meccanicista, ovvero l'idea che tutti i fenomeni naturali si potessero ridurre a fenomeni di tipo meccanico. L'idea di fondo è che tutti i fenomeni fisici siano causati da forze e che tutte queste forze siano legate all'accelerazione secondo la legge di Newton che, essendo un'equazione differenziale, se si conoscono le condizioni iniziali può essere risolta, determinando così in modo univoco la traiettoria nello spazio delle fasi. Un fisico-matematico che più riprese ed esplicitò il riduzionismo meccanicista è stato Laplace, che all'inizio del XIX secolo scrisse:

Noi dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'Universo, come l'effetto del suo stato precedente, e come la causa del seguente. Una intelligenza che, in un istante dato, conoscesse tutte le forze che animano la natura, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se fosse così elevata da sottoporre questi dati all'analisi, racchiuderebbe nella stessa formula, i moti dei più grandi corpi dell'Universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire come il passato sarebbe presente ai suoi occhi.

Per Laplace non ci poteva essere nulla di indeterminato in maniera assoluta, la difficoltà nella conoscenza della realtà nella sua totalità era dovuta ai limiti umani che non permettevano di risolvere equazioni troppo complicate o di conoscere tutte le condizioni iniziali di un evento. I suoi studi sulla probabilità, quindi, non presupponevano che il mondo avesse natura intrinsecamente indeterminata, ma mostravano uno strumento per superare parzialmente l'impossibilità dell'uomo di conoscere tutto.

Newton e la gravitazione Lo scopo dei *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, dichiarato dall'autore nella prefazione, è investigare le forze della natura a partire dai fenomeni del moto e, in seguito, dimostrare gli altri fenomeni fisici a partire dalle forze. Nel primo libro si affronta da un punto di vista matematico, senza una concreta applicazione, l'unificazione dei moti naturalmente accelerati e i moti dei pianeti che rispondono alle leggi di Keplero. Nel capitolo 4 è riportata per esempio la proposizione XI della sezione II del I libro dei *Principia*, così come viene presentata e dimostrata da Newton. Si può notare come questa dimostrazione sia priva di fenomenologia, è una trattazione geometrica sviluppata per trovare la legge della forza centripeta diretta al fuoco dell'ellisse attorno cui ruota un corpo. Si tratta quindi di dedurre una forza da una traiettoria geometrica. Nel secondo libro sono presenti invece degli studi di meccanica dei fluidi in parte da un punto di vista matematico e in parte da un punto di vista sperimentale. Nel terzo libro, *De mundi systemate*, come spiegato dallo stesso Newton nella prefazione:

dai fenomeni celesti, mediante le proposizioni dimostrate matematicamente nei libri precedenti, vengono derivate le forze della gravità, per effetto delle quali i corpi tendono verso il sole e i singoli pianeti. In seguito da queste forze, sempre mediante proposizioni matematiche, vengono dedotti i moti dei pianeti, delle comete, della luna e del mare. [33]

In quest'ultima parte sono presenti anche osservazioni sperimentali e conoscenze fisiche precedenti, in particolare le conoscenze astronomiche. Questo terzo libro, infatti, era il vero obiettivo dell'opera e mostra come la teoria matematica esposta nei libri precedenti può spiegare tutti i fenomeni conosciuti. A partire dall'osservazione dei fenomeni Newton applica i modelli matematici sviluppati nei libri precedenti per dedurre l'esistenza di una forza attrattiva che agisce tra tutti i corpi, la cui intensità varia con l'inverso del quadrato delle distanze ed è proporzionale al prodotto delle masse. Tra i fenomeni presi in considerazione per la deduzione della legge della forza gravitazionale non c'è la prima legge di Keplero, poiché, data la piccola ellitticità delle orbite planetarie è molto complesso osservare che il sole si trova esattamente nel fuoco dell'ellisse. La deduzione viene quindi fatta a partire dal fatto che i fenomeni osservati sono in accordo con la seconda e la terza legge di Keplero. Dalla legge delle aree si deduce, grazie al modello matematico sviluppato nel primo libro, che i pianeti sono accelerati da una forza centripeta diretta verso il sole¹. Dalla terza legge di Keplero si deduce che la forza varia con l'inverso del quadrato della distanza².

Il modello costruito da Newton doveva solo descrivere i fenomeni, le forze erano trattate come forze matematiche, non veniva indagata la loro natura ma solo gli effetti che esse producevano nel moto dei corpi. Newton mise in chiaro nello Scolio che non era nota la causa della forza di gravità, dai fenomeni si poteva dedurre che la sua azione si estendeva per grandi distanze e variava in proporzione inversa al quadrato delle distanze ma, aggiunse Newton:

¹Si veda Appendice A.2

²Si veda Appendice A.4, Corollario 6

Non sono ancora riuscito a dedurre dai fenomeni la ragione di queste proprietà della gravità e non fingo ipotesi. [33]

Questa affermazione è un caposaldo della filosofia di Newton: non potendo conoscere le cause meccaniche della forza di gravità, si deve accettare come un fatto.

Il newtonianesimo e il concetto di azione a distanza

L'apporto dato da Newton alla fisica da un punto di vista concettuale, filosofico e matematico fu talmente importante che condizionò in maniera profonda i secoli successivi. A lui si deve la definitiva unificazione tra fisica celeste e terrestre, in quanto nel suo modello matematico ogni corpo attira l'altro secondo la stessa legge, nota come legge di gravitazione universale:

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove F è l'intensità della forza di attrazione gravitazionale, k è una costante, m_1 e m_2 sono le masse dei corpi coinvolti e r è la loro distanza. Newton non diede una spiegazione sulla natura della forza gravitazionale, ma spiegò come avveniva la sua propagazione. L'azione delle forze era diretta lungo la retta che congiungeva le due particelle coinvolte, agiva in maniera istantanea ed era tale per cui la forza esercitata dalla prima sulla seconda era uguale e contraria a quella esercitata dalla seconda sulla prima.

In realtà Newton non parlava esplicitamente di queste forze come forze fisiche, ne parlava come forze matematiche, ma l'interpretazione che si diede successivamente del pensiero di Newton si discostava spesso da questo punto. Afferma Koyrè:

Il lettore matematico sarà senza dubbio portato - a ragione o a torto - a considerare Newton come un sostenitore dell'esistenza di forze che costringono i corpi a operare l'uno sull'altro (si attraggono reciprocamente [trahunt]), nonostante la distanza che li separa. E poiché quel lettore vede che non si parla di mezzi che trasmettono questa azione a distanza concluderà, come Huygens e Leibniz, e anche come Cotes, che Newton postula tacitamente l'azione a distanza [...]. Il lettore rimase convinto non solo che la gravità, o attrazione universale, era una forza cosmica reale - interpretando così correttamente il pensiero di Newton - ma una forza fisica - cosa che Newton non aveva mai sostenuto - e anche una proprietà reale della materia, per quanto forse non essenziale. [25]

Questo portò successivamente al cosiddetto newtonianesimo e a una difesa di queste posizioni con il rischio, come denunciato per esempio da Faraday, di mal interpretare il reale pensiero di Newton e di ingolfarsi in un pensiero dogmatico, che frenava il progresso scientifico.

3.2 La crisi dell'azione a distanza e il concetto di campo

Come già accennato precedentemente in merito al determinismo, Isaac Newton diede inizio a un pensiero destinato a influenzare la scienza nei secoli successivi da diversi punti di vista. In *I modelli e la concezione del mondo nella fisica moderna da Laplace a Bohr*, Enrico Bellone analizza come il newtonianesimo abbia indirizzato il pensiero verso la ricerca di un'unificazione, con la speranza di poter ridurre tutta la fisica a fenomeni causati da forze e quindi rappresentabili con il modello che Newton aveva utilizzato per i fenomeni meccanici [2]. Questa speranza è evidente nell'evoluzione storica degli studi sui fenomeni elettrici e magnetici.

La legge di Coulomb

Dopo la teoria della gravitazione di Newton cambiò il modo di intendere le forze elettriche, portando da teorie che vedevano flussi uscire dai corpi ed interagire tra loro, ad utilizzare il modello di azione a distanza di Newton. Priestley e Cavendish nella seconda metà del XVIII secolo furono i primi a formulare la legge della forza elettrica, che prenderà il nome da Coulomb poichè fu il primo a misurarla. Nell'articolo *On Coulomb's inverse square law* di Peter Heering si osserva che Coulomb utilizzò proprio il modello di azione a distanza in analogia con la legge di gravitazione universale per ricavare la legge formulata nel 1785. Questo si nota principalmente dal fatto che la dipendenza della forza dalle cariche elettriche Q_1 e Q_2 non sia stata ricavata sperimentalmente, ma sia stata una scelta, chiaramente influenzata dalla legge di gravitazione universale di Newton [20]. La legge di Coulomb è infatti la seguente:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Dove F è l'intensità della forza elettrica, Q_1 e Q_2 le cariche elettriche e r la distanza tra le cariche.

Nonostante questa legge non fosse inizialmente accettata da tutti, si impose anche grazie al fatto che tramite questa formulazione si potesse dare una forma newtoniana ai fenomeni elettrici statici. In effetti questi, insieme ai fenomeni magnetici statici, rispondevano positivamente a quella ricerca di un riduzionismo meccanicista. I primi attriti con l'interpretazione che veniva data alle idee di Newton emersero dagli studi che evidenziavano un rapporto tra elettricità e magnetismo.

Oersted e Ampère: la nascita dell'elettromagnetismo

Nel 1820 Oersted pubblicò la memoria *Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticum* in cui riportava alcune osservazioni, tra cui il fatto che, disponendo un ago magnetico parallelamente a un filo, al passaggio di

corrente esso subisce un cambiamento della sua direzione, formando con la posizione originale un angolo che dipende dalla distanza dell'ago dal filo. Seppure Oersted si limitò ad osservare questi effetti senza entrare in ipotesi circa le loro cause, fu evidente che stava emergendo un conflitto con l'interazione a distanza di Newton [2].

Uno dei primi fisici ad essere colpito dagli esperimenti di Oersted fu Ampère, che cercò di ricondurre queste osservazioni alla filosofia newtoniana, quindi di mostrare che anche queste forze agivano istantaneamente lungo la retta che congiunge le due particelle coinvolte, similmente all'azione a distanza tra due masse o due cariche elettriche. La sua adesione alla meccanica newtoniana si evince anche dal fatto che il fisico precisasse che le sue deduzioni aderivano alle osservazioni e che non voleva fare delle ipotesi sulle cause. Nel modello di Ampère in realtà erano presenti ipotesi, come il fatto di considerare il magnetismo come prodotto di correnti elettriche che circolano a livello molecolare, ma erano giustificate come semplici strumenti di lavoro. Ampère ricavò la formula fondamentale delle azioni elettrodinamiche e si servì dell'analisi matematica, risolvendo problemi importanti. Tale formula era, secondo Ampère, corretta in quanto supportata dai fatti e non importava quali fossero le cause di fondo che conducevano a tali effetti.

Faraday e le linee di campo

Alla visione di Ampère e allo schema interpretativo delle forze di Newton, si opponeva Faraday. Per lo scienziato le forze, alla luce delle osservazioni di Oersted, non potevano essere intese come azioni lungo linee rette, era necessario tracciare linee curve. Con l'introduzione delle linee di campo si stava delineando una rivoluzione nella concezione della natura che partiva da una nuova modellizzazione.

Il primo interrogativo che suscitava l'idea delle linee di campo riguardava il mezzo in cui si svolgevano i fenomeni elettrici e magnetici. Per preservare il newtonianesimo era stato necessario introdurre l'etere, una struttura studiata matematicamente per dare una spiegazione ai fenomeni ottici noti al tempo. Gli esperimenti elettromagnetici, invece, avevano convinto Faraday che il mezzo in cui agivano i fenomeni fosse la materia. Era necessario superare il concetto di azione a distanza, che secondo Faraday aveva impedito la corretta interpretazione dei risultati sperimentali. La nuova interpretazione ipotizzava che l'azione avvenisse per contatto tra particelle contigue e che quindi fosse possibile solo in presenza di materia, un mezzo continuo percorso da linee di forza curve. In questo modo diventava possibile ambire a quel processo di unificazione di tutti i fenomeni fisici, purché si abbandonasse l'idea di azione a distanza in favore di azioni che si propagano nel continuo con velocità finite.

Presto emerse un quesito fondamentale: le linee di forza sono solo rappresentazioni geometriche o hanno un significato fisico? Secondo Faraday non si doveva respingere a priori l'ipotesi del carattere fisico delle linee di forza. Infatti per lui i modelli, nonostante rimanessero sempre subordinati ai fatti, erano essenziali per la costruzione di conoscenza. L'esperienza rimaneva la cosa più

importante, necessaria per dare validità alle leggi della natura, ma non ci si poteva accontentare dei fatti, era essenziale andare a fondo nelle cause.

Proprio questa ricerca di una spiegazione convincente dei fenomeni portava a una differenza sostanziale tra Faraday e quelli che rimanevano ancorati al pensiero di Newton, considerati dallo scienziato irrazionali e troppo attaccati a dei dogmi. Al contrario, Faraday, essendo convinto dell'unicità della legge che governa l'universo e vedendo l'incompatibilità dei fenomeni elettromagnetici con il concetto di azione a distanza, riteneva che anche la forza gravitazionale agisse lungo linee di forza, come i fenomeni elettrici e magnetici. Questo non significava mettere in dubbio Newton, Faraday riconosceva la legge dell'attrazione gravitazionale da lui trovata, ma la vedeva come una semplice descrizione di effetti osservati, mentre lui ne cercava anche le cause per arrivare alla definizione profonda della forza di gravità [2].

Il modello matematico del campo secondo Maxwell

Nella prefazione del *Treatise on electricity and magnetism* pubblicato nel 1873 da Maxwell, si nota la sua consapevolezza della rottura tra Faraday e i matematici che difendevano l'azione a distanza. Maxwell fece un grande lavoro di traduzione e di reinterpretazione delle idee di Faraday per esprimerle in una forma matematica, in modo da mostrare l'equivalenza delle due trattazioni. L'osservazione di Maxwell è infatti la seguente:

Quando ebbi tradotto quelle che consideravo le idee di Faraday in forma matematica, trovai che in generale i risultati dei due metodi coincidevano, così che con entrambi si potevano spiegare gli stessi fenomeni e dedurre le stesse leggi di azione. [28]

Maxwell ricercava una ristrutturazione delle conoscenze note per poter avere un'analisi semplificata e aprire la strada a nuova conoscenza. Maxwell non voleva dimostrare la veridicità di una teoria rispetto a un'altra, voleva trovare una via diversa per interpretare i fenomeni. Enrico Bellone scrive in proposito:

Maxwell diede l'avvio ai propri studi sull'elettromagnetismo cercando di individuare una terza via che evitasse, da un lato, i pericoli del modellismo acritico, e, dall'altro lato, quelli della pura matematizzazione. [...]. Qualora si fosse seguita la prima via si sarebbero visti i fenomeni attraverso un filtro particolare, e si sarebbe caduti nella tentazione di accettare solamente quei fatti che meglio concordavano con l'ipotesi di partenza. In tal caso, osservava Maxwell, si era pericolosamente sollecitati a produrre assunzioni più o meno rozze. Nel seguire la seconda via il pericolo era invece quello di "perdere completamente di vista il fenomeno che vogliamo spiegare," e di bloccare in tal modo la possibilità stessa di arrivare ad una concezione più estesa delle "connessioni" esistenti tra i fenomeni sotto studio. [2]

Questa terza via consisteva nell'uso di analogie formali, non per arrivare a una teoria fisica, ma per provare che, presentando una trattazione matematica delle

idee di Faraday, si sarebbe arrivati agli stessi risultati a cui si arrivava tramite il concetto di azione a distanza.

L'uso che Maxwell fece delle analogie non rimarcava quello che era stato fatto in passato, come si è visto con la formulazione della legge di Coulomb in analogia con la legge di gravitazione universale. Lo scienziato, infatti, si poneva in maniera critica nei confronti del newtonianesimo e di quella ricerca di una teoria basata su analogie matematiche che giustificavano l'estensione della teoria dell'azione a distanza a tutti i fenomeni, in nome di una coerenza formale. L'analogia formale non doveva portare a una teoria fisica, ma a una rappresentazione delle idee di Faraday in una forma utile a creare nuova conoscenza. Questo non significava appoggiare totalmente Faraday, per il quale tutti i fenomeni, compresi quelli gravitazionali, potevano essere rappresentati con il modello di campo, ma dimostrare che la teoria dei campi, ristretta ai fenomeni ottici ed elettromagnetici, rispondeva positivamente alle osservazioni tanto quanto la fisica dell'azione a distanza.

Come Faraday, Maxwell si trovò a fare teorie circa la natura delle linee di forza e arrivò ad assimilarle a tubi a sezione variabile in cui scorreva un fluido immaginario. Questa idea, sviluppata in analogia con gli studi di dinamica dei fluidi, aveva valore puramente matematico, un costrutto geometrico utile per ricavare leggi più generali ma che non si prefiggeva di arrivare a una ipotesi fisica.

Se inizialmente Maxwell presentò solo una struttura matematica dell'azione delle linee di forza, in alcune memorie provò a indagare delle ipotesi fisiche compatibili con il suo modello matematico. A questo scopo introdusse l'ipotesi di un campo come un mezzo in cui avvenissero fenomeni vorticosi con assi paralleli alle linee di forza. Questo modello, pur avendo carattere fisico, secondo Maxwell doveva essere guardato con distacco e non visto come fedele riproduzione della natura. Prendere un modello come verità assoluta portava al rischio di rimanere vincolati ad esso senza avere un vero progresso nella conoscenza. Il vero obiettivo dietro all'ipotesi di un modello fisico era quello di permettere un'analisi della realtà, non di rappresentare la realtà stessa. Enrico Bellone osserva:

Il problema che si pone non è quello di dedurre da un modello (privilegiato ed assoluto) le equazioni del campo, ma è semmai quello di trovare una formulazione matematica le cui connessioni interne siano equivalenti a quelle reali e operanti in natura: il modello matematico non copia, ma imita. [2]

Lo scopo della modellizzazione per Maxwell era quello di trovare una matematicizzazione in grado di rispondere ai fatti nel modo più semplice possibile. Per Maxwell il modello non doveva rappresentare i fenomeni reali ma imitarli in modo da poterli più facilmente analizzare. La teoria del campo era una risposta alla ricerca di coerenza con le leggi sperimentali, non doveva essere derivata dai modelli, non traeva validità dalle leggi della meccanica, ma proprio dal fatto che rispecchiasse le osservazioni.

Tuttavia, Maxwell arrivò a formulare le equazioni del campo rimettendo in gioco il mezzo che Faraday aveva dichiarato non necessario: l'etere, caposaldo

del modello meccanicista. Per fondare una teoria di campo, quindi una teoria basata sull'azione continua, era necessario un mezzo. A differenza di Faraday, però, per Maxwell questo mezzo non era il campo stesso con il carattere fisico delle sue linee di forza, ma l'etere. Infatti, secondo Maxwell, le condizioni per la propagazione dei fenomeni erano due: la prima è che avvenisse in un mezzo che trasmettesse gli eventi, la seconda è che potesse avere luogo solo se alimentata da un'energia conservativa presente nel campo. L'etere risultava quindi necessario per trasmettere gli eventi e per immagazzinare l'energia richiesta per questo scopo. Nonostante l'uso del modello meccanico dell'etere, Maxwell ribadisce che le equazioni del campo dipendevano solo dalle osservazioni sperimentali e rimanevano autonome rispetto al linguaggio della meccanica.

Partendo dalle equazioni dell'elettromagnetismo si potevano ricavare le relazioni che descrivevano il comportamento meccanico dei corpi elettrizzati e magnetizzati, una su tutte proprio la dipendenza della forza dall'inverso del quadrato della distanza. Questo punto portò Maxwell a chiedersi se fosse possibile aggiungere la forza di gravità alla trattazione, in quanto anch'essa dipendente da $\frac{1}{r^2}$ e descrivibile da linee di forza analoghe a quelle di una carica elettrica o un polo magnetico. Maxwell decretò l'impossibilità di tale generalizzazione in quanto l'energia presente nel campo, per conservarsi, sarebbe dovuta diminuire in presenza di una massa, e, per evitare punti del campo con energia negativa, il campo avrebbe dovuto avere energie enormi. Non potendo immaginare un mezzo con queste caratteristiche, Maxwell si trovò a dover ridimensionare il progetto di Faraday, escludendo la gravitazione dalla teoria.

L'apporto dato da Maxwell alla riflessione epistemologica sui modelli fu quindi enorme, segnò un grande passo avanti rispetto al newtonianesimo ma anche alla fisica di Faraday. L'analogia si rivelò per Maxwell non solo un utile strumento per facilitare il processo di formalizzazione, ma anche una fonte di nuova conoscenza. Pur utilizzando i modelli, Maxwell ne evidenziava anche gli aspetti problematici, sottolineando che il modello non mostrava la realtà, ma uno dei tanti modi per rappresentare le connessioni che esistono all'interno della realtà. Questo suo nuovo modo di interpretare la fisica contribuì alla crisi del meccanicismo che avvenne successivamente. Usando le parole di Evandro Agazzi nell'introduzione alla traduzione italiana del *Treatise on electricity and magnetism*:

Ad ogni modo, il modello meccanico era ormai concepito come un punto d'appoggio, come un garante formale del discorso scientifico, ma senza più pretese di portata ontologica. A questo punto si può dire che il meccanicismo fosse già morto: era solo questione di lasciare passare un po' di tempo perché i fisici si abituassero a considerare "legittima" una concezione che si sostenesse coerentemente dal suo interno, e fosse in accordo con i dati sperimentale, pur senza avere il conforto di un modello meccanico alle spalle. [28]

Capitolo 4

L'evoluzione matematica dell'elettrostatica

Nel capitolo precedente è stata ripercorsa l'evoluzione storica e filosofica che ha portato a un cambiamento di prospettiva da un paradigma della forza come azione a distanza a un modello di interazione tramite un mezzo. In questo capitolo si scenderà più nello specifico dei passaggi principali che hanno caratterizzato questo cambiamento concettuale nell'ambito dell'elettrostatica. In particolare, verranno messi in evidenza, anche attraverso i testi storici originali, gli strumenti matematici utilizzati e il loro legame con i concetti fisici. Il filo conduttore è la descrizione delle forze centrali con la legge dell'inverso del quadrato, a partire dalla forza gravitazionale fino alla forza elettrostatica, descrizione che lega aspetti matematici, fisici e osservazioni sperimentali. Si nota come siano stati utilizzati strumenti matematici diversi in base a come vengono interpretate le forze ma, poiché ci si limita all'ambito dell'elettrostatica, viene mostrato come in modi differenti si giunga a risultati che si equivalgono. La dipendenza della forza dall'inverso del quadrato della distanza si può ricavare, nella concezione delle forze come azioni a distanza, da considerazioni geometriche, come fece Newton, ma anche utilizzando la teoria del potenziale, come fece per esempio Gauss e, nella concezione delle interazioni come azioni che si propagano in un mezzo, utilizzando una trattazione che assimila lo sforzo che avviene lungo una linea di forza a una forza elastica.

4.1 La dimostrazione geometrica di Newton

Come è stato trattato nel capitolo precedente, la struttura dei *Philosophie naturalis principia mathematica* è assiomatico-deduttiva. Ciascuna proposizione presentata da Newton viene dimostrata tramite le proposizioni e i lemmi precedenti, in una costruzione che ha la base in alcune definizioni e assiomi presentati all'inizio dei tre libri. Nel primo libro Newton analizza le relazioni tra le orbite descritte dai pianeti e le forze centrali, rispondendo a due problemi che nel Sei-

cento venivano detti “problema diretto delle forze centrali” e “problema inverso delle forze centrali”. In questo contesto ci si concentra sul primo. Sapendo che la prima legge di Keplero afferma che ciascun pianeta orbita attorno al sole descrivendo una traiettoria ellittica tale che il sole occupa uno dei fuochi, il problema, riportato da Guicciardini [17] è il seguente:

Si supponga che un corpo (la cui posizione indichiamo con P) descriva una traiettoria ellittica. Si supponga che S sia un fuoco dell’ellisse e che il raggio vettore SP , congiungente il fuoco S col pianeta, spazzi aree uguali in tempi uguali. Si chiede come varia l’intensità della forza in funzione della distanza.

Riporto in seguito la soluzione proposta da Newton nei Principia al problema.

Proposizione XI problema VI

Un corpo ruoti lungo un’ellisse: si richiede la legge della forza centripeta quando tende al fuoco dell’ellisse.

Sia S il fuoco dell’ellisse. Si conduca SP che taglia in E il diametro DK dell’ellisse e in x l’ordinata Qv , e si completi il parallelogramma $QxPR$. È manifesto che EP è uguale al semiasse maggiore AC , per cui, condotta dall’altro fuoco H dell’ellisse la linea HI parallela alla EC , per l’uguaglianza di CS , CH , sono uguali anche ES , EI , e perciò EP sarà uguale alla semisomma di PI , PS , ossia (perchè sono parallele HI , PR , e perchè sono uguali gli angoli IPR , HPZ) alla semisomma delle stesse PS , PH , che prese insieme sono uguali a tutto l’asse $2AC$. Si abbassi la perpendicolare QT su SP e detto L il parametro principale dell’ellisse (ossia $\frac{2BC^2}{AC}$), $L \times QR$ starà a $L \times PV$ come QR a Pv , ossia, come PE o AC a PC ; ed $L \times Pv$ starà a GvP come L a Gv ; e GvP a Qv^2 come PC^2 a CD^2 , e (per il corollario 2 del lemma VII¹) Qv^2 sta a Qx^2 , allorchè i punti Q e P si congiungono, in un rapporto di uguaglianza; e Qx^2 o Qv^2 sta a QT^2 come EP^2 sta a PF^2 , ossia, come CA^2 sta a PF^2 , oppure (per il lemma XII²) come CD^2 sta a CB^2 . E moltiplicando tutte queste relazioni, $L \times QR$ sta a QT^2 come $AC \times L \times PC^2 \times CD^2$, o $2CB^2 \times PC^2 \times CD^2$ sta a $PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, oppure come $2PC$ sta a Gv . Ma essendo $2PC$ e Gv uguali quando i punti Q e P si incontrano, anche $L \times QR$ e QT^2 , a loro proporzionali, si uguagliano. Si moltiplichino queste eguaglianze per $\frac{SP^2}{QR}$, $L \times SP^2$ sarà uguale a $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Dunque (per i corollari I e V della proposizione VI³) la forza centripeta è inversamente proporzionale a $L \times SP^2$, ossia, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza SP . [33]

¹Si veda l’Appendice A.1

²Si veda l’Appendice A.3

³Si veda l’Appendice A.5

Le quantità, come anche i rapporti fra quantità, che costantemente tendono all'eguaglianza in un qualsiasi tempo finito, e prima della fine di quel tempo si accostano l'una all'altra più di una qualsiasi differenza data, divengono infine uguali.

È interessante notare la somiglianza con il metodo dei limiti di Cauchy sviluppato del XVIII secolo. Quello di Newton è un modello geometrico e non numerico come quello studiato attualmente, ma emerge dalla sua trattazione la base per il calcolo infinitesimale. Questa differenza nel formalismo e nel rigore della trattazione, per esempio, dei limiti, evidenzia che la necessità di questi strumenti matematici emerge da situazioni fisiche e che il loro sviluppo sia dovuto all'intuizione geometrica e cinematica. Questo permette di associare un'immagine oggettiva ai simboli di cui ci si serve e le grandezze geometriche utilizzate sono associate a un moto continuo nel tempo.

Terzo passo Come appena detto, Newton utilizza metodi geometrici per costruire la sua meccanica. È necessario dunque capire come può essere rappresentata geometricamente una forza centrale. Utilizzando come riferimento la figura 4.1, consideriamo un corpo accelerato da una forza centrale diretta verso S. Se la forza smettesse di agire al raggiungimento del punto P, il corpo proseguirebbe il suo moto lungo la tangente a P, verso il punto R, con una velocità costante. Poiché invece la forza c'è, il corpo si sposta nel punto Q in un tempo finito Δt . Nel punto Q la forza avrà intensità e direzione diversa rispetto a P. Se però si considera Q molto vicino a P, con approssimazione tanto migliore quanto più piccolo è l'arco PQ, la forza non varia né in intensità né in direzione. La forza devia il corpo dalla sua traiettoria inerziale di un segmento QR, che risulta proporzionale al quadrato del tempo moltiplicato per l'accelerazione (ricordiamo la legge $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$) che, per la seconda legge di Newton, è proporzionale alla forza. Perciò si può scrivere:

$$F \propto \lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{\Delta t^2}.$$

Poiché, per ipotesi, vale la legge delle aree, il tempo risulta proporzionale all'area della superficie spazzata da SP, allora:

$$\Delta t \propto \text{area di SPQ}.$$

Per il lemma VII⁵, poichè l'arco PQ è molto piccolo, si può considerare l'arco PQ uguale alla corda, quindi la superficie SPQ con buona approssimazione può essere considerata un triangolo la cui area è $\frac{1}{2}(SP \times QT)$. Si può quindi affermare che:

$$\Delta t \propto (SP \times QT).$$

Quindi:

$$F \propto \lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{(SP \times QT)^2}.$$

Questa è la misura geometrica della forza centrale che si stava cercando.

⁵Si veda l'Appendice A.1

Quarto passo Si applica infine quanto trovato nei passi precedenti al caso dell'ellisse. Per il primo passo la forza è centrale e diretta verso S. Per il terzo passo l'intensità della forza sarà data da:

$$F \propto \frac{1}{SP^2} \times \lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{QT^2}.$$

Per quanto detto nel secondo passo $F \propto \frac{1}{SP^2}$ moltiplicato per una costante. Per questo si conclude che l'intensità della forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza SP.

Il rapporto tra matematica e fisica nella dimostrazione di Newton

È interessante mettere in evidenza la concezione che Newton aveva della geometria e del suo rapporto con la meccanica. Come sottolinea Guicciardini, la geometria utilizzata da Newton appare come subordinata alla meccanica. La geometria permette infatti di studiare degli oggetti che precedentemente sono stati costruiti attraverso il moto. Newton aveva una concezione cinematica delle grandezze geometriche e dava più importanza, per esempio, a come veniva tracciata una circonferenza rispetto alla sua descrizione algebrica. Lo stesso per lui valeva nella fisica, nel rapporto tra le forze e le traiettorie. Considerando il moto lungo una traiettoria ellittica, la forza è quella grandezza fisica che mantiene il corpo nella traiettoria, deviandolo da un moto rettilineo uniforme. Quello che ha fatto Newton geometricamente nella dimostrazione della proposizione XI è la deduzione della forza dall'ipotesi di una traiettoria ellittica. Questo passaggio è evidente nella dimostrazione quando Newton cerca il modo di rappresentare geometricamente una forza centrale. Considerando un arco PQ percorso in un tempo piccola Δt in modo che P sia molto vicino al punto Q, si può calcolare la deviazione QR dalla traiettoria inerziale come se fosse una "caduta". Infatti da Galileo sappiamo che un corpo in caduta libera è accelerato da una forza costante e percorre uno spazio proporzionale al quadrato del tempo di caduta moltiplicato per l'accelerazione. Questo è il passaggio che permette di connettere l'accelerazione (e quindi la forza) con la traiettoria percorsa dal corpo.

Un ulteriore aspetto da cui vediamo la necessità di Newton di uno sviluppo matematico in relazione a esigenze fisiche, emerge nel "metodo dei primi ed ultimi rapporti". Questo metodo gli permetteva di fare procedure di passaggi al limite. Come già accennato, si nota la somiglianza con il metodo dei limiti di Cauchy, ma bisogna considerare che quello di Newton è un metodo geometrico e non numerico e, in quanto geometrico, è anche collegato al moto. Un problema tipico che Newton affronta con questo metodo è la determinazione del limite a cui tende il rapporto tra due grandezze geometriche quando esse si annullano contemporaneamente. L'esistenza di questo limite è giustificato dall'idea intuitiva della continuità del moto. Così come un corpo ha una certa velocità in ogni istante e ha senso parlare di velocità ultima prima che il corpo si fermi, così si può parlare di un limite ultimo del rapporto tra due grandezze prima che esse si annullino. Ritorna anche qui il rapporto tra lo strumento matematico e l'interpretazione fisica: i simboli utilizzati da Newton hanno una corrispondenza nella

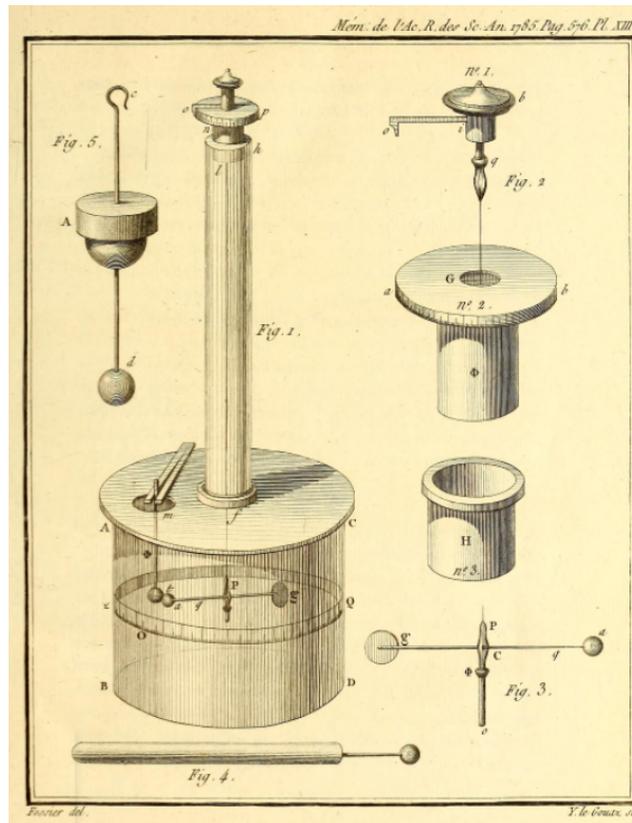


Figura 4.2: Bilancia di torsione di Coulomb come è rappresentata in *Mémoires sur l'électricité et la magnétisme* (1789).

realtà e descrivono grandezze geometriche finite che fluiscono con continuità nel tempo.

4.2 L'analogia matematica di Coulomb e Cavendish

È stato discusso nel capitolo 3 l'impatto che la filosofia newtoniana ha avuto nella storia della scienza a causa dell'autorità che ha assunto il suo pensiero nei secoli. Non stupisce quindi che, una volta affermata la teoria gravitazionale di Newton, si sia diffusa nel pensiero comune il concetto di forza che agisce a distanza. Lo studio di forze elettriche e magnetiche si sviluppò proprio a partire da questo modello per poi passare a un modello di azione per contatto in seguito alle nuove evidenze sperimentali. Il primo a descrivere la forza elettrica in analogia con quella gravitazionale fu Epino nel 1759. Per trovare la legge

esatta per la prima volta bisogna aspettare Priestley e Cavendish (1771) che ci arrivarono con un procedimento indiretto rispetto alla misura diretta che fece Coulomb nel 1785 con la bilancia di torsione.

L'apparato strumentale di Coulomb è mostrato in figura 4.2 e consiste in un braccio sospeso tramite un filo che connette il punto centrale P a un punto posto in alto. Alle estremità del braccio si trovano due sfere g e a , la prima neutra e la seconda carica. Sullo stesso piano delle due sfere, in prossimità della sfera carica a , viene fissata un'altra sfera carica t . La forza elettrica tra le sfere a e t comporta una rotazione del braccio di un angolo proporzionale al momento della forza. Tramite le osservazioni sperimentali Coulomb arrivò a enunciare la legge che porta il suo nome.

Gli esperimenti che fece Coulomb tramite la bilancia di torsione non erano così precisi da giustificare totalmente la corretta formulazione della legge, che deve un grande contributo all'influenza del modello newtoniano che si era imposto con forza nel pensiero scientifico dell'epoca.

Questa analogia emerge anche dai lavori di Priestley e Cavendish. Si fa risalire a Benjamin Franklin l'osservazione che all'interno di un recipiente metallico isolato non ci siano cariche. In seguito Priestley verificò questa osservazione di Franklin e dedusse da ciò la dipendenza della forza dall'inverso del quadrato della distanza. Anche Cavendish si basò su esperimenti indiretti di questo tipo e su ragionamenti matematici basati sul modello di Newton per provare la legge del quadrato della distanza. In *An Attempt to Explain Some of the Principal Phaenomena of Electricity, by means of an Elastic Fluid* Cavendish utilizza la dimostrazione sviluppata da Newton nella proposizione LXX dei *Principia* per mostrare la dipendenza della forza dall'inverso del quadrato della distanza anche relativamente alla forza elettrica [6].

All'interno dei Principia Newton sviluppa un modello matematico basato su alcune ipotesi. Dopo aver schematizzato i pianeti come punti materiali però, si procede verso una maggiore complessità considerando i pianeti come corpi sferici. La tecnica di Newton consiste nel suddividere i corpi in elementi molto piccoli e studiare l'attrazione gravitazionale esercitata da questi elementi.

Proposizione LXX teorema XXX

Se verso i singoli punti di una superficie sferica tendono uguali forze centripete che decrescono proporzionalmente al quadrato delle distanze dai punti, dico che un corpuscolo posto dentro tale superficie non è attratto da queste forze verso alcuna parte.

Sia HIKL la superficie sferica e P il corpuscolo posto dentro. Attraverso P si conducano verso questa superficie due linee HK, IL che tagliano gli archi, il più possibile piccoli, HI, KL; e per i triangoli simili HPI, LPK (per il corollario 3 del lemma VII⁶), quegli archi saranno proporzionali alle distanze HP, LP, e le qualsiasi particelle in HI, KL della superficie sferica, determinate dalle rette che passano per P, saranno proporzionali al quadrato delle distanze. Queste

⁶Si veda l'Appendice A.1

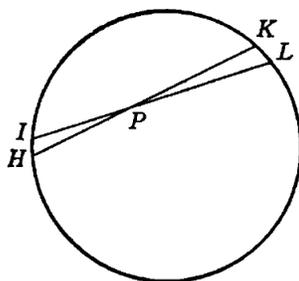


Figura 4.3: Diagramma per la Proposizione LXX, Teorema XXX [33].

due ragioni costituiscono la ragione di uguaglianza. Quindi, le attrazioni effettuate ugualmente ma in direzioni contrarie, si annullano mutuamente. Per un ragionamento analogo, tutte le attrazioni attraverso l'intera superficie sferica vengono annullate dalle attrazioni contrarie. Per cui il corpo P non sarà spinto verso alcuna parte da queste attrazioni. [33]

La dimostrazione della legge della forza elettrica di Cavendish

Abbiamo visto quindi come Newton, partendo dall'ipotesi della legge dell'inverso del quadrato delle distanze, abbia concluso che la forza risultante su un corpuscolo all'interno di un guscio sferico sia nulla. Cavendish si basò su questo risultato per utilizzare l'osservazione sperimentale del fatto che l'elettricità all'interno di un conduttore sferico chiuso è nulla per ricavare una prova della legge dell'inverso del quadrato della distanza. L'apparato sperimentale di Cavendish è mostrato in figura 4.4 ed è costituito da una sfera sospesa tramite una bacchetta di vetro ricoperta di cera in modo da perfezionare l'isolamento. La sfera viene inserita tra due emisferi carichi che vengono poi uniti per formare un'unica sfera. Viene messo in comunicazione uno dei due emisferi con la sfera all'interno tramite un filo che in seguito può essere estratto senza scaricare l'elettricità delle sfere. Senza farli toccare con la sfera all'interno si separano i due emisferi e si inseriscono due palline di polistirolo ricoperte di un materiale conduttore per verificare se all'interno della sfera vuota è presente carica. Cavendish propose anche apparati più complessi in modo da rendere sempre più precisa la misurazione della carica interna al guscio sferico arrivando sempre a non rilevare elettricità. Da questo segue che l'attrazione e la repulsione elettrica devono essere inversamente proporzionali al quadrato della distanza e che l'elettricità in un guscio sferico risiede interamente sulla superficie. Infatti per la Prop. V⁷, se la legge della forza seguisse l'inverso del quadrato della distanza, la sfera interna non dovrebbe avere una carica e tutta l'elettricità dovrebbe risiedere sulla superficie del conduttore. Cavendish rimanda espressamente alla

⁷Si veda l'Appendice B.3

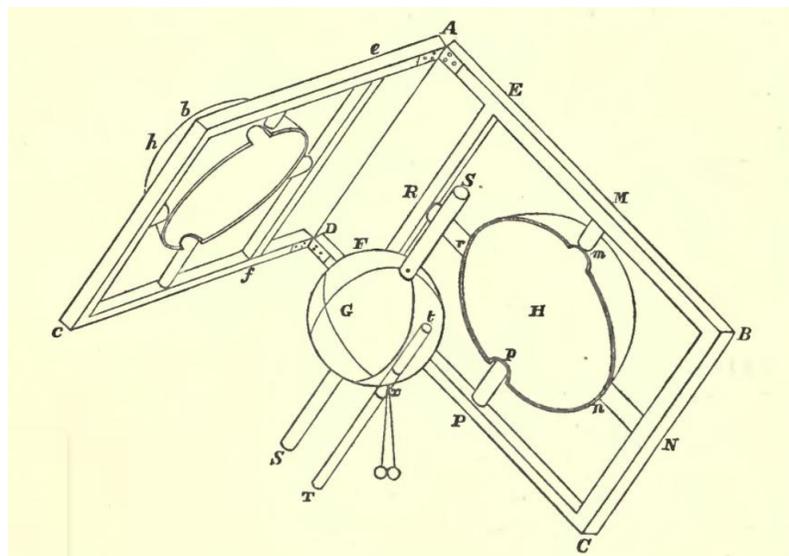


Figura 4.4: Apparato sperimentale di Cavendish per la determinazione della legge della forza elettrica come è rappresentato in *The Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish, F.R.S. written between 1771 and 1781*, edito a partire dai manoscritti originali di Cavendish da Maxwell (1879).

dimostrazione della Prop. LXX di Newton nel Lemma IV⁸, in cui si afferma che una massa all'interno di un guscio sferico rimane immobile solo se la legge dell'attrazione e della repulsione segue l'inverso del quadrato della distanza.

Come sintetizzato da Falconer [11], negli anni precedenti alla pubblicazione del Trattato di Maxwell, si delinearono due linee di ragionamento piuttosto nette. Il primo è un ragionamento sperimentale deduttivo basato su misure quantitative dirette. Questa linea, che partì dagli esperimenti condotti da Coulomb, si sviluppò soprattutto tramite ingegneri e tecnici come William Snow Harris e Frederick Charles Webb, che cercarono di migliorare dal punto di vista dei materiali e della precisione gli esperimenti di Coulomb, ritenuti troppo pieni di fonti di errori. La seconda linea si identifica con la visione di William Thomson, che porterà argomenti matematici deduttivi basati sulla teoria del potenziale e su osservazioni qualitative. Thomson in *The Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium*, pubblicato nel 1845, sosteneva che la legge di Coulomb doveva essere vera perché, nonostante lui l'abbia verificata attraverso misure dirette, la si può dimostrare anche matematicamente. In una nota nell'edizione del 1854, Thomson cita la dimostrazione matematica di Cavendish che prova la forma della dipendenza della forza dalla distanza e, implicitamente, l'analogia sottolineata da Priestley tra la forza elettrica e gravitazionale.

Come vedremo, Thomson e Maxwell reinterpretarono questa dimostrazione

⁸Si veda l'Appendice B.1

utilizzando la teoria del potenziale, inserendo i risultati ottenuti seguendo la struttura matematica di Newton, nel quadro sviluppato da fisici e matematici quali Laplace, Poisson, Green e Gauss per dare una descrizione matematica rigorosa al modello di forza proposto da Newton.

4.3 La teoria del potenziale e la formalizzazione del modello newtoniano

Alla luce della legge dell'inverso del quadrato, furono molti i fisici e i matematici che contribuirono a dare una descrizione matematica dei fenomeni dell'elettrostatica. Laplace, Poisson, Green, Gauss sono alcuni dei nomi che aiutarono nello sviluppo degli strumenti matematici che contribuirono a una progressiva costruzione della teoria matematica dell'elettricità. Il concetto di potenziale fu introdotto nel 1772 nell'ambito della gravitazione da Lagrange, che stabilì che il campo delle forze gravitazionali fosse un campo potenziale. Venne così introdotta una funzione che verrà chiamata da Green *funzione potenziale* nel 1828 e, nel 1840 solo *potenziale* da Gauss. Quest'ultimo riconobbe l'utilità del potenziale non solo nei problemi legati alla gravitazione, che riguardano quindi l'attrazione reciproca tra masse, ma anche problemi di elettricità e magnetismo, quindi riguardanti cariche con segni positivi o negativi.

Il punto della teoria, facendo riferimento alla gravitazione, è che l'attrazione in un punto dovuta a una certa distribuzione di massa può essere espressa sia come una forza che agisce su una massa sia in termini di un potenziale gravitazionale V in un punto, dove V soddisfa, nel vuoto, la seguente equazione, nota come equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Poisson estende l'equazione ai punti di spazio in cui è presente una densità di massa ρ , trovando l'equazione nota come equazione di Poisson:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

La forza e il potenziale appaiono come funzioni di campo, nel senso che sono grandezze fisiche funzioni delle coordinate spaziali e temporali descrivibili tramite equazioni alle derivate parziali. La funzione potenziale V non descrive una proprietà materiale di un campo ma una proprietà potenziale, cioè la forza che risulterebbe se una massa fosse posta in un certo punto del campo. Il campo non viene quindi descritto come materiale e il potenziale viene introdotto come uno strumento per avere una descrizione matematica dell'azione a distanza.

L'esperimento di Cavendish reinterpretato da Maxwell

Abbiamo visto nel paragrafo 4.2 la deduzione di Cavendish della legge dell'inverso del quadrato in analogia con le dimostrazioni fatte da Newton per la legge

della forza gravitazionale. Maxwell ripropone questa dimostrazione a partire dagli esperimenti di Cavendish ma reinterpretando la teoria con gli strumenti matematici che hanno dato rigore alla teoria dell'azione a distanza di Newton.

In *A Treatise on Electricity and Magnetism*, nella versione del 1873, Maxwell ripropone la dimostrazione della legge della forza realizzata da Peter Guthrie Tait nel 1871 e afferma:

The fact that the force between electrified bodies is inversely as the square of the distance may be considered to be established by direct experiments with the torsion-balance. The results, however, which we derive from such experiments must be regarded as affected by an error depending on the probable error of each experiment, and unless the skill of the operator be very great, the probable error of an experiment with the torsion-balance is considerable.

Viene quindi citato Coulomb e i suoi esperimenti con la bilancia di torsione, ma viene sottolineato il fatto che le imprecisioni che si porta dietro questo tipo di esperimento fanno in modo che la legge della forza non possa essere provata con certezza ma solo con una certa approssimazione. Maxwell riprende invece l'esperimento di Cavendish e lo interpreta con i nuovi strumenti matematici sviluppati.

Consideriamo un conduttore B, caricato positivamente che viene inserito in un conduttore più ampio C senza toccarlo. In questo modo risulterà una carica positiva nella parte esterna del conduttore C. A questo punto si mette in contatto B con l'interno di C e si nota che non si evidenzia un cambiamento della carica esterna di C. Se si porta B fuori da C senza toccarlo si scopre che è completamente scaricato. Maxwell sottolinea la precisione raggiungibile nella misurazione dell'elettrificazione di un corpo, al contrario degli esperimenti di misurazione diretta della forza elettrica. Da questo esperimento si deduce che un corpo non elettrificato posto all'interno di un conduttore cavo si trova allo stesso potenziale del conduttore cavo. Quindi tutto lo spazio all'interno del conduttore è allo stesso potenziale del conduttore se non c'è nessun corpo elettrificato all'interno. Maxwell cerca la forma della legge di attrazione e repulsione a partire dall'osservazione che all'interno di un conduttore cavo il potenziale è costante. Per semplicità si dimostra questo considerando come conduttore cavo un guscio sferico in modo che la distribuzione di carica in ogni punto sia uniforme.

Cerchiamo quindi la legge della forza elettrica tale per cui il potenziale all'interno del guscio sferico sia costante. Assumiamo come legge della forza di repulsione tra due cariche e e e' che hanno una distanza r tra loro, l'espressione $ee'\phi(r)$. Il potenziale è

$$\sum e \int_r^\infty \phi(r) dr \quad (4.1)$$

dove la somma è estesa a tutte le cariche del campo. Calcoliamo il potenziale in un punto P interno alla sfera dovuto a una carica E distribuita su tutta la superficie. La densità di carica per unità di area è $\frac{E}{4\pi a^2}$, dove a è il raggio della sfera. Sostituendo la sommatoria dell'equazione 4.1 con l'integrale sulla

superficie sferica, possiamo scrivere il potenziale in questo modo:

$$V = \iint \frac{E}{4\pi a^2} \left(\int_r^\infty \phi(r) dr \right) a^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.2)$$

dove r è la distanza del punto P dall'elemento di superficie $a^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Considerando per semplicità un punto P sull'asse $\theta = 0$ a una distanza c dal centro, possiamo scrivere

$$r^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta.$$

Differenziando questa espressione, otteniamo

$$r dr = ac \sin \theta d\theta.$$

Integrando la 4.2 rispetto a ϕ tra $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$, otteniamo

$$V = \frac{1}{2} E \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\int_r^\infty \phi(r) dr \right) \sin \theta d\theta,$$

o, cambiando le variabili da θ a r :

$$V = \frac{1}{2} E \int_{r=a-c}^{r=a+c} \left(\int_r^\infty \phi(r) dr \right) \frac{r dr}{ac}.$$

Se introduciamo una funzione $f(r)$ così definita:

$$f(r) = \int \left(\int_r^\infty \phi(r) dr \right) r dr, \quad (4.3)$$

possiamo riscrivere il potenziale in questo modo

$$V = \frac{E}{2ac} \{f(a+c) - f(a-c)\},$$

da cui

$$\frac{2acV}{E} = \{f(a+c) - f(a-c)\}. \quad (4.4)$$

Dalle osservazioni sperimentali il potenziale all'interno della sfera è costante ed è quindi lo stesso per ogni valore di c . Se differenziamo due volte la rispetto a c otteniamo

$$0 = f''(a+c) - f''(a-c),$$

da cui

$$f''(a+c) = f''(a-c).$$

Poichè vale questa relazione si ha che

$$f''(r) = C,$$

dove C è una costante. Perciò

$$f(r) = Br + \frac{1}{2} Cr^2.$$

Dalla definizione 4.3 segue che

$$B + Cr = r \int_r^\infty \phi(r) dr.$$

Per cui

$$\int_r^\infty \phi(r) dr = C + \frac{B}{r},$$

da cui

$$\phi(r) = \frac{B}{r^2}.$$

L'unica legge che soddisfa la condizione che il potenziale all'interno di un guscio sferico sia costante, condizione verificata sperimentalmente con grande accuratezza, è quindi quella che vede la forza come inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Il teorema di Gauss

Nell'articolo *General Propositions relating to Attractive and Repulsive Forces acting in the inverse ratio of the square of the distance*, Gauss afferma che molti fenomeni in natura possono essere spiegati tramite l'assunzione di forze tra particelle che agiscono secondo l'inverso del quadrato della distanza. La prima che è stata trovata è la legge di gravitazione universale.

Gauss considera la funzione potenziale V delle coordinate x , y e z e la utilizza per studiare la teoria delle forze di attrazione o repulsione. Se indichiamo con R l'intensità del campo elettrico nel punto x , y , z e con α , β , γ gli angoli che la direzione della forza forma con i tre assi, le componenti di R lungo gli assi sono:

$$X = R \cos \alpha = \epsilon \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = R \cos \beta = \epsilon \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = R \cos \gamma = \epsilon \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (4.5)$$

dove $\epsilon = \pm 1$ a seconda del fatto che la forza sia attrattiva o repulsiva, e

$$R = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right)}. \quad (4.6)$$

Sia ds un elemento di una curva s , e θ l'angolo tra la tangente alla curva condotta nella direzione positiva con la direzione della quantità vettoriale R . Il lavoro compiuto sull'unità di elettricità per muoversi lungo ds sarà

$$R \cos \theta ds, \quad (4.7)$$

e lo spostamento di elettricità dovuto alla quantità di carica attraverso la superficie è

$$E = \int_0^s R \cos \theta ds. \quad (4.8)$$

Utilizzando le componenti di R , otteniamo

$$E = \int_0^s \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds. \quad (4.9)$$

Se X , Y e Z sono tali per cui $X dx + Y dy + Z dz$ è il differenziale esatto di $-V$, funzione di x , y , z , allora:

$$E = \int_A^B (X dx + Y dy + Z dz) = - \int_A^B dV = V_A - V_B, \quad (4.10)$$

dove l'integrazione viene fatta lungo una traiettoria qualunque tra A e B . Ponendo ds al posto della traiettoria AB si ha:

$$R \cos \theta = - \frac{dV}{ds}, \quad (4.11)$$

da cui, assumendo ds parallelo a ciascun asse abbiamo

$$X = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (4.12)$$

Consideriamo ora una superficie S e chiamiamo flusso del campo elettrico l'integrale di superficie $\iint R \cos \theta dS$. Se X , Y , Z sono le componenti di R e sono continue all'interno di una regione limitata dalla superficie chiusa S , il flusso elettrico verso l'esterno è:

$$\iint R \cos \theta dS = \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (4.13)$$

Consideriamo ora una quantità di elettricità e in un punto O e sia r la distanza di O da un punto P di una superficie chiusa. In P l'intensità del campo elettrico sarà $R = \frac{e}{r^2}$ in direzione OP . Sia θ l'angolo tra OP e la normale alla superficie condotta verso l'esterno. Dove la linea di flusso del campo elettrico esce dalla superficie, $\cos \theta$ sarà positivo e dove entra sarà negativo.

Si consideri una sfera di centro O e raggio unitario. Si faccia descrivere a OP un cono con vertice in O e apertura piccola. Sia θ l'angolo che si forma tra la normale alla superficie e la direzione di OP , cioè la normale alla sfera. Il cono interseca la sfera determinando un elemento di superficie $d\sigma$ e altri elementi dS_n sulla superficie chiusa. Sia $d\Omega$ l'elemento di angolo solido così definito: $d\Omega \equiv \frac{dS \cos \theta}{r^2}$. Poiché la sfera descritta ha raggio unitario:

$$dS \cos \theta = r^2 d\Omega = r^2 d\sigma. \quad (4.14)$$

Dato che $R = \frac{e}{r^2}$:

$$R \cos \theta dS = e d\sigma. \quad (4.15)$$

Si distinguono due casi:

- se O è esterno alla superficie chiusa, i valori positivi e negativi del $\cos \theta$ si annullano, per cui:

$$\oint R \cos \theta dS = 0; \quad (4.16)$$

- se O è interno alla superficie il valore del $\cos \theta$ sarà positivo quando il raggio vettore OP esce dalla superficie e in seguito il numero di entrate e uscite sarà lo stesso. Integrando su tutta la superficie chiusa si include la superficie sferica, la cui area è 4π :

$$\oint R \cos \theta dS = e \oint d\sigma = 4\pi e. \quad (4.17)$$

Poiché e indica la somma algebrica delle cariche presenti all'interno della superficie, l'integrale dipende solo dall'elettricità totale dentro la superficie e non dalla sua forma né dalla posizione delle cariche al suo interno.

Se al posto di cariche puntiformi consideriamo una distribuzione di elettricità all'interno della superficie avremo

$$4\pi e = 4\pi \iiint \rho dx dy dz, \quad (4.18)$$

Considerando come superficie chiusa quella per'elemento di volume $dx dy dz$, per l'equazione (4.13),

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi \rho. \quad (4.19)$$

Se esiste un potenziale V , per l'equazione (4.12),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi \rho = 0, \quad (4.20)$$

e, in maniera più sintetica:

$$-\nabla^2 V + 4\pi \rho = 0. \quad (4.21)$$

Riconosciamo questa equazione come *equazione di Poisson* e, nel caso di densità di carica nulla come *equazione di Laplace*.

4.4 La reinterpretazione di Maxwell della teoria del potenziale con le idee di Faraday

Come dichiarato dallo stesso Maxwell, l'obiettivo del *Trattato* era innanzitutto quello di spiegare la teoria dell'azione elettrica ripercorrendo i risultati ottenuti precedentemente secondo l'idea di una forza elettrica che dipende solo dalle cariche e dalle relative distanze. In questo modo si può ricavare la legge dell'inverso del quadrato della distanza, la teoria del potenziale e i teoremi di Green,

Gauss e Thomson che riguardano la distribuzione dell'elettricità sulle superfici. Analizzando questi teoremi, che mostrano l'equivalenza tra la forma integrale e differenziale delle equazioni del potenziale, Maxwell sottolinea l'equivalenza tra la concezione della forza come azione a distanza e quella dell'azione contigua. Infatti, secondo Maxwell, la forma integrale è tipica dell'azione a distanza e quella differenziale esprime in maniera migliore l'azione tramite un mezzo. L'uso che fa Maxwell della matematica è evidente in questo passaggio: un'equivalenza tra due forme matematiche implica una equivalenza tra due interpretazioni fisiche, cioè la matematica riflette delle intuizioni fisiche. È evidente che per Maxwell non c'è una concezione delle forze migliore dell'altra, le due interpretazioni si equivalgono. Tuttavia, adottando l'interpretazione secondo cui l'azione viene esercitata attraverso un mezzo, è possibile compiere quel passo che dichiaratamente Newton non aveva voluto fare: indagare le cause e la natura di tale azione. Per fare questo passaggio risulta fondamentale il concetto di energia e la sua relazione con la teoria del potenziale. L'energia tra due corpi carichi calcolata con l'ipotesi di un'azione a distanza risulta infatti uguale a quella calcolata nell'ipotesi che questa energia sia immagazzinata nel mezzo. Il concetto di energia è strettamente connesso a quello dello spostamento elettrico, di cui parleremo in seguito.

I risultati precedenti possono così essere spiegati tramite la teoria di Faraday delle linee di forza. La linea di forza è una linea la cui tangente in ogni suo punto coincide con la direzione dell'intensità risultante in quel punto. La linea di forza procede sempre da un punto a potenziale più alto a uno a potenziale più basso, per cui deve avere sempre un punto iniziale diverso dal punto finale. Faraday vedeva la distanza tra due corpi carichi di elettricità di segno opposto come uno spazio pieno di linee di forza elettriche che dovevano rappresentare la direzione di uno stato di sforzo in cui si trova il mezzo tra i due corpi. La forza attrattiva tra i due corpi veniva interpretata quindi come un'azione trasmessa attraverso il mezzo.

Il primo articolo in cui Maxwell inizia a dare forma alla sua teoria è *On Faraday's Lines of Force* [27], pubblicato nel 1855. Maxwell individua nelle linee di forza di Faraday il potere di descrivere la direzione delle forze ma anche il limite di non descriverne l'intensità. Per risolvere questo problema in modo da dare una trattazione matematica delle linee di forza, Maxwell introduce una analogia, per la quale le linee di forza sono viste come tubi all'interno dei quali scorre un fluido incompressibile al cui moto si oppone una forza dovuta alla resistenza del mezzo nel quale il fluido scorre. Il fluido incompressibile non aveva un'esistenza fisica, la sua assunzione aveva la funzione di fornire un ausilio alla modellizzazione matematica. In base a questa analogia, le cariche elettriche positive e negative corrispondono rispettivamente alle sorgenti del fluido ideale e ai pozzi nei quali il fluido termina. Le linee di forza partono dalle cariche positive e terminano nelle cariche negative, così come i tubi di flusso partono dalla sorgente e terminano nel pozzo. Mentre le tangenti alle linee di forza in ogni punto indicano la direzione e l'intensità del campo elettrico, le tangenti ai tubi di flusso indicano la direzione e la velocità del fluido. Inoltre, la pressione esercitata dal fluido per superare la resistenza che si oppone al moto corrisponde

al potenziale elettrostatico. Se infatti consideriamo il fluido che scorre da una sorgente in maniera uniforme, per la simmetria sferica la velocità a una distanza r dalla sorgente sarà:

$$v = \frac{1}{4\pi r^2}.$$

Poiché il movimento del fluido subisce una resistenza dovuta al mezzo e proporzionale alla velocità, il tasso di decrescita della pressione è kv , dove k è una costante. Se la pressione si annulla a distanza infinita, in ogni punto essa sarà:

$$p = \frac{k}{4\pi r}.$$

Le espressioni della velocità e della pressione sono simili a quelle dell'intensità di campo elettrico e del potenziale.

Nel trattare le proprietà dei tubi di forza, Maxwell afferma che se si considera una superficie chiusa con la pressione in ogni suo punto uguale a p , e se non ci sono sorgenti o pozzi al suo interno, la pressione dentro la superficie sarà uniforme e uguale a p . Infatti, poiché il fluido scorre sempre da una pressione maggiore a una minore e poiché non ci sono sorgenti o pozzi all'interno della superficie, i tubi di forza devono iniziare e terminare sulla superficie. Ma, dato che la pressione in ogni punto della superficie è uguale, allora non può esserci movimento all'interno della superficie. Dato che la pressione sulla superficie è p , anche ogni punto interno ad essa avrà pressione p . Questo ragionamento si può fare analogamente per le linee di forza. Una linea di forza deve iniziare su una superficie carica positivamente e terminare su una carica negativamente. Non essendo presenti delle cariche all'interno del conduttore, se ci fosse una linea di forza essa dovrebbe iniziare e terminare sulla superficie interna. Ma, poiché il potenziale è lo stesso in tutti i punti del conduttore e una linea di forza deve partire da un potenziale più elevato rispetto a quello del punto finale, non ci può essere alcuna linea di forza all'interno del conduttore.

Tramite questa analogia si può anche arrivare al teorema di Gauss. Se consideriamo infatti un tubo di flusso che parte da una sorgente all'interno di una superficie, la quantità di fluido che uscirà dalla superficie sarà uguale a quella che entra se all'interno ci fosse un pozzo. Per calcolare il flusso totale attraverso la superficie, è necessario sottrarre i tubi di flusso dovuti ai pozzi dai tubi di flusso dovuti alle sorgenti. Il flusso totale prodotto all'interno della superficie deve rispondere alla proprietà del fluido di essere incompressibile. Questo significa che, considerato un fluido che scorre da una sorgente, in due momenti successivi deve valere l'equazione di continuità:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

dove S_1 e S_2 sono le superfici concentriche raggiunte dal fluido in due momenti successivi. Per la simmetria del fluido che scorre da una sorgente puntiforme, la superficie è sferica:

$$v_1 \pi r_1^2 = v_2 \pi r_2^2.$$

Per soddisfare questa proprietà la velocità deve decrescere con il quadrato della distanza. Se analogamente si applica l'equazione di continuità con il campo elettrico al posto della velocità si ottiene che il flusso del campo elettrico Φ si conserva

$$E_1 \pi r_1^2 = E_2 \pi r_2^2 = \Phi,$$

da cui, generalizzando:

$$E(r) = \frac{\Phi}{4\pi r^2}. \quad (4.22)$$

Se è valido il teorema di Gauss $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$ e si sostituisce in 4.22 si ottiene la legge di Coulomb per il campo elettrico:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Maxwell in *On Faraday's lines of forces* mostra quindi che i risultati precedentemente spiegati con la teoria del potenziale, possono essere interpretati tramite la rappresentazione delle linee di forza di Faraday.

È interessante capire la concezione che Maxwell ha della matematica in questo trattato. Turner [41] osserva che il fluido utilizzato da Maxwell non doveva fornire un'ipotesi fisica, né una teoria espressa puramente in termini matematici. Doveva invece essere un insieme di proprietà immaginarie utili per proporre una rappresentazione diversa dalle espressioni algebriche utilizzate nella teoria del potenziale. Il suo scopo era quindi quello di presentare delle idee matematiche in una forma più semplice da comprendere. Turner sottolinea che questa analogia è incompleta in quanto il linguaggio utilizzato non trasmette in maniera adeguata i concetti. Infatti, l'analisi vettoriale non era ancora utilizzata da Maxwell, che soltanto in lavori successivi iniziò a utilizzare il linguaggio dei quaternioni. Oggi, con il linguaggio adeguato, l'analogia tra l'elettrostatica e la dinamica di un fluido ideale appare più semplice. Nell'elettrostatica il rotore del campo elettrico è nullo, come anche il rotore del campo della velocità del fluido. La divergenza dello spostamento elettrico dipende dalla distribuzione volumetrica di cariche positive e negative, come la divergenza del campo della velocità dipende dalla distribuzione di sorgenti e pozzi. Turner afferma che, alla luce dei lavori successivi di Maxwell, si può interpretare l'uso delle linee di forza di Faraday come un metodo per descrivere campi vettoriali senza un formalismo matematico e l'uso dei tubi di flusso come qualcosa che sta a metà tra il metodo di Faraday e il metodo vettoriale.

Nel 1861 venne pubblicata la memoria *On physical lines of force*, in cui Maxwell, seguendo un'idea di Thomson, propone di interpretare i fenomeni magnetici ed elettrici come dovuti a moti vorticosi nel mezzo. Nella terza parte della memoria Maxwell si occupa di elettrostatica ed emerge un'immagine del mezzo come costituito da celle elastiche tra le quali sono presenti particelle elettriche che, sollecitate per mezzo di un campo elettrico, provocano una deformazione delle celle, che, per la loro elasticità provocano una azione che contrasta la deformazione. In opere successive, come *A dynamical theory of the electromagnetic*

field (1865) e *A treatise on electricity and magnetism*, Maxwell ricaverà le equazioni del campo elettromagnetico da considerazioni generali, non fa riferimento a qualche modello meccanico nello specifico, ma resta evidente la concezione del mezzo sottoposto a uno sforzo, in analogia con quello di un mezzo elastico.

Per capire in che modo Maxwell conciliò la teoria matematica sviluppata secondo il modello di azione a distanza con il modello di campo, ci focalizziamo sulla memoria *On physical lines of force*. L'elettrostatica viene trattata nella terza parte che, rispetto alle prime due, vede un abbandono del modello idrodinamico, utilizzato per trattare le correnti, in favore di una focalizzazione sul mezzo e sulla sua elasticità. Secondo questa teoria quando un corpo è sottoposto a un campo elettrico, in esso si produce una corrente elettrica se è un conduttore e una polarizzazione se è un dielettrico. In questo caso si può immaginare che ciascuna molecola si disponga in modo da avere un lato con carica positiva e uno con carica negativa. L'effetto che si genera è quello di uno spostamento di elettricità che dipende dalla natura del mezzo e dalla forza elettromotrice. Se indichiamo con h lo spostamento, R l'intensità del campo elettrico e E un coefficiente che dipende dalla natura del dielettrico:

$$R = -4\pi E^2 h. \quad (4.23)$$

In termini moderni possiamo scrivere l'equazione (4.23) in questo modo:

$$\mathbf{E} = -4\pi E^2 \mathbf{D},$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrico e \mathbf{D} lo spostamento elettrico. Se r è il valore della corrente elettrica dovuta allo spostamento:

$$r = \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (4.24)$$

L'equazione (4.23) viene data come risultato di osservazioni sperimentali sui dielettrici, ma ha anche la forma di una legge elastica, cioè della legge di Hooke, in cui le forze applicate a un corpo sono funzioni lineari delle deformazioni che producono. L'intensità del campo elettrico R può quindi essere vista come una forza elastica che si oppone a una deformazione, la costante dielettrica E come il coefficiente di proporzionalità e lo spostamento h come una deformazione lineare.

Maxwell mostra che, differenziando l'equazione (4.23) rispetto al tempo, si ottiene:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -4\pi E^2 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4.25)$$

che indica che al variare del campo elettrico varia anche lo spostamento, generando così una corrente. Se consideriamo h come la componente lungo l'asse z dello spostamento e con R la componente del campo elettrico lungo lo stesso asse, l'espressione

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi E^2} \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (4.26)$$

indica la componente lungo l'asse z della corrente di spostamento. Il passo successivo di Maxwell è quello di aggiungere le correnti di spostamento lungo gli assi alle tre componenti della corrente p , q , r rispettivamente lungo x , y e z :

$$\begin{cases} p = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{1}{E^2} \frac{\partial P}{\partial t} \right) \\ q = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{1}{E^2} \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \\ r = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{1}{E^2} \frac{\partial R}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (4.27)$$

dove α , β e γ sono le componenti dell'intensità magnetica e P , Q e R le componenti del campo elettrico. Indicando con e la quantità di elettricità per unità di volume, scriviamo l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad (4.28)$$

Differenziando (4.27) rispettivamente rispetto a x , y e z e sostituendo in (4.28) otteniamo:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{4\pi E^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right), \quad (4.29)$$

da cui:

$$e = \frac{1}{4\pi E^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right), \quad (4.30)$$

che, in termini più familiari scriviamo:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4.31)$$

cioè la legge di Gauss in forma differenziale.

L'equazione (4.30) della distribuzione di elettricità viene utilizzata in seguito da Maxwell per trovare la forza che agisce tra due corpi elettrificati. Se P , Q e R sono le componenti del campo elettrico e f , g e h le componenti dello spostamento elettrico, l'energia nel mezzo dovuta allo spostamento elettrico è:

$$U = - \sum \frac{1}{2} (Pf + Qg + Rh) dV. \quad (4.32)$$

Questa relazione era stata precedentemente trovata da Maxwell nell'ipotesi di un mezzo suddiviso in celle elastiche tra le quali si trovano particelle elettriche. Le celle, sollecitate dalla presenza del campo vengono deformate ed esercitano una forza elastica uguale e opposta a quella prodotta dalle cariche. L'energia calcolata corrisponde al lavoro compiuto dalle forze elastiche in opposizione alla deformazione delle celle. Se non c'è movimento dei corpi o alterazione delle forze, dall'equazione risulta che \mathbf{E} è la variazione spaziale di un potenziale Ψ , perciò le sue componenti P , Q e R sono così indicate:

$$P = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (4.33)$$

Più brevemente possiamo scrivere:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Psi. \quad (4.34)$$

Dall'equazione (4.23) sappiamo che:

$$P = -4\pi E^2 f, \quad Q = -4\pi E^2 g, \quad R = -4\pi E^2 h, \quad (4.35)$$

quindi:

$$U = \frac{1}{8\pi E^2} \sum \left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} \right)^2 \right) dV. \quad (4.36)$$

Integrando per parti su tutto lo spazio e ricordando che Ψ si annulla a distanza infinita:

$$U = \frac{1}{8\pi E^2} \sum \Psi \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \right) dV, \quad (4.37)$$

o, tramite l'equazione (4.30):

$$U = \frac{1}{2} \sum (\Psi e) dV. \quad (4.38)$$

Consideriamo ora due corpi carichi. Siano e_1 e e_2 le distribuzioni di elettricità rispettivamente sul primo e sul secondo corpo e Ψ_1 e Ψ_2 i potenziali elettrici. Sia

$$e_1 = \frac{1}{4\pi E^2} \left(\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2} \right) \quad (4.39)$$

Il potenziale elettrico totale sarà quindi $\Psi_1 + \Psi_2$, per cui l'energia totale sarà:

$$U = \frac{1}{2} \sum (\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \Psi_1 e_2 + \Psi_2 e_1) dV. \quad (4.40)$$

Ipotizzando che il primo corpo si muova, avremo che l'elettricità si muove insieme al corpo, per cui il valore di $\Psi_1 e_1$ rimarrà lo stesso, come anche quello di $\Psi_2 e_2$. Come di mostrato da Green, $\Psi_1 e_2 = \Psi_2 e_1$, quindi il lavoro compiuto dai corpi sarà:

$$W = \delta \sum (\Psi_2 e_1). \quad (4.41)$$

Nell'ipotesi di un corpo piccolo:

$$W = e_1 \delta \Psi_2, \quad (4.42)$$

oppure:

$$F dr = e_1 \frac{d\Psi_2}{dr} dr, \quad (4.43)$$

dove F è la forza e dr la distanza percorsa. Se anche il corpo con distribuzione di carica e_2 è piccolo e se r è la distanza da questo corpo, dall'equazione (4.39):

$$\Psi_2 = E^2 \frac{e_2}{r}, \quad (4.44)$$

da cui:

$$F = -E^2 \frac{e_1 e_2}{r^2}. \quad (4.45)$$

Capitolo 5

La storia della fisica come mezzo per la didattica

Il ruolo della storia della scienza nell'insegnamento della fisica è stato ampiamente studiato. Teixeira, Greca e Freire [40] hanno fatto una sintesi degli studi che trattano l'argomento e hanno sottolineato gli effetti positivi che si riscontrano nell'apprendimento di concetti fisici tramite l'utilizzo della storia della fisica, a cui si aggiunge un atteggiamento più partecipe e propositivo degli studenti e una comprensione più profonda della natura della scienza, che non è lineare e compartimentalizzata come può sembrare in un insegnamento classico.

Ci sono state critiche sull'uso della storia della scienza nell'insegnamento della fisica, in particolare viene evidenziata la troppa leggerezza con cui si rischia di accostare le teorie del passato con le concezioni degli studenti. Questo può portare, infatti, a creare confusione tra la conoscenza scientifica accreditata e teorie obsolete o errate. Nonostante ciò, è innegabile la presenza, nella storia della scienza, di analogie che possono fornire schemi di ragionamento che, utilizzati in maniera critica, possono aiutare a sviluppare negli studenti una visione più completa che rispecchia la complessità della scienza.

5.1 La storia della fisica e l'evoluzione cognitiva degli studenti

Diverse teorie hanno messo in correlazione l'evoluzione che lo studente compie durante l'educazione scientifica e lo sviluppo scientifico nei secoli. Halloun e Hestenes [18] hanno mostrato come molti studenti arrivino nella scuola secondaria, ma anche nei corsi di fisica di base all'università, con concezioni sui fenomeni fisici derivanti dall'intuizione e dall'esperienza personale. Sono stati costruiti diversi test diagnostici per mostrare le misconcezioni degli studenti, uno dei più noti è il *Force Concept Inventory*, un test a risposta multipla sviluppato da Halloun, Hestenes, Wells e Swackhamer nel 1985 per valutare la compren-

ne dei concetti della meccanica. Questo tipo di test può essere utilizzato per identificare le concezioni di senso comune negli studenti spesso presenti prima di iniziare un corso di fisica e, talvolta, anche dopo. Alcune di queste idee sono compatibili con le teorie scientifiche, altre possono essere ricondotte a idee e concetti pre-galileiani.

Secondo Halloun [19] una persona comune possiede un insieme di paradigmi diversi, spesso non scientifici e talvolta contrastanti tra loro. Tra i paradigmi non scientifici si includono paradigmi *naïve*, dominati da un *naive realism* tipico dell'era pre-galileiana e paradigmi di *common sense*. Halloun fa dei parallelismi tra questi paradigmi non scientifici con i paradigmi che hanno dominato la scienza per secoli. In particolare, il paradigma naïve degli studenti può ricordare il paradigma aristotelico e medievale, che si fa risalire ad Aristotele nel IV secolo a.C. Questo paradigma è caratterizzato da spiegazioni della realtà basate sulle osservazioni, senza ricorrere a strumenti e modelli matematici. Era infatti impensabile che oggetti astratti potessero essere usati per descrivere qualcosa di concreto come la realtà. Si può per esempio ricondurre a un paradigma aristotelico l'idea che i corpi tendano a tornare nel proprio stato naturale, quindi che i corpi cadano non a causa di una forza ma perché la loro natura è quella di cercare di raggiungere il proprio posto naturale, che, nel caso dei corpi terrestri sarebbe il più vicino possibile al centro dell'universo. Il paradigma medievale, invece, si colloca tra il X e l'XI secolo. Usando ancora l'esempio della forza, nel paradigma medievale subentra l'idea di *impetus*, cioè la forza vista come una proprietà posseduta da un corpo. Anche in questo caso l'idea di forza come *impetus* si ritrova tra le idee di senso comune negli studenti.

Le concezioni pregresse degli studenti che possono essere ricondotte a questi paradigmi possono portare a una dissonanza cognitiva tra quello che si insegna nei corsi di scienze e l'esperienza quotidiana. L'obiettivo di annullare questa distanza è impensabile, ma è possibile strutturare l'insegnamento in modo da diminuire la dimensione naïve in favore della dimensione scientifica. Galileo è visto come la figura di svolta tra la scienza antica e moderna e proprio per questo il suo lavoro può essere preso in considerazione come guida per riproporzionare i paradigmi degli studenti. In questa fase la matematica inizia ad entrare nella fisica ed ad occupare un ruolo fondamentale, come sottolineato in 3.1. L'idea di modello che emerge da Galileo e la strada tracciata dall'evoluzione scientifica nella storia può essere una linea lungo la quale può avvenire l'evoluzione cognitiva degli studenti, con l'obiettivo di mostrare i limiti dei paradigmi non scientifici e approdare a un realismo scientifico.

All'interno della letteratura scientifica che studia la relazione tra l'evoluzione cognitiva degli studenti e i paradigmi che hanno caratterizzato lo sviluppo scientifico si trovano alcuni studi particolarmente significativi per questo elaborato, poiché riguardano i concetti di forza elettrica e campo.

Uno studio di Nardi e Carvalho [31] che riguarda la concezione del campo negli studenti, suggerisce la somiglianza tra i paradigmi di studenti di età diverse e lo sviluppo storico della teoria del campo. Nello studio vengono presi in considerazione 45 studenti dai 6 ai 17 anni. Lo strumento di ricerca utilizzato è l'intervista e si basa su 4 esperimenti che prendono in considerazione le proprietà

del campo gravitazionale, magnetico ed elettrico. Uno degli esperimenti consiste in un pendolo elettrico. In base alle risposte fornite sono stati riscontrati 3 livelli. Il I livello riguarda i soggetti che non riescono a fornire delle cause ai risultati degli esperimenti. Il II livello riguarda i soggetti che attribuiscono l'azione all'esistenza di forze nei punti attorno a una forza generatrice che dipende dalla distanza. In genere gli studenti a questo livello riconoscono anche alcune proprietà del campo, tra cui la sua esistenza in tutti i punti intorno a una sorgente e il fatto che sia una grandezza vettoriale. Il III livello sono classificati gli studenti che riconoscono tutte le proprietà del campo: oltre alla sua esistenza e alla sua natura vettoriale, si aggiunge il fatto che l'intensità del campo vari con la distanza dalla sorgente e il fatto che l'azione tra due corpi non sia istantanea. I ricercatori sottolineano la somiglianza dei modelli presentati con le idee che si sono susseguite storicamente per arrivare al concetto di campo. Queste osservazioni portano a suggerire la possibilità di sviluppare percorsi storici che possano aiutare gli studenti nella costruzione di concetti. Questo non significa fare un parallelismo totale tra l'evoluzione storica e lo sviluppo cognitivo dello studente ma estrapolare alcuni passaggi chiave avvenuti storicamente per aiutare gli studenti a una costruzione significativa di conoscenza.

Un altro studio significativo è quello di Furio e Guisasola [13]. Lo studio si propone di analizzare le difficoltà degli studenti nell'apprendimento del concetto di campo elettrico. Seguendo l'ipotesi di una correlazione tra i problemi nello sviluppo storico del concetto di campo elettrico e le difficoltà degli studenti nella sua comprensione, vengono identificati due profili concettuali differenti: il profilo coulombiano e quello maxwelliano. Lo studio si basa su un questionario contenente 6 problemi proposto a un campione di 245 studenti dai 16 ai 21 anni e un'intervista a 24 studenti. I risultati ottenuti mostrano che la maggior parte degli studenti, in situazioni problematiche, non utilizza il concetto di campo, prediligendo un ragionamento basato sul modello di azione a distanza. Emerge anche la difficoltà a distinguere i concetti di campo e forza elettrica. Furio e Guisasola imputano questi risultati, oltre alle difficoltà epistemologiche legate ai concetti, anche a un tipo di insegnamento che non sottolinea i passaggi qualitativi che hanno portato al superamento di alcuni modelli.

Uno studio successivo di Saarelainen et al. [39], utilizzando i profili concettuali dello studio di Furio e Guisasola, si propone di andare più a fondo nelle cause delle difficoltà degli studenti nel passaggio dal profilo coulombiano a quello maxwelliano. L'ipotesi fatta è che gli studenti non abbiano dimestichezza con il ragionamento vettoriale per i campi elettrici e il concetto di flusso e che faccia fatica ad applicare le conoscenze base del calcolo vettoriale alla fisica. In questo caso viene proposto il test CSEM a degli studenti all'inizio di un corso di elettromagnetismo. Alla fine del corso sono stati selezionati 5 studenti e sono stati sottoposti a un'intervista. Anche in questo caso i risultati hanno mostrato un maggiore successo degli studenti nell'uso della forza di Coulomb rispetto al concetto di campo. Inoltre, alla richiesta di una rappresentazione delle linee di campo, in genere non viene mostrato un contenuto fisico significativo o un carattere vettoriale. Questi risultati mostrano che la bassa comprensione del campo elettrico come campo vettoriale può essere un motivo delle difficoltà riscontrate

dagli studenti nel passaggio da un profilo coulombiano a uno maxwelliano.

5.2 La storia della scienza come veicolo per trasmettere la natura della scienza

Da anni viene riconosciuta la natura della scienza come un tassello fondamentale nell'educazione scientifica. Per *nature of science* (NOS) si intende un insieme di aspetti della scienza che comprendono studi storici, filosofici, sociologici e cognitivi che uniti mostrano un'immagine completa di cosa sia la scienza, di come funzione, di come operano gli scienziati e di come la società accoglie gli studi scientifici. Il NOS può quindi essere visto come l'intersezione tra immagini della scienza che emergono dalle lenti della filosofia, della storia, della sociologia o della psicologia. In questo modo dovrebbe emergere ciò che la scienza realmente è, superando le immagini parziali con cui spesso è descritta. Per questo motivo il NOS è visto come un elemento necessario all'interno dell'educazione scientifica e diversi studi hanno cercato i modi per includerlo nell'insegnamento della scienza.

Uno dei modi per facilitare l'insegnamento del NOS nelle classi di scienze è stato identificato nella *history of science* (HOS). Diversi ricercatori hanno esaminato le proprie pratiche per l'uso della storia della scienza per insegnare la natura della scienza concludendo che questo approccio ha successo quando vengono esplicitati gli elementi del NOS.

La relazione problematica tra matematica e fisica nella didattica è stata illustrata nel capitolo 1. De Berg [8] sottolinea il fatto che l'uso della matematica nella scienza è stato ampiamente studiato, ed emerge il dato che molti studenti attribuiscono molta importanza all'imparare e usare formule matematiche senza riuscire a ricavare da esse una conoscenza qualitativa. La conseguenza è che gli studenti possono saper affrontare problemi quantitativi lavorando con formule matematiche, ma vanno in difficoltà quando si chiedono riflessioni qualitative. Nel suo studio De Berg mostra il suo approccio utilizzato per trasmettere il significato delle equazioni matematiche nella scienza attraverso il delineamento di un profilo storico relativo alla legge di pressione-volume per i gas. De Berg individua i momenti storici importanti per individuare le componenti matematiche per la legge di pressione-volume. In particolare viene messo in luce il cambiamento della matematica nei secoli in termini di notazione e rappresentazioni. Inizialmente la relazione tra pressione e volume nelle opere di Boyle e Mariotte è espressa verbalmente, senza espressioni algebriche. Dal diciottesimo secolo il simbolismo astratto diventa la norma, un passo naturale che semplifica la rappresentazione delle relazioni. In particolare, grazie alla possibilità di esprimere il rapporto tra la pressione e il volume tramite i differenziali, si possono ricavare nuove informazioni che hanno facilitato l'utilizzo di un'interpretazione grafica, che aiuta nella deduzione della relazione tra le variabili coinvolte. L'analisi storica evidenzia come la forma quantitativa derivi da esigenze diverse che portano a una legge dinamica, frutto cioè dell'unione tra informazioni di base,

dettagli sperimentali e informazioni su come emerge la relazione matematica. La matematica che emerge in maniera complessa e dinamica può aiutare nella comprensione dei concetti dietro la formula matematica e può implicare anche una maggiore partecipazione degli studenti.

Capitolo 6

Percorso didattico

In questo capitolo viene proposta un'applicazione alla didattica del percorso storico approfondito. Nel capitolo 5 è stato mostrato come l'uso della storia nella didattica e della fisica possa dare un contributo importante nella trasmissione della conoscenza scientifica e nella comprensione della natura della scienza. Il percorso proposto segue alcuni passaggi storici ritenuti significativi per la comprensione dei concetti fondamentali dell'elettrostatica.

Un elemento importante che si riscontra seguendo le tappe selezionate è l'analogia, che emerge come un elemento ricorrente nel cambiamento concettuale che ha caratterizzato la storia della fisica e che, come evidenziato nel capitolo 2, può essere utilizzato nella didattica per un apprendimento significativo. Uno degli aspetti rilevanti all'interno del percorso è il rapporto tra la matematica e la fisica. Nel capitolo 1 è stata analizzata la complessità di questo rapporto e la difficoltà che emerge in ambito didattico nella costruzione di una relazione significativa tra le due discipline. Le tappe storiche descritte nel capitolo 4 sono un esempio di come l'evoluzione della matematica e della fisica siano profondamente connesse. Per questo motivo il percorso didattico proposto può portare ad alcune riflessioni su come la matematica non sia solo un linguaggio per la fisica, ma rivesta anche un ruolo centrale nello sviluppo e nella comprensione dei concetti fisici.

L'elettrostatica è un argomento molto vasto che può fornire diversi spunti nell'ambito dell'insegnamento secondario perché permette di unire concetti fisici, matematici e aspetti sperimentali. La legge dell'inverso del quadrato sarà il punto di partenza del percorso, suddiviso in 3 unità che permettono di evidenziare come storicamente sia avvenuto il passaggio da azione a distanza al concetto di campo elettrico. Per ogni unità verranno descritti gli obiettivi specifici, gli argomenti proposti, le modalità didattiche utilizzate e verranno messi in particolare evidenza gli aspetti storici e filosofici, l'utilizzo delle analogie e la relazione tra matematica e fisica che emerge dalle diverse rappresentazioni con cui vengono affrontati i concetti fisici. Nella tabella 6.1 sono sintetizzati per ciascuna unità i diversi aspetti considerati.

	Unità 1	Unità 2	Unità 3
Storia della fisica	Azione a distanza: dalla legge di gravitazione universale alla legge di Coulomb	Formalizzazione dell'elettrostatica: campo elettrico, teoria del potenziale e la legge di Gauss	Azione tramite un mezzo: rielaborazione dell'elettrostatica tramite le linee di campo
Rappresentazione	Algebra, geometria classica e elementi introduttivi al calcolo infinitesimale	Algebra e geometria vettoriale	Linee di campo elettrico
Analogie	Analogia formale e concettuale tra legge di gravitazione e legge di Coulomb	Equivalenza tra la legge di Coulomb e la legge di Gauss	Analogia con i fluidi e con i mezzi elastici ed equivalenza della nuova trattazione con la precedente

Tabella 6.1: Suddivisione del percorso didattico nelle tre unità. Per ciascuna si evidenzia il contesto storico, le rappresentazioni utilizzate e le analogie sfruttate per la didattica.

Il libro di testo preso come riferimento è *L'Amaldi per i licei scientifici. blu. Onde, campo elettrico e magnetico* di Ugo Amaldi, edito da Zanichelli. Gli argomenti e la modalità con cui vengono affrontati sono confrontati con questo testo, che fornisce anche il riferimento per la notazione utilizzata.

Target di riferimento e organizzazione del percorso

Il percorso è pensato per gli studenti del quarto anno di Liceo Scientifico, e si inserisce all'interno della regolare programmazione didattica, in corrispondenza dei moduli che trattano le forze elettriche, i campi elettrici e il potenziale elettrico. Non vengono indicate delle tempistiche precise in quanto, fornito lo scheletro del percorso, la profondità con cui trattare ciascuna unità è lasciata alla discrezionalità dell'insegnante.

Obiettivi generali

L'elettrostatica è un argomento che offre una grande ricchezza da un punto di vista didattico. Può essere vista come un punto di svolta e anello di congiunzione tra diversi metodi di rappresentazione matematica e descrizione concettuale delle forze. Ripercorrere alcuni passaggi storici permette di accompagnare il processo di costruzione dei concetti dell'elettrostatica negli studenti e il delicato passaggio da un paradigma a un altro.

Obiettivi trasversali

L'impronta storica data al percorso didattico permette di fornire agli studenti una visione più complessa della fisica, in particolare nel suo rapporto con la matematica e con gli aspetti sperimentali e filosofici che la definiscono. L'inserimento in un contesto storico e filosofico degli argomenti dell'elettrostatica permette di mettere in luce la connessione tra tutta la fisica, che spesso risulta eccessivamente compartimentalizzata nella progettazione didattica.

6.1 Unità 1: dalla legge di gravitazione universale alla legge di Coulomb

Nella maggior parte dei libri di testo di fisica la legge di Coulomb è presentata sottolineando l'analogia con la legge di gravitazione universale di Newton. Nell'Amaldi, le forze elettriche e gravitazionali vengono confrontate dal punto di vista del formalismo matematico, da cui si parte per mettere in luce le similitudini e le differenze nel loro comportamento. Le forze sono simili perché entrambe agiscono a distanza, sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza e direttamente proporzionali a una grandezza caratteristica. Sono invece diverse perché le cariche elettriche possono essere sia positive che negative mentre le masse solo positive, con la conseguenza che la forza gravitazionale è solo attrattiva e quella elettrica sia attrattiva che repulsiva. Infine si evidenzia una differenza quantitativa: la forza elettrica, in condizioni ordinarie, è molto più intensa di quella gravitazionale.

In questa unità si propone un percorso che ripercorra la nascita della legge di gravitazione universale, in particolare la dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza, e le motivazioni storiche e filosofiche che hanno portato a vedere il modello di azione a distanza e la forma matematica della legge della forza gravitazionale come modello per qualsiasi forza, a partire dalla forza di Coulomb.

Obiettivi specifici

Lo scopo di questa unità è quello di mostrare come, storicamente, si sia arrivati alla formulazione della legge di Coulomb in analogia con la legge di gravitazione universale di Newton. Si ripercorrono quindi i ragionamenti geometrici e fisici effettuati da Newton per determinare la potenza della distanza nella legge di gravitazione universale a partire dall'ipotesi di una traiettoria ellittica.

Descrizione unità 1

La legge che prende il nome di legge di Coulomb descrive la forza elettrica tra due cariche Q_1 e Q_2 . Possiamo scrivere l'intensità della forza in questo modo:

$$F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (6.1)$$

Il valore della forza elettrica è quindi direttamente proporzionale a ciascuna carica e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Se le cariche sono nel vuoto, la costante di proporzionalità k_0 vale:

$$k_0 = 8,99 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Si può notare che la forma matematica della forza elettrica e la forza gravitazionale è la stessa. Ci chiediamo quindi il motivo di questa somiglianza, soffermandoci soprattutto sulla dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza.

segmento proporzionale al quadrato del tempo moltiplicato per l'accelerazione:

$$QR = \frac{1}{2} a \Delta t^2.$$

Per la II legge di Newton l'accelerazione è proporzionale alla forza, per cui:

$$F \propto \lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{\Delta t^2}.$$

A partire da questa relazione si può trovare la dipendenza della forza nel punto P dalla distanza dal fuoco. Per ipotesi vale la legge delle aree, per cui:

$$\Delta t \propto \text{Area}(SPQ).$$

Poiché stiamo considerando il limite per Q che tende a P , si può considerare l'arco PQ uguale alla corda sottostante, perciò la superficie SPQ può essere approssimata a un triangolo:

$$\Delta t \propto (SP \times QT).$$

Perciò:

$$F \propto \lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{(SP \times QT)^2}.$$

Possiamo scrivere questa relazione in questo modo:

$$F \propto \frac{1}{SP^2} \times \lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{QT^2}.$$

Newton sviluppò un metodo che gli permetteva di fare delle procedure geometriche di passaggio al limite. Con questo metodo dimostra che il $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{QT^2}$ è una costante. Si può quindi concludere che l'intensità della forza è inversamente proporzionale all'inverso del quadrato della distanza.

La visione newtoniana del mondo era una visione corpuscolare: il mondo consisteva in particelle in uno spazio vuoto. I corpuscoli interagiscono tra loro a distanza, attraverso una forza centrale diretta lungo la retta che congiunge i due corpi coinvolti e inversamente proporzionale alla loro distanza. La forza agisce in maniera istantanea e tale per cui la forza esercitata dalla prima massa sulla seconda è uguale alla seconda sulla prima (III legge di Newton). Newton parlava delle forze come forme matematiche, solo successivamente si parlò di "forze a distanza", interpretando le forze di Newton come forze fisiche che agiscono senza la necessità di un mezzo. Infatti la forma matematica della forza suggerisce che Newton postulò un'azione tra corpi che non richiede un mezzo per propagarsi né un tempo finito. In realtà Newton nei *Principia* non volle dare ipotesi fisiche, non ricercava la loro natura e le loro cause ma solo le leggi che giustificano i fenomeni.

Nonostante Newton stesso non fosse per nulla convinto dell'azione a distanza, la sua grande autorità nel pensiero scientifico diede inizio a un paradigma che influenzerà fortemente la scienza nei secoli successivi. Coloro che seguivano

Legge di gravitazione universale	Legge di Coulomb
$\vec{F}_g = G \frac{m_1 m_2}{ \vec{r} ^2} \hat{r}$	$\vec{F}_e = k \frac{Q_1 Q_2}{ \vec{r} ^2} \hat{r}$
m_1, m_2 masse dei corpi	q_1, q_2 cariche elettriche
$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$
$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ è la posizione di 2 rispetto a 1	$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ è la posizione di 2 rispetto a 1
Forza che agisce a distanza istantaneamente	Forza che agisce a distanza istantaneamente
Forza attrattiva	Forza attrattiva o repulsiva
Legge basata su osservazioni empiriche interpretate tramite modelli matematici costruiti con ipotesi geometriche.	Legge basata su osservazioni empiriche e sull'analogia con la legge di gravitazione universale.

Tabella 6.2: Analogie e differenze tra la legge di gravitazione universale e la legge di Coulomb.

il una concezione newtoniana speravano di poter spiegare qualsiasi forza e fenomeno fisico attraverso la meccanica, vista come universale. La legge dell'inverso del quadrato era vista come la più naturale, perché aveva una interpretazione geometrica che sembrava seguire le caratteristiche dello spazio stesso. Se infatti lo spazio è vuoto e uniforme è plausibile che l'intensità di una forza decresca in maniera proporzionale all'area di una superficie sferica. In particolare, il modello di azione a distanza venne utilizzato da Coulomb per determinare la forma matematica della forza elettrica. Date le cariche elettriche Q_1 e Q_2 , il vettore forza elettrica è data da:

$$\vec{F}_e = k \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}|^2} \hat{r}.$$

dove $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ è la posizione della carica 2 rispetto alla carica 1. Le analogie tra la forza di Coulomb e la forza di gravitazione universale sono evidenti: entrambe sono forze che agiscono a distanza con un'intensità inversamente proporzionale al quadrato della distanza e direttamente proporzionale al prodotto delle masse o delle cariche e nella direzione della congiungente tra i corpi. La differenza è che le masse possono essere solo positive, mentre le cariche possono essere sia positive che negative che la forza di Coulomb può essere sia attrattiva che repulsiva, mentre la forza di gravitazione può essere solo attrattiva. Inoltre, la forza elettrica è molto più forte rispetto a quella gravitazionale, cosa che ha aiutato storicamente nello sviluppo di esperimenti per misurarla. In tabella 6.2 sono riassunte le analogie e le differenze delle due leggi.

Coulomb nel 1785 fece delle misure dirette su attrazioni e repulsioni elettriche tramite la bilancia di torsione. L'apparato strumentale di Coulomb è mostrato in figura 4.2 e consiste in un braccio sospeso tramite un filo alle cui estremità si trovano due sfere, una neutra e una carica. In prossimità della sfera carica viene posta una terza sfera carica. Misurando l'angolo di cui ruota il braccio si può risalire alla forza di attrazione o di repulsione che agisce tra le sfere cariche. Gli esperimenti che fece Coulomb tramite la bilancia di torsione non erano così

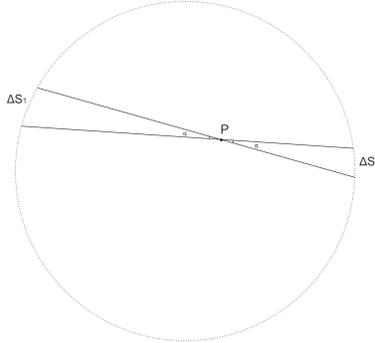


Figura 6.2: Diagramma per la dimostrazione della proposizione LXX dei Principia. Immagine realizzato con Corel Draw.

precisi da giustificare la legge, la cui formulazione fu fortemente influenzata dall'analogia con la forza gravitazionale.

Questa analogia emerge anche dai lavori di Priestley e Cavendish, che utilizzarono risultati espressi da Newton nei Principia per progettare esperimenti più precisi per la misurazione di una forza. Particolarmente rilevante per gli sviluppi sperimentali per lo studio della forza elettrica è la proposizione LXX dei *Principia*:

Se verso i singoli punti di una superficie sferica tendono uguali forze centripete che decrescono proporzionalmente al quadrato delle distanze dai punti, dico che un corpuscolo posto dentro tale superficie non è attratto da queste forze verso alcuna parte.

Vediamo il metodo utilizzato da Newton per dimostrare questo enunciato elaborato in termini matematici moderni.

Prendiamo un guscio sferico di densità di massa uniforme ρ e poniamo una massa puntiforme in un punto P al suo interno. Consideriamo un cono di vertice P che interseca il guscio determinando le superfici ΔS_1 e ΔS_2 (figura 6.2). Newton considera un cono di un angolo solido il più piccolo possibile in modo che la superficie determinata dall'intersezione dell'angolo solido con la sfera possa essere considerata piana. In questo modo i due angoli solidi con origine in P possono essere considerati uguali, e, di conseguenza, le aree delle superfici ΔS_1 e ΔS_2 sono proporzionali rispettivamente al quadrato di r_1 e r_2 , quindi si può scrivere:

$$\Delta S_1 = \alpha r_1^2; \Delta S_2 = \alpha r_2^2.$$

Poiché ρ è uniforme sulla superficie, le masse su ΔS_1 e ΔS_2 sono proporzionali al quadrato della distanza. Calcoliamo quindi la forza che agisce su P:

$$F_P = \frac{\rho \Delta S_1}{r_1^2} - \frac{\rho \Delta S_2}{r_2^2} = \frac{\rho \alpha r_1^2}{r_1^2} - \frac{\rho \alpha r_2^2}{r_2^2} = 0 \quad (6.2)$$

Questo risultato dimostrato da Newton è stato fondamentale in futuro per dimostrare la legge dell'inverso del quadrato della distanza per le forze elettriche.

Le misure indirette fatte da Cavendish si basano su questo risultato, traslato per il caso di un guscio sferico conduttore con una carica uniforme sulla superficie. Il primo esperimento di questo tipo si fa risalire a Franklin, che osservò che all'interno di un recipiente metallico isolato non ci fossero cariche. Questa deduzione era stata fatta tramite una sfera carica calata all'interno di un recipiente d'argento neutro. Tenendo sospesa la sfera tramite un filo, si abbassa fino a farla toccare con il fondo del recipiente. Franklin osservò che prima del contatto con il recipiente la sfera non è attratta dalla parete interna e dopo aver toccato il conduttore non ha più carica e non viene caricata nel contatto con l'interno del recipiente ma solo con l'esterno. In seguito, Priestley verificò questa osservazione di Franklin e dedusse da ciò la dipendenza della forza dall'inverso del quadrato della distanza. In analogia con la gravitazione, Priestley collegò il fatto che la sfera prima di entrare in contatto con il conduttore non fosse attratta dall'interno del contenitore con l'osservazione fatta da Newton che su una massa all'interno di un guscio sferico non agisce una forza gravitazionale.

Considerazioni storiche e filosofiche

Il contesto storico fornito nell'Unità 1 non ha la pretesa di mostrare un quadro esaustivo dello sviluppo delle leggi prese in considerazione, ma ha l'obiettivo di selezionare alcuni punti significativi. Il primo è quello che mostra come l'autorità di Newton e l'universalità della concezione newtoniana del mondo fisico abbia influenzato la scienza per molto tempo, portando ad applicare il suo modello di forza come azione a distanza a tutte le forze. Un altro punto riguarda il ruolo che storicamente ha avuto l'aspetto sperimentale nello sviluppo dell'elettrostatica. Anche in questo caso si esplicita l'influenza degli studi matematici di Newton sulle forze gravitazionali, citati espressamente da Priestley e Cavendish e utilizzati come modelli per le forze elettriche.

Relazione tra matematica e fisica

È stata approfondita nella sezione 4.1 la relazione tra matematica e fisica che emerge dalla dimostrazione di Newton della proporzionalità inversa della forza gravitazionale con il quadrato della distanza tra i corpi a partire dall'ipotesi di una traiettoria ellittica. La dimostrazione proposta è una versione rielaborata di quelle che si trovano nei *Principia*, ma vengono mantenuti alcuni concetti essenziali. In particolare si evidenziano due aspetti:

- la rappresentazione geometrica di grandezze fisiche;
- la necessità dei limiti per affrontare la descrizione di moti continui.

Ripercorrere questa dimostrazione, anche se non strettamente necessario ai fini della comprensione delle forze elettriche, permette di vedere la concezione che aveva Newton delle forze come forze matematiche, necessarie per spiegare il fatto che un corpo seguisse una traiettoria ellittica. Questa concezione, e anche gli strumenti geometrici utilizzati da Newton influenzarono fortemente sia

la concezione sulla natura della forza sia i ragionamenti matematici fatti per realizzare esperimenti indiretti che permettessero di indagare la forza elettrica, come si nota nella teoria alla base degli esperimenti di Franklin e Cavendish.

6.2 Unità 2: Il campo elettrico e il potenziale

Questa unità si inserisce storicamente nel periodo in cui molti fisici e matematici svilupparono strumenti che permettessero di affrontare i problemi che emergevano dallo studio dell'elettrostatica e per i quali la trattazione in termini di forza elettrica non era conveniente. Vengono quindi introdotti i concetti di campo elettrico e potenziale elettrico come strumenti matematici utili in alcune situazioni problematiche, come, ad esempio, la distribuzione di cariche sui conduttori. Nell'Amaldi il campo elettrico viene introdotto direttamente come strumento per superare le difficoltà concettuali che sorgono dall'idea di forza come azione a distanza. In questa unità si propone di fare un passaggio aggiuntivo, intermedio tra il paradigma della forza a distanza e l'utilizzo del concetto di campo per descrivere un'azione che avviene tramite un mezzo.

Obiettivi specifici

Lo scopo specifico di questa unità è quello di accompagnare lo studente nel passaggio da una visione dell'elettrostatica in funzione della forza elettrica a una in funzione del meno intuitivo ma più potente concetto di campo elettrico e la grandezza strettamente connessa ad esso, il potenziale. In particolare viene approfondito il teorema di Gauss, mettendo in evidenza la sua equivalenza, nell'elettrostatica, con la legge di Coulomb ma anche la sua maggiore generalità e semplicità in molti contesti.

Descrizione unità 2

Una volta determinata la legge dell'interazione tra i corpi puntiformi carichi elettricamente, molti fisici e matematici contribuirono a dare una descrizione matematica ai fenomeni dell'elettrostatica, ancora una volta in analogia con la trattazione matematica sviluppata per i fenomeni gravitazionali. Nell'unità 1 è stata vista la dimostrazione di Newton del fatto che una massa posta all'interno di un guscio sferico non subisce nessuna forza. Questa dimostrazione è stata ripresa da Cavendish e applicata alle forze elettriche considerando un conduttore sferico cavo con una distribuzione di carica uniforme. I ragionamenti in entrambi i casi sono fatti in termini di forze. Alcuni fisici e matematici tra cui Lagrange, Laplace, Poisson e Gauss, svilupparono dei nuovi strumenti matematici che permettessero di trattare i fenomeni elettrici in maniera più efficace, a partire proprio dai problemi che derivano dalla distribuzione di cariche sulla superficie di materiali conduttori. Si iniziò quindi a ragionare non più in termini di forza elettrica ma in termini di campo elettrico e di potenziale. L'utilizzo di questi

concetti permetteva una formalizzazione matematica del paradigma newtoniano della forza come azione a distanza.

Si introduce quindi il concetto di campo elettrico come strumento per semplificare la trattazione delle forze. Il campo elettrico viene introdotto come un campo vettoriale generato dalla presenza di una carica Q che modifica le caratteristiche dello spazio circostante in modo tale che una carica di prova q , piccola rispetto alla prima, posizionata in un punto del campo risenta di una forza descrivibile dalla legge di Coulomb. Viene quindi definito il vettore campo elettrico, una grandezza legata alla forza che agisce sulla carica di prova dalla relazione:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Nel caso di una carica puntiforme, l'intensità del campo elettrico in un punto è:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}.$$

Si introduce ora il concetto di potenziale in analogia con il potenziale gravitazionale, a partire dall'energia potenziale. Si può infatti associare un'energia potenziale a una forza conservativa e, poiché la forza elettrica ha la stessa forma matematica della forza gravitazionale, anch'essa è una forza conservativa. Si definisce quindi una differenza di energia potenziale $\Delta U = U_B - U_A$ con la relazione:

$$\Delta U = -W_{A \rightarrow B}, \quad (6.3)$$

dove $W_{A \rightarrow B}$ è il lavoro fatto dalla forza nel passaggio dalla configurazione A alla B . Una volta scelta una configurazione R in modo da avere $U_R = 0$, si chiama energia potenziale del sistema in una configurazione A il lavoro effettuato dalla forza conservativa nel passare dalla configurazione A alla configurazione di riferimento.

In analogia con l'energia potenziale gravitazionale definiamo quindi:

$$U_N = -G \frac{m_1 m_2}{r} + k; \quad U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r} + k, \quad (6.4)$$

dove k è un parametro che in entrambi i casi dipende dalla scelta che si fa per la condizione di zero dell'energia potenziale. Per convenzione in genere si pone uguale a zero l'energia potenziale tra due cariche che si trovano a distanza infinita, in modo da avere k nulla. L'energia potenziale U_A relativa a una carica di prova q in un punto A è data dalla somma delle energie potenziali relative alle N cariche presenti. A partire da U_A definiamo il potenziale elettrico V_A

$$V_A = \frac{U_A}{q} \quad (6.5)$$

e la differenza di potenziale

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_{A \rightarrow B}}{q}. \quad (6.6)$$

Si definisce la superficie equipotenziale come il luogo dei punti dello spazio in cui il potenziale elettrico assume uno stesso valore. Per spostare una carica di prova lungo queste linee il lavoro risulta dunque nullo.

Questa quantità scalare può essere associata al campo elettrico in un punto dello spazio. Se infatti all'interno di un campo elettrico si sposta una carica di prova dal punto A, in cui il potenziale elettrico è V_A , al punto B, in cui il potenziale elettrico è $V_A + \Delta V$, il lavoro effettuato dalla forza elettrica durante lo spostamento $\Delta \vec{l}$ sarà

$$W_{A \rightarrow B} = q \vec{E} \cdot \Delta \vec{l}.$$

Dalla 6.6:

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{l} = -E \Delta s,$$

dove Δs è la distanza tra le due superfici equipotenziali V_A e $V_A + \Delta V$.

La legge di Gauss Tra coloro che svilupparono la teoria del potenziale e che contribuirono a dare un formalismo matematico all'elettrostatica ci fu anche Gauss. A Gauss si deve la rielaborazione dei teoremi sui gusci sferici di Newton attraverso le nuove conoscenze e gli strumenti sviluppati in ambito matematico. Ripercorriamo i ragionamenti di Gauss in maniera semplificata e li confrontiamo con quelli di Newton riportati nell'unità 1.

Se una superficie chiusa Ω si trova in un campo elettrico \vec{E} , allora il flusso del campo elettrico attraverso la superficie è:

$$\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\epsilon},$$

dove Q_{tot} è la carica totale all'interno della superficie e ϵ è la costante dielettrica del mezzo.

Il flusso del vettore campo elettrico \vec{E} attraverso una superficie orientata piana \vec{S} può essere così definito:

$$\Phi_{\vec{S}}(\vec{E}) = \vec{E}_i \cdot \vec{S}.$$

Se si vuole calcolare il flusso attraverso una superficie Ω non piana, la si può suddividere in n parti abbastanza piccole da poter essere approssimate a superfici piane. In questo modo il flusso totale diventa:

$$\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{S}_i.$$

Ripercorriamo la dimostrazione di Gauss. Consideriamo una superficie chiusa S qualsiasi e un campo elettrico generato da una singola carica Q . Disegniamo una sfera di raggio unitario attorno alla carica e chiamiamo $\Delta \vec{\sigma}$ l'elemento di area determinato dall'intersezione della sfera con un cono di angolo piccolo con vertice in Q . Chiamiamo invece $\Delta \vec{S}_i$ l'elemento determinato dall'intersezione

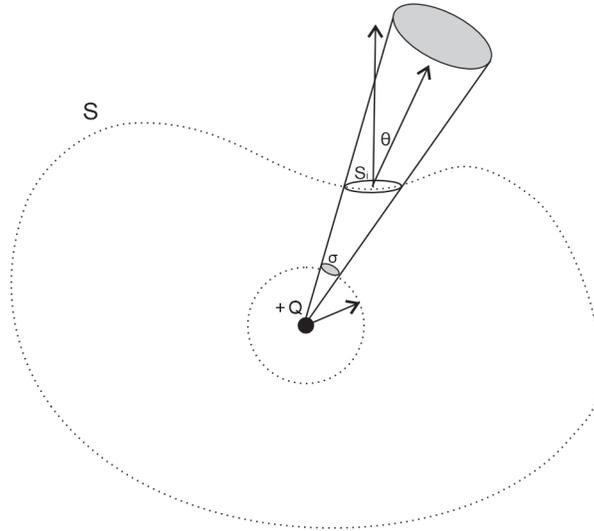


Figura 6.3: Schema di riferimento per il calcolo del flusso di Q attraverso la superficie S . Immagine realizzata con Corel Draw.

della superficie S con il cono. Infine chiamiamo θ l'angolo che la direzione dell'intensità del campo elettrico forma con la normale alla superficie S (figura 6.3). La componente dell'intensità in un punto P della superficie nella direzione normale alla superficie è

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \cos \theta,$$

dove r è la distanza del punto P dalla carica Q .

Il flusso del campo elettrico attraverso l'elemento di superficie $\Delta\vec{S}$ sarà

$$\Phi_{S_i}(\vec{E}) = E_i \cos \theta \Delta S_i.$$

Sia $\Delta\Omega$ l'elemento di angolo solido così definito:

$$\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta S \cos \theta}{r^2}.$$

Poichè la sfera ha raggio unitario: $\Delta S \cos \theta = r^2 \Delta\Omega = r^2 \Delta\sigma$. Poichè $E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}$:

$$E_i \Delta S \cos \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \Delta\sigma.$$

Il flusso totale attraverso la superficie chiusa sarà:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \sum_{i=1}^n E_i \cdot \Delta\vec{S}_i = E\sigma,$$

Legge di Coulomb	Legge di Gauss
$\vec{F}_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$	$\Phi_{\Omega}(\vec{E}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \frac{Q_{tot}}{\epsilon}$
Grandezza fisica coinvolta: forza elettrica	Grandezza fisica coinvolta: campo elettrico
Valida per cariche statiche	Valida anche per cariche in movimento
Risultato di osservazioni sperimentali	Risultato dedotto matematicamente

Tabella 6.3: Confronto tra la legge di Coulomb e la legge di Gauss.

dove $\sigma = 4\pi r^2$ è l'area della superficie sferica ottenuta dalla somma delle piccole sezioni in cui è stata suddivisa. Andando a sostituire si ottiene:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Il fatto che era già stato osservato da Newton per la forza gravitazionale e dimostrato con considerazioni analoghe per la forza elettrica, appare ora come conseguenza del teorema di Gauss:

Se abbiamo una superficie chiusa tale per cui ciascun punto è costituito da materiale conduttore, la carica totale all'interno sarà nulla.

In un punto occupato da un materiale conduttore, le cariche elettriche saranno in equilibrio sotto l'azione delle forze elettriche di ciascuna carica. L'intensità risultante su un elemento del conduttore dovuto a tutte le cariche del guscio sarà $E = 0$. Il potenziale in un conduttore in equilibrio dovrà dunque essere costante. Ne consegue che il flusso del campo elettrico attraverso la superficie sarà nullo. Per il teorema di Gauss quindi la carica totale all'interno della superficie deve essere nulla. Si può notare la semplicità con cui si arriva allo stesso risultato trovato da Newton e ripreso da Cavendish ragionando in termini di potenziale e di campo elettrico piuttosto che in termini di forza elettrica.

Considerazioni storiche e filosofiche

Alla luce della legge di Coulomb e della sua analogia con la legge di gravitazione universale di Newton, furono molti i fisici e i matematici che contribuirono a costruire una teoria matematica dell'elettrostatica. Questo avvenne con lo sviluppo della teoria del potenziale, a cui contribuirono per esempio Lagrange, Laplace, Poisson, Green e Gauss. Lagrange osservò la semplificazione nella trattazione matematica che si ottiene utilizzando una funzione dalla cui derivazione rispetto alle coordinate si ottengono le componenti del campo elettrico. Il potenziale non era intesa come una proprietà materiale del campo, ma come uno strumento matematico adatto alla descrizione dell'azione a distanza.

Dello sviluppo storico che ha portato alla formalizzazione del paradigma della forza come azione a distanza rimangono in questa unità alcuni punti che non

richiedono strumenti matematici troppo complessi per gli studenti. In particolare, si mette in mostra la maggiore convenienza dell'utilizzo dei concetti di potenziale e di campo elettrico nella descrizione dei fenomeni dell'elettrostatica. Nell'introduzione di queste grandezze si fa riferimento ancora all'analogia con la gravitazione, in quanto anche storicamente, la teoria del potenziale è nata per formalizzare l'idea newtoniana dell'azione a distanza e i risultati matematici ottenuti potevano essere applicati per qualsiasi forza che seguisse la legge dell'inverso del quadrato. Questo viene mostrato ripercorrendo la dimostrazione della legge di Gauss, un risultato sorprendente e direttamente connesso alla dipendenza inversa del campo elettrico dalla seconda potenza della distanza.

Relazione tra matematica e fisica

L'aspetto della relazione tra matematica e fisica in questa unità risulta problematico a causa della mancanza di strumenti adeguati per affrontare la teoria del potenziale e le sue implicazioni nella trattazione dell'elettrostatica. La teoria del potenziale ha permesso di risolvere alcuni problemi fondamentali, tra cui quelli che riguardano la distribuzione di carica sulla superficie di un conduttore.

Non potendo introdurre le equazioni di Laplace e di Poisson e non avendo gli strumenti necessari per definire le componenti del campo elettrico in funzione del potenziale, si introduce il campo elettrico come un campo vettoriale di forze generato da una o più cariche elettriche e il potenziale in un certo punto come il lavoro necessario per portare una carica dall'infinito fino a quel punto. Il problema riguardo alla distribuzione delle cariche sulla superficie di un conduttore, che serve per arrivare alla legge di Gauss, viene presentato sostituendo gli integrali con sommatorie di elementi di superficie sufficientemente piccoli da poter essere considerati piani. Si mette in mostra così anche la natura vettoriale del campo elettrico, fondamentale per arrivare alla corretta definizione del flusso del campo. È importante anche la rappresentazione grafica del vettore campo elettrico, che aiuta nella comprensione dei passaggi che vengono fatti nella dimostrazione. Un espediente grafico può aiutare l'intuitività dello studente e facilitare il collegamento tra matematica e fisica, purché nella rappresentazione grafica vengano esplicitate le ipotesi fisiche compiute.

6.3 Unità 3: la teoria di campo e l'azione tramite un mezzo

Il passaggio che avviene in questa unità è quello dall'azione a distanza all'azione della forza tramite un mezzo. Faraday vedeva la distanza tra due corpi carichi come uno spazio pieno di linee di forza. Ciò che è stato ricavato precedentemente nell'interpretazione tramite la forza come azione a distanza viene a questo punto interpretata tramite l'idea di forza agente in un mezzo, mostrando la compatibilità tra le due concezioni. Vengono mostrate anche le problematiche che emergono da una concezione di forza come azione a distanza e le motivazioni che hanno portato a un cambiamento di prospettiva. Anche in questo caso si

utilizza lo strumento dell'analogia, in particolare con la dinamica dei fluidi, per aiutare nella visualizzazione della forza che si propaga in un mezzo.

Obiettivi specifici

L'obiettivo specifico di questa unità è quello di completare l'evoluzione dell'elettrostatica affrontando il passaggio da azione a distanza all'azione tramite un mezzo. I concetti già introdotti nelle precedenti unità vengono reinterpretati mostrando la compatibilità delle diverse trattazioni ma anche le motivazioni che portano a considerare fondamentale il mezzo di propagazione.

Descrizione unità 3

Fino all'inizio dell'Ottocento la teoria che si era imposta era quella di azione a distanza. Il concetto dominante era la legge dell'inverso del quadrato della distanza e la teoria matematica newtoniana delle forze si impose mettendo in secondo piano il mezzo di propagazione. Furono gli esperimenti fatti con elettricità e magnetismo che portarono Faraday a proporre una nuova interpretazione. Verranno per questo motivo introdotti i condensatori piani, mostrando la relazione che lega la carica presente sulla loro superficie con la differenza di potenziale tra le due armature considerate nel vuoto. Viene quindi presentato l'esperimento fatto da Faraday con due condensatori piani, uno in cui tra le due armature c'è il vuoto e uno in cui è presente un dielettrico. L'esperimento permise a Faraday di osservare che il comportamento della carica sulle armature dipendeva dal mezzo interposto: a parità di differenza di potenziale tra le armature, la carica di quello contenente il dielettrico risultava maggiore. Questo era un risultato sorprendente, che sposta quindi l'attenzione dall'interazione tra le cariche al mezzo interposto tra esse.

Faraday dunque, non convinto della teoria dell'azione a distanza, reinterpretò l'elettrostatica restituendo un ruolo centrale al mezzo. Per fare ciò introdusse una rappresentazione che diede inizio a una nuova concezione di propagazione delle forze, non più a distanza ma in un mezzo continuo percorso da linee di forza. Questo non significava mettere in dubbio la legge di gravitazione universale di Newton o la legge di Coulomb, ma considerarle come semplici descrizioni matematiche di effetti osservati.

Faraday non era un matematico e fu Maxwell a cercare una rappresentazione matematica per le sue idee. Questo non per dimostrare la veridicità della teoria di Faraday rispetto alla teoria dell'azione a distanza, quanto per mostrare l'equivalenza delle due trattazioni. Per aiutarsi in questa ricerca, Maxwell si servì di diverse analogie, tra cui l'analogia tra le linee di campo elettrico e dei tubi in cui scorre un fluido incomprimibile, chiamati tubi di flusso. In particolare, grazie all'equazione di continuità utilizzata nell'ambito della dinamica dei fluidi si può arrivare alla legge di Coulomb e di Gauss.

Diamo quindi la definizione di linea di forza:

Una linea di forza è una curva nel campo elettrico con le seguenti proprietà:

Linee di flusso	Linee di forza
Descrivono il percorso seguito da un fluido.	Descrivono la traiettoria di una carica di prova in un campo elettrico.
La tangente in ogni punto è la direzione della velocità di propagazione delle particelle del fluido.	La tangente in ogni punto è la direzione dell'intensità del campo elettrico in quel punto.
Il fluido scorre da un punto a pressione maggiore a uno a pressione minore	Una linea di forza ha inizio in un punto a potenziale maggiore e fine in uno a potenziale minore.
La loro densità dipende dall'equazione di continuità.	La loro densità dipende dall'intensità del campo elettrico.

Tabella 6.4: Confronto tra le linee di flusso utilizzate nella dinamica dei fluidi e le linee di forza del campo elettrico.

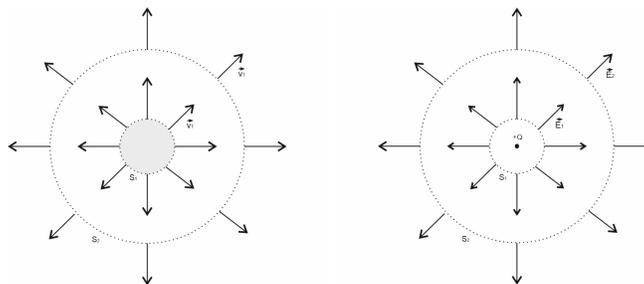


Figura 6.4: Schema di riferimento per il campo di velocità di una sorgente di un fluido (sinistra) e per il campo elettrico dovuto a una carica puntiforme (destra). Immagine realizzata con Corel Draw.

- la tangente in ogni suo punto è nella stessa direzione dell'intensità del campo elettrico in quel punto;
- è orientata nel verso del vettore campo elettrico;
- esce dalle cariche positive ed entra in quelle negative;
- la sua densità è direttamente proporzionale all'intensità del campo elettrico.

Maxwell riconosceva nella teoria delle linee di forza di Faraday un modello geometrico utile nella rappresentazione della direzione delle forze, ma per ottenere una descrizione matematica appropriata occorre trovare un modo per indicare l'intensità in ciascun punto. La soluzione a questo era quella di considerare le linee di forza non come semplici linee ma come tubi di sezione variabile in cui scorre un fluido incompressibile. L'intensità del campo elettrico in un punto viene paragonata alla velocità con cui il fluido scorre all'interno del tubo. Per Maxwell l'utilizzo di questo fluido incompressibile non doveva portare

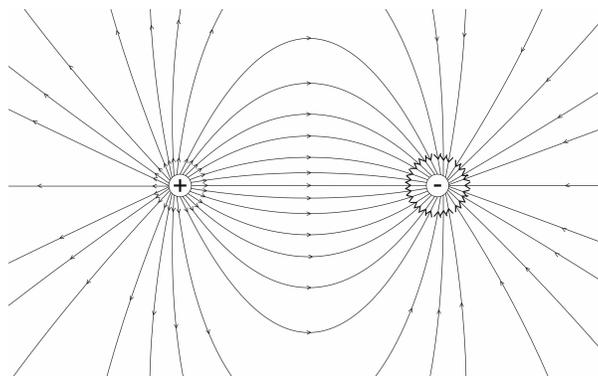


Figura 6.5: Linee di forza di due cariche uguali di segno opposto. Immagine realizzata con Corel Draw.

a un'ipotesi fisica sul campo elettrico: si tratta di un fluido immaginario che permette di rappresentare alcune proprietà in una maniera più comprensibile rispetto alle formule algebriche utilizzate di solito.

Poiché il fluido è incomprimibile, deve valere l'equazione di continuità, che indica che il flusso $\Phi = vS$, cioè il volume di fluido che nell'unità di tempo attraversa la sezione di un tubo, si conserva. La figura 6.5 rappresenta un fluido che scorre da una sorgente. L'equazione di continuità è la seguente:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Poiché la superficie attraverso cui scorre il fluido è sferica l'equazione diventa:

$$v_1 \pi r_1^2 = v_2 \pi r_2^2.$$

Questo implica il fatto che la velocità decresca come $\frac{1}{r^2}$, cioè con lo stesso andamento che, per la legge di Coulomb, ha il campo elettrico in funzione della distanza. Si possono quindi considerare la legge di Coulomb e la legge di Gauss come delle leggi di continuità e si può sfruttare l'analogia dell'elettrostatica con la dinamica dei fluidi per facilitare la comprensione di alcuni concetti.

Osserviamo quindi più nello specifico la derivazione della legge di Gauss a partire dall'equazione di continuità. Facendo ancora riferimento alla figura 6.5 scriviamo il flusso del fluido rispettivamente attraverso la superficie S_1 e S_2 :

$$\Phi_1 = v_1 S_1; \quad \Phi_2 = v_2 S_2.$$

L'equazione di continuità richiede l'uguaglianza tra i due flussi: $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$. Si può scrivere la velocità v_2 in funzione del flusso:

$$v_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{\Phi}{4\pi r_2^2},$$

e, più in generale:

$$v(r) = \frac{\Phi}{4\pi r^2} \tag{6.7}$$

Seguiamo lo stesso ragionamento per il campo elettrico. Scriviamo il flusso del campo elettrico attraverso le superfici S_1 e S_2 :

$$\Phi_1 = E_1 S_1; \quad \Phi_2 = E_2 S_2.$$

Per l'equazione di continuità $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$. Possiamo quindi anche in questo caso scrivere l'intensità di campo E_2 in funzione del flusso:

$$E_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{\Phi}{4\pi r_2^2}.$$

Più in generale si scrive:

$$E(r) = \frac{\Phi}{4\pi r^2} \quad (6.8)$$

Se è valida la legge di Gauss $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$, e si sostituisce questa espressione in 6.8 si ottiene:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Questo significa che se vale la legge di Gauss, attraverso l'equazione di continuità, si arriva alla legge di Coulomb per l'intensità del campo elettrico.

L'analogia tra la fluidodinamica e l'elettrostatica prosegue con la constatazione del fatto che il fluido all'interno del tubo subisce una resistenza dovuta alla natura del mezzo in cui scorre. Questa resistenza si manifesta in una forza che agisce sull'unità di volume del fluido in direzione opposta a quella del moto del fluido. Il tasso di decrescita della pressione è $\Delta P \propto v$. Considerando un tubo di lunghezza infinita, poichè $P = 0$ a r infinita, sostituendo v con l'equazione 6.7:

$$P = \frac{k}{4\pi r},$$

dove k è una costante che dipende dalla resistenza del mezzo. Se la sorgente è formata da S unità di sorgenti, allora

$$P = \frac{kS}{4\pi r}.$$

Abbiamo visto che il potenziale per un campo elettrico è:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

La somiglianza tra le due equazioni, come quella tra la velocità e l'intensità del campo elettrico portano Maxwell a considerare la differenza di potenziale e di pressione come analoghe. Lungo una linea di forza, che è uscente dalle cariche positive ed entrante in quelle negative come mostrato in figura 6.5, si prosegue da un potenziale maggiore a uno minore. Le linee di flusso che si generano tra una sorgente (corrispondente alla carica positiva) e un pozzo (corrispondente alla carica negativa) hanno lo stesso andamento da una pressione maggiore a una minore.

Considerazioni storiche e filosofiche

Il tema principale che riguarda questa unità è il passaggio dall'azione a distanza all'azione tramite un mezzo. Questo passaggio storicamente è stato complicato e dovuto al contributo di molte osservazioni e teorie che necessitano di uno studio riguardo alle interazioni tra elettricità e magnetismo. Nella descrizione dell'unità non sono state citate le osservazioni di Oersted che riguardano l'interazione tra campi elettrici e magnetici, descritte nel capitolo 4. Questa è una scelta didattica: fare riferimento a esperimenti più intuitivi che riguardano solo l'elettrostatica, anche se non del tutto corretto storicamente, permette di ragionare sulle linee di forza in un ambito più familiare, per poi affrontare lo studio successivo dell'elettrodinamica e dell'elettromagnetismo con una base di partenza su cui costruire nuova conoscenza.

Faraday propose una nuova interpretazione dell'azione elettrica, non più una forza a distanza ma una di contatto tra particelle contigue all'interno di un mezzo percorso da linee di forza curve. Maxwell si servì di analogie per arrivare a una trattazione matematica del nuovo paradigma di interpretazione delle interazioni. Maxwell non voleva dimostrare la veridicità di una interpretazione rispetto a un'altra ma mostrare la loro uguaglianza. L'analogia idrodinamica è particolarmente indicata nella didattica in quanto permette di dare una nuova rappresentazione del concetto di campo mettendo in mostra la sua compatibilità con i risultati trattati nelle unità precedenti.

Relazione tra matematica e fisica

Un problema che emerge nell'uso delle analogie è quello del linguaggio. Turner [41] sottolinea che in *On Faraday's Lines of Forces* l'utilizzo dell'analogia con il fluido incomprimibile è efficace ma incompleta e per questo può portare a errori negli studenti. Si riscontra in questa analogia un problema frequente nell'insegnamento: la mancanza del linguaggio della matematica necessario per arrivare a una conoscenza completa del fenomeno. Il linguaggio che manca nell'analogia con la dinamica dei fluidi è quello dell'analisi vettoriale. L'uso che Faraday fa delle linee di forza viene visto da Maxwell con un certo significato matematico, come un metodo per rappresentare campi vettoriali senza un formalismo matematico. L'analogia utilizzata da Maxwell si può vedere quindi come la ricerca di una forma matematica ancora incompleta per le linee di forza. Turner afferma che oggi, con il linguaggio vettoriale, l'analogia proposta diventa ancora più efficace: nell'elettrostatica il rotore del campo elettrico è nullo, come è nullo il rotore del campo della velocità di un fluido ideale. L'analogia usata da Maxwell risulta particolarmente indicata per la didattica, in quanto, come afferma Turner, può essere vista come una via di mezzo tra la rappresentazione di Faraday, slegata da un formalismo matematico, e la rappresentazione fatta con il linguaggio adeguato dell'algebra vettoriale.

Capitolo 7

Considerazioni didattiche sul percorso

In questo capitolo il percorso proposto nel capitolo 6 viene contestualizzato all'interno di un quadro di riferimento costituito da tre diversi aspetti. Il primo è la tipologia di approccio didattico adottata, che, come vedremo, si inserisce in un quadro costruttivista. Il secondo è dato dagli studi nell'ambito della didattica della fisica sugli argomenti trattati nel percorso. Infine si inserisce il percorso all'interno del quadro istituzionale delle Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico, confrontando gli obiettivi e le modalità con cui si sviluppa il percorso con gli obiettivi riconosciuti a livello nazionale per le discipline della matematica e della fisica.

7.1 L'approccio costruttivista

Il percorso proposto si può inserire in un approccio di tipo costruttivista. I principi del costruttivismo sono stati trattati nel capitolo 2 in relazione all'utilizzo delle analogie nella didattica della fisica e sono stati ripresi nella presentazione degli studi riguardo alla storia della fisica come mezzo per la didattica nel capitolo 5. Il percorso proposto segue come filo conduttore lo sviluppo che storicamente ha portato da una concezione della forza come azione a distanza al concetto di campo e alla forza come azione tramite un mezzo. Sono stati identificati alcuni punti significativi nel percorso storico che possono rappresentare nodi cognitivi fondamentali nell'apprendimento dei concetti più importanti dell'elettrostatica.

L'unità 1 è il punto di partenza del percorso e riguarda l'argomento dell'elettrostatica più intuitiva per gli studenti, la forza tra due cariche elettriche. La forza di Coulomb viene introdotta in analogia con la forza di Newton, che dovrebbe essere già tra gli schemi concettuali degli studenti. L'uso dell'analogia facilita l'assimilazione e l'inclusione di un nuovo concetto tra le conoscenze già acquisite. L'unità 2 permette di aiutare la costruzione di nuovi concetti, quali

il campo elettrico e il potenziale. Mostrare la compatibilità della nuova trattazione con le conoscenze pregresse ha lo scopo di facilitare i collegamenti tra i concetti, mentre evidenziare le situazioni in cui è più conveniente utilizzare la nuova conoscenza ha lo scopo di persuadere lo studente della necessità di allargare i propri schemi cognitivi. Il completamento di questo processo si attua con l'unità 3, in cui l'introduzione della rappresentazione del campo elettrico tramite le linee di forza conduce a un rafforzamento dei concetti già acquisiti e ad un punto di vista nuovo che permette di completare più facilmente il passaggio da un profilo concettuale newtoniano a uno maxwelliano. Anche in questo caso, sottolineare le difficoltà concettuali che hanno portato a un passaggio così importante per la storia della fisica ha l'obiettivo di rendere necessario questo cambiamento concettuale anche per lo studente.

7.2 Considerazioni didattiche sul percorso

In seguito vediamo le considerazioni didattiche suddivise per unità. Ciascuna unità verrà analizzata dal punto di vista didattico sottolineando in particolare gli aspetti che riguardano l'utilizzo della storia e della filosofia nel contesto didattico e il rapporto tra matematica e fisica nell'insegnamento.

Prima di entrare nel dettaglio delle unità riporto alcune riflessioni didattiche relative al percorso nella sua interezza. Alla fine del percorso si osserva che gli stessi concetti sono stati presentati attraverso rappresentazioni differenti. Nel capitolo 1 è stato affrontato il tema del linguaggio della scienza nell'insegnamento. Un obiettivo nella didattica è quello di insegnare agli studenti ad utilizzare il linguaggio per costruire dei significati. Un concetto non può essere slegato dalla sua rappresentazione e nonostante ciò il concetto e la sua rappresentazione non coincidono. La costruzione del significato di un concetto fisico passa quindi dall'abilità nel saperlo descrivere attraverso diverse rappresentazioni e nel muoversi tra rappresentazioni differenti. Il percorso proposto tocca diverse rappresentazioni. Nell'unità 1 si introduce la legge di Coulomb in analogia con la legge di gravitazione universale con la notazione algebrica e con l'utilizzo della geometria classica. Nell'unità 2 si presenta il campo elettrico, nella sua rappresentazione algebrica e nella sua rappresentazione vettoriale. Infine nell'unità 3 si introduce la rappresentazione tramite le linee di campo. Per ogni nodo storico, che corrisponde a una situazione problematica, viene quindi presentata una nuova rappresentazione, in modo che sia vista come necessaria dallo studente.

Unità 1

Quella tra la legge di gravitazione universale e la legge di Coulomb è un'analogia proposta spesso nell'insegnamento. Come è stato detto nel capitolo 2, l'analogia è uno strumento importante nella didattica. L'obiettivo di questa unità è partire dall'analogia tra le forme matematiche delle due leggi per andare più a fondo nella comprensione di quali ipotesi stiano alla base dei fenomeni, di quali

considerazioni abbiano portato a queste leggi e di quale sia il meccanismo di funzionamento delle forze.

L'inserimento di questa analogia in un contesto storico ha l'obiettivo di chiarire come si evolve la fisica, aiutando a trasmetterne un'immagine più completa, sottolineando la continuità tra gli argomenti e le motivazioni concettuali e filosofiche che hanno portato dalla legge di gravitazione universale alla legge di Coulomb. Come è stato visto nel capitolo 5, questa intersezione tra la storia, la filosofia, la matematica e l'aspetto sperimentale fornisce agli studenti un maggiore comprensione di una teoria, una legge o una relazione matematica derivi da tanti input di diversa natura forniti da diversi interpreti.

Tra i diversi aspetti che emergono dal percorso c'è il rapporto tra la matematica e la fisica. Nel capitolo 1 sono stati evidenziati i problemi che nascono nell'ambito dell'insegnamento della fisica relativamente alla relazione tra matematica e fisica, con particolare attenzione al tema del linguaggio nella sezione 1.2. La matematica è una parte fondamentale della fisica, ma spesso è vista dagli studenti come uno strumento per arrivare a dei risultati, per fare dei calcoli. In questa unità, mettendo in evidenza il rapporto tra geometria e fisica nelle dimostrazioni di Newton e il fatto che lo sviluppo delle due discipline sia stato storicamente molto legato, permette di vedere il significato concettuale che porta la matematica alla fisica. Come già sottolineato, le dimostrazioni di Newton forniscono un importante esempio di come il linguaggio della geometria possa dare significato alla fisica. Dalle dimostrazione emerge anche la necessità di strumenti matematici nuovi per la descrizione di fenomeni fisici. I limiti in matematica vengono affrontati il quarto anno e una loro introduzione geometrica e dinamica all'interno del contesto della fisica può mostrare agli studenti le motivazioni che hanno portato alla loro necessità. Le dimostrazioni geometriche di Newton forniscono inoltre degli spunti sull'utilizzo nella didattica di programmi di geometria dinamica come Geogebra. Infatti gli elementi matematici utilizzati da Newton non sono statici: la traiettoria ellittica viene "disegnata" dal moto di un corpo e la necessità dell'introduzione dei limiti nasce dalla volontà di trattare matematicamente dei moti continui. Questi aspetti possono essere compresi in maniera più efficace grazie all'utilizzo di un software come Geogebra.

Unità 2

Nel capitolo 5 sono state riportate diverse ricerche didattiche che hanno evidenziato la difficoltà degli studenti nel passaggio da un profilo coulombiano (o newtoniano) a uno maxwelliano. Questo si riscontra soprattutto nella maggiore dimestichezza degli studenti con i problemi che richiedono l'utilizzo della forza elettrica rispetto a quelli che richiedono l'uso del campo elettrico. Si osserva che spesso è la manifestazione di un effetto (evidente nell'interazione tra due cariche elettriche) a rendere necessaria la ricerca di una causa. Questo suggerisce che gli studenti immaginino degli effetti, come il movimento di cariche, per accettare la causa, cioè la presenza del campo elettrico. In uno dei problemi proposti nel questionario citato nella sezione 5, Furio e Guisasola [13] hanno domandato agli studenti cosa accade se viene inserito in un cilindro di metallo carico negati-

vamente un pendolo carico positivamente. La maggior parte degli studenti ha affrontato il problema in termini di forza elettrica, senza però considerare la distribuzione delle cariche sulla superficie del cilindro, arrivando alla conclusione errata che il pendolo viene attratto verso la parete più vicina del conduttore. Oltre alla maggiore difficoltà concettuale dell'idea di campo rispetto alla forza, secondo Saarelainen et al., i problemi nel passaggio da un profilo concettuale ad un altro possono essere individuati nella poca dimestichezza degli studenti con il ragionamento vettoriale.

Il punto centrale di questa unità è l'uguaglianza, nell'elettrostatica, della legge di Coulomb e quella di Gauss. Nella storia della fisica è emersa la necessità di sviluppare strumenti matematici che permettessero di studiare configurazioni più complesse dell'interazione tra due o più cariche puntiformi. L'introduzione di concetti come il campo elettrico e il potenziale emergono storicamente come strumenti matematici convenienti per affrontare determinate situazioni. L'esplicitazione di queste situazioni problematiche, che riguardano per esempio la distribuzione di cariche elettriche in un conduttore può mostrare la necessità di ragionare in termini di campo elettrico e potenziale e la convenienza dell'utilizzo della legge di Gauss rispetto alla legge di Coulomb per la sua maggiore generalità e semplicità in molte situazioni che riguardano una distribuzione di elettricità. Nella dimostrazione della legge di Gauss e nel suo confronto con la spiegazione del fatto che una carica all'interno di un conduttore cavo non sia attratta da nessuna parte data con l'utilizzo della forza di Coulomb si vede la potenza e la semplicità di questa legge.

Un aspetto problematico che emerge in questa unità è il fatto di avere un numero limitato di strumenti matematici in mano agli studenti. Nell'unità 2 si è quindi cercato di semplificare la trattazione matematica utilizzando per esempio sommatorie su elementi di superficie approssimabili a superfici piane al posto degli integrali di superficie necessari per la dimostrazione della legge di Gauss.

Unità 3

In questa unità si arriva al passaggio dall'azione a distanza all'azione tramite un mezzo e per fare ciò assume un ruolo centrale la rappresentazione. Le linee di forza vengono introdotte in analogie con le linee di flusso dei fluidi. Dalle considerazioni fatte nel capitolo 2, le analogie emergono come strumenti particolarmente indicati nella didattica per agevolare il cambiamento concettuale nei paradigmi degli studenti. In particolare, possono aiutare nella visualizzazione di concetti astratti.

Nello specifico, l'analogia tra le linee di forza di un campo elettrico e le linee di flusso di un fluido incompressibile è significativa perché utilizzata da Maxwell per fornire una trattazione matematica alle idee di Faraday in modo da mostrare l'uguaglianza tra la sua concezione delle forze e quella newtoniana, ampiamente studiata e accettata dalla maggior parte dei fisici e matematici del tempo. L'inserimento del passaggio da un paradigma newtoniano a uno maxwelliano in un contesto storico, evidenziando le problematiche che hanno

portato a questo cambiamento, è un aiuto nella costruzione di nuova conoscenza per gli studenti.

Anche per questa unità si riscontra un problema che deriva dalla mancanza di un linguaggio matematico adeguato agli argomenti trattati. Tuttavia, come specificato nella descrizione dell'unità, Maxwell considerava la rappresentazione delle linee di forza di Faraday attraverso le equazioni già conosciute nell'ambito della dinamica dei fluidi come una rappresentazione matematica. L'equazione di continuità viene utilizzata come un modello matematico per i fenomeni dell'elettrostatica.

7.3 Riscontro degli obiettivi nelle indicazioni nazionali per i licei

In questa sezione vengono confrontati gli obiettivi del percorso didattico proposto con le Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico, in modo da fondare la necessità e la rilevanza del lavoro sviluppato e per collocarlo in un contesto istituzionale. In Appendice C sono riportate integralmente le Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico per le discipline di Matematica e Fisica. Le indicazioni nazionali per ciascuna disciplina si divide in due parti: la prima è costituita dalle linee generali e dalle competenze e la seconda dagli obiettivi specifici di apprendimento. Le linee generali comprendono gli obiettivi e le competenze attese alla fine del percorso scolastico. Gli obiettivi specifici di apprendimento sono divisi per nuclei disciplinari relativi ai primi due bienni e al quinto anno e sono costruiti in modo da poter raggiungere le competenze prefissate.

Fisica

Le linee generali che si trovano nelle indicazioni nazionali per i Licei Scientifici relativamente alla disciplina della fisica pongono come obiettivo del percorso liceale la comprensione dei concetti fondamentali della fisica

acquisendo consapevolezza del valore conoscitivo della disciplina e del nesso tra lo sviluppo della conoscenza fisica ed il contesto storico e filosofico in cui essa si è sviluppata (Linee generali e competenze, Fisica).

L'impronta storica data al percorso proposto ha l'obiettivo di collocare lo sviluppo dei concetti fisici in un contesto che permetta di chiarire le motivazioni che hanno portato allo sviluppo della fisica. Questo porta a una maggiore comprensione del concetto stesso, ma anche alla consapevolezza di come si è evoluta la fisica e di come la matematica, la storia e la filosofia abbiano contribuito a costruire una teoria o una legge per come la si conosce attualmente.

Le linee generali fanno riferimento anche allo sviluppo di competenze che riguardano l'utilizzo di modelli e analogie nella formulazione di ipotesi e nella formalizzazione e risoluzione di un problema di fisica attraverso l'applicazione

di strumenti matematici opportuni. Si sottolinea anche l'importanza dell'aspetto sperimentale nello sviluppo delle teorie sui fenomeni fisici. Ciascuno di questi aspetti riveste un ruolo importante anche all'interno del percorso storico sviluppato.

Gli obiettivi generali e le competenze da acquisire durante il percorso liceale sono raggiungibili attraverso gli obiettivi specifici di apprendimento, che entrano nel merito degli argomenti da affrontare nei diversi anni scolastici. I concetti dell'elettrostatica utilizzati nel percorso didattico rientrano tra gli obiettivi del secondo biennio:

Lo studio dei fenomeni elettrici e magnetici permetterà allo studente di esaminare criticamente il concetto di interazione a distanza, già incontrato con la legge di gravitazione universale, e di arrivare al suo superamento mediante l'introduzione di interazioni mediate dal campo elettrico, del quale si darà anche una descrizione in termini di energia e potenziale, e dal campo magnetico (Obiettivi specifici di apprendimento, secondo biennio, fisica).

Il percorso proposto ha lo scopo di facilitare la realizzazione di questo obiettivo specifico tramite l'utilizzo della storia della fisica, che può aiutare nel complesso passaggio concettuale dall'interazione a distanza all'azione tramite un mezzo. Oltre all'uso della storia della fisica, nel percorso si utilizzano analogie, rappresentazioni e strumenti matematici adeguati alle conoscenze degli studenti, in accordo con gli obiettivi specifici per il secondo biennio, che sottolineano l'importanza sempre maggiore di un adeguato sviluppo delle abilità di formalizzazione delle leggi della fisica attraverso la matematica e delle capacità di maneggiare il linguaggio della fisica:

Nel secondo biennio il percorso didattico darà maggior rilievo all'impianto teorico (le leggi della fisica) e alla sintesi formale (strumenti e modelli matematici), con l'obiettivo di formulare e risolvere problemi più impegnativi, tratti anche dall'esperienza quotidiana, sottolineando la natura quantitativa e predittiva delle leggi fisiche (Obiettivi specifici di apprendimento, secondo biennio, fisica).

Costruire il linguaggio della fisica classica (grandezze fisiche scalari e vettoriali e unità di misura), abituando lo studente a semplificare e modellizzare situazioni reali, a risolvere problemi e ad avere consapevolezza critica del proprio operato (Obiettivi specifici di apprendimento, secondo biennio, fisica).

Le indicazioni nazionali non danno indicazioni restrittive nelle modalità di insegnamento ma fornisce alcune linee guida.

I temi indicati dovranno essere sviluppati dall'insegnante secondo modalità e con un ordine coerenti con gli strumenti concettuali e con le conoscenze matematiche in possesso degli studenti, anche in modo

ricorsivo, al fine di rendere lo studente familiare con il metodo di indagine specifico della fisica (Obiettivi specifici di apprendimento, secondo biennio, fisica).

Questa indicazione, che fa riferimento a una modalità ricorsiva di insegnamento non si trova nelle indicazioni per i licei scientifici, ma per i licei classici, linguistici, musicali e delle scienze umane. Risulta comunque appropriato se confrontato con il percorso proposto, che affronta alcuni argomenti utilizzando una molteplicità di rappresentazioni che man mano arricchiscono la conoscenza di un determinato concetto. L'esplicitazione del percorso storico che ha portato a definire un concetto, con le problematiche con cui si è scontrato, permette allo studente di vedere la fisica in maniera più completa, come una disciplina in evoluzione, con teorie che si modificano nel tempo e si arricchiscono man mano che si trovano ad affrontare situazioni problematiche o nuove scoperte.

Matematica

Nel confronto del percorso didattico con le indicazioni nazionali che riguardano la matematica non mi soffermo sugli obiettivi specifici della disciplina come per la fisica, ma sulle linee generali. Qui, un punto importante che viene sottolineato è che, nell'ambito della matematica, l'obiettivo finale del percorso di studio non è non solo la conoscenza dei concetti e dei metodi propri della disciplina, ma anche quelli necessari per lo studio di altre discipline, in particolare la fisica.

Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico (Linee Generali e competenze, Matematica).

Nel percorso didattico proposto si sottolinea il fatto che lo sviluppo della fisica sia avvenuto spesso in corrispondenza di quello della matematica e viceversa. Gli strumenti matematici utilizzati da Newton nelle dimostrazioni riportate dai *Principia*, come il metodo dei primi ed ultimi rapporti che consente di fare procedure di passaggio al limite, sono nati proprio per permettere una modellizzazione del mondo fisico. Si evidenzia anche che gli strumenti matematici sviluppati nella teoria del potenziale, pur non potendo essere affrontati a questo livello scolastico, sono stati sviluppati in funzione di una migliore descrizione matematica di fenomeni fisici.

L'aspetto della modellizzazione e dell'utilizzo di analogie tra forme matematiche utilizzate in contesti differenti è ripreso in altri punti, tra cui il seguente, posto tra gli obiettivi del percorso liceale:

il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello

della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci) (Linee Generali e competenze, Matematica).

Nel percorso proposto viene messo in luce come la descrizione matematica di fenomeni differenti possa essere analoga. L'analogia nella forma matematica si può infatti vedere nella forza di gravitazione universale e nella forza di Coulomb ma anche nella possibilità di utilizzare le equazioni che caratterizzano il moto dei fluidi per descrivere le linee di forza del campo elettrico. Nel percorso viene anche evidenziato come uno stesso fenomeno può essere rappresentato con forme matematiche differenti.

Conclusioni

L'approfondimento storico e filosofico del percorso che ha portato al passaggio da un paradigma newtoniano o coulombiano di interazione a distanza a un paradigma maxwelliano di interazione a contatto in un mezzo, ha messo in mostra una molteplicità di tematiche ampiamente studiate nel contesto della didattica della fisica. Queste considerazioni mi hanno portato a costruire un percorso indirizzato agli studenti del quarto anno di Liceo Scientifico che presenta i principali temi dell'elettrostatica in modo da accompagnare lo studente da una concezione che pone al centro le forze elettriche, viste come interazioni a distanza, a una che metta al centro il mezzo, attraverso il concetto di campo. Alcune ricerche che riguardano l'utilizzo della storia della fisica come mezzo per la didattica hanno mostrato il parallelismo tra i profili concettuali che gli studenti hanno in diverse età e quelli che si sono susseguiti storicamente, come il profilo coulombiano e quello maxwelliano. Gli studi imputano le difficoltà degli studenti a passare da un profilo ad un altro anche a un tipo di insegnamento che non evidenzia i punti che storicamente hanno reso necessario questo passaggio. Attraverso un'analisi filosofica e storica, basata anche sui testi originali dei principali interpreti di questa svolta nella fisica, sono stati identificati alcuni punti ritenuti particolarmente rilevanti e significativi per favorire questo cambiamento concettuale.

L'analisi storica porta a vedere l'elettrostatica come un punto di incontro tra diverse concezioni della natura delle interazioni e di diversi metodi di rappresentazione matematica delle forze. È stato quindi proposto un percorso costituito da 3 unità che seguono i principali punti di svolta identificati nella storia. La necessità del passaggio da un'unità ad un'altra è sottolineata da una problematica che si riscontra nella descrizione precedente. L'introduzione del concetto di campo e del potenziale che avviene nell'unità 2 è resa necessaria per la semplificazione dei problemi che riguardano delle distribuzioni di cariche sui conduttori, mentre lo spostamento dell'attenzione dalle cariche al mezzo di propagazione avviene mostrando gli esperimenti di Faraday con i condensatori tra le cui armature c'è il vuoto o un dielettrico, che mostrano il fatto che il mezzo sia centrale nella trattazione delle interazioni. Se il passaggio da una unità a un'altra è caratterizzato da un superamento della trattazione precedente, all'interno delle singole unità si sottolinea la continuità con quella precedente, favorendo l'assimilazione di nuova conoscenza attraverso una molteplicità di rappresentazioni di uno stesso concetto e attraverso l'uso di analogie.

Il percorso descritto risulta coerente con le Indicazioni Nazionali per i Licei

Scientifici e con le ricerche sulla didattica della fisica che riguardano i diversi aspetti toccati. Dalla letteratura infatti si nota che l'utilizzo di metodi di rappresentazione matematica differenti per uno stesso concetto fisico permette una più profonda comprensione dello stesso e favorisce un'integrazione tra matematica e fisica auspicata nell'insegnamento delle discipline. Inoltre, dalla letteratura emerge il ruolo dell'analogia nello sviluppo della fisica e la sua centralità in una prospettiva costruttivistica della didattica, in quanto favorisce un cambiamento concettuale negli schemi preesistenti degli studenti. Sono state quindi individuate nell'analisi storica alcune analogie che hanno rivestito un'importanza nel passaggio da un paradigma a un altro per incentivare questo cambiamento anche nello studente.

Le criticità riscontrate nell'applicazione alla didattica del percorso storico approfondito riguardano principalmente il rapporto tra matematica e fisica nell'insegnamento. Gli strumenti matematici in possesso degli studenti non sono sufficienti per trattare in maniera totalmente adeguata alcuni concetti come quello di campo e di potenziale. La difficoltà di dover affrontare argomenti di fisica senza gli strumenti matematici adeguati è un problema ancora aperto nel contesto dell'insegnamento. Nell'analisi storica risulta evidente come la matematica sia profondamente legata alla fisica, fornisce strumenti per modellizzare i fenomeni e permette di costruire nuova conoscenza. Nel percorso didattico è stato necessario limitare gli strumenti matematici alle conoscenze in possesso degli studenti, cercando di mostrare le diverse rappresentazioni matematiche dei concetti in maniera semplificata.

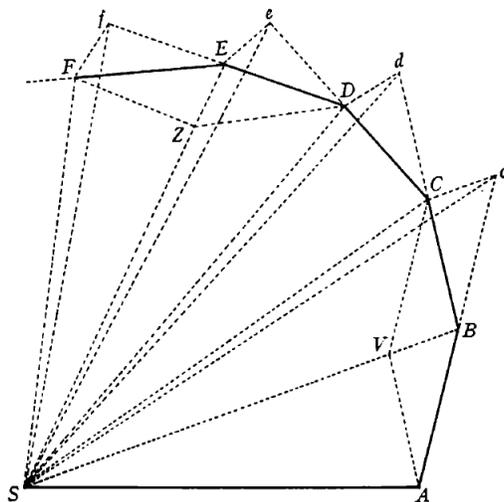


Figura A.2: Diagramma per la Proposizione II, Teorema II [33].

cosa, una volta completato il parallelogramma AFB \bar{D} , questo starà sempre in un rapporto di uguaglianza con AD.

Corollario II E se per B e A si conducono più rette BE, BD, AF, AG secanti la tangente AD e la sua parallela BF, l'ultima ragione di tutte le ascisse, AD, AE, BF, BG della corda e dell'arco AB sarà scambievolmente una ragione di uguaglianza.

Corollario III Perciò, tutte queste linee, in ogni caso riguardante le ultime ragioni, possono essere adoperate, scambievolmente, le une al posto delle altre.

A.2 Proposizione II. Teorema II.

Ogni corpo che si muove lungo una qualche linea curva descritta su un piano, e, con il raggio condotto verso un punto o immobile o che si muove di moto rettilineo uniforme, descrive intorno a quel punto aree proporzionali ai tempi, è spinto da una forza centripeta che tende al medesimo punto.

Caso I Infatti, ogni corpo che si muove lungo una linea curva, viene deviato dalla direzione rettilinea per effetto di una certa forza operante sullo stesso (per la legge I). E quella forza, per effetto della quale il corpo è deviato dal moto rettilineo ed è costretto a descrivere i triangoli minimi uguali SAB, SBC, SCD, ecc., intorno al punto immobile S in tempi uguali, agisce nel luogo B secondo

una linea parallela a cC (per la proposizione XL, libro I degli Elementi, e per la legge II), ossia, secondo la linea BS ; e nel luogo C secondo la linea parallela a dD , ossia, secondo la linea SC , ecc. Agisce, dunque, sempre secondo linee che tendono verso il punto immobile S .

Caso 2 Per il corollario quinto delle leggi, è identico che la superficie sulla quale il corpo descrive la figura curvilinea sia in riposo o si muova di moto rettilineo uniforme insieme al corpo, alla figura descritta e al suo punto S .

Corollario 1 In spazi o mezzi non resistenti, se le aree non sono proporzionali ai tempi, le forze non tendono al punto di incontro dei raggi, ma si allontanano, conseguentemente, verso la parte nella cui direzione il moto si effettua, se la descrizione delle aree viene accelerata, e verso la parte opposta, se è ritardata.

Corollario 2 Anche nei mezzi resistenti, se la descrizione delle aree viene accelerata, le direzioni delle forze si allontanano dal punto di incontro dei raggi verso la parte lungo la quale il moto avviene.

A.3 Lemma XII

Tutti i parallelogrammi descritti intorno a due diametri coniugati qualsiasi di una data ellisse o di un'iperbole sono uguali fra loro.

Consta dalle coniche.

A.4 Proposizione IV. Teorema IV.

Le forze centripete dei corpi, che descrivono cerchi diversi con moto uniforme, tendono ai centri dei medesimi cerchi, e stanno fra loro come i quadrati degli archi descritti in tempi uguali divisi per i raggi dei cerchi

Queste forze tendono ai centri dei cerchi per la prop. II e il coroll. 2 della prop. I, stanno tra loro come i seni versi degli archi minimi descritti in tempi uguali (per il coroll. 4 della prop. I); ossia (per il lemma VII) come i quadrati degli stessi archi divisi per i diametri dei cerchi. Per la qual cosa, poiché questi archi stanno come gli archi descritti in tempi qualsiasi uguali, e i diametri stanno come i raggi dei medesimi, le forze saranno proporzionali ai quadrati di archi qualsiasi descritti in tempi uguali divisi per i raggi dei cerchi. -C.V.D.

Corollario 6 Se i tempi periodici stanno come i raggi e, per conseguenza, le velocità sono uguali, le forze centripete saranno inversamente proporzionali alla radice quadrata dei raggi, le forze centripete saranno inversamente proporzionali ai quadrati dei raggi: e viceversa.

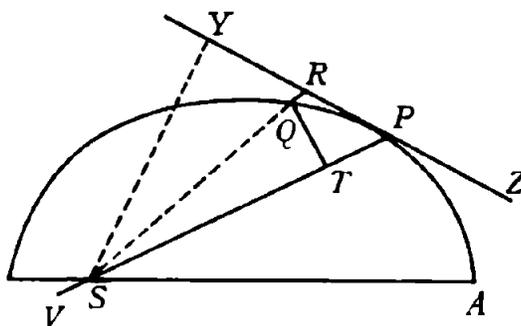


Figura A.3: Diagramma per la Proposizione VI, Teorema V [33].

A.5 Proposizione VI. Teorema V

Se in uno spazio non resistente, un corpo ruota secondo un'orbita qualunque attorno a un cerchio immobile, in modo che in un tempo estremamente piccolo descriva un qualsiasi arco nascente, e se si suppone di condurre la saetta dell'arco che bisechi la corda, e che, prolungata, passa per il centro delle forze, allora la forza centripeta, nel punto di mezzo dell'arco, sarà direttamente proporzionale alla saetta e inversamente proporzionale al quadrato del tempo.

Infatti la saetta è, in un dato tempo, proporzionale alla forza (corollario IV proposizione I), e aumentando il tempo secondo una ragione qualsiasi, a causa dell'arco aumentato secondo la medesima ragione, la saetta viene aumentata secondo il quadrato di quella ragione (per i corollario 2 e 3 del lemma XI) e perciò è proporzionale alla forza e al quadrato del tempo, la forza sarà direttamente proporzionale alla saetta e inversamente proporzionale al quadrato del tempo.

La medesima cosa viene dimostrata facilmente anche per mezzo del corollario 4 del lemma X.

Corollario 1 Se un corpo P ruotando intorno al centro S descrive la linea curva APQ, e se la retta ZPR tocca quella curva in un qualsiasi punto P, e da un altro punto qualsiasi Q si conduce verso la tangente alla curva la QR parallela alla distanza SP, e si abbassa la QT perpendicolare alla distanza SP, allora la forza centripeta sarà inversamente proporzionale al solido $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, se di quel solido viene sempre assunta la quantità che da ultimo presenta quando i punti P e Q si incontrano. Infatti QR è uguale al seno verso dell'arco doppio di QP, nel cui mezzo è P, e il doppio del triangolo QSP o $PS \times QT$ è proporzionale al tempo con il quale questo arco doppio è descritto; perciò può essere scritto in luogo del tempo.

Corollario 2 Per lo stesso ragionamento la forza centripeta è inversamente proporzionale al solido $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$; se in qualche modo SY è una perpendicolare abbassata dal centro delle forze verso la tangente PR dell'orbita. Infatti i rettangoli $SY \times QP$ e $SP \times QT$ sono uguali.

Corollario 3 Se l'orbita è un cerchio o tocca concentricamente un cerchio, o concentricamente lo seca, ossia contiene insieme al cerchio l'angolo evanescente di contatto o di sezione, avendo la medesima curvatura e il medesimo raggio di curvatura nel punto P, e se PV è la corda di questo cerchio condotta dal corpo attraverso il centro delle forze, allora la forza centripeta sarà inversamente proporzionale al solido $SY^2 \times PV$. Infatti PV è uguale a $\frac{QP^2}{QR}$.

Corollario 4 Poste le medesime cose, la forza centripeta è direttamente proporzionale alla perpendicolare SY.

Corollario 5 Di conseguenza, se si dà una qualunque figura curvilinea APQ e in essa viene dato anche il punto S, verso il quale la forza centripeta continuamente si dirige, si può trovare la legge della forza centripeta, per effetto della quale il qualunque corpo P viene ritratto continuamente dal moto rettilineo e trattenuto entro il perimetro di quella figura, che ruotando descriverà. Ossia: occorre calcolare o il solido $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ oppure il solido $SY^2 \times PV$, inversamente proporzionali a questa forza.

Appendice B

An Attempt to Explain Some of the Principal Phaenomena of Electricity, by means of an Elastic Fluid

B.1 Lemma IV

Let BDE , bde , and $\beta\delta\epsilon$ (fig. B.1) be concentric spherical surfaces, whole center is C : if the space Bb is filled with uniform matter, whole particles repel with a force inversely, as the square of the distance, a particle placed any where within the space Cb , as at P , will be repelled with as much force in one direction as another, or it will not be impelled in any direction. This is demonstrated in Newt. *Princip.* Lib. I. Prop. 70. It follows also from his demonstration, that if the repulsion is inversely, as some higher power of the distance than the square, the particle P will be impelled towards the center; and if the square, it will be impelled from the center.

B.2 Lemma V

If the repulsion is inversely as the square of the distance, a particle placed anywhere without the sphere BDE , is repelled by that sphere, and also by the space Bb , with the same force that it would if all the matter therein was collected in the center of the sphere; provided the density of the matter therein is everywhere the same at the same distance from the center. This is easily deduced from Prop. 71, of the same book, and has been demonstrated by other authors.

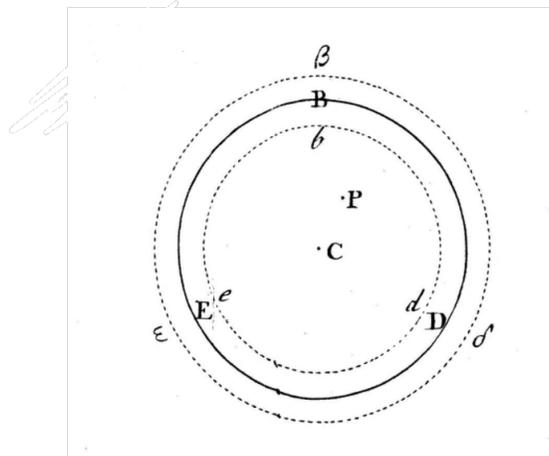


Figura B.1: Diagramma per il lemma IV. □.

B.3 Prop. V. Problem 1.

Let the sphere BDE be filled with uniform solid matter, overcharged with electric fluid: let the fluid therein be moveable, but unable to escape from it: let the fluid in the rest of infinite space be moveable, and sufficient to saturate the matter therein; and let the matter in the whole of infinite space, or at least in the space $B\beta$, whose dimensions will be given below, be uniform and solid; and let the law of the electric attraction and repulsion be inversely as the square of the distance: it is required to determine in what manner the fluid will be disposed both within and without the globe.

Take the space Bb such, that the interstices between the particles of matter therein shall be just sufficient to hold a quantity of electric fluid, whose particles are pressed close together, so as to touch each other, equal to the whole redundant fluid in the globe, besides the quantity requisite to saturate the matter in Bb ; and take the space such, that the matter therein shall be just able to saturate the redundant fluid in the globe: then, in all parts of the space Bb , the fluid will be pressed close together, so that its particles shall touch each other; the space $B\beta$ will be intirely deprived of fluid; and in the space Cb , and all the rest of infinite space, the matter will be exactly saturated.

For, if the fluid is disposed in the above-mentioned manner, a particle of fluid placed anywhere within the space Cb will not be impelled in any direction by the fluid in Bb , or the matter in $B\beta$, and will therefore have no tendency to move: a particle placed anywhere without the sphere $\beta\delta\epsilon$ will be attracted with just as much force by the matter in $B\beta$, as it is repelled by the redundant fluid in Bb , and will therefore have no tendency to move: a particle placed anywhere within the space Bb , will indeed be repelled towards the surface, by all the redundant fluid in that space which is placed nearer the center than itself; but as the fluid in that space is already pressed as close together as possible, it will

not have any tendency to move; and in the space $B\beta$ there is no fluid to move, so that no part of the fluid can have any tendency to move.

Moreover, it seems impossible for the fluid to be at rest, if it is disposed in any other form; for if the density of the fluid is not everywhere the same at the same distance from the center, but is greater near b than near d , a particle placed anywhere between those two points will move from b towards d ; but if the density is everywhere the same at the same distance from the center, and the fluid in Bb is not pressed close together, the space Cb will be overcharged, and consequently a particle at b will be repelled from the center, and cannot be at rest: in like manner, if there is any fluid in $B\beta$, it cannot be at rest: and, by the same kind of reasoning, it might be shewn, that, if the fluid is not spread uniformly within the space Cb , and without the sphere $\beta\delta\epsilon$, it cannot be at rest.

Appendice C

Le Indicazioni Nazionali per i licei scientifici

Matematica

Linee generali e competenze

Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.

Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

1. gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);
2. gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;

3. gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari;
4. la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;
5. il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
6. costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;
7. una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;
8. una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.

Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali e sociali, la filosofia e la storia.

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per quel che riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base.

Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti ideali per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.

L'ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi.

L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.

Obiettivi specifici di apprendimento

Primo biennio

Aritmetica e algebra

Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale. In questo contesto saranno studiate le proprietà delle operazioni. Lo studio dell'algoritmo euclideo per la determinazione del MCD permetterà di approfondire la conoscenza della struttura dei numeri interi e di un esempio importante di procedimento algoritmico. Lo studente acquisirà una conoscenza intuitiva dei numeri reali, con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta. La dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e di altri numeri sarà un'importante occasione di approfondimento concettuale. Lo studio dei numeri irrazionali e delle espressioni in cui essi compaiono fornirà un esempio significativo di applicazione del calcolo algebrico e un'occasione per affrontare il tema dell'approssimazione. L'acquisizione dei metodi di calcolo dei radicali non sarà accompagnata da eccessivi tecnicismi manipolatori.

Lo studente apprenderà gli elementi di base del calcolo letterale, le proprietà dei polinomi e le operazioni tra di essi. Saprà fattorizzare semplici polinomi, saprà eseguire semplici casi di divisione con resto fra due polinomi, e ne approfondirà l'analogia con la divisione fra numeri interi. Anche in questo l'acquisizione della capacità calcolistica non comporterà tecnicismi eccessivi.

Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.

Studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale. Approfondirà inoltre la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell'algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica.

Geometria

Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.

Al teorema di Pitagora sarà dedicata una particolare attenzione affinché ne siano compresi sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali.

Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti. Inoltre studierà le proprietà fondamentali della circonferenza.

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitandosi alla rappresentazione di punti, rette e fasci di rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. Lo studio delle funzioni quadratiche si accompagnerà alla rappresentazione geometrica delle coniche nel piano cartesiano. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.

Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.

Relazioni e funzioni

Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni. Lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e la rappresentazione delle rette e delle parabole nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.

Lo studente studierà le funzioni $f(x) = |x|$, $f(x) = \frac{a}{x}$, le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi. Apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa. Il contemporaneo studio della fisica offrirà esempi di funzioni che saranno oggetto di una specifica trattazione matematica, e i risultati di questa trattazione serviranno ad approfondire la comprensione dei fenomeni fisici e delle relative teorie.

Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

Dati e previsioni

Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.

Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici. Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.

Elementi di informatica

Lo studente diverrà familiare con gli strumenti informatici, al fine precipuo di rappresentare e manipolare oggetti matematici e studierà le modalità di rappresentazione dei dati elementari testuali e multimediali.

Un tema fondamentale di studio sarà il concetto di algoritmo e l'elaborazione di strategie di risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione; e, inoltre, il concetto di funzione calcolabile e di calcolabilità e alcuni semplici esempi relativi.

Secondo biennio

Aritmetica e algebra

Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero e , e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero e , permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. In questa occasione lo studente studierà la formalizzazione dei numeri

reali anche come introduzione alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico).

Sarà anche affrontato il tema del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo.

Saranno studiate la definizione e le proprietà di calcolo dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica.

Geometria

Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.

Studierà le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio, nonché la nozione di luogo geometrico, con alcuni esempi significativi.

Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

Relazioni e funzioni

Un tema di studio sarà il problema del numero delle soluzioni delle equazioni polinomiali. Lo studente acquisirà la conoscenza di semplici esempi di successioni numeriche, anche definite per ricorrenza, e saprà trattare situazioni in cui si presentano progressioni aritmetiche e geometriche.

Approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell'analisi e, in particolare, delle funzioni esponenziale e logaritmo. Sarà in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo.

Infine, lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. Un tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.

Dati e previsioni

Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione.

Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio.

In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.

Quinto anno

Nell'anno finale lo studente approfondirà la comprensione del metodo assiomatico e la sua utilità concettuale e metodologica anche dal punto di vista della modellizzazione matematica.

Gli esempi verranno tratti dal contesto dell'aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciata alla scelta dell'insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo.

Geometria

L'introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.

Relazioni e funzioni

Lo studente proseguirà lo studio delle funzioni fondamentali dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.

Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonché a determinare aree e volumi in casi semplici.

Altro importante tema di studio sarà il concetto di equazione differenziale, cosa si intenda con le sue soluzioni e le loro principali proprietà, nonché alcuni esempi importanti e significativi di equazioni differenziali, con particolare riguardo per l'equazione della dinamica di Newton. Si tratterà soprattutto di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. Inoltre, lo studente acquisirà familiarità con l'idea generale di ottimizzazione e con le sue applicazioni in numerosi ambiti.

Dati e previsioni

Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson).

In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi.

Fisica

Linee generali e competenze

Al termine del percorso liceale lo studente avrà appreso i concetti fondamentali della fisica, le leggi e le teorie che li esplicitano, acquisendo consapevolezza del valore conoscitivo della disciplina e del nesso tra lo sviluppo della conoscenza fisica ed il contesto storico e filosofico in cui essa si è sviluppata.

In particolare, lo studente avrà acquisito le seguenti competenze: osservare e identificare fenomeni; formulare ipotesi esplicative utilizzando modelli, analogie e leggi; formalizzare un problema di fisica e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la sua risoluzione; fare esperienza e rendere ragione del significato dei vari aspetti del metodo sperimentale, dove l'esperimento è inteso come interrogazione ragionata dei fenomeni naturali, scelta delle variabili significative, raccolta e analisi critica dei dati e dell'affidabilità di un processo di misura, costruzione e/o validazione di modelli; comprendere e valutare le scelte scientifiche e tecnologiche che interessano la società in cui vive.

La libertà, la competenza e la sensibilità dell'insegnante - che valuterà di volta in volta il percorso didattico più adeguato alla singola classe - svolgeranno un ruolo fondamentale nel trovare un raccordo con altri insegnamenti (in particolare con quelli di matematica, scienze, storia e filosofia) e nel promuovere collaborazioni tra la sua Istituzione scolastica e Università, enti di ricerca, musei della scienza e mondo del lavoro, soprattutto a vantaggio degli studenti degli ultimi due anni.

Obiettivi specifici di apprendimento

Primo biennio

Nel primo biennio si inizia a costruire il linguaggio della fisica classica (grandezze fisiche scalari e vettoriali e unità di misura), abituando lo studente a semplificare e modellizzare situazioni reali, a risolvere problemi e ad avere consapevolezza critica del proprio operato.

Al tempo stesso gli esperimenti di laboratorio consentiranno di definire con chiarezza il campo di indagine della disciplina e di permettere allo studente di esplorare fenomeni (sviluppare abilità relative alla misura) e di descriverli con un linguaggio adeguato (incertezze, cifre significative, grafici). L'attività sperimentale lo accompagnerà lungo tutto l'arco del primo biennio, portandolo a una conoscenza sempre più consapevole della disciplina anche mediante la scrittura di relazioni che rielaborino in maniera critica ogni esperimento eseguito.

Attraverso lo studio dell'ottica geometrica, lo studente sarà in grado di interpretare i fenomeni della riflessione e della rifrazione della luce e il funzionamento dei principali strumenti ottici. Lo studio dei fenomeni termici definirà, da un punto di vista macroscopico, le grandezze temperatura e quantità di calore scambiato introducendo il concetto di equilibrio termico e trattando i passaggi di stato.

Lo studio della meccanica riguarderà problemi relativi all'equilibrio dei corpi e dei fluidi; i moti saranno affrontati innanzitutto dal punto di vista cinematico giungendo alla dinamica con una prima esposizione delle leggi di Newton, con particolare attenzione alla seconda legge. Dall'analisi dei fenomeni meccanici, lo studente incomincerà a familiarizzare con i concetti di lavoro ed energia, per arrivare ad una prima trattazione della legge di conservazione dell'energia meccanica totale.

I temi suggeriti saranno sviluppati dall'insegnante secondo modalità e con un ordine coerenti con gli strumenti concettuali e con le conoscenze matematiche già in possesso degli studenti o contestualmente acquisite nel corso parallelo di Matematica (secondo quanto specificato nelle relative Indicazioni). Lo studente potrà così fare esperienza, in forma elementare ma rigorosa, del metodo di indagine specifico della fisica, nei suoi aspetti sperimentali, teorici e linguistici.

Secondo biennio

Nel secondo biennio il percorso didattico darà maggior rilievo all'impianto teorico (le leggi della fisica) e alla sintesi formale (strumenti e modelli matematici), con l'obiettivo di formulare e risolvere problemi più impegnativi, tratti anche dall'esperienza quotidiana, sottolineando la natura quantitativa e predittiva delle leggi fisiche. Inoltre, l'attività sperimentale consentirà allo studente di discutere e costruire concetti, progettare e condurre osservazioni e misure, confrontare esperimenti e teorie.

Saranno riprese le leggi del moto, affiancandole alla discussione dei sistemi di riferimento inerziali e non inerziali e del principio di relatività di Galilei.

L'approfondimento del principio di conservazione dell'energia meccanica, applicato anche al moto dei fluidi e l'affronto degli altri principi di conservazione, permetteranno allo studente di rileggere i fenomeni meccanici mediante grandezze diverse e di estenderne lo studio ai sistemi di corpi. Con lo studio della gravitazione, dalle leggi di Keplero alla sintesi newtoniana, lo studente approfondirà, anche in rapporto con la storia e la filosofia, il dibattito del XVI e XVII secolo sui sistemi cosmologici.

Si completerà lo studio dei fenomeni termici con le leggi dei gas, familiarizzando con la semplificazione concettuale del gas perfetto e con la relativa teoria cinetica; lo studente potrà così vedere come il paradigma newtoniano sia in grado di connettere l'ambito microscopico a quello macroscopico. Lo studio dei principi della termodinamica permetterà allo studente di generalizzare la legge di conservazione dell'energia e di comprendere i limiti intrinseci alle trasformazioni tra forme di energia, anche nelle loro implicazioni tecnologiche, in termini quantitativi e matematicamente formalizzati.

Si inizierà lo studio dei fenomeni ondulatori con le onde meccaniche, introducendone le grandezze caratteristiche e la formalizzazione matematica; si esamineranno i fenomeni relativi alla loro propagazione con particolare attenzione alla sovrapposizione, interferenza e diffrazione. In questo contesto lo studente familiarizzerà con il suono (come esempio di onda meccanica particolarmente significativa) e completerà lo studio della luce con quei fenomeni che ne evidenziano la natura ondulatoria.

Lo studio dei fenomeni elettrici e magnetici permetterà allo studente di esaminare criticamente il concetto di interazione a distanza, già incontrato con la legge di gravitazione universale, e di arrivare al suo superamento mediante l'introduzione di interazioni mediate dal campo elettrico, del quale si darà anche una descrizione in termini di energia e potenziale, e dal campo magnetico.

Quinto anno

Lo studente completerà lo studio dell'elettromagnetismo con l'induzione magnetica e le sue applicazioni, per giungere, privilegiando gli aspetti concettuali, alla sintesi costituita dalle equazioni di Maxwell. Lo studente affronterà anche lo studio delle onde elettromagnetiche, della loro produzione e propagazione, dei loro effetti e delle loro applicazioni nelle varie bande di frequenza.

Il percorso didattico comprenderà le conoscenze sviluppate nel XX secolo relative al microcosmo e al macrocosmo, accostando le problematiche che storicamente hanno portato ai nuovi concetti di spazio e tempo, massa ed energia. L'insegnante dovrà prestare attenzione a utilizzare un formalismo matematico accessibile agli studenti, ponendo sempre in evidenza i concetti fondanti.

Lo studio della teoria della relatività ristretta di Einstein porterà lo studente a confrontarsi con la simultaneità degli eventi, la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze; l'aver affrontato l'equivalenza massa-energia gli permetterà di sviluppare un'interpretazione energetica dei fenomeni nucleari (radioattività, fissione, fusione). L'affermarsi del modello del quanto di luce potrà essere introdotto attraverso lo studio della radiazione termica e dell'ipotesi di Planck (affrontati anche solo in modo qualitativo), e sarà sviluppato da un lato con lo studio dell'effetto fotoelettrico e della sua interpretazione da parte di Einstein, e dall'altro lato con la discussione delle teorie e dei risultati sperimentali che evidenziano la presenza di livelli energetici discreti nell'atomo. L'evidenza sperimentale della natura ondulatoria della materia, postulata da De Broglie, ed il principio di indeterminazione potrebbero concludere il percorso in modo significativo.

La dimensione sperimentale potrà essere ulteriormente approfondita con attività da svolgersi non solo nel laboratorio didattico della scuola, ma anche presso laboratori di Università ed enti di ricerca, aderendo anche a progetti di orientamento.

In quest'ambito, lo studente potrà approfondire tematiche di suo interesse, accostandosi alle scoperte più recenti della fisica (per esempio nel campo dell'astrofisica e della cosmologia, o nel campo della fisica delle particelle) o approfondendo i rapporti tra scienza e tecnologia (per esempio la tematica dell'e-

nergia nucleare, per acquisire i termini scientifici utili ad accostare criticamente il dibattito attuale, o dei semiconduttori, per comprendere le tecnologie più attuali anche in relazione a ricadute sul problema delle risorse energetiche, o delle micro- e nanotecnologie per lo sviluppo di nuovi materiali).

Bibliografia

- [1] Achinstein, P. (1968), *Concepts of Science: A Philosophical Analysis*, Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.
- [2] Bellone, E. (1973), *I modelli e la concezione del mondo nella fisica moderna da Laplace a Bohr*, Feltrinelli.
- [3] Besson, U. (2017), *Didattica della fisica*, Carocci editore.
- [4] Blum, W., Galbraith, P. L. & Niss, M. (2007), Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.) *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study*, New York: Springer, p. 3-32.
- [5] Budinich, P., & Trobok, M. (Eds.) (2005), *The role of mathematics in physical sciences*. Dordrecht: Springer.
- [6] Cavendish, H., (1771), *An Attempt to Explain Some of the Principal Phaenomena of Electricity, by means of an Elastic Fluid: By the Honourable Henry Cavendish*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London.
- [7] Cruz-Hastenreiter, R. (2015), *Analogies in high school classes on quantum physics*, Procedia: Social and Behavioral Sciences, 167, 38-43.
- [8] de Berg, K. C. (1992), *Mathematics in Science: The Role of the History of Science in Communicating the Significance of Mathematical Formalism in Science*, Science & Education 1, 77-87.
- [9] Dray, T. & Manogue, C. (2002), Vector calculus bridge project website, <https://bridge.math.oregonstate.edu/ideas/functions/>
- [10] Duit, R. (1991), *On the role of analogies and metaphors in learning science*, Science Education, 75(6), 649-672.
- [11] Falconer, I. (2017), *No actual measurement... was required: Maxwell and Cavendish's null method for the inverse square law of electrostatics*, Studies in History and Philosophy of Science.
- [12] Ferri, R.B. (2006), *Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38, 86-95.

- [13] Furio, C., & Guisasola, J. (1998), *Difficulties in learning the concept of electric field* Science Education, 82(4), 511–526.
- [14] Galilei, G. (1970), *Dialogo sopra i due massimi sistemi*, a cura di L. Sosio, Einaudi.
- [15] Gentner, D. (1983), *Structure-mapping: a theoretical framework for analogy*, Cognitive Science, Vol. 7, No. 2, 1983.
- [16] Greca, I. M., & Moreira, M. A. (2001), *Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics*, Science Education, 86(1), 106-121.
- [17] Guicciardini, N. (2011), *Newton*, Carocci Editore.
- [18] Halloun, I., & Hestenes, D. (1985), *The Initial Knowledge State of College Physics Students*, American Journal of Physics 53 (11), 1043-1055.
- [19] Halloun, I. (2007), *Mediated Modeling in Science Education*, Science & Education, 16 (7), 653-697.
- [20] Heering, P. (1992), *On Coulomb's inverse square law*, Am. J. Phys. 60, 988.
- [21] Hesse, M. (1966), *Models and analogies in science*, University of Notre Dame Press.
- [22] Hestenes, D. (1987), *Toward a modeling theory of physics instruction*, Am. J. Phys. 55 (5), May 1987, pp 440-454.
- [23] Israel, G. (1986), *Modelli matematici*, Editori riuniti.
- [24] Israel, G. (1987), *Le immagini della matematica come strumento per l'interpretazione della realtà*, L'Educazione Matematica, Anno VIII, Serie II, Vol. 2, Suppl. n. 1, 1987 (Atti del VII Convegno Didattico Nazionale Residenziale su "Modelli, metodi e strumenti matematici per interpretare la realtà", Calagonone, 2-5 Aprile 1987), pp. 57-82.
- [25] Koyrè, A. (1983), *Studi newtoniani*, Einaudi.
- [26] Mamone Capria, M. (2001), *Matematica e fisica fra linguaggio e realtà*, in G. Stelli (a cura di), *Percorsi della filosofia del Novecento*, IRSAE dell'Umbria, Perugia, 2001, pp. 163-207.
- [27] Maxwell, J. C. (1890), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, edited by W. D. Niven, Cambridge university press.
- [28] Maxwell, J. C. (1892), *A treatise on electricity and magnetism*, Oxford; traduzione italiana (1973) *Trattato di elettricità e magnetismo*, a cura di Evandro Agazzi, UTET.

- [29] Meltzer, D. E. (2002), *The relationship between mathematics preparation and conceptual learning gains in physics: A possible “hidden variable” in diagnostic pretest scores*, Am. J. Phys. 70, 1259.
- [30] Michelsen, C. (2006), *Functions: a modelling tool in mathematics and science*, ZDM Vol. 38 (3).
- [31] Nardi, R. & Carvalho, A.M.P. (1990), *A genese, a psicogenese e a aprendizagem do conceito de campo: subsidios para a construção do ensino desse conceito. Caderno Catarinense do Ensino de Física*, 7, pp. 46–69.
- [32] Newmann von J. (1955), *Method in the Physical Science*, in *The Unity of Knowledge*, ed. L. G. Leary, Doubleday & Co., New York
- [33] Newton, I. (1977), *Principi matematici della Filosofia naturale*, a cura di Alberto Pala.
- [34] Ornek, F. (2008), *Models in science Education: Application of Models in Learning and Teaching Science*, International Journal of Environmental & Science Education, 3 (2), 35 – 45.
- [35] Osborne, J. (2002), *Science Without Literacy: a ship without a sail?*, Cambridge Journal of Education, Vol. 32, No. 2.
- [36] Pietrocola, M. (2008), *Mathematics as structural language of physical thought*, in *Connecting Research in Physics Education with Teacher Education*, Vol. 2, edited by Vicentini M. and Sassi E. (ICPE).
- [37] Redish, E. F. (2005), *Problem solving and the use of math in physics courses*, Paper presented at the conference, World View on Physics Education in 2005: Focusing on Change, Delhi, India.
- [38] Redish, E. F. & Kuo, E. (2015), *Language of Physics, Language of Math: Disciplinary Culture and Dynamic Epistemology*, Sci & Educ 24:561–590.
- [39] Saarelainen, M., Laaksonen, A. & Hirvonen, P.E. (2007), *Students’ initial knowledge of electric and magnetic fields - more profound explanations and reasoning models for undesired conceptions*, European Journal of Physics 28, 51–60.
- [40] Teixeira, E. S.; Greca, I. M.; Freire, O. (2012), *The History and Philosophy of Science in Physics Teaching: A Research Synthesis of Didactic Interventions*, Sci & Educ, 21:771–796.
- [41] Turner, J., (1955), *Maxwell on the method of physical analogy*, The British Journal for the Philosophy of Science, Vol. 6, No. 23, pp. 226–238.