ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

PROBLEMI di OTTIMIZZAZIONE ECONOMICA:

CALCOLO delle VARIAZIONI, CONTROLLO OTTIMO, PROGRAMMAZIONE DINAMICA.

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Angelo Favini

Presentata da:
Martina Dal Borgo

II Sessione
Anno Accademico 2010/11

Introduzione

L'importanza della matematica nel suo impiego per gli economisti di area aziendale, gestionale ha motivato il mio interesse per questo nuovo e stimolante campo di applicazione.
La trattazione analitica di modelli economici gestionali e di ottimizzazione costituisce perció l'argomento centrale di questa tesi.
Nei tre capitoli in cui é articolata, cercheró di fornire gli strumenti matematici della teoria e dalle tecniche di ottimizzazione, essenziali per affrontare l'impostazione e la soluzione di alcuni esempi.
I metodi di ottimizzazione del calcolo variazionale e del controllo ottimo vengono trattati rispettivamente nel I e nel II capitolo; il III riguarda la tecnica della programmazione dinamica.
In ogni capitolo gli strumenti messi a punto vengono poi concretamente applicati in un specifico problema economico.
Piú precisamente nel I capitolo, impostato un problema varizionale di MINIMO COSTO PER UN PRODUTTORE, forniremo le condizioni necessarie per risolverlo.
Nel II capitolo daremo un esempio di STRATEGIA DI PRODUZIONE-VENDITA e servendoci della teoria di base del Controllo Ottimo arriveremo a considerazioni economiche sul modello proposto.
Il III capitolo introduce la tecnica piú interessante per le applicazioni economiche, ovvero la Programmazione Dinamica, in quanto consente, come suggerisce l'aggettivo *dinamica*, di tenere conto degli stadi di evoluzione temporale o logica di un processo. Applicheremo poi la tecnica ad un problema

di PRODUZIONE-GESTIONE DEL MAGAZZINO.

Indice

Capitolo 1

Calcolo delle Variazioni

Il Calcolo delle Variazioni nasce dall'esigenza di generalizzare la teoria elementare dei massimi/minimi di funzioni a una o piú variabili: si occupa della ricerca di punti estremali di funzionali, cioé di funzioni aventi come dominio una spazio di funzioni ammissibili anziché una regione dello spazio euclideo. Partiamo illustrando un semplice esempio:

1.1 Problema di Calcolo delle Variazioni

1.1.1 esempio: MINIMO COSTO DI PRODUZIONE

Si tratta di un problema di minimo costo per un produttore. Un'azienda riceve a tempo $t = 0$ un ordine di consegna di B unitá di beni che essa produce a tempo $T > 0$. Indichiamo con $x(t)$ la quantitá dei merce prodotta al tempo t. Il costo di produzione istantaneo che l'azienda sostiene sará dato da:

$$c(t) = c_1\dot{x}^2(t) + c_2x(t) \qquad c_1, c_2 > 0 \tag{1.1}$$

dove:

$c_1\dot{x}^2(t)$ é il COSTO EFFETTIVO DI PRODUZIONE

$c_2x(t)$ é il COSTO DI STOCCAGGIO DELLA MERCE

Se supponiamo che il tasso di inflazione δ sia nullo, il costo complessivo di produzione nell'intervallo $[0, T]$ sará dato dall'integrale:

$$C(x) = \int_0^T (c_1 \dot{x}^2(t) + c_2 x(t))dt \tag{1.2}$$

dove le condizioni al contorno:

$$x(0) = 0 \text{ \textit{(dispinibilitá iniziale di merce nulla)}}, \qquad x(T) = B \tag{1.3}$$

esprimono l'aumento del livello di merce necessario per evadere l'ordine ricevuto.
Lo scopo dell'azienda é quello di individuare il piano di produzione che minimizzi l'integrale costo 1.2 e soddisfi le 1.3.

1.2 Problemi di calcolo delle varizioni

1.2.1 problema ad n VARIABILI, con ESTREMI FISSI

Sia dato un problema la cui evoluzione é descritta dalla funzione:

$$x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \; n \geq 1 \qquad x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \tag{1.4}$$

La funzione $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, incognita del problema, é costituita dalle n variabili x_i, funzioni dipendenti dalla variabile t e prende il nome di **variabile di stato** (o traiettoria).
Richiediamo che la traiettoria passi per i punti di coordinate $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, .., \beta_n)$, cioé che siano verificate le *condizioni di estremi fissi*

$$x_i(t_0) = \alpha_i \qquad x_i(t_1) = \beta_i \tag{1.5}$$

Consideriamo ora il funzionale, detto **funzionale di obiettivo** J dato dall'integrale:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(\dot{x_1}, \dot{x_2}, \ldots, \dot{x_n}, x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad \dot{x_i}(t) = \frac{dx_i}{dt} \tag{1.6}$$

dove F é una funzione assengata di $x_1, \ldots, x_n$, $\dot{x_1}, \ldots, \dot{x_n}$ (che descrivono la dinamica del sistema) e della variabile indipendente t, supposta ammettere $\forall i = 1, \ldots, n$ derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{x_i}}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$ continue.
F é detta **Lagrangiana** del sistema.

PROBLEMA:
determinare la traiettoria di equazione $\bar{x} = (\bar{x_1}(t), \ldots, \bar{x_n}(t))$ che rappresenta un punto estremale per il funzionale obiettivo J, ovvero minimizza/massimizza l'integrale 1.6 e soddisfa le condizioni agli estremi date dalle 1.5.

Cominciamo allora a fornire una condizione necessaria affinché una funzione sia massimizzante o minimizzante per il piú semplice problema di Calcolo delle Variazioni.
Premettiamo il seguente *Lemma* utile alla dimostrazione del Teorema 1.1.

Lemma 1. *Sia $\eta(x)$ una funzione differenziabile $\forall x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, con $\eta(a) = \eta(b) = 0$.*
Se $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ e vale

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0, \qquad \forall \eta(x) \tag{1.7}$$

allora $f \equiv 0$ su $[a, b]$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f > 0$ in un punto di $]a, b[$, allora $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $f > 0$ su $[c_1, c_2]$.
Consideriamo come $\eta(x)$ la funzione seguente

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, \quad a \le x \le c_1 \\ (x - c_1)^2 (x - c_2)^2, \ c_1 \le x \le c_2 \\ 0, \quad c_2 \le x \le b \end{cases}$$

Ora $\eta(x)$ cosí scelta é differenziabile, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ e

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)(x - c_1)^2 (x - c_2)^2 dx > 0$$

poiché $f(x)\eta(x) > 0 \quad \forall x \in]c1, c_2[$.
Ció contraddice l'ipotesi 1.7 il che implica $f \equiv 0$ su $[a, b]$. $\square$

Il teorema chiave del Calcolo delle Variazioni classico é l'equazione di Eulero-Lagrange. Questa corrisponde a una condizione di stazionarietá per il funzionale:

Teorema 1.1. *Nelle precedenti condizioni delle sezione 1.2.1, condizione necessaria affinché il funzionale J ammetta un punto estremale é che siano soddisfatte le* n *equazioni seguenti:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big) = 0 \qquad i = 1, .., n \tag{1.8}$$

*note come **equazioni di Eulero-Lagrange**.*

Dimostrazione. Dimostraimo il teorema nel caso in cui $n = 1$. L'idea centrale della dimostrazione é semplice e si basa sull'analisi delle piccole varizioni attorno ad una presunta soluzione.
Supponiamo sia nota la curva soluzione C_0 definita dall'equazione $x_0(t)$ dove

- $x_0(t_0) = \alpha$, $x_0(t_1) = \beta$
- $x_0(t)$ sia punto estremale per J

Consideriamo la famiglia di curve $\{C_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ dove C_ϵ é definita dall'equazione

$x_\epsilon(t) = x_0(t) + \epsilon\eta(x)$, con $\eta(x)$ arbitraria ma fissata funzione $\mathcal{C}^1_{[t_0,t_1]}$
t.c. $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$

rappresenta una piccola variazione della curva C_0.
Notiamo come la condizione $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ assicuri che tutte le curve della famiglia soddisfino le condizioni sugli estremi.
Ora il valore dell'integrale 1.6 per la curva C_ϵ é dato da:

$$\mathcal{J}_\eta(\epsilon) := J(x_\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} F(x_0 + \epsilon\eta, \dot{x}_0 + \epsilon\dot{\eta}, t)dt \tag{1.9}$$

Se fissiamo x_0 , J sará funzione di ϵ, cioé $J(x_\epsilon) = J(\epsilon)$, possiamo perció considerare l'applicazione:

$$\mathcal{J}_\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$$

$$\epsilon \to J(\epsilon)$$

La convenienza di introdurre la funzione $\mathcal{J}_\eta$ é evidente: una cosa é ragionare con il funzionale J, che é una funzione di funzione, altra cosa con $\mathcal{J}_\eta$ funzione di variabile reale alla quale possiamo applicare i risultati noti.
Infatti trattandosi $\mathcal{J}_\eta$ di una funzione reale di variabile reale condizione necessaria affinché $\bar{\epsilon}$ sia estremante é che sia un punto critico, cioé che $\frac{d\mathcal{J}_\eta}{d\epsilon}(\bar{\epsilon}) = 0$. Si osservi che per la nostra scelta di C_ϵ, $\bar{\epsilon} = 0$ rappresenta un punto di massimo/minimo per la $\mathcal{J}_\eta$ (rispettivamente la x_0 rappresenta una funzione massimante/minimante per J) quindi dovremo avere

$$\frac{d\mathcal{J}_\eta}{d\epsilon}(0) = 0$$

e questo deve essere vero $\forall \eta$ scelta come specificato.
Differenziando rispetto a ϵ la 1.9 ed utilizzando la regola di Leibniz otteniamo:

$$\frac{\mathcal{J}_\eta}{d\epsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \{F_x(x_0 + \epsilon\eta, \dot{x}_0 + \epsilon\dot{\eta}, t) + \dot{\eta} F_{\dot{x}}(x_0 + \epsilon\eta, \dot{x}_0 + \epsilon\dot{\eta}, t)\} dt$$
$$\frac{\mathcal{J}_\eta}{d\epsilon}(0) = \int_{t_0}^{t_1} \{F_x(x_0, \dot{x}_0, t) + \dot{\eta} F_{\dot{x}}(x_0, \dot{x}_0, t)\} dt = \int_{t_0}^{t_1} (F_x + \dot{\eta} F_{\dot{x}}) dt$$

e integrando per parti:

(1.10)
$$\eta F_{\dot{x}}|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} [\eta F_x + \eta \frac{d}{dt}(F_{\dot{x}})] dt = 0$$
$$\eta(t_1) F_{\dot{x}}|_{t=t_1} - \eta(t_0) F_{\dot{x}}|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \eta [F_x - \frac{d}{dt}(F_{\dot{x}})] dt = 0$$

ma $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta [F_x - \frac{d}{dt}(F_{\dot{x}})] dt = 0$$

Dal Lemma1 otteniamo:

$$F_x - \frac{d}{dt}(F_{\dot{x}}) = 0$$

Nel caso in cui $n > 1$ lavorando su ogni componente x_i della traiettoria otterremo le n equazioni di Eulero- Lagrange 1.8 □

1.2.2 problema ad n VARIABILI, con ESTREMI MOBILI

In questa sezione generalizziamo i risultati ottenuti nella Sezione 1.2.1.
Lo scopo é sempre quello di determinare la curva di equazione $\bar{x} = (\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_n(t))$ definita su $[t_0, t_1]$ che rappresenti un punto estremale del funzionale J, ma ora non poniamo alcuna condizione sui valori che questa deve assumere agli estremi dell'intervallo di definizione, cioé $\bar{x}_i(t_0)$ ed $\bar{x}_i(t_1)$ sono liberi di assumere qualsiasi valore.

Sempre per $n = 1$ possiamo ripetere un ragionamento analogo a quanto visto nella dimostrazione del Teorema1.1, con la sola differenza che cade la condizione $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$.
Riprendendo l'equazione 1.10:

$$\eta(t_1)F_{\dot{x}}|_{t=t_1} - \eta(t_0)F_{\dot{x}}|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \eta[F_x - \frac{d}{dt}(F_{\dot{x}})]dt = 0$$

poiché la soluzione del problema con estremi mobili sará anche soluzione del problema con estremi fissi (dati da quelli della soluzione medesima) dovrá comunque soddisfare l'equazione di Eulero Lagrange, per cui la 1.10 porta a:

$$\eta(t_1)F_{\dot{x}}|_{t=t_1} - \eta(t_0)F_{\dot{x}}|_{t=t_0} = 0 \tag{1.11}$$

La 1.11 deve valere $\forall \eta$ differenziabile, il che significa:

$$\eta(t_1)F_{\dot{x}}|_{t=t_1} = 0 \qquad (\eta(t_0)F_{\dot{x}}|_{t=t_0} = 0)$$

da cui, poiché $\eta(t_1)$ (o $\eta(t_0)$) é arbitrario, concludiamo:

$$F_{\dot{x}} = 0 \text{ per } t = t_1 \qquad (t = t_0)$$

ovvero:

(1.12) $\qquad F_{\dot{x}} = 0 \quad$ per ogni punto in cui la x non é specificata

La 1.12 prende il nome di **condizione di trasversalitá**.
Per n qualunque avremo:

(1.13) $\qquad F_{\dot{x}_i} = 0 \quad$ per ogni x_i non fissata

Riassumendo, supponiamo ad esempio che

$$x_i(t_0) = \alpha_i, \quad i = 1, .., n \qquad x_k(t_1) = \beta_k, \quad k = 1, .., q \leq n$$

affinché il problema ammetta soluzione dovranno essere soddistatte:

i) le n equazioni di Eulero Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big)$$

ii) le n+q condizioni agli estremi

$$x_i(t_0) = \alpha_i, \quad i = 1, .., n \qquad x_k(t_1) = \beta_k, \quad k = 1, .., q \leq n$$

iii) le n-q condizioni di trarversalitá

$$F_{\dot{x}_k} = 0 \qquad k = q + 1, .., n$$

1.3 soluzione: MINIMO COSTO DI PRODUZIONE

Riprendiamo il problema visto nell Sezione 1.1.1: osservato che si tratta di un problema di ottimizzazione del tipo trattato nella Sezione 1.2.1, cerchiamo di determinarne la soluzione.
Ricordiamo che il funzionale da minimizzare era il seguente:

$$C(x) = \int_0^T (c_1\dot{x}^2(t) + c_2 x(t))dt$$

Essenso la funzione integranda $F(\dot{x}(t), x(t), t)$ data da:

$$F(\dot{x}(t), x(t), t) = c_1 \dot{x}^2(t) + c_2 x(t)$$

L'equazione di Eulero Lagrange diviene:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big) = c_2 - \frac{d}{dt}(2c_1\dot{x}(t)) \quad = c_2 - 2c_1\ddot{x}(t) = 0$$

da cui:

$$\ddot{x}(t) = \frac{c_2}{2c_1}$$

Integrando due volte otteniamo:

$$x(t) = \frac{c_2}{4c_1}t^2 + \alpha t + \beta$$

dove le costanti α, β sono univocamente determinate dalla condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} &x(0) = 0 \quad &&\Longrightarrow x(0) = \beta = 0 \\ &x(T) = B \quad &&\Longrightarrow x(T) = \frac{c_2}{4c_1}T^2 + \alpha T + 0 = B \quad \Longrightarrow \alpha = \frac{B}{T} - \frac{b}{4c_1}T \end{aligned}$$

Il piano di produzione

$$x(t) = \frac{c_2}{4c_1}t^2 + \Big(\frac{B}{T} - \frac{c_2}{4c_1}T\Big)T$$

é quindi un punto estremale per l'integrale 1.2. Non sappiamo peró dire ancora se lo minimizza, massimizza o nessuno dei due.
Essendo $x(t)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, certo $F \in \mathcal{C}^2$. Per appurare che la soluzione ottenuta sia di minimo possiamo utilizzare il seguente teorema, di cui diamo solo l'enunciato:

Teorema 1.2. Teorema di Mangasarian
Consideriamo il problema varizionale della Sezione 1.2.1.
Se $F \in \mathcal{C}^2([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^2)$, condizione sufficiente affinché l'estremale $x(t)$ sia minimante é che F sia strettamente convessa nelle $(x,\dot{x})$, ossia che

$$F(\dot{x} + h, x + k, t) - F(\dot{x}, x, t) > h\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + k\frac{\partial F}{\partial x} \tag{1.14}$$

In questo caso abbiamo:

$$
\begin{aligned}
F(\dot{x}+h, x+k, t) - F(\dot{x}, x, t) = c_1(\dot{x}+h)^2 + c_2(x+k) - c_1\dot{x}^2 - c_2 x &= 2c_1 h\dot{x} + c_1 h^2 + c_2 k = \\
&= h\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + k\frac{\partial F}{\partial x} + c_1 h^2 > \\
&> h\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + k\frac{\partial F}{\partial x}
\end{aligned}
$$

perció la soluzione é di minimo per l'integrale obiettivo.

Osservazione 1.1. Da un punto di vista economico é ragionevole supporre che l'accumulo del magazziono avvenga in modo monotono evitando perdite, ossia che $\dot{x}(t) > 0, \quad t \in]0, T[$.
Poiché per costruzione $\ddot{x}(t) > 0$ sará sufficiente imporre $\dot{x}(0) \geq 0$, pertanto si trova che deve essere:

$$
B \geq \frac{c_2}{4c_1}T^2 \tag{1.15}
$$

il che esprime la convenienza a produrre se il quantitativo ordinato é sufficentemente grande.

Capitolo 2

Controllo Ottimo

La teoria del controllo ottimo si occupa sempre di problemi di ottimizzazione di un funzionale obiettivo, ma nasce dall'esigenza di poter introdurre delle funzioni di ingresso che, modificando l'evoluzione delle variabili di stato che descrivono il problema, controllino il sistema. Per questo a differenza che nel Calcolo Variazionale, la funzione da massimizzare (o minimizzare) dipende dal tempo e dalle variabili di stato e da un sistema di variabili di controllo, fissate dal soggetto decisore, invece che dalla dinamica stessa del sistema.

2.1 Problema di Controllo Ottimo

2.1.1 esempio: STRATEGIA DI PRODUZIONE/VENDITA

Supponiamo che in una azienda venga prodotto un unico bene e indichiamo con $x = x(t)$ la quantitá prodotta al tempo t.
Ad ogni istante le due opzioni che si pongono al gestore sono le seguenti:

- scegliere se e quale frazione della quantitá x investire per incrementare la produzione

- scegliere se e quale frazione della quantitá x vendere, fruendo di tale monetizzazione

Supponendo che, nell'intervallo temporale considerato, il prezzo di vendita rimanga costante e che la capacitá produttiva cresca proporzionalmente al tasso di reinvestimento, l'obiettivo é quello di massimizzare i profitti.
Introduciamo la funzione

$$u : [0, T] \longrightarrow [0, 1]$$

che esprime la frazione del bene prodotto che al tempo t viene reinvestita (quindi necessariamente compresa tra 0 e 1); conseguentemente,

$$(1 - u(t))x(t)$$

rappresenta la frazione di bene prodotto che viene venduta.
L'ipotesi che la capacitá produttiva cresca proporzionalmente al tasso di reinvestimento, conduce alla dinamica, espressa dalla seguente equazione differenziale, detta *vincolo*:

$$\dot{x}(t) = u(t)x(t) \tag{2.1}$$

Posto che sia $x(0) = c > 0$ e che la pianificazione aziendale sia prevista fino a un tempo $T > 0$ (*consideriamo quindi l'intervallo temporale* $[0, T]$) , in cui non possiamo fare previsioni sul valore di $x(T)$, otteniamo un problema di ottimo che consiste nel massimizzare, rispetto ad $u(t)$ il seguente *integrale obiettivo*:

$$J = \int_0^T (1 - u(t))x(t)dt \tag{2.2}$$

con cui rappresentiamo l'obiettivo di massimizzare le vendite del bene, prodotte al tasso $x(t)$, utilizzando una frazione del bene $u(t)$ per la ricerca e lo sviluppo.
La funzione di ingresso $u(t)$ ha il ruolo di *controllo*.
Lo scopo dell'azienda consiste quindi nella selezione di quella funzione $u(t)$ che massimizza l'integrale 2.2 rispettando il vincolo dato dalla 2.1.

2.2 Problemi di Controllo Ottimo

2.2.1 problema ad n VARIABILI

Sempre nelle ipotesi della Sezione 1.1.1 sia:

$$x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ n \geq 1 \qquad x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \tag{2.3}$$

la *variabile di stato* che descrive il nostro sistema ad ogni istante t.
Supponiamo che il nostro problema abbia condizioni iniziali fissate:

$$x_i(t_0) = \alpha_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

mentre le condizioni finali potrebbero non essere assegnate $\forall x_i$, cioé:

$$x_i(t_1) = \beta_i \quad \forall i = 1, \ldots, q \quad q \leq n$$

Supponiamo ancora che il nostro sistema sia influenzato (dipenda), ad ogni istante, dalla funzione:

$$u : [t_0, t_1] \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m \ m \geq 1 \tag{2.4}$$

dove:

$u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t)$ é detta **variabile di controllo** (o vettore dei controlli)

U é la **regione dei controlli ammissibili**

Fissata $u(t)$, la dipendenza della variabile di stato $x(t)$ dalla variabile di controllo $u(t)$ é data dalle equazioni differenziali:

$$\dot{x_i} = f_i(x, u, t) \qquad \text{dove} \quad f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.5}$$

dette *equazioni di stato.*
La funzione $f = (f_1, f_2, .., f_n)$ prende il nome di **vincolo** (o dinamica).
In generale, senza alcuna ipotesi su f ed u, non é detto che esista una soluzione x della dinamica, che questa soluzione sia definita in tutto $[t_0, t_1]$ e che

questa soluzione sia unica.
Dovremo ipotizzare [1] che:

- $u(t)$ sia continua eccetto al piú un numero finito di discontinuitá

$$\tau_1, .., \tau_N \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < .. < \tau_N = t_1$$

- f ammetta derivate continue per $i = 1, .., n$ e $j = 1, ..m$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f}{\partial u_j}, \dfrac{\partial f}{\partial t}$

Osservazione 2.1. I controlli u della 2.4 per cui esiste una soluzione continua x della dinamica che trasferisca il sistema da $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ad $\beta \in \mathbb{R}^q$ li chiamiamo *controlli ammissibili per α in t_0 e β in t_1.*
Vediamo di capire bene la relazione tra ***controllo*** e ***traiettoria***.
Supponiamo $f \in \mathcal{C}^1$, allora per ogni fissata funzione di controllo u, esiste ed unica [2] (a meno di una costante additiva che possiamo ricavare dalla condizione iniziale) la soluzione locale x dell'equazione . Il problema é che l'esistenza locale non garantisce nulla sull'esistenza di una traiettoria in tutto $[t_0, t_1]$. Quindi associare ad una funzione u, continua a tratti su $[t_0, t_1]$ e a valori in U, una traiettoria non é banale.
Supponiamo esista $\forall i, 1 \leq i \leq N$ la soluzione x_i dell'equazione 2.5 in $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ con dato iniziale $x_{i-1}(\tau_i) = x_i(\tau_i)$.

[1] l'esistenza della derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ e la sua continuitá in $[t_0, t_1]$, assicura che la f sia *localmente lipschitziana* rispetto ad x in $[t_0, t_1]$

[2]

Teorema 1. Sia $f = f(t, x) : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, (τ, x_τ) punto generico di D.
Se $f = (f_1, .., f_n) \in \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}^n)$ ed é localmente lipschitziana in D rispetto ad x allora esiste un intorno I di τ tale che il problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(\tau) = x_\tau \end{cases}$ *ammetta una ed una sola sola soluzione $x = F(t)$ definita in I.*
Se inoltre esiste un reale positivo c tali che

$$||f(t, x)|| \leq c(1 + ||x||) \forall (t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n,$$

allora la soluzione del problema di Cauchy é definita su tutto $[t_0, t_1]$.

Definindo la funzione $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nel seguente modo:

$$x(t) = x_i(t), \qquad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$$

essa é continua e differenziabile tranne al piú un numero finito di punti critici. Tale x prende il nome di traiettoria corrispondente al controllo u ammissibili per α in t_0 e β in t_1 .

Compreso come i controlli ammissibili per $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$ a tempo t_0 e per $\beta = (\beta_1, .., \beta_q)$ a tempo t_1, una volta specificati determinino univocamente la traiettoria di stato $x(t)$ lungo la quale avviene il trasferimento, possiamo ora considerare il funzionale obiettivo J che dipenderá quindi solo da u:

$$J : U \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.6}$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t)dt$$

dove F é supposta avere tutte le $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$, continue.

PROBLEMA:
determinare la $u(t)$ ammissible per α a tempo t_0 e β a t_1 che minimizzi/massimizzi l'integrale 2.6.
Diciamo che l' $\bar{u}(t)$ cosí determinato é il ***controllo ottimo*** per il problema. La traiettoria $\bar{x}(t)$ corrispondente al controllo ottimo, prende il nome di ***traiettoria ottima***.

Introduciamo gli n moltiplicatori di Lagrange p_i, dette anche *variabili di co-stato* e consideriamo l'*integrale aggiunto*:

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} [f_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i(f_i - \dot{x}_i)]dt \tag{2.7}$$

Definiamo anche l'**Hamiltoniana** come:

$$H = f_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i \tag{2.8}$$

2.2.2 controlli CONTINUI, e NON VINCOLATI

Vediamo ora delle condizioni necessarie di ottimalitá per il problema 2.2.1. Con le notazioni precedenti vale il seguente Teorema:

Teorema 2.1. *Nelle condizioni precedenti della Sezione 2.2.1, sia $U = \mathbb{R}^n$, sia $u \in \mathcal{C}^0([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ il controllo ottimo ed $x(t)$ la traiettoria ottima associata. Allora sono soddisfatte le seguenti:*

i) le n ***equazioni di stato*** $\dot{x}_i = f_i(x, u, t) \quad i = 1, ..., n$

ii) le n ***equazioni aggiunte*** $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$

iii) le m ***equazioni ellittiche*** $\dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0$

iv) le n-q ***condizioni di trasversalitá*** $p_k(t_1) = 0 \quad k = q + 1, .., n$

Dimostrazione. L'integrale 2.7 diventa:

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} [H - \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{x}_i] dt \tag{2.9}$$

Ora la funzione integranda

$$F = H - \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{x}_i$$

é una funzione nelle $n+m$ variabili x_i ed u_j: abbiamo un problema di Calcolo delle Varizioni in $n+m$ variabili e dovranno essere quindi soddisfatte le $n+m$ equazioni di Eulero Lagrange seguenti:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_j} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}_j}\Big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0$$

Per le condizioni finali avremo, sempre per le componenti x_k della variabile di stato non specificate a $t = t_1$, quindi per $k = q + 1, .., n$:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}\Big|_{t=t_1} = -p_k(t_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_k(t_1) = 0$$

□

2.2.3 controlli DISCONTINUI e VINCOLATI

Piú complicati sono i casi in cui:

- siano poste delle limitazioni sui controlli (ad esempio nel caso ad una varibile se $U = [a, b] \in \mathbb{R}$)

- i controlli u presentino delle discontinuitá

A dare condizioni necessarie di ottimalitá anche in queste situazioni il seguenta teorema:

Teorema 2.2. ***Principio del minimo di Pontryagin***
Nelle condizioni precedenti della Sezione 2.2.1, sia $u(t) \in U$ il controllo ottimo e $x(t)$ la traiettoria ottima associata . Allora sono soddisfatte le seguenti:

i) le n ***equazioni di stato*** $\dot{x}_i = f_i(x, u, t) \quad i = 1, ..., n,$ *vedi le 2.5, insieme alle* n *condizioni iniziali e alle* q *condizioni finali,* $q \leq n$

ii) le n ***equazioni aggiunte*** $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$

iii) le n-q ***condizioni di trasversalitá*** $p_k(t_1) = 0 \quad k = q+1, .., n$

vi) $H(x; u_1, .., u_j + \delta u_j, .., u_m; p) \geq H(x, u, p)\ \forall \delta u_j$ *ammissibile,* $j = 1, .., m$

Dimostrazione. Le condizioni ii) e iii) si ottengono come visto nella dimostrazione del Teorema 2.1.
La nostra difficoltá sta nell'ottenere qualcosa di analogo alle equazioni ellittiche: infatti non essendo fatte ipotesi di continuitá sulle u queste potrebbero ammettere dei punti di discontinuitá e non sarebbe quindi permesso differenziare H rispetto alle u_j.
Consideriamo una piccola variazione δu del controllo u t.c. $u + \delta u$ appartenga ancora ad U. Ad una piccola variazione del controllo corrisponderá una piccola variazione in x, chiamiamola δx e in p, chiamiamola δp. Il cambiamento nel valore di J^* , sará dato da :

$$
\begin{aligned}
\delta J^* &= \delta\int_{t_0}^{t_1}[H-\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{x}_i]dt = \int_{t_0}^{t_1}\delta[H-\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{x}_i]dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1}[\delta H-\sum_{i=1}^{n}\delta(p_i\dot{x}_i)]dt = \int_{t_0}^{t_1}[\delta H-\sum_{i=1}^{n}\delta p_i\dot{x}_i-\sum_{i=1}^{n}p_i\delta\dot{x}_i]dt = \\
&=^3 \int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_j}\delta u_j+\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i-\dot{p}_i\delta x_i-\dot{x}_i\delta p_i-p_i\delta\dot{x}_i\Big)\Big]dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_j}\delta u_j-\sum_{i=1}^{n}(\dot{p}_i\delta x_i+p_i\delta\dot{x}_i)\Big]dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_j}\delta u_j-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(p_i\delta x_i)\Big]dt
\end{aligned}
$$

Integrando per parti il secondo addendo otteniamo:

$$
\delta J^* = -\sum_{i=1}^{n}p_i\delta x_i\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_j}\delta u_j dt
$$

Ora a $t = t_0$ i valori delle x_i sono specificati perció quindi $\delta x_i(t_0) = 0$. Analogamente $\delta x_i(t_1) = 0, \quad i = 1,..,q$.
Per $i = q+1,..,n$ dalle condizioni di trasversalitá abbiamo $p_i(t_1) = 0$, quindi

$$
p_i(t_1)\delta x_i(t_1) = 0
$$

otteniamo:

$$
\delta J^* = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_j}\delta u_j dt
$$

dove δu_j é una piccola variazione della j-esima componente del vettore dei controlli. Se queste variazioni sono indipendenti e richiediamo $\delta J^* = 0$ per un intorno di un punto nel quale la funzione u é continua, concludiamo che:

$$
\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0
$$

[3]usando la *regola di differenziazione della catena* si ha

$$
\delta H = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_j}\delta u_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i
$$

Questo si puó dedurre solo se i controlli sono continui e non vincolati, altrimenti al posto di $\frac{\partial H}{\partial u_j} du_j$ avremo

$$H(x; u_1, .., u_j + \delta u_j, .., u_m; p) - H(x, u, p)$$

da cui:

$$\delta J^* = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} [H(x; u_1, .., u_j + \delta u_j, .., u_m; p) - H(x, u, p)] dt$$

Poiché u ammettiamo che sia un punto di minimo dovremo avere:

$$\delta J^* = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} [H(x; u_1, .., u_j + \delta u_j, .., u_m; p) - H(x, u, p)] dt \geq 0$$

per tutti i controlli ammissibili $u + \delta u$, il che implica:

$$H(x; u_1, .., u_j + \delta u_j, .., u_m; p) \geq H(x, u, p) \quad \forall j = 1, .., m \quad \forall \delta u_j \text{ ammissibile}$$

Sul controllo ottimo cioé H é minimizzata rispetto alle variabili di controllo $u_1, .., u_m$ $\square$

2.3 soluzione: STRATEGIA PRODUZIONE/VENDITA

Riprendiamo l'esempio della Sezione 2.1.1 In tale esempio l'Hamiltoniana é data da:

$$H = (1 - u)x + \lambda ux = x - xu + \lambda xu = x + x(\lambda - 1)u \tag{2.10}$$

L'equazione aggiunta diventa perció:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -((1 - u) + \lambda u) = (1 - \lambda)u - 1 = \dot{\lambda} \tag{2.11}$$

con la condizione di trasversalitá:

$$\lambda(T) = 0 \tag{2.12}$$

La dinamica del controllo é come abbiamo detto governata dall'equazione $\dot{x}(t) = x(t)u(t)$ unitamente alla condizione iniziale $x(0) = c > 0$ che assicura che la soluzione x sia strettamente positiva $\forall t > 0$. Abbiamo che:

$$\max_{u \in [0,T]} H = \begin{cases} u(t) = 0 & \lambda < 1 \\ u(t) = 1 & \lambda > 1 \end{cases}$$

Notiamo che non esistono intervalli di tempo I per cui si abbia $\lambda(t) = 1$, $t \in I$: infatti da un lato in tali intervalli dovremmo avere $\dot{\lambda}(t) = 0$, d'altra parte l'equazione aggiunta comporterebbe che $\dot{\lambda(t)} = -1$.
Abbiamo quindi una interessante informazione sul controllo ottimale u: il controllo u é chiamato *controllo bang bang* con un solo istante di commutazione (un solo punto di discontinuitá), si passa cioé da $u(t) = 0$ (nessuna risorsa investita) a $u(t) = 1$ (tutte le risorse investite).
Poiché la condizione di trasversalitá $\lambda(T) = 0$ l'insieme:

$$\mathbb{A} = \{t \in [0, T] \,|\, \forall s \in]t, T], \lambda(s) < 1\}$$

é non vuoto, sia dunque $t_0 = inf_{\mathbb{A}}$. Per costruzione abbiamo che per ogni $t \in]t_0, T]$ é $\lambda(t) < 1$ e dunque $u(t) = 0$.
Per continuitá della varaibile di co-stato dovremo anche avere $\lambda(t_0) = 1$.
L'equazione aggiunta é in questa situazione:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -1, \quad t \in]t_0, T] \quad \Longrightarrow \quad \lambda(t) = -t + \beta \\ \lambda(T) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(T) = -T + \beta = 0 \end{cases}$$

quindi $\lambda(t) = T - t, \quad t \in]t_0, T]$.
Inoltre poiché l'equazione di transizione si riduce a $\dot{x}(t) = 0$ troviamo che deve essere $x(t) = c_0$ costante.
Ora se $t_0 = 0$ abbiamo che il controllo ottimale $u(t)$ é costantemente nullo su tutto l'intervallo temporale $[0, T]$, d'altra parte per costruzione $1 = \lambda(t_0) = T - t_0$ da cui si vede che $t_0 = T - 1$ per cui $t_0 = 0 \Longleftrightarrow T = 1$, in tal caso il percorso ottimale é $x(t) = c = x(0)$.
Se invece $t_0 > 0$ abbiamo $T > 1$. L'intervallo $[0, T]$ viene diviso in due sottointervalli $[0, T - 1]$ $[T - 1, T]$. Nel primo il controllo ottimale é costantemente

uguale a 1, ma ció comporta che l'equazione aggiunta divenga:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\lambda(t), & t \in]0, T-1] \\ \lambda(T-1) = 1 \end{cases}$$

cioé $\lambda(t) = e^{T-1-t}$, mentre l'equazione di transizione:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t), & t \in]0, T-1] \\ x(0)) = c > 0 \end{cases}$$

porta $x(t) = c \cdot e^t$. Possiamo quindi trarre le seguenti conclusioni:

i) T piccolo (<1): é ottimale vendere tutta la produzione $u(t) = 0$

ii) T grande (>1) é ottimale investire tutta la produzione fino a tempo $T-1$ e poi vendere tutta la merce prodotta nell'intervallo compreso fra $T-1$ e T.

Capitolo 3

Programmazione Dinamica

Un approccio alternativo alle tecniche dirette di ottimizzazione viste nei due capitoli precedenti, piú interessante per le applicazioni economiche, é la programmazione dinamica.
La programmazione dinamica (PD) é una tecnica dovuta a R. Bellman: negli anni '50 fu formulata la teoria matematica dei processi decisionali, presenti in un notevole numero di problemi applicativi in ambito industriale, nei quali si riescono ad individuare degli stadi di evoluzione di tipo temporale, spaziale o logico. Il termine *dinamico* indica che ci si rivolge a quei modelli nei quali il tempo gioca un ruolo fondamentale, per le caratteristiche intrinseche del problema o per le ipotesi che é possibile formulare sui suoi elementi. Processi di questo tipo si presentano in molti campi di applicazione, ad esempio nel controllo delle scorte e nella definizione delle politiche di investimento. In questi problemi il sistema oggetto di studio passa da uno stadio all'altro attraverso trasformazioni derivanti da decisioni prese in corrispondenza di ciascuno stadio. In ognuno di questi stadi é possibile definire lo stato del sistema, cioé le condizioni del sistema stesso, definito dai valori assunti dalle variabili del problema. Per questo la PD é applicabile a problemi di ottimizzazione che siano scomponibili in sottoproblemi concatenati.
Questa tecnica si adatta sia a problemi con variabili continua che a problemi discreti: noi tratteremo qui il caso continuo.

3.1 problema a variabile CONTINUA

Consideriamo il problema di minimizzare (o massimizzare) il funzionale obiettivo:

$$J = J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t)dt \qquad x(t_0) = \alpha, \; x(t_1) = \beta \tag{3.1}$$

L'approcciao della PD consiste nel cercare di definire il valore ottimo dell'integrale dal tempo $t \in [t_0, t_1]$ al tempo t_1, cioé di ottimizzare l'integrale in sottointervalli temporali, valutando lo stato raggiunto dal sistema ad ogni passo attraverso una funzione S che prende il nome di **funzione valore**, definita da:

$$S(t, x) = \min_y \int_t^{t_1} F(y, \dot{y}, \tau)d\tau \qquad y(t) = x, \; y(t_1) = x(t_1) = \beta \tag{3.2}$$

cioé se siamo alla posizione x a tempo t il minimo valore dell'integrale 3.1 con $x(t_1) = \beta$ é dato dal cammino $y = y(\tau)$ e prende il valore $S(t, x)$.

Poiché il procedimento seguito equivale di fatto alla scomposizione in sottoproblemi é logico chiedere che una politica ottima abbia la proprietá che, qualunque sia lo stato iniziale e la decisione iniziale, le eventuali decisioni prese in tempi successivi a partire dallo stato risultante della decisione iniziale costituiscono ancora una politica ottima. Tale principio noto come *principio di Bellman* é generalmente formulato come segue:

Teorema 2. PRINCIPIO DI OTTIMALITÁ DI BELLMAN
Sia $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ la traiettoria ottima per il problema 3.1. Allora la traiettoria $\bar{x}$, definita come la restrizione di x su $[t, t_1]$, $t \geq t_0$, é ottima per il medesimo problema con dato iniziale di $\bar{x}(t) = x(t)$, cioé massimizza/minimizza il seguente funzionale

$$J = J(\bar{x}) = \int_t^{t_1} F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)dt \tag{3.3}$$

dove $\bar{x}(t) = x(t)$ e $\bar{x}(t_1) = x(t_1) = \beta$.
*Tale teorema viene spesso formulato nel modo seguente: **una traiettoria ottima é formata da un insieme di sottotraiettorie ottime**.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una traiettoria ottima y sempre con punto iniziale $y(t) = x(t)$ e tale che

$$\int_t^{t_1} F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \tau)d\tau > \int_t^{t_1} F(y, \dot{y}, \tau)d\tau$$

$$\begin{aligned} S(t_0, x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, \tau)d\tau &= \int_{t_0}^{t} F(x, \dot{x}, \tau)d\tau + \int_t^{t_1} F(x, \dot{x}, \tau)d\tau \\ > \int_{t_0}^{t} F(x, \dot{x}, \tau)d\tau + \int_t^{t_1} F(y, \dot{y}, \tau)d\tau \end{aligned}$$

il che contraddice la definizione di funzione valore. □

Teorema 3. *Sia $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ la traiettoria ottima che massimizza o minimizza il funzionale 3.1, allora indicando con S la funzione valore sopra definita, vale la seguente:*

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\dot{x}}[F(x, \dot{x}, t) + \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x}] \tag{3.4}$$

detta ***equazione di Bellman***

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre il persorso da (x, t) a (β, t_1) in:

i) un percorso da (x, t) a $(x + \delta x, t + \delta t)$

ii) un percorso da $(x + \delta x, t + \delta t)$ a (β, t_1)

e otterremo:

$$S(t, x) = \int_t^{t+\delta t} F(y, \dot{y}, \tau)d\tau + S(t + \delta t, x + \delta x) \tag{3.5}$$

dove per il Teorema 2 $S(t + \delta t, x + \delta x)$ rappresenta il minimo valore dell'integrale sul percorso *ii*).
Con le approssimazioni:

$$\int_t^{t+\delta t} F(y, \dot{y}, \tau)d\tau \approx \delta t F(y(t), \dot{y}(t), t) = \delta t F(x, \dot{x}, t) \tag{3.6}$$

$$S(t + \delta t, x + \delta x) \approx S(t, x) + \delta t\frac{\partial S}{\partial t} + \delta x\frac{\partial S}{\partial x} + \dots \tag{3.7}$$

la 3.5 diventa:

$$S(t,x) = \min_{\delta x}[\delta t F(x,\dot{x},t) + S(t,x) + \delta t \frac{\partial S}{\partial t} + \delta x \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots] \tag{3.8}$$

con $\delta x \approx \dot{x}\delta t$:

$$0 = \min_{\dot{x}}[\delta t F(x,\dot{x},t) + \delta t \frac{\partial S}{\partial t} + \dot{x}\delta t \frac{\partial S}{\partial x} + o(\delta t^2)] \tag{3.9}$$

che con $\delta t \neq 0$:

$$0 = \min_{\dot{x}}[F(x,\dot{x},t) + \frac{\partial S}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x}] \tag{3.10}$$

e poiché $\frac{\partial S}{\partial t}$ é indipendente da $\dot{x}$:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\dot{x}}[F(x,\dot{x},t) + \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x}] \tag{3.11}$$

□

Osservazione 3.1. legame PD e CALCOLO DELLE VARIAZIONI
É possibile dimostrare che:

- l'**equazione di Bellman** é equivalente all'**equazione di Eulero Lagrange**

- dall'**equazione di Bellman** si deriva il **Principio del massimo di Pontryagin**

3.2 esempio: PRODUZIONE/GESTIONE MAGAZZINO

Lo stock di magazzino di un'azienda sia rappresentato dalla funzione $x = x(t)$. Al tempo iniziale tale giacenza di magazzino sia nulla e desideriamo raggiungere il livello $B > 0$ al tempo finale T, cioé

$$x(0) = 0; \quad x(T) = B.$$

La relazione fra produzione e giacenza é chiaramente di proporzialitá diretta e quindi $\dot{x} \geq 0$ rappresenterá l'intensitá di produzione.
Supponiamo che:

- il costo unitario di produzione al tempo t vari linearmente con la produzione e sia dato quindi da $\alpha\dot{x}(t)$, $\alpha > 0$. Di conseguenza il costo totale di produzione al tempo t é $\alpha\dot{x}(t)\dot{x}(t)$.

- il costo complessivo di magazzino sia proporzionale alla giacenza, cioé sia dato da $\beta x(t)$

L'obiettivo é quello di minimizzare il costo complessivo, dato da:

$$J(u) = \int_0^T (\alpha\dot{x}^2(t) + \beta x(t))dt, \quad \alpha, \beta > 0 \ \dot{x} \geq 0 \tag{3.12}$$

Riassumendo il problema é determinare la traiettoria ottima che soddisfi $x(0) = 0,\ x(T) = B$ e minimizzi l'integrale 3.12 .

Cerchiamo una funzione $S : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa la condizione necessaria di Bellman:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\dot{x}} \left(\alpha\dot{x}^2 + \beta x + \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \beta x + \min_{\dot{x}} \left(\alpha\dot{x}^2 + \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \tag{3.13}$$

Al variare di $\dot{x}$, $\alpha\dot{x}^2 + \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x}$ é una parabola con concavitá rivolta verso l'alto, perció il punto minimo sará in corrispondenza dell'ascissa del vertice data da:

$$x_v = -\frac{S_x(t, x)}{2\alpha}, \qquad S_x = \frac{\partial S}{\partial x}$$

Ricordando che α é positivo per ipotesi, il minimo dipende dal valore di S_x. Consideriamo i casi:

CASO 1

Supponiamo esista $\tau \in (0, T]$ t.c. $S_x(t, x) \geq 0, \quad t \in (0, \tau)$. In questo caso il

$$\min_{\dot{x}} \left(\alpha\dot{x}^2 + \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$$

si ha per $\dot{x} = 0,\ t \in (0, \tau)$ quindi $\dot{x} = 0,\ t \in [0, \tau)$, perció, per la condizione iniziale $x(0) = 0$ e per continuitá della dinamica cercata, avremo $x(0) = 0,\ t \in [0, \tau)$. Poiché deve valere la condizione finale $x(T) = B > 0$, certamente non puó essere $\tau = T$. Deve allora esistere anche un punto $\bar{\tau} \in (\tau, T]$ tale per cui

$$S_x(t,x) < 0, \qquad t \in (\tau, \bar{\tau}) \tag{3.14}$$

Cosí nella 3.13 il punto di minimo lo si ottiene per

$$-\frac{S_x(t,x)}{2\alpha}, \qquad \text{per } t \in (\tau, \bar{\tau})$$

e quindi l'equazione di Bellman diventa

$$S_t(x,t) + \beta x - \frac{S_x^2(t,x)}{4\alpha} = 0 \tag{3.15}$$

per $t \in (\tau, \bar{\tau})$.
In pratica ció che si fa é, data la funzione valore, risalire alla dinamica e quindi alla traiettoria ottima attraverso il sistema di equazioni alle derivate parziali che regolano l'evoluzione delle variabili x.
Pertanto cerchiamo ora le funzioni S della forma

$$S(t,x) = a + bxt + c\frac{x^2}{t} + dt^3$$

che soddisfino la 3.15. Facili conti mostrano che ci sono due possibilitá:

1. $$S(t,x) = a - \beta xt + \frac{\beta^2}{12\alpha}t^3$$

2. $$S(t,x) = a - \frac{\beta}{2}xt - \alpha\frac{x^2}{t} + \frac{\beta^2}{48\alpha}t^3$$

La prima ci fornisce $S_x = -\beta t$: quindi $S_x < K < 0$ per $t \in (\tau, \bar{\tau})$ e K costante: la funzione S_x é discontinua lungo la linea $\{(\tau, x); x \in \mathbb{R}\}$. Noi siamo interessati a studiare funzioni regolari, quindi questo primo caso non fornisce soluzioni.

Vediamo la seconda possibilitá. Abbiamo

$$\dot{x} = \begin{cases} 0 & 0 \le t < \tau, \\ -\frac{S_x}{2\alpha} = \frac{x}{t} + \frac{\beta}{4\alpha}t & \tau \le t < \bar{\tau} \end{cases}$$

Quindi dalla dinamica e dalla condizione iniziale $x(0) = 0$ abbiamo $x(t) = 0, \quad t \in [0, \tau]$. In $[\tau, \bar{\tau}]$ risolviamo questa equazione differenziale lineare del primo ordine.

$$x(t) = e^{\int_\tau^t \frac{1}{s} ds} \Big[\int_\tau^t e^{-\int_\tau^s \frac{1}{z} dz} \frac{\beta}{4\alpha} s \, ds \Big] = \frac{t}{\tau} \Big[\frac{\beta\tau}{a\alpha}(t-\tau) \Big] = \frac{\beta}{4\alpha}(t-\tau)t \tag{3.16}$$

A questo punto, usando l'espressione trovata di x, vediamo se la condizione 3.14 é verificata in $(\tau, \bar{\tau})$:

$$S_x = -\frac{\beta}{2}t - 2\alpha\frac{x}{t} = -\beta\Big(t - \frac{\tau}{2}\Big)$$

Cosí certamente S_x é negativa in $(\tau, \bar{\tau})$ ma é anche decrescente; in altre parole, dopo il punto τ, la funzione S_x rimane negativa (perció $-S_x$ é positiva e crescente) e quindi $\bar{\tau} = T$. Vediamo allora se ci sono condizioni per garantire che $x(T) = B$: dalla 3.16

$$B = x(T) = \frac{\beta}{4\alpha}(T^2 - T\tau) \Longrightarrow \tau = \frac{\beta T^2 - 4\alpha B}{\beta T}$$

che ci permette di ricavare τ in funzione del valore B assegnato. Dovendo peró essere $\tau > 0$, deve essere : $T > 2\sqrt{\frac{\alpha B}{\beta}}$.

CASO 2

Supponiamo esista $\tau \in (0, T]$ t.c. $S_x(t, x) < 0 \quad \forall t \in (0, \tau)$. In $(0, \tau)$ valgono le stesse considerazioni relative al CASO 1 quindi:

$$\dot{x} = -\frac{S_x(x, t)}{2\alpha}$$

$$S_t(x, t) + \beta x + \frac{S_x^2(t, x)}{4\alpha} = 0$$

per $t \in (0, \tau)$.

Dalla prima possibilitá 1. abbiamo $S_x = -\beta t$: quindi $-S_x$ é positiva e crescente in $(0, \tau)$ e perció $\tau = T$. Abbiamo

$$\dot{x} = \frac{\beta}{2\alpha}t, \quad t \in [0, T]$$

La dinamica e la condizione iniziale $x(0) = 0$ ci permettono di ricavare

$$x(t) = \frac{\beta}{2\alpha}t^2$$

Si osservi che la condizione finale $x(T) = B$ é verificata se e solo se $T = 2\sqrt{\frac{\alpha B}{\beta}}$.
La seconda possibilitá 2. conduce a una situazione molto simile alla precedente. Vediamola velocemente:
per $t \in [0, \tau)$

$$\dot{x} = -\frac{S_x}{2\alpha} = \frac{x}{t} + \frac{\beta}{4\alpha}t \Longrightarrow x(t) = \Big(\frac{\beta}{4\alpha}t + K\Big)t, \ K \in \mathbb{R}$$

Con l'espressione trovata di x vediamo se la condizione $S_x < 0$ é verificata in $(0, \tau)$:

$$S_x = -\frac{\beta}{2}t - 2\alpha\frac{x}{t} = -\beta t - 2\alpha K < 0$$

quindi deve essere necessariamente $K \geq 0$. Cosí certamente $-S_x > 0$ é ivi positiva , ma anche crescente, cioé $\tau = T$. La condizione $x(T) = B$ fornisce:

$$x(t) = \frac{\beta}{4\alpha}t^2 + \frac{4\alpha B - \beta T^2}{2T}t \Longrightarrow 4\alpha B - \beta T^2 > 0 \Longrightarrow T < 2\sqrt{\frac{\alpha B}{\beta}}$$

Ricapitolando il tutto:

$$\text{se } T \geq 2\sqrt{\frac{\alpha B}{\beta}} \Longrightarrow \dot{x}(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \tau \\ \frac{\beta}{2\alpha}t + \frac{4\alpha B - \beta T^2}{4\alpha T} & \tau \leq t \leq T \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \tau \\ \frac{\beta}{4\alpha}t^2 + \frac{4\alpha B - \beta T^2}{4\alpha T}t & \tau \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\text{con } \tau = \frac{\beta T^2 - 4\alpha B}{\beta T}$$

$$\text{se } T < 2\sqrt{\frac{\alpha B}{\beta}} \Longrightarrow \dot{x}(t) = \frac{\beta}{2\alpha}t + \frac{4\alpha B - \beta T^2}{4\alpha T}$$

$$x(t) = \frac{\beta}{4\alpha}t^2 + \frac{4\alpha B - \beta T^2}{4\alpha T}t \quad 0 \leq t \leq T$$

Concludendo se il tempo a disposizione é relativamente lungo, é conveniente tenere inizialmente ferma la produzione e poi incrementarla linearmente. Se invece il tempo a disposizione é breve, dobbiamo metterci subito a produrre per raggiungere il livello di giacenza finale richiesto.

Bibliografia

[1] Alexander Graham, D.N. Burghes, Introduction to control theory, including optimal control, Halsted press 1980

[2] Daniele Ritelli, Matematica per l'impresa, esculapio 2009