

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Introduzione al Gruppo delle Trecce

Tesi di Laurea in Topologia

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Stefano Francaviglia

Presentata da:
Federico Carlo Di Nello

Sessione Straordinaria
Anno Accademico 2020-2021

*A mia madre,
Loredana.*

Introduzione

L'obiettivo del presente documento è dare al lettore un'infarinatura generale sul gruppo delle trecce, definito per la prima volta da Artin nel 1925, per essere utilizzato in campo tessile.

La trattazione si occuperà di mostrare la relazione che intercorre tra il gruppo delle trecce astratto e quello delle trecce geometriche, per poi proseguire con il discutere altre interpretazioni del gruppo stesso, in particolare quella come mapping class group del disco puntato e come un sottogruppo degli automorfismi del gruppo libero.

Nell'appendice si può trovare un calcolo esplicito del gruppo fondamentale del disco puntato utilizzando il Teorema di Van Kampen.

Il documento segue principalmente trattazione e costruzioni di [KT08], con accenni provenienti da [PS97], [Deh21] e [Lie11].

Considerazioni Preliminari

Una volta definite le trecce geometriche, supporremo sempre di essere nella categoria liscia; tale scelta, fatta per semplicità, è giustificata dal fatto che sia il muoversi in tale categoria sia che nella PL dà luogo alla stessa teoria delle trecce.

Un altro particolare di cui non ci occupiamo è il distinguere tra isotopia ambientale, isotopia (standard) e isotopia debole per le trecce geometriche, in quanto è stato provato che le relazioni d'equivalenza provenienti dalle tre

definizioni coincidono (si veda [KT08]). Per semplicità pertanto introdurremo solo e parleremo sempre di isotopia.

Notazioni

In tutta la trattazione si considera $I = [0, 1]$.

Indice

Introduzione	i
1 Gruppo delle Trece	1
1.1 Prime Definizioni	1
1.1.1 Definizione di Artin	1
1.1.2 Trece Geometriche	3
1.2 Gruppo Simmetrico e Inclusione Naturale	12
1.3 Trece Pure e Forgetting Homomorfism	14
2 Trece e Omeomorfismi	19
2.1 Mapping Class Group	19
2.2 L'isomorfismo $B_n \simeq \mathfrak{M}(D^2, Q_n)$	22
2.3 Gruppo degli Automorfismi Treccia	23
2.4 L'isomorfismo $\mathfrak{M}(D^2, Q_n) \simeq \text{Aut}_B(F_n)$	24
A Il Gruppo $\pi_1(D^2 - Q_n)$	29
A.1 Gruppo Fondamentale	29
A.2 $\pi_1(S^1)$ e Teorema di Van Kampen	31
Bibliografia	35

Elenco delle figure

1.1	Esempio di treccia geometrica di B_4	4
1.2	Diagramma treccia associato alla treccia in Figura 1.1.	7
1.3	Mosse di Reidemeister Ω_2 e Ω_3	9
1.4	Diagrammi delle trecce elementari.	10
1.5	Esempio dell'applicazione di $\iota : B_3 \rightarrow B_4$	14
1.6	Diagramma associato a $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4^2\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ in B_4	15
2.1	25
2.2	26
A.1	Spazio omeomorfo al disco puntato con n punti.	33

Capitolo 1

Gruppo delle Trecce

1.1 Prime Definizioni

Introduciamo ora il gruppo delle trecce e ne mostriamo qualche proprietà.

1.1.1 Definizione di Artin

Cominciamo con un'interpretazione totalmente algebrica, coincidente con la prima forma con cui Emil Artin definì il gruppo delle trecce.

Definizione 1.1.1 (Gruppo delle Trecce di Artin). Il *gruppo delle trecce di Artin* B_n è il gruppo generato da $n-1$ generatori $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e dalle seguenti relazioni, dette *relazioni treccia*:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \forall i, j = 1, \dots, n-1 \quad \text{con } |i-j| \geq 2 \quad (1.1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \forall i, j = 1, \dots, n-2 \quad (1.2)$$

Chiaramente B_1 è il gruppo banale, mentre B_2 è generato da un unico generatore σ_1 e da un insieme vuoto di relazioni. È abbastanza intuitivo che B_2 può essere rappresentato tramite \mathbb{Z} ; formalmente è un'applicazione del seguente lemma:

Lemma 1.1.2. *Se s_1, \dots, s_{n-1} sono elementi di un gruppo G soddisfacenti le relazioni treccia, allora esiste un unico omomorfismo di gruppi $f : B_n \rightarrow G$ tale che $s_i = f(\sigma_i)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n-1$.*

Dimostrazione. Sia F_n il gruppo libero generato da $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$; esiste allora un unico omomorfismo di gruppi $\bar{f} : F_n \rightarrow G$ tale che $\bar{f}(\sigma_i) = s_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n-1$. Tale omomorfismo induce un omomorfismo di gruppi $f : B_n \rightarrow G$ in quanto per ipotesi

- $\bar{f}(\sigma_i \sigma_j) = \bar{f}(\sigma_i) \bar{f}(\sigma_j) = s_i s_j = s_j s_i = \bar{f}(\sigma_j) \bar{f}(\sigma_i) = \bar{f}(\sigma_j \sigma_i)$
- $\bar{f}(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) = \dots = s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} = \dots = \bar{f}(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1})$

■

L'affermazione inversa è chiaramente ancora vera: se esiste un omomorfismo di gruppi $f : B_n \rightarrow G$, allora gli elementi s_1, \dots, s_{n-1} tali che $s_i = f(\sigma_i)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n-1$ soddisfano le relazioni treccia.

Osservazione 1.1.2.1. Per $n = 2$ e $G = \mathbb{Z}$, si ha che non ci sono relazioni treccia da soddisfare, quindi vale $B_2 = F_2$; esplicitamente possiamo definire

$$\begin{aligned} \psi : B_2 &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sigma &\mapsto \deg \sigma \end{aligned}$$

che esiste (ed è unico a meno di isomorfismi) per il lemma precedente ed è ben definito in quanto $B_2 \ni \sigma = \sigma_1^k$ per un qualche $k \in \mathbb{Z}$. Abbiamo inoltre che f è iniettivo, in quanto $f(\sigma) = 0$ implica che $\sigma = \sigma_1^0 = \text{Id}_{B_2}$ e suriettivo, in quanto $\psi^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow B_2$ tale che $f^{-1}(k) = \sigma_1^k$ è un omomorfismo iniettivo.

Curiosità: il gruppo delle treccie di Artin può essere in realtà generato da un insieme più piccolo di quello proposto nella Definizione 1.1.1; infatti abbiamo la seguente

Proposizione 1.1.3. *Il gruppo B_n è generato da due o meno elementi per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione per induzione. Il caso $n = 1, 2$ è banale. Sia $n \geq 3$ e consideriamo l'elemento $\alpha_n = \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$; se mostriamo che ogni σ_i per $i = 2, \dots, n-1$ si può esprimere come prodotto di σ_1 e α_n , abbiamo la tesi.

Proviamo prima che, sia $i = 1, \dots, n-1$ e $k = 1, \dots, i$, allora

$$\alpha_n^{i-1} \sigma_1 \alpha_n^{1-i} = \alpha_n^{i-k} \sigma_k \alpha_n^{k-i}$$

Per induzione: sia $k = 2$ (il caso $k = 1$ è banale), usando le relazioni treccia abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha_n^{i-1} \sigma_1 \alpha_n^{1-i} &= \alpha_n^{i-2} \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \sigma_1 \alpha_n^{1-i} = \\ &= \alpha_n^{i-2} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \alpha_n^{1-i} = \\ &= \alpha_n^{i-2} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} \alpha_n^{1-i} = \\ &= \alpha_n^{i-2} \sigma_2 \alpha_n^{2-i} \end{aligned}$$

Sia ora la tesi valida per $k-1$, abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha_n^{i-1} \sigma_1 \alpha_n^{1-i} &= \alpha_n^{i-(k-1)} \sigma_{k-1} \alpha_n^{(k-1)-i} = \\ &= \alpha_n^{i-k} \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \sigma_{k-1} \alpha_n^{(k-1)-i} = \\ &= \alpha_n^{i-k} \sigma_1 \dots \sigma_{k-1} \sigma_k \sigma_{k-1} \sigma_{n-1} \alpha_n^{(k-1)-i} = \\ &= \alpha_n^{i-k} \sigma_1 \dots \sigma_k \sigma_{k-1} \sigma_k \sigma_{n-1} \alpha_n^{(k-1)-i} = \\ &= \alpha_n^{i-k} \sigma_k \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \alpha_n^{(k-1)-i} = \\ &= \alpha_n^{i-k} \sigma_k \alpha_n^{k-i} \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $i = 2, \dots, n-1$, vale

$$\sigma_i = \alpha_n^{i-1} \sigma_1 \alpha_n^{1-i}$$

e concludiamo. ■

1.1.2 Treccie Geometriche

La rappresentazione naturale del gruppo delle treccie, oltre ad essere probabilmente anche quella che gli dà il nome, è tramite il gruppo delle classi di isotopia delle treccie geometriche. Vediamo ora la costruzione di tale gruppo, partendo dal concetto di treccia geometrica.

Definizione 1.1.4 (Treccie Geometriche). In $\mathbb{R}^2 \times I$ consideriamo i punti $a_i = (i, 0, 0)$ e $b_i = (i, 0, 1)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Chiamiamo $I \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ un *filo* o una *stringa* se interseca rispettivamente $\{a_1, \dots, a_n\}$ e $\{b_1, \dots, b_n\}$ in uno ed un solo punto per insieme e la proiezione $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$ è un omeomorfismo. Infine, una *treccia geometrica su n stringhe* è un'unione disgiunta di n fili tale che

$$\begin{aligned} b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) &= \{a_1, \dots, a_n\} \\ b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) &= \{b_1, \dots, b_n\} \end{aligned}$$

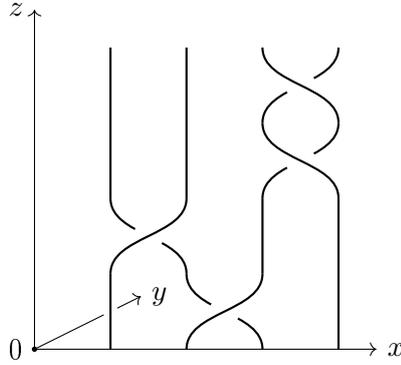


Figura 1.1: Esempio di treccia geometrica di B_4 .

Osservazione 1.1.4.1. Sia b una treccia geometrica, indichiamo con $\mathfrak{s}_{b,i}$ la stringa (vista come arco) di b che parte da a_i (ovvero tale che $\mathfrak{s}_{b,i}(0) = a_i$); ogni stringa $\mathfrak{s}_{b,i}$ connette dunque il punto a_i ad un certo punto $\mathfrak{s}_{b,i}(1) \in \{b_1, \dots, b_n\}$. Sia

$$\pi_x : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

la proiezione sull'asse x , allora la sequenza $(\pi_x(\mathfrak{s}_{b,1}(1)), \dots, \pi_x(\mathfrak{s}_{b,n}(1)))$ è una permutazione dell'insieme $\{1, \dots, n\}$ detta *permutazione sottostante* alla treccia b .

Ora vogliamo stare attenti a non distinguere due treccie geometriche che si ottengano l'una dall'altra tramite deformazioni continue (rimanendo tuttavia nella classe delle treccie geometriche).

Introduciamo dunque il concetto di isotopia, ricordando prima cos'è un'omotopia.

Definizione 1.1.5 (Omotopia). Siano X, Y due spazi topologici e $f, g : X \rightarrow Y$ due funzioni continue, allora $F : X \times I \rightarrow Y$ continua tale che

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad F(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

si dice un'*omotopia* tra f e g . Se esiste una tale F , si dice che f e g sono *omotope*.

Talvolta l'omotopia $(x, t) \mapsto F(x, t)$ viene indicata con $(x, t) \mapsto F_t(x)$; verranno utilizzate indiscriminatamente entrambe le notazioni.

Definizione 1.1.6 (Isotopia). Siano $A, B \subseteq X$ sottospazi topologici di X spazio topologico, allora un'omotopia $F_t : A \times I \rightarrow X$ tale che

- F_0 è l'inclusione $A \hookrightarrow X$
- $F_1(A) = B$
- $F_t : A \rightarrow F_t(A)$ è un omeomorfismo per ogni $t \in I$

si dice un'*isotopia* tra A e B . Se esiste una tale F , si dice che A e B sono *isotopi*.

Definizione 1.1.7. Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia (risp. un'isotopia) e $A \subseteq X$, si dice che F è *relativa ad A* se

$$F_0(a) = F_t(a) = F_1(a) \quad \forall t \in (0, 1)$$

per ogni $a \in A$. In tal caso, si dice che F_0 e F_1 sono omotope (risp. isotope) *relativamente ad A*.

È chiaro che la relazione di isotopia è una relazione di equivalenza sull'insieme delle trecce geometriche; le corrispondenti classi vengono dette *trecce su n stringhe*.

Definiamo infine il prodotto tra due trecce (geometriche) su n stringhe.

Definizione 1.1.8. Siano $b_1, b_2 \subset \mathbb{R}^2 \times I$ due trecce geometriche su n stringhe, poniamo

$$b_1 b_2 = \{(x, y, 2t) \in b_1; t \in [0, 1/2)\} \cup \{(x, y, 2t - 1) \in b_2; t \in [1/2, 1]\}$$

Osservazione 1.1.8.1. Il prodotto appena definito è compatibile con la relazione d'isotopia, dunque induce un'operazione di prodotto sull'insieme delle classi d'equivalenza. Tale operazione è associativa e ammette un elemento neutro, ovvero la treccia banale

$$\text{Id}_{B_n} = \{1, \dots, n\} \times \{0\} \times I \subset \mathbb{R}^2 \times I$$

Si può verificare formalmente, cosa che faremo più avanti, che ogni treccia su n stringhe ammette un inverso moltiplicativo sia destro che sinistro; intuitivamente, sia b una treccia (geometrica) su n stringhe, b^{-1} si può ottenere applicando a b una riflessione di piano $\mathbb{R}^2 \times \{1/2\}$.

Abbiamo dunque che l'insieme delle trecce su n stringhe con l'operazione di prodotto appena definita è un gruppo, che chiameremo *gruppo delle trecce* GB_n .

Diagrammi treccia

Prendiamo ora una treccia geometrica b su n stringhe e consideriamo la sua proiezione su $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$ unitamente all'informazione, per ogni punto di intersezione, riguardante quale delle due stringhe "passa sotto" all'altra; ci restringiamo inoltre, per semplicità, all'insieme delle proiezioni che presentano unicamente punti di intersezioni doppi. L'oggetto che otteniamo viene detto *diagramma treccia* su n stringhe; lo definiamo ora in modo più formale.

Definizione 1.1.9. Un *diagramma treccia* su n stringhe è un insieme $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R} \times I$ composto da n intervalli topologici $I \hookrightarrow \mathbb{R} \times I$ chiamati *fili* o *stringhe* di \mathfrak{D} tale che

1. la restrizione della proiezione $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$ ad ogni stringa è un omeomorfismo;

2. ogni punto di $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ è estremo di una e una sola stringa;
3. ogni punto di $\mathbb{R} \times I$ appartiene al più a due stringhe; in ogni intersezione le due stringhe si incontrano trasversalmente e sono distinte tra quella che *passa sotto* e quella che *passa sopra*.

Un punto di intersezione è spesso chiamato un *punto doppio* del diagramma.

Dalle tre condizioni della definizione otteniamo subito che

- in un intorno di un punto doppio il diagramma è omeomorfo a

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$$

- il numero di punti doppi è finito.

Graficamente, la stringa che passa sotto è rappresentata da una linea tagliata nel punto doppio, mentre quella che passa sopra da una continua.

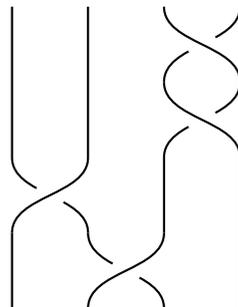


Figura 1.2: Diagramma treccia associato alla treccia in Figura 1.1.

È chiaro che ad ogni treccia geometrica b si può associare il suo diagramma treccia $\mathfrak{D}(b)$ tramite la procedura descritta precedentemente, avendo l'accortezza di aumentare o diminuire opportunamente la terza coordinata di una o più stringhe nel caso di punti di intersezione più che doppi (motivo per cui possiamo restringerci al caso di punti d'intersezione unicamente doppi).

È valido anche l'opposto, ovvero ad ogni diagramma \mathfrak{D} si può associare una treccia geometrica $b(\mathfrak{D})$, procedendo nel seguente modo.

Identifichiamo $\mathbb{R} \times I \supset \mathfrak{D}$ con $\mathbb{R} \times \{0\} \times I \subset \mathbb{R}^2 \times I$. In un intorno di ogni punto doppio di \mathfrak{D} spostiamo la stringa che passa sotto in $\mathbb{R} \times (+\infty, 0) \times I$; più formalmente, aumentiamo il valore della seconda coordinata in modo continuo e decrescente rispetto alla distanza dal punto doppio, mantenendo fisse le altre coordinate. Ricordiamo che l'essere tagliata è solo un espediente grafico; anche nel diagramma stesso *ogni* stringa rimane continua.

Otteniamo così una treccia geometrica $b(\mathfrak{D})$ associata al diagramma \mathfrak{D} .

Osservazione 1.1.9.1. Anche per i diagrammi treccia viene definita nel modo usuale la relazione di isotopia, con la condizione aggiunta che quest'ultima preservi l'informazione di quale stringa passa sotto e quale sopra in ogni punto doppio. Siano $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ due diagrammi treccia su n stringhe, si definisce il diagramma prodotto $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2$ come il diagramma ottenuto posizionando \mathfrak{D}_1 sopra \mathfrak{D}_2 e applicando l'omeomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times [2, 0] &\rightarrow \mathbb{R} \times I \\ (x, t) &\mapsto (x, t/2) \end{aligned}$$

Si potrebbe notare che, sia b una treccia geometrica, può accadere che $b \neq b(\mathfrak{D}(b))$ in senso stretto. Non ce ne preoccuperemo tuttavia, in quanto anche per i diagrammi consideriamo le classi di isotopia; è chiaro che a treccie geometriche isotope corrispondono diagrammi treccia isotopi.

Parliamo allora d'ora in poi semplicemente di "diagramma associato ad una treccia" in luogo di "classe dei diagrammi treccia associata ad una classe di treccie geometriche".

Mosse di Reidemeister

Le trasformazioni Ω_2, Ω_3 , presentate nella Figura 1.3, e le loro inverse $\Omega_2^{-1}, \Omega_3^{-1}$ sono dette *mosse di Reidemeister*; introdotte da Kurt Reidemeister in teoria dei nodi (si veda [Rei83]), possono essere usate per modificare un diagramma treccia preservando la classe di isotopia delle treccie associate. È infatti un semplice esercizio grafico provare che le treccie associate ad un

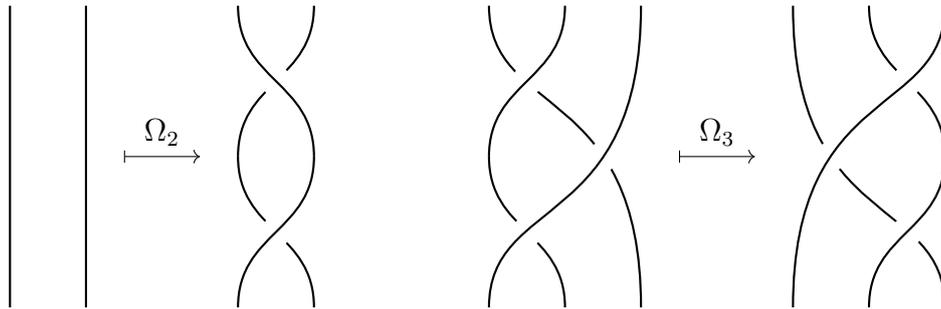


Figura 1.3: Mosse di Reidemeister Ω_2 e Ω_3 .

diagramma e al suo trasformato tramite una di tali mosse sono isotope. Si noti che le mosse agiscono solo in un disco all'interno di $\mathbb{R} \times I$.

Diciamo ora che due diagrammi treccia sono *R-equivalenti* se ottenibili uno dall'altro tramite una sequenza di isotopie e mosse di Reidemeister; è chiaro che se \mathfrak{D}_1 e \mathfrak{D}_2 sono R-equivalenti, allora $b(\mathfrak{D}_1) = b(\mathfrak{D}_2)$ come classi di isotopia.

Abbiamo inoltre il seguente

Teorema 1.1.10. *Due trecce geometriche sono isotope se e solo se i diagrammi treccia a loro associate sono R-equivalenti.*

Una dimostrazione può essere trovata in [KT08].

Definiamo ora $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+, \sigma_1^-, \dots, \sigma_{n-1}^- \in GB_n$, talvolta dette *trecce elementari*, come le classi di isotopia delle trecce geometriche associate ai diagrammi in Figura 1.4 e proviamo che B_n è isomorfo a GB_n .

Lemma 1.1.11. *Gli elementi $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+ \in GB_n$ soddisfano le relazioni treccia e generano GB_n come gruppo.*

Dimostrazione. Proviamo che $\{\sigma_i^+, \sigma_i^-\}_{i=1, \dots, n-1}$ genera GB_n come monoid. Sia b una treccia geometrica e consideriamo il diagramma associato $\mathfrak{D} := \mathfrak{D}(b)$; per ogni punto doppio, applicando un diffeomorfismo (rimanendo dunque nella stessa classe di isotopia) ad un suo intorno, possiamo fare in modo che punti doppi distinti abbiano seconda coordinata distinta.

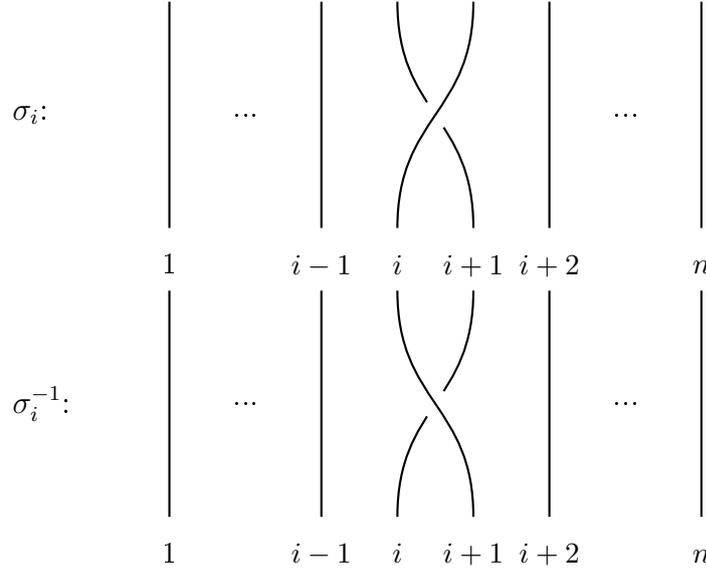


Figura 1.4: Diagrammi delle treccie elementari.

Dunque esisteranno

$$0 = t_0 < t_1 \cdots < t_{k-1} < t_k = 1$$

numeri reali tali che k è il numero di punti doppi e $\mathfrak{D} \cap (\mathbb{R} \times [t_j, t_{j+1}])$ contenga un solo punto doppio, ovvero sia il diagramma di un certo σ_i^+ o σ_i^- , per ogni $j = 1, \dots, k-1$. Dunque possiamo scrivere \mathfrak{D} come prodotto di k diagrammi e abbiamo

$$b = b(\mathfrak{D}) = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$$

dove $\varepsilon_j \in \{+, -\}$ e $i_j \in \{1, \dots, n-1\}$ per ogni $j = 1, \dots, k$.

Ora, è chiaro che $\sigma_i^+ \sigma_i^- = \sigma_i^- \sigma_i^+ = 1$ per ogni i , in quanto il diagramma corrispondente è l'immagine dell'identità attraverso Ω_2 . Dunque $(\sigma_i^+)^{-1} = \sigma_i^-$ e possiamo ridurre il numero dei generatori. Inoltre abbiamo che

$$b^{-1} = \sigma_{i_k}^{-\varepsilon_k} \cdots \sigma_{i_1}^{-\varepsilon_1}$$

è un inverso sia sinistro che destro di b in GB_n .

Infine, la prima delle relazioni treccia, ovvero

$$\sigma_i^+ \sigma_j^+ = \sigma_j^+ \sigma_i^+ \quad \text{per } |i - j| \geq 2$$

è data dal fatto che i diagrammi treccia associati sono isotopi, mentre la seconda relazione, ovvero

$$\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ = \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \quad \text{per } i = 1, \dots, n-2$$

è data dal fatto che i diagrammi treccia associati differiscono di una mossa di Reidemeister Ω_3 . ■

Osservazione 1.1.11.1. Dalla dimostrazione del lemma precedente è chiaro che possiamo anche usare come generatori gli elementi $\sigma_1^-, \dots, \sigma_{n-1}^- \in GB_n$.

Teorema 1.1.12. *Esiste unico l'isomorfismo*

$$\begin{aligned} \psi : B_n &\rightarrow GB_n \\ \sigma_i &\mapsto \sigma_i^+ \end{aligned}$$

Dimostrazione. L'esistenza e unicità di ψ viene dal Lemma 1.1.11 e 1.1.2 e, poiché $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+$ appartengono alla sua immagine e generano GB_n , ψ è suriettivo.

Costruiamo ora un'applicazione $\Psi : GB_n \rightarrow B_n$ tale che $\Psi \circ \psi = \text{Id}$, garantendo l'iniettività di ψ . Come nella dimostrazione del Lemma 1.1.11, possiamo rappresentare $b \in GB_n$ con un diagramma treccia $\mathfrak{D} := \mathfrak{D}(b)$ tale che i suoi punti doppi abbiano seconda coordinata distinta; questo porta ad un'espansione del tipo

$$b(\mathfrak{D}) = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$$

Poniamo ora

$$\Psi(\mathfrak{D}) = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1(1)} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k(1)}$$

dove $\varepsilon_j(1) = \pm 1$ per $\varepsilon_j = \pm$ per ogni $j = 1, \dots, k$.

Proviamo ora che $\Psi(\mathfrak{D})$ dipende solo da b . Per il Teorema 1.1.10 dobbiamo provare che $\Psi(\mathfrak{D})$ non cambia tramite isotopie di \mathfrak{D} e mosse di Reidemeister su \mathfrak{D} . Dunque

- Isotopie di \mathfrak{D} che non cambiano l'ordine dei punti doppi non modificano l'espansione di $b(\mathfrak{D})$, dunque preservano $\Psi(\mathfrak{D})$.

- Isotopie di \mathfrak{D} che cambiano l'ordine di due punti doppi possono farlo solo su punti che non hanno stringhe in comune, ovvero scambiando $\sigma_i^{\varepsilon_i} \sigma_j^{\varepsilon_j}$ con $\sigma_j^{\varepsilon_j} \sigma_i^{\varepsilon_i}$ per $i, j = 1, 2, \dots, n-1$ con $|i-j| \geq 2$. L'immagine tramite Ψ del diagramma iniziale e finale sarà lo stesso elemento di B_n per la prima relazione treccia.
- La mossa di Reidemeister Ω_2 aggiunge un termine $\sigma_i^+ \sigma_i^-$ o $\sigma_i^- \sigma_i^+$, isotopi all'identità attraverso Ψ . Analogamente per Ω_2^{-1} .
- La mossa di Reidemeister Ω_3 sostituisce una sequenza $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ con $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$. L'immagine tramite Ψ dei diagrammi iniziale e trasformato sarà lo stesso elemento per la seconda relazione treccia. Analogamente per Ω_3^{-1} .

Pertanto $\Psi : GB_n \rightarrow B_n$ è ben definita e per costruzione $\Psi \circ \psi = \text{Id}$, da cui abbiamo la tesi. \blacksquare

Osservazione 1.1.12.1. Dal Lemma 1.1.11.1 abbiamo che esiste unico anche un isomorfismo $\phi : B_n \rightarrow GB_n$ tale che $\phi(\sigma_i) = \sigma_i^-$; la dimostrazione è analoga.

D'ora in poi identificheremo dunque il gruppo GB_n con B_n ; i suoi elementi verranno chiamati *treccie su n stringhe* e useremo la notazione σ_i, σ_i^{-1} per i generatori.

1.2 Gruppo Simmetrico e Inclusione Naturale

Il gruppo delle treccie è legato naturalmente al gruppo simmetrico \mathfrak{S}_n ; utilizzeremo questa relazione per mostrare la non-commutatività in generale di B_n . Vedremo inoltre che relazione sussiste tra B_n e B_{n+1} per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.2.1. Il *gruppo simmetrico* \mathfrak{S}_n è il gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{1, \dots, n\}$; l'elemento $s_i \in \mathfrak{S}_n$ che scambia i e $i+1$ e lascia gli altri elementi invariati è detto una *trasposizione semplice*.

Utilizzando il Lemma 1.1.2 e notando che l'insieme delle trasposizioni semplici rispetta le relazioni treccia, abbiamo che esiste un unico omomorfismo di gruppi

$$\begin{aligned}\pi : B_n &\rightarrow \mathfrak{S}_n \\ \sigma_i &\mapsto s_i\end{aligned}$$

che sarà anche suriettivo, in quanto gli s_i con $i = 1, \dots, n-1$ generano \mathfrak{S}_n .

Ricordiamo che \mathfrak{S}_n non è abeliano per $n \geq 3$, in quanto, ad esempio, $s_1 s_2 \neq s_2 s_1$; utilizzando la suriettività di π otteniamo allora la seguente

Proposizione 1.2.2. *B_n non è abeliano per $n \geq 3$.*

Osservazione 1.2.2.1. Geometricamente la proiezione

$$\pi : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$$

associa ad ogni treccia la sua permutazione sottostante.

Ora, riprendendo la Definizione 1.1.1, è chiaro che la formula $\iota(\sigma_i) = \sigma_i$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$ definisce un omomorfismo di gruppi

$$\iota : B_n \rightarrow B_{n+1}$$

Proviamo ora che ι è in particolare un'inclusione, che chiameremo *inclusione naturale*, ovvero che vale il seguente

Corollario 1.2.2.1. *L'omomorfismo $\iota : B_n \rightarrow B_{n+1}$ è iniettivo per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Da un punto di vista geometrico, sia b una treccia geometrica su n stringhe, ι aggiunge alla "destra" di b una stringa slegata da tutte le altre, come in Figura 1.5; chiamiamo la risultante treccia su $n+1$ stringhe $\iota(b)$. Siano b_1, b_2 due trecce geometriche su n stringhe tali che $\iota(b_1)$ e $\iota(b_2)$ siano isotopi, allora restringendoci alle prime n stringhe otteniamo un'isotopia tra b_1 e b_2 . Dunque ι è iniettivo. ■

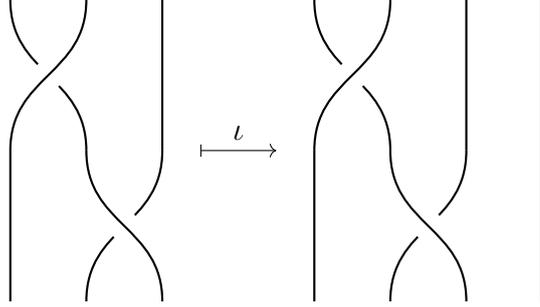


Figura 1.5: Esempio dell'applicazione di $\iota : B_3 \rightarrow B_4$.

Talvolta sarà utile vedere il gruppo B_n come sottogruppo di B_{n+1} ; ad esempio, considerando la catena di inclusioni $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4 \subset \dots$, possiamo provare la Proposizione 1.2.2 con l'unica ipotesi della non commutatività di \mathfrak{S}_3 .

1.3 Trece Pure e Forgetting Homomorfism

Introduciamo ora un peculiare sottogruppo del gruppo delle trece.

Definizione 1.3.1. Consideriamo la proiezione naturale $\pi : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ introdotta in 1.2; il *gruppo delle trece pure* su n stringhe P_n è definito come

$$P_n = \text{Ker} \{ \pi : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n \}$$

Osservazione 1.3.1.1. È chiaro dalla definizione che una treccia b si dice *pura* se $\pi(b) = \text{Id}_{\mathfrak{S}_n}$.

Utilizzando la notazione dell'Osservazione 1.1.4.1 e considerando la rappresentazione geometrica di B_n , abbiamo che ogni treccia pura $b \in P_n$ potrà essere rappresentata da una treccia (geometrica) su n stringhe b tale che $\mathfrak{s}_{b,i}(0) = \mathfrak{s}_{b,i}(1)$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Come già detto, il gruppo delle trece pure è un sottogruppo del gruppo delle trece (con l'operazione di prodotto definita su quest'ultimo); chiaramente dunque P_n è generato dai generatori di B_n . Il prossimo teorema affina e migliora questo risultato.

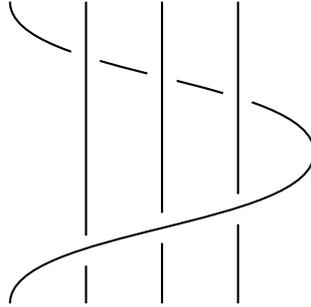


Figura 1.6: Diagramma associato a $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1$ in B_4 .

Teorema 1.3.2. *Il gruppo delle trece pure P_n ammette una famiglia finita di generatori $\{\varsigma_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ con $\varsigma_{ij} = \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}$.*

Dimostrazione per induzione. Sia $n = 2$; poiché P_2 è un sottogruppo di B_2 , cerchiamo i suoi generatori all'interno di quest'ultimo. Ricordiamo che B_2 è isomorfo a \mathbb{Z} tramite l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : \mathbb{Z} &\rightarrow B_2 \\ k &\mapsto \sigma_1^k \end{aligned}$$

Abbiamo che $\sigma_1 \notin P_2$ in quanto la permutazione sottostante a σ_1 non è banale, dunque vale anche $\sigma_1^{2k+1} \notin P_2$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. D'altro canto $\sigma_1^2 \in P_2$ e $\sigma_1^{2k} \in P_2$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto $\sigma_1^2 = \varsigma_{12}$ è generatore di P_2 .

Sia ora la tesi valida per un certo n : possiamo dunque esprimere qualsiasi treccia pura $b \in P_n$ tramite un prodotto finito di ς_{ij} ciascuno con esponente ± 1 . Consideriamo $d_{n+1} \in P_{n+1}$; rimuovendo la sua prima stringa, otteniamo una treccia $\bar{d}_n \in P_n$. Prendiamo ora \bar{d}_n^{-1} e aggiungiamoci una stringa banale all'inizio, ottenendo la treccia d'_{n+1} . Infine, consideriamo $c_{n+1} = d'_{n+1} d_{n+1}$; questa treccia è della forma

$$\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_n^2 \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1$$

(per un esempio si veda la Figura 1.6) ed è esprimibile tramite prodotto di

treccie ς_{ij} , in quanto

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_n^2 \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 \\
&= \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_n^2 \sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 \\
&= (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_n^2 \sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 \\
&= \varsigma_{1n+1} \sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1 = \varsigma_{1n+1} \bar{c}_n
\end{aligned}$$

Abbiamo ora che $\bar{c}_n = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1$ può essere considerata una treccia di P_n , in quanto l'ultima stringa è banale (si veda l'Osservazione 1.3.2.1 e considerazioni successive). Allora per ipotesi induttiva può essere espressa come prodotto di ς_{ij} per alcuni $1 \leq i < j \leq n$ e pertanto lo stesso vale anche per c_{n+1} .

Notando che $d_{n+1} = (d'_{n+1})^{-1} c_{n+1}$, concludiamo. ■

Corollario 1.3.2.1. *Il gruppo P_2 è isomorfo a $2\mathbb{Z}$.*

È chiaro che l'inclusione naturale $\iota : B_n \rightarrow B_{n+1}$ induce un'inclusione naturale $\iota : P_n \rightarrow P_{n+1}$, dove l'iniettività discende dal Corollario 1.2.2.1. Anche in questo caso sarà dunque talvolta utile considerare P_n come sottogruppo di P_{n+1} .

Osservazione 1.3.2.1. Siano b una treccia geometrica pura, rimuovendo allora l' n -esima stringa (indichiamo questa azione tramite l'utilizzo di una certa applicazione f_n) otteniamo una treccia geometrica $f_n(b)$ la cui classe appartiene a P_{n-1} . Chiaramente se $b_1 \in P_n$ è isotopa a $b_2 \in P_n$, allora $f_n(b_1)$ è isotopa a $f_n(b_2)$. Abbiamo allora che l'applicazione

$$f_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$$

è ben definita e in particolare sarà anche un omomorfismo di gruppi. Tale applicazione "dimentica" l' n -esima stringa della treccia ed è pertanto detta *forgetting homomorphism*.

Per ogni $n \geq 2$ poniamo

$$U_n = \text{Ker} \{f_n : P_n \rightarrow P_{n-1}\}$$

Poiché $f_n \circ \iota = \text{Id}_{P_{n-1}}$, ovvero f_n ammette un inverso destro, P_n è isomorfo al prodotto semidiretto $U_n \rtimes P_{n-1}$. Pertanto ogni treccia pura $\beta \in P_n$ ammette un'espansione unica del tipo

$$\beta = \iota(\beta')\beta_n$$

dove $\beta' \in P_{n-1}$ e $\beta_n \in U_n$; si noti che vale $\beta' = f_n(\beta)$ e $\beta_n = \iota^{-1}(\beta')\beta$.

Applicando questa procedura induttivamente, concludiamo che possiamo scrivere β unicamente come

$$\beta = \beta_2\beta_3\beta_4 \cdots \beta_n$$

dove $\beta_j \in U_j \subset P_j \subset P_n$ per ogni $j = 2, 3, \dots, n$. Quest'ultima espansione è detta *forma normale* di β .

Riportiamo infine un teorema, fondamentale per lo studio di U_n , da cui discendono importanti proprietà algebriche di P_n e B_n . Per una dimostrazione si veda [KT08].

Teorema 1.3.3. *Per ogni $n \geq 2$, il gruppo U_n è libero sugli $n - 1$ generatori $\{\varsigma_{in}\}_{1 \leq i \leq n-1}$.*

Curiosità: le trece pure vengono talvolta chiamate "trece colorate", in quanto, colorando con colori differenti ogni stringa di una treccia pura (geometrica) b , i punti della coppia $(\mathfrak{s}_{b,i}(0), \mathfrak{s}_{b,i}(1))$ per ogni $i = 1, \dots, n$ saranno dello stesso colore.

Capitolo 2

Trecce e Omeomorfismi

Ci concentriamo ora su un'interpretazione del gruppo delle trecce data tramite classi di isotopia degli (auto-)omeomorfismi del disco $D^2 \in \mathbb{C}$.

2.1 Mapping Class Group

Introduciamo il concetto di mapping class group.

Definizione 2.1.1. Sia M una varietà orientata e $Q \subset M^\circ$ un insieme finito. Chiamiamo $f : M \rightarrow M$ un *auto-omeomorfismo* di (M, Q) se è un omeomorfismo che fissa ∂M punto per punto, Q come insieme e preserva l'orientamento di M .

Nel caso in cui M sia connesso e abbia frontiera non vuota, possiamo indebolire (apparentemente) le condizioni su f , in quanto un omeomorfismo che fissa ∂M punto per punto preserva l'orientamento di M .

Osservazione 2.1.1.1. Ogni auto-omeomorfismo f di (M, Q) induce dunque una permutazione su Q , che chiameremo *permutazione sottostante* ad f .

Si definisce nel modo usuale l'isotopia tra due auto-omeomorfismi di (M, Q) , che sarà ancora una relazione di equivalenza; notiamo inoltre che ad auto-omeomorfismi isotopi corrisponde la stessa permutazione sottostante.

Definizione 2.1.2. L'insieme delle classi di isotopia di auto-omeomorfismi di (M, Q) con l'operazione di composizione usuale costituisce un gruppo, detto *mapping class group* di (M, Q) , che indicheremo con $\mathfrak{M}(M, Q)$. Poniamo $\mathfrak{M}(M) = \mathfrak{M}(M, \emptyset)$.

Vediamo ora un risultato immediato.

Ricordiamo che con D^n indichiamo il disco n -dimensionale, ovvero l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$, per un certo $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$.

Teorema 2.1.3 (Teorema di Alexander-Tietze). *Il gruppo $\mathfrak{M}(D^n)$ è banale.*

Dimostrazione. L'isotopia tra un auto-omeomorfismo generico $h = h_1$ e $\text{Id} = h_0$ è data da

$$h_t(x) = \begin{cases} x & \text{se } t \leq \|x\| \leq 1 \\ th(z/t) & \text{se } \|x\| < t \end{cases}$$

■

Notiamo anche che se $h(0) = 0$, allora vale $h_t(0) = 0 \forall t \in [0, 1]$; abbiamo dunque la seguente

Proposizione 2.1.4. *Il gruppo $\mathfrak{M}(D^n, \{0\})$ è banale.*

Prima di procedere con il maggior risultato di questa sezione introduciamo il concetto di half twist.

Definizione 2.1.5. Sia M una superficie orientata, un arco semplice α di (M, Q) tale che $\alpha(0), \alpha(1) \in Q$ e $\alpha(t) \notin (Q \cup \partial M)$ per ogni $t \in (0, 1)$ è detto un Q -arco o uno *spanning arc* di (M, Q) .

Definizione 2.1.6. Sia α un Q -arco e sia U un intorno aperto di α ; a meno di omeomorfismi possiamo identificare U con $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, dove l'orientamento di M è quello antiorario di \mathbb{C} , e α con $[-1/2, 1/2] \subset U$. Un omeomorfismo

$$\tau_\alpha : (M, Q) \rightarrow (M, Q)$$

tale che

$$\tau_\alpha(z) = \begin{cases} -z & \text{se } |z| < 1/2 \\ ze^{-2\pi i|z|} & \text{se } 1/2 \leq |z| < 1 \\ z & \text{se } |z| \geq 1 \end{cases}$$

si dice un *half twist* (o una *mezza torsione*) rispetto ad α .

È chiaro che $\tau_\alpha \in \mathfrak{M}(M, Q)$ non dipende da U ; ciò giustifica la precedente scelta dell'intorno.

Informalmente, l'azione di τ_α è quella di ruotare, di π radianti in senso concorde all'orientamento di M e in modo continuo, una porzione variabile (nel senso di "a meno di isotopia") della superficie M . Si noti che

- τ_α scambia $\alpha(0) \in Q$ con $\alpha(1) \in Q$: in particolare avremo che τ_α è isotopo all'identità in M , ma non lo è in $M - Q$;
- $\tau_\alpha(\alpha) = \alpha$ e $\tau_\alpha(Q) = Q$;
- τ_α^{-1} esegue la stessa azione di τ_α , ma in senso opposto a quello concorde all'orientamento di M .

Osservazione 2.1.6.1. È abbastanza intuitivo che, sia $f : (M, Q) \rightarrow (M', Q')$ un omeomorfismo che preservi l'orientamento e α un Q -arco, allora $f(\alpha)$ è un Q' -arco di (M', Q') e vale

$$\tau_{f(\alpha)} = f\tau_\alpha f^{-1} \in \mathfrak{M}(M', Q')$$

Da tale osservazione otteniamo rapidamente la seguente

Proposizione 2.1.7. *Valgono i seguenti fatti:*

1. se due Q -archi α, β sono isotopi nella classe dei Q -archi, allora

$$\tau_\alpha = \tau_\beta \in \mathfrak{M}(M, Q)$$

2. sia α, β due Q -archi disgiunti, allora

$$\tau_\alpha \tau_\beta = \tau_\beta \tau_\alpha \in \mathfrak{M}(M, Q)$$

3. siano α, β due Q -archi tali che $\alpha \cap \beta = q \in Q$, allora

$$\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha = \tau_\beta \tau_\alpha \tau_\beta \in \mathfrak{M}(M, Q)$$

Dimostrazione. 1. Indichiamo con f l'auto-omeomorfismo di (M, Q) che è l'identità su Q , è isotopo all'identità e manda α in β . Allora per l'Osservazione 2.1.6.1 abbiamo

$$\tau_\beta = \tau_{f(\alpha)} = f \tau_\alpha f^{-1} = \tau_\alpha \in \mathfrak{M}(M, Q)$$

in quanto f è isotopo all'identità.

2. Basta prendere intorni disgiunti di α, β nella costruzione di τ_α, τ_β .

3. Notiamo che

$$\tau_\alpha(\beta) = \tau_\beta^{-1}(\alpha)$$

dove l'uguaglianza va considerata nella classe dei Q -archi di (M, Q) (si può verificare disegnando tali Q -archi). Da 1. abbiamo

$$\tau_{\tau_\alpha(\beta)} = \tau_{\tau_\beta^{-1}(\alpha)}$$

e usando 2.1.6.1 otteniamo

$$\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha^{-1} = \tau_\beta^{-1} \tau_\alpha \tau_\beta$$

■

2.2 L'isomorfismo $B_n \simeq \mathfrak{M}(D^2, Q_n)$

Ci occupiamo ora del mapping class group di $M = D^2$ con $Q = Q_n$ un insieme di n punti; in particolare, poniamo $Q_n = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ e identifichiamo D^2 con un disco di \mathbb{R}^2 tale che $Q_n \subset (D^2)^\circ$ e orientato in senso antiorario. Consideriamo ora gli archi

$$\alpha_i = [i, i+1] \times \{0\} \subset D^2$$

per ogni $i = 1, 2, \dots, n-1$; notando che ognuno degli α_i è un Q_n -arco, possiamo prendere gli half twists $\{\tau_{\alpha_i}\}_{i=1,2,\dots,n-1} \subset \mathfrak{M}(D^2, Q_n)$. Dalla Proposizione

2.1.7 (punti 2. e 3.) e dal Lemma 1.1.2 abbiamo che esiste un omomorfismo di gruppi

$$\eta : B_n \rightarrow \mathfrak{M}(D^2, Q_n)$$

tale che $\eta(\sigma_i) = \tau_{\alpha_i}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n-1$ e in particolare η è iniettivo. Abbiamo anche il seguente:

Lemma 2.2.1. *L'omomorfismo $\eta : B_n \rightarrow \mathfrak{M}(D^2, Q_n)$ è suriettivo.*

Idea della dimostrazione. Per una dimostrazione formale si veda [KT08].

Consideriamo un elemento $\psi \in \mathfrak{M}(D^2, Q_n)$. Per il teorema di Alexander-Tietze, $\psi \in \mathfrak{M}(D^2)$ è isotopo all'identità; scegliamo una tale isotopia e consideriamone l'azione in un cilindro $D^2 \times [0, 1]$, facendo attenzione al movimento dei punti di Q_n . A meno di applicare diffeomorfismi (rimanendo dunque nella stessa classe d'isotopia), possiamo supporre esistano numeri reali $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 1$ per un certo $k > 0$ tali che in $D^2 \times [t_j, t_{j+1}]$ vengano scambiati solo due punti dell'insieme Q e gli altri rimangano fissi per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$. Allora ognuno dei cilindri $D^2 \times [t_j, t_{j+1}]$ rappresenta l'azione di un certo τ_{γ_j} con γ_j Q_n -arco tale che $\gamma_j(0), \gamma_j(1)$ siano i punti che vengono scambiati; in particolare possiamo allora scrivere ψ come prodotto di $\tau_{\gamma_j}^\varepsilon$ con γ_j Q_n -archi e $\varepsilon \in \{+, -\}$. Notando che ogni τ_{γ_j} può essere espresso come prodotto di certi $\tau_{\alpha_i}^\varepsilon$ con $\varepsilon \in \{+, -\}$ e ricordando che $\eta(\sigma_i) = \tau_{\alpha_i}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, abbiamo la tesi. ■

Dunque η è un isomorfismo.

2.3 Gruppo degli Automorfismi Treccia

Introduciamo ora un sottogruppo del gruppo degli automorfismi di un gruppo libero legato al gruppo delle trecce.

Definizione 2.3.1. Sia F_n il gruppo libero generato da n generatori x_1, \dots, x_n , diciamo che $\psi \in \text{Aut}(F_n)$ è un *automorfismo treccia* se è tale che

1. esiste $\mu \in \mathfrak{S}_n$ tale che $\psi(x_k)$ è coniugato in F_n a $x_{\mu(k)}$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$
2. $\psi(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$

Osservando che un endomorfismo è totalmente determinato dalla sua azione sui generatori, possiamo ad esempio definire esplicitamente il seguente automorfismo treccia

$$\nu_i(x_j) = \begin{cases} x_{j+1} & \text{se } j = i \\ x_j^{-1} x_{j-1} x_j & \text{se } j = i + 1 \\ x_j & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e il suo inverso

$$\nu_i^{-1}(x_j) = \begin{cases} x_j x_{j+1} x_j^{-1} & \text{se } j = i \\ x_{j-1} & \text{se } j = i + 1 \\ x_j & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ogni $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Dalla definizione è chiaro che l'inverso di un automorfismo treccia è ancora un automorfismo treccia; lo stesso vale per la composizione di due automorfismi treccia. Abbiamo allora che l'insieme degli automorfismi treccia con l'operazione di composizione è un gruppo, che indicheremo con $\text{Aut}_B(F_n)$.

Riportiamo, senza dimostrare, un lemma che ci sarà utile in seguito.

Lemma 2.3.2. *Il gruppo $\text{Aut}_B(F_n)$ ammette ν_1, \dots, ν_{n-1} come generatori.*

2.4 L'isomorfismo $\mathfrak{M}(D^2, Q_n) \simeq \text{Aut}_B(F_n)$

Mostriamo ora che il mapping class group di (D^2, Q_n) è isomorfo al gruppo degli automorfismi treccia di F_n .

Fissiamo $d \in \partial D^2$ come nostro punto base e notiamo che $\pi_1(D^2 - Q_n, d)$ è il gruppo libero F_n generato dai generatori x_1, \dots, x_n rappresentati dagli n laccetti $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ come in Figura 2.1. Qualora tale fatto non sia chiaro o si voglia comunque averne una prova formale, si veda l'Appendice A.

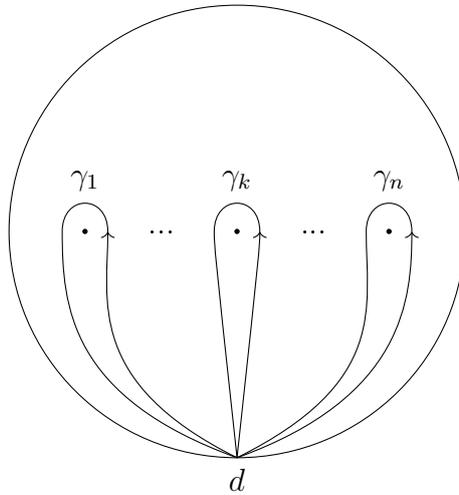


Figura 2.1

Ora consideriamo un auto-omeomorfismo f di (D^2, Q_n) ; possiamo restringere tale f a $D^2 - Q_n$ ottenendo così un auto-omeomorfismo di $D^2 - Q_n$ che fissi $d \in \partial D^2$ e che a sua volta indurrà un automorfismo di gruppo $\rho(f)$ su $\pi_1(D^2 - Q_n, d) = F_n$. Si noti che tale automorfismo dipende solo dalla classe di isotopia di f , in quanto le restrizioni a $D^2 - Q_n$ di due auto-omeomorfismi di (D^2, Q_n) isotopi sono isotope relativamente a ∂D^2 e dunque inducono lo stesso automorfismo.

Mostriamo ora che $\rho(f)$ è un automorfismo treccia.

Sia $k \in \{1, \dots, n\}$, il laccetto γ_k come in Figura 2.1 può essere deformato in $D^2 - Q_n$ fino a diventare un piccolo cerchietto che circonda $(k, 0)$ e appartenga ad un suo intorno abbastanza piccolo (Figura 2.2[sinistra]). L'omeomorfismo f manda quest'intorno, e in particolare il cerchietto, in un intorno abbastanza piccolo del punto $(\mu(k), 0)$, in modo che il cerchietto circonda quest'ultimo punto, dove μ è la permutazione sottostante ad f (Figura 2.2[destra]). Possiamo ora deformare quest'ultimo cerchietto nel laccetto $\gamma_{\mu(k)}$ in $D^2 - Q_n$. È chiaro che il punto $f(d) = d$ si possa muovere in $D^2 - Q_n$ durante le deformazioni.

Quanto appena detto implica che le classi di omotopia di $\rho(f)(x_k)$ e $x_{\mu(k)}$ sono coniugate in $\pi_1(D^2 - Q_n, d)$; abbiamo dunque soddisfatto la condizione

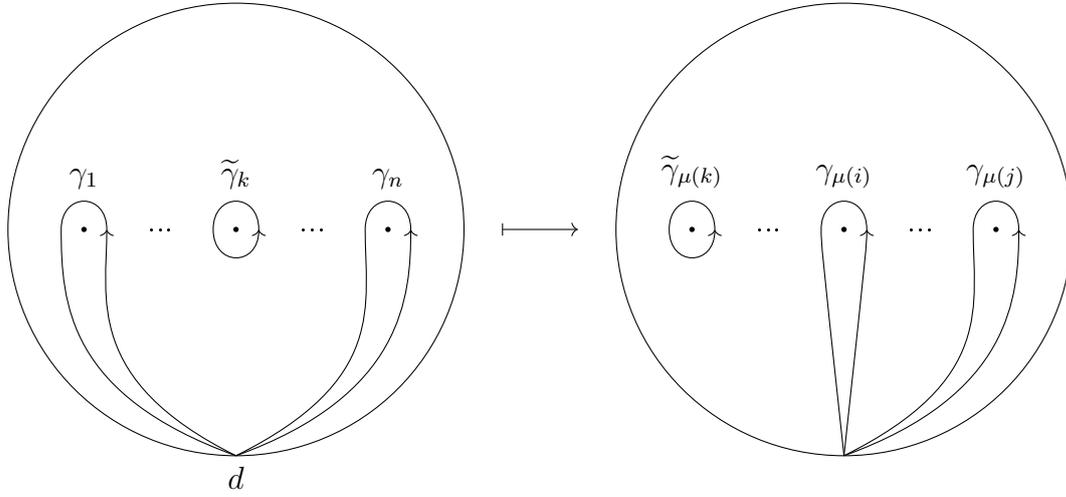


Figura 2.2

1. della Definizione 2.3.1. La condizione 2. è data dal fatto che l'elemento $x_1x_2 \cdots x_n$ è rappresentato dal laccetto ∂D^2 basato in d , f preserva $\partial(D^2 - Q_n) = \partial D^2 \cup Q_n$ come insieme e in particolare ∂D^2 punto per punto, dunque la sua classe di omotopia non cambia tramite $\rho(f)$.

Notando che, per ogni $f, g \in \mathfrak{M}(D^2, Q_n)$, vale

$$\rho(fg) = \rho(f \circ g) = \rho(f) \circ \rho(g) = \rho(f)\rho(g)$$

abbiamo che $\rho : \mathfrak{M}(D^2, Q_n) \rightarrow \text{Aut}_B(F_n)$ tale che $f \mapsto \rho(f)$ è un omomorfismo di gruppi.

Mostriamo infine che ρ è un isomorfismo; grazie al Lemma 2.3.2, per farlo basta verificare che $\rho(\tau_{\alpha_i}) = \nu_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n-1$. Dalla definizione di τ_{α_i} otteniamo subito

$$\rho(\tau_{\alpha_i})(x_k) = x_k \quad \text{se } k \neq i, i+1$$

e $\rho(\tau_{\alpha_i})(x_i) = x_{i+1}$, mentre $\rho(\tau_{\alpha_i})(x_{i+1}) = x_{i+1}^{-1}x_i x_{i+1}$ può essere dedotta a partire da $\rho(\tau_{\alpha_i})(x_1x_2 \cdots x_n) = x_1x_2 \cdots x_n$ (o verificata direttamente). Dunque $\rho(\tau_{\alpha_i}) = \nu_i$.

Abbiamo provato che $B_n \simeq \mathfrak{M}(D^2, Q_n) \simeq \text{Aut}_B(F_n)$, corollario del successivo teorema, principale risultato che lega trecce e omeomorfismi.

Teorema 2.4.1. *Per ogni $n \geq 1$, gli omomorfismi*

$$\eta : B_n \rightarrow \mathfrak{M}(D^2, Q_n) \quad e \quad \rho : \mathfrak{M}(D^2, Q_n) \rightarrow \mathbf{Aut}_B(F_n)$$

sono isomorfismi. Inoltre, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} B_n & & \\ \downarrow \eta & \searrow \vartheta & \\ \mathfrak{M}(D^2, Q_n) & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{Aut}_B(F_n) \end{array}$$

dove $\vartheta : B_n \rightarrow \mathbf{Aut}_B(F_n)$ è tale che $\vartheta(\sigma_i) = \nu_i$.

Non ci occupiamo di trattare l'isomorfismo ϑ , in quanto è una questione prettamente algebrica che esula dallo scopo del presente elaborato.

In conclusione, abbiamo dunque trovato ben tre differenti interpretazioni del gruppo delle trecce B_n : tramite classi di isotopia di trecce geometriche su n stringhe, tramite il gruppo degli auto-omeomorfismi del disco D^2 puntato con n punti distinti e tramite un sottogruppo del gruppo degli automorfismi del gruppo libero F_n .

Appendice A

Il Gruppo $\pi_1(D^2 - Q_n)$

Calcoliamo qui $\pi_1(D^2 - Q_n)$, introducendo anche il concetto stesso di gruppo fondamentale. La trattazione è piuttosto concisa, in quanto l'obiettivo di questa appendice è limitato al fornire da supporto al testo principale; la stessa si ispira liberamente all'Appendice D di [Deh21] e al testo [Fra20].

Una trattazione più completa delle nozioni presenti può essere trovata anche in [Hat01].

A.1 Gruppo Fondamentale

Il gruppo fondamentale di uno spazio (che sia almeno localmente connesso per archi e di Hausdorff) è un importante invariante per omotopia che ci dà informazione sul numero di modi in cui ci si può muovere nello spazio in percorsi chiusi non riconducibili ad un percorso banale.

Riportiamo la costruzione formale del detto gruppo, partendo con il richiamare cos'è un laccetto.

Nota: tutti gli spazi topologici nel seguito si considerano abbastanza "belli", in particolare appunto localmente connessi per archi e di Hausdorff.

Definizione A.1.1. Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$, un *laccetto di X basato in x_0* è un arco $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. La famiglia dei laccetti di X basati in x_0 si indica con $\Omega(X, x_0)$.

Due laccetti $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X, x_0)$ si dicono *omotopi* se esiste $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ omotopia tale che

$$F_0(x) = \gamma_1(x) \quad F_1(x) = \gamma_2(x) \quad F_t(0) = F_t(1) = x_0$$

per ogni $t, x \in [0, 1]$.

Definiamo anche un prodotto su $\Omega(X, x_0)$: siano $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X, x_0)$, allora si pone

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t < 1/2 \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e l'operazione è ben definita in quanto $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = x_0$. Si pone anche $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Notiamo infine che l'essere omotopi è una relazione di equivalenza, che indicheremo con \sim , e che è l'operazione di prodotto è compatibile con \sim .

Definizione A.1.2. Il quoziente $\Omega(X, x_0)/\sim$ si indica con $\pi_1(X, x_0)$.

Osservazione A.1.2.1. Per quanto detto abbiamo che l'operazione di prodotto definita precedentemente su $\Omega(X, x_0)$ induce una struttura di gruppo su $\pi_1(X, x_0)$; l'elemento neutro e l'inverso discendono direttamente da $\Omega(X, x_0)$, mentre va notato che l'associatività non è a priori garantita, in quanto, siano $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0)$, allora ad esempio

$$((\alpha\beta)\gamma)(1/3) = \beta(1/3) \neq \alpha(1/3) = (\alpha(\beta\gamma))(1/3)$$

in generale, da cui $(\alpha\beta)\gamma \neq \alpha(\beta\gamma)$. Tuttavia otteniamo l'associatività in $\pi_1(X, x_0)$ poiché $((\alpha\beta)\gamma)(t) = (\alpha(\beta\gamma))(\xi(t))$, dove $\xi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è una riparametrizzazione, e chiaramente $(\alpha\beta)\gamma \sim (\alpha(\beta\gamma))(\xi) \sim \alpha(\beta\gamma)$.

Proposizione A.1.3. Se $x_0, x_1 \in X$ appartengono alla stessa componente connessa per archi di X , allora $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ sono isomorfi.

Dimostrazione. Sia α un arco tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$ e sia $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, allora abbiamo che $\alpha^{-1}\gamma\alpha \in \Omega(X, x_1)$, dove il prodotto è quello definito precedentemente su $\Omega(X, x_0)$ e sarà ben definito anche in questo

caso in quanto $\alpha(0) = \alpha^{-1}(1) = x_0$. Passando al quoziente, abbiamo che α definisce un morfismo $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ con $\phi([\gamma]) = [\alpha^{-1}\gamma\alpha]$. Poiché α^{-1} definisce un morfismo $\psi : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ tale che $\psi([\gamma]) = [\alpha\gamma\alpha^{-1}] = \phi^{-1}([\gamma])$, abbiamo che ϕ è un isomorfismo. ■

In particolare, nel caso in cui X sia connesso per archi, possiamo allora parlare di $\pi_1(X) := \pi_1(X, x)$ dove $x \in X$ è un punto qualsiasi. Chiamiamo $\pi_1(X)$ il *gruppo fondamentale di X* .

A.2 $\pi_1(S^1)$ e Teorema di Van Kampen

Riportiamo ora, senza dimostrarlo, un risultato classico sul calcolo dei gruppi fondamentali.

Teorema A.2.1. *Il gruppo fondamentale del cerchio $\pi_1(S^1)$ è \mathbb{Z} .*

Corollario A.2.1.1. *Sia $q \in D^2$, il gruppo fondamentale di un disco puntato $\pi_1(D^2 - q)$ è \mathbb{Z} .*

Dimostrazione. Il disco puntato è omotopicamente equivalente ad S^1 tramite la proiezione radiale e due spazi omotopicamente equivalenti hanno lo stesso gruppo fondamentale. ■

L'ultimo tassello è un teorema molto potente che ci permette (virtualmente) di calcolare molti gruppi fondamentali a mano: il Teorema di Van Kampen.

Vale la pena notare che l'utilizzo di questo teorema non è chiaramente l'unico modo di determinare $\pi_1(D^2 - Q_n)$, ma piuttosto si è usato il calcolo di questo gruppo fondamentale come espediente per riportare questo potente risultato; un altro procedimento molto elegante per raggiungere lo stesso fine, concernente "solamente" omeomorfismi e retratti di deformazione forte, può essere trovato in [Hat01].

Teorema A.2.2 (Teorema di Van Kampen). *Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi, $A, B \subset X$ aperti e connessi tali che $A \cup B = X$ e $A \cap B \neq \emptyset$ è connesso per archi, $x_0 \in A \cap B$ e consideriamo*

$$i_A : \pi_1(A \cap B, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0) \quad e \quad i_B : \pi_1(A \cap B, x_0) \rightarrow \pi_1(B, x_0)$$

Supponendo che valgano le presentazioni

- $\pi_1(A, x_0) = \langle G_A | R_A \rangle$
- $\pi_1(B, x_0) = \langle G_B | R_B \rangle$
- $\pi_1(A \cap B, x_0) = \langle G_C | R_C \rangle$

e che sia $R = \{i_A(\gamma)i_B(\gamma)^{-1} : \gamma \in G_C\}$, allora vale

$$\pi_1(X) = \langle G_A \cup G_B | R_A \cup R_B \cup R \rangle$$

Corollario A.2.2.1. *Sia X connesso per archi e $A, B \subset X$ aperti connessi per archi tali che $A \cup B = X$ e $A \cap B \neq \emptyset$ è connesso per archi e contraibile. Supponendo che valgano le presentazioni $\pi_1(A) = \langle G_A | R_A \rangle$ e $\pi_1(B) = \langle G_B | R_B \rangle$, allora*

$$\pi_1(X) = \langle G_A \cup G_B | R_A \cup R_B \rangle$$

Dimostrazione. $A \cap B$ è contraibile ovvero $\pi_1(A \cap B)$ è banale, dunque $R = \emptyset$. ■

Siamo dunque pronti a provare la seguente

Proposizione A.2.3. *Sia $Q_n = \{q_1, \dots, q_m\} \subset D^2$, il gruppo fondamentale del disco puntato $\pi_1(D^2 - Q_n)$ è il gruppo libero generato da n generatori.*

Dimostrazione per induzione. Per $n = 1$ utilizziamo il Corollario A.2.1.1. Sia $n \geq 2$ e valga l'ipotesi induttiva: $D^2 - Q_n$ è omeomorfo allo spazio in Figura A.1; considerando A e B come in Figura, ovvero tali che

- A è omeomorfo a $D^2 - q_n$

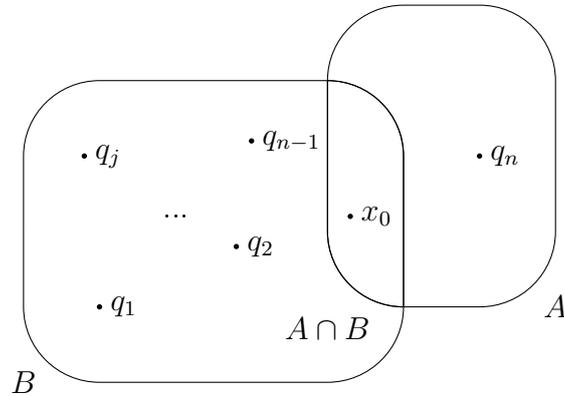


Figura A.1: Spazio omeomorfo al disco puntato con n punti.

- B è omeomorfo a $D^2 - Q_{n-1}$
- $A \cap B$ è contraibile

con $Q_{n-1} = \{q_1, \dots, q_{n-1}\}$, possiamo usare il Corollario A.2.2.1 e abbiamo che, sia γ_n un laccetto in A basato in $x_0 \in A \cap B$ che gira intorno a q_n , allora $\pi_1(D^2 - Q_n) = \langle [\gamma_n] \cup G_B | R_B \rangle$; in particolare $R_A = \emptyset$. Per ipotesi induttiva vale $G_B = \langle [\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_{n-1}] \rangle$, dove ogni γ_k è un laccetto in B basato in x_0 che gira solo intorno a q_k per ogni $k = 1, \dots, n - 1$, e $R_B = \emptyset$. Dunque $\pi_1(D^2 - Q_n) = \langle [\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_{n-1}], [\gamma_n] \rangle$, ovvero $\pi_1(D^2 - Q_n)$ è il gruppo libero generato da n generatori rappresentati dai laccetti $[\gamma_1], \dots, [\gamma_n]$. ■

Bibliografia

- [Deh21] P. Dehornoy. *The Calculus of Braids*. Cambridge University Press, 2021.
- [Fra20] S. Francaviglia. *Topologia*. i.p., 2020.
- [Hat01] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [KT08] C. Kassel e V. Turaev. *Braid Groups*. Springer, 2008.
- [Lie11] J. Lieber. *Introduction to Braid Groups*. 2011.
- [PS97] V. V. Prasolov e A. B. Sossinsky. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. American Mathematical Society, 1997.
- [Rei83] K. Reidemeister. *Knot Theory*. BCS Associates, 1983.