Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Triennale in Matematica

I PROCESSI DI POISSON

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Silvia Guerri

II Sessione
2010-2011

Indice

Introduzione

Argomento della presente tesi è il processo di Poisson, sua definizione e proprietà fondamentali.
Nel primo capitolo è stata inserita la parte teorica fondamentale per comprendere cosa siano i processi stocastici. Sono state fornite definizioni ($\sigma-algebra$, spazio di probabilità, misura di probabilità, densità e variabile aleatoria) ed esempi di distribuzioni di probabilità specificandone la densità.
Nel secondo capitolo è stata fornita la prima definizione di processo di Poisson, partendo dal processo di conteggio e specificando le proprietà caratteristiche del processo. Nel terzo ed ultimo capitolo la definizione di processo di Poisson è partita dall'associazione di un processo stocastico di variabili aleatorie indipendenti con un processo di conteggio.
Particolare attenzione è stata data alle proprietà dei processi di Poisson e nel secondo e terzo capitolo sono state dimostrate proposizioni importanti.
Tutto questo per mettere in risalto le caratteristiche che fanno del processo di Poisson uno dei processi stocastici più utilizzato nelle applicazioni.

Capitolo 1

Elementi di probabilità, Introduzione ai processi stocastici

In questo capitolo ci proponiamo di introdurre in modo esauriente tutte le nozioni fondamentali e necessarie per comprendere pienamente cosa sia un processo stocastico e più in specifico, un processo di Poisson.

Definizione 1.1. Sia Ω un insieme non vuoto, $\Omega \neq \emptyset$.
Una $\sigma - algebra$ $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di Ω tale che:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- Se $F \in \mathcal{F}$ *allora* $F^c := (\Omega \backslash F) \in \mathcal{F}$.
- Per ogni successione $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *di elementi di* $\mathcal{F}, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$.

Definizione 1.2. Si dice $\sigma - algebra\ dei\ Borelliani$ $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ è la σ-algebra generata dalla topologia Euclidea di $\mathbb{R}^N$, ossia:

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N) = \sigma(\{A|A \text{ aperto di } (\mathbb{R}^N)\}).$$

Che si può abbreviare con $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$.

Definizione 1.3. Una *misura sulla σ-algebra $\mathcal{F}$ di Ω* è un'applicazione

$$\mathrm{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$$

tale che:

- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.
- Per ogni successione $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{F}$, a due a due disgiunti, vale:
$$\mathrm{P}(\bigcup_{n \geq 1} F_n) = \sum_{n \geq 1} \mathrm{P}(F_n).$$

  Se $\mathrm{P}(\Omega) < \infty$, diciamo che P è una *misura finita.* Inoltre, se vale:

- $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, allora diciamo che P è una *misura di probabilità.*

Definizione 1.4. Una misura di probabilità definita su $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{B})$ è detta *distribuzione.*

Definizione 1.5. Uno *Spazio di Probabilità* è una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ con $\mathcal{F}$ *σ-algebra* su Ω e P misura di probabilità su $\mathcal{F}$.

Proposizione 1.0.1. *Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione $\mathfrak{B}$-misurabile (ossia tale che $f^{-1}(H) \in \mathfrak{B}$), non-negativa e tale che*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

Allora P *definita da:*

$$\mathrm{P}(H) = \int_H f(x)dx, \quad H \in \mathfrak{B},$$

è una distribuzione.
Si dice che f è la densità di P *rispetto alla misura di Lebesgue.*

Diamo degli esempi di distribuzioni specificando la loro densità:

Definizione 1.6. Data $\lambda > 0$, la *Distribuzione Esponenziale di paramentro* λ ha densità rispetto la misura di Lebesgue:

$$f_\lambda = \lambda e^{-\lambda x} I_{\mathbb{R}_+}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$I_{\mathbb{R}_+}$ denota la funzione indicatrice su $\mathbb{R}_+$, definita da:

$$I_{\mathbb{R}_+}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{R}_+ \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Definizione 1.7. Data $\lambda > 0$, la *Distribuzione di Poisson di parametro* λ ha densità:

$$f_\lambda = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definizione 1.8. Dati $k > 0$ e $\theta > 0$, la *Distribuzione* Γ ha densità:

$$f_{(k,\theta)} = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Con Γ, detta funzione Gamma o funzione di Eulero:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Definizione 1.9. Una *Variabile Aleatoria* (v.a.) sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, è una funzione misurabile X da Ω a valori in $\mathbb{R}^N$, ossia una funzione

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ t.c. } X^{-1}(H) \in \mathcal{F},\ H \in \mathfrak{B}.$$

Nel caso $N = 1$, X è detta *v.a. reale.*

Definizione 1.10. Con il nome di *processo stocastico*, intendiamo un modello che permette di studiare un fenomeno aleatorio che si evolve nel corso del tempo. Per definirlo, consideriamo:

- Uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$;
- Uno spazio misurabile $(E, \mathfrak{B})$, dove E è chiamato *insieme degli stati* (del processo);

- Una famiglia $(X_t)_{t \in T}$ di variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ a valori in E.

L'insieme T degli indici è lo spazio dei *tempi.* Per $\omega \in \Omega$ e $t \in T$ la quantità $X_t(\omega)$ è chiamato *stato del processo all'istante t.* Dato $\omega \in \Omega$, l'applicazione che ad ogni t in T fa corrispondere $X_t(\omega)$, lo stato del processo all'istante t, è chiamato traiettoria di ω.
Si distinguono più tipi di processi a seconda che T e E siano discreti o continui. Se $T \subset \mathbb{N}$, diciamo che il processo è *a tempi discreti.* Se $T = [0, 1]$ o $\mathbb{R}$, si dice che il processo è *a tempi continui.* A seconda che E sia finito, numerabile o continuo, si dice che il processo ha un *numero finito di stati*, uno *spazio di stati numerabile* o uno *spazio di stati continuo.*
Quando $T = \mathbb{N}$ (tempo discreto), il processo stocastico è descritto da una serie $X_0, X_1, X_2, \ldots$ di v.a. a valori in $(E, \mathfrak{B})$. Se E è finito o numerabile, queste variabili aleatorie sono necessariamente variabili aleatorie discrete.
Consideriamo un processo a tempi discreti, o ancora una serie di variabili aleatorie (X_n) $(n \geq 0)$. Per dare in modo chiaro la nozione di processo all'istante n, introduciamo l'insieme di *eventi che si producono fino all'istante* n (*incluso*), come l'insieme rappresentato dal vettore $(X_0, \ldots, X_n)$.

Capitolo 2

Processo di Poisson, Prima Definizione

Ci proponiamo di studiare la divisione del tempo in istanti casuali, chiamati *istanti-*τ. Nelle applicazioni, questi sono i momenti in cui si verificano certi *eventi* specifici, come possono essere il tempo in cui un particolare materiale radioattivo emette particelle, il tempo in cui le automobili arrivano ad una stazione di servizio o anche il tempo con cui delle richieste da computer periferici arrivano ad un server. Chiameremo questi eventi *i salti*, che si verificano dunque nei suddetti *istanti-*τ.

Definizione 2.1. Indichiamo con $N(\mathrm{t})$ $(t \geq 0)$ il numero di *salti* che si verificano nell'intervallo di tempo $[0,t]$ e supponiamo che $N(0) = 0$. Il processo $\{N(\mathrm{t})\colon\ t \geq 0\}$ è chiamato *Processo di Conteggio.*

Tutti i Processi di Conteggio verificano le proprietà seguenti:

- Per ogni $t \geq 0$ il numero $N(\mathrm{t})$ è a valori interi positivi.
- La funzione $t \mapsto N(\mathrm{t})$ è crescente.
- Per tutte le coppie (a,b) $(0 < \mathrm{a} < \mathrm{b})$, la differenza $N(\mathrm{b}) - N(\mathrm{a})$ rappresenta il numero di *salti* che si verificano nell'intervallo di tempo]a,b].

Siano $I_1, \dots, I_k$ gli intervalli sull'asse del tempo, disgiunti oppure no; siano $N_1,\dots,N_k$ i numeri dei *salti* prodotti nei rispettivi intervalli di tempo. La κ-pla $(N_1,\dots,N_k)$ è un punto aleatorio a valori in $\mathbb{N}^k$, assumendo come distribuzione di probabilità £. Sottoponiamo simultaneamente tutti gli intervalli $I_1, \dots, I_k$, alla stessa traslazione sull'asse del tempo. Siano $I'_1, \dots, I'_k$ gli intervalli traslati e $N'_1,\dots,N'_k$ il numero dei *salti* che si verificano in questi intervalli. La κ-pla $(N'_1,\dots,N'_k)$ è un punto aleatorio a valori in $\mathbb{N}^k$, assumendo come distribuzione di probabilità £'.

Definizione 2.2. Un processo di conteggio $\{N(t) : t \geq 0\}$ è detto *a incrementi stazionari* qualunque sia κ, qualunque sia la κ-pla $(I_1, \dots, I_k)$ e qualunque sia la traslazione, le distribuzioni £ e £' coincidono.

Definizione 2.3. Un processo di conteggio è detto *a incrementi indipendenti*, se il numero dei *salti* che si verificano in intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti.

Definizione 2.4. Un processo di conteggio è detto *localmente continuo in probabilità*, se per ogni $t \geq 0$, si ha:

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathrm{P}\{N(\mathrm{t}+\mathrm{h}) - N(\mathrm{t}) \geq 1\} = 0.$$

Definizione 2.5. Un processo di conteggio $\{N(\mathrm{t})\colon t \geq 0\}$ è chiamato *Processo di Poisson, di intensità* $\lambda > 0$, se si verificano le proprietà seguenti:

1. $N(0) = 0$;

2. Il processo è a incrementi indipendenti;

3. Il numero di *salti* che si verificano in un intervallo di tempo di lunghezza $t \geq 0$ segue la distribuzione di Poisson di parametro λt, vale a dire, che per ogni $s \geq 0$ ed ogni $t \geq 0$, si ha:

$$\mathrm{P}\{N(\mathrm{s}+\mathrm{t}) - N(\mathrm{s}) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad (n \geq 0).$$

Ecco alcune proprietà che verificano un processo di Poisson:

Proposizione 2.0.2. *Un processo di Poisson è a incrementi stazionari.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per due intervalli]a,c],]b,d], con a < b ≤ c < d. Siccome il processo è a incrementi indipendenti, si ha che:
$P\{N(c) - N(a) = \kappa, N(d) - N(b) = \ell\ \}=$
$= \sum P\{N(b) - N(a) = i_1, N(c) - N(b) = i_2, N(d) - N(c) = i_3\}$
$= \sum P\{N(b) - N(a) = i_1\}P\{N(c) - N(b) = i_2\}P\{N(d) - N(c) = i_3\}$
$= \sum e^{-\lambda(d-a)} \frac{(\lambda(b-a))^{i_1}}{i_1!} \frac{(\lambda(c-b))^{i_2}}{i_2!} \frac{(\lambda(d-c))^{i_3}}{i_3!}$
dove la somma è su tutte le sequenze (i_1, i_2, i_3) di interi tali che $i_1 + i_2 = \kappa$ e $i_2+i_3 = \ell$. Questa espressione non dipende né dalla lunghezza degli intervalli considerati, nè dalla loro posizione sulla destra. □

Proposizione 2.0.3. *Un processo di Poisson è localmente continuo in probabilità.*

Dimostrazione. Dato che un processo di Poisson è a incrementi stazionari, si ha che: $P\{N(\mathrm{t} + \mathrm{h}) - N(\mathrm{t}) \geq 1\ \} = P\{N(\mathrm{h}) - N(0) \geq 1\ \} =$
$=P\{N(\mathrm{h}) \geq 1\ \} = 1 - P\{N(\mathrm{h}) = 0\} = 1 - e^{-\lambda h} \longrightarrow 0$, quando h tende a 0. □

Si nota così che un processo di Poisson verifica le quattro proprietà:
(1) $N(0) = 0$; (2) è a incrementi indipendenti; (3) è a incrementi stazionari; (4) è localmente continuo in probabilità.
É notevole che queste quattro proprietà, malgrado il loro carattere qualitativo, siano sufficienti ad assumere che un processo di conteggio sia di Poisson.

Definizione 2.6. Sia $\{N(t) : t \geq 0\}$ un processo di Poisson di intensità $\lambda > 0$. Chiamiamo T_1 il tempo di attesa del primo *salto* (a partire da $t = 0$) e T_n $(n \geq 2)$ la durata di tempo che separa $l'(n-1)$-esimo dall'n-esimo *salto*. In più diciamo che i T_n sono gli intervalli. Alla successione (T_n) $(n \geq 1)$, associamo la successione (S_n) $(n \geq 0)$ definita come: $S_0 := 0$ e $S_n := T_1 + \ldots + T_n$ $(n \geq 1)$. Di conseguenza, S_n $(n \geq 1)$ è l'istante in cui si verifica l'n-esimo *salto* o ancora il tempo di attesa dell'n-esimo *salto* (a partire da $t = 0$).

Teorema 2.0.4. *La successione* (T_n) $(n \geq 1)$ *è costituita da variabili aleatorie indipendenti, ognuna delle quali segue la distribuzione esponenziale di parametro* λ $(\lambda > 0)$.

Dimostrazione. Mostriamo che, per ogni $n \geq 1$, la densità congiunta del vettore $(T_1, \ldots, T_n)$ è il prodotto $\lambda e^{-\lambda t_1} \ldots e^{-\lambda t_n}$ di n densità esponenziali di parametro λ. Il cambiamento di variabile $t_k \mapsto s_k$, dove $s_k := t_1 + \ldots + t_k$, $(1 \leq k \leq n)$ mostra che la densità congiunta di $(T_1, \ldots, T_n)$ nel punto $(t_1, \ldots, t_n)$ è uguale alla densità congiunta di $(S_1, \ldots, S_n)$ nel punto $(s_1, \ldots, s_n)$, dove $s_1 \leq \ldots \leq s_n$. Calcoliamo quest'ultima densità. Per fare questo consideriamo l'evento:

$$A_n := \{S_1 \in [s_1, s_1 + h_1[, S_2 \in [s_2, s_2 + h_2[, \ldots, S_n \in [s_n, s_n + h_n[\ \},$$

dove gli s_i ed gli h_i sono stati scelti in modo che $0 < s_1 < s_1 + h_1 < s_2 < s_2 + h_2 < \ldots < s_n < s_n + h_n$. Allora $\mathrm{P}(A_n)$ è la probabilità della congiunzione degli eventi:
zero *salti* in $[0, s_1[$ ed esattamente un *salto* in $[s_1, s_1 + h_1[$;
zero *salti* in $[s_1 + h_1, s_2[$ ed esattamente un *salto* in $[s_2, s_2 + h_2[$;
$\ldots$;
zero *salti* in $[s_{n-1} + h_{n-1}, s_n[$ ed esattamente un *salto* in $[s_n, s_n + h_n[$.
Quindi:

$$\mathrm{P}(A_n) = e^{-\lambda s_1} e^{-\lambda h_1} \lambda h_1 e^{-\lambda(s_2 - s_1 - h_1)} e^{-\lambda h_2} \lambda h_2 \ldots e^{-\lambda(s_n - s_{n-1} - h_{n-1})} e^{-\lambda h_n} \lambda h_n$$

$$= e^{-\lambda s_n} e^{-\lambda h_n} \lambda^n h_1 \ldots h_n;$$

Quindi, dividendo per $h_1 \ldots h_n$ e facendo tendere h_i a 0, si ha:

$$\frac{1}{h_1 \ldots h_n} \mathrm{P}(A_n) \to \lambda^n e^{-\lambda s_n},$$

che è la densità di $(S_1, \ldots, S_n)$. Con $s_n = t_1 + \ldots + t_n$, si deduce che $\lambda e^{-\lambda t_1} \ldots \lambda e^{-\lambda t_n}$ è la densità di $(T_1, \ldots, T_n)$. □

Dal teorema precedente risulta che $\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}[S_n - S_{n-1}] = \frac{1}{\lambda}$. Così, l'intensità λ è ancora l'inverso dell'esperienza matematica dell'intervallo di tempo che separa due *salti* consecutivi.

Teorema 2.0.5. *Per ogni $n \geq 1$, la variabile $S_n = T_1 + \ldots + T_n$, che rappresenta l'istante in cui si verifica l'n-esimo salto, ha densità:*

$$f_{S_n}(s) = \begin{cases} \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{\lambda s} (\lambda s)^{n-1}, & \textit{se } s \geq 0; \\ 0, & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. La variabile S_n è, in effetti, la somma di n variabili aleatorie indipendenti, che seguono tutte la distribuzione esponenziale di parametro λ. S_n segue dunque una distribuzione gamma di parametri (n, λ). □

Questo teorema permette di dare un'altra definizione del processo di Poisson, che ha il vantaggio di mostrare che possiamo costruire effettivamente un processo di Poisson a partire da una serie di variabili aleatorie con distribuzione esponenziale. Questa costruzione è argomento del capitolo seguente.

Capitolo 3

Processo di Poisson, Seconda Definizione

Consideriamo la successione (T_n) $(n \geq 1)$, un processo stocastico di variabili aleatorie indipendenti, delle quali ognuna segue la distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$.
La si associa ad un processo di conteggio $\{N(t) : t \geq 0\}$ e si conviene che l'n-esimo *salto* si verifichi all'istante $S_n := T_1 + \ldots + T_n$. Chiedendo che $S_0 := 0$, si assume quindi:

$$N(t) := \sum_{n \geq 1} I_{\{S_n \leq t\}}.$$

Da queste condizioni, si ha:

Teorema 3.0.6. *Il processo di conteggio* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *così definito è un processo di Poisson di intensità* λ.

La dimostrazione è il risultato delle due Proposizioni seguenti.

Proposizione 3.0.7. *Per ogni* $t > 0$*, la variabile aleatoria* $N(t)$*, che rappresenta il numero di salti che si verificano nell'intervallo di tempo* $[0, t]$*, segue la distribuzione di Poisson di parametro* λt.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sull'identità:

$$\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\} \qquad (t > 0, n \geq 0).$$

Effettivamente, l'istante in cui si verifica l'n-esimo *salto* è minore o uguale a t, se e solo se, nell'intervallo $[0,t]$ si sono verificati almeno n *salti*. Si deduce che:

$$\mathrm{P}\{N(t) = n\} = \mathrm{P}\{N(t) \geq n\} - \mathrm{P}\{N(t) \geq n+1\} =$$

$$= \mathrm{P}\{S_n \leq t\} - \mathrm{P}\{S_{n+1} \leq t\};$$

Allora, per il Teorema 2.0.4., si ha che:

$$\mathrm{P}\{N(t) = n\} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!}\, dx$$

$$= \int_0^t d(\lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!}) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!}.$$

$\square$

Dati un intero $m \geq 1$, una serie (t_n) $(n \geq 1)$ di numeri reali positivi ed una serie (i_n) $(n \geq 1)$ di interi positivi. Per $n \geq 1$, definiamo $s_n := t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ ed ancora $s_0 := 0$.

Proposizione 3.0.8. *La probabilità che si verifichino i_1 salti in $[0, s_1]$, i_2 salti in $]s_1, s_2]$, ..., i_m salti in $]s_{m-1}, s_m]$ è data da:*
$\mathrm{P}\{N(s_1) = i_1, N(s_2) - N(s_1) = i_2, \ldots, N(s_m) - N(s_{m-1}) = i_m\} =$

$$= \frac{e^{-\lambda t_1} (\lambda t_1)^{i_1}}{i_1!} \frac{e^{-\lambda t_2} (\lambda t_2)^{i_2}}{i_2!} \cdots \frac{e^{-\lambda t_m} (\lambda t_m)^{i_m}}{i_m!}$$

Quindi per ogni $0 \leq s_1 < \ldots < s_m$ le variabili aleatorie $N(s_1), N(s_2) - N(s_1), \ldots, N(s_m) - N(s_{m-1})$ sono indipendenti.

Prima di dare la dimostrazione, dimostriamo il seguente lemma.

Lemma 3.0.9. *Siano: i un intero tale che $i \geq 2$ ed s e t due interi reali tali che $t \geq 0$. Allora:*

$$\iint_{s<y\leq x\leq s+t} \lambda^2 \frac{(\lambda(x-y))^{i-2}}{(i-2)!}\, dydx = \frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

Dimostrazione. Si tratta di calcolare un integrale doppio in un triangolo:

$$\iint_{s<y\leq x\leq s+t} \lambda^2 \frac{(\lambda(x-y))^{i-2}}{(i-2)!}\, dydx = \int_s^{s+t} dy \int_y^{s+t} \lambda^2 \frac{(\lambda(x-y))^{i-2}}{(i-2)!}\, dx$$
$$= \int_s^{s+t} \lambda^i \frac{(s+t-y)^{i-1}}{(i-1)!}\, dy = \frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

□

Dimostrazione. (Proposizione 3.0.8) Per $m = 1$ la Proposizione è vera e dimostrata dalla Proposizione 3.0.7. Poniamo:

$$A := \{N(s_1) = i_1, N(s_2) - N(s_1) = i_2, \dots, N(s_m) - N(s_{m-1}) = i_m\}$$

e definiamo le variabili seguenti:

X_1 := maggiore τ-istante in $[0, s_1]$, se $i_1 \geq 1$. Non definito se $i_1 = 0$;

per $k = 1, 2, \dots, m-1$,

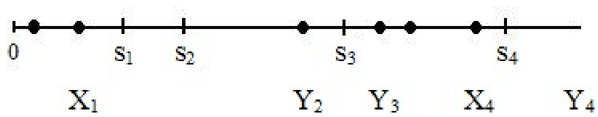
Y_k := minore τ-istante in $]s_k, s_{k+1}]$, se $i_{k+1} \geq 1$. Non definito se $i_{k+1} = 0$;

per $k = 2, \dots, m$,

X_k := maggiore τ-istante in $]s_{k-1}, s_k]$, se $i_k \geq 2$. Non definito se $i_k = 0$ o 1;

Y_m := minore τ-istante oltre s_m.

Nell'esempio seguente, dove $m = 4$ e $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (2, 0, 1, 3)$, i *salti* sono rappresentati da dei pallini. Le variabili Y_1 e X_2 non sono definite, perché $i_2 = 0$, la variabile X_3 non è definita, perché $i_3 = 1$.



L'evento A si può ancora esprimere come:

$\{0 \leq X_1 \leq s_1 < Y_1 \leq X_2 \leq s_2 < Y_2 \leq X_3 \leq s_3 < \dots$

$$\dots \leq s_{m-1} < Y_{m-1} \leq X_m \leq s_m < Y_m\},$$

con la convenzione seguente:

1. La relazione $''X_1 \leq''$ scompare dall'evento A, se $i_1 = 0$;
2. Per $k = 1, \ldots, m-1$, la relazione $'' < Y_k''$ scompare dall'evento A, se $i_{k+1} = 0$;
3. Per $k = 2, \ldots, m$, la relazione $''X_k \leq''$ scompare dall'evento A, se $i_k = 0, 1$.

Nell'esempio trattato, l'evento A si esprime come:

$$\{0 \leq X_1 \leq s_1 < s_2 < Y_2 \leq s_3 < Y_3 \leq X_4 \leq s_4 < Y_4\}.$$

Chiamiamo $Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_l$ la serie di variabili X_k, Y_k che appaiono *effettivamente* in A. Per la stessa costruzione, $Z_l = Y_m$ ed esiste una serie strettamente crescente di interi $1 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_l$ tale che:
$Z_1 = T_1 + \ldots + T_{b_1}, \quad Z_2 - Z_1 = T_{b_1+1} + \ldots + T_{b_2}, \ldots$

$$\ldots, Z_l - Z_{l-1} = T_{b_{l-1}+1} + \ldots + T_{b_l}.$$

Poniamo $a_1 := b_1,\ a_2 := b_2 - b_1,\ \ldots,\ a_l := b_l - b_{l-1}$. Allora $a_l := 1$, dato che $Z_l = Y_m$. Come le variabili aleatorie T_i sono mutualmente indipendenti, per ipotesi, le variabili aleatorie $Z_1, Z_2 - Z_1, \ldots, Z_l - Z_{l-1}$ lo sono anch'esse. In più, Z_1 ha distribuzione gamma di parametri (λ, a_1), $Z_2 - Z_1$ distribuzione gamma di parametri $(\lambda, a_2), \ldots$, infine $Z_l - Z_{l-1}$ una distribuzione gamma di parametri (λ, a_l).
Il vettore $(Z_1, Z_2 - Z_1, \ldots, Z_l - Z_{l-1})$ ha quindi una densità che è il prodotto di densità di distribuzione gamma delle sue componenti. Altrimenti, la jacobiana di passaggio del vettore $(Z_1, Z_2 - Z_1, \ldots, Z_l - Z_{l-1})$ al vettore $Z := (Z_1, \ldots, Z_l)$ è uguale a 1. Di conseguenza, la densità di questo ultimo vettore, per $z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, \ldots, z_l \geq 0$, è uguale a
$\frac{\lambda}{(a_1-1)!} e^{-\lambda z_1} (\lambda z_1)^{a_1-1} \frac{\lambda}{(a_2-1)!} e^{-\lambda(z_2-z_1)} (\lambda(z_2-z_1))^{a_2-1} \ldots \frac{\lambda}{(a_l-1)!} e^{-\lambda(z_l-z_{l-1})} (\lambda(z_l - z_{l-1}))^{a_l-1}$, ed ancora, posto $z_0 := 0$, una espressione uguale è:

$$\prod_{j=1}^{l-1} \lambda \frac{(\lambda(z_j - z_{j-1}))^{a_j-1}}{(a_j-1)!} \lambda e^{-\lambda z_l},$$

dato che $a_l = 1$. Per trovare la probabilità di A, non ci resta che integrare questa densità sull'evento A.
Se $Z_1 = X_1$, allora $a_1 = i_1 \geq 1$ e $0 \leq X_1 \leq s_1$; nella produttoria precedente, il termine corrispondente a $j = 1$ vale $\lambda\frac{(\lambda x_1)^{i_1-1}}{(i_1-1)!}$. Per lo stesso motivo, se $Z_j = Y_k$ e $Z_{j+1} = Y'_k$ con $k' > k$, allora $a_j = 1$ e $s_k < Y_k \leq s_{k+1}$; in più, il termine indicato con j vale semplicemente λ. Infine, se $Z_j = Y_k$ e $Z_{j+1} = X'_k$ con $k' > k$, allora $k' = k+1$, e $a_j = 1, a_{j+1} = i_{k+1} - 1$ e $s_k < Y_k \leq X_{k+1} \leq s_{k+1}$; in più, il prodotto di due termini consecutivi, indicati da j, $j+1$ vale:
$\lambda^2\frac{(\lambda(x_{k+1}-y_k))^{i_{k+1}-2}}{(i_{k+1}-2)!}$. Con $Z_l = Y_m$ e $s_m < Y_m$, l'integrazione della densità di Z su A è uguale a:

$$\int_0^{s_1} \lambda\frac{(\lambda x_1)^{i_1-1}}{(i_1-1)!}dx_1 \times \prod_{1\leq k\leq m-1,\ i_{k+1}\geq 1} H_k \times \int_{s_m}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y_m} dy_m,$$

dove il primo integrale scompare se $i_1 = 0$ e dove:

$$H_k = \begin{cases} \iint_{s_k<y_k\leq x_{k+1}\leq s_{k+1}} \lambda^2\frac{(\lambda(x_{k+1}-y_k))^{i_{k+1}-2}}{(i_{k+1}-2)!}\, dy_k dx_{k+1}, & \text{se } i_{k+1}\geq 2,\\ \int_{s_k<y_k\leq s_{k+1}} \lambda\, dy_k, & \text{se } i_{k+1} = 1. \end{cases}$$

Il primo integrale del prodotto vale $\frac{(\lambda s_1)^{i_1}}{i_1!}$, che si riduce ad 1 per $i_1 = 0$ e l'ultimo integrale è pari a $e^{-\lambda s_m}$. L'integrale doppio vale $H_k = \frac{(\lambda t_{k+1})^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!}$, per il Lemma (3.0.9), ed anche per $i_{k+1} = 1$ e per $i_{k+1} = 0$ H_k ha lo stesso valore. Allora l'integrazione della densità di Z su A è uguale a:

$$\frac{(\lambda s_1)^{i_1}}{i_1!} \times \Big(\prod_{1\leq k\leq m-1} \frac{(\lambda t_{k+1})^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!}\Big) \times e^{-\lambda s_m} = \prod_{1\leq k\leq m} e^{-\lambda t_k}\frac{(\lambda t_k)^{i_k}}{i_k!},$$

dato che $s_1 = t_1$ e $s_m = t_1 + t_2 + \ldots + t_m$. □

In più aggiungiamo che :
N ha incrementi stazionari, tali che $\forall\, b > a$, $N_b - N_a$ ha la stessa distribuzione di N_{b-a}.

Bibliografia

[1] Andrea Pascucci. *Calcolo stocastico per la finanza*. Springer-Verlag Italia, Milano, 2008.

[2] R.Cont, P.Tankov. Financial modelling with jump processes. Chapman & hall/crc financial mathematics series.

[3] Dominique Foata e Aimé Fuchs. *Processus stochastiques, Processus de Poisson, chaines de Markov et martingales*. Dunod, Parigi, 2002.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare tutte le persone che hanno reso possibile la mia laurea. Incominciando dai miei genitori, che mi hanno sostenuto economicamente e che mi hanno permesso di scegliere la mia strada, sia nello studio che nella vita. Ringrazio tutti i membri della mia famiglia, compreso mio fratello Lorenzo ed il cucciolo di casa Zeus.
Sono molto riconoscente a Matteo, che oltre ad essere diventato un mio carissimo amico è colui che mi ha sempre appoggiato sia nella vita privata, sia nello studio, consigliandomi ed aiutandomi nei momenti di difficoltà. Ovviamente ringrazio anche Sara, Noemi e Gioele che mi hanno visto e sicuramente mi vedranno ancora in casa loro.
Ringrazio i miei vecchi amici in particolar modo: Bianca, Beatrice, Anastasia, Riccardo e particolarmente Andrea alias Voghi, Peter e Valentina. Persone senza le quali non potrei vivere. Amici, aggiunti di recente, si sono resi indispensabili, come Silvia, Vittorio, Dario alias Darioz, al quale devo molto tra cui aver trovato il mio unico e vero nome. Ringrazio il gruppo Controtendenza, con i quali ho condiviso e condividerò momenti colmi di gioia, ma anche di fustrazione. Tra di loro mi sento di dover citare: Pier, Cristiano, Stefano, Enrico, Diego, Claudio, Ugo, Giovanni e Matteo, per me l'unico Biondo.
Grazie davvero di cuore, che la vita vi sorrida e che non incontriate difficoltà. Un abbraccio fortissimo a tutti e sempre forza Bologna.