

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**IL TEOREMA DI
CLASSIFICAZIONE
DELLE SUPERFICI**

Tesi di Laurea in Geometria 2

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Rita Fioresi

Presentata da:
Marialetizia Bertuccioli

Sessione II
Anno Accademico 2010/11

Ai miei genitori

Introduzione

“I matematici non studiano oggetti, ma relazioni tra gli oggetti. In questo modo sono liberi di rimpiazzare alcuni oggetti con altri, fintantoché le relazioni rimangano immutate.”

Jules Henri Poincaré (1854-1912)

Una *varietà* topologica è un concetto abbastanza generale definito con lo scopo di modellare spazi a più dimensioni, eventualmente curvi, che, visti con una lente di ingrandimento, sembrano piatti e simili allo spazio euclideo, ma che, visti globalmente, possono assumere le forme più svariate. Un aspetto interessante della topologia è la classificazione delle varietà. In dimensione 1, ogni varietà compatta e connessa è omeomorfa alla circonferenza. In questa tesi mi sono soffermata in particolare sul teorema di classificazione delle varietà compatte e connesse di dimensione 2, dette superfici, teorema che afferma che ogni superficie è omeomorfa alla somma connessa di una sfera con m tori o alla somma connessa di una sfera con n piani proiettivi, dove m ed n sono numeri naturali. Per quanto riguarda le varietà di dimensione 3, la congettura di Poincaré afferma che la 3-sfera è l'unica varietà tridimensionale semplicemente connessa. Tale congettura è stata recentemente dimostrata da Grigorij Jakovlevič Perel'man dell'Istituto Matematico di Steklov di San Pietroburgo. Per le varietà di dimensione superiore non è possibile fornire una completa classificazione. In particolare, in dimensione 4 ogni gruppo finitamente presentato è il gruppo fondamentale di una varietà e dunque è impossibile una completa classificazione.

Il primo capitolo sarà dedicato alla presentazione del concetto di varietà, con particolare attenzione alla descrizione di quelle di dimensione 2; la trattazione sarà accompagnata da numerosi esempi. In seguito analizzerò le nozioni di etichettamento di una regione poligonale, somma connessa e orientabilità e non orientabilità di una superficie.

Nel secondo capitolo si entrerà nel vivo dell'argomento principale di questa tesi, enunciando e dimostrando il teorema di classificazione delle superfici e presentando via via le definizioni e i teoremi necessari per comprendere la dimostrazione del teorema di classificazione.

Il terzo capitolo sarà diviso in due parti: nella prima, dopo un'introduzione generale sulla nascita e sulla storia della topologia, saranno ripercorsi in chiave storica gli argomenti trattati nel secondo capitolo, cioè il gruppo fondamentale, la presentazione di un gruppo tramite generatori e relazioni, il teorema di Seifert-Van Kampen e la dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici. Nella seconda parte invece saranno presentate curiosità su alcune delle superfici introdotte nel primo capitolo, vale a dire il nastro di Möbius, la sfera e la bottiglia Klein.

Indice

Introduzione	1
1 Varietà e superfici	4
1.1 Varietà: Definizione ed esempi	4
1.2 Superfici: Definizione ed esempi	9
1.3 Regione poligonale e etichettamento	15
1.4 Somma connessa	21
1.5 Superfici orientabili e non orientabili	25
2 Teorema di classificazione	27
2.1 Il gruppo fondamentale	27
2.2 Dimostrazione (<i>1^a parte</i>)	32
2.3 Generatori e Relazioni	35
2.4 Il teorema di Seifert-Van Kampen	38
2.5 Applicazioni di Seifert-Van Kampen	46
2.6 Dimostrazione (<i>2^a parte</i>)	50
3 Storia e curiosità	52
3.1 Topologia: genesi e storia	52
3.2 Gruppi e superfici	55
3.3 Curiosità sulle superfici	56
Bibliografia	60

Capitolo 1

Varietà e superfici

In questo capitolo viene presentata la nozione di varietà topologica, soffermando l'attenzione sulle varietà di dimensione 2, dette superfici. Dopo aver dato la definizione e aver fatto alcuni esempi, verranno descritti l'etichettamento dei lati di una regione poligonale, la somma connessa e la nozione di orientabilità e non orientabilità di una superficie, concetti utili per la comprensione del teorema centrale di questa tesi, cioè il teorema di classificazione delle superfici, che verrà enunciato e dimostrato nel capitolo 2.

1.1 Varietà: Definizione ed esempi

In italiano si traduce con *varietà* il termine tedesco *Mannigfaltigkeit*, che compare per la prima volta nella tesi di dottorato del 1851 di Bernhard Riemann, "*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*" (vedi [2]). Riemann si pone il problema di introdurre delle grandezze molteplicemente estese, aventi cioè più dimensioni, e le definisce usando quel termine. Nel 1854 scrisse, per la sua abilitazione all'insegnamento, la sua seconda tesi, intitolata "*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*" (vedi [3]), pubblicata postuma nel 1867, con la quale introdusse il concetto di curvatura di una varietà: una delle questioni poste in questo scritto consiste nel prospettare un'indagine sulla natura geometrica dello spazio e sulla sua curvatura. Analizzando il termine come parola composta, Mannig-falting-keit, si riconosce in esso un parallelo con il termine latino *multiplicitas*, così lo si potrebbe tradurre letteralmente come molteplicità. Come si è detto nell'introduzione, in geometria una *varietà* è un concetto abbastanza generale definito con lo scopo di modellare spazi a più dimensioni, eventualmente curvi, che visti con una lente di ingrandimento sembrano piatti e simili allo spazio euclideo, ma che visti globalmente

possono assumere le forme più svariate. Ad esempio, il concetto di varietà è indispensabile per modellare l'universo secondo la relatività generale: la tesi in cui Riemann espose le sue idee si è trasformata in un classico della matematica. Albert Einstein ha usato i risultati di Riemann nella sua teoria della relatività generale; tale teoria associa la gravità alla curvatura dello spazio definito come spazio-tempo \mathbb{R}^4 con la metrica di Minkowski. Un altro esempio è dato dalla sfera come modello della superficie terrestre: localmente sembra piatta e assomiglia ad un piano, ma in realtà è incurvata.

Definizione 1.1.1. Uno spazio X è detto *di Hausdorff* se, per ogni coppia di punti distinti x, y di X , esistono due aperti U_x e U_y contenenti rispettivamente x e y , tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Definizione 1.1.2. Sia X uno spazio topologico. Una coppia (U, φ_U) , dove $U \subset X$ è un aperto e φ_U è un omeomorfismo di U su un aperto di \mathbb{R}^n , si dice una *n -carta locale*, oppure un *n -sistema di coordinate locali*, in X . Due n -carte locali $(U, \varphi_U), (V, \varphi_V)$ in X si dicono *$C^{(k)}$ -compatibili*, oppure *differenziabilmente compatibili di classe $C^{(k)}$* ($k \geq 0$ oppure $k = \infty$) se $U \cap V = \emptyset$ oppure se $U \cap V \neq \emptyset$ e l'applicazione:

$$\varphi_V \cdot \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \rightarrow \varphi_V(U \cap V)$$

è un diffeomorfismo di classe $C^{(k)}$.

Se (U, φ_U) è una n -carta locale in X , diremo talvolta che l'applicazione $\varphi_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una n -carta locale in X relativa all'aperto U .

Definizione 1.1.3. Un *n -atlante differenziabile* di classe $C^{(k)}$ nello spazio topologico X è una famiglia di n -carte locali $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sia un ricoprimento di X e le carte locali $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ siano a due a due $C^{(k)}$ -compatibili.

Definizione 1.1.4. Uno spazio topologico di Hausdorff in cui sia assegnato un n -atlante differenziabile di classe $C^{(k)}$ per qualche intero n si dice *varietà differenziabile di classe $C^{(k)}$* , se $k \geq 1$ oppure $k = \infty$, e si dice *varietà topologica* (o *di classe $C^{(0)}$*) se $k = 0$. L'intero n è la dimensione della varietà.

Quindi una *varietà topologica* di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff nel quale ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo al disco aperto D^n di dimensione n , ove

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}.$$

Poiché $D^n \simeq \mathbb{R}^n$, ciò è equivalente a richiedere che ogni punto abbia un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^n . Una varietà di dimensione n si dice n -varietà (o semplicemente *varietà*).

I nomi *carta* e *atlante* sono scelti in analogia con gli atlanti planetari: infatti la superficie della Terra non è descrivibile interamente su un foglio (cioè non è omeomorfa a \mathbb{R}^2), però è possibile descriverla “a pezzi”, tramite un certo numero di carte geografiche, ciascuna delle quali descrive solo una zona della superficie: ad esempio con due carte che descrivono gli emisferi Nord e Sud.

Esempio 1.1.5. Poiché \mathbb{R}^0 consiste di un singolo punto, ogni spazio discreto è una 0-varietà; infatti uno spazio discreto è di Hausdorff, e per ogni suo punto x possiamo scegliere $\{x\}$ come intorno di x omeomorfo a \mathbb{R}^0 . Altri esempi di varietà, oltre a quelle di dimensione 0, sono \mathbb{R}^n e D^n . Inoltre ogni aperto di \mathbb{R}^n è una n -varietà: infatti se U è un aperto di \mathbb{R}^n e $x \in U$, esiste $\epsilon > 0$ tale che $B_\epsilon(x) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, e chiaramente $B_\epsilon(x) \simeq D^n$.

Più in generale, se X è una varietà, ogni aperto di X è a sua volta una varietà con atlante formato dalle carte di X opportunamente ristrette.

Esempio 1.1.6. La circonferenza S^1 è una varietà di dimensione 1: poiché S^1 è uno spazio di Hausdorff, basta verificare che ogni suo punto ammetta un intorno omeomorfo a \mathbb{R} . A tale scopo rappresentiamo S^1 come l'insieme

$$\{e^{2\pi it} \mid t \in I\},$$

ove $I = [0, 1]$. Se $x = e^{2\pi i\theta} \in S^1$, si ha:

$$\begin{aligned} x \in S^1 \setminus \{-x\} &= S^1 \setminus \{e^{2\pi i(\theta - \frac{1}{2})}\} = \left\{e^{2\pi it} \mid \theta - \frac{1}{2} < t < \theta + \frac{1}{2}\right\} \simeq \\ &\simeq \left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right) \simeq (0, 1) \simeq D^1. \end{aligned}$$

Più in generale, dimostriamo ora che S^n è una n -varietà, utilizzando le *proiezioni stereografiche*. Chiamiamo il punto $(0, 0, \dots, 0, 1)$ polo Nord (N), mentre il punto $(0, 0, \dots, 0, -1)$ polo Sud (S).

Definiamo la carta $\varphi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nel modo seguente. Sia $x \in S^n \setminus \{N\}$; tracciamo una semiretta uscente da N e passante per x , estesa fino a incontrare \mathbb{R}^n ; il punto di intersezione fra questa semiretta e \mathbb{R}^n definisce in modo unico $\varphi(x)$. Si veda la figura 1.1.

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

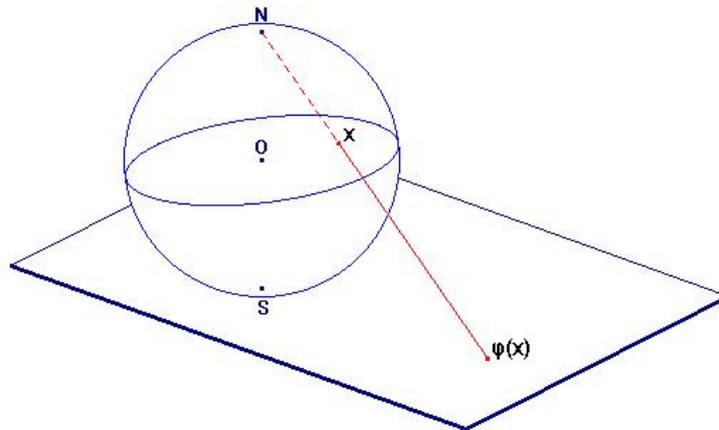


Figura 1.1: Proiezione stereografica.

Si vede facilmente che φ è continua e biettiva; l'inversa $\varphi^{-1} = \psi$ è data da

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, \|x\|^2 - 1)$$

ed è anch'essa continua.

Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto $x \in S^n$, diverso da N , è contenuto in una carta (precisamente $S^n \setminus \{N\}$); inoltre il punto N appartiene all'aperto $S^n \setminus \{S\}$ che è omeomorfo a \mathbb{R}^n tramite la funzione φ' analogamente definita da

$$\varphi'(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right);$$

quindi anche N è contenuto in una carta. Ne segue che S^n è effettivamente una n -varietà, con atlante $\{(S^n \setminus \{N\}, \varphi), (S^n \setminus \{S\}, \varphi')\}$.

Esempio 1.1.7. Il prodotto $M \times N$ di una m -varietà M per una n -varietà N è una varietà di dimensione $m + n$: infatti $D^m \times D^n \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{m+n} \simeq D^{m+n}$, e un prodotto di spazi di Hausdorff è di Hausdorff. Quindi $S^1 \times S^1$ è una 2-varietà, detta *toro 2-dimensionale* o *doppio toro* (figura 1.2), e, più in generale, $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_n$ è una n -varietà, detta *toro n -dimensionale*.

La condizione che una varietà topologica sia uno spazio di Hausdorff è importante. Ci si può chiedere se uno spazio in cui ogni punto abbia un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^n sia di Hausdorff: la risposta è negativa come vedremo nel seguente esempio.

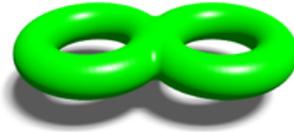


Figura 1.2: Toro 2-dimensionale o doppio toro.

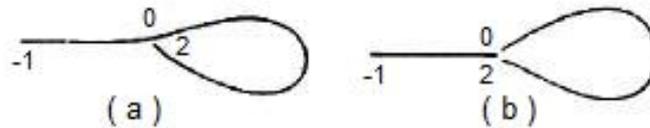


Figura 1.3: Rappresentazione dello spazio X.

Esempio 1.1.8. Sia X l'insieme

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$$

con la topologia \mathcal{U} , in cui $U \in \mathcal{U}$ se e solo se $U = \emptyset$, $U = X$, oppure U è l'unione arbitraria di insiemi della forma

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) & \quad -1 \leq \alpha < \beta \leq 2 \\ (\alpha, 0) \cup (\beta, 2] & \quad -1 \leq \alpha < 0, \quad -1 \leq \beta < 2. \end{aligned}$$

Si noti che \mathcal{U} non è la topologia indotta da \mathbb{R} , in quanto gli insiemi $(\beta, 2]$ non sono aperti in X . Una rappresentazione grafica dello spazio X viene data nelle figure 1.3 (a) o (b). Chiaramente X non è di Hausdorff perchè ogni intorno aperto di 2 interseca ogni intorno aperto di 0. D'altro canto ogni punto di X è contenuto in una carta: ciò è ovvio se $x \in X$ e $x \neq 2$, mentre se $x = 2$ l'insieme

$$N = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right]$$

è un intorno di x , omeomorfo a D^1 tramite l'applicazione $f : N \rightarrow (-1, 1) = D^1$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2y, & \text{se } -\frac{1}{2} < y < 0, \\ 4 - 2y, & \text{se } \frac{3}{2} < y \leq 2. \end{cases}$$

f è continua, biettiva e la sua inversa $g : (-1, 1) \rightarrow N$ è data da

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } -1 < x < 0, \\ 2 - \frac{x}{2}, & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Quindi la condizione che una varietà sia di Hausdorff non è affatto superflua, in quanto ci permette di escludere spazi del tipo appena descritto, che non sembrano comportarsi localmente come lo spazio euclideo. Un'altra ragione per cui si richiede che una varietà sia di Hausdorff è che spesso si vuole rappresentare una n -varietà come un sottospazio di un qualche spazio euclideo \mathbb{R}^n ; in questo caso la varietà eredita la condizione di Hausdorff dallo spazio ambiente \mathbb{R}^n in modo naturale.

1.2 Superfici: Definizione ed esempi

Le varietà che ci interessano maggiormente sono quelle compatte e connesse. In dimensione 0, tutte le varietà compatte e connesse sono omeomorfe fra loro; ciò accade anche in dimensione 1: infatti ogni varietà compatta e connessa di dimensione 1 è omeomorfa a S^1 .

Definizione 1.2.1. Le varietà compatte e connesse di dimensione 2 sono chiamate *superfici*.

Per le superfici abbiamo invece, come vedremo, varie classi di superfici non omeomorfe.

Esempio 1.2.2. *Superficie sferica:* è costituita da tutti i punti che sono ad una distanza fissata r , detta raggio della sfera, da un punto O , detto centro della sfera:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

(figura 1.4). Come abbiamo visto nell'esempio 1.1.6, S^2 è una superficie.

Esempio 1.2.3. *Toro:* intuitivamente è una superficie a forma di ciambella (figura 1.5). Può essere ottenuta come superficie di rivoluzione, facendo ruotare una circonferenza, la *generatrice*, intorno ad un asse di rotazione appartenente allo stesso piano della generatrice, ma disgiunto da questa. Il termine deriva dal latino *torus* che indicava, fra le altre cose, un tipo di cuscino a forma di ciambella. Può essere definito più precisamente come:

a) uno spazio topologico omeomorfo al prodotto di due cerchi, $S^1 \times S^1$;

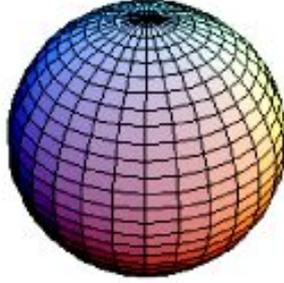


Figura 1.4: La superficie sferica.

b) uno spazio topologico omeomorfo al seguente sottospazio di \mathbb{R}^3 :

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2 \right]^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Mostriamo che le due definizioni sono equivalenti. Il 2-toro $T^2 = S^1 \times S^1$ è omeomorfo al sottospazio di \mathbb{R}^4

$$T' = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) : y_1^2 + y_2^2 = 1 = y_3^2 + y_4^2\}.$$

L'applicazione continua $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$h(y_1, \dots, y_4) = ((y_1 + 2)y_3, (y_1 + 2)y_4, y_2)$$

manda T' omeomorficamente sul sottospazio di \mathbb{R}^3

$$\tilde{T} = \{(x_1, x_2, x_3) : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Infatti $h(T') \subset \tilde{T}$. Tale inclusione si vede subito con una sostituzione: dato $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in T'$, $h(y_1, y_2, y_3, y_4) = ((y_1 + 2)y_3, (y_1 + 2)y_4, y_2) \in \tilde{T}$ se e solo se

$$\left(\sqrt{(y_1 + 2)^2 y_3^2 + (y_1 + 2)^2 y_4^2} - 2 \right)^2 + y_2^2 = 1$$

cioè

$$\left(\sqrt{(y_1 + 2)^2 (y_3^2 + y_4^2)} - 2 \right)^2 + y_2^2 = 1$$

e, dato che $(y_3^2 + y_4^2) = 1$, in quanto $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in T'$,

$$[(y_1 + 2) - 2]^2 + y_2^2 = 1$$

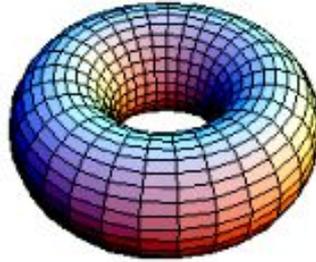


Figura 1.5: Il toro.

cioè

$$y_1^2 + y_2^2 = 1$$

e quest'ultima uguaglianza è vera in quanto $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in T'$.

Inoltre l'applicazione $k : \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}^4$ così definita:

$$k(x_1, x_2, x_3) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2, x_3, \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)$$

è continua e soddisfa

$$k(\tilde{T}) \subset T',$$

$$h|_{T'} \cdot k = 1_{\tilde{T}},$$

$$k \cdot h|_{T'} = 1_{T'}.$$

Quindi $h|_{T'}$ e k sono omeomorfismi inversi uno dell'altro. Ne segue che i due spazi con cui è stato definito il toro in a) e in b) sono omeomorfi e dunque le due definizioni sono equivalenti.

Il toro è effettivamente una varietà di dimensione 2 in quanto, come si è detto nel punto a), è omeomorfo al prodotto di una 1-varietà S^1 per una 1-varietà S^1 .

La superficie sferica e il toro sono esempi di superfici orientabili. Il concetto di orientabilità e non orientabilità di una superficie verrà approfondito meglio nella sezione 1.5 di questo capitolo.

Esempio 1.2.4. *Piano proiettivo reale* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: poiché si tratta di una varietà non omeomorfa ad alcun sottospazio dello spazio Euclideo 3-dimensionale, è più difficile da visualizzare (figura 1.6). È definito come lo spazio quoziente

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = S^2 / \sim, \text{ dove } x \sim x' \Leftrightarrow x = \pm x', \forall x, x' \in S^2,$$

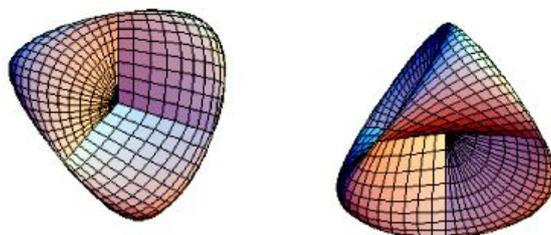


Figura 1.6: Il piano proiettivo.

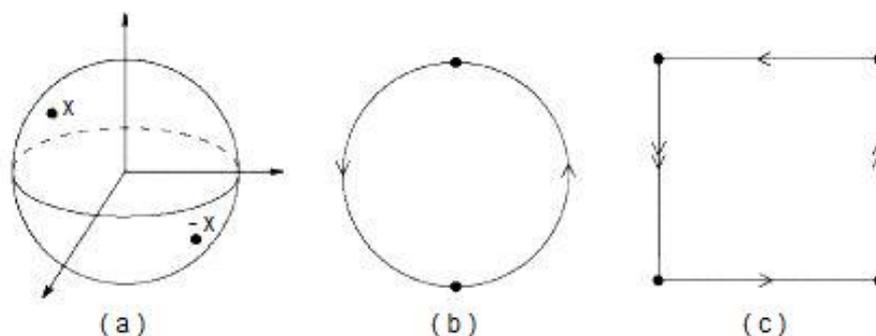


Figura 1.7: Piano proiettivo come spazio d'identificazione.

e un suo generico punto è la classe di equivalenza $[x_0, x_1, x_2]$, dove $(x_0, x_1, x_2) \in S^2$. Grazie alla relazione \sim appena definita, l'emisfero settentrionale è identificato con l'emisfero meridionale; possiamo quindi concentrare l'attenzione sull'emisfero settentrionale, che è omeomorfo al disco chiuso

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

tramite l'omeomorfismo dato da

$$(x, y, z) \mapsto (x, y)$$

per $(x, y, z) \in S^2$ con $z \geq 0$. Possiamo quindi rappresentare $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come D^2 / \sim dove

$$x \sim x' \iff x = x' \text{ oppure } x, x' \in S^1 \subset D^2 \text{ e } x = -x'.$$

Questa identificazione è rappresentata dalla figura 1.7. Nello studio della geometria del piano proiettivo, ad ogni punto vengono assegnate coordinate

omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, dove x_0, x_1, x_2 sono numeri reali, almeno uno dei quali è $\neq 0$. Il termine *omogenee* significa che $[x_0, x_1, x_2]$ e $[x'_0, x'_1, x'_2]$ rappresentano lo stesso punto se e solo se esiste un numero reale λ non nullo tale che $x_i = \lambda x'_i, i = 0, 1, 2$. Se si interpretano (x_0, x_1, x_2) come coordinate Euclidee ordinarie di un punto di \mathbb{R}^3 , allora si ha che $[x_0, x_1, x_2]$ e $[x'_0, x'_1, x'_2]$ rappresentano lo stesso punto nel piano proiettivo se e solo se (x_0, x_1, x_2) e (x'_0, x'_1, x'_2) appartengono alla stessa retta passante per l'origine. In questo modo possiamo reinterpretare in modo naturale un punto del piano proiettivo come una retta passante per l'origine di \mathbb{R}^3 , cioè

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim,$$

dove $x \sim x' \Leftrightarrow x = \lambda x', \forall x, x' \in \mathbb{R}^3$.

Definizione 1.2.5. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione suriettiva da uno spazio topologico X in un insieme Y ; la *topologia quoziente* su Y relativa a f è definita come la famiglia

$$\mathcal{U}_f = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \text{ è aperto in } X\}.$$

I seguenti teoremi ci saranno utili nella descrizione del nastro di Möbius, cioè della superficie presentata nell'esempio 1.2.8.

Teorema 1.2.6. (*Proprietà universale del quoziente*) Sia Y lo spazio quoziente di uno spazio X relativo ad una suriezione $f : X \rightarrow Y$. Un'applicazione $g : Y \rightarrow Z$, da Y in uno spazio topologico Z , risulta continua se e solo se $g \cdot f$ è continua.

Dimostrazione. Poiché $f : X \rightarrow Y$ è continua, la continuità di g implica la continuità della funzione composta $g \cdot f$. Viceversa, supponiamo che $g \cdot f$ sia continua: se V è un aperto di Z , $(g \cdot f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ è aperto in X ; allora per la definizione di topologia quoziente su Y , $g^{-1}(V)$ è aperto in Y ; ciò dimostra che g è continua. \square

Teorema 1.2.7. Sia f un'applicazione continua da uno spazio compatto X in uno spazio di Hausdorff Y ; essa è un omeomorfismo se e solo se è biettiva.

Dimostrazione. Vedi [1], pag 59.

Esempio 1.2.8. *Nastro di Möbius:* consideriamo un cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$$

con la topologia indotta, e definiamo M come l'insieme delle coppie non ordinate di punti di C del tipo $\{p, -p\}$, ossia

$$M = \{\{p, -p\} \mid p \in C\}.$$

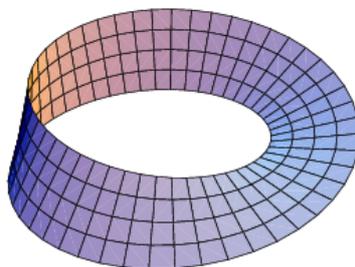


Figura 1.8: Il nastro di Möbius.

L'esistenza di una suriezione naturale da C in M ci permette di dotare M della topologia quoziente: lo spazio che ne risulta è chiamato *nastro di Möbius*. Consideriamo ora la funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\{p, -p\} \mapsto ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz),$$

dove $p = (x, y, z) \in C \subset \mathbb{R}^3$. La proprietà universale del quoziente (teorema 1.2.6) e la continuità dell'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F(x, y, z) = ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz),$$

ci garantiscono la continuità dell'applicazione f . Si verifica inoltre che f è iniettiva e l'immagine $f(M)$ di M tramite f è rappresentata nella figura 1.8. M risulta omeomorfo a $f(M) \subset \mathbb{R}^3$ con la topologia indotta. Infatti, come si è appena detto, f è continua. Inoltre il teorema 1.2.7 ci permette di affermare che l'immagine $f(X)$ di uno spazio compatto X in uno spazio di Hausdorff tramite un'applicazione continua ed iniettiva è omeomorfa a X . Nel nostro caso dunque, dato che $f(M) \subset \mathbb{R}^3$, con \mathbb{R}^3 spazio di Hausdorff, f è continua e iniettiva ed M è compatto, allora $f(M)$ è omeomorfo a M .

Esempio 1.2.9. *Bottiglia di Klein:* è un esempio importante, perchè, benchè sia localmente un oggetto bidimensionale, non è realizzabile globalmente come sottoinsieme né del piano né dello spazio, ma è realizzabile dentro lo spazio \mathbb{R}^4 quadridimensionale. Si veda la figura 1.9.

Il piano proiettivo reale, il nastro di Möbius e la bottiglia di Klein sono esempi di superfici non orientabili, come vedremo successivamente nella sezione 1.5 di questo capitolo.

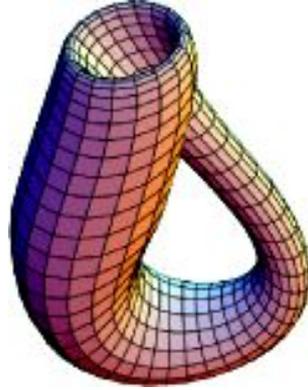


Figura 1.9: La bottiglia di Klein.

1.3 Regione poligonale e etichettamento

In questa sezione vengono costruite alcune superfici compatte e connesse come spazi quozienti ottenuti da una regione poligonale nel piano, “incollando i lati insieme”.

Dato un punto $c \in \mathbb{R}^3$, e dato $a > 0$, consideriamo la circonferenza di raggio a in \mathbb{R}^2 con centro c . Data una sequenza finita di numeri reali $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n$, dove $n \geq 3$ e $\theta_n = \theta_0 + 2\pi$, consideriamo i punti $p_i = c + a(\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, che giacciono su questa circonferenza. Essi sono numerati in ordine antiorario sulla circonferenza, e $p_n = p_0$. La retta passante per p_{i-1} e p_i divide il piano in due semipiani chiusi; sia H_i quello che contiene tutti i punti p_k . Allora lo spazio

$$P = H_1 \cap \dots \cap H_n$$

è chiamato *regione poligonale* determinata dai punti p_i . I punti p_i sono chiamati *vertici* di P ; il segmento congiungente p_{i-1} e p_i è chiamato *lato* di P ; l’unione dei lati di P è denotata con BdP ; $P - BdP$ è denotato con $IntP$.

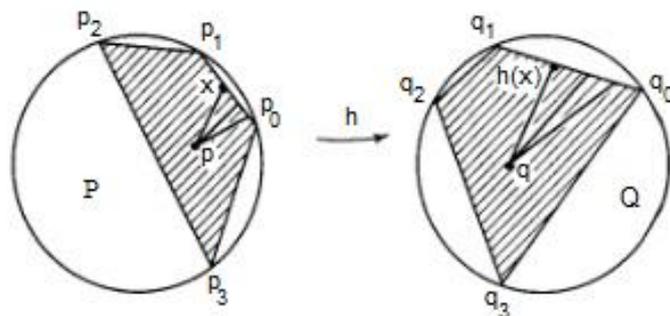
Definizione 1.3.1. Sia X uno spazio topologico. Sia $Y \subset X$. Si definisce *interno* di Y , e si denota con \dot{Y} , l’unione di tutti i sottoinsiemi aperti contenuti in Y :

$$\dot{Y} = \bigcup_{A_j \in Y} A_j,$$

con $j \in J$.

Definizione 1.3.2. Sia X uno spazio topologico. Sia $Y \subset X$. Si definisce *frontiera* di Y , e si denota con $Fr(Y)$, l’insieme

$$Fr(Y) = Y \setminus \dot{Y}.$$

Figura 1.10: Mappa lineare positiva da P a Q .

Osservazione 1.3.3. Sia P una regione poligonale. Allora $IntP$ coincide con \dot{P} e BdP coincide con $Fr(P)$ nella topologia euclidea.

Dato un segmento L in \mathbb{R}^2 , un'orientazione di L consiste semplicemente nello stabilire l'ordine dei suoi estremi; il primo, denotato ad esempio con a , è chiamato *punto iniziale*, e il secondo, denotato ad esempio con b , è chiamato *punto finale*, del segmento orientato. Spesso si dice che L è orientato da a a b ; l'orientazione è rappresentata tramite una freccia su L che punta da a verso b . Se L' è un altro segmento, orientato da c a d , allora una *mappa lineare positiva* da L a L' è un omeomorfismo h che porta il punto $x = (1-s)a + sb$ di L nel punto $h(x) = (1-s)c + sd$ di L' . Se due regioni poligonali P e Q hanno lo stesso numero di vertici, p_0, \dots, p_n e q_0, \dots, q_n rispettivamente con $p_0 = p_n$ e $q_0 = q_n$, allora esiste un omeomorfismo h da BdP a BdQ che porta il segmento da p_{i-1} a p_i , tramite la mappa lineare positiva, nel segmento da q_{i-1} a q_i . Se p e q sono punti fissati di $IntP$ e $IntQ$, rispettivamente, allora questo omeomorfismo può essere esteso a un omeomorfismo da P a Q , in modo tale che il segmento da p al punto x di BdP venga portato linearmente nel segmento da q a $h(x)$. Si veda la figura 1.10.

Definizione 1.3.4. Sia P una regione poligonale nel piano. Un *etichettamento* dei lati di P è una mappa dallo spazio dei lati di P all'insieme S , chiamato *spazio delle etichette*. Data un'orientazione di ogni lato di P , e dato un etichettamento dei lati di P , definiamo una relazione di equivalenza sui punti di P come segue: ogni punto di $IntP$ è equivalente solo a se stesso; dati due lati qualsiasi che hanno la stessa etichetta, sia h la mappa lineare positiva di uno dei due lati nell'altro, e stabiliamo che ogni punto x del primo lato sia equivalente al punto $h(x)$ del secondo lato. Questa relazione genera una relazione di equivalenza su P . Lo spazio quoziente X ottenuto da questa

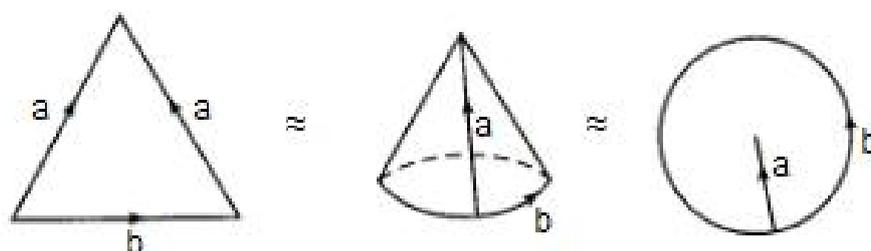


Figura 1.11: Costruzione di un disco a partire da una regione triangolare.

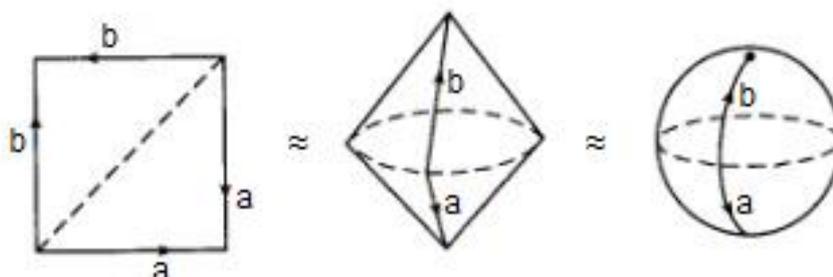


Figura 1.12: Costruzione di una sfera a partire da una regione quadrata.

relazione di equivalenza si dice che è stato ottenuto “incollando insieme i lati di P ” secondo le orientazioni date e l’etichettamento.

Esempio 1.3.5. Consideriamo le orientazioni e l’etichettamento dei lati della regione triangolare rappresentata in figura 1.11. La figura indica che lo spazio quoziente risultante è omeomorfo a un disco.

Esempio 1.3.6. Le orientazioni e l’etichettamento dei lati del quadrato rappresentato in figura 1.12 danno luogo ad uno spazio che è omeomorfo alla sfera S^2 .

Ora descriviamo un metodo conveniente per specificare orientazioni e etichette per i lati di una regione poligonale, un metodo che non comporta il dover tracciare un disegno.

Definizione 1.3.7. Sia P una regione poligonale con i vertici ordinati p_0, \dots, p_n , dove $p_0 = p_n$. Date le orientazioni e l’etichettamento dei lati di P , siano a_1, \dots, a_m le etichette distinte che sono state assegnate ai lati di P . Per ogni k , sia a_{i_k} l’etichetta assegnata al lato $p_{k-1}p_k$, e sia $\epsilon_k = +1$ oppure -1 rispettivamente se l’orientazione assegnata a questo lato va da p_{k-1} a p_k o viceversa.

Allora il numero dei lati di P , le orientazioni dei lati e l'etichettamento sono completamente specificati dalla scrittura simbolica

$$\omega = (a_{i_1})^{\epsilon_1} (a_{i_2})^{\epsilon_2} \dots (a_{i_n})^{\epsilon_n}.$$

Chiamiamo questa scrittura simbolica uno *schema d'etichettamento di lunghezza n* per i lati di P .

Normalmente si omette l'esponente $+1$ quando diamo uno schema d'etichettamento.

Così le orientazioni e l'etichettamento dell'Esempio 1.3.5 possono essere specificati dallo schema d'etichettamento $a^{-1}ba$, se prendiamo p_0 come vertice in alto del triangolo. Se prendiamo uno degli altri vertici come p_0 , allora otteniamo uno degli schemi d'etichettamento baa^{-1} oppure $aa^{-1}b$.

Allo stesso modo, le orientazioni e l'etichettamento indicati nell'Esempio 1.3.6 possono essere specificati (se cominciamo dall'angolo a sinistra in basso del quadrato) dalla scrittura simbolica $aa^{-1}bb^{-1}$.

È chiaro che permutazioni cicliche dei termini nello schema d'etichettamento modificheranno lo spazio X , ottenuto da tale schema, solo in spazi omeomorfi.

Esempio 1.3.8. Abbiamo già dato due definizioni del toro nella sezione 1.2 (esempio 1.2.3); vediamo ora un ulteriore modo di presentare il toro.

Sia X il quadrato unitario nel piano \mathbb{R}^2 :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Il toro è lo spazio quoziente di X ottenuto identificando i lati opposti del quadrato X secondo la seguente relazione $\sim : (0, y) \sim (1, y)$, per $0 \leq y \leq 1$, e $(x, 0) \sim (x, 1)$, per $0 \leq x \leq 1$. Questo spazio quoziente è rappresentato tramite le orientazioni e l'etichettamento dei lati del quadrato indicato in figura 1.13. Può essere inoltre espresso tramite lo schema $aba^{-1}b^{-1}$. Grazie alla proprietà universale del quoziente (teorema 1.2.6), si ha che X/\sim è omeomorfo a $S^1 \times S^1$.

Esempio 1.3.9. Come abbiamo visto nell'esempio 1.2.4, il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfo allo spazio quoziente del disco, D^2/\sim , dove

$$x \sim x' \iff x = x' \text{ oppure } x, x' \in S^1 \subset D^2 \text{ e } x = -x'.$$

Poiché il quadrato è omeomorfo al disco, questo spazio può anche essere rappresentato dalle orientazioni e l'etichettamento dei lati del quadrato indicato in figura 1.14. Può essere inoltre espresso dallo schema $abab$.

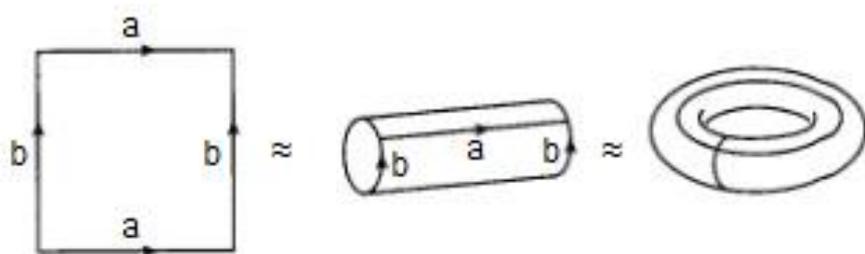


Figura 1.13: Costruzione di un toro a partire da una regione quadrata.

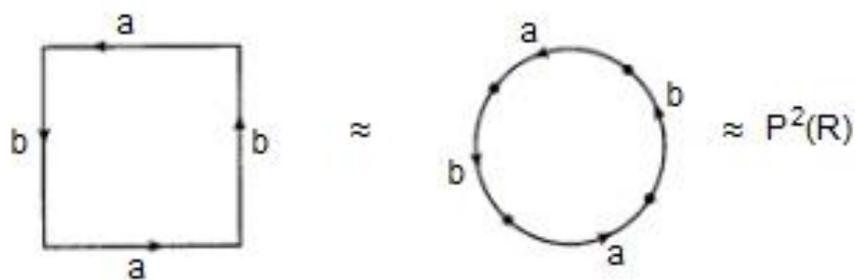


Figura 1.14: Costruzione di un piano proiettivo a partire da una regione quadrata.

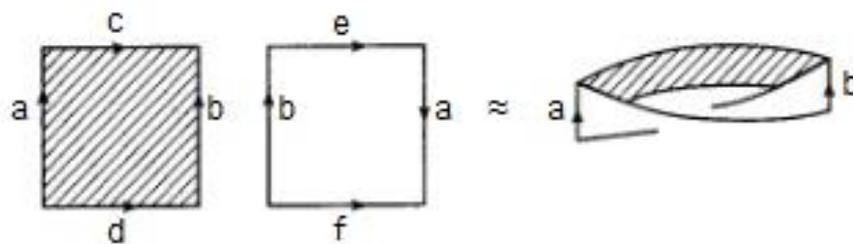


Figura 1.15: Lo spazio X ottenuto dall'etichettamento è connesso.

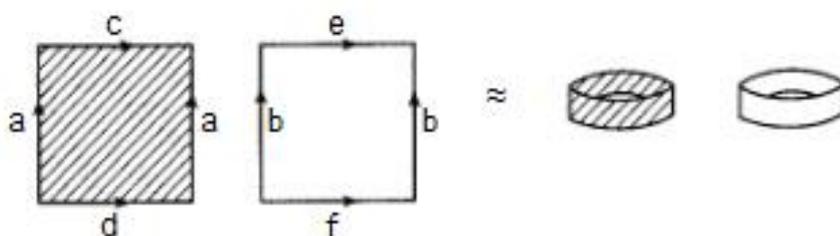


Figura 1.16: Lo spazio X ottenuto dall'etichettamento non è connesso.

Ora estendiamo la definizione ad un numero finito k di regioni poligonali. Dato un numero finito P_1, \dots, P_k di regioni poligonali disgiunte, insieme con orientazioni e un etichettamento dei loro lati, si può costruire lo spazio quoziente X nello stesso modo adottato nel caso di una regione poligonale, incollando insieme i lati di queste regioni poligonali. Inoltre si specificano orientazioni e etichette nello stesso modo, per mezzo di k schemi d'etichettamento.

In base al particolare schema, lo spazio X ottenuto può essere o non essere connesso.

Esempio 1.3.10. La figura 1.15 indica un etichettamento dei lati di due quadrati tale che lo spazio quoziente risultante (il nastro di Möbius) è connesso. Questo spazio può essere anche ottenuto da un singolo quadrato utilizzando lo schema di etichettamento $abac$.

Esempio 1.3.11. La figura 1.16 indica uno schema di etichettamento per i lati di due quadrati tale che lo spazio quoziente risultante non è connesso.

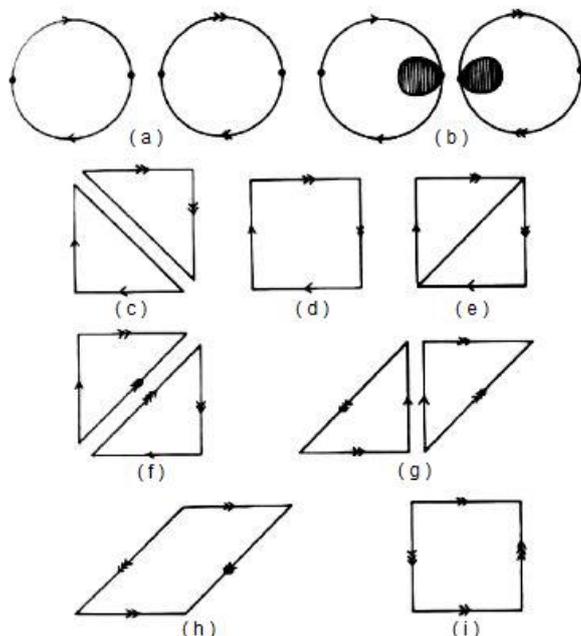


Figura 1.17: Somma connessa di due piani proiettivi.

1.4 Somma connessa

Definizione 1.4.1. Siano S_1 e S_2 superfici disgiunte. La loro *somma connessa*, denotata con $S_1 \# S_2$, si ottiene tagliando un piccolo foro circolare in ogni superficie, e in seguito incollando le due superfici insieme lungo i bordi dei fori. Per essere precisi, si scelgono i sottospazi $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$ tale che D_1 e D_2 siano dischi chiusi. Sia S'_i il complemento dell'interno di D_i in S_i per $i = 1, 2$. Si sceglie un omeomorfismo h del bordo circolare D_1 sul bordo di D_2 . Allora $S_1 \# S_2$ è lo spazio quoziente di $S'_1 \cup S'_2$ ottenuto identificando i punti x e $h(x)$ per tutti i punti x appartenenti al bordo di D_1 . Si ha che $S_1 \# S_2$ è una superficie.

Esempio 1.4.2. Se S_2 è una superficie sferica, allora $S_1 \# S_2$ è omeomorfa a S_1 .

Esempio 1.4.3. Se S_1 e S_2 sono piani proiettivi, allora $S_1 \# S_2$ è la bottiglia di Klein.

Vogliamo dare una dimostrazione geometrica di questo fatto. Partiamo da due piani proiettivi come nella figura 1.17 (a); tagliamo via due dischi aperti come indicato in (b); lo spazio che ne risulta è omeomorfo allo spazio

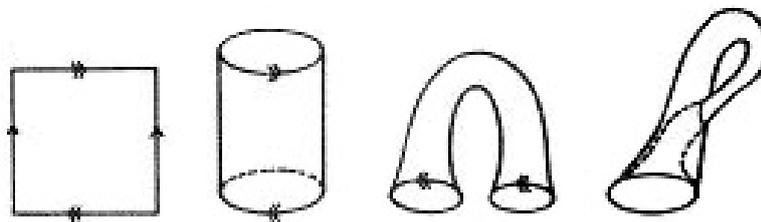


Figura 1.18: Costruzione di una bottiglia di Klein a partire da una regione quadrata.

(c). Ricucendo (ossia prendendo la somma connessa) otteniamo (d). Infine, tagliando di nuovo, come illustrato in (e), otteniamo lo spazio d'identificazione (f), e riposizionando le due parti otteniamo (g). Infine identificando due dei lati otteniamo (h) che è omeomorfo a (i), ossia a una bottiglia di Klein (figura 1.18).

Osservazione 1.4.4. Intuitivamente la somma connessa di una superficie con un toro è ottenuta *attaccando un manico* alla superficie, ove un manico non è altro che un toro da cui è stato tagliato via un disco. Si può attaccare anche un cilindro; per fare ciò si tagliano due dischi aperti dalla superficie e vi si cuce sopra un cilindro; se il cilindro viene attaccato seguendo la direzione delle frecce sui cerchi (come accade nella figura 1.19 (a)), questa operazione equivale ad attaccare un manico; se invece si inverte una delle frecce, questa operazione equivale a fare la somma connessa della superficie con una bottiglia di Klein.

Osservazione 1.4.5. Se togliamo da $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una piccola regione omeomorfa a D^2 , ci rimane una striscia di Möbius (si veda la figura 1.20); possiamo quindi pensare al piano proiettivo reale come ad un disco con una striscia di Möbius cucita sul bordo.

La somma connessa di una superficie con il piano proiettivo reale può dunque essere pensata come la superficie stessa a cui è stato attaccato un nastro di Möbius (figura 1.21).

Definizione 1.4.6. Consideriamo lo spazio ottenuto da una regione poligonale P di $4n$ lati, per mezzo dello schema di etichettamento

$$(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \dots (a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}).$$

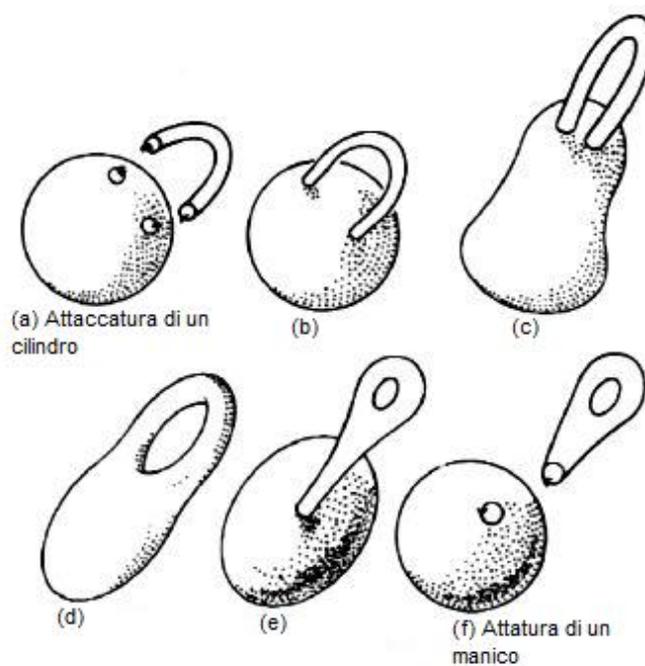


Figura 1.19: Attaccatura di un cilindro e di un manico.

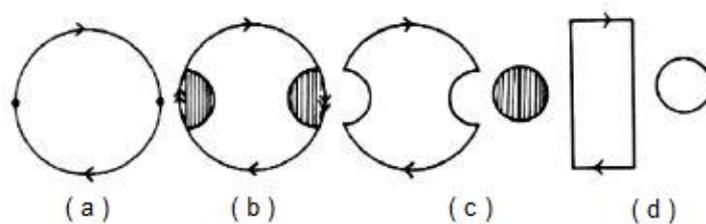


Figura 1.20: Piano proiettivo come un disco con una striscia di Möbius cucita sul bordo.

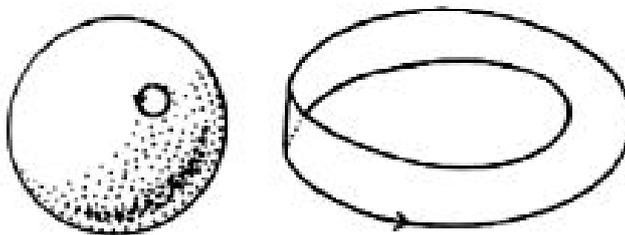


Figura 1.21: Attaccatura di un nastro di Möbius.

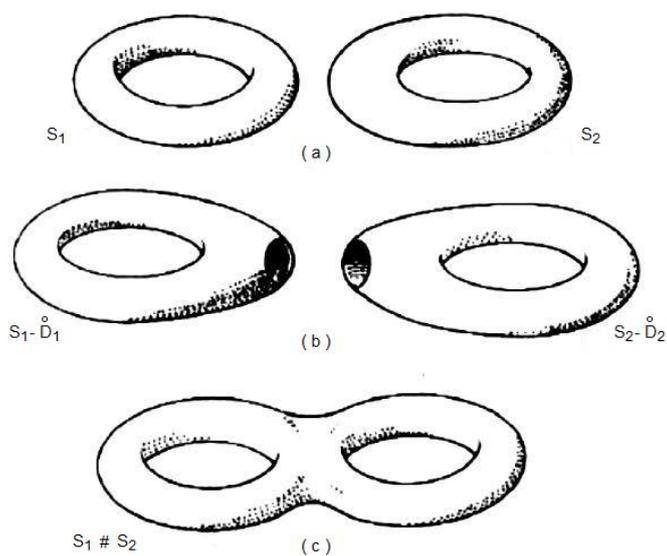


Figura 1.22: Somma connessa di due tori.

Questo spazio è chiamato *n*-volte la somma connessa di tori, o semplicemente *n*-volte il toro, e denotato con

$$T \# T \# \dots \# T.$$

Esempio 1.4.7. Il doppio toro è la somma connessa di due tori. Si veda la figura 1.22.

Definizione 1.4.8. Sia $m > 1$. Consideriamo lo spazio ottenuto da una regione poligonale P di $2m$ lati nel piano, per mezzo dello schema di etichettamento

$$(a_1 a_1)(a_2 a_2) \dots (a_m a_m).$$

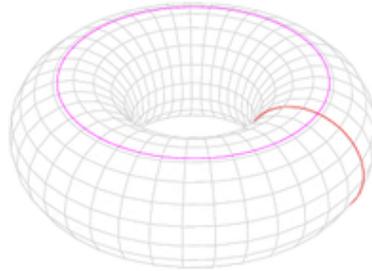


Figura 1.23: Taglio del toro lungo le due circonferenze generatrici.

Questo spazio è chiamato *m-volte la somma connessa di piani proiettivi*, o semplicemente *m-volte il piano proiettivo*, e denotato con

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

Definizione 1.4.9. Si dice che un sottospazio C di uno spazio topologico è una *curva semplice chiusa* se C è omeomorfo alla circonferenza S^1 .

Intuitivamente il *genere* di una superficie è come il numero più grande di curve semplici chiuse disgiunte che possono essere disegnate sulla superficie senza separarla in due componenti connesse distinte. Il genere di una superficie è informalmente il numero di manici che questa contiene.

Esempio 1.4.10. Una sfera ha genere 0: ogni curva chiusa tracciata su di essa la separa in due calotte sferiche.

Esempio 1.4.11. Un toro ha genere 1: è possibile tagliare il toro lungo una curva chiusa che segue una delle due circonferenze generatrici (figura 1.23), ottenendo in ogni caso un cilindro connesso; ogni altro taglio supplementare porterebbe ad ottenere due superfici sconnesse.

Esempio 1.4.12. Il piano proiettivo ha genere 1. Il doppio toro e la bottiglia di Klein hanno genere 2.

1.5 Superfici orientabili e non orientabili

Definizione 1.5.1. Una superficie si dice *orientabile* se non contiene alcuna striscia di Möbius, e *non orientabile* se contiene una striscia di Möbius.

Come abbiamo detto nell'osservazione 1.4.5, il piano proiettivo può essere pensato come un disco con una striscia di Möbius cucita sul bordo. Il piano proiettivo contiene dunque una striscia di Möbius e pertanto risulta essere

una superficie non orientabile.

Si è visto nell'esempio 1.4.3 che la bottiglia di Klein è la somma connessa di due piani proiettivi, dunque contiene anch'essa una striscia di Möbius e pertanto è una superficie non orientabile.

Esempi di superfici orientabili sono invece la sfera, il toro e il doppio toro.

Definizione 1.5.2. La superficie

$$S^2 \# \underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m,$$

indicata brevemente con $S^2 \# mT$ ($m \geq 0$), è chiamata la *superficie standard orientabile di genere m* ; mentre

$$S^2 \# \underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_n,$$

indicata brevemente con $S^2 \# n\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), è chiamata la *superficie standard non orientabile di genere n* .

Ci chiediamo ora quale tipo di superficie si ottiene prendendo una somma connessa di tori e di piani proiettivi reali; in altre parole ci chiediamo a quale superficie standard è omeomorfa la superficie

$$\underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m \# \underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_n = mT \# n\mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

Questa superficie è certamente non orientabile e quindi sarà omeomorfa a $k\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ per qualche k . Nel lemma seguente viene determinato il valore di tale k nel caso $m = n = 1$.

Lemma 1.5.3. $T \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Si veda [1], pag 92.

Capitolo 2

Teorema di classificazione delle superfici

In questo capitolo verrà enunciato e dimostrato il teorema di classificazione delle superfici, teorema centrale di questa tesi. Il capitolo si apre con la descrizione della nozione di gruppo fondamentale; in seguito vengono presentati l'enunciato del teorema e la prima parte della dimostrazione; successivamente vengono introdotti concetti e risultati utili per la dimostrazione della seconda parte del teorema, fra cui la presentazione di un gruppo tramite generatori e relazioni, il teorema di Seifert-Van Kampen e l'abelianizzazione di un gruppo. Il capitolo si conclude infine con la dimostrazione della seconda, e ultima, parte del teorema.

2.1 Il gruppo fondamentale

In questa sezione verrà definito il gruppo fondamentale di una superficie. Così la sezione si apre con l'introduzione dei concetti di arco (o cammino) e di omotopia. In seguito viene definita una relazione di equivalenza fra due archi: il gruppo fondamentale sarà definito come l'insieme delle classi di equivalenza relativo a tale relazione.

Definizione 2.1.1. Un *arco* (o *cammino*) in uno spazio X è un'applicazione continua $f : [0, 1] \rightarrow X$; $f(0)$ è detto *punto iniziale* e $f(1)$ *punto finale* dell'arco; diremo che f unisce $f(0)$ a $f(1)$ oppure che f è un arco da $f(0)$ a $f(1)$.

Si noti che l'arco è definito come l'applicazione f e non come l'immagine $f([0, 1])$, che è invece chiamata *curva* in X .

L'esempio più semplice di arco è l'arco costante $\epsilon_x : [0, 1] \rightarrow X$ definito da

$\epsilon_x(t) = x$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Nel prossimo lemma vediamo due semplici ma importanti costruzioni di nuovi archi a partire da archi dati.

Lemma 2.1.2. (i) *Sia f un arco in X e definiamo \bar{f} come $\bar{f}(t) = f(1-t)$; allora anche \bar{f} è un arco in X .*

(ii) *Siano f e g due archi in X tali che il punto finale di f coincida con il punto iniziale di g ; allora l'applicazione $f * g : [0, 1] \rightarrow X$ definita da*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un arco in X .

Dimostrazione. Si veda [1], pag 103.

Definizione 2.1.3. Due funzioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono dette *omotope* se esiste un'applicazione continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tale che $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$ per ogni $x \in X$. L'applicazione F è detta un'*omotopia* tra f_0 e f_1 . Per indicare che f_0 e f_1 sono omotope (tramite l'omotopia F) scriveremo $f_0 \approx f_1$ o $F : f_0 \approx f_1$. Per ogni $t \in [0, 1]$ indicheremo con $f_t(x)$ il valore di $F(x, t)$, ottenendo così una funzione continua $f_t : X \rightarrow Y$.

Si osservi che ogni arco $f : I \rightarrow Y$ è omotopo all'arco costante $\epsilon_{f(0)}$ tramite l'omotopia $F : I \times I \rightarrow Y$ definita da $F(x, t) = f((1-t)x)$. Per evitare un tale fenomeno (che rende banale la nozione di omotopia tra archi), introdurremo un concetto più generale di omotopia: quello di omotopia relativa ad un sottoinsieme A , per la quale si richiede che l'omotopia lasci fissi tutti i punti di A .

Definizione 2.1.4. Siano A un sottoinsieme di X e $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ due funzioni continue. Diciamo che f_0 e f_1 sono *omotope relativamente ad A* se esiste un'omotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ tra f_0 e f_1 tale che, se $a \in A$, $F(a, t)$ non dipende da t ; in altre parole, $F(a, t) = f_0(a)$ per ogni $a \in A$ e per ogni $t \in I$.

Dalla definizione segue che $f_0(a) = f_1(a)$ per ogni $a \in A$. In questo caso chiamiamo F un'*omotopia relativa ad A* e scriviamo $f_0 \approx f_1$ (*rel A*) o $f_0 \approx_A f_1$. La relazione \approx_A è un'equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da X a Y .

Definizione 2.1.5. Due archi f_0 e f_1 in X sono *equivalenti* ($f_0 \sim f_1$), se f_0 e f_1 sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$.

Si noti che due archi f_0 e f_1 sono equivalenti se e solo se esiste una funzione continua $F : I \times I \rightarrow X$ tale che

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= f_0(t), & F(t, 1) &= f_1(t) && \text{per ogni } t \in I, \\ F(0, s) &= f_0(0), & F(1, s) &= f_0(1) && \text{per ogni } s \in I. \end{aligned}$$

In tale caso scriviamo $F : f_0 \sim f_1$. \sim è una relazione di equivalenza sull'insieme degli archi di X ; denotiamo con $[f]$ la classe di equivalenza dell'arco f .

Lemma 2.1.6. *Siano f_0, f_1, g_0, g_1 archi in X , con $f_0(1) = g_0(0)$ e $f_1(1) = g_1(0)$. Se $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$, allora $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.*

Dimostrazione. Se $F : f_0 \sim f_1$ e $G : g_0 \sim g_1$ sono due omotopie relative a $\{0, 1\}$, allora $H : I \times I \rightarrow X$ definita come

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(2t - 1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotopia tra $f_0 * g_0$ e $f_1 * g_1$. □

Ponendo

$$[f][g] = [f * g],$$

si ottiene un prodotto ben definito di due classi di equivalenza, come si deduce dal lemma 2.1.6.

Vediamo ora che il prodotto di due classi di equivalenza di archi, quando è definito (ossia $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$), è un'operazione associativa; in altre parole

$$([f][g])[h] = [f]([g][h]).$$

Lemma 2.1.7. *Siano f, g, h tre archi in X tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$; allora $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.*

Dimostrazione. I due archi $(f * g) * h$ e $f * (g * h)$ sono definiti da

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(t) &= \begin{cases} f(4t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ g(4t - 1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1; \end{cases} \\ (f * (g * h))(t) &= \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(4t - 2) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ h(4t - 3) & \text{se } \frac{3}{4} \leq t \leq 1; \end{cases} \end{aligned}$$

allora l'omotopia cercata è

$$F(t, s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}, \\ g(4t - s - 1) & \text{se } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}, \\ h\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \text{se } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

Dato un punto $x \in X$, ricordiamo che ϵ_x denota l'arco costante in x (ossia $\epsilon_x(t) = x$ per ogni $t \in X$); la classe di equivalenza dell'arco costante si comporta come elemento neutro (a destra e a sinistra); in altre parole

$$[\epsilon_x][f] = [f] = [f][\epsilon_y],$$

per ogni arco f che inizia in x e termina in y , come si deduce dal seguente lemma.

Lemma 2.1.8. *Se f è un arco in X con punto iniziale x e punto finale y , allora $\epsilon_x * f \sim f$ e $f * \epsilon_y \sim f$.*

Dimostrazione. Per verificare $\epsilon_x * f \sim f$ si considera l'omotopia $F : I \times I \rightarrow X$ definita come

$$F(t, s) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2}, \\ f\left(\frac{2t-1+s}{1+s}\right) & \text{se } \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

Consideriamo infine il problema dell'esistenza dell'inverso moltiplicativo per una classe di equivalenza. Ricordiamo che dato un arco f , l'arco \bar{f} è definito come $\bar{f}(t) = f(1-t)$, e osserviamo che due archi f e g sono equivalenti se e solo se \bar{f} e \bar{g} lo sono. Il lemma seguente asserisce che la classe di equivalenza di \bar{f} si comporta come inverso moltiplicativo per la classe di equivalenza di f ; in altre parole

$$[f][\bar{f}] = [\epsilon_x] \quad [\bar{f}][f] = [\epsilon_y]$$

per ogni arco f che inizia in x e termina in y .

Lemma 2.1.9. *Se f è un arco in X con punto iniziale x e punto finale y , allora $f * \bar{f} \sim \epsilon_x$ e $\bar{f} * f \sim \epsilon_y$.*

Dimostrazione. Verifichiamo $f * \bar{f} \sim \epsilon_x$. L'arco $f * \bar{f}$ è dato da

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si ha che $F : I \times I \rightarrow X$, definita come

$$F(t, s) = \begin{cases} f(2t(1-s)) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f((2-2t)(1-s)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

è un'omotopia tra $f * \bar{f}$ e ϵ_x . □

L'insieme delle classi di equivalenza degli archi di uno spazio (dove la relazione di equivalenza è l'omotopia relativa a $\{0, 1\}$) sembra soddisfare gli assiomi di gruppo. Ci sono però due difficoltà: una è che il prodotto di due classi non è sempre definito e l'altra è che l'elemento neutro non è lo stesso per tutti gli archi.

Introduciamo quindi la nozione di arco chiuso.

Definizione 2.1.10. Un arco f è detto *chiuso* se $f(0) = f(1)$. Se $f(0) = f(1) = x$, diciamo che f è un arco chiuso *di base* x . Un arco chiuso è anche chiamato *laccio*.

Si noti che il prodotto $f * g$ risulta definito per ogni coppia di archi chiusi con la stessa base.

Definizione 2.1.11. L'insieme delle classi di equivalenza di archi chiusi di base il punto $x \in X$ viene denotato con $\pi(X, x)$. Questo insieme è dotato di un'operazione binaria ben definita da $[f][g] = [f * g]$; con questa operazione $\pi(X, x)$ risulta essere un gruppo, chiamato *gruppo fondamentale* o *primo gruppo di omotopia* di X con punto base x .

Esempio 2.1.12. Il gruppo fondamentale della circonferenza è isomorfo a \mathbb{Z} :

$$\pi(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. Si veda [1], pag 156.

2.2 Il teorema di classificazione: I parte

La sezione si apre con due definizioni: la definizione di spazio topologico semplicemente connesso e la definizione del concetto di curva chiusa semplice che separa una superficie, concetti utili per comprendere la dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici. Successivamente viene presentato l'enunciato di tale teorema, seguito dalla prima parte della dimostrazione. La seconda parte della dimostrazione si trova nella sezione 2.6, in quanto prima di affrontarla sono necessari ulteriori teoremi e definizioni che verranno introdotti in seguito.

Definizione 2.2.1. Uno spazio topologico si dice *semplicemente connesso* se è connesso per archi e ogni curva chiusa giacente su di esso può essere deformata fino a ridursi a un singolo punto.

Intuitivamente uno spazio è semplicemente connesso quando è “privo di buchi”. Dunque, ad esempio, la sfera risulta essere semplicemente connessa, mentre il toro non è semplicemente connesso.

Definizione 2.2.2. Si dice che una curva chiusa semplice C , su una superficie S , *separa* S , se $S \setminus C$ non è connesso, ossia se, tagliando lungo la curva C , la superficie S si spezza in due parti (si veda la figura 2.1).

Osservazione 2.2.3. Da questo concetto deriva la terminologia *semplicemente connesso*. Consideriamo infatti le due superfici della figura 2.1: la sfera è connessa in modo più semplice del toro, in quanto la prima si riesce a separare con una curva chiusa semplice giacente su di essa, mentre non è possibile separare il secondo con una sola curva chiusa semplice.

Teorema 2.2.4. (*Classificazione delle superfici*) Ogni superficie S è omeomorfa ad una e una sola delle superfici seguenti:

$$S^2 \# \underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m \quad (m \geq 0),$$

$$S^2 \# \underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_n \quad (n \geq 1).$$

Come già anticipato all'inizio di questo capitolo, la dimostrazione di questo teorema si può dividere in due parti. Nella prima parte mostreremo, lasciando accennati alcuni passaggi, che ogni superficie è omeomorfa ad almeno una delle superfici sopra elencate, mentre nella seconda parte faremo vedere che le superfici sopra elencate sono a due a due non omeomorfe.

Dimostrazione. I parte. Supponiamo che una superficie M contenga una curva chiusa semplice C che non separa M . Come è mostrato in figura

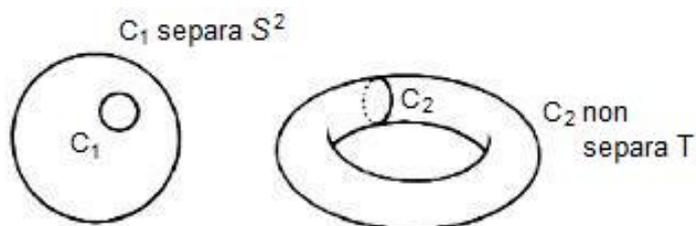


Figura 2.1: Esempi di curve semplici chiuse che separano e non separano una superficie.

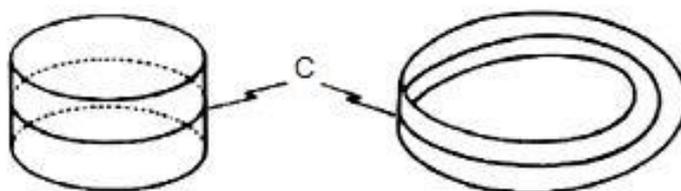


Figura 2.2: Esempi di aperto contenente una curva semplice chiusa.

2.2, un aperto contenente C è (i) un cilindro oppure (ii) una striscia di Möbius. Rimuoviamo ora dalla superficie M il cilindro o la striscia di Möbius, cioè l'aperto considerato, senza però rimuoverne il bordo. Nel primo caso cuciamo due dischi sui due fori così aperti, nel secondo caso cuciamo un disco sul foro così aperto. Si ottiene in questo modo una nuova superficie M_1 ; evidentemente M non è altro che la superficie ottenuta attaccando a M_1 un cilindro (in uno dei due modi possibili descritti nell'osservazione 1.4.4) o una striscia di Möbius. In altri termini, per ciò che si è detto nelle osservazioni 1.4.4 e 1.4.5 del capitolo 1,

$$M = M_1 \# T \quad \text{o} \quad M = M_1 \# K \quad \text{o} \quad M = M_1 \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

Consideriamo ora M_1 e una curva semplice chiusa in M_1 che non separa M_1 (se ne esiste una): ripetendo il procedimento appena illustrato otterremo una superficie M_2 tale che

$$M_1 = M_2 \# T \quad \text{o} \quad M_1 = M_2 \# K \quad \text{o} \quad M_1 = M_2 \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

Procedendo in questo modo si ottiene, dopo i passi, una superficie M_i tale che

$$M = M_i \# i_1 T \# i_2 K \# i_3 \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),$$

dove $i_1 + i_2 + i_3 = i$. Con tale procedimento si ottengono parti sempre più piccole della superficie di partenza. Dunque, intuitivamente, dopo un numero finito k di passi, si ottiene necessariamente una superficie M_k semplicemente connessa, cioè priva di buchi: il che vuol dire che ogni curva chiusa semplice in M_k separa M_k . Per definizione di semplice connessione, l'unica superficie separata da ogni sua curva chiusa semplice è la sfera S^2 .

Finora abbiamo mostrato che M è omeomorfo a

$$S^2 \# lT \# mK \# n\mathbb{P}^2(\mathbb{R}),$$

per qualche $l, m, n \geq 0$ ($l + m + n = k$). Con un'applicazione del lemma 1.5.3 si dimostra che $S^2 \# lT \# mK \# n\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfo a

$$\begin{array}{ll} S^2 \# lT & \text{se } m + n = 0, \\ S^2 \# (2l + 2m + n)\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) & \text{se } m + n > 0. \end{array}$$

Per completare la dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici bisogna dimostrare che le superfici in esso elencate sono a due a due non omeomorfe: questa seconda parte verrà dimostrata nella sezione 2.6.

2.3 Presentazione di un gruppo tramite generatori e relazioni

Questa sezione si apre con una prima definizione di generatori, relazioni e presentazione di un gruppo. Successivamente ne viene data una definizione più rigorosa in termini di gruppo quoziente e classi di equivalenza.

Definizione 2.3.1. Se S è un sottospazio di un gruppo G , allora si dice che S genera G se ogni elemento di G può essere scritto come prodotto di potenze positive e negative di elementi di S . Una condizione equivalente è la seguente: S non è contenuto in alcun sottogruppo proprio di G .

Esempio 2.3.2. Se G è un gruppo ciclico di ordine n , $G = \{x, x^2, x^3, \dots, x^n = 1\}$, allora lo spazio $S = \{x\}$ genera G .

Se lo spazio S genera il gruppo G , alcuni prodotti di elementi di S possono essere uguali all'elemento identità di G . Ad esempio,

- (a) se $x \in S$ e $x \in G$, allora $xx^{-1} = 1$, perchè G è un gruppo;
- (b) se G è un gruppo ciclico di ordine n generato da $\{x\}$, allora $x^n = 1$.

Ogni prodotto di elementi di S che è uguale all'identità è chiamato *relazione* fra gli elementi dello spazio generatore S . Possiamo distinguere due tipi di relazione fra i generatori: *relazione triviale*, come ad esempio (a), che è una diretta conseguenza degli assiomi per un gruppo e si ha con qualunque scelta di S e G ; *relazione non triviale*, come ad esempio (b), che non è una conseguenza degli assiomi per un gruppo, ma dipende dalla particolare scelta di G e S . Queste nozioni ci conducono all'idea che possiamo completamente descrivere un gruppo elencando gli elementi dello spazio generatore S , e elencando le relazioni non triviali fra essi. Una descrizione del gruppo G di questo tipo è chiamata una *presentazione*.

Definiamo ora in modo rigoroso che cos'è una presentazione. Consideriamo un insieme S e pensiamo gli elementi di S come simboli non commutativi. Utilizziamo ora questi simboli per formare delle parole, ossia delle espressioni della forma

$$\omega = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n},$$

dove $x_i \in S$ e $\epsilon_i = \pm 1$ (i simboli x_i non sono necessariamente distinti). In altri termini, dall'insieme $S = \{y_j \mid j \in J\}$ si ottiene un "alfabeto" $\{y_j, y_j^{-1} \mid j \in J\}$, che viene utilizzato per formare delle "parole". Fra le parole viene inclusa anche la parola *vuota*, che non contiene alcun simbolo. Una parola si dice *ridotta* se non contiene il simbolo x^1 seguito dal simbolo x^{-1} (o viceversa) per alcun $x \in S$; ad esempio $x^1 x^1 x^1$ è una parola ridotta,

ma $x^1x^{-1}x^1$ non lo è. A partire da una parola qualunque si può ottenere una parola ridotta cancellando le coppie del tipo x^1x^{-1} e $x^{-1}x^1$. Due parole sono da considerarsi uguali se e solo se le parole ridotte ottenute a partire da esse sono identiche, cioè contengono gli stessi simboli nello stesso ordine.

Definizione 2.3.3. Sull'insieme delle parole formate con un dato alfabeto definiamo il prodotto ottenuto giustapponendo due parole ridotte (e riducendo il risultato, se necessario). Con tale legge di composizione, l'insieme delle parole ridotte forma un gruppo G . La parola vuota è l'elemento neutro, e l'inversa della parola $\omega = x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ è data da

$$\omega^{-1} = x_n^{-\epsilon_n} \cdots x_2^{-\epsilon_2} x_1^{-\epsilon_1}.$$

Il gruppo G si chiama *gruppo libero generato da S* . Se S è un insieme finito che consiste di n elementi, il gruppo libero generato da S viene chiamato *gruppo libero su n generatori*.

Può essere utile dare una descrizione dei gruppi liberi in termini di classi di equivalenza di parole. Consideriamo le seguenti operazioni sulle parole:

- (i) inserire xx^{-1} o $x^{-1}x$ ($x \in S$) in una parola;
- (ii) cancellare xx^{-1} o $x^{-1}x$ ($x \in S$) da una parola.

Diremo che due parole ω e ω' sono equivalenti se ω' può essere ottenuta da ω con un numero finito di operazioni del tipo (i) o (ii). Evidentemente ogni parola è equivalente ad una parola ridotta. Il gruppo libero generato da S può essere allora pensato come l'insieme delle classi di equivalenza di parole di S (con l'operazione di giustapposizione).

Definizione 2.3.4. Sia ora R un insieme di parole nell'alfabeto S e consideriamo le seguenti operazioni sulle parole:

- (iii) inserire r o r^{-1} ($r \in R$) in una parola;
- (iv) cancellare r o r^{-1} ($r \in R$) da una parola.

Diremo ora che due parole ω e ω' sono equivalenti se ω' può essere ottenuta da ω con un numero finito di operazioni del tipo (i), (ii), (iii), (iv). Si verifica immediatamente che ciò definisce una relazione di equivalenza, e che l'insieme delle classi di equivalenza, con l'operazione di giustapposizione, forma un gruppo. Questo gruppo è denotato con $\langle S \mid R \rangle$ e la coppia $(S; R)$ viene detta una *presentazione* del gruppo. Gli elementi di S sono chiamati *generatori* del gruppo e quelli di R *relazioni*.

Si osservi che una parola α in S può essere uguale a 1 in $\langle S \mid R \rangle$ pur non appartenendo a R ; tuttavia una tale parola può essere ricondotta alla parola vuota con un numero finito di operazioni del tipo (i), (ii), (iii), (iv). In tale caso diremo che α è una *conseguenza* delle relazioni in R . Ad esempio, $x^a y^b x^{-a} y^{-b}$ è una conseguenza della relazione $xyx^{-1}y^{-1}$.

Osservazione 2.3.5. Si dice che un dato gruppo G è presentato da $(S; R)$ se G è isomorfo al gruppo $\langle S \mid R \rangle$. Ogni gruppo è presentato da $(S_G; R_G)$, dove

$$S_G = \{g \mid g \in G\}, \quad R_G = \{(xy)^1 y^{-1} x^{-1} \mid x, y \in G\}$$

(per $(xy)^1$ si intende il simbolo in S_G che rappresenta l'elemento xy di G).

Esempio 2.3.6. Il gruppo simmetrico S_n è il gruppo formato dalle permutazioni degli elementi dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Sia σ_i la permutazione che scambia l' i -esimo elemento con l' $(i+1)$ -esimo: tale permutazione si indica con $\sigma_i = (i, i+1)$ ed è detta *trasposizione elementare*. Allora il sottospazio S di S_n , $S = \{\sigma_i, i = 1, \dots, n-1\}$, genera S_n e si ha la seguente presentazione:

$$S_n = \langle \sigma_i = (i, i+1) \mid \sigma_i^2 = 1, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ (se } j \neq i \pm 1), \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle.$$

Dimostrazione. Si veda [7], pag 52.

Sfruttando i concetti di generatori, relazioni e presentazione appena descritti, presentiamo ora due nozioni che ci saranno utili per capire i teoremi enunciati nelle sezioni successive: il prodotto libero di gruppi e l'abelianizzazione di un gruppo.

La definizione di generatore data per un sottospazio S di G può essere estesa ad una famiglia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ di sottogruppi di G .

Definizione 2.3.7. Sia G un gruppo. Se $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ è una famiglia di sottogruppi di G , diciamo che questi gruppi *generano* G se ogni elemento x di G può essere scritto come un prodotto finito di elementi dei gruppi G_α . Questo significa che c'è una sequenza finita (x_1, \dots, x_n) , generalmente non unica, di elementi dei gruppi G_α tale che $x = x_1 \cdots x_n$. Una tale sequenza è chiamata *parola* (di lunghezza n) nei gruppi G_α ; tale parola rappresenta l'elemento x di G .

Definizione 2.3.8. Sia G un gruppo; sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una famiglia di sottogruppi di G che generano G . Supponiamo che $G_\alpha \cap G_\beta$ contenga solo l'elemento identità per ogni $\alpha \neq \beta$. Diciamo che G è il *prodotto libero* dei gruppi G_α se per ogni $x \in G$, esiste un'unica parola ridotta nei gruppi G_α che rappresenta x . In questo caso scriviamo

$$G = \prod_{\alpha \in J}^* G_\alpha,$$

o nel caso finito, $G = G_1 * \cdots * G_n$.

Definizione 2.3.9. Se x e y sono due elementi qualsiasi di un gruppo G , la notazione $[x, y]$ denota l'elemento $xyx^{-1}y^{-1} \in G$ ed è chiamato *commutatore* di x e y (nell'ordine dato). La notazione $[G, G]$ denota il sottogruppo di G generato da tutti i commutatori; è chiamato *sottogruppo commutatore* e si verifica che è un sottogruppo normale.

Il gruppo quoziente $G/[G, G]$ è abeliano.

Definizione 2.3.10. Sia $G = \langle S \mid R \rangle$. Definiamo *abelianizzazione* di G il gruppo

$$AG = \langle S \mid R \cup \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S\} \rangle;$$

esso si ottiene quindi aggiungendo alle relazioni di G l'ulteriore relazione $xy = yx$ per ogni $x, y \in G$.

2.4 Il teorema di Seifert-Van Kampen

Ci poniamo ora il problema di determinare il gruppo fondamentale di uno spazio X unione di due sottospazi aperti U e V , aventi intersezione connessa per archi.

Cominciamo con l'enunciare un teorema che ci sarà utile nella dimostrazione del teorema di Seifert-Van Kampen.

Teorema 2.4.1. *Supponiamo $X = U \cup V$, dove U e V sono sottospazi aperti di X . Supponiamo che $U \cap V$ sia connessa per archi, e che $x_0 \in U \cap V$. Siano i e j le inclusioni di U e V , rispettivamente, in X . Allora le immagini degli omomorfismi indotti $i_* : \pi(U, x_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$ e $j_* : \pi(V, x_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$ generano $\pi(X, x_0)$.*

Dimostrazione. Si veda [9] pag 368.

Ora mostriamo che $\pi(X, x_0)$ è, infatti, completamente determinato da questi due gruppi, dal gruppo $\pi(U \cap V, x_0)$, e dai vari omomorfismi che questi gruppi inducono attraverso l'inclusione.

Il teorema che stiamo per enunciare ci sarà utile nella seconda parte della dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici.

Teorema 2.4.2. *(Seifert-Van Kampen) Sia $X = U \cup V$, dove U, V sono aperti di X ; assumiamo che U , V e $U \cap V$ siano connessi per archi; sia $x_0 \in U \cap V$. Sia H un gruppo, e siano $\phi_1 : \pi(U, x_0) \rightarrow H$ e $\phi_2 : \pi(V, x_0) \rightarrow H$ omomorfismi. Siano i_1, i_2, j_1, j_2 gli omomorfismi indicati nel seguente diagramma, ognuno indotto dall'inclusione.*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi(U, x_0) & & \\
 & \nearrow i_1 & \downarrow j_1 & \searrow \phi_1 & \\
 \pi(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi} & H \\
 & \searrow i_2 & \uparrow j_2 & \nearrow \phi_2 & \\
 & & \pi(V, x_0) & &
 \end{array}$$

Se $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, allora esiste un unico omomorfismo $\Phi : \pi(X, x_0) \rightarrow H$ tale che $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ e $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Questo teorema afferma che se ϕ_1 e ϕ_2 sono omomorfismi arbitrari compatibili con $U \cap V$, allora essi inducono un omomorfismo di $\pi(X, x_0)$ in H .

Dimostrazione. Unicit . Il teorema 2.4.1 ci dice che $\pi(X, x_0)$   generato dalle immagini di j_1 e j_2 . Il valore di Φ sul generatore $j_1(g_1)$ deve essere uguale a $\phi_1(g_1)$, e il suo valore su $j_2(g_2)$ deve essere uguale a $\phi_2(g_2)$. Cos  Φ   completamente determinato da ϕ_1 e ϕ_2 .

Esistenza. Ricordiamo che, dato un cammino f in X , $[f]$ denota la sua classe di equivalenza (dove la relazione di equivalenza   l'omotopia relativa a $\{0, 1\}$) in X . Se f giace in U , allora $[f]_U$ denota la sua classe di equivalenza in U . Le notazioni $[f]_V$ e $[f]_{U \cap V}$ sono definite in modo analogo.

Passo 1. Cominciamo con il definire una mappa ρ , che assegna ad ogni cammino chiuso f di base il punto x_0 che giace in U o in V , un elemento del gruppo H . Definiamo

$$\begin{aligned}
 \rho(f) &= \phi_1([f]_U) & \text{se } f \text{ giace in } U, \\
 \rho(f) &= \phi_2([f]_V) & \text{se } f \text{ giace in } V.
 \end{aligned}$$

Allora ρ   ben definita: infatti nel caso in cui f giaccia sia in U sia in V ,

$$\phi_1([f]_U) = \phi_1 i_1([f]_{U \cap V}) \quad \text{e} \quad \phi_2([f]_V) = \phi_2 i_2([f]_{U \cap V}),$$

e i due elementi sono uguali per ipotesi. L'applicazione ρ soddisfa le seguenti condizioni:

1. se $[f]_U = [g]_U$, o se $[f]_V = [g]_V$, allora $\rho(f) = \rho(g)$;

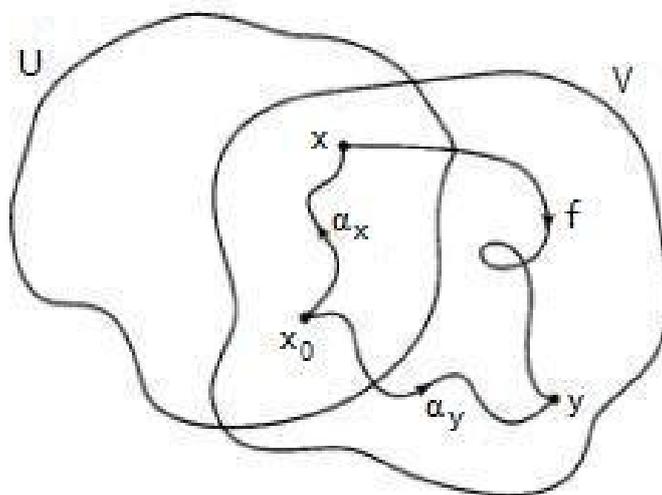


Figura 2.3: Il cammino $L(f) = \alpha_x * f * \bar{\alpha}_y$.

2. se sia f sia g giacciono in U , oppure se entrambi giacciono in V , allora $\rho(f * g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$.

La prima è soddisfatta per definizione, e la seconda è soddisfatta perchè ϕ_1 e ϕ_2 sono omomorfismi.

Passo 2. Ora estendiamo ρ ad una mappa σ che assegna ad ogni cammino giacente in U o in V , un elemento di H , in modo tale che la mappa σ soddisfi la condizione (1) del passo 1, e la condizione (2) quando $f * g$ è definita.

Per cominciare, scegliamo, per ogni $x \in X$ un cammino α_x da x_0 a x , come segue: se $x = x_0$, α_x è il cammino costante in x_0 ; se $x \in U \cap V$, α_x è un cammino in $U \cap V$; se $x \in U$ oppure $x \in V$, ma $x \notin U \cap V$, α_x è un cammino in U o in V rispettivamente. Inoltre, per ogni cammino f in U o in V , definiamo un cammino chiuso $L(f)$ in U o in V , rispettivamente, di base il punto x_0 , tramite l'uguaglianza

$$L(f) = \alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y),$$

dove x è il punto iniziale di f e y è il punto finale di f (figura 2.3). Infine definiamo

$$\sigma(f) = \rho(L(f)).$$

Per prima cosa dimostriamo che σ è un'estensione di ρ . Se f è un cammino chiuso di base il punto x_0 giacente o in U o in V , allora

$$L(f) = e_{x_0} * (f * e_{x_0}),$$

perchè α_{x_0} è il cammino costante in x_0 . Allora $L(f)$ è equivalente a f in U o in V , così che $\rho(L(f)) = \rho(f)$, per la condizione (1) che sappiamo già valere per ρ . Così $\sigma(f) = \rho(f)$.

Per provare la condizione (1) per σ , consideriamo i cammini f e g equivalenti in U o in V . Allora i cammini chiusi $L(f)$ e $L(g)$ sono anch'essi equivalenti in U o in V , così possiamo applicare la condizione (1) per ρ .

Per provare la condizione (2), consideriamo f e g cammini arbitrari in U o in V , tali che $f(1) = g(0)$. Si ha

$$L(f) * L(g) = (\alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)) * (\alpha_y * (g * \bar{\alpha}_z))$$

per opportuni punti x, y e z ; questo cammino chiuso è equivalente a $L(f * g)$ in U o in V . Allora

$$\rho(L(f * g)) = \rho(L(f) * L(g)) = \rho(L(f)) \cdot \rho(L(g))$$

per le condizioni (1) e (2) su ρ . Così $\sigma(f * g) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$.

Passo 3. Estendiamo σ ad una mappa τ che assegna ad un *cammino arbitrario* in X un elemento di H . Come vedremo nei passi 4 e 5, τ soddisferà le seguenti condizioni:

1. se $[f] = [g]$, allora $\tau(f) = \tau(g)$;
2. $\tau(f * g) = \tau(f) \cdot \tau(g)$, se $f * g$ è definito.

Nel passo 3 diamo soltanto la definizione di τ e verifichiamo che sia ben definita secondo tale definizione.

Dato f , scegliamo una suddivisione $s_0 < \dots < s_n$ di $[0, 1]$ tale che f porti ogni sottointervallo $[s_{i-1}, s_i]$ in U o in V . Sia f_i la mappa lineare positiva di $[0, 1]$ in $[s_{i-1}, s_i]$, tramite f . Allora f_i è un cammino in U o in V , e

$$[f] = [f_1] * \dots * [f_n].$$

Se τ è un'estensione di σ e se deve soddisfare (1) e (2), deve essere:

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdot \dots \cdot \sigma(f_n). \quad (2.1)$$

Così useremo questa uguaglianza come definizione di τ . Mostriamo che tale definizione è indipendente dalla scelta della suddivisione. È sufficiente mostrare che il valore $\tau(f)$ rimane invariato se aggiungiamo un singolo punto p alla suddivisione. Sia i l'indice tale che $s_{i-1} < p < s_i$. Se ora calcoliamo $\tau(f)$ usando questa nuova suddivisione, l'unico cambiamento nella formula (2.1) è che il fattore $\sigma(f_i)$ scompare ed è sostituito dal prodotto $\sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i)$, dove f'_i e f''_i eguagliano la mappa lineare positiva di $[0, 1]$ in $[s_{i-1}, p]$ e $[p, s_i]$

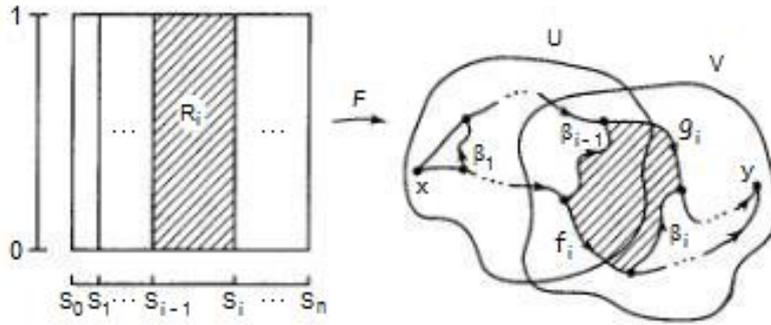


Figura 2.4: L'omotopia F introdotta nel passo 4.

rispettivamente, tramite f . Ma f_i è equivalente a $f'_i * f''_i$ in U o in V , così che $\sigma(f_i) = \sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i)$, per le condizioni (1) e (2) su σ . Così τ è ben definita. Ne segue che τ è un'estensione di σ . Se f giace già in U o in V , possiamo usare la suddivisione banale di $[0, 1]$ per definire $\tau(f)$; allora $\tau(f) = \sigma(f)$ per definizione.

Passo 4. Proviamo la condizione (1) per la mappa τ .

Verifichiamo prima la condizione in un caso speciale. Siano f e g cammini in X da x a y , e sia F un'omotopia fra essi. Assumiamo l'ipotesi aggiuntiva che esista una suddivisione s_0, \dots, s_n di $[0, 1]$ tale che F porti ogni rettangolo $R_i = [s_{i-1}, s_i] \times I$ in U o in V . Mostriamo in questo caso che $\tau(f) = \tau(g)$. Dato i , consideriamo la mappa lineare positiva di $[0, 1]$ in $[s_{i-1}, s_i]$, tramite f o tramite g ; chiamiamo questi due cammini f_i e g_i rispettivamente. La restrizione di F al rettangolo R_i ci dà un'omotopia fra f_i e g_i che ha luogo in U o in V , ma non è un cammino perchè i punti finali dei cammini possono muoversi durante l'omotopia. Consideriamo i cammini tracciati da questi punti finali durante l'omotopia. Definiamo β_i come il cammino $\beta_i(t) = F(s_i, t)$. Allora β_i è un cammino in X da $f(s_i)$ a $g(s_i)$. I cammini β_0 e β_n sono cammini costanti in x e in y , rispettivamente (figura 2.4). Mostriamo che per ogni i ,

$$f_i * \beta_i \simeq_p \beta_{i-1} * g_i$$

con l'omotopia che ha luogo in U o in V .

Nel rettangolo R_i , prendiamo il cammino segmento che percorre la base inferiore e il lato destro di R_i , da $s_{i-1} \times 0$ a $s_i \times 0$ a $s_i \times 1$; se seguiamo questo cammino tramite la mappa F , otteniamo il cammino $f_i * \beta_i$. Analogamente, se prendiamo il cammino segmento che percorre il lato sinistro e la base superiore di R_i e lo seguiamo tramite F , otteniamo il cammino $\beta_{i-1} * g_i$. Siccome

R_i è convesso, c'è un'omotopia in R_i fra questi due cammini segmenti; se la seguiamo tramite F , otteniamo un'omotopia fra $f_i * \beta_i$ e $\beta_{i-1} * g_i$ che ha luogo in U o in V , come desiderato.

Segue dalle condizioni (1) e (2) per σ che

$$\sigma(f_i) \cdot \sigma(\beta_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i),$$

così che

$$\sigma(f_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1}. \quad (2.2)$$

Segue analogamente che, poiché β_0 e β_n sono cammini costanti, $\sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_n) = 1$ (per il fatto che $\beta_0 * \beta_0 = \beta_0$ implica che $\sigma(\beta_0) \cdot \sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_0)$).

Calcoliamo ora

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n).$$

Sostituiamo (2.2) in questa equazione e semplifichiamo; otteniamo l'equazione

$$\tau(f) = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n) = \tau(g).$$

Così abbiamo provato la condizione (1) nel caso speciale.

Ora proviamo la condizione (1) nel caso generale. Dati f e g e un'omotopia F fra essi, scegliamo le suddivisioni s_0, \dots, s_n e t_0, \dots, t_m di $[0, 1]$ tali che F porti ogni sottoretangolo $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ in U o in V . Sia f_j il cammino $f_j(s) = F(s, t_j)$; allora $f_0 = f$ e $f_m = g$. La coppia di cammini f_{j-1} e f_j soddisfa i requisiti del nostro caso speciale, così $\tau(f_{j-1}) = \tau(f_j)$ per ogni j . Segue che $\tau(f) = \tau(g)$, come desiderato.

Passo 5. Ora proviamo la condizione (2) per la mappa τ . Dato il cammino $f * g$ in X , scegliamo una suddivisione $s_0 < \dots < s_n$ di $[0, 1]$ contenente il punto $\frac{1}{2}$ come un punto della suddivisione, tale che $f * g$ porta ogni sottointervallo in U o in V . Sia k l'indice tale che $s_k = \frac{1}{2}$.

Per $i = 1, \dots, k$, la mappa lineare positiva di $[0, 1]$ in $[s_{i-1}, s_i]$, tramite $f * g$ è uguale alla mappa lineare positiva di $[0, 1]$ in $[2s_{i-1}, 2s_i]$, tramite f ; chiamiamo questa mappa f_i . Analogamente, per $i = k + 1, \dots, n$, la mappa lineare positiva di $[0, 1]$ in $[s_{i-1}, s_i]$, tramite $f * g$, è uguale alla mappa lineare positiva di $[0, 1]$ in $[2s_{i-1} - 1, 2s_i - 1]$, tramite g ; chiamiamo questa mappa g_{i-k} . Usando la suddivisione s_0, \dots, s_n per il dominio del cammino $f * g$, abbiamo

$$\tau(f * g) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k) \cdot \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Usando la suddivisione $2s_0, \dots, 2s_k$ per il cammino f , abbiamo

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k).$$

E usando la suddivisione $2s_k - 1, \dots, 2s_n - 1$ per il cammino g , abbiamo

$$\tau(g) = \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Così segue subito la (2).

Passo 6. Risulta quindi dimostrato il teorema. Infatti per ogni *cammino chiuso* f in X di base il punto x_0 , definiamo

$$\Phi([f]) = \tau(f).$$

Le condizioni (1) e (2) mostrano che Φ è un omomorfismo ben definito.

Mostriamo che $\Phi \circ j_1 = \phi_1$. Se f è un cammino chiuso in U , allora

$$\Phi(j_1([f]_U)) = \Phi([f]) = \tau(f) = \rho(f) = \phi_1([f]_U),$$

come desiderato. La dimostrazione di $\Phi \circ j_2 = \phi_2$ è analoga. \square

Il precedente teorema è una moderna formulazione del teorema di Seifert-Van Kampen. Presentiamo ora la versione classica di tale teorema.

Teorema 2.4.3. (*Seifert-Van Kampen, versione classica*). *Assumiamo le ipotesi del teorema precedente. Sia*

$$j : \pi(U, x_0) * \pi(V, x_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$$

l'omomorfismo del prodotto libero che estende gli omomorfismi j_1, j_2 indotti dall'inclusione. Allora j è suriettiva, e il suo nucleo è il più piccolo sottogruppo normale N del prodotto libero che contiene tutti gli elementi rappresentati dalle parole della forma

$$(i_1(g)^{-1}, i_2(g)),$$

per $g \in \pi(U \cap V, x_0)$.

Detto diversamente, il nucleo di j è generato da tutti gli elementi del prodotto libero della forma $i_1(g)^{-1}, i_2(g)$, e i loro coniugati.

Dunque, supponiamo di avere delle presentazioni per i gruppi fondamentali di U , di V e di $U \cap V$:

$$\pi(U \cap V, x_0) = \langle S/R \rangle;$$

$$\pi(U, x_0) = \langle S_1/R_1 \rangle;$$

$$\pi(V, x_0) = \langle S_2/R_2 \rangle.$$

Per ogni elemento $a \in \pi(U, x_0)$ oppure $\in \pi(V, x_0)$, denotiamo con ' a ' la parola in S_1 , rispettivamente in S_2 , che lo rappresenta. In particolare se $g \in S \subseteq \pi(U \cap V, x_0)$, otteniamo le due parole ' $i_1(g)$ ' e ' $i_2(g)$ ' in S_1 e in S_2 , e possiamo quindi considerare la parola ' $i_1(g)(i_2(g))^{-1}$ ' in $S_1 \cup S_2$. Definiamo

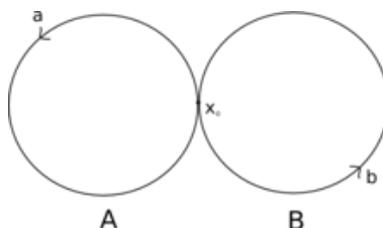


Figura 2.5: Il bouquet di due circonferenze.

R_S come l'insieme delle parole in $S_1 \cup S_2$ della forma $'i_1(g)('i_2(g))^{-1}$ ($g \in S$). Considerando R_S come un insieme di relazioni, avremo:

$$R_S = \{ 'i_1(g) = 'i_2(g) \mid g \in S \}.$$

Allora il teorema di Seifert-Van Kampen afferma che $\pi(X, x_0)$ è isomorfo al gruppo $\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle$.

Corollario 2.4.4. *Assumiamo le ipotesi del teorema di Seifert-Van Kampen. Se $U \cap V$ è semplicemente connessa, allora esiste un isomorfismo*

$$k : \pi(U, x_0) * \pi(V, x_0) \rightarrow \pi(X, x_0).$$

Esempio 2.4.5. Il *bouquet* di un insieme di spazi topologici è lo spazio che si ottiene “attaccando” tutti questi spazi tramite un punto. Più precisamente se X_i sono spazi topologici, indicizzati da $i \in I$, e se x_i è un punto di X_i (tale punto è detto generalmente *punto base*), allora il *bouquet* di questi spazi è lo spazio topologico ottenuto quotizzando la loro unione disgiunta tramite la relazione di equivalenza che identifica tra loro tutti i punti base.

In particolare un bouquet X di due circonferenze è l'unione di due circonferenze A e B nel piano che si intersecano in un punto x_0 (figura 2.5). Sfruttando il corollario 2.4.4, è possibile calcolare facilmente il gruppo fondamentale del bouquet di circonferenze. I gruppi fondamentali di A e B sono entrambi isomorfi a \mathbb{Z} . Le circonferenze A e B si intersecano in un punto, che è semplicemente connesso. Applicando il corollario 2.4.4 otteniamo dunque che il gruppo fondamentale del bouquet di due circonferenze è il prodotto libero $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$:

$$\pi(X, x_0) = \pi(A, x_0) * \pi(B, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Corollario 2.4.6. *Assumiamo le ipotesi del teorema di Seifert-Van Kampen. Se V è semplicemente connesso, allora esiste un isomorfismo*

$$k : \pi(U, x_0)/N \rightarrow \pi(X, x_0),$$

dove N è il più piccolo sottogruppo normale di $\pi(U, x_0)$ contenente l'immagine dell'omomorfismo

$$i_1 : \pi(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi(U, x_0).$$

Vediamo ora alcune applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen.

2.5 Applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen

In questa sezione calcoliamo i gruppi fondamentali di alcune superfici, utilizzando il teorema di Seifert-Van Kampen. Cominciamo con il dare qualche definizione che ci sarà utile in seguito.

Definizione 2.5.1. Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X è chiamato un *retrato* di X se esiste una funzione continua $r : X \rightarrow A$ tale che $ri = 1 : A \rightarrow A$ (o equivalentemente $r|_A = 1$), dove $i : A \rightarrow X$ è l'inclusione. La funzione r è chiamata *retrazione*.

Definizione 2.5.2. Un sottoinsieme A di X è chiamato un *retrato di deformazione* di X se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che $ir \approx 1 : X \rightarrow X$, dove $i : A \rightarrow X$ è l'inclusione.

Ne segue che un sottoinsieme A è un retratto di deformazione di X se esiste un'omotopia $F : X \times I \rightarrow X$ tale che $F(x, 0) = x$ per ogni $x \in X$, $F(x, 1) \in A$ per ogni $x \in X$ e $F(a, 1) = a$ per ogni $a \in A$.

Definizione 2.5.3. Un sottoinsieme A di X è detto un *retrato forte di deformazione* se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che $ir \approx_A 1 : X \rightarrow X$.

In altri termini A è un retratto forte di deformazione di X se esiste un'omotopia $F : X \times I \rightarrow X$ tale che $F(x, 0) = x$ per ogni $x \in X$, $F(x, 1) \in A$ per ogni $x \in X$ e $F(a, t) = a$ per ogni $a \in A$, $t \in I$. Naturalmente un retratto forte di deformazione è anche un retratto di deformazione.

Intuitivamente un sottospazio A è un retratto forte di deformazione di X se X può essere deformato con continuità fino a farlo coincidere con A , mantenendo A fisso durante il processo di deformazione.

Osservazione 2.5.4. Se $A \subset X$ è un retratto forte di deformazione di X , l'inclusione $i : A \rightarrow X$ induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali di A e X .

Vogliamo ora calcolare il gruppo fondamentale del toro $T = S^1 \times S^1$ e mostrare che è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Rappresentiamo T come una regione quadrata con i lati identificati come in figura 2.6 (b), ed indichiamo i lati

con a_1 e a_2 . Sia y un punto all'interno della regione quadrata (figura 2.6 (c)), e poniamo $U_1 = T \setminus \{y\}$, $U_2 = T \setminus (a_1 \cup a_2)$; U_2 è quindi l'interno del quadrato. U_1 , U_2 e $U_1 \cap U_2$ sono chiaramente aperti e connessi per archi; possiamo pertanto applicare il teorema di Seifert-Van Kampen. Siano x_0 e x_1 i punti indicati nella figura 2.6 (c) (x_1 appare quattro volte nella figura, in quanto i quattro punti vengono identificati in T). Indichiamo infine con c la circonferenza con centro in y e passante per x_0 , mentre con d indichiamo il segmento da x_0 a x_1 . Il bordo del quadrato, $a_1 \cup a_2$ (figura 2.7 (a)), dà luogo in T ad una figura a forma di 'otto' (figura 2.7 (b)), che è evidentemente un retratto forte di deformazione di U_1 : infatti U_1 può essere deformato con continuità fino a farlo coincidere con $a_1 \cup a_2$, mantenendo $a_1 \cup a_2$ fisso durante il processo di deformazione. Dunque U_1 e $a_1 \cup a_2$ hanno lo stesso gruppo fondamentale.

Denotiamo con α_1 ed α_2 gli archi chiusi in U_1 di base x_1 ottenuti percorrendo rispettivamente a_1 e a_2 nel verso indicato; sia G il gruppo fondamentale dell'insieme rappresentato dalla figura a forma di 'otto': G è per definizione l'insieme delle classi di equivalenza di archi chiusi di punto base x_1 , cioè $G = \{ [\alpha_1], [\alpha_2] \}$. Dunque, per l'osservazione 2.3.5 della sezione 2.3, il gruppo G è il gruppo libero generato da $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$; di conseguenza, dato che U_1 e $a_1 \cup a_2$ hanno lo stesso gruppo fondamentale, $\pi(U_1, x_1)$ è il gruppo libero generato da $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$. Denotiamo inoltre con δ , l'arco in U_1 ottenuto percorrendo d da x_0 a x_1 ; allora $\pi(U_1, x_0)$ è il gruppo libero generato dagli elementi $[\delta * \alpha_1 * \bar{\delta}]$ e $[\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}]$, che denoteremo rispettivamente con A_1 e A_2 . Poiché $\{x_0\}$ è un retratto forte di deformazione di U_2 , si ha $\pi(U_2, x_0) = \{1\}$. Infine, la circonferenza c è un retratto forte di deformazione di $U_1 \cap U_2$, quindi $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ è il gruppo libero generato da $[\gamma]$, dove γ è un arco chiuso in $U_1 \cap U_2$ di base x_0 , ottenuto percorrendo c nel verso indicato nella figura 2.6 (c).

Di conseguenza, per il teorema di Seifert-Van Kampen, $\pi(T, x_0)$ è isomorfo al gruppo generato da $\{A_1, A_2\}$ con la relazione

$$\langle \varphi_1[\gamma] \rangle = \langle \varphi_2[\gamma] \rangle.$$

Si osservi che in $\pi(U_1, x_0)$ si ha

$$\varphi_1[\gamma] = [\delta * \alpha_1 * \alpha_2 * \bar{\alpha}_1 * \bar{\alpha}_2 * \bar{\delta}] = [\delta * \alpha_1 * \bar{\delta}][\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}][\delta * \bar{\alpha}_1 * \bar{\delta}][\delta * \bar{\alpha}_2 * \bar{\delta}],$$

e quindi $\langle \varphi_1[\gamma] \rangle = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}$. D'altro canto, $\langle \varphi_2[\gamma] \rangle = 1$; pertanto $\pi(T, x_0)$ è isomorfo al gruppo $\langle A_1, A_2 \mid A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} \rangle$, e quindi è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Infatti se $S = \{x, y\}$ e $R = \{xyx^{-1}y^{-1}\}$, allora nel gruppo $G = \langle S \mid R \rangle$ si ha $xy = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1}xy = yxy^{-1}x^{-1}xy = yxy^{-1}y = yx$ (operazioni del

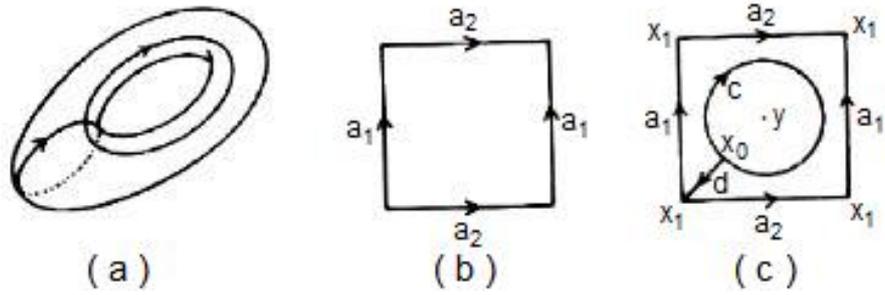


Figura 2.6: Rappresentazione del toro come spazio d'identificazione.

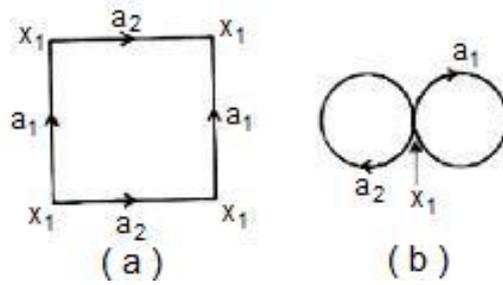


Figura 2.7: Il bordo del quadrato dà luogo in T ad una figura a forma di 'otto'.

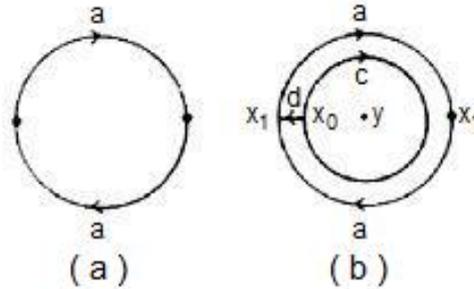


Figura 2.8: Rappresentazione del piano proiettivo come spazio d'identificazione.

tipo (iii) e (ii)). Dunque $x^a y^b = y^b x^a$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, e quindi ogni parola $\omega = x^{a_1} y^{b_1} x^{a_2} y^{b_2} \dots x^{a_k} y^{b_k} \in G$ può essere espressa come $\omega = x^a y^b$, dove $a = \sum_{i=1}^k a_i$ e $b = \sum_{i=1}^k b_i$; di conseguenza G è isomorfo al gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Infine calcoliamo il gruppo fondamentale del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e mostriamo che è isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Rappresentiamo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come lo spazio d'identificazione della figura 2.8 (a) e adotteremo le notazioni indicate nella figura 2.8 (b).

Ponendo $U_1 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{y\}$ e $U_2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus a$, si ottiene una decomposizione di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che soddisfa le ipotesi del teorema di Seifert-Van Kampen. La curva a è chiusa in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ed è un retratto forte di deformazione di U_1 , quindi $\pi(U_1, x_1)$ è il gruppo libero generato da $[\alpha]$, dove α è un arco chiuso in U_1 che corrisponde ad a . Di conseguenza $\pi(U_1, x_0)$ è il gruppo libero generato da $[\delta * \alpha * \bar{\delta}]$ (che denoteremo con A), dove δ è un arco da x_0 a x_1 che corrisponde a d . Lo spazio U_2 è contraibile nel punto x_0 e quindi $\pi(U_2, x_0) = \{1\}$. La circonferenza c è un retratto forte di deformazione di $U_1 \cap U_2$, e quindi $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ è il gruppo libero generato da $[\gamma]$, dove γ è un arco di base x_0 , ottenuto percorrendo c nel verso indicato.

Per il teorema di Seifert-Van Kampen $\pi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0)$ è isomorfo al gruppo generato da A con la relazione

$$\langle \varphi_1[\gamma] \rangle = \langle \varphi_2[\gamma] \rangle.$$

Si noti che in $\pi(U_1, x_0)$ si ha

$$\varphi_1[\gamma] = [\delta * \alpha * \alpha * \bar{\delta}] = [\delta * \alpha * \bar{\delta}][\delta * \alpha * \bar{\delta}].$$

Ne segue che $\langle \varphi_1[\gamma] \rangle = A^2$ mentre $\langle \varphi_2[\gamma] \rangle = 1$; quindi $\pi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0)$ è isomorfo al gruppo $\langle A \mid A^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. Infatti se $S = \{x\}$ e $R = \{x^n\}$ (n è un intero positivo fissato), allora il gruppo $\langle S \mid R \rangle$ consiste nelle parole $1, x, x^2, \dots, x^{n-2}, x^{n-1}$: tale gruppo è dunque isomorfo a \mathbb{Z}_n .

2.6 Il teorema di classificazione: II parte

Abbiamo dunque ricavato che il gruppo fondamentale del toro ha due generatori, che possiamo chiamare c_1 e d_1 , e una relazione $c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} = 1$, mentre il gruppo fondamentale del piano proiettivo ha un generatore f_1 e una relazione $f_1^2 = 1$.

Da qui deriva il seguente

Teorema 2.6.1. *Il gruppo fondamentale della superficie*

$$S = S^2 \# mT \# n\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

è il gruppo generato da $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, f_2, \dots, f_n$, con la relazione $c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2 = 1$.

Dimostrazione. Si veda [1], pag 231.

Ci chiediamo ora se i gruppi fondamentali ottenuti nel teorema 2.6.1 siano o meno isomorfi.

Nel caso $n = 0$ la superficie da studiare è $S = S^2 \# mT$; allora $A\pi(S, x_0)$ è il gruppo generato dall'insieme

$$S_m = \{c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m\}$$

con le relazioni $r_m = 1$ e $\{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S_m\}$, dove

$$r_m = c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1}.$$

Poiché $r_m = 1$ è una conseguenza delle relazioni $\{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S_m\}$, ne segue che $A\pi(s, x_0)$ è presentato da

$$\langle S_m \mid \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S_m\} \rangle;$$

e tale gruppo è isomorfo a \mathbb{Z}^{2m} .

Nel caso $n \geq 1$ la superficie da studiare è $S = S^2 \# mT \# n\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$; allora $A\pi(S, x_0)$ è il gruppo generato dall'insieme

$$S_{m+n} = \{c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

con le relazioni $r_{m+n} = 1$ e $\{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S_{m+n}\}$, dove

$$r_{m+n} = c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2.$$

$r_{m+n} = 1$ è una conseguenza delle relazioni $\{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S_{m+n}\}$ e $(f_1 f_2 \dots f_n)^2 = 1$; viceversa $(f_1 f_2 \dots f_n)^2 = 1$ è una conseguenza delle relazioni $\{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S_{m+n}\}$ e $r_{m+n} = 1$. Ne segue che

$$A\pi(S, x_0) = \langle S_{m+n} \mid \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S_{m+n}\} \cup \{(f_1 f_2 \dots f_n)^2\} \rangle.$$

Poiché $A\pi(S, x_0)$ è abeliano, possiamo rappresentare ogni suo elemento come:

$$c_1^{a_1} d_1^{b_1} c_2^{a_2} d_2^{b_2} \cdots c_m^{a_m} d_m^{b_m} f_1^{e_1} f_2^{e_2} \cdots f_n^{e_n},$$

(dove $a_i, b_i, e_i \in \mathbb{Z}$); oppure come

$$\omega = c_1^{a_1} d_1^{b_1} c_2^{a_2} d_2^{b_2} \cdots c_m^{a_m} d_m^{b_m} f_1^{e_1 - e_n} f_2^{e_2 - e_n} \cdots f_{n-1}^{e_{n-1} - e_n} (f_1 f_2 \cdots f_n)^{e_n}.$$

Poiché in $A\pi(S, x_0)$ vale la relazione $(f_1 f_2 \cdots f_n)^2 = 1$, si ha che $A\pi(S, x_0)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^{2m+n-1} \times \mathbb{Z}_2$.

Corollario 2.6.2. *L'abelianizzazione del gruppo fondamentale*

- (i) *della superficie standard orientabile di genere m è \mathbb{Z}^{2m} ;*
- (ii) *della superficie standard non orientabile di genere n è $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$.*

Una conseguenza del corollario 2.6.2 è che le superfici elencate nel teorema 2.2.4 sono a due a due non omeomorfe.

Si conclude così la dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici.

Capitolo 3

Cenni storici e curiosità su alcune superfici

3.1 Topologia: genesi e storia

La *topologia* è il ramo della matematica che studia gli spazi topologici e le proprietà delle figure invarianti per omeomorfismi.

H. Poincarè è a ragione ritenuto il creatore della topologia (o *analysis situs*) moderna come scienza a sè stante: egli le diede infatti un'unità metodologica e ne mise in luce le vaste e profonde possibilità di applicazione a importanti problemi di geometria algebrica, di analisi e di fisica. In questa sede va tuttavia ricordata l'opera di L. Eulero, storicamente antecedente a Poincarè e considerato il padre di questa branca della matematica: a lui si devono alcuni teoremi e la soluzione di alcuni celebri problemi di chiaro interesse topologico. Tra i matematici che, oltre a Poincarè, hanno contribuito a sviluppare la topologia, si citano S. Lefschetz, P. S. Aleksandrov, E. Betti, H. Cartan e il gruppo Bourbaki.

Nel 1904, Henri Poincarè stava lavorando ai fondamenti di quella che poi sarebbe stata chiamata topologia algebrica. Egli in particolare studiava le proprietà e caratteristiche topologiche della sfera. Poincarè aveva sviluppato uno strumento matematico chiamato *omologia*, che distingueva e permetteva quindi di classificare topologicamente tutte le varietà di dimensione 2. Egli congetturò inizialmente un fenomeno analogo in dimensione 3, ovvero che l'omologia distinguesse almeno la sfera tridimensionale dalle altre varietà. Si accorse molto presto di essere in errore, dato che riuscì a costruire una 3-varietà, chiamata successivamente *sfera di Poincarè*, con la stessa omologia della 3-sfera ma non omeomorfa ad essa. Spazi di questo tipo (ve ne sono infiniti) vengono ora chiamati *sfere di omologia*. Egli allora sviluppò un

nuovo strumento, in un certo senso più raffinato, chiamato *gruppo fondamentale* (concetto introdotto in un quaderno del 1894). Si domandò quindi se questo strumento fosse sufficiente a distinguere la 3-sfera dalle altre varietà tridimensionali. Poincarè non ha mai dichiarato esplicitamente di credere all'affermazione seguente, però questa è passata alla storia come congettura di Poincarè:

ogni 3-varietà semplicemente connessa chiusa (ossia compatta e senza bordi) è omeomorfa a una sfera tridimensionale.

Detto con termini diversi, la congettura dice che la 3-sfera è l'unica varietà tridimensionale “senza buchi”, cioè dove qualsiasi cammino chiuso può essere contratto fino a diventare un punto.

La congettura di Poincarè era da molti considerata uno dei più famosi problemi di topologia e tra gli anni cinquanta e sessanta molti matematici hanno tentato di fornire una sua dimostrazione, senza successo. Nel 2000, il Clay Mathematics Institute decide di includere la congettura di Poincarè tra i *Problemi per il millennio* e quindi di offrire un milione di dollari a chi dimostri la congettura stessa. Nel 2002 Grigorij Jakovlevič Perel'man pubblica un articolo, in cui dichiara di aver dimostrato la più generale congettura di geometrizzazione di Thurston, risultato che comprende come caso particolare la congettura di Poincarè. I lavori di Perel'man vengono riconosciuti dalla comunità matematica, ma il russo rifiuta sia la Medaglia Fields, il 22 agosto 2006, sia il premio Clay da un milione di dollari.

Storicamente il primo lavoro di carattere puramente topologico è attribuito ad Eulero. Nel 1736 Eulero pubblicò un articolo sulle soluzioni relative al problema dei ponti di Königsberg, dal titolo “*The solution of a problem relating to the geometry of position*”. La città di Königsberg (ora Kaliningrad) è percorsa dal fiume Pregel e dai suoi affluenti e presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti (vedi figura 3.1). La questione è se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversa ogni ponte una e una sola volta e tornare al punto di partenza. Eulero dimostrò che la passeggiata ipotizzata non era possibile a causa del numero dispari di nodi che congiungevano gli archi (ossia delle strade che congiungevano i ponti). La soluzione di Eulero diede origine alla teoria dei grafi, che si sarebbe poi evoluta dando origine alla topologia. Lo stesso titolo dell'articolo indica che Eulero stava studiando un nuovo tipo di geometria nella quale il parametro distanza non era rilevante.

Il passo successivo nel dimostrare che la matematica ha una sua autonomia a prescindere dalla misurazione viene compiuto sempre da Eulero con la

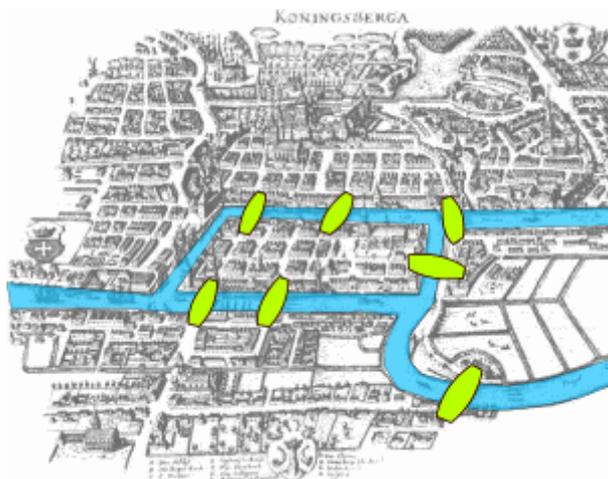


Figura 3.1: Mappa di Königsberg con i sette ponti messi in evidenza.

dimostrazione della formula che ora porta il suo nome:

$$v - e + f = 2$$

dove v è il numero di vertici di un poliedro, e è il numero di lati e f è il numero delle facce. È interessante vedere come questa semplice formula sia stata ignorata da Archimede come da Descartes, sebbene essi abbiano notevolmente trattato i poliedri. Questo probabilmente perché per le generazioni precedenti ad Eulero era impossibile pensare alle proprietà geometriche senza considerare la misurazione. Eulero svolse anche un importante lavoro di classificazione delle curve e superfici.

La strada intrapresa da Eulero fu seguita dai matematici che vennero dopo, in particolare da Klein e Lhuilier: quest'ultimo fece delle modifiche alla formula già citata. Egli infatti scoprì che la formula di Eulero non funzionava se la figura considerata era bucata; questo lo portò a riscriverla nel modo seguente:

$$v - e + f = 2 - 2g$$

dove qui g sta per i buchi contenuti nel solido. Questo fu il primo risultato conosciuto riguardo l'*invarianza topologica*. Infatti non importa quale sia la forma del solido dato: la somma $v - e + f$ è sempre $2 - 2g$.

Nel 1865 Möbius pubblicò la descrizione del *nastro di Möbius*, attraverso la quale cercava di descrivere le proprietà delle mono-superfici in termini di non orientabilità. Egli fu anche il primo matematico ad introdurre le *coordinate omogenee* in geometria proiettiva.

Il primo ad usare la parola *topologia* tuttavia fu J. B. Listing, le cui idee sulla

topologia furono dovute essenzialmente all'opera di Gauss. Nel 1834 Listing ottenne il dottorato con una dissertazione sulla geometria delle superfici dal titolo *De superficiebus secundi ordinis*. Successivamente compì un viaggio in Sicilia con l'amico geologo Sartorius von Walterhausen per raccogliere dati geologici e, in una lunga lettera con la quale riferiva dei suoi studi al suo primo insegnante, utilizzò per la prima volta il termine *topologia*, preferendolo all'espressione *geometria situs*. Pubblicò inoltre un libro nel quale descriveva questa nuova parola:

“con topologia si intende quella dottrina che studia le caratteristiche modali di un oggetto, ovvero le loro leggi di connessione e posizione. In particolare il rapporto dello sviluppo per successione di punti, linee, superfici e corpi e le loro parti e le loro aggregazioni nello spazio.”

Questi studi risultano nuovi, perché è la prima volta che lo sviluppo di una superficie viene studiato al di là del misurarla o del quantificarla. Infine Listing pubblicò una serie di scritti sull'argomento della connettività delle superfici, tra i quali anche una bozza di descrizione del nastro di Möbius, quattro anni prima che Möbius lo studiasse. Listing però si fermò con l'esaminare la connettività delle superfici in tre dimensioni, mentre Betti estese tale studio ad n dimensioni. L'idea di connettività venne ulteriormente sviluppata da Poincaré in una serie di scritti intitolata *Analysis situs* [4] del 1895.

La presentazione completa dei metodi sviluppati da Poincaré e da altri venne raccolta da Brouwer nel 1912 in un'opera completa di teoria della topologia.

3.2 Gruppi e superfici

Una delle prime presentazioni di un gruppo tramite generatori e relazioni fu data dal matematico irlandese William Rowan Hamilton nel 1856, nel suo *Icosian Calculus*, nel quale diede una presentazione del gruppo icosaedro. Il primo studio sistematico è attribuito invece a uno studente di Felix Klein, Walther von Dyck, che, agli inizi del 1880, gettò le basi per la teoria combinatoria dei gruppi.

Il teorema di Seifert-Van Kampen è uno dei principali strumenti per il calcolo del gruppo fondamentale di uno spazio topologico e venne dimostrato indipendentemente da Herbert Seifert ed Egbert Van Kampen agli inizi del 1930. Tale teorema permette di stabilire un collegamento tra problemi topologici notoriamente difficili, quale l'omeomorfismo tra varietà, e problemi algebrici di più facile soluzione. Nel presente lavoro abbiamo applicato questo teorema al problema di classificazione delle superfici.

La classificazione delle superfici è stata scoperta nel 1860 e oggi esistono numerose dimostrazioni. Le dimostrazioni topologiche e combinatorie si basano generalmente sul risultato che ogni varietà compatta di dimensione 2 è omeomorfa ad un complesso simpliciale. In *Seifert and Threlfall* (1934) si trova la dimostrazione più famosa della classificazione, che porta ogni superficie triangolata alla forma standard. Una dimostrazione semplificata della classificazione, che permette di evitare la forma standard, fu scoperta da John H. Conway nel 1992; egli la chiamò “*Zero Irrelevancy Proof*” o “*Zip proof*” e la presentò in *Francis and Taylor* (1999). Una dimostrazione geometrica, che fornisce un risultato più forte è il teorema di uniformizzazione. Tale teorema fu originariamente provato solo per le superfici di Riemann nel 1880 e nel 1900 da Felix Klein, Paul Koebe e Henri Poincaré.

3.3 Curiosità sulle superfici

Il simbolo internazionale del riciclaggio dei rifiuti è un esempio di nastro di Möbius.



Il simbolo della Pura Lana Vergine è a sua volta una stilizzazione del nastro di Möbius.



Il nastro di Möbius ha influenzato negli anni opere di vario genere.

Arte

L'incisore e litografo olandese Maurits Cornelis Escher, nel 1961, usa il nastro di Möbius per una sua incisione su legno, *Striscia di Möbius I* (vedi figura 3.2). Di due anni più tardi è il suo *Striscia di Möbius II* (1963) (vedi figura 3.3). Nell'opera, una teoria di formiche cammina indefinitamente sul nastro



Figura 3.2: Striscia di Möbius I.

percorrendone tutta la superficie. È significativo, a questo proposito, quanto affermato dallo stesso Escher:

“È stato confrontandomi con gli enigmi che ci circondano e considerando e analizzando le osservazioni da me fatte, che sono giunto alla matematica. Sebbene mi possa davvero considerare digiuno di esperienza e consuetudine con le scienze esatte, spesso mi sembra di avere molte più cose in comune con i matematici che con i miei discepoli artisti.”

Letteratura

Nel 1950 un insegnante di Harvard, Armin J. Deutsch, consigliato dall'allora suo collega Isaac Asimov, pubblica il racconto breve *Una metropolitana chiamata Moebius* (A Subway named Möbius) sul numero di dicembre dello stesso anno della rivista *Astounding Science-Fiction*. Nel racconto, un treno metropolitano di Boston, seguendo un intricato percorso, finisce paradossalmente in una striscia di Möbius, formata da binari intricati, senza più uscire.

Nastro di Moebius è anche un racconto di Julio Cortázar, presente nella raccolta *“Tanto amore per Glenda”*. *Il nastro di Moebius* intitola inoltre una raccolta poetica di Luciano Erba del 1980.

Cinema

In *2010-L'anno del contatto* di Peter Hyams del 1984 (sequel di *2001: Odissea nello spazio* di Stanley Kubrick) il nastro di Möbius viene citato per descrivere l'avaria occorsa al supercomputer HAL 9000.

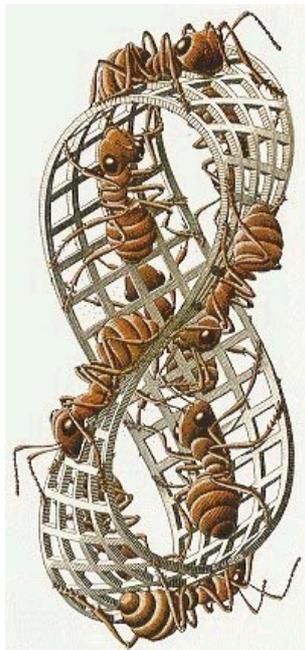


Figura 3.3: Striscia di Möbius II.

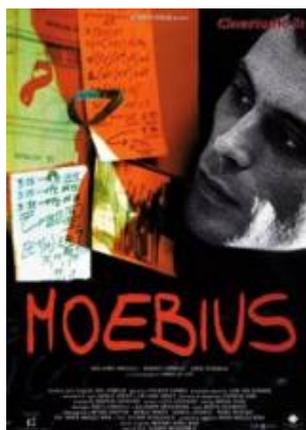


Figura 3.4: Locandina del film Moebius.

Nel 1996 il regista argentino Gustavo Mosquera R. realizza una trasposizione cinematografica del racconto di Deutsch: *Moebius* (vedi figura 3.4). Il racconto viene adattato per il cinema da vari autori, fra cui il regista stesso, ed ambientato a Buenos Aires, in Argentina; il protagonista, un giovane topologo, viene incaricato di rintracciare un convoglio misteriosamente scomparso, che in virtù del progressivo aumento della complessità del tracciato, tale da renderne indescrivibile il percorso, ha infranto i limiti spazio-temporali della nostra dimensione. Il film è uscito nel 1998 in Italia.

Il nastro di Möbius è stato anche accostato da alcuni critici, come Enrico Ghezzi, alla struttura di alcuni film del regista americano David Lynch. I protagonisti di *Mulholland Drive* e *Lost Highways*, in particolare, si trovano ad un certo momento del film a rivivere scene già vissute, ma con ruoli interscambiati, proprio come se si muovessero sull'unica faccia del nastro.

Citiamo ora alcune applicazioni pratiche del nastro di Möbius nell'ambito informatico, cinematografico e meccanico.

In campo informatico il nastro di Möbius è stato occasionalmente utilizzato per realizzare cartucce dati ad accesso casuale contenenti nastri magnetici registrati su entrambe le facce: l'accorgimento permette di raddoppiare lo spazio di memorizzazione.

Il principio dell'anello di Möbius è stato applicato nella filmatografia per sovrapporre le immagini e per creare dissolvenze.

Le cinghie di trasmissione possono utilizzare il nastro di Möbius per distribuire l'usura sulle due facce (e quindi durare di più). Un esempio di questa applicazione è rappresentato dalle vecchie trebbiatrici, che ricevevano il moto da un trattore posto ad alcuni metri tramite una cinghia con le facce incrociate.

Veniamo ora ad un'altra superficie nota: la sfera. Per quanto si sia avvicinato, l'uomo non è ancora riuscito a produrre alcun oggetto dalla sfericità matematicamente perfetta. Finora il miglior risultato è stato raggiunto dall'Australian Centre for Precision Optics, di Lindfield (Australia). La sfera è stata ottenuta attraverso una levigazione ad altissima precisione di una barra di silicio 28 (un isotopo del silicio) ed è frutto del progetto Avogadro, che si propone di arrivare alla definizione del chilogrammo perfetto, basata sulla conoscenza dell'esatto numero di atomi che compongono tale sfera. Il suo diametro è di 9,36 centimetri e come uniche imperfezioni presenta una rugosità di 0,3 nanometri e piccole deviazioni di sfericità di circa 60 - 70 nanometri. In precedenza, il miglior risultato era stato ottenuto dalla NASA, che per la sonda Gravity Probe B, costruita per studi gravitazionali in orbita, ha creato dei giroscopi con deviazioni inferiori ai 100 nanometri.



Figura 3.5: La bottiglia di Klein prodotta in vetro.

Esaminiamo infine un esempio di superficie non orientabile. Si immagini una bottiglia con un buco sul fondo. Ora si estenda il collo della bottiglia, curvandolo su se stesso, fino ad inserirlo lateralmente all'interno di questa (figura 3.5). Questa operazione richiede nello spazio tridimensionale che il collo perfori la parete della bottiglia: effettuata però nello spazio euclideo quadridimensionale \mathbb{R}^4 , l'operazione può essere fatta senza toccare la parete. Infine, si colleghi il collo con il buco in fondo.

Diversamente da un bicchiere, questo oggetto non ha bordi dove la superficie termina bruscamente. Diversamente da un pallone, una mosca può andare dall'interno all'esterno senza attraversare la superficie e quindi non esistono realmente un "dentro" e un "fuori".

Il nome *Bottiglia di Klein* pare essere nato da una traduzione errata del termine tedesco *Fläche* che significa *superficie*. Questo è stato confuso con la parola *Flasche* che significa *bottiglia*. Ciò nonostante, il nome è appropriato.

Bibliografia

- [1] C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, 1988
- [2] B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, 1851
- [3] B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, 1854
- [4] H. Poincarè, *Analysis Situs*, Journal de l'École Polytechnique, 1895
- [5] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, 1994
- [6] <http://it.wikipedia.org/wiki/Portale:Matematica>
- [7] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups, Second Edition*, Springer-Verlag New York Heidelberg, 1996
- [8] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag New York Heidelberg, 1967
- [9] J.R. Munkres *Topology, Second Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000