

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

**Vincoli all'Universo Oscuro
tramite la combinazione ottimale di
sonde cosmologiche tra $0 < z < 8$**

Tesi di Laurea Magistrale

Presentata da:
Fabrizio Cogato

Relatore:
Dr. Michele Moresco
Correlatore:
Prof. Andrea Cimatti

Appello III
Anno Accademico 2020-2021

*Nature
is under no obligation
to cooperate*

Sommario

In questa Tesi proponiamo uno studio analitico volto alla quantificazione di sinergie e complementarità tra sonde cosmologiche indipendenti in un contesto di inferenza dei parametri cosmologici.

Tramite lo sviluppo di un codice computazionale versatile e robusto, sfruttiamo la statistica bayesiana per ricavare da una selezione di sonde cosmologiche a $z < 8$ precisi vincoli su di un'ampia rosa di modelli cosmologici. In particolare, affianchiamo a due delle principali sonde, SuperNovae di Tipo Ia e Oscillazioni Barioniche Acustiche, alcune delle sonde più promettenti emerse di recente: Cronometri Cosmici, Quasar e Gamma-Ray Burst. Analizzandole sistematicamente al variare delle ipotesi cosmologiche esploriamo, oltre al modello standard Λ CDM, alcune delle sue più valide estensioni includendo una variazione nella geometria assunta e nella forma dell'equazione di stato dell'energia oscura.

Abbiamo così la possibilità di identificare punti di forza e debolezza di ciascun metodo, e di valutare il contributo di ognuno al vincolo dei parametri cosmologici. Introduciamo perciò un primo metodo analitico per la quantificazione di sinergie e complementarità tra sonde cosmologiche indipendenti tramite la definizione di un parametro di ortogonalità che misuri l'angolo reciproco tra i vincoli delle varie sonde. Sfruttiamo quindi questo parametro per individuare la combinazione più efficace in funzione dei vincoli cosmologici che si desidera imporre.

L'analisi congiunta di tutte le sonde produce interessanti risultati nell'ambito del paradigma cosmologico moderno. Indagando la forma dell'equazione di stato dell'energia oscura otteniamo $w = -1.00 \pm 0.07$ (1σ), mentre dallo studio della geometria ricaviamo $\Omega_k = -0.07 \pm 0.11$ (1σ). Per una cosmologia standard, troviamo un valore della costante di Hubble pari a 69.4 ± 3.2 km/s/Mpc (1σ) non ancora competitivo nel contesto della Tensione di Hubble ma che, con l'inclusione di ulteriori sonde innovative, promette di raggiungere una maggiore precisione.

Indice

Lista delle Tabelle	3
Lista delle Figure	6
Introduzione	7
1 Contesto Cosmologico Moderno	15
1.1 Il Modello Cosmologico Standard	17
1.1.1 Equazioni e Relazioni Fondamentali	18
1.2 Modello di Concordanza: Standard Flat Λ CDM	29
1.2.1 Componenti, Parametri ed Equazioni	33
1.3 Cosmologia Osservativa	35
1.3.1 Principali Sonde Cosmologiche	35
1.3.2 Attuali Tensioni	39
1.3.3 Nuove Sonde Cosmologiche	41
2 Dati Osservativi e Metodo di Analisi	43
2.1 Sonde Cosmologiche del Tardo Universo	43
2.1.1 SuperNovae di Tipo Ia	43
2.1.2 Oscillazioni Barioniche Acustiche	46
2.1.3 Cronometri Cosmici	49
2.1.4 Estensioni del Diagramma di Hubble	52
2.2 Metodi Bayesiani per la Cosmologia	57
2.2.1 Inferenza Bayesiana dei Parametri	58
2.2.2 Markov Chain Monte Carlo (MCMC)	60
2.2.3 <code>emcee</code> : The Affine Invariant MCMC Ensemble Sampler	62
2.2.4 Procedura di Analisi	62
2.2.5 Bayes e Bias	66
2.3 Struttura del Codice	67
3 Studio delle Sonde Cosmologiche: Curvatura ed Energia Oscura	75
3.1 Proprietà del Campionamento MCMC	77
3.2 Modelli Cosmologici in Esame	78
3.3 Analisi Cosmologica	81
3.3.1 Cronometri Cosmici	81
3.3.2 Oscillazioni Barioniche Acustiche	86
3.3.3 SuperNovae di Tipo Ia	90
3.3.4 Estensione del Diagramma di Hubble	96

4	Analisi delle Combinazioni Ottimali tra Sonde Cosmologiche	103
4.1	Unificazione del Diagramma di Hubble	105
4.1.1	Normalizzazione dei Gamma-Ray Bursts	105
4.1.2	Vincoli Cosmologici	107
4.2	Massimizzare le Informazioni sul Tardo Universo	112
4.2.1	Vincoli Cosmologici	112
4.2.2	Consistenza e Miglioramento dei Vincoli	118
4.2.3	Una Nuova Fisica dietro i Quasars?	121
4.3	Quantificare Sinergie e Degenerazioni	123
4.3.1	Definizione di Ortogonalità tra Sonde Cosmologiche	124
4.3.2	Ellisse di Covarianza e Direzione di Degenerazione	125
4.3.3	Calcolo del Parametro di Ortogonalità	128
4.3.4	Criticità e Potenzialità del Metodo Analitico	133
5	Conclusioni e Prospettive Future	135
	Appendice A	152
	Bibliografia	158

Elenco delle tabelle

1.1	Parametri cosmologici standard	34
2.1	Librerie software	73
3.1	Valori fiduciali da osservazioni CMB per un modello Flat Λ CDM	76
3.2	Proprietà del campionamento MCMC	78
3.3	Prior ed Intervalli di Validità dei Parametri	78
3.4	Vincoli cosmologici (CC)	83
3.5	Errori percentuali sui vincoli cosmologici (CC)	83
3.6	Vincoli cosmologici (BAO)	88
3.7	Errori percentuali sui vincoli cosmologici (BAO)	88
3.8	Vincoli cosmologici (SNeIa-Pantheon).	92
3.9	Errori percentuali sui vincoli cosmologici (SNeIa-Pantheon)	92
3.10	Confronto vincoli cosmologici (SNeIa: JLA vs Pantheon)	95
3.11	Vincoli cosmologici (QSO)	97
3.12	Vincoli cosmologici (GRB)	100
3.13	Errori percentuali sui vincoli cosmologici (GRB)	101
4.1	Confronto tra le distribuzioni χ^2 (HD)	108
4.2	Confronto tra i vincoli cosmologici (HD vs SNeIa)	109
4.3	Confronto tra gli errori percentuali sui vincoli cosmologici (HD vs SNeIa)	110
4.4	Vincoli cosmologici (FULL)	113
4.5	Confronto tra gli errori percentuali sui vincoli cosmologici (FULL vs SINGLE)	117
4.6	Orientazioni relative α e parametri di ortogonalità \varkappa	129
4.7	Stima delle sinergie	130
5.1	Principali vincoli cosmologici (SNeIa-Pantheon).	139
5.2	Principali vincoli cosmologici (BAO)	139
5.3	Principali vincoli cosmologici (CC)	140
5.4	Principali vincoli cosmologici (Diagramma di Hubble unificato)	141
5.5	Principali vincoli cosmologici (FULL)	142
6	Vincoli cosmologici per un modello Flat Λ CDM	152
7	Vincoli cosmologici per un modello Flat w CDM	153
8	Vincoli cosmologici per un modello Flat w_0w_a CDM	154
9	Vincoli cosmologici per un modello Open Λ CDM	155
10	Vincoli cosmologici per un modello Open w CDM	156
11	Vincoli cosmologici per un modello Open w_0w_a CDM	157

Elenco delle figure

1.1	Effetti della curvatura dello spazio sulla geometria.	19
1.2	Effetti del redshift cosmologico sulla radiazione	20
1.3	Tensione di Hubble	41
2.1	SNeIa: Dati osservativi del campione Pantheon	45
2.2	SNeIa: Dati osservativi del campione JLA	46
2.3	BAO: Dati osservativi	48
2.4	CC: Dati osservativi	52
2.5	QSO: Dati osservativi	54
2.6	GRB: Dati osservativi	56
2.7	Schematizzazione del codice Python: Diagramma a blocchi	68
2.8	Esempio di esclusione del burn-in in una catena MCMC	72
3.1	CC: Dipendenza dell'osservabile dai parametri cosmologici	82
3.2	Proiezione dei vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni CC.	85
3.3	BAO: Dipendenza dell'osservabile dai parametri cosmologici	87
3.4	Proiezione dei vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni BAO.	89
3.5	SNeIa (Pantheon): Dipendenza dell'osservabile dai parametri cosmologici.	91
3.6	Proiezione dei vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni SNeIa (Pantheon)	93
3.7	Confronto tra i vincoli cosmologici SNeIA (Pantheon vs JLA)	95
3.8	QSO: Dipendenza dell'osservabile dai parametri cosmologici	97
3.9	QSO: Dipendenza dell'osservabile dalla densità di energia oscura	98
3.10	Proiezione dei vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni QSO.	99
3.11	GRB: Dipendenza dell'osservabile dai parametri cosmologici	100
3.12	Proiezione dei vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni GRB.	101
4.1	Studio della normalizzazione M per ogni candela standard.	106
4.2	Effetti della correzione ΔM sull'analisi dei GRB.	106
4.3	Confronto tra le proiezioni dei vincoli cosmologici (HD vs SNeIa)	111
4.4	Confronto sul piano $\Omega_m - w$ tra i risultati Pantheon e la nostra analisi.	116
4.5	Confronto tra le proiezioni dei vincoli cosmologici (FULL vs CC)	118
4.6	Confronto tra le proiezioni dei vincoli cosmologici (FULL vs BAO)	119
4.7	Confronto tra le proiezioni dei vincoli cosmologici (FULL vs HD)	120
4.8	Confronto tra le proiezioni dei vincoli cosmologici (FULL vs QSO)	122
4.9	Direzione di degenerazione: CC	126
4.10	Direzione di degenerazione: BAO	127
4.11	Direzione di degenerazione: HD	127
4.12	Sovrapposizione dei contorni di confidenza (FULL vs SINGLE)	128
5.1	Parametro H_0 (Flat Λ CDM): Nostro studio vs letteratura.	144

5.2	Parametro w (Flat w CDM): Nostro studio vs letteratura	146
5.3	Sovrapposizione contorni di confidenza Flat w CDM	149

Introduzione

Contesto Scientifico. La scoperta dell'espansione accelerata dell'Universo [1, 2] ha portato all'adozione dell'attuale modello cosmologico standard, noto come Λ CDM.

Sebbene questo modello sia capace di spiegare, con un ridotto numero di parametri, una moltitudine di osservazioni e fenomeni fisici che caratterizzano l'origine, la composizione e l'evoluzione dell'intero Universo, l'affermazione della presenza di componenti di natura sconosciuta, come materia ed energia oscura, ha aperto un grande dibattito in cosmologia.

Nel cercare di trovare una risposta a questi enigmi, negli ultimi due decenni, sono state sviluppate metodi sempre più sofisticati per estrarre in modo ottimale il maggior numero di informazioni sulle proprietà dell'Universo.

La cosmologia moderna è dunque basata sul confronto e la combinazione di un crescente numero di dati provenienti da un altrettante osservazioni differenti.

In questo contesto, i parametri che descrivono il modello cosmologico vengono determinati grazie a particolari tecniche statistiche tramite cui l'enorme bacino di dati a disposizione viene analizzato in maniera sempre più accurata e consistente.

Se prima i parametri cosmologici potevano essere misurati con precisioni approssimative, grazie allo sviluppo di uno straordinario numero di sonde cosmologiche indipendenti e tecniche statistiche affidabili, oggi parliamo di *cosmologia di precisione* poiché il valore di ciascun parametro può essere stabilito con precisioni percentuali.

Tra le principali sonde proposte e sviluppate negli ultimi 20 anni, troviamo lo studio del Fondo Cosmico a Microonde (Cosmic Microwave Background, CMB), delle SuperNovae di Tipo Ia (SNeIa), e delle Oscillazioni Barioniche Acustiche (Baryon Acoustic Oscillations, BAO). L'analisi, ed in particolare la combinazione, di queste sonde ha permesso di ottenere vincoli sui parametri cosmologici con una precisione mai raggiunta in precedenza. Tuttavia, tale precisione ha dato vita ad uno dei più grandi dibattiti moderni in ambito cosmologico, la cosiddetta Tensione di Hubble. Quando il valore della costante di Hubble, che descrive l'attuale tasso di espansione dell'Universo, viene misurato in maniera indipendente tramite l'osservazione della CMB e l'osservazione delle SNeIa, il suo valore sembra mostrare una deviazione significativa in funzione del tipo di sonda esaminata [3]. Questa tensione, seppur non sia l'unica [4], rappresenta il perno centrale di molte questioni cosmologiche moderne poiché, se non fosse dovuta ad una errata trattazione delle incertezze osservative, potrebbe spalancare le porte all'adozione di un nuovo modello standard.

All'interno di questo quadro, non è più sufficiente misurare i parametri cosmologici con precisione percentuale ma, per capire se una o più tensioni siano davvero il frutto di una incompletezza del modello cosmologico adottato e non una qualche fluttuazione dei dati dovuta ad effetti sistematici nascosti, è necessario raggiungere una profonda accuratezza nella misura di tutti i parametri cosmologici.

Risulta quindi fondamentale non solo ridurre l'incertezza sull'analisi delle sonde sopracitate, ma anche espandere l'analisi considerando sonde alternative, che possano fornire misure indipendenti ed aiutare a tenere sotto controllo eventuali effetti sistematici nell'analisi. In aggiunta, la sinergia e la complementarità tra le diverse sonde cosmologiche può fornire un ulteriore strumento per ottenere vincoli stringenti sui parametri cosmologici, ed aiutare a comprendere meglio la natura delle componenti del nostro Universo. Se uno studio di multiple sonde indipendenti comincia ad essere oggetto di studi di letteratura, un'analisi sistematica che comprenda una grande varietà di sonde e quantifichi la loro sinergia e complementarità, soprattutto in funzione del modello cosmologico studiato, è al momento mancante.

Obiettivo di questa Tesi sarà quindi porre le fondamenta per colmare questa lacuna tramite uno studio profondo ed analitico di una pluralità di sonde cosmologiche, escludendo quelle dell'Universo primordiale (CMB), per comprendere quali siano i vincoli cosmologici ottenibili, la compatibilità con le analisi che includono lo studio della CMB ed, eventualmente, la competitività con lo standard utilizzato fino ad ora, essenzialmente i vincoli ottenuti dalla CMB.

Osservazioni e Metodi. Per rispondere a queste domande, andremo a studiare una vasta selezione di sonde cosmologiche del Tardo Universo. In particolare, oltre alle sonde tipicamente utilizzate come standard in questo tipo di analisi, le SNeIa e le BAO, andremo ad includere una serie di nuove sonde emergenti che stanno di recente dimostrando il loro impatto e la loro utilità nell'analisi cosmologica. Includeremo quindi anche i Quasar, i Gamma-Ray Burst ed i Cronometri Cosmici, andando a valutare l'impatto di ciascuna sonda sul vincolo dei parametri cosmologici, sia indipendentemente che in combinazione con le altre.

Un altro punto fondamentale di questo studio, diversamente da quanto è possibile trovare in letteratura, consiste nel considerare diverse estensioni del modello Λ CDM standard, che includano una variazione nella geometria assunta e nell'evoluzione del parametro dell'equazione di stato dell'energia oscura.

Sarà quindi possibile valutare non solo l'impatto di ciascuna sonda, ma anche come l'utilizzo di diverse combinazioni di sonde possa vincolare in maniera ottimale i parametri cosmologici al variare del modello considerato, con una complessità di parametri progressivamente crescente.

Tutta l'analisi verrà sviluppata nell'ambito della statistica bayesiana. In particolare, il fulcro del lavoro sarà lo sviluppo di un codice versatile ed efficace che, sfruttando il metodo delle Monte Carlo Markov Chain, sia in grado di fornire, al variare del modello cosmologico, i vincoli sui parametri cosmologici per qualsiasi sonda (o combinazione di sonde). L'idea di base è rendere flessibile e robusto un processo statistico la cui complessità può facilmente generare incomprensioni e incongruenze nei risultati, cercando di standardizzare la procedura di inferenza computazionale e di riprodurre in maniera accurata una serie di risultati fondamentali [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Obiettivo di questo codice è perciò l'impostazione di un algoritmo computazionale in grado di analizzare adeguatamente un'ampia classe di modelli cosmologici, in funzione del numero di parametri e del tipo di sonde cosmologiche a disposizione. In prospettiva, automatizzare la procedura di inferenza in modo che fornisca risultati consistenti al variare delle ipotesi cosmologiche e dei dati utilizzati, permetterà una semplicità di base quando, in un prossimo futuro, la quantità di dati, sonde e modelli indipendenti crescerà esponenzialmente.

Motivazioni ed Obiettivi. La motivazione generale di questa Tesi è dunque quella di fornire una chiave di letteratura indipendente su alcuni temi centrali nella cosmologia moderna.

Risulta perciò utile schematizzare gli obiettivi principali, per poi descrivere le motivazioni ed i dettagli di ciascuno.

1. Vincolare i parametri cosmologici fondamentali basandosi esclusivamente su sonde cosmologiche del Tardo Universo in modo da esplorare, per la prima volta in letteratura, un ampio ventaglio di estensioni del modello Λ CDM.
2. Sviluppare un primo metodo analitico per identificare le degenerazioni tra i parametri e quantificare le sinergie tra sonde cosmologiche indipendenti.

Primo Obiettivo. Sebbene il proliferare di osservazioni indipendenti e nuovi modelli cosmologici sia ormai una costante del panorama cosmologico moderno, gran parte della letteratura fa solitamente riferimento alle sonde che finora hanno fornito i risultati più solidi (come la CMB, le SNeIa o le BAO) analizzandole rispetto al modello cosmologico standard e ad alcune delle sue estensioni più accreditate (in cui si considera come parametro libero la curvatura dell'Universo o l'equazione di stato dell'energia oscura in evoluzione con il redshift).

Difficilmente troveremo uno studio in cui, con lo scopo di dare una visione di insieme sull'attuale stato dell'arte, i vincoli cosmologici ricavati dalle diverse sonde siano riportati sistematicamente al variare delle ipotesi cosmologiche e del numero/tipo di osservazioni combinate.

Le potenzialità di un tale approccio acquisiscono di ulteriore significato considerando che gli effetti sistematici in un processo di inferenza cosmologica possono risiedere non solo nei dati analizzati, ma anche nel modello secondo cui li si interpreta [11, 12]. Perciò, una analisi comparata dei vincoli cosmologici ottenuti al variare, non solo delle sonde e/o delle loro combinazioni, ma anche del modello considerato, permette una esplorazione ed una immediata identificazione dei possibili effetti sistematici. Inoltre, ricavare i vincoli cosmologici analizzando in maniera sistematica una vasta classe di modelli, tra quelli che attualmente rappresentano le estensioni più solide del modello cosmologico standard, consente di verificare la validità e la consistenza di alcune delle principali ipotesi su cui esso si basa.

Il primo obiettivo delinea dunque tre analisi complementari da cui sarà possibile estrarre dei risultati fondamentali per il raggiungimento del secondo obiettivo. Nello specifico, cercheremo di:

- A. Ottenere dei vincoli cosmologici al variare della sonda cosmologica e del modello cosmologico considerato, in modo da individuare eventuali fonti di incertezza dovute alla scelta delle osservazioni o del modello.
- B. Confrontare e combinare i vincoli ottenuti dalle diverse sonde cosmologiche, per identificare forze e debolezze di ciascuna e quantificare il contributo ai vincoli cosmologici di una loro combinazione, sempre in funzione del modello esaminato.
- C. Verificare la validità e la consistenza dell'attuale modello cosmologico standard, rilassando gradualmente alcune delle ipotesi su cui esso si fonda.

Ovviamente, esplorare tutte le sue ipotesi è al di fuori della portata di questa Tesi ma, selezionando una particolare classe di modelli, abbiamo la possibilità

di analizzare nel dettaglio la consistenza delle ipotesi di curvatura nulla e di una energia oscura sotto forma di costante cosmologica Λ . Lo stesso ragionamento vale per le sonde cosmologiche: attualmente non tutte possiedono i requisiti per produrre risultati robusti e consistenti, selezioneremo perciò solamente quelle che hanno più volte dimostrato la propria validità nel corso degli ultimi anni. Vogliamo così compiere una analisi cosmologica indipendente che, considerando una vasta gamma di modelli, raggiunga una precisione confrontabile con gli attuali standard cosmologici, a partire esclusivamente da uno studio di sole sonde cosmologiche del Tardo Universo.

Secondo Obiettivo. Mentre la trattazione delle incertezze statistiche è oramai ben definita ed ha raggiunto un elevato grado di robustezza, al momento non esiste un metodo univoco per la trattazione degli errori sistematici.

Oltre alle incertezze sistematiche nei dati osservativi, quando si trattano questioni cosmologiche, bisogna tenere a mente che i parametri del modello non è detto siano del tutto indipendenti tra loro. In funzione del modello analizzato, potrebbero infatti sorgere delle degenerazioni parametriche a causa delle quali, un dato osservabile, non vincola precisamente determinati parametri cosmologici.

Ciascuna coppia di parametri definisce una superficie piana sulla quale la proiezione dei risultati ottenuti formerà i cosiddetti contorni di confidenza che, essenzialmente, descrivono la precisione con cui i due parametri possono essere misurati. L'inclinazione dei contorni su tale piano si definisce *direzione di degenerazione*. All'interno dello spazio dei parametri, ogni osservabile vincolerà i modelli cosmologici in direzioni differenti e dunque non tutte le sonde possiederanno la stessa capacità di vincolarne i parametri.

In questo contesto, la combinazione di sonde cosmologiche indipendenti rappresenta un utile strumento per rompere alcune delle degenerazioni, aumentare la capacità di vincolo e ridurre così gli effetti sistematici dovuti a specifiche parametrizzazioni dei modelli.

Tramite un'analisi indipendente sulle singole sonde cosmologiche, studieremo perciò le capacità di ciascuna nel vincolare specifici parametri cosmologici, per individuare poi quali siano le combinazioni con le caratteristiche necessarie per rompere le degenerazioni e portare a risultati con una precisione superiore.

In linea di principio, a patto che le singole sonde abbiano una sufficiente capacità di vincolo, sarà la combinazione con direzioni di degenerazione maggiormente ortogonali a permettere il massimo restringimento dei contorni di confidenza, portando così ad una considerevole riduzione dell'incertezza nella misura dei parametri.

A partire da queste intuizioni cercheremo perciò di implementare un metodo analitico tramite il quale approfondire lo studio di sinergie e complementarità tra sonde cosmologiche indipendenti.

Il percorso verso il secondo obiettivo può dunque essere riassunto come:

- A. Definizione ed implementazione di un metodo in grado di identificare le direzioni di degenerazione per ciascuna sonda cosmologica.
- B. Definizione ed implementazione di un metodo per la quantificazione analitica dell'ortogonalità tra sonde cosmologiche indipendenti.
- C. Studio di sinergie e complementarità tra le diverse sonde cosmologiche, che individui quali combinazioni possiedano il maggior potere vincolante in funzione dei parametri (e ovviamente dei modelli) cosmologici.

È fondamentale dunque essere in grado di combinare in modo agevole, consapevole e consistente le diverse sonde cosmologiche, così che eventuali degenerazioni vengano superate e sia raggiunta l'accuratezza nei vincoli richiesta per risolvere le attuali tensioni cosmologiche.

Ovviamente, con un ridotto numero di sonde, sarà la combinazione totale a massimizzare i vincoli cosmologici. Allo stesso tempo però, la disponibilità di metodi di efficientamento statistico giocherà un ruolo cruciale nel momento in cui, in un prossimo futuro, *ottimizzare la combinazione di sonde cosmologiche* diverrà una prerogativa della cosmologia osservativa.

Delineiamo qui le principali tematiche ed i concetti chiave studiati all'interno dei diversi capitoli in cui questa Tesi è suddivisa.

Capitolo 1. A partire da diversi testi di riferimento [13, 14, 15, 16], definiamo le basi della cosmologia moderna, contestualizzandone i progressi con alcuni cenni storici. Deriviamo le equazioni fondamentali per poi, attraverso una panoramica sulle principali sonde cosmologiche, andare ad esplicitare le problematiche riguardanti le attuali tensioni cosmologiche.

Capitolo 2. Qui ha inizio la nostra analisi cosmologica. Tra le sonde attualmente a disposizione, selezioniamo tre particolari classi di oggetti facenti parte delle cosiddette *sonde cosmologiche del Tardo Universo*, che permettono quindi di esplorare alcune delle proprietà dell'Universo nelle sue fasi più recenti.

Nello specifico, ricaveremo i vincoli cosmologici sfruttando le caratteristiche intrinseche di particolari fenomeni astrofisici come i Righelli Standard, le Candele Standard ed i Cronometri Standard. Tramite l'estensione angolare delle Oscillazioni Barioniche Acustiche e la luminosità delle SuperNovae di Tipo Ia, Gamma-Ray Burst e Quasar, misureremo due tipi di distanze cosmologiche, mentre le proprietà evolutive dei Cronometri Cosmici forniranno una misura diretta del tasso di espansione dell'Universo. Per ogni sonda, daremo le nozioni di base descrivendo i fenomeni astrofisici associati, gli osservabili utilizzati per estrarre i vincoli cosmologici e le specifiche raccolte di dati selezionate dalla letteratura. Infine, dopo aver introdotto alcuni dei concetti chiave per i metodi statistici di cui faremo uso, esporremo il dettaglio dell'algoritmo implementato per l'analisi inferenziale. Esplicitandone le proprietà ed i punti di forza, il meccanismo generale del codice verrà descritto tramite un diagramma a blocchi che metterà in luce i punti cardine e le diverse funzionalità dell'algoritmo.

Capitolo 3. Dopo aver descritto le proprietà del metodo MCMC, deriveremo le equazioni caratteristiche dei modelli cosmologici che andremo ad esaminare.

Selezioneremo la famiglia di cosmologie CDM, le quali (oltre ad una fase di Inflazione nelle prime fasi di vita dell'Universo) considerano una componente di materia oscura fredda. Da questa, estrapoleremo solo quei modelli facenti uso di particolari parametrizzazioni dell'equazione di stato dell'energia oscura e, per ognuno di essi, andremo a studiare sia il caso in cui il valore della curvatura dell'Universo è fissato a zero (Flat), sia quello in cui questo valore deve essere determinato (Open).

In sostanza, esaminiamo sei modelli cosmologici: Flat e Open Λ CDM, Flat e Open w CDM, Flat e Open w_0w_a CDM. Per ognuno di questi, ricaviamo i vincoli sui parametri cosmologici tramite l'analisi delle singole sonde cosmologiche introdotte precedentemente.

Capitolo 4. Dopo aver prodotto un'analisi cosmologica a partire dalla combinazione di tutte le candele standard ed averne mostrato i risultati per tutti i modelli cosmologici esaminati, confrontiamo tali risultati con quelli ricavati dall'analisi delle singole candele standard. Successivamente, combineremo simultaneamente tutte le sonde cosmologiche in esame, massimizzando i vincoli per ognuno dei modelli cosmologici. Confronteremo questi risultati con quanto ottenuto per le singole sonde e verificheremo la loro consistenza con alcuni dei riferimenti disponibili in letteratura.

Definite nel dettaglio le modalità di implementazione del metodo per l'identificazione delle degenerazioni e la quantificazione delle sinergie tra sonde cosmologiche,

ne proponiamo due prime applicazioni atte a verificarne la validità e la consistenza. La prima individuerà le direzioni di degenerazione per ciascuna sonda, mentre la seconda sfrutterà i risultati così ottenuti per determinare analiticamente l'ortogonalità tra le diverse sonde cosmologiche esaminate. Così facendo otteniamo una prima quantificazione dettagliata delle sinergie e delle complementarità tra sonde cosmologiche indipendenti.

Capitolo 5. Trarremo le conclusioni del lavoro di Tesi, mettendone in evidenza sia punti di forza che difetti e proponendo alcune prospettive future per migliorare ed ampliare l'analisi. Tra tutte le sonde cosmologiche venute alla luce negli ultimi tempi, le Onde Gravitazionali rappresentano una particolare eccezione data la possibilità di utilizzarle come indicatori di distanza indipendenti. Ne forniremo perciò alcuni dettagli osservativi per poi riassumerne i vincoli cosmologici finora ottenuti.

Capitolo 1

Contesto Cosmologico Moderno

Sebbene il nome altisonante, i *principi* vengono generalmente introdotti ogni qualvolta la scienza entra in un nuovo campo e si trova di fronte ad una carenza di dati osservativi o sperimentali. Tali principi sono spesso basati su idee di simmetria che riducono il numero di gradi di libertà del sistema e rendono più semplice la formulazione di teorie in grado di spiegare determinati fenomeni fisici. La cosmologia moderna non ha fatto eccezione a questa regola generale quando, nei primi decenni del secolo scorso, si mossero i primi passi verso una teoria scientifica in grado di descrivere l'origine e l'evoluzione dell'Universo.

La cosmologia, come scienza indipendente, nasce infatti solamente con la formulazione, da parte di Albert Einstein, della teoria della Relatività Generale. Lo stesso Einstein, senza alcuna giustificazione osservativa, introdusse il cosiddetto Principio Cosmologico, il quale guidò la successiva formulazione delle teorie cosmologiche moderne. Nel sostenere questo principio, egli era particolarmente motivato dalle idee portate avanti, alla fine del XIX secolo, da Ernst Mach. Il Principio di Mach afferma sostanzialmente che le leggi della fisica sono determinate dalla distribuzione della materia su larga scala.

In maniera simile, Einstein pensava che l'unico modo per mettere la cosmologia teorica su basi solide, fosse presumere una semplicità nella struttura globale dell'Universo che rispecchiasse il comportamento locale della materia. Allora si sapeva poco, da un punto di vista empirico, sulla distribuzione di materia nell'Universo e la teoria della gravità di Einstein si rivelò troppo difficile da risolvere per una distribuzione arbitraria di materia. Per fare progressi, i primi cosmologi dovettero quindi basarsi su questo principio per la costruzione di modelli semplificati.

La cosmologia è lo studio della struttura dinamica dell'Universo considerato nella sua globalità ed occupandosi della dinamica globale del sistema, in prima approssimazione, è possibile trascurare tutte le irregolarità nello spazio e nel tempo, per concentrarsi sulle caratteristiche complessive del sistema.

Tutti i modelli cosmologici moderni si basano su tre ipotesi fondamentali:

1. Il principio cosmologico;
2. La validità della Relatività Generale;
3. Il postulato di Weyl.

Il principio cosmologico sostanzialmente afferma che, ad ogni epoca, l'Universo assume lo stesso aspetto da qualunque punto ed in qualsiasi direzione lo si osservi. Questo principio richiede dunque che lo spazio sia omogeneo ed isotropo rispetto ad ogni suo punto. Ciò è vero trascurando le irregolarità locali, ovvero su scale spaziali sufficientemente grandi.

Le conferme osservative di questo principio sono diverse, ma le più significative derivano dall'osservazione dell'alto grado di isotropia nella radiazione cosmica di fondo [5, 17, 18, 19, 20, 21] e dalla distribuzione delle galassie [22, 23, 24], la quale risulta omogenea ed isotropa su scale maggiori di 100 Mpc. Su scale più piccole la distribuzione di materia non risulta isotropa ed omogenea, ma ciò non inficia sulla validità delle teorie cosmologiche in quanto, nella pratica, queste considerano un Universo perfettamente omogeneo ed isotropo all'interno del quale studiare la formazione e l'evoluzione delle strutture. Nonostante l'alto grado di omogeneità e isotropia osservato, alcuni cosmologi hanno sviluppato modelli per universi anisotropi e disomogenei (vedi Capitolo 3 in [13]).

Assumeremo dunque il principio cosmologico, il quale da un punto di vista puramente matematico, richiede che lo spaziotempo possa essere sezionato in ipersuperfici di tipo spazio con simmetria sferica rispetto ad ogni loro punto.

Pochi anni dopo la formulazione della Relatività Generale, Hermann Weyl (1923) affrontò il problema di come questa teoria, basata sulla covarianza generale delle leggi fisiche, potesse essere applicata ad un sistema unico come l'Universo. Egli sosteneva che, nel cercare di comprendere ciò che avviene su scale cosmiche, ci si debba basare (per quanto possibile) su teorie verificate localmente. La Relatività Generale offre la migliore descrizione disponibile della fisica macroscopica a livello locale ed è quindi una teoria adatta, ma solo con l'aggiunta di ulteriori ipotesi, come il principio cosmologico, a cui Weyl aggiunse l'ipotesi dell'esistenza di un insieme privilegiato di osservatori: quelli solidali con il moto medio delle galassie.

Egli dunque postulò l'introduzione di un fluido che pervade lo spazio, in cui le galassie si muovono come particelle elementari del fluido stesso. Da un punto di vista più formale, il Postulato di Weyl sancisce che: «*All'interno dello spaziotempo, le particelle del fluido giacciono su una congruenza di geodetiche di tipo tempo che diverge da un punto nel passato, sia questo posto ad una distanza finita o infinita.*» Secondo questo postulato, le geodetiche non si intersecano mai, ad esclusione di un punto singolare nel passato ed eventualmente di un analogo punto singolare nel futuro. Questo significa che per ogni punto dello spaziotempo passa una ed una sola geodetica; di conseguenza, la materia in ogni punto possiede una velocità unica ed il fluido postulato da Weyl può essere considerato come un fluido perfetto. Le galassie sono poste in moto relativo a causa del moto complessivo del fluido e, anche se esse non seguono esattamente questo comportamento, le deviazioni dal moto complessivo appaiono casuali e minori di un millesimo della velocità caratteristica del fluido. Dunque, il fatto che si possa individuare un moto medio delle galassie deriva dal fatto che le velocità relative della materia, in ogni gruppo di galassie, possono essere trascurate su scale cosmologiche.

I primi indizi di un moto relativo delle galassie vennero alla luce nel 1912 grazie all'osservazione spettrale della galassia di Andromeda (M31 o NGC224, allora nota come *Andromeda Nebula*) da parte dell'astronomo Vesto Slipher [25]. Fu poi Edwin Hubble nel 1929 (con alcune vicissitudini storiche che approfondiremo) a dedurre la relazione empirica tramite la quale, tutte le precedenti osservazioni, vennero interpretate come una conferma osservativa dell'espansione dell'Universo, che qualche anno prima fu predetta teoricamente da Friedmann [26] (1922) e Lemaître [27] (1927).

Tuttavia, la formulazione della teoria cosmologica moderna è stata raggiunta tramite una serie di evidenze osservative successive, come i moti radiali delle galassie a spirale [28], il fondo di radiazione a microonde [29] e l'espansione accelerata dell'Universo [1, 2].

1.1 Il Modello Cosmologico Standard

I lavori di Friedmann e Lemaître dimostrarono come l'espansione dell'Universo fosse un risultato naturale di particolari modelli cosmologici basati sulle equazioni della Relatività Generale. Tuttavia, di per sé, l'espansione osservata da Hubble non fornisce prove sufficienti per quella che viene generalmente chiamata *Teoria del Big Bang Caldo*, la cui formulazione ebbe inizio negli anni '40 del secolo scorso, con il lavoro pionieristico di George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman [30, 31].

Per spiegare l'origine cosmologica delle abbondanze degli elementi atomici più leggeri, Gamow ed i suoi collaboratori proposero che l'Universo primordiale fosse sufficientemente caldo e denso da consentire la nucleosintesi di questi elementi e, successivamente, si fosse espanso raffreddandosi fino allo stato attuale. Alpher e Herman predissero, come diretta conseguenza di ciò, la presenza di una radiazione cosmica di fondo con una temperatura dell'ordine di pochi Kelvin [32]. L'accordo tra le previsioni teoriche e le osservazioni dell'abbondanza degli elementi leggeri, ha rappresentato una delle prime forti evidenze a favore di tale teoria. Quando poi, nel 1964, la radiazione cosmica di fondo fu casualmente osservata da A. Penzias e R. Wilson [29], il Big Bang divenne il primo candidato per descrivere la natura e l'origine dell'Universo.

Questa teoria è alla base del cosiddetto Modello Standard della Cosmologia sebbene, storicamente, il termine «Big Bang» venne coniato da F. Hoyle [33] in critica alla mancata comprensione delle condizioni iniziali dell'Universo, screditando questa teoria in favore del modello stazionario.

Nella teoria del Big Bang, si suppone l'esistenza di un evento catastrofico, chiamato appunto *Big Bang*, che segna l'esistenza stessa dell'Universo e la sua successiva espansione a partire da un punto singolare. L'Universo al suo inizio consisteva di un fluido ad altissima temperatura e ad altissima densità, composto di barioni e fotoni, che prende il nome di fluido foto-barionico. Con l'espansione, la temperatura e la densità diminuiscono, dando la possibilità alle particelle elementari di emergere dal bagno di radiazione. Il conseguente raffreddamento del fluido cosmologico dà inizio alla formazione degli atomi semplici come idrogeno ed elio – la cosiddetta Nucleosintesi Primordiale. La continua espansione dell'Universo produce poi le condizioni di temperatura e densità favorevoli per la condensazione del gas primordiale, a cui segue la formazione delle prime stelle.

Lo sviluppo del modello del Big Bang mette in evidenza un punto di fondamentale importanza ancora al centro degli attuali dibattiti in cosmologia. Nel descrivere la dinamica dell'Universo su grande scala, non si può far a meno di utilizzare la nostra conoscenza sulle leggi fisiche locali. Non è però possibile scartare a priori la possibilità che esistano interazioni aggiuntive rivelabili solo su scala cosmologica. L'esempio più classico lo si può trovare nel primo modello cosmologico moderno: spinto dal voler trovare una soluzione statica, Einstein modificò la sua equazione di campo della Relatività Generale, introducendo la cosiddetta *Costante Cosmologica* Λ , il cui effetto su larga scala bilanciava l'attrazione gravitazionale della materia.

I modelli cosmologici moderni sono parametrizzati tramite diverse quantità, il cui valore deve essere vincolato osservativamente, e che quantificano il comportamento dinamico dell'Universo ed il contributo energetico dei suoi costituenti. La metrica spaziotemporale è la chiave per collegare il modello cosmologico alle osservazioni e la forma matematica di tale metrica riflette la curvatura e la geometria dello spaziotempo, fornendo uno strumento per calcolare gli intervalli temporali e spaziali tra gli eventi.

In questo contesto, la dinamica dello spaziotempo è ovviamente governata dalle equazioni della Relatività Generale.

1.1.1 Equazioni e Relazioni Fondamentali

L'evidenza fondamentale per quel che riguarda l'Universo è la sua espansione. Questa viene caratterizzata a partire dalla definizione di una funzione crescente nel tempo, detta *fattore di scala cosmologico* $a(t)$ la cui normalizzazione viene riportata come $a(t_0) = 1$.

Per descrivere la dinamica dell'Universo è utile introdurre il concetto di coordinate comoventi, ovvero un sistema di coordinate a riposo rispetto all'espansione cosmica. In questo sistema di coordinate, la distanza tra due punti, detta distanza comovente, rimarrà costante nel tempo, non risentendo dell'espansione intrinseca dell'Universo. Presi due osservatori posti in due punti distinti dello spaziotempo, se il fotone emesso al tempo t da un osservatore viene ricevuto al tempo t_{obs} dal secondo osservatore, la distanza comovente tra i due viene definita come:

$$D_c \equiv \int_t^{t_{obs}} \frac{c dt'}{a(t')} . \quad (1.1)$$

Invece, la distanza propria è definita come la distanza comovente moltiplicata per il fattore di scala calcolato al tempo dell'osservazione t_{obs} :

$$D_p(t_{obs}) \equiv a(t_{obs}) \cdot D_c = a(t_{obs}) \cdot \int_t^{t_{obs}} \frac{c dt'}{a(t')} . \quad (1.2)$$

Se il fotone è osservato al tempo attuale, ossia $t_{obs} = t_0$, la distanza propria coincide con la distanza comovente, data la normalizzazione del fattore di scala.

Metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Le condizioni di omogeneità ed isotropia ci permettono di descrivere la geometria e l'evoluzione dell'Universo in termini di due parametri cosmologici: il parametro di curvatura k ed il fattore di scala cosmologico $a(t)$, che descrivono rispettivamente la curvatura e la dinamica complessiva (espansione o contrazione) dell'Universo. Queste due quantità appaiono nell'espressione più generale per una metrica in grado di descrivere un Universo soddisfacente il principio cosmologico, nota come *metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.3)$$

dove le coordinate comoventi sferiche (r, θ, ϕ) rappresentano rispettivamente il raggio, l'angolo polare e l'angolo azimutale. Per semplicità di notazione, durante tutta la seguente trattazione teorica vengono utilizzate le unità naturali $c = 1$.

Riscalando la coordinata radiale, la costante di curvatura k assume solamente i valori discreti $+1$, -1 e 0 , in corrispondenza di Universi con geometria sferica, iperbolica o Euclidea, di cui una rappresentazione è data in Figura 1.1. In questa forma, riscriviamo la metrica FLRW come:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.4)$$

dove:

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) & \text{per } k = +1 \rightarrow \text{Curvatura Positiva} \Leftrightarrow \text{Universo Chiuso,} \\ \chi & \text{per } k = 0 \rightarrow \text{Curvatura Nulla} \Leftrightarrow \text{Universo Piatto,} \\ \sinh(\chi) & \text{per } k = -1 \rightarrow \text{Curvatura Negativa} \Leftrightarrow \text{Universo Aperto.} \end{cases}$$

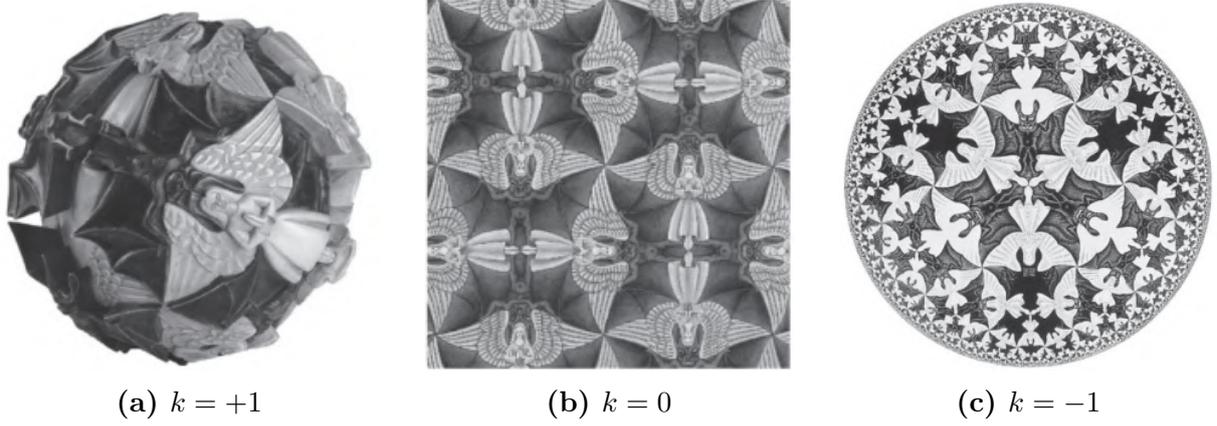


Figura 1.1: Effetti della curvatura dello spazio sulla geometria. Illustrazione artistica di Maurits Cornelis Escher dei tre tipi di geometria (nel caso bidimensionale): (a) curvatura positiva; (b) curvatura nulla; (c) curvatura negativa. Estratta dal Capitolo 3 in [34].

La coordinata r , ed equivalentemente χ , è adimensionale. La coordinata χ , denominata *angolo di sviluppo*, quantifica la deviazione della curvatura dallo spazio Euclideo. Descrive dunque le geodetiche spaziotemporali, o equivalentemente, la traiettoria dei fotoni. Per una definizione rigorosa della coordinata χ si rimanda a [35]. Il fattore $a(t)$, che determina le distanze proprie in termini di coordinate comoventi, ha le dimensioni di una lunghezza. Lungo sezioni spaziali costanti, ossia per $d\chi = dr = d\theta = d\phi = 0$, il *tempo proprio* è definito dalla coordinata temporale, t . A partire dalla (1.3), imponendo $dt = d\theta = d\phi = 0$ è possibile esprimere la distanza propria tra due punti P e P_0 (origine del sistema di coordinate), come:

$$D_p(t) = \int_0^r ds = \int_0^r \frac{a(t)}{\sqrt{1 - kr'^2}} dr' = a(t)f(r) \quad (1.5)$$

dove:

$$f(r) = \begin{cases} \sin^{-1}(r) & \text{per } k = +1, \\ r & \text{per } k = 0, \\ \sinh^{-1}(r) & \text{per } k = -1. \end{cases}$$

Ne consegue che la distanza comovente, in questa forma, può essere scritta come:

$$D_c = D_p(t_0) = a(t_0)f(r) = \frac{a(t_0)}{a(t)} D_p(t) . \quad (1.6)$$

Data la normalizzazione $a(t_0) = 1$, si avrà dunque che $D_c = D_p(t)/a(t) = f(r)$. È evidente dunque che la distanza propria D_p tra due eventi dipende dalla geometria dell'Universo. Inoltre, questa definizione di distanza risulta poco significativa poiché assume di misurare simultaneamente ($dt = 0$) tutti gli elementi di distanza ds tra P e P_0 .

Da un punto di vista teorico, le misure si riferiscono ad eventi giacenti nel cono-luce passato, mentre D_p si riferisce ad eventi giacenti sull'attuale ipersuperficie di tipo spazio. Il concetto di distanza tra due oggetti non è dunque di semplice definizione in un Universo in espansione.

Redshift. È utile introdurre una nuova variabile legata al fattore di scala, che sia osservabile più direttamente rispetto al tempo t . Chiamata *redshift* e indicata come z , è una quantità fondamentale nella descrizione di un Universo omogeneo ed isotropo in

espansione. È noto che la luce emessa ad un tempo t da una sorgente in allontanamento, rispetto ad un qualunque osservatore, subisce il cosiddetto effetto Doppler, secondo cui la lunghezza d'onda osservata λ_{obs} al tempo t_{obs} risulterà maggiore rispetto alla lunghezza d'onda λ_{em} emessa dalla sorgente al tempo t ($< t_{obs}$).

Poiché l'Universo in cui viviamo è in espansione e tutte le galassie su scala cosmologica recedono da noi, gli spettri delle galassie risulteranno spostati verso il rosso, ovvero verso lunghezze d'onda maggiori e frequenze minori, come è possibile osservare in Figura 1.2. Questo fenomeno viene caratterizzato tramite la definizione:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{em}} \quad \text{dove } \Delta\lambda = \lambda_{obs} - \lambda_{em} . \quad (1.7)$$

È inoltre possibile mettere in relazione λ_{obs} e λ_{em} considerando il fatto che, tra t e t_{obs} , lo spazio si è espanso di un fattore $a(t_{obs})/a(t)$. Gli osservatori a ricevere la luce dalle galassie in allontanamento siamo noi, dunque possiamo porre $t_{obs} = t_0$ da cui: $a(t_{obs}) = a(t_0) = 1$. Il *redshift cosmologico* viene perciò definito come:

$$z \equiv \frac{1}{a} - 1 \quad (1.8)$$

o equivalentemente:

$$a = \frac{1}{1+z} \quad (1.9)$$

dove $a = a(t)$ è il fattore di scala al tempo di emissione della luce. Differenziando quest'ultima equazione, ricaviamo una relazione fondamentale per l'analisi successiva:

$$dz = -\frac{a_0}{a^2} da . \quad (1.10)$$

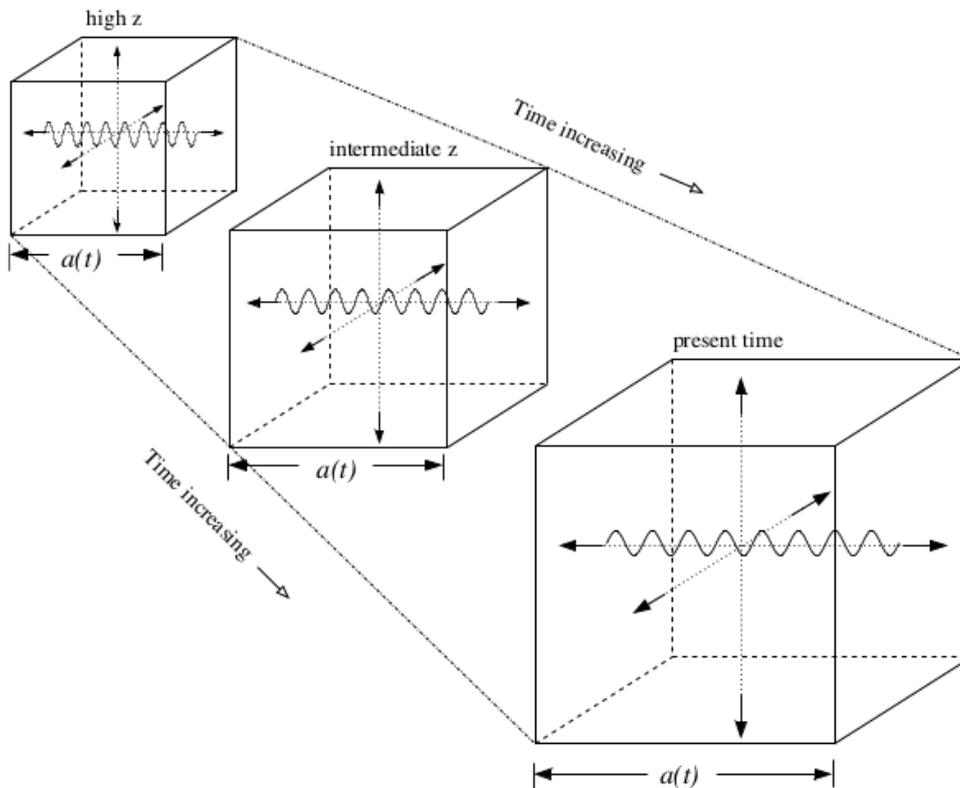


Figura 1.2: Effetti del redshift cosmologico sulla radiazione. Il tempo scorre da sinistra verso destra, mentre il redshift aumenta in senso inverso. Estratta dal Capitolo 3 in [35].

Data l'espansione dell'Universo e la normalizzazione del fattore di scala, si ha $0 < a < 1$ e dunque la quantità z è definita positiva. Poiché il fattore di scala è una funzione crescente del tempo, misurare z significa misurare il tempo in cui la luce è stata emessa, ma anche misurare le distanze dato che $a(t)$ rappresenta la componente spaziale in (1.3): galassie a redshift maggiore saranno dunque più distanti nel tempo e nello spazio.

Flusso di Hubble. A partire dalla misura dello spostamento verso il rosso delle righe di assorbimento ed emissione negli spettri delle galassie più vicine, questa semplice relazione permette di misurare la loro velocità di recessione v .

Seguendo questo approccio, Edwin Hubble nel 1929 osservò per primo la relazione lineare tra la velocità di recessione v e la distanza d delle galassie. Nel suo lavoro pionieristico [36] egli individuò, all'interno delle galassie osservate, alcuni oggetti astrofisici con caratteristiche intrinseche ben note.

In particolare, riferendosi essenzialmente ad oggetti di luminosità nota, come le stelle variabili Cefeidi (sfruttando la relazione periodo-luminosità ricavata qualche anno prima da Henrietta S. Leavitt [37]), egli fu in grado di determinare la distanza delle galassie ospiti confrontando la magnitudine apparente osservata di tali oggetti con la magnitudine assoluta aspettata. Per le proprietà appena discusse, Hubble fu dunque in grado di determinare la velocità di recessione delle galassie a partire dall'osservazione dei loro spettri. Seppur basandosi su osservazioni che al giorno d'oggi risulterebbero ben poco significative, Hubble trovò empiricamente l'esistenza di una relazione lineare tra la velocità di recessione e la distanza delle galassie, nella forma:

$$v = H_0 \cdot d \quad (1.11)$$

Per ragioni storiche [38], questa relazione oggi è nota come *Legge di Hubble-Lemaître*, ma noi ci riferiremo al coefficiente di proporzionalità H_0 semplicemente come costante di Hubble. Il pedice sta ad indicare che il valore è relativo all'Universo locale. Infatti, H_0 fornisce la velocità di espansione isotropa dell'Universo a $z = 0$. Questa quantità viene denominata costante, non perché sia costante nel tempo, bensì perché ad uno stesso istante t assume lo stesso valore in tutti i punti dell'Universo.

Da un punto di vista teorico, è possibile derivare la (1.11) come diretta conseguenza delle assunzioni alla base della cosmologia moderna. Infatti, derivando rispetto al tempo la relazione (1.2) tra distanza propria e distanza comovente, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [D_p(t)] &= \frac{d}{dt} [a(t)] \cdot D_c \\ v_p(t) &= \dot{a} \cdot D_c \\ v_p(t) &= \frac{\dot{a}}{a} \cdot D_p(t) \quad \text{con } D_c = D_p/a \end{aligned}$$

da cui:

$$v(t) = H(t) \cdot d(t) \quad (1.12)$$

dove:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.13)$$

è il parametro di Hubble. Calcolando la relazione (1.12) al tempo attuale t_0 , si ottiene la legge di Hubble-Lemaître, dove $H(t_0)$ altro non è che la costante di Hubble.

Il fatto che empiricamente si trovi un valore di H_0 positivo, significa che – su scale sufficientemente grandi da garantire l'inefficacia delle interazioni gravitazionali – le galassie

si allontanano le une dalle altre, con una velocità proporzionale alla loro separazione. Per questo motivo si parla dunque di una espansione cosmica uniforme, con velocità di espansione positiva. Solitamente, ci si riferisce a questo fenomeno come *flusso di Hubble*. La costante di Hubble viene convenzionalmente espressa in unità di km/s/Mpc, dato che le velocità vengono misurate in km/s mentre le distanze di oggetti extragalattici vengono espresse in Mpc ($\simeq 3 \cdot 10^{13}$ km), anche se viene spesso parametrizzata come:

$$H_0 = 100 \cdot h \text{ km/s/Mpc}$$

dove h è detta costante di Hubble adimensionale.

Il parametro di Hubble rappresenta il primo Parametro Cosmologico Fondamentale. Assumendo che esso sia costante nel tempo, $H(t) \equiv H_0$, ovvero che l'espansione sia avvenuta con velocità costante, l'inverso della costante di Hubble fornisce una stima approssimativa dell'età dell'Universo (anche se il suo valore preciso dipende fortemente dalla cosmologia assunta).

Se sviluppiamo in serie di Taylor il fattore di scala $a(t)$ attorno a $t = t_0$, otteniamo:

$$a(t) \simeq a_0 + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + ..$$

$$a(t) \simeq a_0 \left[1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a_0}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)}{a_0}(t - t_0)^2 + .. \right]$$

che può essere riscritta come:

$$a(t) \simeq a_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + .. \right] \quad (1.14)$$

dove è stato definito:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (1.15)$$

Questa quantità viene chiamata parametro di decelerazione, poiché quantifica la variazione della derivata temporale seconda del fattore di scala $a(t)$. È definito negativo poiché, al tempo in cui è stato introdotto, ci si aspettava che l'Universo fosse in decelerazione, ovvero $\ddot{a} < 0$, e q_0 sarebbe stato dunque positivo.

Questo parametro è stato misurato con osservazioni di SuperNovae di Tipo Ia [1, 2], ed è proprio il suo valore negativo ($q_0 \approx -0.55$) ad aver dimostrato, alla fine del secolo scorso, l'accelerazione dell'espansione cosmica.

È importante sottolineare che il valore fornito da Hubble all'epoca del suo primo annuncio ($H_0 \simeq 500$ km/s/Mpc) fosse di circa un ordine di grandezza maggiore rispetto al valore attualmente accettato, a causa di una sottostima degli errori di misura e ad una selezione non corretta delle galassie sulle quali basare la misura del redshift. Ad ogni modo, come già accenato, le osservazioni di Hubble confermarono per la prima volta le previsioni teoriche di Aleksandr Friedmann [26]. Lo scienziato russo nel 1922 fu infatti il primo, seguito nel 1927 dal lavoro indipendente di George Lemaître [27], a capire la validità di un Universo in espansione come soluzione per la teoria della Relatività Generale.

Equazioni di Friedmann. Il fattore di scala $a(t)$ è una funzione della densità di energia e della pressione associate alle singole componenti dell'Universo. La sua evoluzione nel tempo è governata dalle *equazioni di Friedmann*, derivate nel contesto della Relatività Generale a partire dalle equazioni di Einstein, considerando la metrica FLRW ed il contenuto dell'Universo come un fluido perfetto. Le equazioni di Einstein codificano al loro

interno la relazione tra la geometria dello spaziotempo, descritta dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$, ed il suo contenuto di energia, descritto dal tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

dove $R_{\mu\nu}$ e R sono, rispettivamente, il tensore e lo scalare di Ricci – entrambi funzione del tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Questo insieme di equazioni, una volta esplicitata la forma del tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$, fornisce la più completa descrizione del rapporto essenziale tra materia ed interazioni gravitazionali.

La metrica FLRW descrive lo spaziotempo soddisfacente il principio cosmologico e fornisce un'espressione per il tensore metrico il quale, nella nostra notazione, risulta essere:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

A partire dal postulato di Weyl, è possibile assumere l'Universo composto da un fluido perfetto, trascurando effetti di viscosità e conduzione termica.

In questo caso, il tensore energia-impulso assume la particolare forma:

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (\rho + P)u_\mu u_\nu \quad \text{con } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (1.18)$$

dove u_μ è la quadrivelocità dell'elemento di fluido, mentre:

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad P = \sum_i P_i$$

rappresentano la densità di energia e la pressione dovute alla totalità delle i -esime componenti dell'Universo, a condizione che queste siano non-interagenti tra loro.

Generalmente il fluido cosmologico è una miscela di diversi componenti e vedremo, in Sezione 1.2.1, che ognuna di queste componenti ha caratteristiche ben precise.

Sotto queste assunzioni, $a(t)$ è completamente descritto da un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} 1^\circ \text{ Equazione di Friedmann: } \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P) a \\ 2^\circ \text{ Equazione di Friedmann: } \dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G\rho}{3} a^2 \end{cases} \quad (1.19)$$

dove sia la pressione che la densità sono funzioni del tempo, $P = P(t)$ e $\rho = \rho(t)$.

La costruzione di un qualsiasi modello cosmologico richiede dunque la risoluzione di questo sistema. In realtà, queste due equazioni non sono indipendenti. Imponendo la conservazione dell'energia sul tensore energia-impulso, $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$, si ottiene l'equazione di continuità nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) (\rho + P) \\ \dot{\rho} &= -3H(\rho + P) \end{aligned} \quad (1.20)$$

dove $H \equiv H(t)$ è il parametro di Hubble. La seconda equazione di Friedmann può dunque essere ottenuta dalla combinazione della prima equazione di Friedmann con l'equazione di continuità. Quest'ultima deriva essenzialmente dalla condizione di espansione adiabatica:

$$d(\rho a^3) = -P da^3 \quad (1.21)$$

Al variare del modello cosmologico, specificato dal parametro di curvatura k e dalle i -esime componenti dell'Universo, le equazioni di Friedmann descrivono l'evoluzione del fattore di scala $a(t)$ e dunque l'intera storia dell'Universo. È utile perciò definire una nuova quantità al fine di rendere più agevole l'interpretazione delle equazioni di Friedmann.

Definiamo la densità critica $\rho_{\text{crit}}(t) \equiv 3H^2/(8\pi G)$, come la densità tale per cui la curvatura dell'Universo risulta essere nulla ($k = 0$). A partire da questa quantità, il parametro di densità Ω è definito come:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_{\text{crit}}(t)} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} \quad (1.22)$$

dove sia ρ che H dipendono dalla coordinata temporale. Il valore di questo parametro permette di discriminare la curvatura dell'Universo, infatti:

$$\Omega : \begin{cases} > 1 \Rightarrow \rho > \rho_{\text{crit}} \Rightarrow k = +1, \\ = 1 \Rightarrow \rho = \rho_{\text{crit}} \Rightarrow k = 0, \\ < 1 \Rightarrow \rho < \rho_{\text{crit}} \Rightarrow k = -1. \end{cases} \quad (1.23)$$

Equazione di Stato del Fluido Cosmologico. Al fine di risolvere il sistema di equazioni (1.19), è necessario introdurre la cosiddetta *equazione di stato del fluido cosmologico*. Questa definisce la relazione tra la pressione P e la densità ρ del fluido, nella forma $P = P(\rho)$, generalmente espressa come:

$$P = w\rho \quad (1.24)$$

dove w è il parametro dell'equazione di stato (in breve *parametro di stato*), il cui valore varia a seconda della componente del fluido considerata. L'evoluzione di un fluido è in generale complicata e non completamente descritta da w . Tuttavia, poiché si richiede l'omogeneità spaziale e l'isotropia, il tensore energia-impulso assume la forma (1.18) e dunque w determina l'evoluzione della densità di energia del fluido perfetto [39].

Assumendo che il parametro di stato sia costante nel tempo, è possibile studiare l'evoluzione temporale delle componenti di densità a partire dalla condizione di adiabaticità (1.21):

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)} \quad (1.25)$$

che, in termini di redshift z , assume la forma:

$$\rho(z) = \rho_0(1+z)^{3(1+w)} \quad (1.26)$$

Evoluzione del Parametro di Hubble. Dalla seconda equazione di Friedmann calcolata al tempo $t = t_0$, considerando che $H_0 \equiv \dot{a}_0/a_0$ e $\Omega_0 = (\rho_0/\rho_{\text{crit},0})$, si ottiene:

$$H_0^2 (1 - \Omega_0) = -\frac{k}{a_0^2} \quad (1.27)$$

Se ora consideriamo la seconda equazione di Friedmann nella forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 - \frac{8\pi G\rho}{3} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = -\frac{k}{a_0^2} \quad (1.28)$$

a partire dalla (1.27), otteniamo:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 - \frac{8\pi G\rho}{3}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = H_0^2 (1 - \Omega_0)$$

$$H^2(t) = \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 H_0^2 (1 - \Omega_0) + \frac{8\pi G\rho}{3}$$

da cui, poiché vale la (1.26), otteniamo l'espressione fondamentale per caratterizzare l'evoluzione del parametro di Hubble in funzione del redshift:

$$H^2(z) = H_0^2(1+z)^2 \left[(1 - \Omega_0) + \sum_i \Omega_{0,w_i} (1+z)^{1+3w_i} \right]. \quad (1.29)$$

Da notare che la quantità $1 - \Omega_0$ fornisce una misura della deviazione dall'unità del contributo energetico totale, dato che $\Omega_0 = \sum_i \Omega_{0,w_i}$.

Dunque, è possibile definire il parametro di densità di curvatura come:

$$\Omega_k \equiv 1 - \Omega_0. \quad (1.30)$$

da cui, considerando la (1.27):

$$\Omega_k = -\frac{k}{H_0^2 a_0^2}. \quad (1.31)$$

Poiché il denominatore è definito positivo, avremo che, al variare del parametro di curvatura k , il valore di Ω_k determina univocamente la geometria dell'Universo:

$$\Omega_k : \begin{cases} > 0 & \Leftrightarrow k = -1, \\ = 0 & \Leftrightarrow k = 0, \\ < 0 & \Leftrightarrow k = +1. \end{cases} \quad (1.32)$$

La (1.29) assume dunque la forma:

$$H^2(z) = H_0^2(1+z)^2 \left[\Omega_k + \sum_i \Omega_{0,w_i} (1+z)^{1+3w_i} \right]. \quad (1.33)$$

o nella forma più compatta:

$$H^2(z) = H_0^2 E^2(z) \quad (1.34)$$

dove:

$$E^2(z) = (1+z)^2 \left[\Omega_k + \sum_i \Omega_{0,w_i} (1+z)^{1+3w_i} \right]. \quad (1.35)$$

Generalizzando, possiamo supporre che il parametro di stato evolva con il redshift, ossia $w = w(z)$. Si avrà dunque una evoluzione della densità del tipo:

$$\rho(z) = \rho_0 \cdot \exp \left[3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz' \right]. \quad (1.36)$$

Risulta evidente come, fissato il parametro di curvatura k , l'evoluzione temporale di $\rho(z)$ e $H(z)$ assumerà forme diverse al variare della forma funzionale di $w(z)$, con implicazioni profonde sulla storia evolutiva dell'Universo.

Un risultato importante da sottolineare è l'evoluzione temporale del parametro di densità della i -esima componente dell'Universo. Dalla definizione di parametro di densità, possiamo scrivere:

$$\Omega_w(z) = \frac{8\pi\rho_w(z)G}{3H^2(z)} \quad (1.37)$$

Considerando il parametro di stato w costante per ogni componente, dalla (1.26) si ha:

$$\Omega_w(z) = \frac{8\pi\rho_{0w}G}{3H^2(z)}(1+z)^{3(1+w)}$$

da cui, esplicitando rispetto a $H(z)$, si ottiene l'espressione per l'evoluzione con il redshift del parametro di densità:

$$\Omega_w(z) = \frac{\Omega_{0w}(1+z)^{3(1+w)}}{(1+z)^2 \left[\Omega_k + \sum_i \Omega_{0,w_i}(1+z)^{1+3w_i} \right]} \quad (1.38)$$

dove la sommatoria in i corre su tutte le componenti dell'Universo.

Nel caso in cui si consideri la totalità delle componenti, la (1.38) assume la forma:

$$\Omega(z) = \frac{\sum_i \Omega_{0,w_i}(1+z)^{3(1+w_i)}}{(1+z)^2 \left[(1-\Omega_0) + \sum_i \Omega_{0,w_i}(1+z)^{1+3w_i} \right]}. \quad (1.39)$$

Da questa espressione, è possibile ricavare una regola fondamentale che fino ad ora è rimasta implicita. Nel caso in cui $\Omega_0 > 1$, $\Omega_0 < 1$ o $\Omega_0 = 1$, allora avremo rispettivamente $\Omega(z) > 1$, $\Omega(z) < 1$ o $\Omega(z) = 1$, per qualunque z considerato.

La ragione di questo comportamento è chiara: l'espansione non può cambiare il segno del parametro di curvatura k , ovvero la geometria dell'Universo non può variare. Da notare anche che, per $z \rightarrow \infty$, cioè man mano che ci si avvicina al Big Bang, $\Omega(z) \rightarrow 1$. Questo significa che, qualunque sia il modello cosmologico considerato, l'Universo nelle sue fasi primordiali è caratterizzato da una geometria Euclidea.

Distanza e Tempo in Cosmologia. Si è visto come sia possibile determinare la distanza propria tra due eventi a partire da un sistema di coordinate comoventi.

Questa non è chiaramente una quantità misurabile poiché gli oggetti astrofisici vengono osservati attraverso la luce da loro emessa, che impiega un tempo finito prima di raggiungere l'osservatore. Viceversa, la distanza comovente ignora l'espansione dell'Universo e, pur risultando utile ai fini della trattazione teorica, non acquisisce nessun significato di particolare interesse fisico. Si possono tuttavia definire operativamente altri tipi di distanza che sono, in linea di principio, misurabili direttamente.

Distanza di Luminosità D_L

La distanza di luminosità D_L è la distanza dedotta confrontando la luminosità intrinseca di un oggetto con la relativa luminosità osservata. Senza alcuna ipotesi sulla geometria dell'Universo, definiamo L la luminosità emessa al tempo t da una sorgente in un punto P . Sia F il flusso, ovvero la luminosità per unità di area, osservato al tempo t_0 da un osservatore in P_0 , la distanza di luminosità dalla sorgente viene definita come:

$$D_L^2 = \frac{L}{4\pi F} \quad (1.40)$$

In un Universo in espansione, l'area della superficie sferica centrata in P e passante per P_0 al tempo t_0 è pari a $4\pi a_0^2 S_k^2(\chi)$. I fotoni emessi dalla sorgente arriveranno su

questa superficie subendo l'effetto di redshift per un fattore a/a_0 , a causa dell'espansione dell'Universo. Inoltre, a causa della dilatazione dei tempi, i fotoni emessi dalla sorgente in un piccolo intervallo δt arriveranno in P_0 in un intervallo $\delta t_0 = (a_0/a)\delta t$.

Il flusso osservato in P_0 sarà dunque:

$$F = \frac{L}{4\pi a_0^2 S_k^2(\chi)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \quad (1.41)$$

da cui deriviamo l'espressione per la distanza di luminosità:

$$D_L = \frac{a_0^2}{a} S_k(\chi)$$

$$D_L(z) = (1+z)a_0 S_k(\chi) \quad (1.42)$$

Ora, poiché i fotoni si propagano su geodetiche nulle $ds^2 = 0$, scegliendo il sistema di coordinate tale per cui $d\theta = d\phi = 0$, avremo:

$$\chi = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}$$

che esplicitando rispetto a $H(z)$, risulterà nella forma:

$$\chi = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (1.43)$$

Dalla definizione (1.31) otteniamo l'espressione:

$$a_0 = \frac{1}{H_0} \sqrt{-\frac{k}{\Omega_k}}$$

ma poiché, per definizione, k e Ω_k sono discordi:

$$a_0 = \frac{1}{H_0} \sqrt{\left| \frac{k}{\Omega_k} \right|} \quad (1.44)$$

Dunque è possibile riscrivere la (1.42) nella forma generale:

$$D_L(z) = (1+z) \frac{1}{H_0} \sqrt{\left| \frac{k}{\Omega_k} \right|} S_k \left(\sqrt{\left| \frac{\Omega_k}{k} \right|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) \quad (1.45)$$

Da un punto di vista formale, questa espressione è valida solamente per $k = \pm 1$.

Per $k = 0$, infatti, l'espressione per D_L divergerebbe. In realtà, poiché a $k = 0$ corrisponde $S_k(x) = x$, nella pratica i due termini sotto radice si elidono, restituendo:

$$D_L = (1+z) \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (1.46)$$

Per questo motivo, in letteratura, l'espressione generale per D_L viene riportata come:

$$D_L(z) = (1+z) \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} S_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) \quad (1.47)$$

Questa espressione ci permette dunque di calcolare la distanza di luminosità per qualsiasi sorgente a redshift z dati Ω_i e H_0 . Viceversa, individuati degli oggetti astrofisici di

luminosità nota, misurando la distanza D_L in funzione del redshift z è possibile dedurre i valori di H_0 e Ω_i . Questo è il ragionamento alla base delle cosiddette candele standard.

Distanza di Diametro Angolare D_A

Assumiamo di conoscere la dimensione intrinseca l di una sorgente cosmologica al redshift z . Misurando l'estensione angolare θ di questa sorgente, è possibile definire la distanza di diametro angolare D_A come:

$$\theta = \frac{l}{D_A} . \quad (1.48)$$

È possibile dimostrare che D_A e D_L sono legate dalla seguente relazione:

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2}$$

ossia:

$$D_A(z) = \frac{1}{(1+z)} \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} S_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) . \quad (1.49)$$

Seguendo il discorso fatto per la distanza di luminosità, una volta individuati degli oggetti astrofisici di estensione nota, è possibile ricavare i parametri cosmologici misurando la distanza D_A in funzione del redshift z . Questi rappresentano i cosiddetti righelli standard.

Tempo Cosmico t

Il termine «tempo cosmico» implicherebbe l'esistenza di un tempo assoluto, applicabile a tutti gli osservatori nell'Universo [35]. In realtà, il tempo non è un osservabile diretto e, in uno spaziotempo relativistico, ha significato solo nel sistema di riferimento inerziale dell'osservatore. Quando parliamo dell'età dell'Universo t_0 , o del tempo trascorso da un dato evento, il significato reale di queste quantità è fortemente limitato al nostro sistema di riferimento, come osservatori dell'epoca attuale.

Dunque, il tempo t è semplicemente un parametro matematico impiegato per descrivere l'evoluzione dell'Universo in un dato modello cosmologico. La quantità realmente osservabile è il redshift z che fornisce una misura del fattore di scala a ad un dato tempo t rispetto all'osservatore in t_0 . Pertanto, redshift e tempo cosmico t sono direttamente correlati dalla (1.9).

Dalla definizione:

$$\dot{a}(t) = \frac{da(t)}{dt}$$

otteniamo:

$$dt = \frac{1}{H(t)} \frac{da}{a(t)}$$

che per un osservatore a $z = 0$, considerata la relazione (1.10), assume la forma:

$$dt = -\frac{1}{H(z)} \frac{dz}{(1+z)} \quad (1.50)$$

o alternativamente:

$$H(z) = -\frac{1}{(1+z)} \frac{dz}{dt} . \quad (1.51)$$

Analogamente a quanto detto precedentemente, un particolare tipo di oggetti caratterizzati da una variazione dt intrinseca, noti come cronometri standard, permette di ottenere una misura dei parametri cosmologici a partire dalla misura della quantità dt/dz .

Se per l'osservatore a $z = 0$ definiamo il tempo di Hubble t_H come:

$$t_H = \frac{1}{H_0} \quad (1.52)$$

a partire dalla (1.50), il tempo trascorso nell'Universo fino ad un arbitrario evento a redshift z , è semplicemente l'integrale dell'elemento dt , dal redshift z al redshift del Big Bang ($z_{BB} \equiv \infty$):

$$t(z) = t_H \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)}. \quad (1.53)$$

Notare che $t = 0$ corrisponde a z_{BB} , dunque in (1.53) il segno dell'integrale è invertito.

Età dell'Universo t_0

Ponendo $z = z_0$ e, dunque, sostituendo il limite inferiore dell'integrale con $z = 0$ si ottiene l'età attuale dell'Universo come:

$$t_0 = t_H \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)}. \quad (1.54)$$

La migliore stima attuale per l'età dell'Universo è [5]:

$$t_0 = 13.79 \pm 0.02 \cdot 10^9 \text{ anni} \quad (1.55)$$

anche se ovviamente, data la sua definizione, dipende dal valore di H_0 .

Infine, per determinare il tempo trascorso da un evento al redshift z all'epoca attuale z_0 , calcoliamo il cosiddetto *Look Back Time*, definito come:

$$t_{LB}(z) \equiv t_0 - t(z) = t_H \int_0^z \frac{dz}{(1+z)E(z)}. \quad (1.56)$$

1.2 Modello di Concordanza: Standard Flat Λ CDM

Fin dalla sua nascita, la cosmologia moderna ha subito frequenti cambi di paradigma, spesso radicali. Guidati dal susseguirsi di importanti scoperte, i riflettori si sono definitivamente spostati su questa relativamente nuova branca della scienza, convogliando un crescente numero di risorse umane ed economiche.

Un incredibile sviluppo tecnologico, capostipite del quale è stata l'introduzione negli anni '70 del dispositivo ad accoppiamento di carica (CCD, dall'inglese *Charge-Coupled Device*), ha permesso di effettuare osservazioni astronomiche sempre più accurate e dettagliate. Parallelamente, lo sviluppo di nuovi modelli e teorie ha fornito una spiegazione plausibile a ciascuna scoperta. La svolta decisiva nella definizione dell'attuale modello standard della cosmologia è arrivata sul finire del secolo scorso. Nel 1993, l'astronomo Mark Phillips [40] scoprì l'esistenza di una forte correlazione tra la luminosità intrinseca di uno degli eventi più energetici dell'Universo, le SuperNovae di Tipo Ia (SNeIa), ed il decadimento nella sua curva di luce 15 giorni dopo il raggiungimento del picco di luminosità, denominato Δm_{15} . Secondo la relazione di Phillips, le SNeIa con curve di luce più ampie tendono ad avere una luminosità intrinseca maggiore. Questa scoperta è stata la prima dimostrazione che le SNeIa possono essere utilizzate come candele standard.

Grazie al dispiegamento di grandi camere CCD sui telescopi più potenti del mondo, due gruppi di ricerca indipendenti, il *Supernova Cosmology Project* guidato da S. Perlmutter ed il *High-Z Supernova Search* guidato inizialmente da B. Schmidt, hanno sviluppato un

approccio efficiente per la ricerca sistematica di questi eventi su vaste aree di cielo. Nel 1998, entrambi i gruppi presentarono indipendentemente prove dell'espansione accelerata dell'Universo [2, 1]. Fin dalle osservazioni di Hubble, i cosmologi hanno cercato di misurare il rallentamento dell'espansione. Infatti, secondo la Relatività Generale, se l'Universo è dominato da materia ordinaria o radiazione (i due costituenti fino ad allora noti nell'Universo) la gravità dovrebbe portare ad un rallentamento dell'espansione. Il rallentamento era così tanto atteso che il parametro q_0 , utilizzato per quantificare la derivata seconda dell'espansione, ossia la variazione temporale della velocità di espansione, è tuttora definito come parametro di decelerazione. Questi due gruppi, misurando rispettivamente 16 e 42 SNeIa, misero in evidenza come le magnitudini di questi oggetti a distanze cosmologiche risultassero più deboli di quanto atteso per un Universo in decelerazione. Essendo meno luminose significava che fossero più lontane, suggerendo per la prima volta una crescita del tasso di espansione cosmica.

Si aprirono dunque due possibili strade: o la validità della Relatività Generale cessava su scale cosmologiche e doveva essere sostituita con una teoria più complessa, oppure la densità energetica dell'Universo era dominata da una nuova componente caratterizzata da una grande pressione negativa. Infatti, assumendo la validità della teoria di Einstein e scrivendo la prima equazione di Friedmann in termini dell'equazione di stato:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\rho(1 + 3w)a \quad (1.57)$$

dato che una espansione accelerata dell'Universo è equivalente a $\ddot{a} > 0$ (e per definizione $a(t) > 0$), è possibile notare come le magnitudini osservate delle SNeIa implicino un Universo dominato da una nuova componente, con parametro di stato $w < -1/3$ e dunque pressione negativa $P < 0$.

La spiegazione più semplice per l'espansione accelerata identifica questa nuova componente nella Costante Cosmologica Λ (con parametro di stato $w = -1$). La densità di energia di questa componente Ω_Λ , viene comunemente denominata *Energia Oscura* [41], anche se questa denominazione è valida qualsiasi sia la causa dell'espansione accelerata. Il termine Λ fu inizialmente introdotto nel 1917 da Einstein, come modifica della parte geometrica nelle sue equazioni di campo, in modo da garantire la staticità dell'Universo [42]. Successivamente, questa soluzione venne sfavorita quando divenne chiaro come un tale Universo fosse instabile a piccole perturbazioni [43], e fu poi abbandonata una volta stabilita l'espansione dell'Universo. Sul finire degli anni '60, Gliner [44] e Zeldovich [45] hanno poi aperto la strada alla visione moderna, in cui il termine Λ è una componente del tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$, interpretata come densità di energia del vuoto in grado di contrastare la decelerazione dovuta all'attrazione gravitazionale. Considerato una possibilità negli anni '80 [46, 47], questo concetto si è ristabilito alla fine degli anni '90 [48], fino a diventare fondamento e fulcro della cosmologia moderna.

I moderni modelli cosmologici, al fine di spiegare la formazione delle strutture, includono un'altra componente fondamentale di cui non è nota la natura. Secondo questo paradigma, la maggior parte della materia nell'Universo è sotto forma di materia oscura fredda, il cui acronimo CDM deriva dall'inglese *Cold Dark Matter* [49]. Non essendo ancora stata rivelata direttamente, viene assunto che questo nuovo tipo di materia sia una specie elettromagneticamente neutra, non barionica e caratterizzata da una dispersione di velocità non relativistica $v/c \ll 1$. Attraverso la sua influenza gravitazionale, essa è la chiave per la formazione e l'evoluzione delle strutture nell'Universo. La sua dispersione di velocità influenza fortemente le scale di massa su cui si formano le instabilità gravitazionali, e l'ordine in cui esse crescono. Da un punto di vista teorico, la dispersione di velocità non

relativistica favorisce, nell'Universo primordiale, lo sviluppo di strutture di massa più piccole. Questo differenzia la CDM dalla sua controparte calda, appunto HDM (dall'inglese *Hot Dark Matter*), la quale sopprime la formazione primordiale di strutture su scale di massa più piccole. La materia oscura, essendo non barionica, non subisce fenomeni di dissipazione, ovvero non si raffredda tramite irraggiamento. Essa inoltre è non-collisionale, ossia non interagisce, se non gravitazionalmente, con se stessa, con la materia barionica o con un qualunque altro tipo di materia. Questo implica che essa sia rilevabile solo tramite la sua influenza gravitazionale sulla materia barionica. Questo è, infatti, il metodo con cui F. Zwicky nel 1933 per primo dedusse la presenza di un tipo di materia non barionica, osservando il moto delle galassie all'interno dell'ammasso della Chioma e della Vergine [28]. Impiegando simulazioni computazionali sulla crescita delle strutture, vincolate dalle osservazioni della foresta Ly α e dalla distribuzione su larga scala della materia luminosa, la presenza della CDM oggi è fortemente favorita, anche se ciò presenta non poche complicazioni da un punto di vista teorico [35]. Ad esempio, non è chiaro, e non vi sono ad oggi evidenze sperimentali od osservative, quali siano i costituenti fondamentali di questo tipo di materia. I candidati principali includono oggetti tra i più diversi [49]: le ipotetiche WIMP; la particella supersimmetrica più leggera, l'assione; i buchi neri primordiali o i cosiddetti MACHO.

La natura di queste componenti «oscure» rimane perciò un mistero irrisolto.

Secondo l'attuale modello cosmologico standard, la composizione dell'Universo è dunque una miscela piuttosto bizzarra: materia barionica, materia oscura fredda, neutrini massicci ed energia oscura sotto forma di una costante cosmologica Λ . Le osservazioni attuali [5] suggeriscono che circa il 70% dell'Universo nell'epoca attuale sia costituito da questa misteriosa energia oscura, con il restante 30% costituito da materia, che può essere suddiviso ulteriormente in un 25% composto dalla altrettanto evanescente materia oscura fredda, ed un 5% costituito dalla normale materia barionica. La densità di elettroni può essere considerata trascurabile ed inclusa nella densità di barioni, pur non essendo questi effettivamente barioni. Si ha poi un contributo minimo da parte della radiazione, la cui densità risulta circa tre ordini di grandezza inferiore rispetto ai costituenti principali più un ulteriore piccolo contributo (confrontabile con quello dei fotoni) fornito dai neutrini, il cui esatto valore è ancora sconosciuto.

All'interno di questo panorama, dunque, l'attuale densità totale dell'Universo Ω_0 sarà:

$$\Omega_0 = \Omega_\Lambda + \Omega_b + \Omega_c + \Omega_\gamma + \Omega_\nu \quad (1.58)$$

dove Ω_Λ , Ω_b , Ω_c , Ω_γ e Ω_ν rappresentano rispettivamente le attuali ($z = 0$) densità di energia oscura, barioni, materia oscura fredda, fotoni e neutrini. Poiché la densità di fotoni e neutrini è trascurabile rispetto alle altre componenti, se l'obiettivo non è l'analisi di queste componenti, la densità totale dell'Universo può essere rappresentata come:

$$\Omega_0 = \Omega_\Lambda + \Omega_b + \Omega_c \quad (1.59)$$

o, in maniera più compatta:

$$\Omega_0 = \Omega_\Lambda + \Omega_m \quad (1.60)$$

dove Ω_m è la densità totale di materia:

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c . \quad (1.61)$$

Prima della scoperta dell'energia oscura, diverse evidenze osservative suggerivano che la densità energetica totale fosse prossima al suo valore critico. Alcune osservazioni astrofisiche, però, mostravano una componente di materia consistente con un valore $\Omega_m \sim 0.3$,

in sostanziale disaccordo con un Universo piatto $\Omega_{tot} \sim 1$.

In particolare, le misure del rapporto tra barioni e materia negli ammassi di galassie, combinate con la densità barionica dedotta dalla nucleosintesi primordiale, escludevano un Universo piatto dominato dalla materia, implicando invece una bassa densità di materia [50]. La scoperta dell'energia oscura risolse il problema della componente mancante dato che aggiungeva un termine $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ al contributo energetico totale dell'Universo. Tuttavia, non risolveva alcune questioni fondamentali, sorte durante il XX secolo, riguardanti la teoria del Big Bang. Questa teoria infatti, pur in ottimo accordo con i dati osservativi, presentava diverse problematiche. L'osservazione dell'omogeneità ed isotropia della radiazione cosmica di fondo sollevava il cosiddetto *Problema dell'Orizzonte*, in quanto questa radiazione risultava omogenea ed isotropa su scale spaziali maggiori di quanto aspettato. Inoltre, andando a ritroso nella storia dell'Universo, si prevedeva l'unificazione della forza forte con la forza elettrodebole, seconda la teoria GUT (dall'inglese *Grand Unified Theory*), la quale prevedeva però l'esistenza di un particolare tipo di particella esotica mai osservata, i cosiddetti *Monopoli Magnetici*. Vi era poi il *Problema della Piattezza dell'Universo*: poiché il parametro di densità si evolve nel tempo a causa dell'espansione, se la densità totale attuale dell'Universo è prossima al suo valore critico, nelle sue fasi primordiali, la densità dell'Universo doveva differire di un valore dell'ordine di 10^{-60} dal suo valore critico. Questo fatto poneva dunque una fondamentale questione sul perché Ω_{tot} differisse di un valore così piccolo dall'unità, portando ad un cosiddetto problema di *Regolazione Fine dei Parametri*. A questi, si aggiunse poi il cosiddetto *Problema della Costante Cosmologica* [51].

Il paradigma del modello standard della cosmologia risultava dunque incompleto. Come già A. Guth e A. Linde [52, 53, 54] fecero notare agli inizi degli anni '80, la maggior parte di questi problemi vengono risolti ampliando la teoria del Big Bang.

Ipotizzando l'esistenza di un particolare periodo nelle prime fasi dell'Universo, chiamato *Inflazione* e caratterizzato da una espansione accelerata esponenziale, venne delineato un meccanismo in grado di: mettere in connessione causale regioni al di fuori dell'orizzonte cosmologico; diluire fortemente la densità di monopoli magnetici; rendere il parametro di densità prossimo all'unità; e generare le fluttuazioni nel campo di densità, lasciando un'impronta nell'anisotropia della radiazione cosmica di fondo e portando alla formazione delle strutture su larga scala che oggi osserviamo. Dando una giustificazione teorica per la curvatura dell'Universo, questa teoria ha radicalmente segnato il panorama cosmologico moderno, preparando il terreno per la scoperta dell'attuale accelerazione cosmica.

Essendo una delle previsioni fondamentali dell'Inflazione, la piattezza è dunque diventata la soluzione favorita nella cosmologia moderna, portando alla formulazione dell'attuale modello standard della cosmologia, noto appunto come Standard Flat Λ CDM. Grazie al susseguirsi di conferme osservative sempre più stringenti, questo viene detto anche Modello di Concordanza, grazie al suo forte potere predittivo e all'ottimo adattamento ai dati osservativi. In questo modello si assume dunque: la presenza di due componenti la cui natura è sconosciuta, la materia oscura e l'energia oscura (che insieme costituiscono circa il 95% dell'Universo); la piattezza dell'Universo, ossia $\Omega_k \sim 0$; ed un periodo di Inflazione, immediatamente successivo al Big Bang. Allo stesso tempo, però, vengono sollevate profonde questioni sulla natura delle componenti oscure e dell'Inflazione, sulla genesi dei barioni oltretutto sulla causa e l'origine stessa dell'espansione accelerata [39].

1.2.1 Componenti, Parametri ed Equazioni

Analizziamo ora nel dettaglio il modello alla base della cosmologia moderna. Come visto nella Sezione precedente, è possibile suddividere le componenti principali dell'Universo in tre categorie generali: materia, radiazione ed energia oscura (o costante cosmologica).

Materia. Include i barioni e la materia oscura fredda. Poiché è possibile assumere che l'energia a riposo di tali particelle sia maggiore della rispettiva energia termica, il loro contributo alla pressione totale sarà pressoché nullo. Questo significa che è possibile descrivere questa componente con un parametro di stato $w = 0$.

Perciò, a partire dalla (1.26), la sua evoluzione temporale può essere scritta come:

$$\rho_m(z) = \rho_{0m}(1+z)^3 \quad (1.62)$$

Radiazione. Include i fotoni e la materia relativistica, come ad esempio i barioni all'interno del plasma primordiale o i neutrini. Per un fluido non degenere di particelle relativistiche (ad esempio, un gas di fotoni), la pressione è pari a $P = \rho/3$. Perciò il parametro di stato relativo a questa componente risulterà essere $w = 1/3$, da cui:

$$\rho_r(z) = \rho_{0r}(1+z)^4 \quad (1.63)$$

Costante Cosmologica. La covarianza generale delle equazioni di Einstein, richiede che il tensore energia-impulso del vuoto assuma la forma di una costante moltiplicata per il tensore metrico, $T_{\mu\nu,vac} = \rho_{vac}g_{\mu\nu}$. Considerando che i termini diagonali (T_0^0, T_i^i) del tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ sono pari alla densità di energia e a meno la pressione del fluido, il vuoto ha una pressione uguale a meno la sua densità di energia, da cui $P_{vac} = -\rho_{vac}$ [39]. Questo implica dunque l'equivalenza matematica tra l'energia del vuoto e la costante cosmologica. Inserendo la costante cosmologica Λ all'interno del fluido cosmologico, le equazioni di Einstein (1.16) vanno modificate nella forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\tilde{T}_{\mu\nu} \quad (1.64)$$

dove

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} . \quad (1.65)$$

Riportando quest'ultima espressione alla forma esplicita per un fluido perfetto si ha:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \tilde{P}g_{\mu\nu} + (\tilde{\rho} + \tilde{P})u_\mu u_\nu . \quad (1.66)$$

con:

$$\begin{cases} \tilde{\rho} \equiv \rho + \rho_\Lambda = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \\ \tilde{P} \equiv P + P_\Lambda = P - \frac{\Lambda}{8\pi G} \end{cases} \quad (1.67)$$

Perciò il parametro di stato per l'energia oscura sotto forma di costante cosmologica sarà pari a $w = -1$, da cui:

$$\rho_\Lambda(z) = \rho_{0\Lambda}(1+z)^0 = \rho_{0\Lambda} . \quad (1.68)$$

La densità di questa componente è dunque costante nel tempo, ma ciò non significa che lo sia anche il suo contributo al parametro di densità totale dell'Universo. Infatti, per consentire una crescita sufficiente delle perturbazioni primordiali, l'energia oscura deve arrivare a dominare l'Universo solo molto recentemente e la sua densità energetica deve dunque evolvere con il redshift più lentamente rispetto alle altre componenti [39].

La determinazione dei parametri cosmologici deriva da osservazioni differenti. In particolare, il numero di parametri che descrivono il modello cosmologico standard odierno varia in funzione del numero e del tipo di misurazioni che si utilizzano per vincolare i parametri stessi. Tuttavia, in generale, la quantità e la qualità dei dati cosmologici consente di imporre precisi vincoli su tutti i parametri considerati. Sebbene non si escluda che w dipenda dal redshift, le osservazioni attuali sembrano suggerire che questo sia costante, $w = -1$. Dunque, all'interno del modello standard il parametro di stato w non viene considerato come un parametro libero.

I valori che si cerca di vincolare all'interno del panorama standard vengono solitamente denominati Parametri Cosmologici Standard. Questi parametri permettono di tracciare nel dettaglio la storia evolutiva dell'Universo, almeno fino all'epoca del disaccoppiamento dei neutrini, poco prima della nucleosintesi primordiale. Per indagare ulteriormente la storia dell'Universo sono perciò necessarie ipotesi sulle interazioni fra le particelle e, forse, sulla natura delle stesse leggi fisiche che le governano. Da notare, a tal proposito, come l'inclusione di alcuni parametri liberi provenienti dalla fisica dei neutrini possa influenzare i valori derivati di altri parametri cosmologici. Allo stesso tempo, non vi è però una parametrizzazione univoca e si potrebbero invece utilizzare dei parametri derivati da questo insieme di base. A partire dai parametri cosmologici standard, possono infatti essere ottenuti diversi parametri derivati come l'età dell'Universo, la temperatura del fondo di neutrini, l'epoca dell'uguaglianza materia-radiazione o della ricombinazione.

Per chiarezza, lungo la nostra trattazione il modello Standard Flat Λ CDM viene vincolato attraverso i parametri liberi H_0 e Ω_m , a cui può essere aggiunto Ω_Λ come parametro derivato. Questo perché, come vedremo nel Capitolo 2, i dati selezionati ci permettono di vincolare solamente il Tardo Universo ($z < 10$).

In Tabella 1.1, viene mostrato l'insieme minimo di parametri per una descrizione completa del modello cosmologico standard. Questo si compone di sei parametri: la costante di Hubble adimensionale h , la densità di barioni Ω_b e materia oscura Ω_c , la profondità ottica alla reionizzazione τ , l'ampiezza delle fluttuazioni A_S e l'indice spettrale n_S . I risultati, con i relativi errori al 68% di confidenza, si riferiscono alle ultime osservazioni della radiazione cosmica di fondo ottenute con il satellite Planck [5] (TT,TE,EE+lowE+lensing).

Parametri Cosmologici Standard (Flat Λ CDM)

Parametro	Simbolo	Valore \pm 68% C.L.
Costante di Hubble	h	0.6736 ± 0.0054
Densità Materia Barionica	$\Omega_b h^2$	0.02237 ± 0.00015
Densità Materia Oscura	$\Omega_c h^2$	0.1200 ± 0.0012
Profondità Ottica	τ	0.0544 ± 0.0073
Ampiezza Fluttuazioni	$\ln(10^{10} A_S)$	3.044 ± 0.014
Indice Spettrale	n_S	0.9649 ± 0.0042

Tabella 1.1: Vincoli cosmologici ottenuti in [5] (TT,TE,EE+lowE+lensing).

Per una rassegna completa si rimanda alla pubblicazione ufficiale [5, 19, 20, 21]. Ai parametri cosmologici, si aggiungono poi una serie di parametri, detti parametri *nuisance* (“parametri di disturbo”), necessari per descrivere i processi astrofisici che influenzano i dati da cui i vincoli cosmologici sono derivati. Un esempio di questo tipo di parametri è la normalizzazione M utilizzata per lo studio delle candele standard. Noi ci riferiremo

ad essi come *parametri di appoggio*: il motivo sarà chiaro in Sezione 2.2.5.

I parametri cosmologici governano la dinamica del fattore di scala e la curvatura dello spaziotempo, influenzando dunque gli intervalli di tempo e le distanze. È dunque evidente la necessità e l'importanza di misurare questi parametri in maniera accurata.

1.3 Cosmologia Osservativa

In questa sezione ci soffermiamo sui progressi e sui successi della cosmologia osservativa, con riferimento a quelle che sono le principali sonde utilizzate per vincolare i parametri cosmologici. All'interno di questo scenario, evidenziamo alcune tensioni sorte in seguito alla crescente precisione nella misura dei parametri cosmologici. Infine, introdurremo le nuove sonde cosmologiche che cercheranno di far luce sulle attuali tensioni e sulla natura delle componenti più esotiche dell'Universo.

Seguiremo una dettagliata rassegna offerta da D. Huterer e D. L. Shafer [55], mentre per ulteriori dettagli rimandiamo all'annuale rassegna del Particle Data Group [16].

Negli ultimi due decenni, i cosmologi hanno studiato il modo migliore per misurare le proprietà dell'Universo, ed in particolare quelle dell'energia oscura. Studiando le informazioni che possono essere estratte da ogni sonda cosmologica, sono stati ideati nuovi test cosmologici e pianificate indagini osservative future, il cui obiettivo principale sarà la misura di precisione dell'energia oscura. Le misurazioni attuali ne hanno già notevolmente migliorato i vincoli rispetto alle prime misure e, sorprendentemente, mentre le barre di errore si sono drasticamente ridotte, i vincoli attuali sono ancora grosso modo coerenti con il modello standard ($\Omega_\Lambda \sim 0.7$, $w = -1$).

Vedremo in Sezione 2.1 che osservazioni diverse possono essere sensibili a diversi sottoinsiemi dell'insieme di parametri cosmologici standard e, al contempo, sonde sensibili agli stessi parametri possono vincolare in maniera differente il loro valore. È perciò fondamentale utilizzare una combinazione di sonde cosmologiche diverse in maniera tale da massimizzare la quantità e la qualità di informazioni estraibili, ed ottenere inoltre un maggior controllo sugli errori sistematici. In particolare, la maggior parte delle attuali sonde va incontro a degenerazioni nella stima dei parametri, per cui non si è in grado di scindere gli effetti della variazione simultanea di combinazioni specifiche di parametri cosmologici. I rapidi progressi nella cosmologia osservativa hanno dunque portato alla definizione del modello cosmologico standard, dove molti dei parametri chiave vengono determinati con un'accuratezza di pochi punti percentuali. Particolarmente importanti nel raggiungimento di questo risultato sono state le misurazioni delle anisotropie nel fondo cosmico a microonde da parte della missione Planck [5, 19, 20, 21].

La cosmologia osservativa fornisce dunque utili strumenti per testare l'attuale paradigma standard, con l'opportunità di indicare nuove vie percorribili al fine di estendere la nostra conoscenza dell'Universo.

1.3.1 Principali Sonde Cosmologiche

Come detto, i vincoli più stringenti sui parametri cosmologici sono stati ottenuti dalle ultime osservazioni della radiazione cosmica di fondo [5]. Rilassando l'ipotesi standard ed introducendo complessità aggiuntive, come la curvatura diversa da zero o una particolare equazione di stato dell'energia oscura, i vincoli risultano molto più deboli e mostrano grandi degenerazioni tra i vari parametri cosmologici. In particolare, molti parametri degenerano con la costante di Hubble, e allo stesso tempo H_0 non può essere vincolato direttamente dalle osservazioni dell'Universo primordiale e deve essere dedotto assumendo

prima un modello cosmologico ben preciso. In questo contesto, la misurazione indipendente di H_0 è fondamentale per comprendere la natura dell'Universo [56] e si necessita dunque di un approfondito studio delle complementarità e della sinergie tra sonde cosmologiche che permetta di raggiungere una sua precisa stima.

In questa sezione, esaminiamo le *Principali Sonde Cosmologiche*. Come sottolineato da Huterer e Shafer, il criterio che rende tale una sonda cosmologica principale è arbitrario. Lungo la nostra trattazione, individuiamo come principali le sonde cosmologiche che sono state oggetto di approfonditi studi nel corso delle scorse decadi ed hanno mostrato la consistenza dei propri risultati, sia in termini di confronto con altre sonde sia in termini di stima delle possibili fonti di incertezza. Tra tutte le principali sonde cosmologiche andremo a descrivere quelle che hanno svolto un ruolo (più o meno centrale) all'interno del nostro lavoro. In particolare, considereremo alcune delle sonde che, storicamente, hanno rappresentato la base per gli attuali vincoli cosmologici, ossia: Fondo Cosmico a Microonde (Cosmic Microwave Background, CMB), SuperNovae di Tipo Ia (SNeIa), Oscillazioni Acustiche Barioniche (Baryonic Acoustic Oscillations, BAO) e Lensing Gravitazionale. A queste, si aggiungono le Misure Locali di H_0 che hanno portato a quella che sembra essere la principale crisi della cosmologia osservativa odierna, la cosiddetta Tensione di Hubble. Esaminiamo brevemente queste sonde discutendone lo stato attuale delle osservazioni e riassumendone i principali punti di forza e debolezza. I dettagli utili alla nostra analisi verranno invece forniti nel Capitolo 2, di seguito forniamo essenzialmente una descrizione generale, rimandando ai rispettivi studi per una trattazione approfondita.

Fondo Cosmico a Microonde. La radiazione cosmica di fondo, o fondo cosmico a microonde (CMB), è l'unica sonda attualmente a disposizione in grado di studiare l'Universo nelle sue prime fasi evolutive. È per questo motivo che in letteratura ci si riferisce ad essa come *early-Universe cosmological probe*, ovvero come sonda cosmologica dell'Universo primordiale. Sebbene la sua capacità odierna di vincolare i parametri cosmologici ad una precisione spettacolare, la CMB all'inizio apparve deludentemente insensibile ai parametri caratterizzanti l'energia oscura. Questo sembrava confermato dal fatto che la fisica della CMB si svolgesse essenzialmente nell'Universo primordiale, molto prima che l'energia oscura divenisse dominante. Barioni e fotoni, accoppiati a causa dell'interazione coulombiana tra protoni ed elettroni e della diffusione Thomson tra elettroni e fotoni, oscillano coerentemente all'interno del fluido cosmologico primordiale e tali oscillazioni si manifestano come variazioni nella distribuzione termica del fondo a microonde. Lo spettro di potenza angolare, che descrive la distribuzione statistica delle anisotropie di temperatura, rappresenta una incredibile fonte da cui estrarre informazioni sull'Inflazione, sulla materia oscura e persino sull'energia oscura. Infatti, l'energia oscura influenza la nostra distanza dall'epoca della ricombinazione, e quindi la scala angolare alla quale si osservano le fluttuazioni della CMB. Questa è proprio la ragione per cui la CMB è di fatto una sonda complementare molto importante per lo studio dell'energia oscura. Dato che la fisica della CMB ha luogo al redshift della ricombinazione, quando l'energia oscura è presumibilmente del tutto trascurabile, le fluttuazioni della CMB non sono influenzate dall'energia oscura. In realtà, tale componente influenza l'angolo sotto cui vengono osservate le caratteristiche dello spettro di potenza angolare, ovvero la posizione orizzontale dei picchi. Una densità maggiore di energia oscura aumenterebbe D_A , spostando le fluttuazione della CMB su scale più piccole, e viceversa.

La CMB riduce drasticamente gli errori quando combinata con altre sonde [57] nonostante il fatto che le posizioni dei picchi, nello spettro di potenza della CMB, non possano da sole vincolare i parametri dell'energia oscura. Importanti vincoli complementari sull'ener-

gia oscura sono stati forniti da diverse generazioni di esperimenti CMB, tra cui WMAP [17, 18] e più recentemente Planck [5, 20]. Ci sono poi una pletora di effetti misurabili nello spettro della CMB che, se studiati nel dettaglio e con l’ausilio di osservazioni sempre più accurate a tutte le scale angolari, consentirebbero di estrarre informazioni fondamentali sull’evoluzione e sulla natura dell’Universo (ad esempio, l’effetto Sachs-Wolfe o la polarizzazione dello spettro [58, 59]). Le anisotropie nella radiazione cosmica di fondo non sono ritenute prevedibili teoricamente essendo esse attribuite ad una particolare realizzazione stocastica di processi quantistici che si verificano durante l’Inflazione [60]. Le informazioni sulle anisotropie possono dunque essere ottenute a partire dalle proprietà statistiche dello spettro di potenza della CMB. Questo implica però che, a causa del numero ridotto di direzioni indipendenti nel cielo, è impossibile ridurre al di sotto di un certo livello l’errore dovuto alla varianza cosmica su larga scala. Fortunatamente, questa incertezza sistematica può essere modellata e tecniche statistiche sempre più sofisticate permetteranno di massimizzare le informazioni estraibili dalle osservazioni.

SuperNovae di Tipo Ia. Le candele standard sono oggetti idealizzati che hanno una luminosità intrinseca o, altresì, una magnitudine assoluta nota [61]. Le distanze in astronomia sono notoriamente difficili da misurare, e la loro osservazione, ovvero la misura del flusso o della magnitudine apparente, permette di dedurre la distanza usando solo la legge dell’inverso del quadrato. Le SuperNovae di Tipo Ia (SNe Ia) sono candele standard molto luminose utili per misurare le distanze cosmologiche che, storicamente, hanno fornito i maggiori contributi (insieme alla CMB) nella costruzione del paradigma standard della cosmologia moderna, il modello Flat Λ CDM. Le SuperNovae sono energetiche esplosioni stellari. Si pensa che una SNIa si verifichi quando una nana bianca, superando il limite di massa di Chandrasekhar, collassa ed esplose. Naturalmente, le SNeIa non sono candele standard perfette: le loro magnitudini al picco di luminosità mostrano una dispersione di 0.3 mag, limitandone dunque la loro utilità come indicatori di distanza. Con una serie di calibrazioni di carattere osservativo (come l’estinzione dovuta alla polvere) la dispersione intrinseca diminuisce a ≤ 0.15 mag, consentendo misure di distanza con precisione $\sim 10\%$. Lo scoglio maggiore nell’osservare questi oggetti è lo sviluppo di una strategia di osservazione per rilevare le SNeIa prima che raggiungano il picco di luminosità, permettendo così di sfruttare la relazione di Phillips per determinarne la luminosità intrinseca. Gli sforzi recenti si sono concentrati sul miglioramento dell’analisi dei dati SNeIa in preparazione delle grandi osservazioni future [62, 63]. Inoltre, identificando sottocampioni specifici di SNeIa, potrebbe essere possibile ridurre la dispersione intrinseca delle curve di luce [64]. Man mano che il numero di SNeIa osservate cresce, e dunque gli errori statistici si riducono, la riduzione degli effetti sistematici è la chiave per uno studio di precisione dell’energia oscura. Tuttavia, attualmente le incertezze sistematiche sembrano essere state completamente quantificate e risultano paragonabili o inferiori agli errori statistici. Questo viene anche confermato dal fatto che altre sonde indipendenti concordino con i risultati ottenuti dalle SNeIa. Anche ignorando completamente i dati SNeIa, la combinazione della CMB con i dati BAO indica in maniera forte un Universo quasi piatto con una densità di materia al di sotto del valore critico, segno della presenza di una componente di energia oscura.

Misure Locali di H_0 . L’accelerazione dell’espansione cosmica è stata misurata sfruttando la relazione (1.47) tra la magnitudine, o la distanza di luminosità D_L , ed il redshift z delle SNeIa ad alto redshift. È possibile utilizzare lo stesso metodo, ma con un approccio diverso, per ricavare misure locali ($z \sim 0$) di H_0 . Questo è ciò che è stato fatto dalla collaborazione *SHOES* nel corso degli ultimi 15 anni. I metodi di misura della distanza in

astronomia implicano tipicamente relazioni empiriche. Per misurare la distanza assoluta di un oggetto, gli astronomi devono quindi costruire la cosiddetta scala delle distanze. Nel primo gradino, tramite la parallasse viene dedotta la distanza geometrica di oggetti astrofisici vicini, per poi calibrare la relazione periodo-luminosità delle Cefeidi contenute in essi. Questa relazione viene quindi utilizzata per allontanarsi ulteriormente verso galassie ospiti contenenti sia Cefeidi che SNeIa e produrre un vincolo sulla magnitudine assoluta in banda B (M_B) delle SNeIa. Infine, con il valore dedotto di M_B , viene dedotta la relazione magnitudine-redshift nell'intervallo di redshift $0.023 < z < 0.15$, per convertire questo valore di M_B in un valore di H_0 . In sostanza, dal valore dedotto di M_B , il team SH0ES lavora a ritroso per trovare l'intercetta della relazione magnitudine-redshift [65]. Le Cefeidi sono più spesso utilizzate per raggiungere distanze di 10 – 40 Mpc, perché sono gli oggetti più luminosi nella banda ottica con luminosità superiori a 10^5 luminosità solari. Le SNeIa superano di un miliardo di volte la luminosità solare, ma sono oggetti molto rari, quindi spesso fungono da ultimo gradino sulla scala delle distanze. Va comunque tenuto in considerazione che questi metodi trattano le stelle come candele standard empiriche, senza riferimento alla modellizzazione stellare o alla teoria astrofisica.

L'Hubble Space Telescope ha fornito la prima opportunità di misurare le Cefeidi oltre pochi Mpc, portando la collaborazione *Hubble Space Telescope Key Project* alla misura di un valore pari a $H_0 = 72 \pm 8$ km/s/Mpc [66]. Un risultato successivo, con una migliore calibrazione della distanza geometrica della Grande Nube di Magellano, ha portato la collaborazione SH0ES ad un valore $H_0 = 73.2 \pm 1.2$ km/s/Mpc [67]. Le misure di H_0 dedotte da questo metodo sono al centro di una delle tensioni che caratterizzano la cosmologia osservativa moderna, la tensione di Hubble. Anche se alcuni cosmologi non sono concordi sull'interpretazione comune di questa tensione [65, 68], essa rappresenta uno dei crocevia fondamentali per gli sviluppi cosmologici futuri.

Oscillazioni Barioniche Acustiche. Le oscillazioni barioniche acustiche si riferiscono alle oscillazioni nello spettro di potenza della materia, dovute al moto coerente del fluido foto-barionico nell'epoca precedente alla ricombinazione. Il potere delle BAO nel sondare l'energia oscura deriva dalla loro capacità di offrire una misura della distanza di diametro angolare D_A ad alto redshift, usando l'orizzonte sonoro come righello standard. L'orizzonte sonoro r_d è la distanza che una oscillazione copre, in funzione dei modi di oscillazione, nell'epoca della radiazione, prima della ricombinazione cosmologica. Il rilevamento pionieristico delle BAO si deve all'analisi dei dati provenienti dalla *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) [23]. Il principale punto di forza delle BAO deriva dalle eccellenti basi teoriche su cui si basano: la fisica delle oscillazioni acustiche è infatti eccezionalmente accurata.

Sebbene gli errori sistematici influenzino le ampiezze e, in misura minore, le posizioni dei picchi acustici nello spettro di potenza della galassie, questi spostamenti sono ampiamente corretti. Il *Dark Energy Spectroscopic Instrument* [69] rappresenta ad oggi l'avanguardia per la scienza delle BAO da cui è possibile ottenere eccellenti vincoli sull'energia oscura. Si noti infine che, a differenza delle SNeIa, le BAO forniscono una misura assoluta della distanza, nel limite in cui l'orizzonte sonoro r_d sia perfettamente noto. Questo rende le BAO non solo complementari alle SNeIa, ma anche un potente strumento per collegare misurazioni a basso ed alto redshift.

Lensing Gravitazionale. Quando i fotoni emessi da una sorgente attraversano il campo gravitazionale di un oggetto interposto lungo il loro percorso (la lente), a causa dell'effetto del campo gravitazionale della lente, vengono deflessi. Seguendo perciò percorsi diversi attraverso lo spaziotempo, i fotoni emessi contemporaneamente dalla sorgente arriveran-

no all'osservatore in momenti diversi. Poiché la curvatura dello spaziotempo è maggiore vicino al centro delle lenti, nei casi in cui vi sia un forte allineamento tra osservatore, lente e sorgente, gli effetti del lensing produrranno la comparsa di immagini multiple di una stessa sorgente. Questi effetti rientrano nel cosiddetto *Lensing Forte*.

Se la sorgente è variabile, il ritardo temporale tra più immagini può essere misurato monitorando la lente e cercando variazioni di flusso, corrispondenti allo stesso evento, nella sorgente. Osservando questo effetto è possibile derivare una quantità denominata *distanza di ritardo temporale* $D_{\Delta t}$, dipendente dalla distribuzione di massa nella lente, dalla distribuzione di massa lungo la linea di vista e dai parametri cosmologici. L'effetto di lensing forte offre un metodo indipendente per determinare H_0 . Infatti, $D_{\Delta t}$ è principalmente sensibile a H_0 , sebbene vi sia una debole dipendenza da altri parametri [70, 71, 72]. Questo metodo risulta completamente indipendente e complementare all'osservazione della CMB e alla scala delle distanze. Inoltre, poiché le sorgenti vengono principalmente individuati nei Quasars (QSO), sorgenti estremamente luminose e fortemente variabili, le distanze rilevate da questo metodo sono maggiori di quelle derivate dalla scala delle distanze. L'utilizzo dei ritardi temporali delle lenti gravitazionali per misurare H_0 è stato proposto per la prima volta da Refsdal (1964) in riferimento ad un particolare tipo di supernova [73], ma ad oggi sono i QSO ad essere utilizzati per vincolare la costante di Hubble [74, 75, 76]. Questo metodo richiede però una grande varietà di dati osservativi. È necessario, ad esempio, un monitoraggio fotometrico dedicato della lente per ottenere precise misure dei ritardi temporali [77]. I ritardi possono infatti essere misurati a partire con un solo anno di monitoraggio, a patto che l'accuratezza fotometrica sia elevata e la cadenza di osservazione giornaliera [78]. Sono inoltre necessari dati osservativi per vincolare la massa lungo la linea di vista [79]. La collaborazione che sta fornendo ottimi risultati a partire da questo metodo, è chiamata *HOLiCOW* [80, 75, 81, 82, 83]: con le misurazioni più recenti, per il modello cosmologico standard, hanno limitato la precisione su H_0 al 2.4%, a partire da una combinazione di sei QSO [83].

Quando invece la deviazione della luce è causata da strutture cosmiche, non perfettamente allineate tra la sorgente e l'osservatore, si parla di *Lensing Debole*. La deflessione della luce in questo caso è minima e porta a immagini impercettibilmente distorte di galassie lontane. Tale distorsione permette di misurare la distribuzione della materia oscura e la sua evoluzione nel tempo, sondando così l'influenza dell'energia oscura sulla crescita della strutture [84]. Le lenti più efficienti si trovano circa a metà strada tra noi e le galassie sorgente. La sensibilità all'energia oscura risiede sostanzialmente nella geometria e nella crescita delle strutture cosmiche e, negli ultimi anni, con osservazioni sempre più accurate ed indagini più ampie, queste sonde pongono vincoli sempre più competitivi [85, 86].

Gli errori sistematici derivano principalmente dalle limitazioni nella misurazione accurata delle forme delle galassie, causate dalla sfocatura atmosferica delle immagini, dalle distorsioni della lente del telescopio o dal trasferimento di carica nei CCD. Ci sono poi incertezze sistematiche dovute alla conoscenza limitata del redshift delle galassie sorgente. L'effetto di lente gravitazionale è ben compreso teoricamente e facilmente osservabile, rappresenta quindi una potente sonda sia della geometria che della struttura dell'Universo.

1.3.2 Attuali Tensioni

Il grande sviluppo di sonde cosmologiche indipendenti, in grado di studiare l'Universo sia nelle sue fasi primordiali che in quelle più recenti, ha portato a misure degli stessi parametri con metodi e approcci differenti. Ognuna di queste sonde ha raggiunto livelli di calibrazione tali da produrre vincoli percentuali su diversi parametri cosmologici, evi-

denziando alcune problematiche di fondo nel momento in cui misure del Tardo Universo vengono confrontate con quelle dell’Universo primordiale. Questa situazione è dunque all’attenzione della comunità scientifica mondiale. Attualmente non sembra che queste tensioni siano dovute ad una errata stima delle sistematiche nelle misure, e si è dunque aperti all’eventualità che estensioni teoriche dell’attuale modello cosmologico standard possano dare una spiegazione concreta a queste differenze. Come già sottolineato in [87], una attenta combinazione di sonde cosmologiche è in grado di alleviare le degenerazioni che caratterizzano la determinazione di alcuni parametri cosmologici, portando al raggiungimento dell’accuratezza necessaria per porre luce sulle attuali tensioni. Di seguito, descriviamo in breve le caratteristiche della principale tensione cosmologica, quella riguardante la costante di Hubble che viene riassunta in Figura 1.3. La misura di questo parametro, dedotta da sonde cosmologiche nell’Universo primordiali, risulta attualmente in tensione di circa $4 - 5\sigma$ con misure dello stesso parametro provenienti da osservabili che sondano le epoche cosmiche più recenti.

Solitamente, si fa riferimento a tale questione confrontando l’analisi delle osservazioni della CMB da parte della Planck Collaboration [5]:

$$H_0 = 67.36 \pm 0.54 \text{ km/s/Mpc (Planck Collaboration, 2018)}$$

con le osservazioni delle SuperNovae locali ($0.023 < z < 0.17$) calibrate tramite le Cefeidi della Grande Nube di Magellano [67] che, allo stato dell’arte, trovano:

$$H_0 = 73.2 \pm 1.3 \text{ km/s/Mpc (SH0ES Collaboration, 2021)}$$

dove entrambe i risultati riportano gli errori ad un livello di confidenza del 68%. In particolare, queste due misure mostrano una discrepanza non trascurabile di 4.4σ . Alcuni studi, riassunti in [3, 88, 89], mostrano come questa tensione si presenti anche considerando misure ottenute da altre sonde del Tardo Universo, come ad esempio misure di lensing forte (H0LiCOW [83]) o nuove candele standard (TRGB [90]), arrivando anche a valori di 5.3σ nel caso in cui le misure H0LiCOW vengano combinate con quelle SH0ES.

Come sottolineato in [91], ci sono varie ragioni per cui questo disaccordo tra misure differenti della stessa quantità, possa rappresentare una incredibile opportunità. In primo luogo, potrebbe indicare l’incompletezza del modello cosmologico standard e la necessità di una nuova fisica. In secondo luogo, altri parametri cosmologici come la densità della materia o la curvatura, sono spesso degeneri rispetto a H_0 e gli sforzi per determinare con accuratezza il valore di H_0 possono dunque aiutare ad alleviare queste degenerazioni, dato che il fattore H_0^{-2} è un fattore di proporzionalità per ciascuno dei parametri di densità.

Con il termine «tensione», i cosmologi intendono la discrepanza tra misure diverse di una stessa quantità. Le strade per superare questa tensione possono essere esemplificate attraverso due esempi storici che hanno caratterizzato la fisica ed, in particolare, la cosmologia del ‘900. Si potrebbe, innanzitutto, avere bisogno di uno studio più accurato degli effetti sistematici: uno dei padri della cosmologia osservativa, Edwin Hubble, basò le proprie osservazioni sull’ipotesi dell’esistenza di una sola popolazione di Cefeidi. Oggi sappiamo invece che la sua analisi considerò due popolazioni, una delle quali era a lui sconosciuta. È dunque evidente, alla luce dei primi risultati di Hubble ($H_0 \simeq 500\text{km/s/Mpc}$), quali siano i potenziali effetti sistematici quando si lavora in un campo di precisione come la cosmologia. Viceversa, si potrebbe interpretare la tensione nello stesso spirito con cui Einstein interpretò la precessione del perielio di Mercurio. Senza dimenticare che pregiudizi e dogmi, moda e fede [34], rappresentano una pericolosa insidia nella risoluzione di una sottile controversia.

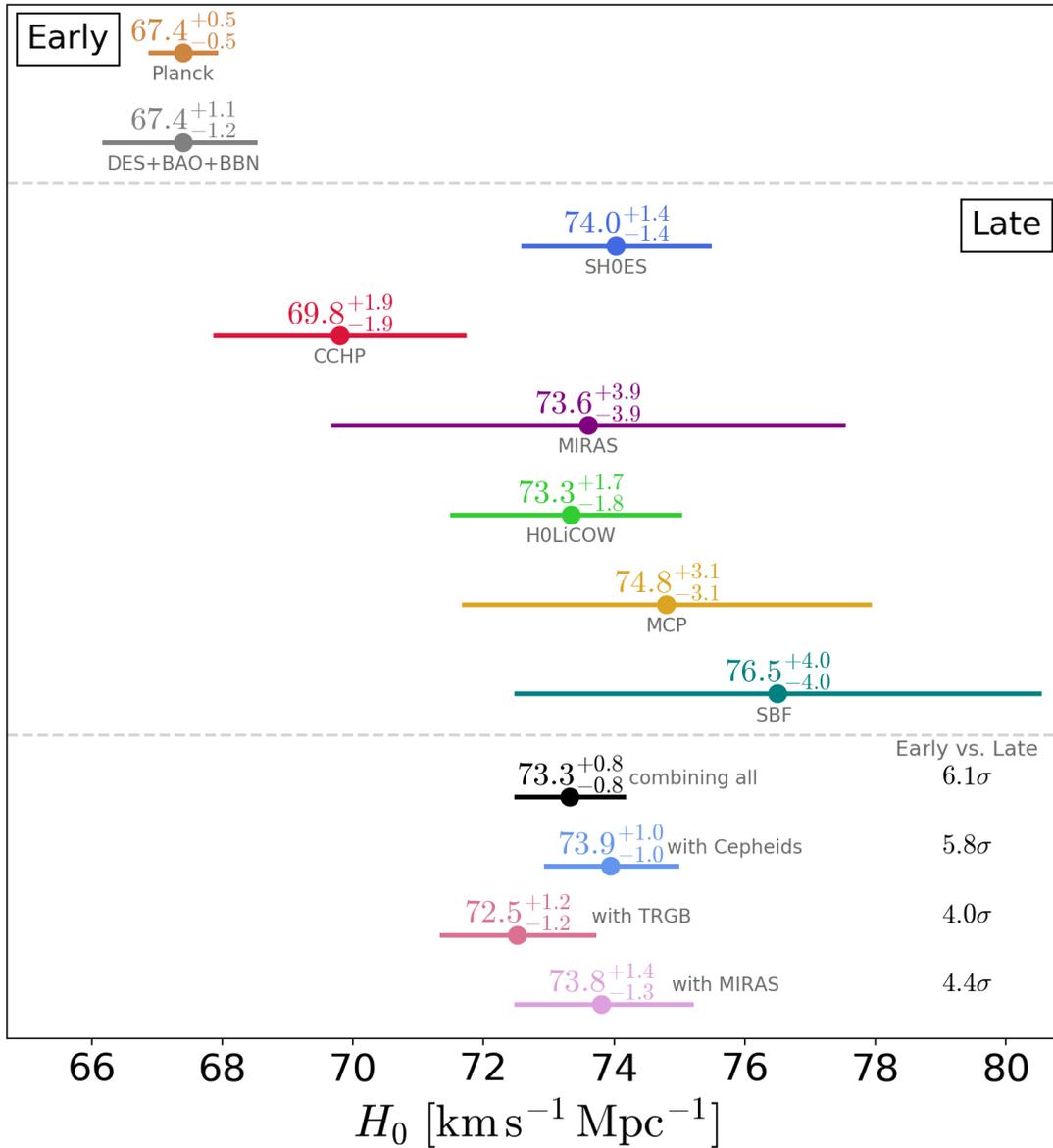


Figura 1.3: Alcune misure della costante di Hubble H_0 (Flat Λ CDM) dalla letteratura. Il pannello superiore riporta le misure ottenute nell’Universo primordiale, il pannello centrale quelle ottenute nel Tardo Universo, mentre il pannello inferiore mostra la combinazione dei risultati SHOES [67] con le altre sonde del Tardo Universo. Estratta da [92].

1.3.3 Nuove Sonde Cosmologiche

Alla luce di quanto detto, è fondamentale individuare un sempre maggiore numero di sonde cosmologiche che siano tra di loro indipendenti, studiando possibili sinergie e complementarità che aumentino il nostro potere vincolante sui diversi parametri cosmologici.

Ad oggi, sono stati proposti diversi metodi alternativi per vincolare i parametri cosmologici fondamentali, come le misurazioni della Polarizzazione della CMB [93], i Water Maser [94, 95], le Attenuazione del Fondo di Radiazione γ [96] o le Fotosfere in espansione di SuperNovae di Tipo IIP [97]. Inoltre, sono state sviluppate calibrazioni alternative della scala delle distanze utilizzando particolari caratteristiche dell’evoluzione stellare, in particolare il Ramo delle Giganti Rosse (TRGB) [90]. Queste necessitano però di ulteriori studi poiché la loro precisione non è ancora paragonabile alle attuali sonde cosmologiche e, spesso, non risultano indipendenti dalle sonde principali o richiedono ipotesi ulteriori.

Un caso a parte è rappresentato invece dai *Cronometri Cosmici* [98, 99], dai *Gamma-Ray Burst* [10, 100], dai *Quasar* [9, 101] e dalle *Onde Gravitazionali* (GW) [102, 103]. Infatti, un grande sforzo osservativo ha portato questi a collocarsi di diritto tra le nuove sonde cosmologiche più promettenti. Le prime tre verranno utilizzate nella nostra analisi e ne forniremo i dettagli nel Capitolo 2; per quel che riguarda le GW, invece, la loro scoperta relativamente recente ha aperto le porte alle cosiddetta *astronomia multi-messaggera* che darà la possibilità nel prossimo futuro di porre uno sguardo diverso sul cosmo. Poiché al tempo in cui scriviamo non si ha ancora a disposizione un numero sufficiente di osservazioni per poter estrarre da esse vincoli cosmologici precisi, nel Capitolo 5 offriremo una descrizione del panorama attuale e dei possibili sviluppi futuri per questa nuova sonda.

Capitolo 2

Dati Osservativi e Metodo di Analisi

Delineato il profilo teorico sotto verrà svolta l'analisi cosmologica, in questo capitolo presentiamo una descrizione dettagliata delle sonde cosmologiche e delle relative raccolte di dati utilizzate. Esporremo poi la procedura di analisi utilizzata, soffermandoci in particolare sui metodi statistici implementati all'interno del codice Python, descrivendone il funzionamento generale e definendone passaggi e funzioni principali.

Più nello specifico, in Sezione 2.1 verranno presentate le diverse sonde cosmologiche studiate, e quindi: le SuperNovae di Tipo Ia (SNeIa), le Oscillazioni Barioniche Acustiche (BAO), i Cronometri Cosmici (CC), i Quasars (QSO) ed i Gamma-Ray Bursts (GRB).

In Sezione 2.2, verranno forniti i fondamenti di statistica bayesiana alla base del metodo utilizzato per la nostra analisi, con particolare riferimento alle tecniche di campionamento MCMC tramite le quali verrà derivata l'inferenza dei parametri cosmologici.

Per finire, in Sezione 2.3, la struttura del codice che implementa l'algoritmo di analisi statistica viene esplicitata a mezzo di un diagramma a blocchi, dove vengono definiti i passaggi chiave per l'inferenza dei parametri, differenziando in base alle possibili scelte.

2.1 Sonde Cosmologiche del Tardo Universo

Descriviamo, dunque, il dettaglio delle sonde cosmologiche utilizzate nella nostra analisi, presentandone il profilo teorico ed osservativo, oltre alle caratteristiche che ne permettono l'uso in ambito cosmologico.

Poiché l'obiettivo sarà quello di produrre un'analisi cosmologica focalizzata sulle proprietà dell'Universo più recente, atta ad esplorarne i vincoli cosmologici e ad aggiornare la letteratura a riguardo, tutte le sonde vengono selezionate all'interno della classe delle cosiddette *sonde cosmologiche del Tardo Universo*, ovvero di quelle sonde che permettono di indagare l'evoluzione dell'Universo nelle sue fasi più recenti, a differenza della CMB che permette invece di studiare l'Universo primordiale.

2.1.1 SuperNovae di Tipo Ia

Come visto in Sezione 1.3, le SuperNovae sono tra gli eventi astrofisici più energetici che possono essere osservati nel cosmo. In particolare, sebbene i dettagli del meccanismo non siano completamente chiari, si pensa che un evento di SuperNovae di Tipo Ia (SNeIa) si verifica ogni qualvolta una nana bianca, accrescendo massa dalla stella compagna (in un sistema binario), supera il limite di massa di Chandrasekhar. Questo fissa la stabilità della

struttura interna della nana bianca, ed il suo superamento comporta un rapido collasso gravitazionale della struttura stellare, a cui segue una violenta esplosione.

La loro natura energetica rende questi eventi ideali per l'osservazione ma, al contempo, la loro natura transiente ne rende complicata l'individuazione. Infatti, per poter essere utilizzate come candele standard è necessario osservarne la curva di luce immediatamente dopo all'esplosione, in modo da poter sfruttare la relazione di Phillips per determinare la luminosità intrinseca della SNeIa a partire dalla misura dell'ampiezza della sua curva di luce. È infatti la relazione tra la luminosità intrinseca ed il decadimento della curva di luce 15 giorni dopo il picco di luminosità, che permette di standardizzare questi oggetti e di utilizzarli come indicatori di distanza attraverso la (1.47).

Per una candela standard, la magnitudine assoluta (ovvero la sua luminosità intrinseca) è sempre la stessa. Pertanto, una misura della magnitudine apparente (ovvero del flusso) fornisce informazioni dirette sulla distanza di luminosità della sorgente da cui, data la relazione (1.47), è possibile estrarre alcuni vincoli sul modello cosmologico. In realtà, non abbiamo bisogno di conoscere la luminosità intrinseca, basta sapere che questa è costante, poiché ciò che andremo a misurare saranno le distanze relative per un insieme di candele standard. Dal punto di vista osservativo, ciò che ci interessa è dunque il *modulo di distanza* μ , ovvero la differenza tra la magnitudine apparente m e quella assoluta M , ovvero:

$$\mu \equiv m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L(z)}{10pc} \right) + 5 . \quad (2.1)$$

In realtà, come mostrato in [6, 104], le misure di μ vengono ottenute attraverso una parametrizzazione della curva di luce che, sommando alla differenza tra magnitudine apparente ed assoluta una serie di fattori correttivi, tiene conto di diverse incertezze osservative:

$$\mu = m_B - M_B + \alpha s - \beta c + \Delta_{host} + \Delta_B \quad (2.2)$$

dove m_B è la magnitudine apparente del picco in banda B, αs è un termine associato alla durata dell'evento, βc è un termine legato al colore della supernova, mentre M_B è la magnitudine assoluta in banda B di una supernova di fiducia con $s = c = 0$. Infine, Δ_{host} è un fattore di correzione dovuto alla massa della galassia ospite, mentre Δ_B è un fattore di correzione dovuto ad effetti di selezione [104].

Una volta misurato il modulo di distanza attraverso la relazione (2.2), è possibile utilizzare le SNeIa come sonde cosmologiche sfruttando la relazione tra il modulo di distanza μ e la distanza di luminosità (2.1) e la relazione tra la distanza di luminosità ed i parametri cosmologici (1.47), ossia:

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L(z)}{1Mpc} \right) + M \quad (2.3)$$

dove M in questo caso è un parametro di appoggio (*nuisance*) che tiene conto della calibrazione in (2.2). Come vedremo nel Capitolo 3, questo parametro rappresenta la normalizzazione della curva $\mu(z)$, il cosiddetto *Diagramma di Hubble*.

Le incertezze sistematiche possono essere incluse come contributi aggiuntivi, ovvero non diagonali, alla matrice di covarianza dei moduli di distanza. Una delle principali componenti sistematiche è la pluralità di campioni di SNeIa. Ogni analisi infatti si basa sull'unione di diversi sottocampioni, ciascuno dei quali osservato con strumenti e calibrazioni differenti, ed è dunque necessaria una particolare attenzione per far fronte ai possibili effetti sistematici.

Dati Osservativi. Ovviamente, gli errori statistici diminuiscono all'aumentare del numero di osservazioni che si utilizzano nell'analisi. È dunque in questo ambito che possiamo

ottenere un'ulteriore conferma degli incredibili progressi tecnologici che hanno permesso lo sviluppo della cosmologia moderna. Se alla fine del XX secolo le prime osservazioni di una componente di energia oscura furono basate su di un esiguo numero di osservazioni SNeIa (16 eventi in [1] e 42 eventi in [2]), ad oggi gli studi cosmologici vengono condotti analizzando simultaneamente ~ 1000 di SNeIa [105, 106].

Nella nostra trattazione andremo ad analizzare due particolari campioni. Il primo, il *Joint Light-curve Analysis* (JLA) [107], ha rappresentato per anni lo standard per ogni analisi cosmologica basata sulle SNeIa. Conta di 740 osservazioni confermate spettroscopicamente, le quali vengono mostrate in Figura 2.2. Il secondo, noto come *Pantheon* [108, 106], è la raccolta di osservazioni SNeIa più accurata e completa disponibile oggi. Comprende 1048 osservazioni confermate spettroscopicamente, riportate in Figura 2.1, ed include alcuni sottoinsiemi di dati contenuti nel JLA.

In letteratura [6], è stato sottolineato come la raccolta Pantheon riduca la sistematica dovuta alla calibrazione attraverso una cross-calibrazione di tutte le osservazioni SNeIa. Lo stesso approccio è stato seguito anche per il JLA, ma la cross-calibrazione non è stata applicata a tutte le osservazioni e dunque le incertezze sistematiche risultano maggiori rispetto al Pantheon. La calibrazione rappresenta l'incertezza sistematica dominante in tutte le analisi cosmologiche basate sulle SNeIa. Cross-calibrare tutte le osservazioni SNeIa all'interno del campione totale permette di trovare (in due osservazioni differenti) le differenze tra le magnitudini osservate di una stessa stella, in modo da ricalibrarle rispetto ad una libreria stellare di spettri sintetici. Così facendo gli effetti sistematici della calibrazione vengono ridotti portando ad una maggiore diagonalizzazione della matrice di covarianza, come è possibile notare confrontando le matrici in Figura 2.1 ed in Figura 2.2. Questo è ciò che rende Pantheon lo standard di tutti gli studi cosmologici attuali.

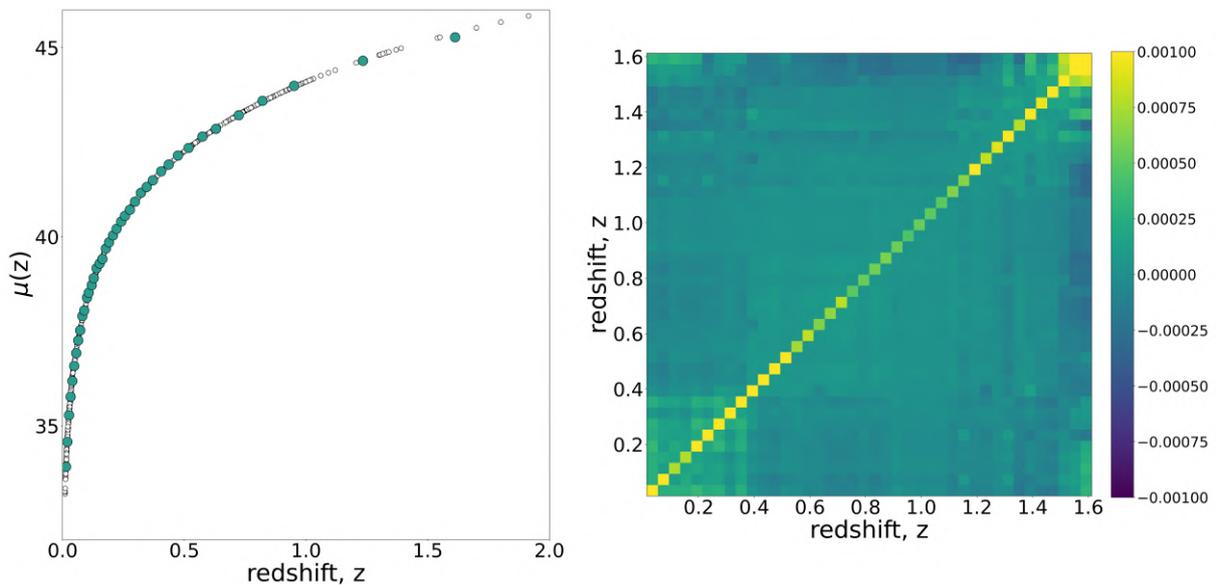


Figura 2.1: SuperNovae di Tipo Ia: dati osservativi del campione Pantheon. Nel pannello a sinistra, viene proiettata sul piano $\mu(z) - z$ la distribuzione dei dati ottenuti dalle osservazioni SNeIa e raccolte nel campione Pantheon [108]. Nel pannello a destra, mostriamo una rappresentazione della matrice di covarianza ottenuta a partire dalla procedura indicata in [104, 6]. Al campione totale dei dati (punti bianchi) viene sovrapposto il campione ridotto (punti blu) ricavato da [108].

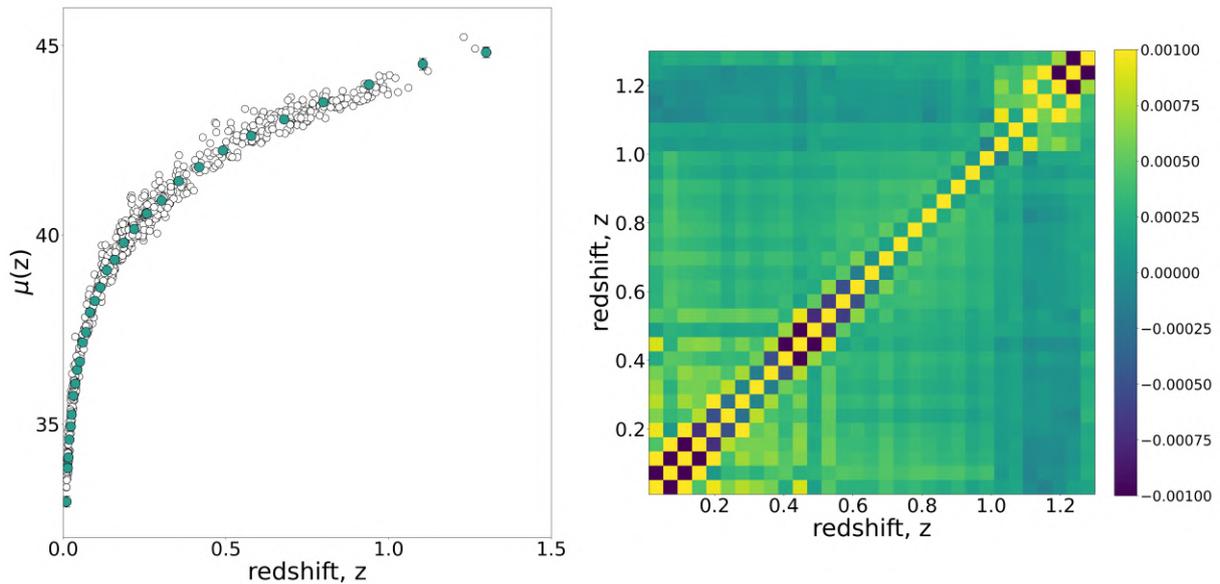


Figura 2.2: SuperNovae di Tipo Ia: dati osservativi del campione JLA. Nel pannello a sinistra, viene proiettata sul piano $\mu(z) - z$ la distribuzione dei dati ottenuti dalle osservazioni SNeIa e raccolte nel campione JLA [107]. Nel pannello a destra, mostriamo una rappresentazione della matrice di covarianza ottenuta a partire dalla procedura indicata in [105]. Al campione totale dei dati (punti bianchi) viene sovrapposto il campione ridotto (punti blu) ricavato da [107].

La sistematica in questo campione viene attribuita a otto fonti di errore principali: l'estinzione della Via Lattea, la correzione del bias di distanza, la calibrazione fotometrica, la calibrazione del modello delle curve di luce, la contaminazione del campione da parte di altri tipi di SN, le correzioni a basso z per le velocità peculiari delle galassie ospiti, la dipendenza dei parametri di appoggio dal redshift e la dipendenza della luminosità dalle galassie ospiti. Una trattazione completa può essere trovata in [104, 6].

Nella nostra analisi, non utilizzeremo i campioni completi, bensì utilizzeremo quelli ridotti disponibili in letteratura. Le specifiche sono riportate in [108, 107], mentre in Figura 2.1 e 2.2 ne riportiamo l'andamento sovrapposto al campione totale.

2.1.2 Oscillazioni Barioniche Acustiche

Le Oscillazioni Barioniche Acustiche (BAO) sono una proprietà statistica osservata nella funzione di correlazione delle galassie o nello spettro di potenza della materia.

Nelle sue fasi primordiali, secondo il paradigma standard, l'Universo era composto di un plasma in cui fotoni e materia, intesa come barioni e materia oscura (CDM), risultavano accoppiati tramite scattering Thompson. Date le sue proprietà, la CDM si disaccoppiò dal plasma primordiale prima rispetto ai barioni e, collassando gravitazionalmente, diede vita alle buche di potenziale gravitazionale, all'interno delle quali andranno poi a formarsi le attuali strutture cosmiche. Prima che fotoni e barioni si disaccoppiassero ($z \sim 1000$), l'interazione tra la forza gravitazionale dovuta alla materia e la pressione di radiazione dei fotoni fa sì che il plasma foto-barionico oscilli coerentemente all'interno di queste buche di potenziale. Sostanzialmente, l'interazione tra campo gravitazionale e pressione di radiazione genera delle perturbazioni all'interno del fluido, che si propagano all'interno di esso come onde sonore sferiche, dove con il termine «sonore» ci si riferisce al fatto che le perturbazioni sono di tipo adiabatico. In seguito al disaccoppiamento e dunque

alla ricombinazione cosmologica dell'idrogeno, i fotoni possono propagarsi liberamente. Questo campo di radiazione è ciò che oggi osserviamo come radiazione cosmica di fondo. Viceversa, all'interno delle buche di potenziale, i barioni collassano gravitazionalmente portando ad una configurazione con una sovradensità di materia al centro della buca ed un «guscio» esterno di barioni, il cui raggio viene chiamato orizzonte sonoro r_d , definito come:

$$r_d = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z')}{H(z')} dz' \quad \text{dove} \quad c_s(z) = \frac{c}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_b(z)}{\rho_\gamma(z)} \right]^{-1/2} \quad (2.4)$$

dove $z_d \approx 1060$ è il redshift del disaccoppiamento, c_s è la velocità del suono nel fluido fotone-barione, mentre ρ_b e ρ_γ rappresentano rispettivamente la densità di barioni e fotoni.

Essenzialmente, esso rappresenta la distanza massima che le onde sonore avrebbero potuto percorrere attraverso il plasma primordiale prima della ricombinazione [109]. Questo effetto, previsto per la prima volta quasi 50 anni fa [110, 111], risulta in un eccesso di probabilità nel trovare (ad una distanza pari all'orizzonte sonoro r_d) una galassia vicino ad un'altra galassia. Calibrare l'orizzonte sonoro attraverso l'osservazione della CMB ($r_d = 144.6 \pm 0.5$ Mpc [5]) permette di identificare questa quantità come la lunghezza intrinseca delle BAO. Perciò, misurando la loro estensione angolare θ sulla volta celeste, è possibile sfruttare questi fenomeni come righelli standard a partire dalla definizione (1.48). La misura della loro estensione angolare, insieme alla conoscenza precisa ed indipendente dell'orizzonte sonoro, consente di vincolare i parametri cosmologici attraverso una misura della distanza angolare D_A . Questo significa che, individuata una sovradensità di galassie ad un certo redshift z_{eff} , la sua estensione angolare $\theta(z_{\text{eff}})$ (trasversale alla linea di vista) può essere utilizzata per misurare $D_A(z_{\text{eff}})$ al redshift z_{eff} del campione di galassie [112]. Allo stesso tempo, poiché oltre ad una estensione angolare, la sovradensità sarà caratterizzata da una estensione lungo la linea di vista (ovvero una estensione in redshift Δz), nella direzione radiale (parallela alla linea di vista) questa potrà essere utilizzata per vincolare il parametro di Hubble $H(z)$ attraverso la relazione (2.4).

Avremo dunque due tipi di osservazioni che permettono di vincolare i parametri cosmologici. I modi radiali, particolarmente utili in quanto forniscono informazioni localizzate sull'energia oscura tramite il parametro di Hubble al redshift z_{eff} , ed i modi trasversali, i quali forniscono una misura della distanza di diametro angolare che può essere messa in relazione ai parametri cosmologici tramite la (1.49). Tuttavia, i modi radiali (data la precisione richiesta nella determinazione delle quantità Δz e r_d) sono più difficili da misurare rispetto ai modi trasversali.

Possiamo dunque riassumere:

$$\text{Modi Trasversali:} \quad \theta(z) = \frac{r_d}{D_A(z)} \quad (2.5)$$

$$\text{Modi Radiali:} \quad \Delta z = H(z)r_d . \quad (2.6)$$

In realtà, molti degli osservabili che caratterizzano le BAO sono funzioni della distanza di diametro angolare D_A . Abbiamo, infatti, la distanza di diametro angolare comovente D_M , definita come:

$$D_M(z) = \frac{D_A}{(1+z)} . \quad (2.7)$$

Definendo la distanza di Hubble D_H :

$$D_H(z) = \frac{c}{H(z)} \quad (2.8)$$

otteniamo una misura della distanza di volume D_V come:

$$D_V(z) = [zD_H(z)D_M^2(z)]^{1/3} \quad (2.9)$$

È dunque chiaro che, per poter utilizzare le BAO come sonde cosmologiche, è necessaria una grande accuratezza nelle misure di redshift, e dunque nella misura della posizione degli oggetti che si intende analizzare. Poiché le attuali misure di redshift fotometrici sono caratterizzate da un $\delta z \sim 0.02$, per ottenere precisi vincoli sui parametri cosmologici si richiede l'utilizzo di osservazioni ottenute tramite indagini spettroscopiche, le quali permettono di raggiungere una accuratezza dell'ordine di $\delta z \leq 0.001$. Un altro requisito fondamentale per questo tipo di osservazioni è il grande volume delle osservazioni, in modo da mappare un numero sufficiente di campioni e sopprimerne così la varianza cosmica.

Dati Osservativi. I dati utilizzati in questo lavoro provengono da studi ed indagini differenti, riportano quindi osservazioni BAO riferite a quantità osservabili diverse. In particolare, abbiamo misurazioni di $D_V(z)$, $D_A(z)$, $D_H(z)$ e $H(z)$, ognuna delle quali viene calibrata rispetto ad una particolare funzione dell'orizzonte sonoro r_d . La raccolta completa dei dati, mostrati in Figura 2.3, può essere trovata in [7].

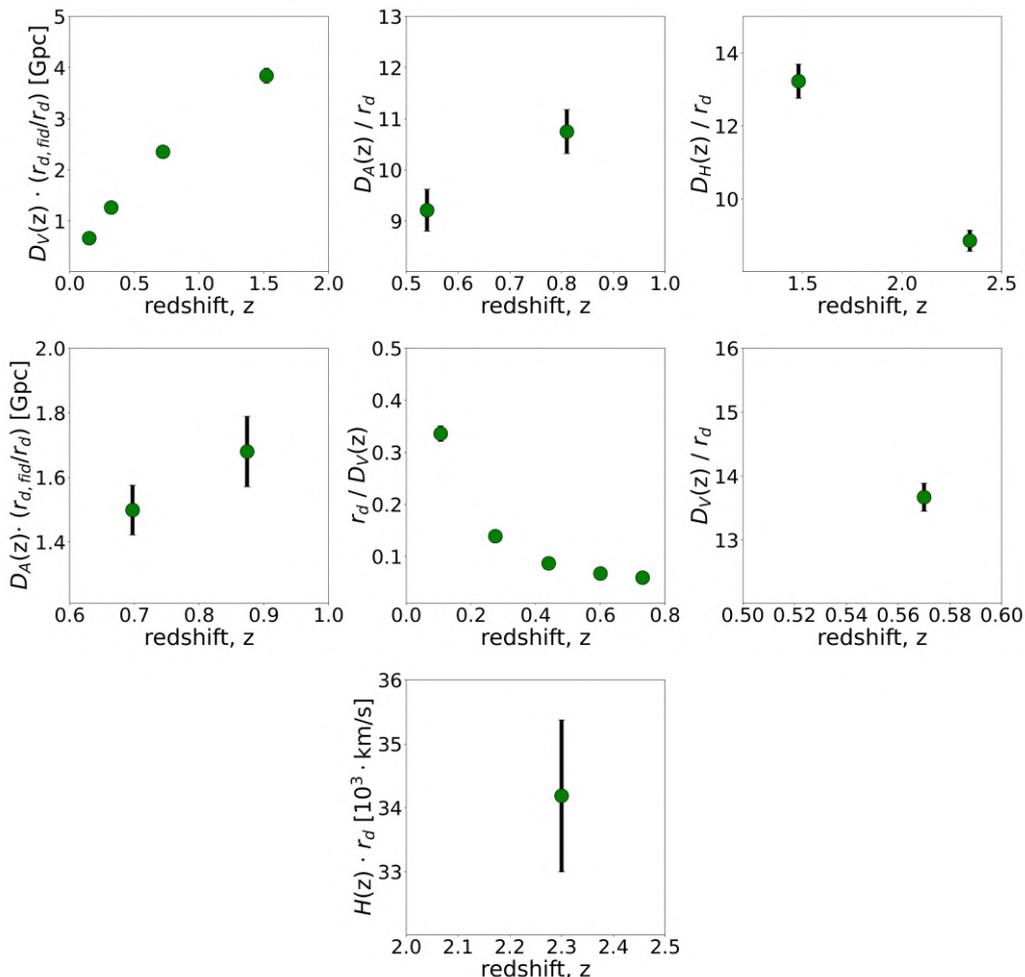


Figura 2.3: Oscillazioni Barioniche Acustiche: dati osservativi. In ogni pannello viene mostrata la proiezione dei dati sul piano definito in base all'osservabile caratteristico dell'osservazione: $D_V(z)$, $D_A(z)$, $D_H(z)$ e $H(z)$, ognuno dei quali viene calibrato rispetto ad una particolare funzione dell'orizzonte sonoro r_d . La raccolta completa dei dati può essere trovata in [7].

2.1.3 Cronometri Cosmici

Una possibile chiave di lettura indipendente per le questioni cosmologiche moderne è la misura diretta dell'evoluzione del parametro di Hubble. Per determinare $H(z)$, un approccio innovativo rispetto alle classiche sonde cosmologiche, è fornito da una particolare classe di oggetti astrofisici, i *Cronometri Cosmici* (CC), in grado di determinare la variazione dell'età dell'Universo al variare del redshift.

Questa nuova sonda cosmologica rappresenta un metodo alternativo, innovativo ed indipendente per sondare l'evoluzione cosmica e studiare l'evoluzione dell'energia oscura tramite la misura diretta del tasso di espansione dell'Universo. La loro caratteristica principale risiede nella possibilità di misurare direttamente l'integrando nell'equazione che determina la distanza di luminosità (1.47) e di diametro angolare (1.49). Infatti, in [113] è stato sostenuto che le sonde che derivano i parametri cosmologici attraverso quantità integrate hanno un potere discriminante debole rispetto a $w(z)$. Come già sottolineato in Sezione 1.1.1, è possibile esprimere il parametro di Hubble nella forma:

$$H(z) = -\frac{1}{(1+z)} \frac{dz}{dt} \quad (2.10)$$

dove dt è la variazione dell'età dell'Universo nell'intervallo di redshift dz .

Per misurare direttamente questa quantità si ha dunque bisogno di un oggetto standardizzabile che fornisca la variazione dell'età dell'Universo al variare del redshift. Da qui il nome di *Cronometri Standard* o, più comunemente, cronometri cosmici. Questo termine esplicita il fatto che la loro osservazione è basata sulla misura di intervalli temporali dt . Nello studio pioniero [98], lo standard per questi oggetti viene individuato in un particolare tipo di galassie: i migliori CC sono infatti le galassie massive ($\log(M/M_\odot) \geq 11$) che evolvono passivamente su una scala temporale molto più lunga della loro differenza di età [114, 115]. Questa famiglia di galassie, rappresenta la scelta migliore dal momento che, come molte analisi indipendenti hanno dimostrato [116, 117, 118, 119, 120, 121], formano la loro massa stellare ad alti redshift ($z > 2 - 3$) in un periodo di tempo relativamente breve ($t \sim 0.1 - 0.3 \cdot 10^9$ anni) ed avendo esaurito il proprio serbatoio di gas nelle prime fasi di vita, si evolvono per lo più passivamente. Questo significa che esse costituiscono la più antica popolazione di galassie ad ogni redshift e possono quindi essere utilizzate per tracciare in modo omogeneo l'evoluzione dell'età differenziale dell'Universo in funzione del redshift [122].

Il principale punto di forza dell'approccio CC è che, per la loro osservazione, non viene fatta alcuna ipotesi cosmologica, fornendo dunque uno strumento ideale per testare i modelli cosmologici. Il loro utilizzo in ambito cosmologico è diventato sempre più comune, specie in tempi recenti, dato che le potenzialità come sonda cosmologica sono state confermate da un discreto numero di risultati. Infatti i CC sono stati in grado di fornire vincoli su diversi parametri cosmologici, sia in modelli cosmologici standard che alternativi, sia singolarmente che in combinazione con altre sonde standard [123, 124, 125]. In particolare, sono stati utilizzati nell'esplorazione dell'evoluzione temporale dell'equazione di stato dell'energia oscura [126], nel contesto della fisica dei neutrini [8], per cercare di rompere le degenerazioni che affliggono le misure della curvatura [87], nella controversia sulla costante di Hubble [92], ma anche per fornire un vincolo indipendente su H_0 [127, 128]. Infatti, poiché questa popolazione è distribuita su un ampio intervallo di redshift, con i CC è possibile sondare direttamente il tasso di espansione dell'Universo lungo gran parte della sua storia evolutiva.

La maggior parte della popolazione è osservata nelle epoche successive al Mezzogiorno Cosmico ($z \sim 2$). A redshift più elevati, essi costituiscono solo una popolazione minore

[116, 129]. Tuttavia, recenti osservazioni spettroscopiche suggeriscono l'esistenza di alcune di queste galassie fino a $z \sim 4$ [130, 131, 132]. Inoltre, come già suggerito da [98], dato un campione statistico di molte centinaia di galassie tra $z = 0$ e $z \sim 0.2$, la costante di Hubble H_0 può essere misurata localmente con una precisione percentuale, purché le incertezze sistematiche possano essere ridotte a quel livello.

Essenzialmente, le misure del tasso di espansione dell'Universo vengono dedotte misurando la differenza di età Δt tra due galassie passive, formatesi contemporaneamente e separate da un piccolo intervallo di redshift Δz , intorno a z_{eff} . Questo approccio permette di stimare $dz/dt \approx \Delta z/\Delta t$ e determinare quindi $H(z_{\text{eff}})$ attraverso la (2.10). La variazione del tempo cosmico t rispetto al redshift z può essere dedotta attraverso l'invecchiamento delle popolazioni stellari nelle galassie selezionate. Come suggerito in [133], è possibile misurare $H(z)$ attraverso un osservabile diretto negli spettri galattici, piuttosto che fare affidamento sulla stima dell'età della popolazione stellare a partire da un *fit* sui modelli. Uno dei modi più solidi per fare ciò, è utilizzare una discontinuità del continuo spettrale intorno a $\lambda_{rest} = 4000\text{\AA}$, denominato $D4000$. L'ampiezza della discontinuità, dovuta a righe di assorbimento dei metalli, dipende dall'età e dalla metallicità della popolazione stellare, nonché dalla storia di formazione stellare. Tuttavia, è stato dimostrato che la sua ampiezza è correlata linearmente con l'età della galassia, ed è debolmente dipendente dalla storia di formazione stellare, se la popolazione stellare è vecchia e in evoluzione passiva [133, 134, 135, 136].

Dunque, se si conosce la metallicità Z della popolazione stellare, è allora possibile dedurre la differenza tra le età di due galassie misurando la differenza delle ampiezze del $D4000$ nello spettro integrato, ovvero:

$$\Delta D4000 = A(Z, SFH) \Delta t \quad (2.11)$$

dove $A(Z, SFH)$ è un parametro che dipende dalla metallicità Z e dalla storia di formazione stellare (SFH). $D4000$ è una caratteristica degli spettri galattici che può essere misurata dal rapporto tra le densità di flusso continuo in una banda rossa e una banda blu intorno a $\lambda_{rest} = 4000\text{\AA}$. La definizione precisa delle bande di λ è stata oggetto di vari studi e la definizione iniziale [137] è stata successivamente modificata [114], in modo da garantire una minore influenza dell'arrossamento dovuto alla polvere.

Il parametro di Hubble, date le equazioni (2.10) e (2.11), può dunque essere scritto come:

$$H(z) = -\frac{A(Z, SFH)}{1+z} \frac{dz}{dD4000}.$$

Per stimare $H(z)$ è quindi necessario: derivare osservativamente una relazione $D4000 - z$, che fornirà la quantità $dz/dD4000$, per poi calibrare la relazione $D4000 - t$ con modelli di sintesi di popolazione stellare e quantificare il parametro $A(Z, SFH)$. Per una singola coppia di galassie, la barra di errore su dz/dt , non è sufficientemente restrittiva per fornire vincoli significativi su $H(z)$ [98]. Tuttavia, questo problema viene tipicamente affrontato studiando il comportamento mediano di popolazioni di CC in diversi intervalli di massa. Per garantire la correttezza dell'approccio, inoltre, bisogna assicurarsi che gli oggetti analizzati, in funzione del redshift, appartengano alla stessa popolazione.

Un punto fondamentale da tenere in considerazione per minimizzare possibili bias nell'analisi è l'omogeneità nella trattazione dei dati. Risulta perciò fondamentale un'accurata selezione di galassie in evoluzione passiva, escludendo qualsiasi possibile contaminazione e massimizzando la purezza del campione: selezionare gli oggetti più massivi, garantisce che essi siano anche i più vecchi e con i minori tempi scala per la formazione stellare. Inoltre, in mancanza di un'unica indagine spettroscopica adatta a studiarne l'evoluzione su un

ampio intervallo di redshift, si è costretti ad unire campioni di galassie diversi, i quali possono essere ottenuti con criteri differenti. Se le stime di $H(z)$ vengono ottenute all'interno dello stesso campione, le differenze tra i vari campioni non rappresentano però un grosso ostacolo, purché l'omogeneità dei criteri di selezione, della misurazione della massa e del trattamento della sistematica venga garantita all'interno di ciascun campione [114]. Ad ogni modo, il fatto che questo metodo si basi solo su misure differenziali ($dz/dD4000$) lungo intervalli di tempo cosmico (e redshift) relativamente ridotti, permette di mitigare le fonti di errore.

Nelle ultime due decadi questo approccio è stato affinato, portando a metodi standard per la selezione e l'analisi di questi oggetti [138, 8, 139, 140, 141]. In un recente studio [99], viene fatto notare come la maggiore fonte di errore nel caso dei CC sia dovuta alla sistematica, i cui contributi all'interno della matrice di covarianza possono essere stimati come:

$$Cov_{ij}^{sys} = Cov_{ij}^{met} + Cov_{ij}^{young} + Cov_{ij}^{model} \quad (2.12)$$

dove:

$$Cov_{ij}^{model} = Cov_{ij}^{SFH} + Cov_{ij}^{IMF} + Cov_{ij}^{St.Lib.} + Cov_{ij}^{SPS} . \quad (2.13)$$

In prima analisi abbiamo dunque tre contributi:

- Cov^{met} dovuto all'incertezza sulla stima della metallicità delle popolazioni stellari;
- Cov^{young} dovuto a possibili componenti stellari giovani non rivelate [140];
- Cov^{model} dovuto alla modellizzazione delle popolazioni stellari, suddiviso in:
 - Cov^{SFH} dovuto all'incertezza sulla SFH;
 - Cov^{IMF} dovuto all'incertezza sulla funzione di massa iniziale;
 - $Cov^{St.Lib.}$ dovuto all'incertezza sulle librerie stellari;
 - Cov^{SPS} dovuto all'incertezza sulle singole popolazioni stellari.

Una trattazione completa può essere trovata in [142]. Sono state proposte diverse possibilità per ridurre l'impatto della sistematica. Grazie al calcolo della matrice di covarianza completa, è stato anche studiato come un ulteriore miglioramento dei modelli SPS e delle osservazioni possa ridurre significativamente gli errori sistematici, aprendo la possibilità di ottenere una stima a livello percentuale del tasso di espansione dell'Universo nell'intervallo $0 < z < 2$. Gli enormi progressi fatti nella quantificazione degli errori sistematici e statistici hanno dunque permesso di raggiungere una accuratezza nei vincoli cosmologici confrontabile, competitiva e complementare rispetto ad altre sonde.

A differenza delle misurazioni BAO che richiedono una misurazione a priori dell'orizzonte sonoro, i CC non richiedono alcuna misura cosmologica esterna ed hanno dunque una sensibilità maggiore rispetto ai parametri cosmologici. Naturalmente, a causa delle incertezze, i vantaggi complessivi dei CC rispetto alle BAO vengono parzialmente compensati, ma è evidente il loro contributo fondamentale per il futuro della cosmologia.

Dati Osservativi. Si è scelto di utilizzare una tra le più recenti raccolte di misurazioni CC, contenente 31 misurazioni di $H(z)$ nell'intervallo $0.07 < z < 1.965$, che può essere trovata riassunta in [87] con le referenze associate ad ogni misura.

In Figura 2.4 riportiamo la rappresentazione grafica dei dati e della matrice di covarianza ad essi associata, ottenuta seguendo nel dettaglio la procedura indicata in [142].

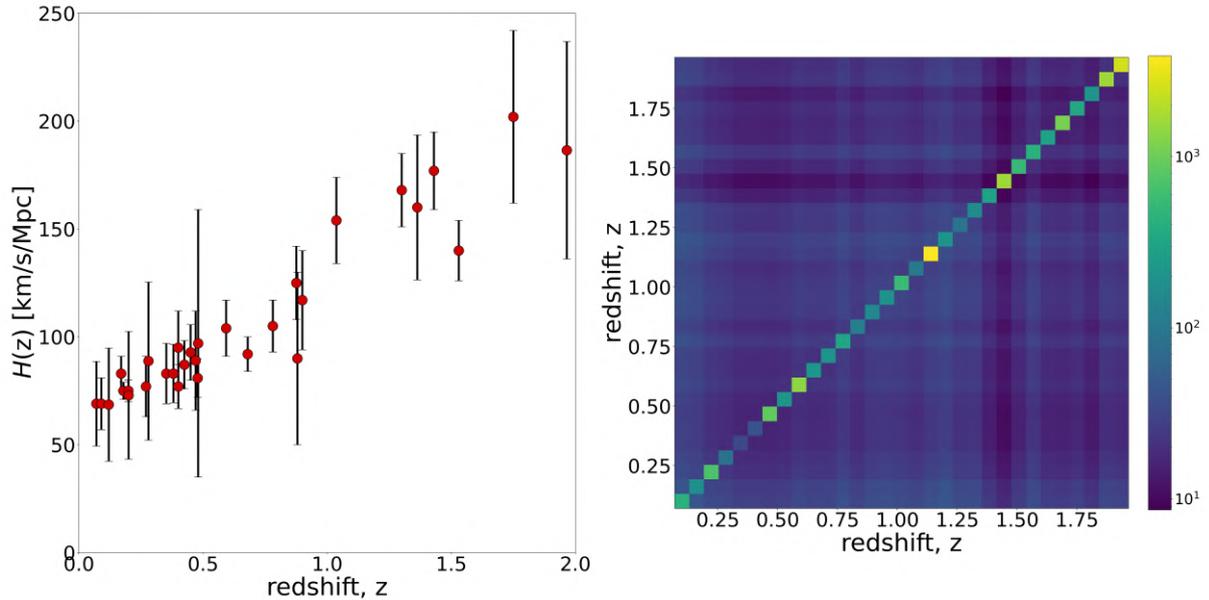


Figura 2.4: Cronometri Cosmici: dati osservativi. Nel pannello a sinistra, viene proiettata sul piano $H(z) - z$ la distribuzione dei dati ottenuti dalle osservazioni di CC e raccolti in [87]. Nel pannello a destra, viene mostrata la rappresentazione della matrice di covarianza ottenuta a partire dalla procedura indicata in [142].

2.1.4 Estensioni del Diagramma di Hubble

La formulazione di nuove relazioni empiriche in grado di standardizzare oggetti astrofisici sempre più diversi e, in particolare, una crescente capacità osservativa affiancata da metodi di calibrazione efficienti hanno permesso di estendere significativamente la quantità di candele standard utilizzabili come indicatori di distanza.

Tra tutte le possibili estensioni del Diagramma di Hubble (Maser, TRGB, ...), nella nostra analisi vengono inseriti due tra gli oggetti astrofisici che negli ultimi anni hanno attirato l'attenzione della comunità scientifica: i *Quasi Stellar Object* o Quasar (QSO), ed i Gamma-Ray Burst (GRB). Queste due nuove candele standard sono fondamentali per la cosmologia osservativa poiché permettono di estendere il Diagramma di Hubble fino a $z \sim 9$. Sono infatti tra gli eventi più energetici dell'Universo e vengono osservati lungo un esteso intervallo di redshift. La loro combinazione con la candela standard classica, le SNIa, fornisce dunque un importante strumento per sondare la storia evolutiva dell'Universo su ampie scale temporali.

Anche se la sistematica ed il metodo di analisi di queste nuove candele andranno definite in maggior dettaglio, numerosi studi stanno iniziando ad utilizzarle in combinazione con sonde indipendenti per porre interessanti vincoli cosmologici [143, 9].

Quasars

I Quasars (QSO) fanno parte di una particolare classe di galassie, nota come Galassie Attive (AGN). L'interazione tra il buco nero supermassivo situato nel centro galattico ed il disco di accrescimento che lo circonda, produce una grande emissione di radiazione con uno spettro di energia (SED) molto ampio: dall'emissione Radio della polvere ai raggi γ provenienti dai getti di plasma perpendicolari al piano galattico.

Nella complessità di componenti che costituiscono questi sistemi, negli ultimi anni è stata

individuata una relazione empirica tra l'emissione di raggi X a 2 keV, proveniente dalla corona di gas che sovrasta il disco di accrescimento, e l'emissione UV a 2500 Å del disco stesso. Il vorticare verso il buco nero del materiale contenuto nel disco di accrescimento, produce una radiazione con un particolare spettro di corpo nero multi-colore. Tale radiazione, incidendo sul gas che circonda il nucleo di queste galassie (nota come corona), genera un meccanismo di scattering Compton inverso, per il quale la corona emette una radiazione X.

Sebbene i dettagli sul processo fisico che la origina siano ancora materia di dibattito [144, 145], sembra evidente che sia la relazione intrinseca tra le emissioni del disco di accrescimento e della corona ad imporre la relazione empirica osservata, tale per cui:

$$L_X \propto L_{UV}^\gamma \quad (2.14)$$

dove $\gamma = 0.6$ [146]. Sfruttando questa relazione, negli ultimi anni, vari gruppi di ricerca [147, 148] hanno delineato una particolare tecnica in grado di standardizzare questi oggetti, permettendo di ottenere una misura indipendente della distanza di luminosità ed estendere il Diagramma di Hubble, dato che le loro caratteristiche ne permettono l'osservazione lungo un intervallo di redshift ($0 < z < 9$) irraggiungibile con le SNeIa.

Poiché la relazione tra le luminosità può essere espressa da una relazione logaritmica tra i rispettivi flussi, tramite osservazioni fotometriche del flusso in banda X e UV, è possibile calcolare la distanza di luminosità [147, 149] come:

$$\log D_L = \frac{[\log F_X - \beta - \gamma(\log F_{UV} + 27.5)]}{2(\gamma - 1)} - \frac{1}{2} \log(4\pi) + 28.5 \quad (2.15)$$

dove F_X e F_{UV} sono le densità di flusso osservate. La pendenza γ (così come l'intercetta β) della relazione $F_X - F_{UV}$ è un parametro di appoggio (*nuisance*) e deve essere determinato tramite inferenza.

Sfruttando la relazione (2.3), una volta ottenuto un campione di misure di D_L in funzione del redshift z , è immediato ottenere – tramite la (2.1) – le relative misure del modulo di distanza μ su cui si baserà l'analisi successiva. In questo modo, le osservazioni QSO possono essere utilizzate in combinazione con le osservazioni SNeIa, dato che entrambe si riferiscono allo stesso osservabile $\mu(z)$. Poiché le candele standard offrono misure di distanze relative, non è detto che la normalizzazione M del Diagramma di Hubble sia identica per candele standard differenti. Dovrà essere dunque prestata una certa attenzione prima di analizzare congiuntamente candele standard differenti.

Le principali fonti di errore sono date dal bias di Eddington, da effetti fotometrici, dall'assorbimento della radiazione da parte di gas e polvere, dalla selezione dei QSO in base alla loro forma SED e da effetti di contaminazione della galassia ospite [9, 101]. In particolare, in [9] è stato mostrato che le deviazioni dalla relazione $L_X - L_{UV}$ sono dovute all'assorbimento dei raggi X da parte del gas, all'estinzione UV da parte della polvere, alle incertezze di calibrazione nei raggi X [148], alla variabilità e ai bias di selezione.

Dati Osservativi. Con una particolare selezione delle sorgenti, la dispersione nella relazione (2.14) diminuisce [150, 144] e lo studio approfondito delle incertezze in [9] ha permesso di selezionare un campione omogeneo di ~ 2400 sorgenti nell'intervallo $0 < z < 8$, di cui maggiori dettagli possono essere trovati in [151].

La raccolta completa dei dati utilizzati nell'analisi può essere trovata in [152].

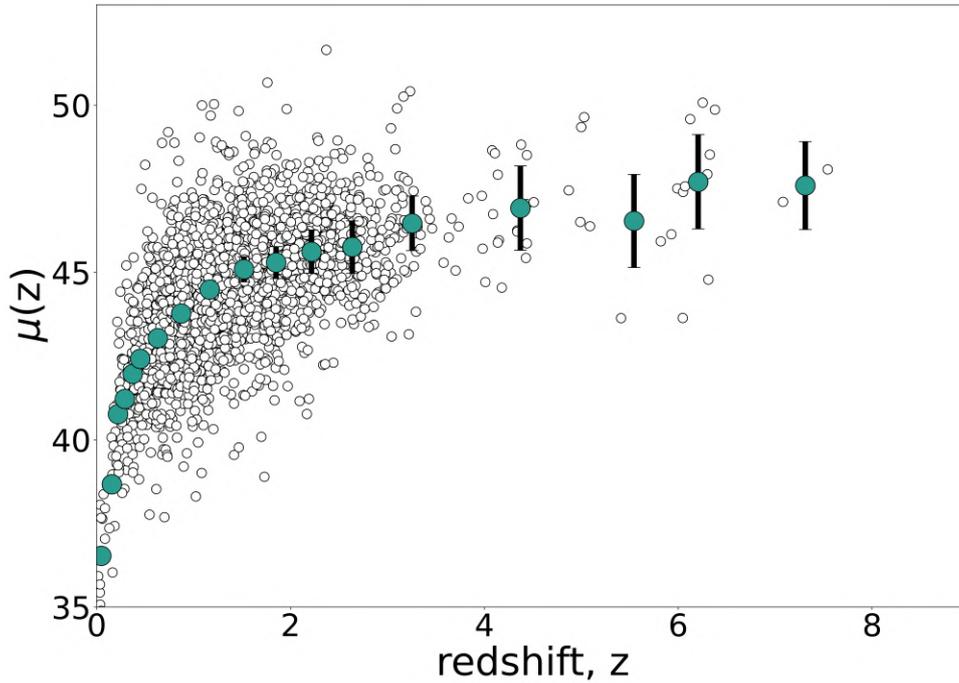


Figura 2.5: Quasars: dati osservativi. Viene mostrata la proiezione sul piano $\mu(z) - z$ della distribuzione dei dati ottenuti dalle osservazioni QSO e raccolti in [152]. Al campione totale dei dati (punti bianchi) viene sovrapposto il campione ridotto (punti blu) ottenuto seguendo la procedura proposta nella Sezione 2.1.4.

Poiché le dimensioni dell'insieme di dati richiedono un elevato tempo computazionale, per poter studiare in maniera agile questa sonda cosmologica, sia singolarmente che in combinazione con le altre sonde, si è reso necessario ridurre le dimensioni della raccolta suddividendo il campione in particolari intervalli di redshift, secondo il cosiddetto metodo di *binnaggio* (o binning). Come è possibile notare in Figura 2.5, la densità delle osservazioni lungo l'intervallo di redshift non è costante, per questo motivo si è deciso di suddividere il campione in intervalli di redshift crescenti all'aumentare del redshift. In particolare, il *binnaggio* viene effettuato secondo la suddivisione:

- $0.0 \leq z < 0.5 \Rightarrow \Delta z = 0.08;$
- $0.5 \leq z < 1.0 \Rightarrow \Delta z = 0.25;$
- $1.0 \leq z < 2.0 \Rightarrow \Delta z = 0.35;$
- $2.0 \leq z < 3.0 \Rightarrow \Delta z = 0.45;$
- $3.0 \leq z < 8.0 \Rightarrow \Delta z = 1.00.$

L'ultima scelta è dovuta al fatto che la densità di osservazioni diminuisce drasticamente per $z > 3$, come possibile osservare in Figura 2.5.

All'interno di ciascun intervallo Δz , il valore di z_{bin} , μ_{bin} e $\Delta\mu_{bin}$ viene ottenuto dalla media di tutte le osservazioni contenute in Δz . L'arbitrarietà nella scelta degli intervalli e delle modalità di suddivisione del campione rappresenta, ovviamente, la maggior fonte di incertezza per questo approccio. Allo stesso tempo, dopo aver effettuato diverse verifiche al variare degli intervalli di suddivisione, l'andamento dell'insieme di dati così ottenuto (punti in blu in Figura 2.5) sembra riprodurre correttamente l'andamento del campione completo e, come vedremo, i risultati cosmologici così ottenuti sono in linea con la letteratura.

Gamma-Ray Bursts

I Gamma-Ray Bursts (GRB) sono tra gli oggetti più enigmatici e, allo stesso tempo, più energetici dell'Universo. Ciò che è certa è la loro natura transiente che, in analogia con le SNeIa, si manifesta in una curva di luce di durata variabile.

Essenzialmente, questi eventi si presentano come intense emissioni di raggi γ che sembrano provenire sia da eventi galattici che extra-galattici. Fino a qualche decina di anni fa la loro natura era completamente sconosciuta. Man mano che il progresso tecnologico ha messo a disposizione satelliti sempre più sensibili a questo tipo di radiazione, si è iniziato a far luce su questo particolare fenomeno. Al momento, vengono suddivisi in due sotto categorie in funzione della durata della curva di luce, in cui lo spartiacque è fissato a $\Delta t \sim 0.2$ sec: i GRB lunghi ed i GRB corti.

Anche se si è lontani da una comprensione dettagliata, in [153] è stata proposta una classificazione alternativa che riprende quella utilizzata per le SN: GRB Tipo I, per gli eventi generati da un sistema stellare binario, e GRB Tipo II, per gli eventi generati da singole stelle. Più recentemente (2017), l'osservazione di una controparte elettromagnetica sotto forma di raggi γ (GRB170817A) pochi secondi dopo l'osservazione di un'onda gravitazionale (GW170817), ha suggerito che i progenitori dei GRB corti potrebbero essere le coalescenze di stelle di neutroni [154].

Nonostante il meccanismo responsabile del rilascio di elevate quantità di energia non sia ancora completamente noto, e solo alcuni aspetti dei modelli progenitori siano compresi, questi oggetti vengono osservati fino ad alti redshift grazie all'enorme quantità di energia rilasciata. Sono quindi dei candidati ideali per indagini cosmologiche in grado di studiare il tasso di espansione dell'Universo ad alto redshift [155]. Seppur le loro proprietà intrinseche rimangano tuttora oggetto di studi, negli anni sono state fatte molte osservazioni e l'incremento di informazioni a disposizione ha permesso di studiarne alcune caratteristiche osservative.

Tra queste, L. Amati [100] ha individuato una correlazione tra l'energia del fotone $E_{p,i}$ (corrispondente al picco negli spettri νF_ν) e l'energia irradiata E_{iso} , assumendo che questa sia isotropa. Secondo tale relazione, che prende il nome di *Relazione Amati*, queste due quantità sono legate dalla:

$$\log\left(\frac{E_{iso}}{1\text{erg}}\right) = b + a \log\left[\frac{E_{p,i}}{300\text{keV}}\right] \quad (2.16)$$

dove a e b sono valori costanti, $E_{p,i}$ è l'energia di picco spettrale al redshift del GRB, che può essere derivato dalla quantità osservata dell'osservatore E_p , tramite la relazione $E_{p,i} = E_p(1+z)$.

Questa correlazione suggerisce dunque un metodo che permette di utilizzare i GRB come candele standard. Infatti, l'energia irradiata E_{iso} può essere calcolata dal flusso bolometrico F_{bolo} come:

$$E_{iso} = 4\pi D_L^2(z) F_{bolo} (1+z)^{-1} \quad (2.17)$$

ed è perciò possibile ricavare una misura della distanza di luminosità come:

$$D_L(z) = \sqrt{\frac{E_{iso}(1+z)}{4\pi F_{bolo}}} \quad (2.18)$$

Questo significa che misurando il picco dello spettro di emissione E_p dei GRB, in combinazione con una misura del flusso bolometrico F_{bolo} , otteniamo una misura della distanza di luminosità, la quale può essere così sfruttata in ambito cosmologico grazie alla relazione

(1.47), rendendo a tutti gli effetti i GRB una nuova candela standard.

È chiaro che, grazie all'equazione (2.3), le osservazioni GRB possono essere utilizzate in combinazione con le osservazioni SNeIa, in analogia con quanto fatto con le osservazioni QSO. Come per le altre candele standard, per poter utilizzarli come indicatori di distanza è necessario calibrare coerentemente questa correlazione. La mancanza di GRB a z molto bassi, rende difficile la calibrazione dei GRB e finora sono state proposte diverse procedure di calibrazione [10, 156, 157, 158], principalmente basate sull'ausilio delle SNeIa a basso redshift per determinare i parametri a e b nella relazione (2.16).

Come mostreremo successivamente nel Capitolo 4, questo è un punto molto delicato dell'analisi dei GRB e dovrà essere prestata particolare attenzione per non commettere errori che potrebbero influenzare negativamente la nostra analisi cosmologica.

Il recente aumento delle misure di GRB, combinato con il fatto che la correlazione $E_{p,i} - E_{iso}$ richiede solo due parametri che sono direttamente dedotti dalle osservazioni, rende questa correlazione uno strumento cosmologico interessante. Una proprietà importante della correlazione $E_{p,i} - E_{iso}$ è la sua dispersione. Come mostrato in [159, 160], il 50% della dispersione è probabilmente il risultato della distribuzione degli angoli di apertura del getto di emissione, mentre è stato dimostrato [161] che una piccola frazione (5–10%) della dispersione dipende dal modello cosmologico e dai parametri assunti per il calcolo di E_{iso} . Altri contributi includono la struttura del getto, gli angoli di osservazione, la sensibilità dei rivelatori alla banda di energia e la magnetizzazione all'interno del materiale emesso.

Dati Osservativi. Noi utilizzeremo l'insieme di dati proposto in [10] (~ 160 osservazioni GRB nell'intervallo $0 < z < 8$), dove l'applicazione di una particolare tecnica di regressione locale permette di determinare i parametri di correlazione a e b .

La raccolta completa dei dati viene mostrata in Figura 2.6.

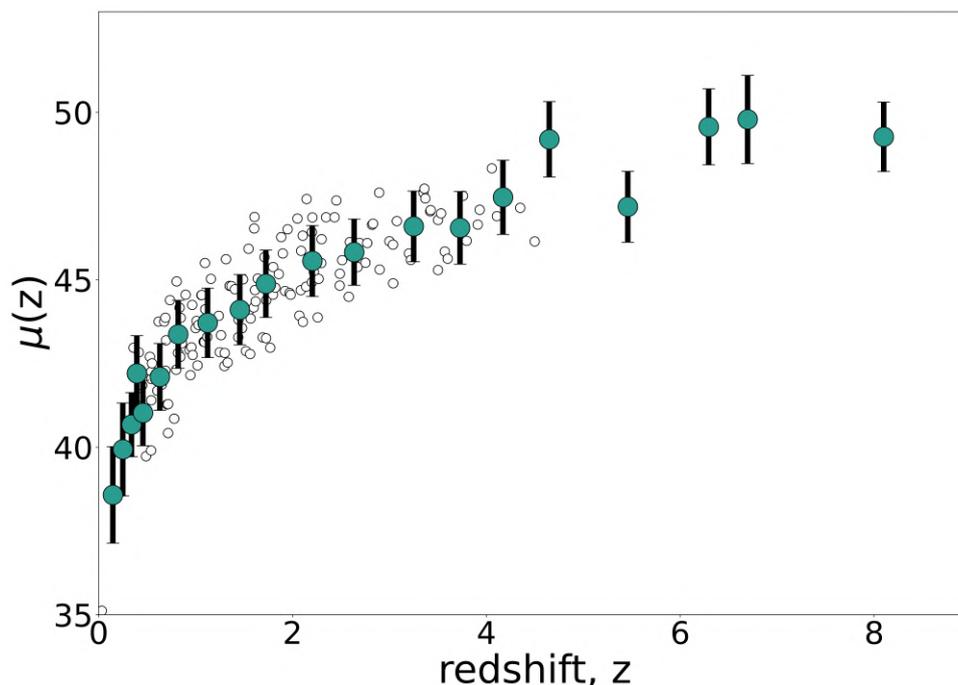


Figura 2.6: Gamma-Ray Bursts: dati osservativi. Viene mostrata la proiezione sul piano $\mu(z) - z$ della distribuzione dei dati ottenuti dalle osservazioni GRB e raccolti in [10]. Al campione totale dei dati (punti bianchi) viene sovrapposto il campione ridotto (punti blu) ottenuto seguendo la procedura proposta nella Sezione 2.1.4.

In analogia con le altre candele standard, anche per i GRB si è scelto di utilizzare l'insieme di dati ridotto attraverso un processo di *binnaggio*, equivalente a quello applicato nel caso dei QSO. Come è possibile notare confrontando le osservazioni QSO e quelle GRB, in Figura 2.5 e 2.6, il numero di osservazioni lungo l'intervallo di redshift varia significativamente a seconda della sonda considerata. Per questo motivo, seppur la procedura sia la stessa, gli intervalli in cui il campione di GRB è stato suddiviso, differiscono rispetto ai QSO. In particolare:

- $0.0 \leq z < 0.5 \Rightarrow \Delta z = 0.08;$
- $0.5 \leq z < 1.0 \Rightarrow \Delta z = 0.20;$
- $1.0 \leq z < 2.0 \Rightarrow \Delta z = 0.30;$
- $2.0 \leq z < 3.0 \Rightarrow \Delta z = 0.40;$
- $3.0 \leq z < 9.0 \Rightarrow \Delta z = 0.50.$

All'interno di ciascun intervallo Δz , il valore di z_{bin} , μ_{bin} e $\Delta\mu_{bin}$ viene ottenuto dalla media di tutte le osservazioni contenute in Δz . In analogia con quanto detto precedentemente per i QSO, l'arbitrarietà nella scelta degli intervalli e delle modalità di suddivisione del campione rappresenta, ovviamente, la maggior fonte di incertezza per questo approccio. Allo stesso tempo, le stesse motivazioni descritte nel caso dei QSO rendono (per il momento) questa scelta soddisfacente da un punto di vista scientifico.

Avendo discusso le proprietà osservative delle diverse sonde cosmologiche utilizzate nell'analisi, passiamo ora ad una discussione dei metodi statistici implementati.

2.2 Metodi Bayesiani per la Cosmologia

Se le proprietà dell'Universo fossero completamente note, un approccio statistico fornirebbe le probabilità di ottenere un determinato risultato a partire da una data osservazione. Tuttavia, in cosmologia, la situazione è diametralmente opposta. Si hanno poche osservazioni a disposizione e da esse si tenta di estrarre il maggior numero possibile di informazioni. Attualmente, gli insiemi di dati sono sempre più estesi ed è possibile confrontare e combinare dati provenienti da osservazioni differenti, il che ha due effetti principali.

In primo luogo, la grande disponibilità di dati rende necessaria l'applicazione di tecniche di analisi sempre più accurate poiché, mentre le barre di errore statistiche si riducono, gli effetti sistematici diventano sempre più dominanti e non si può prescindere da una loro quantificazione quanto più completa e dettagliata.

In secondo luogo, al miglioramento delle osservazioni segue una miglora nei modelli che descrivono l'Universo. Ciò significa che, oltre alle dimensioni delle raccolte di dati, aumentano anche le dimensioni dello spazio dei parametri. I parametri che descrivono i modelli cosmologici non sono prevedibili da principi primi e devono essere determinati richiedendo che il modello si adatti alle osservazioni. La determinazione dei parametri cosmologici è dunque l'obiettivo primario delle osservazioni. Sebbene esista una varietà di tecniche statistiche, all'interno della cosmologia moderna il paradigma dominante è quello dell'inferenza bayesiana.

2.2.1 Inferenza Bayesiana dei Parametri

In un quadro statistico bayesiano, *la probabilità è una misura del grado di conoscenza su una data proposizione*. Essa è dunque una misura della conoscenza di un evento e non una proprietà dell'evento stesso. Questa definizione si applica, indipendentemente, a qualsiasi evento, sia che si tratti di esperimenti ripetuti, di situazioni una tantum, di variabili casuali o di ipotesi di un modello [162, 163].

Il concetto bayesiano di probabilità è stato introdotto per la prima volta dal reverendo Thomas Bayes [164] nel XVIII secolo, ma la sua formulazione teorica risale al XX secolo. Nel 1946, Richard Cox [165] ha infatti mostrato che le regole della teoria bayesiana sono una semplice conseguenza degli assiomi fondamentali della teoria della probabilità. Il *Teorema di Bayes* sancisce che:

$$p(A|B, I) = \frac{p(B|A, I)p(A|I)}{p(B|I)} \quad (2.19)$$

fornendo le regole in base alle quali devono essere manipolate le probabilità, intese come stati di conoscenza di una data proposizione A . Da notare che $p(A|I)$ fornisce la probabilità di A subordinata all'assunzione che I sia vero, dove I denota qualsiasi informazione rilevante per la costruzione della probabilità, sottolineando il fatto che ogni definizione di probabilità si basa su alcune assunzioni implicite.

Se intendiamo A come un modello \mathcal{M} , descritto da un insieme di ipotesi sotto forma di vettore dei parametri \mathbf{H} , ed identifichiamo B come l'insieme di dati d ottenuto in seguito ad una certa osservazione, avremo:

$$p(\mathbf{H}|d, \mathcal{M}) = \frac{p(d|\mathbf{H}, \mathcal{M})p(\mathbf{H}|\mathcal{M})}{p(d|\mathcal{M})} \quad (2.20)$$

dove tutte le quantità sono condizionate dalla scelta del modello \mathcal{M} . Possiamo riscrivere il teorema di Bayes in una forma più compatta:

$$p(\mathbf{H}|d) = \frac{p(d|\mathbf{H})p(\mathbf{H})}{p(d)} \quad (2.21)$$

dove $p(\mathbf{H}|d)$ è la distribuzione di *probabilità a posteriori*, in breve *posterior*, che rappresenta il grado di conoscenza sull'ipotesi \mathbf{H} dopo aver analizzato i dati d . Questa quantità è proporzionale alla *distribuzione campionaria* $p(d|\mathbf{H})$, ovvero la probabilità dei dati assumendo che l'ipotesi sia vera, moltiplicata per la *probabilità a priori* $p(\mathbf{H})$, in breve *prior*, ossia lo stato di conoscenza sull'ipotesi prima che i dati siano analizzati.

Assumendo di aver acquisito i dati, la distribuzione campionaria in funzione dell'ipotesi si identifica con la *funzione di verosimiglianza*, in breve *likelihood*:

$$\mathcal{L}(\mathbf{H}) \equiv p(d|\mathbf{H}) . \quad (2.22)$$

Questa rappresenta la probabilità di osservare i dati d , in funzione dei parametri \mathbf{H} . $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ non è una distribuzione di probabilità in \mathbf{H} , essendo normalizzata rispetto ai dati, e viene perciò denominata funzione. Il denominatore $p(d)$, è invece una costante di normalizzazione che può essere calcolata richiedendo che il *posterior* sia normalizzato all'unità. In un contesto cosmologico, viene chiamata evidenza bayesiana e rappresenta la quantità centrale quando si vogliono confrontare modelli diversi.

Poiché in un problema di inferenza si è alla ricerca dei parametri che offrono il miglior adattamento del modello ai dati, in breve *best-fit*, ciò a cui si è interessati è la probabilità

relativa. Questo significa che le costanti di normalizzazione risulteranno irrilevanti dato che, essenzialmente, si cercheranno i valori dei parametri per cui la distribuzione è massimizzata e non il valore della probabilità al suo massimo.

Nella nostra trattazione, il *posterior* verrà dunque considerato nella forma:

$$p(\mathbf{H}|d) \propto \mathcal{L}(\mathbf{H})p(\mathbf{H}) . \quad (2.23)$$

Oltre al valore di *best-fit* dei parametri, è opportuno fornire un intervallo di valori plausibili, ovvero l'incertezza sulla misura dei parametri. Questo viene definito come *intervallo di confidenza* C (o alternativamente come contorni di confidenza) ed indica la probabilità che una misura casuale porti ad un parametro il cui valore di *best-fit* sia contenuto in questo intervallo.

In un contesto bayesiano, le regioni di confidenza vengono definite come regioni R nello spazio dei parametri tali per cui:

$$\int_R p(\mathbf{H}|d)d\mathbf{H} = C \quad (2.24)$$

Grazie al teorema del limite centrale, in molti casi è possibile approssimare la distribuzione di probabilità come una gaussiana. In questo caso, allora, richiedendo un intervallo di confidenza del 68.3%, l'integrale in (2.24) sarà uguale a $C \simeq 0.683$ e gli errori sul parametro verranno riportati al valore di 1σ . Per valori di 2σ o 3σ , si avrà un intervallo di confidenza del 95.4% o 99.7%, rispettivamente. Poichè la distribuzione non sempre approssima una gaussiana, specie nel caso in cui il potere vincolante dei dati è debole, in letteratura le incertezze vengono riferite alla percentuale dell'intervallo di confidenza.

Uno dei passaggi fondamentali quando si tratta di applicare l'inferenza bayesiana è la scelta del *prior*. Storicamente, la mancanza di una precisa prescrizione sulla selezione del *prior*, ha esposto questo approccio ad una serie di critiche. Seguendo il suggerimento di R. Trotta [162], questa dovrebbe essere invece considerata una caratteristica della statistica bayesiana piuttosto che una limitazione. In altre parole, parafrasando A.R. Liddle [166], la libertà di scegliere il *prior* è l'opportunità di esprimere l'intuizione fisica.

Il principio guida dell'approccio bayesiano è che non può esserci inferenza senza ipotesi, perciò la scelta del *prior* riflette il proprio stato di conoscenza sul problema, prima che i dati vengano raccolti. Questa informazione potrebbe provenire da esperimenti precedenti, nel qual caso il *prior* sarà il *posterior* di tali esperimenti e prenderà il nome di *prior gaussiano*. Oppure, potrebbe esprimere l'intervallo ammesso teoricamente per un dato parametro, prendendo il nome di *prior piatto* poiché considera come equiprobabile ciascun valore all'interno dell'intervallo.

È naturale dunque che due scienziati possano imporre *prior* diversi come conseguenza di prospettive teoriche differenti, o in base al risultato di osservazioni precedenti. Sebbene possa essere ottenuto da analisi precedenti, in cosmologia, è buona prassi iniziare la propria analisi assumendo un *prior* piatto, di modo che nessun valore dei parametri venga favorito senza una chiara indicazione da parte dei dati.

Anche chiamato *prior uniforme*, può essere definito come:

$$p(\mathbf{H}) : \begin{cases} \propto k & \text{per } \mathbf{H}_i \leq \mathbf{H} \leq \mathbf{H}_f \\ = 0 & \text{per } \mathbf{H} < \mathbf{H}_i \vee \mathbf{H} > \mathbf{H}_f \end{cases} \quad (2.25)$$

dove k è una costante arbitraria. Il *prior* impone una metrica sullo spazio dei parametri, quindi un *prior* piatto su un parametro non corrisponde ad un *prior* piatto su una funzione

non lineare dello stesso parametro [167].

L'oggettività della scelta del *prior* è assicurata dal fatto che, due scienziati nello stesso stato di conoscenza assegneranno lo stesso *prior* e conseguentemente, osservando gli stessi dati, i rispettivi *posterior* saranno identici. Il *posterior* convergerà verso un unico risultato obiettivo anche nel caso in cui si siano considerati *prior* diversi, a condizione che questi siano diversi da zero nelle regioni dello spazio dei parametri in cui la *likelihood* è massima. In linea di principio, questo non è controverso, ma può essere problematico nella pratica. Per campioni di piccole dimensioni, o quando la dimensione dello spazio dei parametri è elevata, i dati potrebbero non essere abbastanza forti da sovrascrivere il *prior* e, dunque, due *prior* distinti potrebbero portare a risultati diversi.

È chiaro dunque il ruolo cruciale che essi svolgono nel restringere il *posterior* ad una piccola regione dello spazio dei parametri, specie quando l'intervallo consentito dalla *likelihood* è molto più ampio [168], così come è evidente l'influenza della scelta del *prior*, sebbene essa si riduca man mano che vengono raccolti più dati.

2.2.2 Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

Grazie alla disponibilità di insiemi di dati con dimensioni e qualità crescenti, ad oggi la maggior parte dei parametri possono essere derivati con una precisione percentuale [11]. Nello scenario attuale, tuttavia, per discernere tra soluzioni diverse, non basta più determinare i parametri con precisione percentuale ed è necessaria una profonda accuratezza nel processo di inferenza.

Sviluppare metodi statistici efficienti diventa perciò di particolare interesse.

In generale, i problemi cosmologici attuali non sono trattabili analiticamente, a causa della dimensionalità di modelli e raccolte di dati, oltre alla presenza di forti degenerazioni tra i parametri. La stima del *posterior* avviene dunque tramite tecniche numeriche, anche molto impegnative da un punto di vista computazionale.

Fino agli inizi del XXI secolo, l'inferenza era basata sui cosiddetti metodi *grid-based*, per i quali si ottiene una mappatura del *posterior* tramite la costruzione di una griglia che simula lo spazio dei parametri. Ogni punto della griglia corrisponde ad un particolare valore dei parametri perciò, esplorando numericamente l'intera griglia, è possibile valutare l'adattamento del modello in ogni singolo punto. Questo metodo, nel caso di spazi dei parametri di elevate dimensioni, può diventare molto dispendioso poiché il tempo necessario all'esplorazione cresce esponenzialmente con il numero di parametri. Una volta superati i cinque o sei parametri, la mappatura a forza bruta su una griglia diventa inefficiente, poiché la risoluzione in ciascuna direzione risulta troppo approssimativa ed una frazione elevata del tempo di calcolo computazionale viene utilizzata in regioni in cui la probabilità non risulta di interesse fisico [166].

A partire dallo studio in [169], è stato invece sottolineato come questi problemi possano essere trattati con più semplicità tramite una particolare tecnica computazionale, chiamata *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). L'implementazione di queste tecniche nel codice CosmoMC [170], ha reso imprescindibile il loro utilizzo tant'è che le stime dei parametri cosmologici oggi vengono ricavate tramite metodi sviluppati a partire da esso. Invece di calcolare la densità di probabilità su una griglia regolare che copre l'intero spazio dei parametri, i metodi MCMC estraggono in sequenza diversi campioni della probabilità secondo un algoritmo probabilistico. Questa tecnica permette di mappare numericamente il *posterior*, anche nelle situazioni più complicate dove, ad esempio, la *likelihood* può essere ottenuta solo tramite simulazione numerica, lo spazio dei parametri è multi-dimensionale ed il *posterior* ha una struttura complicata [163]. Tramite MCMC il

tempo necessario per campionare una distribuzione cresce linearmente con la dimensione dello spazio [171], consentendo così di eseguire analisi di inferenza in un lasso di tempo ragionevole.

Questo approccio è ormai diventato lo strumento standard per le analisi cosmologiche odierne, sia perché risulta particolarmente utile ed efficiente nella stima dei parametri, sia perché l'aumento della potenza di calcolo ne ha facilitato l'utilizzo.

I metodi MCMC sono basati sul cosiddetto metodo *Monte Carlo* (MC), una tecnica di campionamento statistico che negli anni è stata applicata con successo ad una vasta gamma di problemi scientifici. Essenzialmente, consiste nella stima delle proprietà di una distribuzione di probabilità sconosciuta attraverso lo studio di campioni casuali estratti dalla distribuzione stessa. Sono perciò algoritmi computazionali basati sul campionamento casuale, all'interno dei quali è possibile progettare determinate regole che guidano il processo di campionamento e da cui derivano poi tutte le sottoclassi utilizzate nei vari contesti scientifici. La forza di tutti questi metodi è l'utilizzo di un numero minimo di assunzioni: la loro sola ed unica ipotesi è che la distribuzione degli errori dei dati sia nota correttamente, ovvero che si sia certi della forma assegnata alla *likelihood* [172]. Alla luce di quanto detto, è forse sorprendente pensare che Enrico Fermi, quasi quindici anni prima della formalizzazione teorica del metodo MC [173, 174, 175, 176], sviluppò autonomamente ed in maniera analitica un metodo simile, tramite il quale «amava stupire i suoi colleghi con le sue previsioni straordinariamente accurate dei risultati sperimentali» [177].

Essenzialmente, lo scopo di un algoritmo MCMC è costruire una sequenza di campioni casuali nello spazio dei parametri, chiamata catena di Markov (*Markov Chain*). Una catena di Markov è definita come una sequenza di variabili casuali tali per cui la probabilità del $(t+1)$ -esimo elemento della catena dipende solo dal t -esimo elemento [162]. In altre parole, è un processo in cui la distribuzione di probabilità di uno stato dipende solo dallo stato precedente. La proprietà cruciale di questi processi risiede nella loro convergenza verso uno stato stazionario dove, essenzialmente, la probabilità non varia con t . In questo stato, gli elementi della catena vengono considerati come campioni della distribuzione in analisi, nel nostro caso il *posterior*.

Ogni elemento della catena, generato attraverso un processo stocastico, corrisponde ad un particolare valore dei parametri, per ognuno dei quali viene valutata la *likelihood* e dunque il *posterior*. La catena di Markov può quindi essere vista come una sequenza di passi all'interno dello spazio dei parametri, tramite il quale indagare la forma del *posterior*. Si andrà dunque a campionare una distribuzione di probabilità, e la densità degli elementi della catena sarà proporzionale alla distribuzione stessa, creando così una mappa del *posterior*. Per una versione formale e dettagliata della teoria MCMC si rimanda a [178, 179, 180, 24, 181, 182, 183]. Come suggerito da A.R. Liddle [166], potrebbe essere conveniente visualizzare la superficie del *posterior* come un paesaggio montuoso con un picco dominante ed ogni passo della catena tende ad avvicinarvisi sempre più, fino ad oscillare attorno ad esso. Il compito di una catena di Markov è dunque quello di trovare il massimo della distribuzione, da cui poi estrarre i valori dei parametri.

Il picco della distribuzione, in sé, non è di grande interesse scientifico. Quello che si ricerca è l'intervallo attorno al massimo, che rappresenta la regione dove è massima la compatibilità del modello rispetto ai dati. A tal fine, si ha bisogno di un algoritmo tale per cui gli elementi della catena corrispondano a campioni casuali del *posterior*. Questo è verificato ogni qualvolta la distribuzione degli elementi della catena raggiunge, o meglio, converge verso il suo stato stazionario. L'idea di convergenza ad una distribuzione stazionaria è quindi di fondamentale importanza. In letteratura è possibile trovare una ampia gamma di discussioni a tal proposito, ed esistono una serie di test di convergenza che possono

essere applicati in varie situazioni [184]. Tutti gli algoritmi MCMC condividono la proprietà asintotica tale per cui la distribuzione degli elementi della catena è identica alla distribuzione campionata.

La distribuzione MCMC sarà indipendente dal *prior*, purché abbia raccolto un numero sufficiente di campioni, il che è in generale un compito difficile in spazi parametrici multidimensionali. Infatti, è fondamentale essere in grado di determinare se, e fino a che punto, una catena finita sia un campione equo e possa essere utilizzata per ottenere stime delle proprietà statistiche della distribuzione sottostante [171].

2.2.3 emcee: The Affine Invariant MCMC Ensemble Sampler

Nella nostra analisi si è scelto di utilizzare un algoritmo basato su una particolare classe di metodi MCMC. Tale algoritmo è completamente implementato in Python all'interno di un codice noto come `emcee`, le cui specifiche possono essere trovate in [185, 186]. Riportiamo qui una descrizione dell'algoritmo, riassunta a partire da diversi studi [168, 109, 187].

Le sue peculiarità risiedono essenzialmente in due caratteristiche. Innanzitutto, per rendere più efficiente l'esplorazione della distribuzione, viene utilizzata una particolare tecnica di campionamento, detta *ensemble sampler* [188]: in pratica l'algoritmo inizializza, in parallelo, più catene di Markov (i *camminatori*) che, partendo da posizioni diverse, esplorano lo spazio dei parametri e convergono verso il loro stato stazionario. La seconda caratteristica importante è l'invarianza sotto trasformazioni affini, tale per cui una distribuzione altamente anisotropa può essere comunque campionata: infatti, la distribuzione viene semplificata attraverso una riparametrizzazione (tramite trasformazione affine) ed il processo di campionamento di tale distribuzione è equivalente al campionamento della distribuzione originale.

Esistono diversi algoritmi invarianti affini, tra cui uno noto come *stretch move* che è alla base della nostra analisi. È da evidenziare che il costo computazionale dell'inferenza scala linearmente con il numero di camminatori e va dunque posta una certa attenzione nell'inizializzare questo algoritmo. Inoltre, come la maggior parte degli algoritmi MCMC, le distribuzioni multimodali, ossia distribuzioni con picchi ben distinti e separati, rappresentano comunque un problema se non trattate nei giusti modi [168]. Se l'algoritmo di selezione degli elementi della catena non è adeguato, la presenza di massimi locali può portare alla convergenza della MCMC lontano dal massimo globale.

2.2.4 Procedura di Analisi

Prendendo spunto da una serie di lezioni riassunte in [189], viene qui descritta la procedura utilizzata per l'inferenza dei parametri cosmologici.

1. Viene delineato un modello \mathcal{M} , contenente un insieme di ipotesi sotto forma di vettore dei parametri \mathbf{H} , che descrive qualsiasi aspetto del modello e può essere costituito sia da parametri di interesse fisico ϕ che da parametri di appoggio (*nuisance*) ψ , ovvero $\mathbf{H} = (\phi, \psi)$. Questo non è motivo di preoccupazione: la strategia generale è sempre quella di elaborare la probabilità comune per tutti i parametri, per poi marginalizzare di volta in volta rispetto a quelli che non interessano.
2. Il grado di conoscenza sull'ipotesi \mathbf{H} , prima dell'acquisizione dei dati d , viene espresso tramite il *prior* $p(\mathbf{H})$, il quale assumerà forme diverse in funzione del tipo di informazioni a disposizione. In prima analisi, utilizzeremo sempre un *prior* piatto

(2.25) su tutti i parametri, definendo la costante k in modo che il logaritmo naturale del *prior* sia nullo, ovvero:

$$\ln p(\mathbf{H}) = 0 . \quad (2.26)$$

Si semplifica così la trattazione poiché, siccome vale la (2.23), avremo:

$$\ln p(\mathbf{H}|d) \propto \ln \mathcal{L}(\mathbf{H}) + \ln p(\mathbf{H}) \quad (2.27)$$

e dunque:

$$\ln p(\mathbf{H}|d) \propto \ln \mathcal{L}(\mathbf{H}) . \quad (2.28)$$

Se si volesse invece utilizzare il risultato di un esperimento precedente allora avremo un *prior gaussiano*, ossia:

$$\ln p(\mathbf{H}) \propto -\frac{1}{2} \sum_j \frac{(\mathbf{p}_j - \mathbf{H}_{fid})^2}{\sigma_{fid}^2} \quad \text{per } \mathbf{H}_i \leq \mathbf{p}_j \leq \mathbf{H}_f \quad (2.29)$$

dove \mathbf{H}_{fid} e σ_{fid} sono il risultato dell'esperimento ed il relativo errore gaussiano.

All'esterno dell'intervallo definito, il *prior* è per definizione nullo. Se un esperimento vincola un parametro in maniera molto forte, è possibile combinare un *prior* gaussiano su di esso con un *prior* piatto sui restanti parametri. Ciò significa che, ovviamente, il valore del parametro su cui è stato posto il *prior* gaussiano non avrà alcuna valenza nel vincolare il modello. Il risultato sarà infatti fortemente condizionato dalla scelta del *prior*.

3. Il passaggio cruciale dell'inferenza è la costruzione della *likelihood* $\mathcal{L}(\mathbf{H})$, la quale riflette il modo in cui i dati vengono ottenuti. Questo significa che, poiché assumeremo di trattare sempre misure con incertezza gaussiana, la *likelihood* sarà per costruzione una distribuzione gaussiana. In questo contesto, si considera un insieme di dati d ottenuto dalla misura di un osservabile x in funzione del redshift z . Ovviamente, l'osservabile dipenderà dai parametri \mathbf{H} del modello scelto. Perciò:

$$\mathcal{L}(\mathbf{H}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_i \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right] \quad (2.30)$$

ovvero

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{H}) \propto -\frac{1}{2} \sum_i \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} = -\frac{1}{2} \sum_i \chi_i^2 \quad (2.31)$$

dove la somma corre su tutte le i -esime misure e μ rappresenta il valore teorico dell'osservabile x , calcolato a partire dal modello \mathcal{M} .

Grazie al teorema del limite centrale, se i dati sono correlati, la *likelihood* (perlomeno nell'intorno del suo picco) può essere ben approssimata come:

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{H}) \propto -\frac{1}{2} \sum_{ij} \left[(x_i - \mu_i) \text{Cov}_{ij}^{-1} (x_j - \mu_j) \right] \quad (2.32)$$

dove Cov_{ij} è la matrice di covarianza che descrive la variazione delle i -esime misure rispetto alle j -esime. Questa matrice è simmetrica e gli elementi sulla diagonale Cov_{ii} equivalgono alla varianza σ^2 della i -esima misura.

4. A questo punto, sfruttando il teorema di Bayes, è possibile ottenere il *posterior*, a meno di una costante di normalizzazione complessiva. La probabilità a posteriori dei parametri di interesse ϕ viene ottenuta marginalizzando la probabilità complessiva rispetto ai parametri di appoggio (*nuisance*) ψ :

$$p(\phi|d) = \int p(\phi, \psi|d) d\psi \propto \int \mathcal{L}(\phi, \psi)p(\phi, \psi) d\psi . \quad (2.33)$$

Supponendo di avere un set n -dimensionale di parametri, $\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, il *posterior* di ogni singolo parametro viene calcolato come:

$$p(\phi_i|d) = \int p(\phi|d) d\phi_1 \dots d\phi_{i-1} d\phi_{i+1} \dots d\phi_n . \quad (2.34)$$

Si noti che il valore dei parametri associato alla massimizzazione della *likelihood* non coincide necessariamente con il valore di aspettazione della loro distribuzione marginale, specie se la *likelihood* differisce da una distribuzione gaussiana.

Come detto, in realtà il *posterior* viene ottenuto, attraverso un algoritmo MCMC, con un campionamento stocastico della distribuzione stessa. Il MCMC è essenzialmente una «passeggiata» aleatoria nello spazio dei parametri, dove la probabilità di trovarsi in una data posizione è proporzionale al *posterior* [189]. L'idea è quindi quella di scegliere un punto di partenza casuale nello spazio dei parametri, proporre un salto casuale verso un nuovo punto ed accettare (o meno) il salto in base ad un algoritmo di selezione, fino a trovare il picco della distribuzione. Questo necessita di un po' di messa a punto: se i salti sono troppo grandi, si potrebbe avere difficoltà a trovare un punto con probabilità maggiore verso cui muoversi, mentre se i passi sono troppo piccoli, la catena potrebbe rimanere bloccata in un massimo locale della distribuzione [166]. Vediamo perciò una schematizzazione del processo computazionale su cui è basata l'analisi successiva:

- A. Una volta costruito il *posterior* $p(\mathbf{H}|d)$, è necessario inizializzare l'algoritmo di campionamento. Innanzitutto, vengono settate le proprietà delle catene: si sceglie il numero di camminatori che indagherà la distribuzione ed il numero di passi che ognuno di essi percorrerà nello spazio dei parametri. Successivamente, si sceglie il punto nello spazio dei parametri da cui partiranno le singole catene.

In realtà, i camminatori non inizieranno il loro percorso tutti dallo stesso punto, ma saranno distribuiti casualmente attorno ad esso. Può iniziare il processo di Markov.

- B. L'insieme di parametri cosmologici da cui parte la catena è identificato con \mathbf{H}_1 . Da questo vettore si calcola l'osservabile $x_1 = x(\mathbf{H}_1)$ e la *likelihood* $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(\mathbf{H}_1)$.
- C. Attraverso un processo gaussiano, i camminatori vengono mossi dalla loro posizione e compiono un passo casuale nello spazio dei parametri. La nuova posizione corrisponde ad un nuovo insieme di parametri cosmologici \mathbf{H}_2 , da cui viene calcolata la *likelihood* \mathcal{L}_2 . Dato che la distribuzione di probabilità del passo è gaussiana in ciascuna direzione, la dimensione del passo nella i -esima direzione viene identificata con la deviazione standard σ_i della sua distribuzione. La dimensione del passo è di fondamentale importanza per ottimizzare l'efficienza della catena.
- D. Ogni qualvolta i camminatori muovono verso un nuovo punto, un algoritmo di selezione determina se questo entra a far parte della catena o deve essere rigettato.

Se $\mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_1$, allora il passo viene confermato ed il nuovo insieme dei parametri \mathbf{H}_2 viene salvato come elemento della catena. Il processo a questo punto continua in maniera ricorsiva a partire dal punto B, fino a che la catena non è completa.

Viceversa, se $\mathcal{L}_2 \leq \mathcal{L}_1$, viene estratto un numero casuale n da una distribuzione uniforme tra 0 e 1. Se $n \geq \mathcal{L}_2/\mathcal{L}_1$, il passo viene scartato, ovvero si riparte dal punto B con \mathbf{H}_1 . Se invece $n \leq \mathcal{L}_2/\mathcal{L}_1$, allora il passo viene accettato, \mathbf{H}_2 entra a far parte della catena ed il processo riparte dal punto B. Questo passaggio è importante poiché, se venissero accettati solo passi che conducono a probabilità maggiori, si rischierebbe di convergere verso un massimo locale dello spazio dei parametri e, quindi, di esplorare solo una piccola regione dell'intero spazio, con gravi errore nell'inferenza finale.

Una volta che le catene sono complete, ovvero quando i camminatori hanno mosso tutti i passi convergendo verso la regione dove la distribuzione di probabilità è massima, vengono estratte le proprietà della distribuzione. Un metodo MCMC propriamente derivato e implementato, campiona il *posterior* solo una volta che la catena converge verso la distribuzione stazionaria [189]. La considerazione principale in un processo MCMC consiste dunque nel determinare la convergenza della catena. Dopo un periodo iniziale, detto *burn-in*, tutti i campioni possono essere considerati come provenienti dalla distribuzione stazionaria. Per costruzione, l'inizio della catena è costituito da punti che non per forza appartengono alla distribuzione stazionaria e non possono perciò essere identificati con la distribuzione che si vuole campionare. Infatti, quando la catena viene avviata in un punto casuale dello spazio dei parametri, la probabilità a posteriori sarà in genere piccola ed aumenterà ad ogni passo, in modo che la catena si avvicini progressivamente alla regione in cui l'adattamento ai dati è migliore. La fase iniziale dovrà perciò essere scartata in modo che la catena non abbia alcuna dipendenza dalla posizione di partenza ed il risultato finale della MCMC sia una rappresentazione tanto più oggettiva della distribuzione da cui si è attinto per costruire la catena. La lunghezza del periodo di *burn-in* può essere valutata osservando l'evoluzione della densità delle catene in funzione del numero di passi. Un'altra procedura utile una volta ottenuta la MCMC, è il cosiddetto *assottigliamento*. Anziché salvare ogni punto della catena, è possibile salvare un punto ogni n passi eseguiti.

Questo non produce risultati errati: fornisce risultati corretti, ma meno precisi rispetto all'utilizzo delle catene complete [190]. Per questo motivo, nella nostra analisi, scegliamo di salvare tutti i passi, in modo che la MCMC sia quanto più rappresentativa e dettagliata. Una volta che le catene sono state propriamente selezionate, attraverso il cosiddetto processo di *appiattimento*, le informazioni ottenute dai singoli camminatori vengono codificate all'interno di un'unica catena, dalla quale vengono estratti i vincoli sui parametri del modello. Il valore di *best-fit* dei parametri viene ricavato estraendo il 50° percentile della distribuzione di probabilità. L'intervallo di confidenza al 68.3% viene ricavato simmetricamente attorno al 50° percentile (estraendo il 15.85° ed il 84.15° percentile).

Degenerazione tra i Parametri

L'efficienza di un algoritmo MCMC può essere seriamente compromessa nel caso in cui siano presenti delle degenerazioni tra i parametri, poiché queste rallentano il tasso di convergenza delle catene. L'efficienza delle catene di Markov può essere migliorata in diversi modi. Uno dei più utilizzati è la *riparametrizzazione*, secondo cui gli effetti delle degenerazioni vengono ridotti trovando una combinazione di parametri in grado di rimuovere o ridurre le direzioni di degenerazione [191, 192]. Noi non seguiremo però questo approccio.

Il nostro obiettivo è quello di rompere le degenerazioni tra i parametri studiando le complementarità e le sinergie tra sonde cosmologiche indipendenti. Infatti, identificare le possibili combinazioni in grado di rompere le degenerazioni permette di ottenere una maggiore accuratezza nella stima dei parametri cosmologici, soprattutto nel caso in cui i modelli in esame siano caratterizzati da forti degenerazioni tra parametri. Il nostro approccio trova un punto di forza nella facilità con cui il metodo MCMC può essere generalizzato per combinare osservazioni indipendenti.

Combinare Osservazioni Indipendenti

Quando si hanno a disposizione più osservazioni indipendenti, è possibile combinare le rispettive *likelihood*, in modo da ottenere un'unico *posterior* che tenga in conto di tutte le diverse osservazioni. Sfruttando il teorema del limite centrale, avremo $\chi^2 \equiv -2 \ln \mathcal{L}$, dunque il contributo totale potrà essere stimato come:

$$\chi_{tot}^2 = \sum_i \chi_i^2 = \sum_i \left[-\frac{1}{2} \sum_j \frac{(x_j - \mu_j)^2}{\sigma_j^2} \right]_i \quad (2.35)$$

dove la somma in i corre su tutte le osservazioni indipendenti a disposizione, mentre la somma in j corre su tutte le misure di ogni singola osservazione.

L'inferenza bayesiana dei parametri considererà quindi la *likelihood* nella forma:

$$\mathcal{L} \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \chi_{tot}^2\right] . \quad (2.36)$$

Un importante vantaggio di combinare diverse osservazioni è che ogni osservabile è caratterizzato da diverse direzioni degeneri, ovvero direzioni nello spazio dei parametri scarsamente vincolate dai dati. Combinando due o più osservabili, è possibile che il potere vincolante dell'insieme di dati sia molto più forte rispetto a ciascun osservabile preso singolarmente. Tuttavia, la combinazione di insieme di dati non dovrebbe mai essere eseguita alla cieca. Il pericolo è che i dati siano tra loro incoerenti, e la loro combinazione individui come favorita una regione del *posterior* che, in realtà, non sarebbe tale se si considerasse i dati separatamente. Tali discrepanze potrebbero sorgere a causa di sistematiche non rilevate o di una insufficiente modellizzazione delle osservazioni.

2.2.5 Bayes e Bias

Lasciamo ora lo spazio ad alcune considerazioni di carattere generale estrapolate dalla letteratura. La cosmologia è forse tra le ultime discipline ad aver abbracciato i metodi bayesiani. La motivazione essenzialmente risiede nel fatto che questo approccio presenta notevoli punti di forza. Innanzitutto, tratta le incertezze indipendentemente dalla loro natura, siano esse statistiche o sistematiche. Inoltre, non distingue tra parametri fisici e di appoggio (*nuisance*). Con un approccio statistico classico, la trattazione di questi parametri risulta invece complicata. Per questo motivo, in questo ambito ci si riferisce ad essi come *parametri di disturbo*. Nella nostra trattazione, come già sottolineato in Sezione 1.3, preferiamo riferirci ad essi come *parametri di appoggio*, dato che trascurarli o fissarli al loro valore nominale può comportare una sottostima dell'incertezza sui parametri di interesse [193]. Ci sono altre due ragioni per cui solitamente si preferisce un approccio bayesiano in cosmologia. La prima riguarda il fatto che, in molte situazioni, le informazioni a priori sul modello sono fondamentali e la loro omissione può portare a vincoli altamente fuorvianti. In un approccio bayesiano, queste informazioni vengono integrate all'interno

dell'inferenza e dunque i risultati privi di un senso fisico vengono esclusi dal principio. La seconda riguarda il fatto che l'inferenza bayesiana è basata esclusivamente sui dati e sulle informazioni a disposizione, requisito essenziale della cosmologia.

A questo punto dovrebbe essere più chiaro perché l'approccio bayesiano è il più utile per uno studio cosmologico. Seguendo il ragionamento in [163], ci sono diversi motivi per i quali strumenti statistici sofisticati saranno sempre più centrali per la moderna cosmologia. Innanzitutto, la complessità di modelli e osservazioni aumenterà sempre, richiedendo così capacità di analisi corrispondentemente più raffinate ed efficienti dato che una maggiore qualità e quantità di dati può compensare carenze da un punto di vista statistico, ma non è detto che ciò accada. Inoltre, quando un effetto sconosciuto si manifesta ad un livello di incertezza pari a $3 - 4\sigma$, ci si trova davanti ad una potenziale nuova scoperta. In questa situazione, una attenta e cosciente applicazione delle tecniche statistiche può fare la differenza: una profonda capacità di analisi è fondamentale per distinguere una eventuale fluttuazione spuria dalla scoperta di un nuovo fenomeno fisico. Questo si applica perfettamente alla tensione di Hubble di cui si è parlato in Sezione 1.3.2.

Un ultimo aspetto su cui si vuole porre l'attenzione è relativo all'analisi e all'interpretazione dei risultati ottenuti. Il risultato di un processo di inferenza potrebbe comunque nascondere errori sistematici non rilevati che lo allontanano dal suo valore reale. Inoltre, sebbene il teorema di Bayes fornisca un approccio corretto, una specificazione errata del *prior* o una inappropriata costruzione della *likelihood* può facilmente portare a deduzioni errate. In maniera più o meno consapevole, l'adozione di un determinato modello può essere dovuta al cosiddetto *bias di conferma* che, essenzialmente, consiste nel cercare di verificare un modello avendolo scelto in base ai dati acquisiti. È dunque bene ricordare che lo scopo dell'approccio bayesiano è quello di aggiornare il nostro stato di conoscenza su un certo evento, man mano che i dati a disposizione aumentano. Ancora una volta, una cattiva interpretazione di questo approccio può portare a risultati inconsistenti.

Infine, poniamo l'accento sul cosiddetto *bias di pubblicazione* per il quale è molto più probabile trovare in letteratura dei risultati positivi piuttosto che negativi. Questo diviene un problema se, soggetti al bias di conferma, si cerca di adattare, in maniera più o meno impropria, il proprio risultato a quelli disponibili in letteratura.

2.3 Struttura del Codice

Affidando il campionamento MCMC ad un pacchetto di strumenti computazionali (`emcee`, [185, 186]), abbiamo costruito un codice Python in grado di trattare il problema dell'inferenza cosmologica in maniera robusta e flessibile. Questo è un primo passo verso la costruzione di una libreria di codici finalizzata ad analisi cosmologiche che siano in grado di spaziare tra modelli cosmologici diversi e diano la possibilità di combinare un grande numero di sonde cosmologiche indipendenti. Inizialmente, si è deciso perciò di considerare una particolare classe di modelli cosmologici, le *Cosmologie* CDM, all'interno delle quali selezionare 6 differenti modelli in funzione della geometria e dell'equazione di stato dell'energia oscura. Le potenzialità e la robustezza del codice vengono testate attraverso la combinazione di un primo gruppo di sonde cosmologiche, le cui specifiche sono state fornite in Sezione 2.1. La struttura del codice viene esplicitata attraverso un diagramma a blocchi, in Figura 2.7, il quale mostra il flusso di lavoro seguito durante ogni analisi inferenziale riportata successivamente. Ogni passaggio del processo di inferenza corrisponde ad un blocco, identificato tramite un codice colore, all'interno del quale vengono mostrate le diverse funzionalità implementate nel codice.

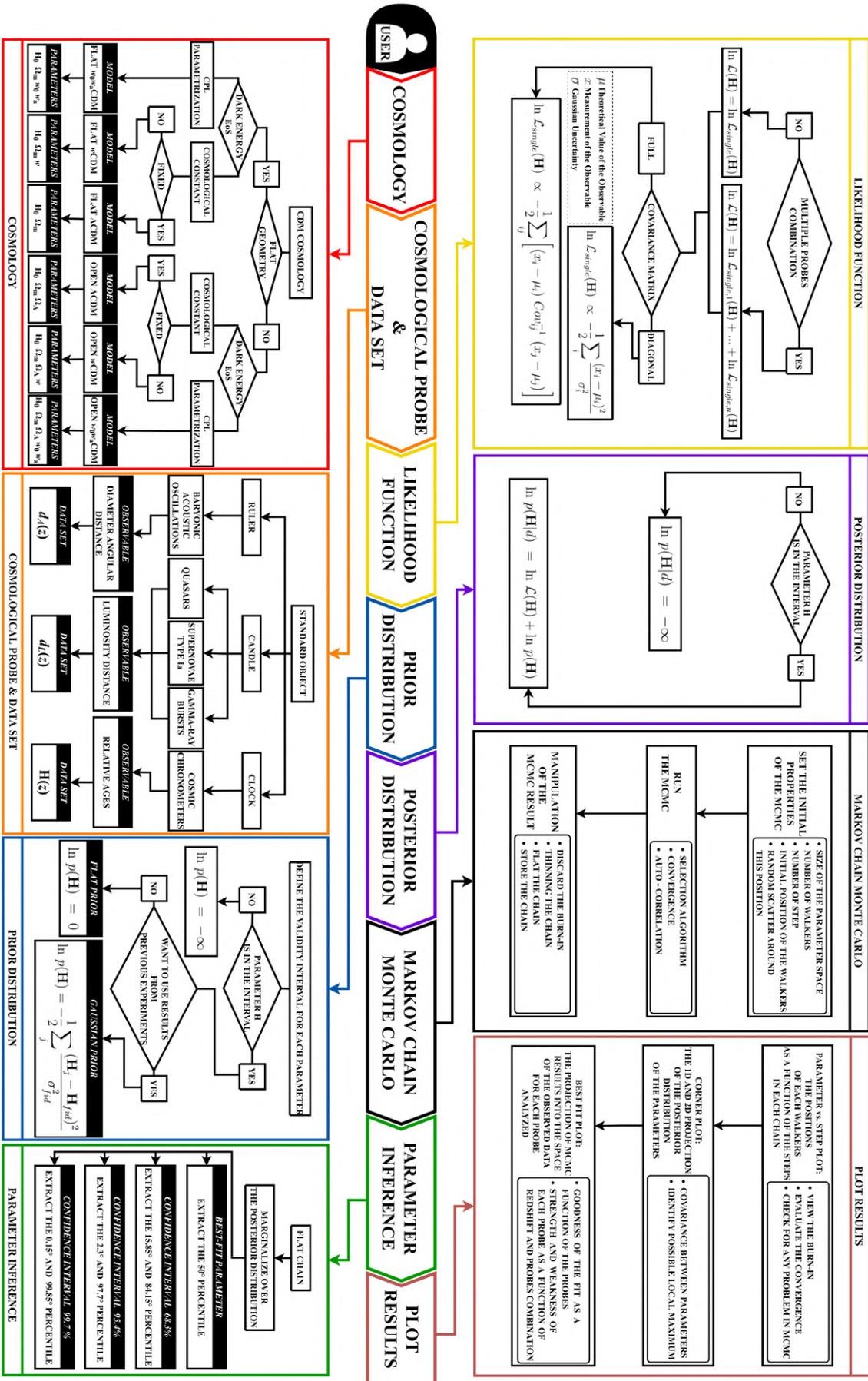


Figura 2.7: Schematizzazione in diagramma a blocchi del codice Python implementato per il processo di inferenza. Un codice colore identifica i diversi passaggi dell'algoritmo, le cui specifiche possono essere trovate in Sezione 2.3.

Di seguito, descriviamo in dettaglio il contenuto di ciascun blocco.

1) COSMOLOGY. Alla base di ogni processo di inferenza vi è la scelta del modello e dei parametri che si vogliono vincolare. Viene data la possibilità di indagare sia la geometria che il parametro di stato dell'energia oscura.

I modelli cosmologici implementati considerano infatti tre diverse parametrizzazioni dell'equazione di stato dell'energia oscura, coprendo la maggior parte dei casi esplorati in letteratura, ossia:

- Un parametro di stato costante fissato a $w = -1$, corrispondente a Λ .
- Un parametro di stato costante il cui valore w è libero di variare.
- Un parametro di stato $w = w(z)$ che segue la parametrizzazione CPL [194, 195].

Per ognuna di queste parametrizzazioni viene esaminato sia un modello cosmologico in cui il parametro di curvatura Ω_k è tenuto fisso ($\Omega_k = 0$, Universo piatto), sia un modello in cui questo parametro è libero di variare e la curvatura dell'Universo deve perciò essere vincolata tramite inferenza. I dettagli di ogni singola cosmologia implementata verranno forniti successivamente in Sezione 3.2, per ora ne riportiamo solamente un elenco riepilogativo:

A. Cosmologie Λ CDM:

- Curvatura Nulla ($\Omega_k = 0$) \Rightarrow Flat Λ CDM [H_0, Ω_m];
- Curvatura Libera ($\Omega_k \neq 0$) \Rightarrow Open Λ CDM [$H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda$].

B. Cosmologie w CDM:

- Curvatura Nulla ($\Omega_k = 0$) \Rightarrow Flat w CDM [H_0, Ω_m, w];
- Curvatura Libera ($\Omega_k \neq 0$) \Rightarrow Open w CDM [$H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda, w$].

C. Cosmologie w_0w_a CDM:

- Curvatura Nulla ($\Omega_k = 0$) \Rightarrow Flat w_0w_a CDM [H_0, Ω_m, w_0, w_a];
- Curvatura Libera ($\Omega_k \neq 0$) \Rightarrow Open w_0w_a CDM [$H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda, w_0, w_a$].

Tra parentesi tonde riportiamo l'ipotesi sulla curvatura, mentre tra parentesi quadre troviamo i parametri che descrivono il modello cosmologico, in funzione delle assunzioni sulla curvatura dell'Universo e sull'equazione di stato dell'energia oscura.

2) COSMOLOGICAL PROBE & DATA SET. Selezioniamo il tipo di sonda cosmologica e l'insieme di dati ad essa associato. Come mostrato in Sezione 2.1, verranno utilizzate 5 sonde, a partire dall'osservazione di tre tipologie di oggetti astrofisici standard:

- Oscillazioni Barioniche Acustiche (BAO);
- SuperNovae di Tipo Ia (SNeIa);
- Quasar (QSO);
- Gamma-Ray Burst (GRB).
- Cronometri Cosmici (CC).

In un primo momento, ciascuna delle sonde selezionate verrà studiata singolarmente per quantificarne le capacità di vincolo ed identificarne punti di forza e debolezze, oltre a determinare eventuali carenze nei dati osservativi.

Completato lo studio sulle singole sonde cosmologiche, sarà possibile selezionare alcune, o la totalità, di queste sonde in modo da ottenere una analisi cosmologica congiunta, che tenga in considerazione insiemi di dati differenti. Ciascun insieme di dati è composto dalla misura di un certo osservabile x in funzione del redshift z . Per ciascuna sonda cosmologica, dunque, avremo una misura $x(z)$, la sua incertezza σ ed il redshift z a cui la misura si riferisce.

3) LIKELIHOOD FUNCTION. Poste le basi per l'inferenza, si passa al vero e proprio processo di analisi. Il passaggio fondamentale è la costruzione della *likelihood* \mathcal{L} . Per un'analisi combinata di più sonde cosmologiche, il logaritmo naturale della *likelihood* totale viene ottenuto sommando il logaritmo di ciascuna *likelihood* associata alle singole sonde, secondo la (2.36). Questo è possibile poiché assumeremo che tutti le osservazioni siano tra loro indipendenti, viceversa dovremmo introdurre un termine di covarianza che tenga conto delle dipendenze reciproche tra le diverse sonde cosmologiche.

Ciascuna sonda è caratterizzata da un certo osservabile x , per il quale viene ottenuto un certo numero di osservazioni $x(z)$. Data la definizione della *likelihood* in (2.31), alla i -esima misurazione $x_i = x(z_i)$ deve essere sottratto il valore di aspettazione $\mu_i = \mu(z_i)$. Questo, essenzialmente, rappresenta il valore dell'osservabile al redshift z_i se il modello selezionato fosse quello corretto. In questo modo siamo in grado di quantificare l'adattamento del modello alle osservazioni, tenendo in considerazione gli errori σ sulle osservazioni. Nel caso in cui si abbia a disposizione una matrice di covarianza che quantifichi gli effetti sistematici sulle misure, è possibile approssimare la *likelihood* come (2.32).

4) PRIOR DISTRIBUTION. Per la costruzione del *posterior*, oltre alla *likelihood*, è necessario specificare il *prior*. Innanzitutto, viene definito un intervallo di validità per ogni parametro del modello. Questo significa che l'infinito spazio di valori possibili, viene limitato ad un particolare intervallo, all'esterno del quale il *posterior* è per definizione nullo. Tale intervallo può essere dettato da motivazioni teoriche, come nel caso di parametri di densità Ω , tipicamente definiti nell'intervallo $[0; 1]$. Oppure può essere dettato da esperienze pregresse, come nel caso della costante di Hubble, che viene tipicamente considerata nell'intervallo $[50; 100]$.

Scegliamo una trattazione logaritmica per facilitare la manipolazione delle distribuzioni, dunque all'esterno dell'intervallo di validità definiamo il *prior* come:

$$\ln p(\mathbf{H}) = -\infty .$$

All'interno dell'intervallo, invece, la forma del *prior* dipende dal tipo di informazioni utilizzate a priori nell'analisi. Nel caso in cui si volessero utilizzare i risultati di un esperimento precedente, allora avremo un *prior* gaussiano. Viceversa, volendo considerare come equiprobabili tutti i valori considerati, imponremo un *prior* piatto. Perciò:

- Prior Uniforme:

$$\ln p(\mathbf{H}) = 0 \tag{2.37}$$

- Prior Gaussiano:

$$\ln p(\mathbf{H}) \propto -\frac{1}{2} \sum \frac{(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{fid})^2}{\sigma_{fid}^2} \tag{2.38}$$

dove in entrambi i casi i parametri \mathbf{H} sono contenuti nell'intervallo di validità. Questo è un passaggio fondamentale dell'inferenza a cui va prestata particolare attenzione, soprattutto in ottica dell'analisi successiva. Nel caso in cui su un determinato parametro venga scelto di porre un *prior* gaussiano, il valore inferito di tale parametro non avrà alcuna valenza di vincolo poiché sarà fortemente condizionato dal risultato dell'esperimento precedente.

5) POSTERIOR DISTRIBUTION. Abbiamo dunque tutti gli ingredienti per costruire la distribuzione di probabilità a posteriori $p(\mathbf{H}|d)$. In generale, in forma logaritmica, questa sarà definita sommando la *likelihood* ed il *prior* (2.27). All'esterno dell'intervallo di validità dei parametri, per definizione, il *posterior* sarà nullo e dunque:

$$\ln p(\mathbf{H}|d) = -\infty .$$

Viceversa, il suo valore sarà specificato dalla forma del *prior* e della *likelihood*.

6) MARKOV CHAIN MONTE CARLO. Il *posterior* deve essere ora campionato numericamente per estrarre il valore dei parametri che forniscono il miglior adattamento del modello cosmologico rispetto ai dati selezionati.

Come detto in Sezione 2.2, utilizzeremo una particolare tecnica computazionale, le MCMC, di cui una particolare classe è stata implementata in Python all'interno di un algoritmo noto come `emcee`, disponibile liberamente in [186]. Prima di campionare la distribuzione, è necessario impostare le proprietà della catena. Andremo dunque a specificare:

1. Le dimensioni dello spazio dei parametri;
2. Il numero di camminatori con cui si intende esplorare lo spazio dei parametri;
3. Il numero di passi che ogni camminatore compirà nell'esplorazione;
4. La posizione iniziale dei camminatori. Per garantire una esplorazione quanto più completa ed accurata, i camminatori vengono distribuiti casualmente attorno alla posizione iniziale.

A questo punto inizia l'esplorazione dello spazio dei parametri. Ogni passo dei singoli camminatori è guidato da un algoritmo di selezione, di cui una descrizione generale è stata fornita in Sezione 2.2 e le cui specifiche possono essere trovate in [187, 185]. Una volta conclusa l'esplorazione, il risultato della MCMC deve essere manipolato prima di estrarre da esso i risultati dell'inferenza.

Innanzitutto, va scartato il periodo esplorativo iniziale, il *burn-in*, poiché esso non è rappresentativo della distribuzione campionata ed una sua inclusione può portare a bias nelle inferenze cosmologiche. Un esempio di tale procedura è fornito in Figura 2.8.

È possibile assottigliare le singole catene, decidendo di salvare un passo ogni n , in modo che la catena risulti più leggera in termini di spazio su disco. Nella nostra analisi, decidiamo di non eseguire questo passaggio, salvando dunque tutti i punti della catena, poiché sebbene esso non porti ad un risultato errato, fornisce comunque un risultato meno accurato rispetto alla considerazione della catena completa. È possibile far questo poiché le nostre catene non sono particolarmente estese e non occupano dunque una porzione di memoria computazionale elevata. Nel caso in cui si avesse a che fare con problemi di memoria, questa tecnica risulta invece di grande aiuto.

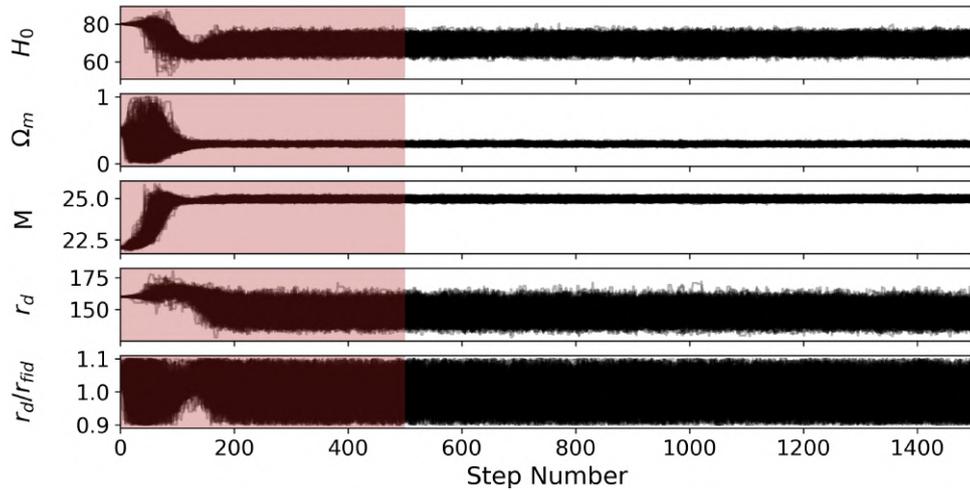


Figura 2.8: Esempio di esclusione del *burn-in* in una catena MCMC. Viene riportato l'andamento dei camminatori all'interno dello spazio dei parametri nel caso di una cosmologia Flat Λ CDM, considerando la combinazione di sonde cosmologiche BAO+CC+SN+GRB+QSO. Oltre ai parametri cosmologici H_0 (in unità di km/s/Mpc) e Ω_m , riportiamo anche i parametri di appoggio utilizzati per calibrare le candele standard (M) ed i righelli standard (r_d e $r_d/r_{d,fid}$). Ogni curva nera rappresenta il percorso di ciascun camminatore all'interno dello spazio dei parametri, mentre la regione in rosso mostra la parte della catena che viene eliminata (*burn-in*) prima di estrarre i vincoli cosmologici.

A questo punto, l'insieme dei risultati dei singoli camminatori viene codificato all'interno di una singola catena, attraverso il cosiddetto appiattimento. Questo è il risultato finale della MCMC, che viene salvato in modo da poter estrarre da esso le informazioni utili all'inferenza, senza dover di volta in volta ripetere l'esplorazione dello spazio dei parametri, che in alcuni casi può richiedere anche diverse ore. A partire da questa catena andremo a svolgere tutta l'analisi successiva.

7) PARAMETER INFERENCE. Per l'inferenza dei singoli parametri, il *posterior* deve essere di volta in volta marginalizzato rispetto ai parametri a cui si è interessati, secondo la (2.34). Il campionamento MCMC rende questa procedura particolarmente semplice: è sufficiente proiettare la distribuzione campionata rispetto alla dimensione dello spazio dei parametri corrispondente al parametro che si sta analizzando. Sostanzialmente, per ogni parametro avremo una distribuzione di probabilità unidimensionale da cui, estraendo il 50° percentile, è possibile trovare il valore di *best-fit*.

In maniera simmetrica rispetto a questo valore, vengono poi valutati i contorni di confidenza estraendo il 15.85° ed il 84.15° percentile, per l'intervallo di confidenza al 68.3%, oppure il 2.3° ed il 97.7° percentile per il 95.4%. Durante la nostra analisi, forniremo i risultati ottenuti al 68.3% di confidenza (corrispondente a 1σ nel caso in cui la distribuzione sia gaussiana), anche se il codice permette di estrarre anche i vincoli ad un livello di confidenza del 95.4% (2σ) e del 99.7% (3σ).

8) PLOT RESULTS. La bontà dei risultati ottenuti ed eventuali caratteristiche dell'inferenza, possono essere valutate in maniera diretta attraverso alcuni grafici particolarmente utili quando si ha che fare con tali questioni.

Innanzitutto, è interessante graficare l'evoluzione della posizione di ciascun camminatore all'interno dello spazio dei parametri (come mostrato in Figura 2.8). Per farlo, valutiamo il valore di ciascun parametro associato alla posizione corrente del camminatore, in funzio-

ne dei passi che il camminatore compie. Tramite questo grafico si è in grado di verificare facilmente la validità del *burn-in*, ovvero se il numero di passi che si è scelto di eliminare è sufficiente ad escludere l’assestamento delle catene rispetto alla distribuzione finale. In questa rappresentazione, il *burn-in* è la regione in rosso al cui interno la dispersione tra i camminatori (specie all’inizio) è particolarmente ampia e variabile e dopo la quale tutti convergono verso una zona (più o meno) ristretta dello spazio dei parametri, ovvero verso un particolare valore dei parametri.

Poiché questo lavoro rappresenta un primo punto di partenza, inizialmente valuteremo proprio tramite questa rappresentazione la convergenza delle catene in modo da identificare visivamente un eventuale malfunzionamento dell’esplorazione MCMC, per il quale il campionamento dovrà essere ripetuto.

Valutata la bontà dell’evoluzione e della manipolazione delle catene, può iniziare l’analisi dei risultati ottenuti. Una rappresentazione molto utile in questo caso è il cosiddetto *Corner Plot* in cui, considerando ciascuna coppia di parametri (ovvero proiettando i risultati della catena sui piani definiti da ciascuna coppia di parametri), è possibile visualizzare e valutare eventuali degenerazioni tra i parametri o la presenza di massimi locali all’interno del *posterior*, osservando i contorni di confidenza bidimensionali.

Con questa visualizzazione possiamo ottenere una prima valutazione della forza delle sonde nel vincolare i singoli parametri, oltre ad identificare le direzioni di degenerazione in funzione della coppia di parametri e della sonda cosmologica (o combinazione di sonde) utilizzata. In aggiunta alla proiezione bidimensionale, è possibile mostrare la proiezione unidimensionale della distribuzione, tramite la quale valutare la forma della distribuzione per ciascun parametro, più tutta una serie di caratteristiche indicative come l’altezza del picco principale, l’ampiezza della distribuzione ed eventuali massimi locali.

Infine, i risultati dell’inferenza possono essere visualizzati attraverso la loro proiezione nello spazio dei dati. In questo modo siamo in grado di valutare graficamente l’adattamento del modello ai dati, studiando l’andamento di ciascun osservabile ottenuto tramite i vincoli dell’inferenza. Quando un risultato MCMC è consistente con i dati utilizzati, la maggior parte dei dati cade all’interno dell’intervallo di confidenza, viceversa una grande dispersione dei dati attorno al valore di miglior adattamento è indicativo di un risultato poco consistente. La variazione dell’estensione dell’intervallo di confidenza attorno al *best-fit*, fornisce una seconda valutazione della capacità di vincolare il modello, mostrando come questa vari in funzione del redshift e del numero/tipo di sonde combinate.

Per completezza, di seguito riportiamo una tabella riassuntiva contenente tutte le librerie ed i moduli (con le relative referenze) utilizzate nella costruzione del codice descritto.

Funzionalità	Libreria	Referenza
Operazioni di Sistema	OS	[196]
Operazioni Matematiche	NumPy, SciPy, Pandas	[197, 198, 199]
Cosmologia	AstroPy.Cosmology	[200]
Campionamento MCMC	emcee	[186]
Grafici	Matplotlib, ChainConsumer	[201, 202]

Tabella 2.1: Elenco delle librerie utilizzate nella costruzione del codice.

Capitolo 3

Studio delle Sonde Cosmologiche: Curvatura ed Energia Oscura

Delle assunzioni più forti fatte nel modello Standard Flat Λ CDM, in questo studio ci occuperemo di quelle riguardanti la geometria dell'Universo e la forma dell'equazione di stato dell'energia oscura. Imponendo $k = 0$, i parametri di densità vengono vincolati in maniera tale che, assumendo $\Omega_{tot} = \Omega_m + \Omega_\Lambda$, solo uno di questi sia indipendente. Allo stesso tempo, con l'assunzione che l'energia del vuoto sia la causa dell'espansione cosmica accelerata, il parametro di stato della componente di energia oscura viene fissato al valore $w = -1$ e non deve dunque essere vincolato osservativamente.

Affinché il modello standard della cosmologia rimanga tale, è necessario testare le sue assunzioni fondamentali rilassandole gradualmente e verificandone la consistenza con i dati osservativi. Per raggiungere questo obiettivo, nel seguente capitolo, sfrutteremo le sonde cosmologiche selezionate, il cui dettaglio può essere trovato nel Capitolo 2. Tramite l'approccio statistico discusso in Sezione 2.2, saremo in grado di quantificare (in funzione del modello cosmologico esaminato) le capacità vincolanti di ogni singola sonda e di individuare eventuali problematiche nei dati. Così facendo, è possibile valutare la presenza di degenerazione tra i parametri al variare del modello e della sonda cosmologica utilizzata per l'inferenza. Inoltre, il confronto dei risultati ottenuti per le singole sonde cosmologiche apre la strada alla successiva analisi svolta nel Capitolo 4, il cui scopo sarà quello di individuare eventuali complementarità e sinergie tra le sonde che permettano di ottenere risultati accurati nella stima dei parametri cosmologici, rompendo alcune delle degenerazioni presenti. In questa fase del nostro studio andremo dunque a vincolare, per ciascuna sonda e modello, i parametri cosmologici che descrivono l'attuale tasso di espansione dell'Universo, il suo contenuto energetico e la forma dell'energia oscura, in funzione di assunzioni iniziali sempre meno stringenti. Tralasciamo per il momento le altre assunzioni alla base del modello cosmologico standard, come il periodo di Inflazione o la presenza di una componente di materia oscura fredda.

Tutti i modelli in esame appartengono perciò alla famiglia delle *Cosmologie* CDM. Utilizzeremo il prefisso «o» (*open*) ogni qualvolta la curvatura dell'Universo sarà un parametro libero, viceversa il prefisso «f» (*flat*) verrà utilizzato nel caso in cui si assuma una cosmologia con curvatura nulla [203]. Allo stesso modo, indagando le proprietà dell'energia oscura, i parametri fondamentali che ne descrivono l'equazione di stato verranno utilizzati all'interno della notazione. Ciò significa che, ad esempio, un modello cosmologico con curvatura non nulla e parametro di stato w libero ma costante, verrà indicato come *ow*CDM. Nel momento in cui si assumerà un parametro di stato con una forma funzionale

più complessa, le grandezze che lo descrivono entreranno nella notazione come nei casi precedenti. Per coerenza, ci si riferirà al modello Standard Flat Λ CDM come $f\Lambda$ CDM.

La nostra analisi verrà organizzata come segue. In Sezione 3.2, individuiamo tre diverse parametrizzazioni dell'equazione di stato dell'energia oscura, per ognuna delle quali, dopo avere studiato il caso a curvatura nulla, rilasseremo l'assunzione di piattezza aggiungendo dunque la densità di energia oscura Ω_Λ all'insieme dei parametri cosmologici che devono essere vincolati osservativamente. Compatibilmente con quanto suggerito dalle osservazioni [5], durante tutta la trattazione assumeremo che $\Omega_r \sim 0$, omettendo cioè il contributo della radiazione nelle relazioni fondamentali. Partendo dal modello standard della cosmologia ed aumentando gradualmente la dimensione dello spazio dei parametri cosmologici, deriveremo le equazioni fondamentali utilizzate poi nell'analisi successiva. In Sezione 3.3, prima di procedere con l'analisi inferenziale dei modelli cosmologici, per ogni sonda cosmologica, viene studiata la dipendenza dell'osservabile dai parametri cosmologici tramite una analisi del suo andamento in funzione del redshift e del valore dei parametri. Daremo dunque una prima quantificazione qualitativa della capacità vincolante dei dati osservativi in funzione del redshift, del parametro e della sonda cosmologica. Per confronto, prenderemo come riferimento il valore dei parametri cosmologici ottenuto (assumendo una cosmologia standard $f\Lambda$ CDM) dalla collaborazione Planck attraverso osservazioni della CMB [5], i quali vengono riportati in Tabella 3.1.

H_0	Ω_m	Ω_Λ	w_0	w_a	r_d
[km/s/Mpc]	-	-	-	-	[Mpc]
67.37	0.308	0.692	-1.0	0.0	147.2

Tabella 3.1: Valori dei parametri cosmologici ottenuti dalla Planck Collaboration [5] tramite osservazioni CMB, assumendo una cosmologia standard.

Dopo questo studio preliminare passeremo poi all'analisi dei risultati ottenuti tramite il processo inferenziale delineato in Sezione 2.3. I risultati vengono riassunti all'interno delle apposite tabelle, dove i valori di miglior adattamento vengono riportati ad un livello di confidenza del 68%. Per verificare la bontà delle stime ottenute, i risultati vengono proiettati nello spazio dei dati. Questo significa che, per ogni sonda cosmologica, calcoleremo l'andamento dell'osservabile a partire dalle stime dei parametri ottenute tramite l'inferenza (con le rispettive incertezze al 68%), e confronteremo tale andamento (il *best-fit*) con la distribuzione di dati osservativi quantificandone la bontà di adattamento tramite la misura del χ_{min}^2 e del χ_{rid}^2 .

Un'ulteriore verifica dei risultati viene ottenuta individuando, all'interno di ciascun modello cosmologico, un particolare piano definito dalla coppia di parametri di maggiore interesse, per il quale vengono mostrati i contorni di confidenza bidimensionali ottenuti dall'inferenza. Questa scelta ha due motivazioni principali. La prima è una motivazione di carattere pratico: riportare i contorni di confidenza bidimensionali per ciascun piano all'interno dello spazio dei parametri, renderebbe la trattazione parecchio macchinosa, soprattutto nel caso di modelli con dimensionalità particolarmente elevate. La seconda motivazione riguarda i modelli cosmologici trattati nella nostra analisi. Questi appartengono alla stessa famiglia di modelli, perciò ciascun modello avrà dei parametri cosmologici in comune con i restanti. La coppia di parametri di maggiore interesse viene dunque individuata in funzione del modello cosmologico in analisi e del tipo di studio che si desidera

perseguire. Infatti, le nostre scelte saranno condotte sulla base dello studio della curvatura dell'Universo e dell'equazione di stato dell'energia oscura. Per il modello standard Λ CDM la scelta è obbligata alla coppia $H_0 - \Omega_m$. Rilassando l'assunzione di piattezza, diventa interessante visualizzare il piano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ per il quale è possibile determinare la consistenza dell'assunzione di curvatura nulla e la presenza della cosiddetta *degenerazione geometrica*. Cercando di vincolare il parametro di stato w , scegliamo di visualizzare il piano $\Omega_m - w$ e $\Omega_\Lambda - w$ per cosmologie fw CDM e ow CDM, rispettivamente, in modo da individuare eventuali degenerazioni tra il parametro di stato dell'energia oscura ed i contributi energetici del fluido cosmologico. Estendendo ulteriormente l'equazione di stato dell'energia oscura, è interessante confrontare come variano i contorni di confidenza nel piano $w_0 - w_a$, quando il vincolo sulla geometria viene meno.

Nel caso in cui si volesse approfondire lo studio portato avanti su determinati vincoli cosmologici per le varie cosmologie e sonde cosmologiche, la raccolta completa di tutti i risultati, con i rispettivi grafici, verrà messa a disposizione previa richiesta privata¹.

3.1 Proprietà del Campionamento MCMC

Prima di passare all'analisi vera e propria dei risultati, delineiamo qui le proprietà del processo di campionamento attraverso il quale vengono estratti i vincoli sui parametri. L'obiettivo finale dell'algoritmo sviluppato per l'analisi cosmologica è quello di standardizzare la procedura di inferenza, in modo che sia possibile confrontare risultati ottenuti da sonde cosmologiche diverse con un robusto processo di analisi, le cui proprietà fondamentali siano comuni a tutte le sonde. Allo stesso tempo, se le conoscenze su una particolare sonda lo consentono, la flessibilità del codice permette di personalizzare le proprietà del campionamento MCMC in modo che esse si adattino alle caratteristiche di ogni sonda.

Nello specifico, si è scelto di campionare lo spazio dei parametri con 250 camminatori, ognuno dei quali compie 1500 passi. Per quel che riguarda il *burn-in*, la nostra scelta è stata la più conservativa possibile. Si è infatti scelto di eliminare un terzo della catena in modo che eventuali fluttuazioni iniziali venissero completamente eliminate e la distribuzione campionata non tenesse alcuna traccia delle fasi iniziali del campionamento, avendo ovviamente verificato che in tutti casi questa scelta fosse sufficiente per eliminare adeguatamente il *burn-in*. Poiché per ogni sonda ed ogni modello vengono utilizzate catene con medesima lunghezza ed il valore del *burn-in* è tenuto costante, la successiva estrazione dei risultati avviene a partire da catene con medesime proprietà. Da un punto di vista teorico, non c'è alcun motivo per cui l'analisi debba essere compiuta a partire da catene con medesima lunghezza. Anzi, come discusso in Sezione 2.2, l'unico requisito fondamentale di ogni catena è il raggiungimento della convergenza, perciò le catene dovrebbero essere selezionate in base a specifici criteri di convergenza. In linea di principio, questo comporterebbe catene più lunghe all'aumentare della dimensionalità del modello ma, per quelli che sono gli scopi del nostro lavoro, è possibile verificare che la scelta fatta è sufficiente per garantire il corretto campionamento delle distribuzioni di probabilità. Come vedremo di seguito, per le cosmologie più complesse, un campionamento che richiede ulteriore tempo per convergere verso il proprio stato stazionario viene caratterizzato dai contorni di confidenza bidimensionali maggiormente «frastagliati».

Le proprietà del campionamento MCMC sono elencate in Tabella 3.2 mentre in Tabella 3.3 vengono riportati gli intervalli nello spazio dei parametri all'interno dei quali sono stati definiti prior delle distribuzioni. Tutti i risultati che verranno discussi in seguito

¹E-mail: fabrizio.cogato@studio.unibo.it; michele.moresco@unibo.it

saranno sempre riferiti al campionamento di *posterior* costruiti a partire da *prior* piatti. Le *likelihood* saranno invece ottenute dalle relazioni fondamentali che andremo a derivare nella sezione successiva, e verranno utilizzate in funzione del tipo di sonda cosmologica selezionata.

Cosmologia	N_{dim}	N_c	N_p	Burn-In	Valori Iniziali [$H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda, w_0, w_a$]
Λ CDM	2	250	1500	500	[80, 0.5, ..., ..]
o Λ CDM	3	250	1500	500	[80, 0.5, 0.5, ..., ..]
fwCDM	3	250	1500	500	[80, 0.5, ..., 0.0, ..]
owCDM	4	250	1500	500	[80, 0.5, 0.3, -2.0, ..]
fw $_0$ w $_a$ CDM	4	250	1500	500	[80, 0.5, ..., -2.0, 1.0]
ow $_0$ w $_a$ CDM	5	250	1500	500	[80, 0.5, 0.3, -2.0, 1.0]

Tabella 3.2: Proprietà del campionamento MCMC comuni a tutte le sonde cosmologiche utilizzate. Vengono impostate le dimensioni dello spazio dei parametri (N_{dim}); il numero di camminatori che si intende utilizzare per esplorare lo spazio dei parametri (N_c); il numero di passi che ogni camminatore compirà nell'esplorazione (N_p) e la posizione iniziale dei camminatori. Per i righelli standard si considerano due parametri ulteriori: r_d (= 160 Mpc) e $\frac{r_{d, fid}}{r_d}$ (= 1.05). Per le candele standard si aggiunge il parametro di appoggio M (= 22), ovvero la normalizzazione del Diagramma di Hubble. H_0 è in unità di km/s/Mpc.

Parametro	Λ CDM	o Λ CDM	fwCDM	owCDM	fw $_0$ w $_a$ CDM	ow $_0$ w $_a$ CDM
H_0	[50,100]	[50,100]	[50,100]	[50,100]	[50,100]	[50,100]
Ω_m	[0,1]	[0,1]	[0,1]	[0,1]	[0,1]	[0,1]
Ω_Λ	...	[0,1]	...	[0,1]	...	[0,1]
w_0	[-3,1]	[-3,0]	[-3,1]	[-3,0]
w_a	[-5,5]	[-5,5]
r_d	[100,200]	[100,200]	[100,200]	[100,200]	[100,200]	[100,200]
$\frac{r_{d, fid}}{r_d}$	[0.9,1.1]	[0.9,1.1]	[0.9,1.1]	[0.9,1.1]	[0.9,1.1]	[0.9,1.1]
M	[20,30]	[20,30]	[20,30]	[20,30]	[20,30]	[20,30]

Tabella 3.3: Intervalli all'interno dei quali vengono definiti i prior piatti per ciascun modello cosmologico. H_0 è in unità di km/s/Mpc, r_d in unità di Mpc.

3.2 Modelli Cosmologici in Esame

Descriviamo dunque in dettaglio i vari modelli cosmologici considerati, derivandone le equazioni fondamentali. Tutti i parametri di densità Ω vengono riferiti a $z = 0$.

Λ CDM

Questa è la classe di modelli da cui parte la nostra analisi. Innanzitutto, vincoleremo i parametri cosmologici del modello standard in modo da verificare la consistenza del nostro approccio rispetto ai risultati ottenuti indipendentemente in altri studi. Rilasseremo poi l'ipotesi di piattezza per ottenere una stima del parametro di densità dell'energia oscura Ω_Λ e verificare la validità dell'ipotesi di curvatura nulla.

f Λ CDM: I parametri liberi considerati sono $[H_0, \Omega_m]$ e le equazioni fondamentali possono essere espresse nella forma:

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1 - \Omega_m) + \Omega_m(1 + z)^3} \quad (3.1)$$

$$D_L(z) = \frac{(1 + z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(1 - \Omega_m) + \Omega_m(1 + z')^3}} \quad (3.2)$$

$$D_A(z) = \frac{1}{(1 + z)H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(1 - \Omega_m) + \Omega_m(1 + z')^3}} \quad (3.3)$$

o Λ CDM: I parametri liberi considerati sono $[H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda]$ e le equazioni fondamentali possono essere espresse nella forma:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1 + z)^3 + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1 + z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (3.4)$$

$$D_L(z) = \frac{(1 + z)}{H_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda}} S_k \left(\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda} \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz' \right) \quad (3.5)$$

$$D_A(z) = \frac{1}{(1 + z)H_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda}} S_k \left(\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda} \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz' \right) \quad (3.6)$$

w CDM

Per questa classe di modelli è mantenuta l'ipotesi di curvatura nulla ma si assume che il parametro di stato w sia una costante libera di variare. Questo modello è indicato come fw CDM. Testiamo così la validità della scelta di considerare l'energia oscura come una costante cosmologica Λ con un parametro $w = -1$. Estendiamo questo modello permettendo alla curvatura di differire dal valore nullo. Così facendo, è possibile studiare la correlazione esistente tra la geometria dell'Universo e la forma dell'equazione di stato che descrive l'energia oscura.

fwCDM: I parametri liberi considerati sono $[H_0, \Omega_m, w]$ e le equazioni fondamentali possono essere espresse nella forma:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1 + z)^3 + (1 - \Omega_m)(1 + z)^{3(1+w)}} \quad (3.7)$$

$$D_L(z) = \frac{(1 + z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1 + z')^3 + (1 - \Omega_m)(1 + z')^{3(1+w)}}} \quad (3.8)$$

$$D_A(z) = \frac{1}{(1 + z)H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1 + z')^3 + (1 - \Omega_m)(1 + z')^{3(1+w)}}} \quad (3.9)$$

o w CDM: I parametri liberi considerati sono $[H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda, w]$ e le equazioni fondamentali possono essere espresse nella forma:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda(1+z)^{3(1+w)}} \quad (3.10)$$

$$D_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda}} S_k \left(\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda} \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz' \right) \quad (3.11)$$

$$D_A(z) = \frac{1}{(1+z)H_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda}} S_k \left(\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda} \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz' \right) \quad (3.12)$$

w_0w_a CDM

Una volta abbandonata l'ipotesi di una costante cosmologica Λ , non vi sono forti ragioni teoriche per limitare lo studio dell'energia oscura alla sola ipotesi di un parametro w costante. Come ulteriore estensione, andiamo dunque a considerare una classe di modelli in cui il parametro di stato w ha la possibilità di variare in funzione del tempo cosmico o, equivalentemente, del redshift, ossia $w(z)$.

In quest'ottica, sono state proposte diverse parametrizzazioni per l'equazione di stato dell'energia oscura. Un modello ampiamente utilizzato è quello sviluppato da M. Chevalier, D. Polarski e E.V. Linder agli inizi degli anni 2000 [194] [195], il quale rappresenta una delle principali modalità studiate per tentare di andare oltre la costante cosmologica Λ . È un modello a due parametri che prevede la variazione con il redshift z del parametro di stato w , secondo la forma:

$$w(z) = w_0 + w_a \left(\frac{z}{1+z} \right). \quad (3.13)$$

Secondo questa parametrizzazione, l'espressione generale che regola il contributo energetico apportato dalla componente di energia oscura assume la forma:

$$\frac{\rho_\Lambda(z)}{\rho_{0,crit}} = \Omega_\Lambda(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} \exp \left[-3 w_a \left(\frac{z}{1+z} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Anche per questa classe di modelli andremo prima a studiare la cosmologia *flat* per passare poi all'analisi del caso *open*.

f w_0w_a CDM: I parametri liberi considerati sono $[H_0, \Omega_m, w_0, w_a]$ e le equazioni fondamentali possono essere espresse nella forma:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a \frac{z}{1+z}}} \quad (3.15)$$

$$D_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + (1 - \Omega_m)(1+z')^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a \frac{z'}{1+z'}}}} \quad (3.16)$$

$$D_A(z) = \frac{1}{(1+z)H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + (1 - \Omega_m)(1+z')^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a \frac{z'}{1+z'}}}} \quad (3.17)$$

$\mathbf{o}w_0w_a\mathbf{CDM}$: I parametri liberi considerati sono $[H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda, w_0, w_a]$ e le equazioni fondamentali possono essere espresse nella forma:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a \frac{z}{1+z}}} \quad (3.18)$$

$$D_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda}} S_k \left(\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda} \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz' \right) \quad (3.19)$$

$$D_A(z) = \frac{1}{(1+z)H_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda}} S_k \left(\sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda} \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz' \right) \quad (3.20)$$

Questi sono dunque i parametri e le relazioni fondamentali considerate all'interno di questa analisi. Come già introdotto in Sezione 2.1, quando utilizzeremo i dati ottenuti dall'osservazione di sonde cosmologiche come le BAO o una delle candele standard, si farà riferimento a quantità osservabili dipendenti da queste relazioni, come ad esempio la distanza di volume $D_V(z)$ o il modulo di distanza $\mu(z)$, rispettivamente.

3.3 Analisi Cosmologica

3.3.1 Cronometri Cosmici

Iniziamo la nostra analisi dai cronometri cosmici. L'osservabile caratteristico di questa sonda è il parametro di Hubble $H(z)$, il quale consente di mappare direttamente il tasso di espansione dell'Universo al variare del redshift. In Figura 3.1, vengono studiate le variazioni nell'andamento di $H(z)$ al variare dei seguenti parametri: $H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda, w_0, w_a$.

Partiamo dal pannello in alto a sinistra, raffigurante la variazione della costante di Hubble adimensionale h la quale, come suggerito dalla (3.18), agisce da normalizzazione della relazione $H(z)$. Assumendo di conoscere sia i contributi energetici del fluido cosmologico che l'equazione di stato dell'energia oscura, sembra evidente come valori di h nell'intervallo 0.65 – 0.75 appaiano compatibili con la distribuzione dei dati, mentre valori inferiori o superiori sembrerebbero venire esclusi. L'andamento a basso redshift, è sostanzialmente governato dal valore della costante di Hubble che agisce a tutti gli effetti come perno nella relazione (3.18). Infatti, nei pannelli dove il valore di H_0 è mantenuto costante, tutte le curve per $z \rightarrow 0$ convergono verso lo stesso punto ($H_0 = 67.37$ km/s/Mpc) dato che a $z = 0$ la dispersione degli andamenti è nulla per definizione. D'altro canto, è possibile notare come una variazione degli altri parametri cosmologici abbia un effetto maggiore a redshift più elevati. Risultano perciò fondamentali le misure a $z > 0.5$ le quali permettono di vincolare precisamente quantità come la densità di energia oscura o la piatezza dell'Universo. Per quanto concerne l'equazione di stato dell'energia oscura, data la forma assunta per $w(z)$ (3.13), una variazione ad alto redshift dei parametri w_0 e w_a ha effetti simili sull'andamento di $H(z)$ anche se decisamente inferiori rispetto alle variazioni degli altri parametri, specie se si considerano valori $w_0, w_a < -1$. Di contro, per $0 < z < 1$ una variazione di w_0 porta ad una dispersione degli andamenti maggiore rispetto ad una variazione di w_a .

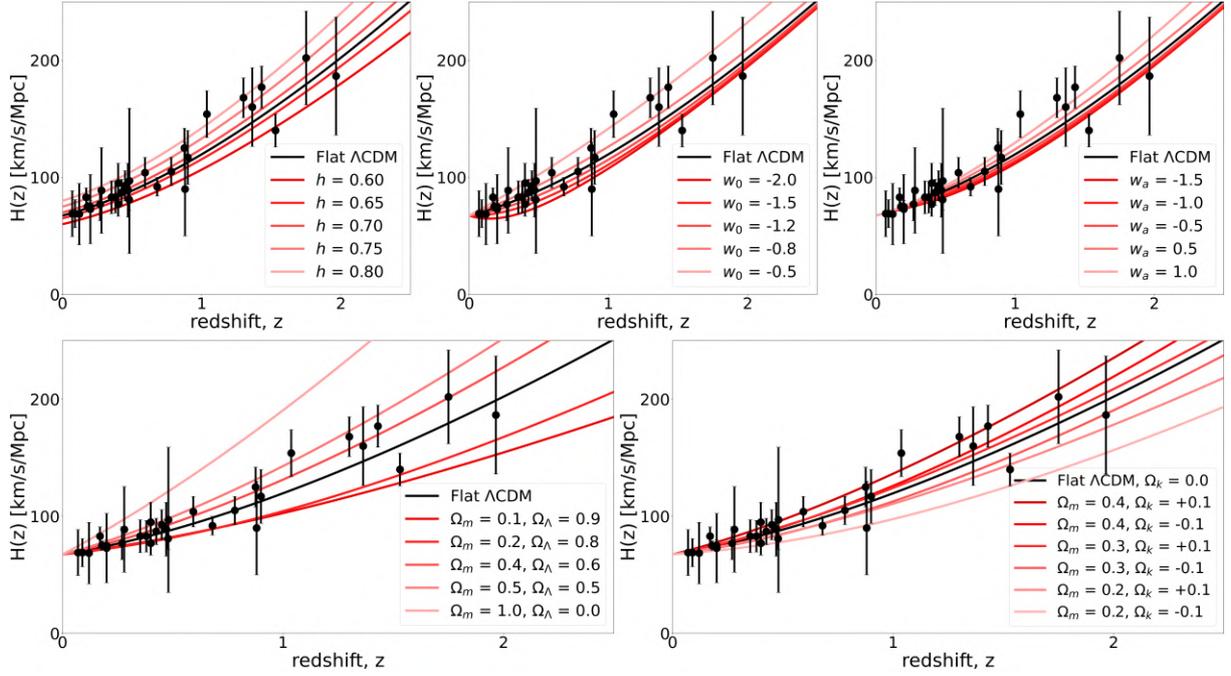


Figura 3.1: Andamento del parametro di Hubble $H(z)$ al variare dei parametri cosmologici. L'intervallo di variazione è riportato in legenda. La curva nera raffigura il modello Flat Λ CDM (Tabella 3.1). I punti in nero riportano la distribuzione delle osservazioni CC [87].

In entrambi i casi, comunque, la distribuzione dei dati non sembra fornire uno strumento in grado di discernere in maniera chiara tra i diversi valori.

Osservando i due pannelli inferiori, è possibile notare come i CC, tendano a sfavorire sia un Universo piatto composto di sola materia (noto come Universo Einstein–de Sitter), sia un Universo chiuso ($\Omega_k < 0$) con una densità di materia $\Omega_m \leq 0.2$. In particolare, nel pannello in basso a destra, vengono evidenziati gli effetti della degenerazione geometrica. Considerando ad esempio $\Omega_k = -0.1$ (soluzione tipicamente sfavorita date le attuali stime di età e curvatura dell'Universo [5]), notiamo come 3 combinazioni diverse di Ω_m e Ω_Λ determinano andamenti di $H(z)$ ben distinti ognuno dei quali non appare però particolarmente sfavorito dagli attuali dati osservativi.

La sonda CC appare dunque particolarmente sensibile al parametro H_0 , osserviamo infatti come una sua variazione produca una sensibile variazione della variabile $H(z)$. Fissato il valore di Ω_k , i CC mostrano inoltre una discreta sensibilità rispetto ai parametri di densità Ω_m e Ω_Λ , anche se la forma funzionale di $H(z)$ permette di discernere tra andamenti diversi solamente per $z > 0.5$ dove l'attuale distribuzione dei dati risulta scarsamente popolata. D'altro canto, la dipendenza dai parametri di stato w_0 e w_a appare molto inferiore.

Dopo questo studio preliminare, ci concentriamo ora sui risultati dell'analisi cosmologica. I vincoli ottenuti per tutti i modelli considerati sono riportati in Tabella 3.4, dalla quale è possibile dedurre alcune proprietà dell'inferenza. Innanzitutto, sappiamo che le dimensioni dello spazio dei parametri aumentano man mano che ci spostiamo verso destra, passando da uno spazio bidimensionale (H_0, Ω_m) per una cosmologia $f\Lambda$ CDM, ad uno spazio pentadimensionale ($H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda, w_0, w_a$) per una cosmologia ow_0w_a CDM.

Parametro	f Λ CDM	o Λ CDM	fwCDM	owCDM	fw ₀ w _a CDM	ow ₀ w _a CDM
H_0	66.3 ^{+5.4} _{-5.3}	65.8 ^{+5.8} _{-5.6}	70.1 ^{+9.4} _{-8.0}	67.7 ^{+8.5} _{-6.8}	70.8 ^{+9.8} _{-9.1}	67.7 ^{+9.2} _{-7.2}
Ω_m	0.34 ^{+0.08} _{-0.06}	0.32 ^{+0.15} _{-0.16}	0.31 ^{+0.08} _{-0.07}	0.23 ^{+0.16} _{-0.12}	0.33 ^{+0.1} _{-0.09}	0.21 ^{+0.17} _{-0.12}
Ω_Λ	...	0.6 ^{+0.2} _{-0.3}	...	0.5 ^{+0.3} _{-0.3}	...	0.5 ^{+0.2} _{-0.3}
Ω_k	...	0.1 ^{+0.4} _{-0.5}	...	0.3 ^{+0.4} _{-0.4}	...	0.3 ^{+0.4} _{-0.4}
w_0	-1.4 ^{+0.7} _{-0.8}	-1.6 ^{+0.8} _{-0.9}	-1.5 ^{+0.8} _{-0.9}	-1.7 ^{+0.9} _{-0.8}
w_a	-1.0 ^{+2.9} _{-2.8}	-1.0 ^{+3.2} _{-2.7}
χ^2_{min}	14.5	14.4	14.3	14.1	14.2	14.0
<i>d.o.f.</i>	29	28	28	27	27	26
χ^2_{rid}	0.5	0.52	0.51	0.52	0.53	0.54

Tabella 3.4: Vincoli cosmologici ottenuti dall’analisi dei CC, marginalizzando i *posterior* ricavati tramite il campionamento MCMC. Le incertezze si riferiscono all’intervallo di confidenza al 68%, mentre i valori di H_0 sono in unità di km/s/Mpc.

Parametro	f Λ CDM	o Λ CDM	fwCDM	owCDM	fw ₀ w _a CDM	ow ₀ w _a CDM
H_0	8.1%	8.8%	13.4%	12.6%	13.8%	13.6%
Ω_m	23.5%	50.0%	25.8%	69.6%	30.3%	81.0%
Ω_Λ	...	50.0%	...	60.0%	...	60.0%
Ω_k	...	500.0%	...	133.3%	...	133.3%
w_0	57.1%	56.2%	60.0%	52.9%
w_a	290.0%	320.0%

Tabella 3.5: Errori percentuali sui vincoli cosmologici ottenuti dall’analisi dei CC. Il calcolo avviene seguendo il metodo più conservativo: quando gli errori non sono simmetrici, viene considerato l’errore il cui valore assoluto è maggiore.

Questo è significativo poiché, come è possibile notare in Tabella 3.5, l’errore percentuale sulle misure aumenta man mano che le dimensioni dello spazio aumentano. Tale comportamento non è inaspettato dato che un aumento delle dimensioni dello spazio dei parametri implica una maggiore superficie da esplorare per le MCMC, e dunque una maggiore difficoltà nell’ottenere una precisa misura dei parametri se i dati a disposizione non possiedono un potere vincolante sufficiente a compensare questo effetto.

Interessante inoltre notare come: nel caso della densità di materia Ω_m , fissato $\Omega_k = 0$, la precisione sulla misura rimanga pressoché inalterata al variare della parametrizzazione dell’equazione di stato dell’energia oscura, pur essendovi una lieve degenerazione con i parametri di stato. Viceversa, subisce una forte variazione percentuale nel momento in cui l’assunzione di piattezza viene meno. Questo effetto è ricondotto alla degenerazione geometrica evidenziata in precedenza, per la quale Ω_m e Ω_Λ risultano tra loro degeneri ed una loro misura precisa diventa complicata. Notiamo infatti come, per cosmologie *open*, le misure di Ω_m e Ω_Λ abbiano errori percentuali piuttosto elevati ed inoltre, l’introduzione del parametro Ω_Λ , tenda a rafforzare la degenerazione tra il parametro di stato dell’ener-

gia oscura ed i contributi energetici del fluido cosmologico.

Osservando le incertezze percentuali su Ω_k e w_a , è possibile notare come queste siano molto maggiori rispetto agli altri parametri. Oltre ad essere quantità intrinsecamente più difficili da misurare, date le forte degenerazioni ed il minor impatto sull'andamento dell'osservabile $H(z)$, gli scarsi livelli di precisione possono essere ricondotti al fatto che, essendo il loro valore atteso (per una cosmologia Λ CDM) uguale a zero, le rispettive incertezze percentuali risultano mal definite, dovendo dividere gli errori sulla misura per una quantità che si approssima a zero. Allo stesso tempo, pur non rappresentando una misura particolarmente affidabile, il valore inferito per Ω_k ci da comunque la possibilità di affermare la consistenza delle nostre misure con l'assunzione di curvatura nulla, seppur con un livello di confidenza piuttosto basso $\mathcal{O}(10^0)$.

Per cosmologie w CDM, sebbene le barre di errore al 68% siano piuttosto ampie, il valore misurato di w_0 risulta compatibile con una energia oscura sotto forma di costante cosmologica Λ , ovvero con parametro di stato $w = -1$. Quando si considerano invece cosmologie $w_0 w_a$ CDM, mentre il valore di w_0 appare consistente con le misure ottenute nel caso w CDM, il parametro w_a appare molto più difficile da vincolare. Allo stesso tempo, come mostrato in Figura 3.2, il campionamento MCMC sembra convergere (ed i contorni di confidenza sembrano stringersi) attorno ad una soluzione $w_a \sim 0$, segno che i CC puntino verso una componente di energia oscura costante nel tempo.

Dunque, anche senza aver osservato i contorni di confidenza bidimensionali o la proiezione dei risultati nello spazio dei dati, siamo comunque in grado di dedurre alcune caratteristiche sui vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni dei CC. Sottolineiamo come essi siano in grado di determinare con discreta precisione sia la costante di Hubble H_0 che i parametri di densità, con i risultati ottenuti per le diverse cosmologie che risultano consistenti sia tra loro che rispetto alle misure riportate in letteratura [5, 204, 8, 87]. Al contempo, i dati osservativi attualmente a disposizione non sembrano possedere un potere di vincolo sufficiente a risolvere la nota tensione cosmologica [3].

Le ultime tre righe della Tabella 3.4 riportano una stima dell'accordo tra la distribuzione attesa e quella osservata dei dati. In questo caso, si può evincere come il valore minimo della distribuzione χ^2 sia inferiore al numero di gradi di libertà (“d.o.f.”), indice di un fit corretto ed eventualmente di una leggera sovrastima negli errori misurati.

Osservando la Figura 3.2 possiamo evidenziare graficamente alcune delle caratteristiche dedotte dall'analisi dei risultati in Tabella 3.4. Nel caso di una cosmologia Λ CDM, notiamo come l'accordo tra i dati osservativi e l'andamento di *best-fit* dell'osservabile (curva nera) risulti particolarmente significativo, specie osservando la distribuzione dei residui. I pochi punti a $z > 0.5$, rendono la stima dei parametri più incerta, specie se la dipendenza dell'osservabile dai parametri è maggiore a redshift elevati. Unito al fatto che a basso z la dipendenza del parametro di Hubble da H_0 sia molto forte, ciò rende la misura di H_0 più accurata rispetto a quella di Ω_m con una estensione della regione di incertezza (in rosso) attorno al *best-fit* che aumenta con il redshift, in concomitanza dell'aumento della sensibilità di $H(z)$ rispetto alla misura di Ω_m . Dai contorni di confidenza bidimensionali sul piano $H_0 - \Omega_m$ risulta evidente una degenerazione tra i due parametri. Infatti, considerati due parametri non degeneri, il *posterior* sarà una gaussiana perfetta e la proiezione sul piano sarà una circonferenza. Viceversa, in presenza di una degenerazione, la gaussiana viene deformata e la sua proiezione è tipicamente una figura ellissoidale. Il suo asse maggiore indica la direzione di degenerazione, lungo cui diversi valori dei parametri possono riprodurre una stessa osservazione in maniera equiprobabile.

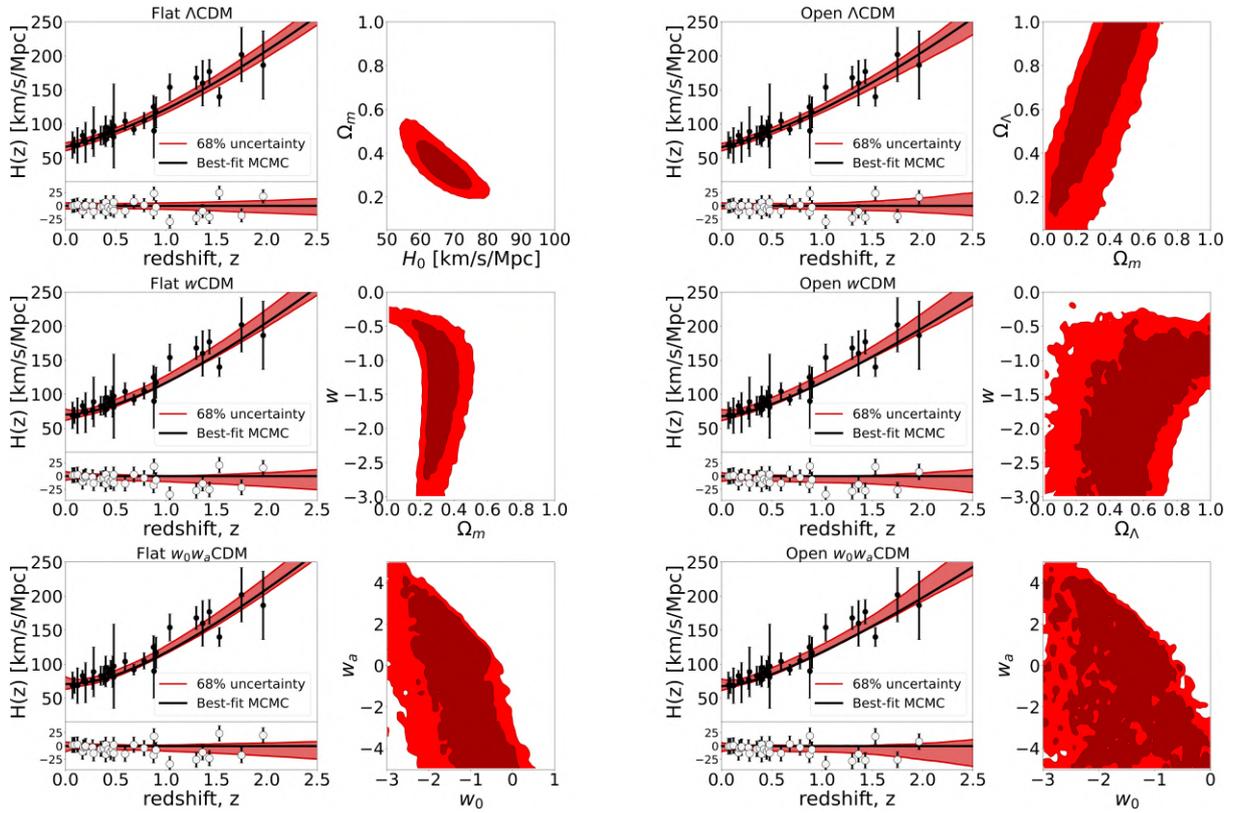


Figura 3.2: Proiezione dei vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni CC. Ogni coppia di pannelli riporta i risultati ottenuti per ciascuna delle cosmologie. Il pannello sinistro mostra l’adattamento tra le osservazioni CC ed i risultati riportati in Tabella 3.4, con la curva nera e la regione rossa in ombra raffiguranti, rispettivamente, il *best-fit* ed il livello di incertezza al 68%. Nella porzione superiore, i punti in nero sono riferiti alla raccolta di osservazioni in [87] mentre nella porzione inferiore vengono mostrati il valore dei residui e la loro deviazione standard. Il pannello sulla destra mostra i contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura) e al 95% (regione chiara). Per ogni cosmologia selezioniamo un particolare piano nello spazio dei parametri. Partendo all’alto troviamo: Λ CDM (piano $H_0 - \Omega_m$), $\text{o}\Lambda$ CDM (piano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$), w CDM (piano $\Omega_m - w$), ow CDM (piano $\Omega_\Lambda - w$), w_0w_a CDM (piano $w_0 - w_a$), ow_0w_a CDM (piano $w_0 - w_a$).

In questo caso, pur essendo presente, la degenerazione $H_0 - \Omega_m$ non risulta molto marcata: i contorni di confidenza risultano infatti chiusi e ricoprono una regione del piano sufficientemente ridotta da permettere una buona stima di entrambi i parametri. Nel caso di una cosmologia $\text{o}\Lambda$ CDM, la degenerazione tra Ω_m e Ω_Λ risulta invece più consistente, tanto è che l’estensione verticale dei contorni ricopre tutto il piano. Proseguendo con l’indagine sulle varie cosmologie è semplice dedurre come, l’introduzione di un maggior numero di parametri nel modello, renda i contorni di confidenza sempre più estesi e meno definiti, mentre l’adattamento del modello ai dati risulta sempre più asimmetrico con una forma che varia a seconda della cosmologia. È interessante notare come il progressivo incremento dell’incertezza sul parametro H_0 estenda la regione di incertezza a $z \sim 0$ all’aumentare delle dimensioni del modello, la quale tende a restringersi nell’intervallo $0.1 < z < 1$ (ovvero nella regione maggiormente coperta dai dati) per poi raggiungere la massima estensione a redshift maggiori. Un’altra caratteristica notevole riguarda la normalizzazione delle curve di *best-fit*. Considerando la medesima parametrizzazione dell’energia oscura, le cosmologie *flat* ($\Omega_k = 0$) mostrano un andamento dell’osservabile con una normalizzazione maggiore rispetto alle

cosmologie *open*, dove la curvatura è un parametro libero. Questo ci permette di fare un'ultima osservazione confrontando i risultati riportati in Tabella 3.4 e lo studio delle dipendenze di $H(z)$ in Figura 3.1. Nel caso di cosmologie *flat* il valore della costante di Hubble H_0 appare maggiore rispetto alle cosmologie *open*, giustificando dunque il comportamento osservato in Figura 3.2. In realtà osservando i pannelli inferiori Figura 3.1, è possibile notare come un ulteriore contributo alla normalizzazione provenga dal valore reciproco dei parametri Ω_m e Ω_Λ , e sia dunque una commistione tra questi due e la costante di Hubble (il cui effetto è dominante, specie a basso z) a determinare la normalizzazione della curva $H(z)$, con i parametri di stato che svolgono invece un ruolo minore.

In generale, l'accordo tra la stima dei parametri ed i dati risulta accettabile, con l'incertezza attorno alla curva di *best-fit* che aumenta con il redshift, dove la sensibilità di $H(z)$ dai parametri cosmologici (in particolare da Ω_m e Ω_Λ) aumenta notevolmente. Infatti, la forma funzionale del parametro di Hubble ($H(z) \simeq H_0$ per $z \rightarrow 0$), implica che a basso redshift sia il potere vincolante su H_0 a dominare l'incertezza per poi cedere il passo alle dipendenze dagli altri parametri cosmologici man mano che il redshift aumenta.

È dunque importante sottolineare come ulteriori osservazioni che consentano un ampliamento della distribuzione in redshift dei dati, renderanno i CC uno strumento fondamentale per le indagini cosmologiche.

3.3.2 Oscillazioni Barioniche Acustiche

L'osservabile caratteristico di questa sonda varia a seconda del tipo di indagine, abbiamo infatti notato nel capitolo precedente come questa sia l'unica sonda nel nostro studio il cui insieme di dati è composto da 7 osservabili differenti.

Poiché mostrare i risultati per ognuno di essi renderebbe la trattazione inutilmente lunga e complessa, decidiamo d'ora in avanti di mostrare solamente l'osservabile utilizzato come standard nella maggior parte degli studi cosmologici che includono le BAO, ovvero $D_V(z)$. Come discusso all'inizio di questo capitolo, nell'eventualità in cui si volesse accedere ai vincoli cosmologici ottenuti rispetto ai restanti osservabili, è possibile contattare direttamente gli autori².

In Figura 3.3, vengono studiate le variazioni nell'andamento della distanza di volume $D_V(z) \cdot (r_{d, fid}/r_d)$ al variare dei seguenti parametri: H_0 , Ω_m , Ω_Λ , w_0 , w_a , $r_{d, fid}/r_d$. A differenza dei CC, la forma integrale dell'osservabile (2.9) rende meno immediata l'identificazione della dipendenza dai parametri cosmologici, che può essere però stimata qualitativamente tramite questa rappresentazione grafica. Innanzitutto, vista la forma funzionale di $D_V(z) \cdot (r_{d, fid}/r_d)$, tutte le curve (indipendentemente dal parametro considerato) convergono a zero per $z \rightarrow 0$. Le barre di errore ridotte consentono di scartare anche visivamente il valore di alcuni parametri, soprattutto ad un redshift elevato. I dati sembrano infatti suggerire che il modello cosmologico sia descritto da parametri tali per cui: $65 < H_0/(\text{km/s/Mpc}) < 70$, $0.2 < \Omega_m < 0.4$, $0.5 < \Omega_\Lambda < 0.8$, $-1.5 < w_0 < -0.5$ e $0.95 < r_{d, fid}/r_d < 1.05$. Per quel che riguarda il parametro w_a , i dati e la dipendenza dell'osservabile non sembrano invece fornire uno strumento in grado di discernere chiaramente tra valori diversi del parametro. Seppur in alcuni casi l'intervallo di valori favorito dai dati risulti piuttosto esteso, non è detto che il processo di inferenza non sia in grado di fornire un vincolo preciso.

²E-mail: fabrizio.cogato@studio.unibo.it; michele.moresco@unibo.it

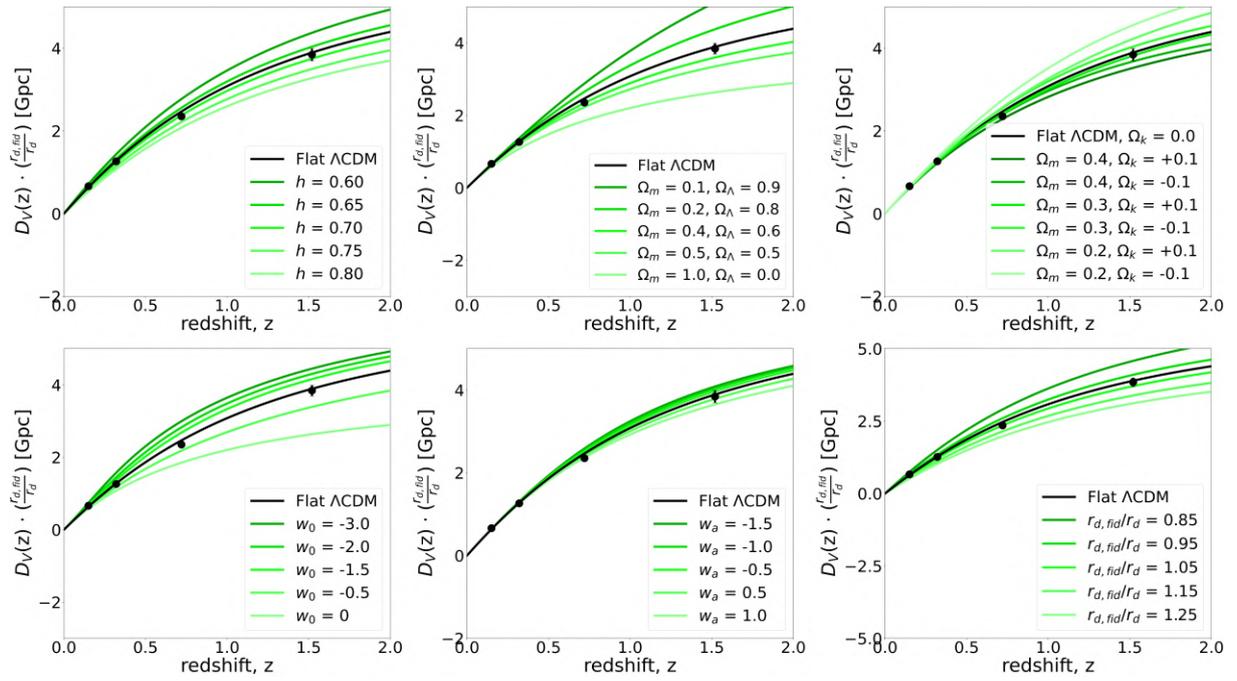


Figura 3.3: Andamento della distanza di volume $D_V(z)$ in funzione del valore dei parametri cosmologici. L'intervallo di variazione è riportato in legenda. La curva nera raffigura il modello Flat Λ CDM (Tabella 3.1). I punti in nero si riferiscono alle osservazioni BAO in [7], con differenti tonalità di verde ad identificare diversi andamenti dell'osservabile.

Infatti, poiché le BAO hanno la peculiarità di offrire una vasta gamma di osservabili, con diverse dipendenze parametriche, la loro combinazione può portare ad estrarre interessanti conclusioni su tutti i parametri cosmologici. Questo è uno dei punti cruciali del nostro studio. Infatti, con l'analisi delle BAO iniziamo a testare la procedura di combinazione di osservazioni indipendenti, che verrà poi applicata alla combinazione di sonde cosmologiche indipendenti.

Il principio è sostanzialmente lo stesso: vengono costruite le *likelihood* per ciascun osservabile che vengono poi combinate tramite la somma dei loro logaritmi. In questo modo, deriviamo una *likelihood* totale dalla quale costruire il *posterior* che verrà poi campionato tramite MCMC.

Passiamo dunque all'analisi dei risultati riportati in Tabella 3.6 e in Tabella 3.7. La prima differenza rispetto ai CC può essere trovata osservando la costante di Hubble, il cui valore è ottenuto con una precisione costante all'aumentare delle dimensioni dello spazio dei parametri. Questo significa che, seppur aumenti la superficie da esplorare, il potere vincolante su H_0 è tale da permetterne comunque una stima precisa.

La grande capacità di vincolo delle BAO viene ulteriormente confermata dal parametro di densità della materia Ω_m . Rispetto ai CC, che nel caso $f\Lambda$ CDM ottenevano un risultato con un errore percentuale dell'ordine del 23%, per la medesima cosmologia le BAO forniscono un errore percentuale di $\sim 7\%$, portando ad un risultato la cui precisione è maggiore anche del corrispettivo risultato per H_0 . Le BAO non sono però in grado di risolvere la degenerazione geometrica, dato che la precisione sulla misura di Ω_m diminuisce notevolmente nel momento in cui il parametro Ω_Λ è incluso nell'analisi. Inoltre, considerando le cosmologie *flat*, l'errore percentuale sul Ω_m aumenta al complicarsi della parametrizzazione w ma con una intensità minore rispetto a quanto osservato con l'introduzione di Ω_Λ . Intuiamo dunque che la degenerazione $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ abbia un effetto sulle misure maggiore rispetto a $\Omega_m - w$.

Parametro	f Λ CDM	o Λ CDM	fwCDM	owCDM	fw ₀ w _a CDM	ow ₀ w _a CDM
H_0	69.0 ^{+5.1} _{-4.4}	67.8 ^{+5.1} _{-4.5}	67.2 ^{+5.1} _{-4.5}	67.2 ^{+5.4} _{-4.8}	65.6 ^{+5.8} _{-5.1}	67.2 ^{+5.2} _{-4.9}
Ω_m	0.29 ^{+0.02} _{-0.02}	0.24 ^{+0.06} _{-0.07}	0.28 ^{+0.02} _{-0.03}	0.18 ^{+0.1} _{-0.07}	0.32 ^{+0.05} _{-0.07}	0.16 ^{+0.12} _{-0.06}
Ω_Λ	...	0.6 ^{+0.2} _{-0.2}	...	0.4 ^{+0.3} _{-0.2}	...	0.4 ^{+0.2} _{-0.2}
Ω_k	...	0.2 ^{+0.3} _{-0.3}	...	0.4 ^{+0.4} _{-0.3}	...	0.5 ^{+0.4} _{-0.3}
w_0	-0.8 ^{+0.2} _{-0.2}	-1.1 ^{+0.3} _{-1.0}	-0.6 ^{+0.5} _{-0.4}	-1.2 ^{+0.7} _{-1.2}
w_a	-1.3 ^{+1.8} _{-2.1}	-1.0 ^{+2.7} _{-2.5}
χ^2_{min}	8.5	8.2	7.8	7.8	7.7	7.9
<i>d.o.f.</i>	13	12	12	11	11	10
χ^2_{rid}	0.65	0.68	0.65	0.71	0.7	0.79

Tabella 3.6: Vincoli cosmologici ottenuti dall’analisi delle BAO, marginalizzando i *posterior* ricavati tramite il campionamento MCMC. Le incertezze sono riferite all’intervallo di confidenza al 68%. I valori di H_0 sono in unità di km/s/Mpc.

Parametro	f Λ CDM	o Λ CDM	fwCDM	owCDM	fw ₀ w _a CDM	ow ₀ w _a CDM
H_0	7.4%	7.5%	7.6%	8.0%	8.8%	7.7%
Ω_m	6.9%	29.2%	10.7%	55.6%	21.9%	75.0%
Ω_Λ	...	33.3%	...	75.0%	...	50.0%
Ω_k	...	150.0%	...	100.0%	...	80.0%
w_0	25.0%	90.9%	83.3%	100.0%
w_a	161.5%	270.0%

Tabella 3.7: Errori percentuali sulla misura dei parametri cosmologici ottenuti dall’analisi delle BAO. Il calcolo avviene seguendo il metodo più conservativo: quando gli errori non sono simmetrici, viene considerato l’errore il cui valore assoluto è maggiore.

Dall’aumento dell’errore percentuale nella stima di w_0 tra fwCDM e fw₀w_aCDM, è possibile dedurre la presenza di una forte degenerazione tra i parametri di stato w_0 e w_a .

Anche le BAO, come i CC, non riescono a vincolare in maniera precisa il parametro Ω_Λ , conducendo ad una misura indiretta della curvatura piuttosto imprecisa che, specie per le parametrizzazioni più complesse, non sembrerebbe favorire un Universo con curvatura nulla. Per quel che riguarda il parametro di stato w_0 , la misura relativa alla cosmologia fwCDM suggerisce la consistenza dell’ipotesi $w = -1$, mentre la presenza di una degenerazione tra Ω_Λ e w è la causa della maggiore imprecisione nella misura di w_0 nel caso di cosmologie *open*.

Un’ultima proprietà che può essere dedotta dai risultati tabulati, riguarda la simil-gaussianità delle distribuzioni. Trascurando il parametro H_0 , man mano che le dimensioni dello spazio aumentano, le distribuzioni tendono a diventare sempre più asimmetriche e distorte, basti osservare w in owCDM oppure Ω_m in ow₀w_aCDM.

Infine, dallo studio del χ^2 notiamo come l’accordo tra le distribuzioni osservate e quelle attese risulti accettabile e dunque il campionamento MCMC sembra essere andato a buon

fine pur avendo, anche in questo caso, una probabile sovrastima degli errori osservativi. Le BAO sono quindi in grado di determinare i parametri cosmologici con una precisione maggiore rispetto ai CC (tranne nel caso della costante di Hubble in cui il potere vincolante delle due sonde appare confrontabile) non riuscendo comunque a superare le degenerazioni tra i diversi parametri. Al contempo, dalle stime delle proprietà di curvatura ed energia oscura, i dati a disposizione sembrano non trovare forti evidenze che ci allontanino dal paradigma Flat Λ CDM.

Andiamo ora ad analizzare la Figura 3.4. Prima di tutto, nel caso Λ CDM, la grande precisione nella misura del valore di Ω_m corrisponde ad una ampiezza dei contorni di confidenza (lungo l'asse Ω_m) minore rispetto ai CC. Per quel che riguarda la degenerazione lungo l'asse H_0 , una forma dei contorni così squadrata è sintomo di un *posterior* il cui picco è dominato da un plateau.

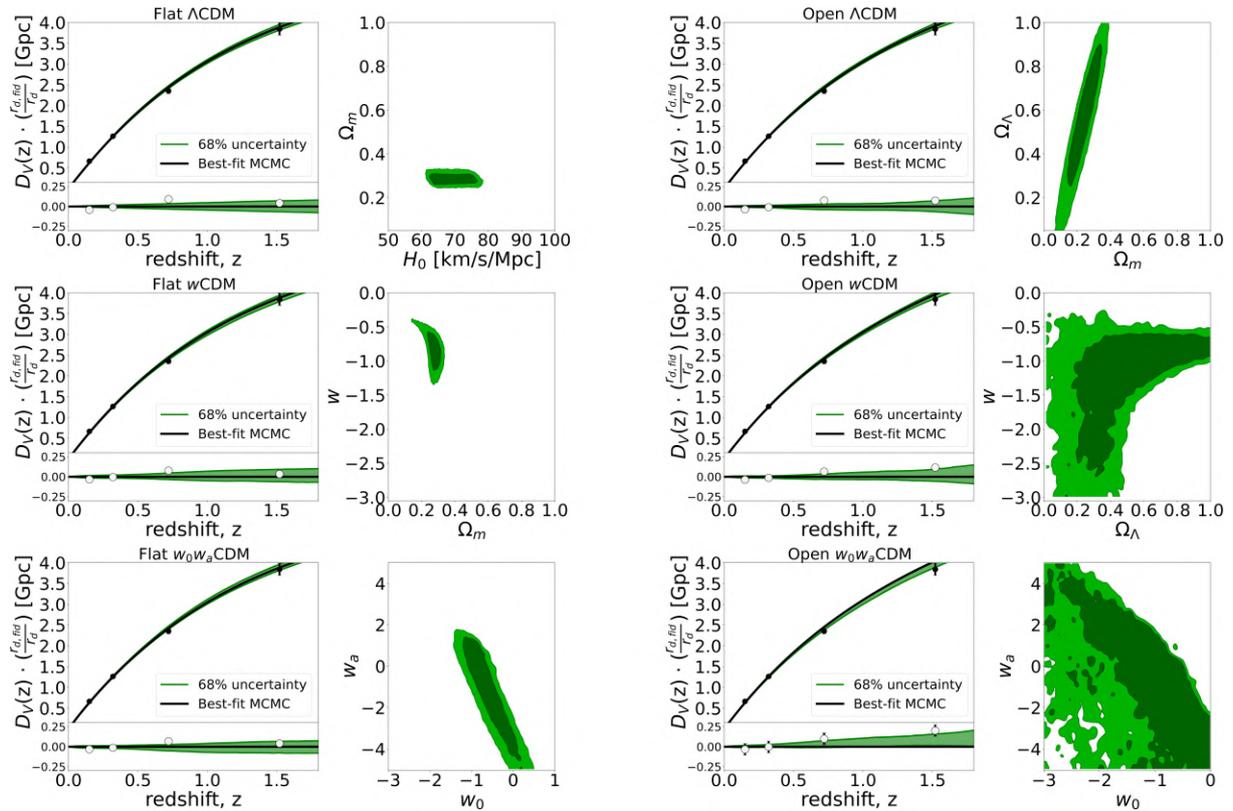


Figura 3.4: Proiezione dei vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni BAO. Ogni coppia di pannelli riporta i risultati ottenuti per ciascuna delle cosmologie. Il pannello sinistro mostra l'adattamento tra le osservazioni BAO ed i risultati riportati in Tabella 3.6, con la curva nera e la regione verde in ombra raffiguranti, rispettivamente, il *best-fit* ed il livello di incertezza al 68%. Nella porzione superiore, i punti in nero sono riferiti alla raccolta di osservazioni in [7] mentre nella porzione inferiore sono mostrati il valore dei residui e la loro deviazione standard. Il pannello sulla destra mostra i contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura) e al 95% (regione chiara). La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 3.2. Ai fini della stesura, di tutti gli osservabili a disposizione viene rappresentato solo $D_V \cdot (r_{d,fit}/r_d)$, spesso utilizzato come standard in diversi studi cosmologici data la sua somiglianza con il Diagramma di Hubble.

Se confrontiamo questi grafici con quelli relativi ai CC, possiamo notare come, ad esclusione del caso Λ CDM, le direzioni di degenerazione tra i diversi parametri sembrano coincidere ma, la maggior precisione consentita dalle BAO, riduce le aree sottese dalle distribuzioni e così anche le regioni coperte dai contorni risultano meno ampie. Questo effetto diventa particolarmente evidente considerando i piani $\Omega_m - w$, $\Omega_\Lambda - w$ e $w_0 - w_a$ (fw_0w_a CDM), dove la presenza di una degenerazione tra i parametri viene evidenziata dalla maggior precisione con cui questi vengono determinati.

Osservando la proiezione dei risultati nello spazio dei dati, è evidente come una grande precisione nei dati (e quindi barre di errore ridotte) implichi un aumento della precisione nella stima dei parametri. Tale precisione riduce l'intervallo di incertezza al 68% attorno alla curva di *best-fit*, specie se consideriamo la regione del grafico a basso z dove l'osservabile tende a zero. Dalla distribuzione dei residui è possibile ricavare ulteriori dettagli. Una delle prime considerazioni che può essere fatta riguarda la relazione vigente tra la simmetria dell'intervallo di confidenza al 68% attorno alla curva di *best-fit* e la forma dei contorni di confidenza. Infatti, più questi ultimi risultano concentrici (tenendo conto delle irregolarità nella loro forma), ovvero più i contorni al 68% risultano equi-distanziati rispetto a quelli al 95% su tutto il piano, maggiore sarà la simmetria dell'incertezza attorno al valore di *best-fit* nello spazio dei dati. Per chiarire il concetto, osserviamo le cosmologie Λ CDM e ow_0w_a CDM: per buona parte del piano $w_0 - w_a$, i contorni al 68% quasi coincidono con quelli al 95%, segno di una distribuzione di probabilità particolarmente asimmetrica e deformata.

Possiamo dunque concludere che i risultati (entro le barre di errore) mostrano un buon accordo con i dati osservativi. In alcuni casi la dispersione dei dati risulta maggiore, il che è probabilmente dovuto alla minore precisione con cui vengono determinati i parametri quando le dimensioni dello spazio dei parametri aumentano. Seppur le forti degenerazioni, unite alla distribuzione discreta dei dati lungo l'intervallo di redshift, rendano complessa la distinzione tra le diverse soluzioni possibili, è evidente come l'ampliamento delle raccolte di dati, con l'inclusione di nuovi osservabili, possa consolidare la potenza delle BAO nella determinazione dei parametri cosmologici fondamentali, portando ad un livello superiore la precisione nelle misure cosmologiche.

3.3.3 SuperNovae di Tipo Ia

Le SuperNovae di Tipo Ia rappresentano una ottima occasione di testare il funzionamento e le caratteristiche dell'algoritmo inferenziale quando, per una stessa sonda, si hanno a disposizione più insiemi di dati. Il nostro studio comprende infatti sia l'analisi dei dati JLA [105] che l'analisi dei dati Pantheon [106], che rappresenta la raccolta di dati più completa ed accurata attualmente disponibile in letteratura.

Come visto in Sezione 2.1, nella letteratura di riferimento [6, 104] è stato sottolineato come Pantheon, seppur integri alcuni dei suoi dati, abbia ridotto gli effetti sistematici in maniera significativa rispetto al JLA. Questa caratteristica del Pantheon può essere già verificata confrontando la matrice di covarianza delle due raccolte. Infatti, nel caso Pantheon (Figura 2.1), la matrice di covarianza ha una forma diagonale molto più definita rispetto al caso JLA (Figura 2.2), segno di una minore correlazione tra i dati.

Nel seguente studio sulle SNeIa, descriveremo nel dettaglio l'analisi del campione Pantheon, per poi passare ad una analisi comparata dei risultati ottenuti dalle singole raccolte. Attraverso quest'ultimo passaggio ci proponiamo di identificare gli effetti nel processo di inferenza di una trattazione completa della sistematica.

Pantheon

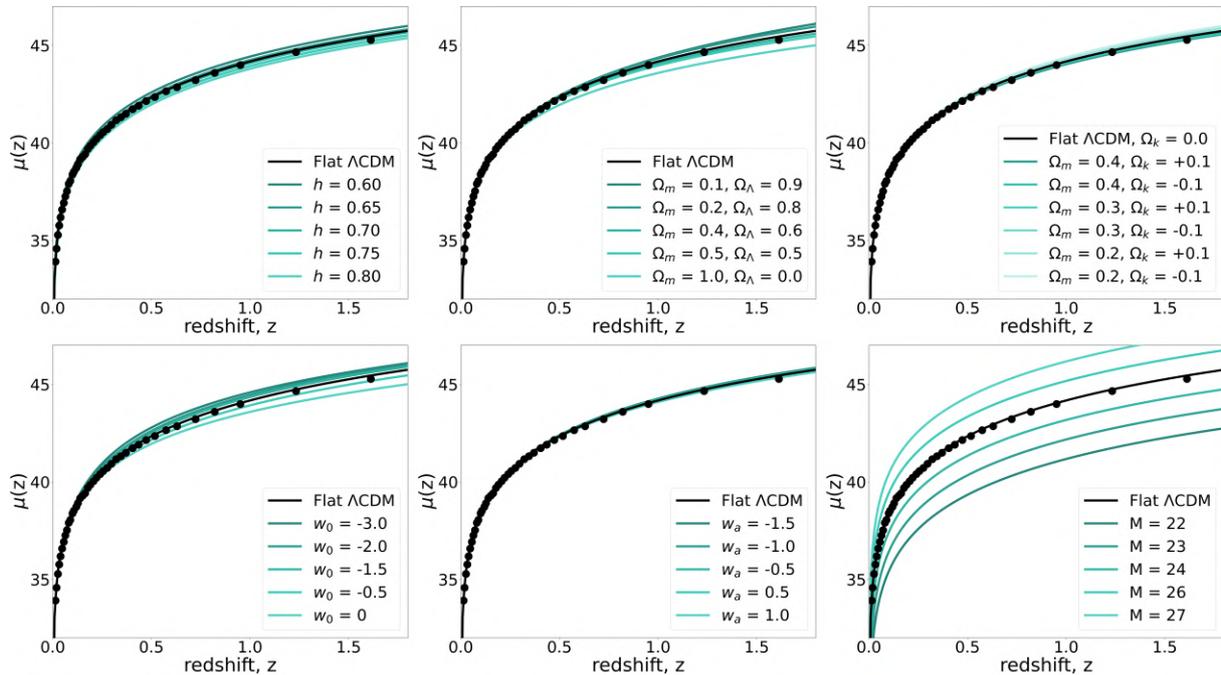


Figura 3.5: Andamento del modulo di distanza $\mu(z)$ al variare dei parametri cosmologici. L'intervallo di variazione è riportato in legenda. La curva nera raffigura il modello Flat Λ CDM (Tabella 3.1), con la normalizzazione $M = 25$. I punti in nero si riferiscono alle osservazioni SNeIa (Pantheon) [104, 6], con differenti tonalità di blu ad identificare diversi andamenti dell'osservabile.

Iniziamo dunque dall'analisi del campione Pantheon ed in particolare dallo studio della dipendenza del modulo di distanza $\mu(z)$ dai parametri cosmologici, a cui si aggiunge il parametro di appoggio (*nuisance*) M . Osservando la Figura 3.5, i parametri cosmologici che più sembrano influenzare l'andamento dell'osservabile sono il parametro di stato w_0 ed i parametri di densità Ω_m e Ω_Λ (nell'assunzione di un Universo piatto).

In particolare, come già osservato nel caso di CC e BAO, assumendo $\Omega_k = 0$, i dati per $z > 0.5$ escludono in maniera chiara un Universo composto di sola materia ($\Omega_m = 1$), così come una energia oscura con pressione nulla ($w_0 = 0$). La sensibilità alle variazioni del parametro di stato w_a e del parametro Ω_k , risulta essere praticamente nulla lungo tutto l'intervallo di redshift coperto dai dati, con un leggero aumento per $z > 1$. In riferimento al parametro Ω_k , il pannello in alto a destra mostra gli effetti della degenerazione geometrica sul modulo di distanza. Notiamo infine come i dati appartenenti alla raccolta Pantheon sembrano giacere sulla curva con normalizzazione $M = 25$.

È importante sottolineare che la capacità vincolante delle SNeIa sulla costante di Hubble è pressoché nulla poiché questo parametro risulta fortemente degenerare con la normalizzazione M . Infatti, esplicitando la forma funzionale del modulo di distanza (2.3) rispetto alla distanza di luminosità nella sua forma generica (1.47):

$$\mu(z) = 5 \log \left[(1+z) \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} S_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz' \right) \right] + M$$

che può essere riscritta nella forma:

$$\mu(z) = 5 \log \left[\frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_k|}} S_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz' \right) \right] - 5 \log(H_0) + M. \quad (3.21)$$

È dunque evidente che, poiché l'integrando in (3.21) non ha alcuna dipendenza da H_0 , la presenza della normalizzazione M renda per definizione nulla la dipendenza del Diagramma di Hubble $\mu(z)$ dalla costante di Hubble H_0 . Dando un primo sguardo ai risultati in Tabella 3.8 e agli errori percentuali corrispondenti in Tabella 3.9, è chiaro il debole vincolo offerto dalle SNeIa su H_0 . In letteratura, ciò viene attribuito alla degenerazione tra la costante di Hubble H_0 e la normalizzazione M che, per quanto osservato nella relazione (3.21), non permette una misura precisa di H_0 se il valore di M non è determinato a priori tramite la scala delle distanze e dunque con osservazioni locali di stelle Cefeidi [67].

I valori della costante di Hubble qui riportati, non rappresentano dunque un vincolo cosmologico sul parametro ma, piuttosto, un valor medio suggerito dal *prior*, come si può anche notare dai contorni di confidenza riportati in Figura 3.6.

Parametro	f Λ CDM	o Λ CDM	fwCDM	owCDM	fw $_0w_a$ CDM	ow $_0w_a$ CDM
H_0	79.9 ^{+13.6} _{-14.1}	80.7 ^{+13.3} _{-14.2}	76.8 ^{+15.6} _{-15.0}	77.6 ^{+14.6} _{-16.4}	79.7 ^{+13.8} _{-14.9}	82.6 ^{+12.0} _{-13.4}
Ω_m	0.30 ^{+0.02} _{-0.02}	0.32 ^{+0.07} _{-0.08}	0.32 ^{+0.07} _{-0.08}	0.28 ^{+0.09} _{-0.08}	0.37 ^{+0.06} _{-0.11}	0.26 ^{+0.12} _{-0.11}
Ω_Λ	...	0.7 ^{+0.1} _{-0.1}	...	0.5 ^{+0.3} _{-0.2}	...	0.4 ^{+0.2} _{-0.1}
Ω_k	...	-0.1 ^{+0.2} _{-0.2}	...	0.3 ^{+0.3} _{-0.2}	...	0.3 ^{+0.3} _{-0.2}
w_0	-1.1 ^{+0.2} _{-0.2}	-1.5 ^{+0.5} _{-0.8}	-1.1 ^{+0.2} _{-0.2}	-1.5 ^{+0.5} _{-0.8}
w_a	-0.7 ^{+1.7} _{-2.4}	-0.2 ^{+3.3} _{-2.9}
χ^2_{min}	39.3	39.1	39.2	38.9	39.2	38.4
<i>d.o.f.</i>	37	36	36	35	35	34
χ^2_{rid}	1.06	1.09	1.09	1.11	1.12	1.13

Tabella 3.8: Vincoli cosmologici ottenuti dall'analisi delle SNeIa (Pantheon), marginalizzando i *posterior* ricavati dal campionamento MCMC. Le incertezze si riferiscono all'intervallo di confidenza al 68%. I valori di H_0 sono in unità di km/s/Mpc.

Parametro	f Λ CDM	o Λ CDM	fwCDM	owCDM	fw $_0w_a$ CDM	ow $_0w_a$ CDM
H_0	17.6%	17.6%	20.3%	21.1%	18.7%	16.2%
Ω_m	6.7%	25.0%	25.0%	32.1%	29.7%	46.2%
Ω_Λ	...	14.3%	...	60.0%	...	50.0%
Ω_k	...	200.0%	...	100.0%	...	100.0%
w_0	18.2%	53.3%	18.2%	53.3%
w_a	342.9%	1650.0%

Tabella 3.9: Errori percentuali sulla misura dei parametri cosmologici ottenuti dall'analisi delle SNeIa (Pantheon). Il calcolo segue il metodo più conservativo: quando gli errori non sono simmetrici, viene considerato l'errore il cui valore assoluto è maggiore.

Per quel che riguarda la misura del parametro Ω_m , per una cosmologia Λ CDM, la precisione delle SNeIa è invece paragonabile a quella offerta dalle BAO. È evidente come anche le SNeIa siano soggette alla degenerazione tra Ω_m e Ω_Λ . Al contempo, la stima del parametro Ω_Λ è ottenuta con una precisione superiore rispetto ai CC e alle BAO. Seppur il valore di Ω_k venga ricavato con una precisione poco significativa, anche in questo caso i dati osservativi risultano compatibili con l'assunzione di un Universo piatto. Se si considera la cosmologia fw CDM, è interessante confrontare gli errori percentuali sulla misura di Ω_m ricavata a partire dalle tre sonde cosmologiche finora analizzate. Nel caso delle SNeIa, infatti, il rilassamento dell'ipotesi di costante cosmologica (mantenendo l'assunzione di piattezza) comporta una quadruplicazione dell'errore percentuale su Ω_m , rispetto al caso Λ CDM. Lo stesso procedimento, per le BAO, genera una variazione di un fattore ~ 2 , mentre per i CC il valore rimane sostanzialmente invariato. Questo suggerisce come la degenerazione $\Omega_m - w$ abbia un effetto maggiore nell'analisi delle SNeIa. Inoltre, la degenerazione di w con i parametri di densità sembra particolarmente accentuata quando la densità di energia oscura Ω_Λ viene inclusa nell'analisi: infatti, la stima di w_0 possiede la stessa incertezza percentuale nel caso di cosmologie fw CDM e fw_0w_a CDM, che aumenta di un fattore ~ 3 quando si considerano cosmologie *open*.

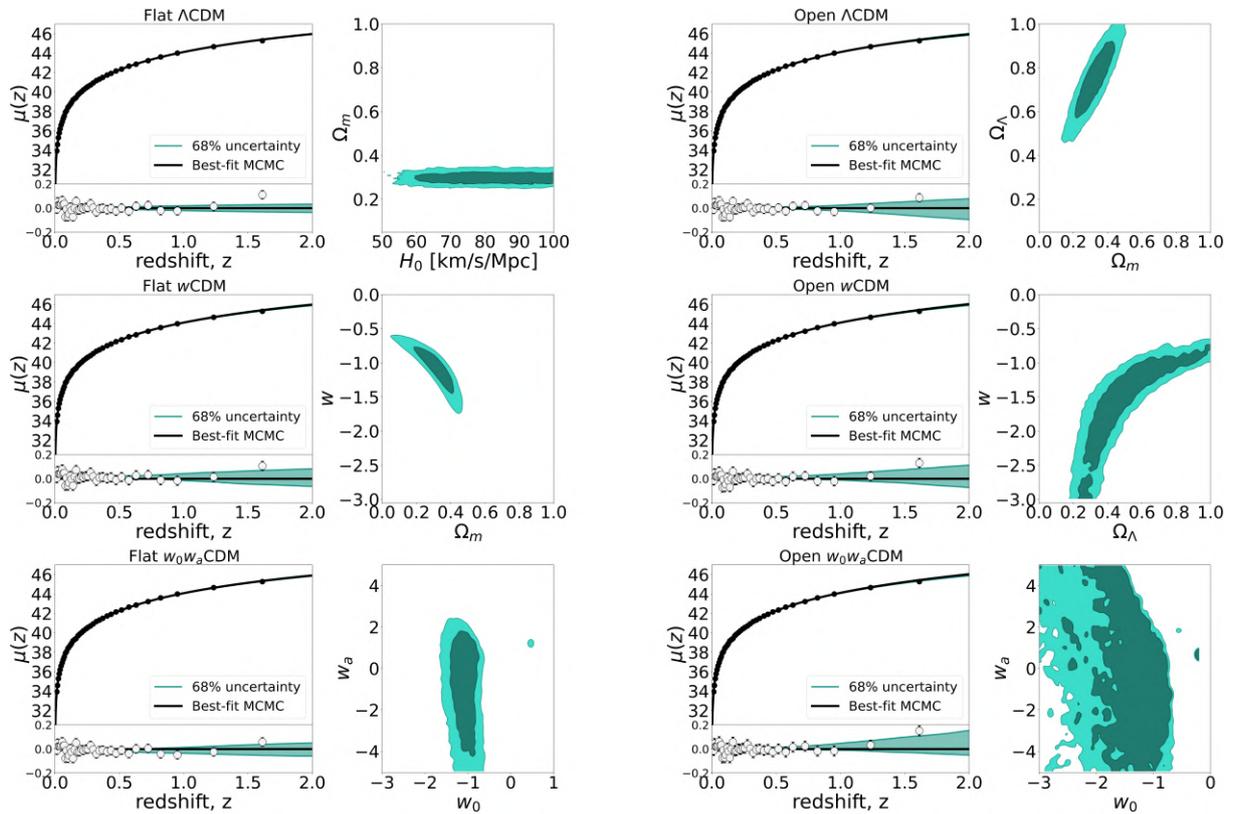


Figura 3.6: Proiezione dei vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni SNeIa (Pantheon). Ogni coppia di pannelli riporta i risultati per ciascuna cosmologia. Il pannello sinistro mostra l'adattamento tra le osservazioni Pantheon ed i risultati riportati in Tabella 3.8, con la curva nera e la regione blu in ombra raffiguranti, rispettivamente, il *best-fit* ed il livello di incertezza al 68%. Nella porzione superiore, i punti in nero sono riferiti alla raccolta di osservazioni in [108] mentre nella porzione inferiore sono mostrati il valore dei residui e la loro deviazione standard. Nel pannello destro, contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura) e al 95% (regione chiara). La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 3.2.

Allo stesso tempo, la maggiore precisione con cui le SNeIa misurano w ($\delta w_{SN} \sim 18\%$, $\delta w_{BAO} \sim 25\%$, $\delta w_{CC} \sim 57\%$) sottolinea una consistenza dell'ipotesi di una costante cosmologica Λ ad un livello $\mathcal{O}(10^{-1})$.

Una prima analisi della Figura 3.6 sembra suggerire come la grande precisione che caratterizza i dati Pantheon corrisponda ad un perfetto adattamento tra gli stessi dati ed il *best-fit*, il cui andamento risulta praticamente indistinguibile rispetto all'intervallo di incertezza. In realtà, osservando i residui l'adattamento apparentemente perfetto mostra comunque una certa dispersione attorno al *best-fit*. Al solito, l'incertezza attorno alla curva di *best-fit* aumenta con il redshift e la sua simmetria dipende fortemente dalla forma dei contorni di confidenza. La degenerazione $H_0 - M$ corrisponde a dei contorni di confidenza $H_0 - \Omega_m$ che non pongono alcun vincolo al parametro H_0 se non un valore $H_0 > 50\text{km/s/Mpc}$ (al 95% di confidenza). Nel caso ΛCDM , la discreta precisione con cui vengono ottenuti i parametri Ω_m e Ω_Λ , rende particolarmente definiti i contorni di confidenza e, con essi, la degenerazione geometrica. Lo stesso vale per il parametro w_0 , la cui precisione (per cosmologie $fw\text{CDM}$ e $fw_0w_a\text{CDM}$) assottiglia i contorni attorno al valore $w_0 = -1$ ed evidenzia la degenerazione $\Omega_\Lambda - w$ nelle cosmologie *open* rispetto a BAO e CC. Il limitato potere vincolante su w_a porta a dei contorni di confidenza particolarmente estesi ed irregolari nel caso di una cosmologia $ow_0w_a\text{CDM}$.

Analisi Comparata: JLA vs. Pantheon

Come già evidenziato all'inizio di questa sezione, Pantheon rappresenta attualmente lo standard per le analisi cosmologiche. Le motivazioni sono essenzialmente due:

1. Il maggior numero di osservazioni contenuto al suo interno (~ 300 in più di JLA) ha comportato una riduzione degli errori statistici;
2. La maggior cross-calibrazione tra i diversi sottocampioni che ha permesso di ridurre gli effetti sistematici a cui corrisponde una matrice di covarianza più diagonale.

Questo significa che è possibile stimare l'impatto degli effetti sistematici nell'inferenza dei parametri cosmologici, confrontando in Tabella 3.10 i risultati (e gli errori percentuali) ottenuti dall'analisi delle due raccolte di dati SNeIa: Pantheon e JLA. Mostriamo i risultati per cosmologie ΛCDM , $fw\text{CDM}$, $ow\text{CDM}$ rispetto ai parametri Ω_m , Ω_Λ , e w : possiamo così valutare quali possono essere gli effetti degli errori sistematici sulle misure di curvatura ed energia oscura in un processo inferenziale. Osserviamo come, in generale, la maggior accuratezza che contraddistingue il campione Pantheon aumenti sensibilmente la precisione con cui vengono determinati i parametri cosmologici. Infatti, i risultati JLA hanno in media un errore percentuale pari a ~ 2 volte il corrispettivo Pantheon.

Una indicazione della consistenza e della potenza delle SNeIa come sonde cosmologiche la si ha osservando che, per cosmologie ΛCDM e $fw\text{CDM}$, entrambe le raccolte offrono (con una confidenza al 68%) una conferma dei risultati ottenuti tramite la CMB [5].

Una informazione degna di nota può essere estratta confrontando i risultati $ow\text{CDM}$: mentre nel caso del campione Pantheon le stime di Ω_m e Ω_Λ vengono ottenute con precisioni maggiori, nel caso del parametro w l'incertezza sulla misura rimane pressoché costante al variare dell'insieme di dati considerato. Possiamo dunque dedurre che la degenerazione tra i parametri di densità (soprattutto Ω_Λ) ed il parametro di stato dell'energia oscura w_0 , gioca ancora il ruolo principale nell'indeterminazione delle proprietà dell'energia oscura e dunque la riduzione degli errori sistematici e statistici nei dati non è in grado di superare le incertezze imposte da tale degenerazione.

	o Λ CDM		fwCDM		owCDM	
Parametro	Pantheon	JLA	Pantheon	JLA	Pantheon	JLA
Ω_m	$0.32^{+0.07}_{-0.08}$	$0.2^{+0.11}_{-0.1}$	$0.32^{+0.07}_{-0.08}$	$0.22^{+0.12}_{-0.12}$	$0.28^{+0.09}_{-0.08}$	$0.15^{+0.11}_{-0.09}$
Ω_Λ	$0.7^{+0.1}_{-0.1}$	$0.6^{+0.2}_{-0.2}$	$0.5^{+0.3}_{-0.2}$	$0.3^{+0.3}_{-0.1}$
w	$-1.1^{+0.2}_{-0.2}$	$-0.8^{+0.2}_{-0.3}$	$-1.5^{+0.5}_{-0.8}$	$-1.6^{+0.7}_{-0.9}$
$\delta\Omega_m$	25.0%	55.0%	25.0%	54.5%	32.1%	73.3%
$\delta\Omega_\Lambda$	14.3%	33.3%	60.0%	100.0%
δw	18.2%	37.5%	53.3%	56.2%

Tabella 3.10: Confronto dei risultati ottenuti dai dati JLA e Pantheon (SNeIa). Le cosmologie o Λ CDM, fwCDM e owCDM, mostrano gli effetti sistematici sullo studio di curvatura ed energia oscura. Parte superiore: confronto tra i risultati per i parametri Ω_m , Ω_Λ e w . Parte inferiore: confronto tra gli errori percentuali.

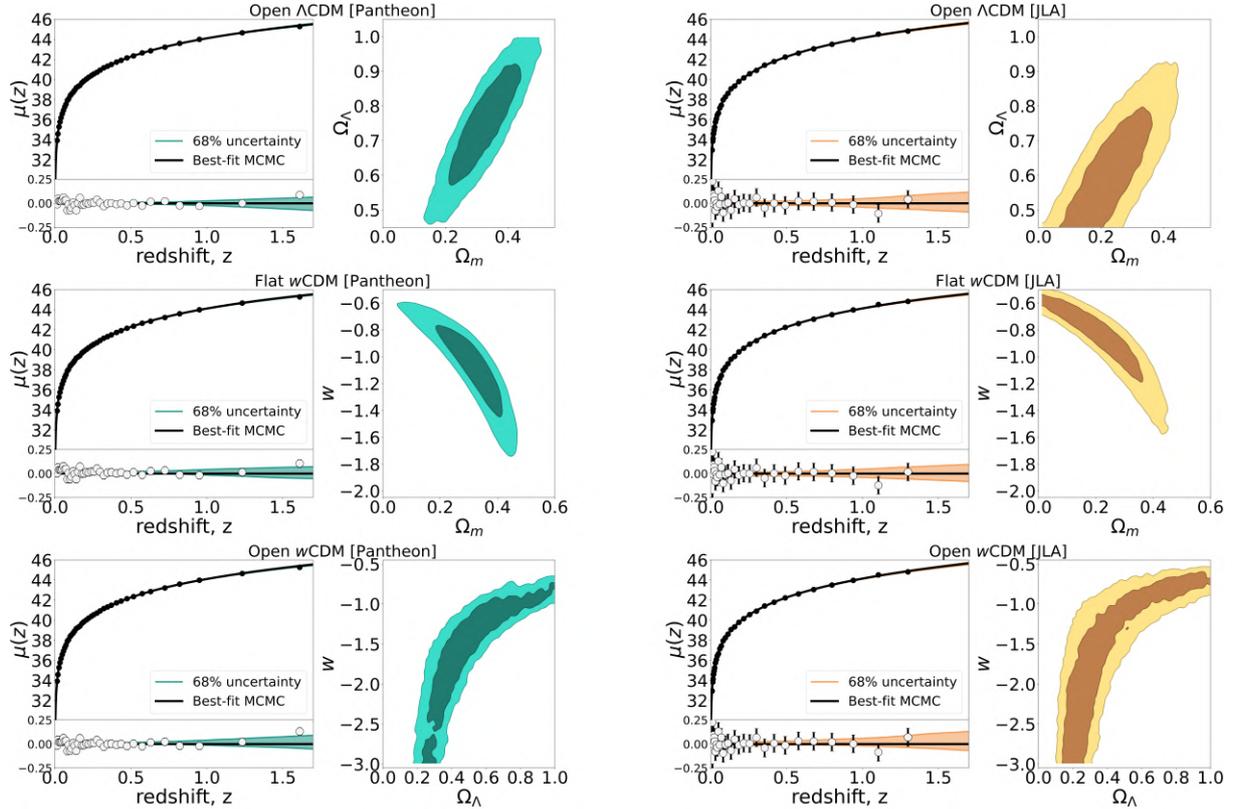


Figura 3.7: Confronto dei vincoli cosmologici ottenuti da osservazioni Pantheon (blu) e JLA (giallo). Ogni coppia di pannelli riporta i risultati per ciascuna cosmologia. Il pannello sinistro mostra l'adattamento tra le osservazioni ed i risultati riportati in Tabella 3.10, con la curva nera e la regione in ombra raffiguranti, rispettivamente, il *best-fit* ed il livello di incertezza al 68%. Nella porzione superiore, i punti in nero sono riferiti alle osservazioni in [108, 107]. Nella porzione inferiore, distribuzione dei residui e loro deviazione standard. Nel pannello destro, contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura) e al 95% (regione chiara). Dall'alto: o Λ CDM (piano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$), fwCDM (piano $\Omega_m - w$), owCDM (piano $\Omega_\Lambda - w$).

Per ottenere un riscontro grafico delle deduzioni fatte, è possibile osservare la Figura 3.7 dove vengono messi a confronto i risultati ottenuti dalle due raccolte di dati.

Infatti, esaminando la forma dei contorni di confidenza bidimensionali possiamo notare come questi, nel caso Pantheon, si assottiglino maggiormente attorno al 50° percentile. In particolare, per le cosmologie Λ CDM e fw CDM l'analisi condotta tramite il campione Pantheon permette di ottenere dei contorni di confidenza chiusi, sintomo che la regione dove giace il picco di probabilità viene individuata con maggior precisione.

Viceversa, per una cosmologia ow CDM la forte degenerazione $\Omega_\Lambda - w$ non permette di ottenere un preciso vincolo sui parametri. Questo è valido specie per il parametro w mentre per Ω_Λ i risultati dell'inferenza appaiono comunque migliorati nel momento in cui si considera la raccolta Pantheon.

Va comunque sottolineato come le irregolarità dei contorni nel piano $\Omega_\Lambda - w$ suggeriscano la necessità di un ulteriore campionamento MCMC (ovvero una catena più lunga) che porterà sperabilmente a dei contorni di confidenza più stretti e regolari attorno al valore di *best-fit*. Infine, notiamo come l'analisi prodotta dal campione Pantheon tenda a diminuire la normalizzazione della curva di *best-fit* e a restringere la regione di incertezza attorno ad essa.

3.3.4 Estensione del Diagramma di Hubble

Poiché tutte le candele standard, per quanto detto in Sezione 2.1, si riferiscono allo stesso osservabile, le considerazioni fatte per le SNeIa sono valide anche per le altre candele.

L'introduzione di QSO e GRB estende il Diagramma di Hubble fino a $z \sim 9$ permettendo di studiare le proprietà dell'osservabile su un intervallo di redshift maggiore.

Quasar

L'andamento del modulo di distanza per i Quasar (QSO) al variare dei parametri cosmologici, offre una conferma ad alto redshift di quanto è stato osservato per le SNeIa: l'osservabile mostra una maggiore sensibilità quando a variare sono i parametri Ω_m e w_0 . Inoltre, la Figura 3.8 mette in evidenza la peculiarità dei QSO: i punti ad alto redshift si distaccano sensibilmente dall'andamento standard Flat Λ CDM, come mostrato anche in [9]. Osservando il pannello centrale in alto ed il pannello a sinistra in basso, per $z > 2$, i QSO sembrano favorire un Universo piatto in cui, o l'energia oscura è descritta da un parametro di stato $w_0 \sim 0$, oppure il fluido cosmologico è completamente dominato da materia ($\Omega_m = 1$). Un parametro $w_0 = 0$ corrisponde ad una componente cosmologica tale per cui il contributo della pressione al tensore energia-impulso è nullo ($P = w\rho$). Una componente con $P = 0$ equivale esattamente al caso della componente di materia. Dunque, un Universo piatto completamente dominato da materia ($\Omega_m = 1$) avrebbe un parametro di stato $w = 0$, perciò le due soluzioni suggerite dai QSO sono tra loro equivalenti. Riuscire a capire le motivazioni di questo comportamento diventa di cruciale importanza per le prossime indagini cosmologiche.

Al momento, il motivo di questa discrepanza non è chiaro e potrebbe risiedere in un diverso comportamento dell'energia oscura ad alto redshift, in una errata trattazione della sistematica (anche se questa opzione viene sfavorita in [9]) oppure in effetti di selezione del campione di QSO utilizzato per determinare i parametri cosmologici.

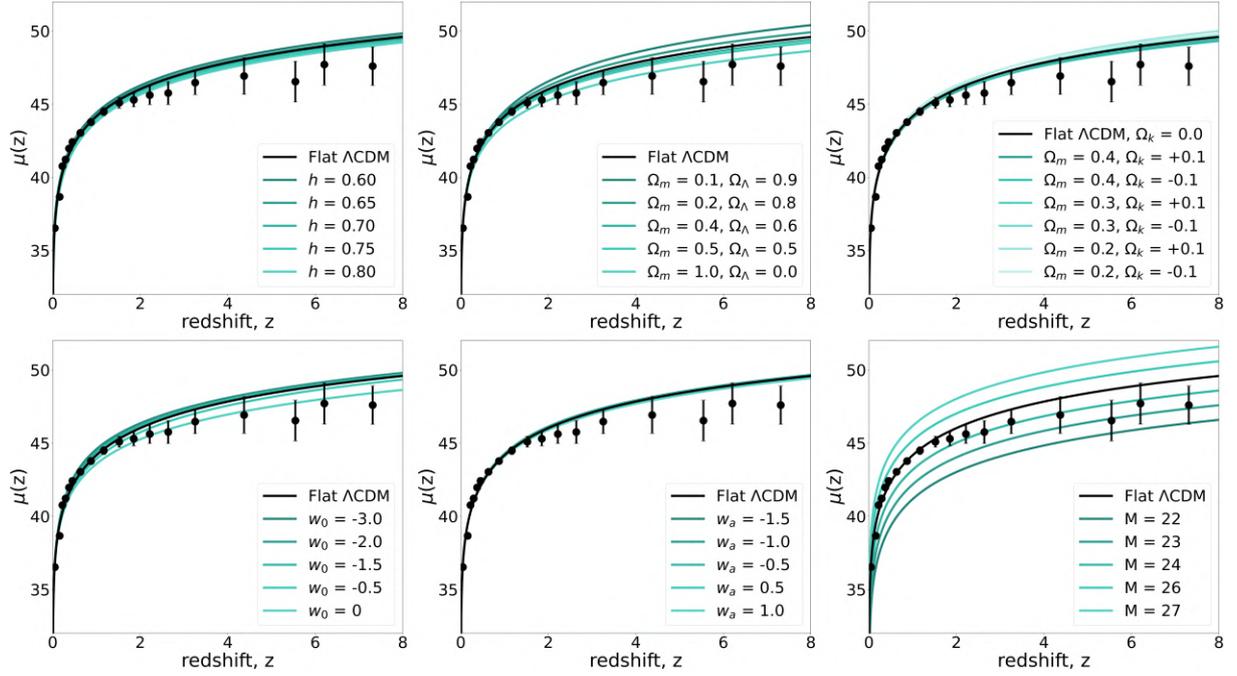


Figura 3.8: Andamento del modulo di distanza $\mu(z)$ al variare dei parametri cosmologici. L'intervallo di variazione è riportato in legenda. La curva nera raffigura il modello Flat Λ CDM (Tabella 3.1), con $M = 25$. I punti in nero si riferiscono alle osservazioni QSO [9], con differenti tonalità di blu ad identificare diversi andamenti dell'osservabile.

Teniamo però a sottolineare che, semplicemente confrontando gli andamenti degli osservabili al variare dei parametri, è evidente come lo scenario suggerito dai QSO (cosmologia *flat* con: $\Omega_m = 1 \Leftrightarrow w_0 = 0$) venga significativamente sfavorito dalle altre tre sonde. Data la validità e la consistenza che queste hanno mostrato in analisi indipendenti, appare dunque necessario un ulteriore approfondimento sull'origine di questa discrepanza.

Parametro	f Λ CDM	o Λ CDM	fwCDM	owCDM	fw ₀ w _a CDM	ow ₀ w _a CDM
H_0	$74.8^{+17.3}_{-16.9}$	$76.2^{+16.6}_{-17.5}$	$74.8^{+17.1}_{-16.8}$	$76.7^{+15.6}_{-17.6}$	$75.0^{+17.6}_{-17.8}$	$75.3^{+16.4}_{-17.0}$
Ω_m	$0.33^{+0.12}_{-0.09}$	$0.46^{+0.14}_{-0.12}$	$0.33^{+0.08}_{-0.06}$	$0.53^{+0.12}_{-0.1}$	$0.29^{+0.09}_{-0.18}$	$0.54^{+0.12}_{-0.1}$
Ω_Λ	...	$0.93^{+0.05}_{-0.11}$...	$0.96^{+0.03}_{-0.06}$...	$0.95^{+0.04}_{-0.07}$
Ω_k	...	$-0.4^{+0.2}_{-0.2}$...	$-0.5^{+0.1}_{-0.2}$...	$-0.5^{+0.2}_{-0.2}$
w_0	$-2.7^{+0.5}_{-0.2}$	$-2.7^{+0.4}_{-0.2}$	$-2.4^{+0.7}_{-0.5}$	$-2.6^{+0.5}_{-0.3}$
w_a	$0.3^{+4.3}_{-4.0}$	$-2.8^{+3.2}_{-1.6}$
χ^2_{min}	68.6	60.6	56.4	43.2	49.9	42.0
<i>d.o.f.</i>	15	14	14	13	13	12
χ^2_{rid}	4.57	4.33	4.03	3.32	3.84	3.5

Tabella 3.11: Vincoli cosmologici ottenuti dall'analisi dei QSO, marginalizzando i *posterior* ricavati tramite il campionamento MCMC. Le incertezze sono riferite all'intervallo di confidenza al 68%. I valori di H_0 sono in unità di km/s/Mpc.

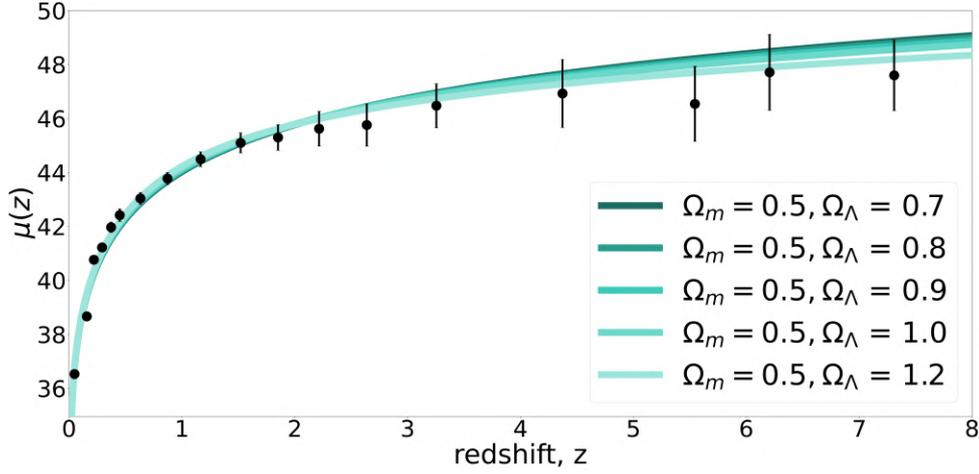


Figura 3.9: Dipendenza di $\mu(z)$ da Ω_Λ . I parametri sono al loro valore fiduciario con $M = 25$ (Tabella 3.1), tranne $\Omega_m = 0.5$. La figura approssima i risultati ottenuti dall’analisi QSO per cosmologie *open* (Tabella 3.11). I punti in nero sono le osservazioni QSO [9].

Da una analisi dei risultati in Tabella 3.11, appare evidente che, rispetto alle altre sonde, i vincoli imposti dai QSO possiedono un potere minore nel determinare in maniera consistente i parametri cosmologici. A riprova della discrepanza che le osservazioni QSO mostrano rispetto alla famiglia di cosmologie considerate, otteniamo sempre $\chi_{rid}^2 \gg 1$ sintomo di un modello non in grado di descrivere correttamente i dati osservativi. Proveremo a chiarire le cause di questo comportamento nel Capitolo 4, offrendo una analisi completa del Diagramma di Hubble combinando tra loro le osservazioni di tutte le candele.

Ad una prima analisi, l’elevato valore del χ^2 viene ricondotto al comportamento evidenziato in Figura 3.9. Fissati tutti i parametri al loro valore fiduciale (Tabella 3.1) poniamo $\Omega_m = 0.5$, ovvero il valore medio delle stime ottenute per le cosmologie *open* (Tabella 3.11). È evidente come i dati ad alto z tendano a spingere Ω_Λ oltre il valore unitario. È infatti per $\Omega_\Lambda > 1$ che la forma di $\mu(z)$, appiattendosi, riproduce con maggior accuratezza la distribuzione dei dati per $z > 2$. Poiché l’imposizione dei *prior* (Tabella 3.3) non permette al campionamento MCMC di andare oltre il valore $\Omega_\Lambda = 1$, l’effetto totale risulta in una stima dei restanti parametri che fornisce un *fit* inadeguato: per cercare di riprodurre la distribuzione dei dati a $z > 2$ le catene tendono ad esplorare zone della superficie di probabilità lontane da quelle favorite invece da una analisi a basso redshift. La distribuzione dei dati nell’intervallo $0 < z < 1$, non è infatti sufficiente per vincolare in maniera decisiva i parametri cosmologici, e lo strano comportamento dei punti ad alto redshift genera una forte incertezza del risultato finale.

In Figura 3.10, mostriamo le conseguenze di questo “appiattimento” del modulo di distanza $\mu(z)$ per z elevati, come è possibile notare dalla distribuzione dei residui. La curva di *best-fit* (in nero) risulta sistematicamente al di sopra dei dati osservativi a $z > 2$. L’intervallo di validità definito all’interno dello spazio dei parametri (Tabella 3.3) non è in grado di giustificare un tale andamento nella distribuzione dei dati e quello che si osserva è una generale tendenza dei contorni di confidenza ad uscire dagli intervalli imposti. Il caso più eclatante è rappresentato dalla cosmologia fw_0w_a CDM, in cui il *posterior* risulta avere due picchi dominanti. Uno tende ad estendersi verso zone dove $w_a > 5$, l’altro verso $w_0 < -3$. Il caso ow_0w_a CDM sembra dunque essere l’unica cosmologia compatibile con i dati, ma al prezzo di valori di w_0 e w_a molto diversi da quelli ottenuti con le altre sonde cosmologiche in analisi.

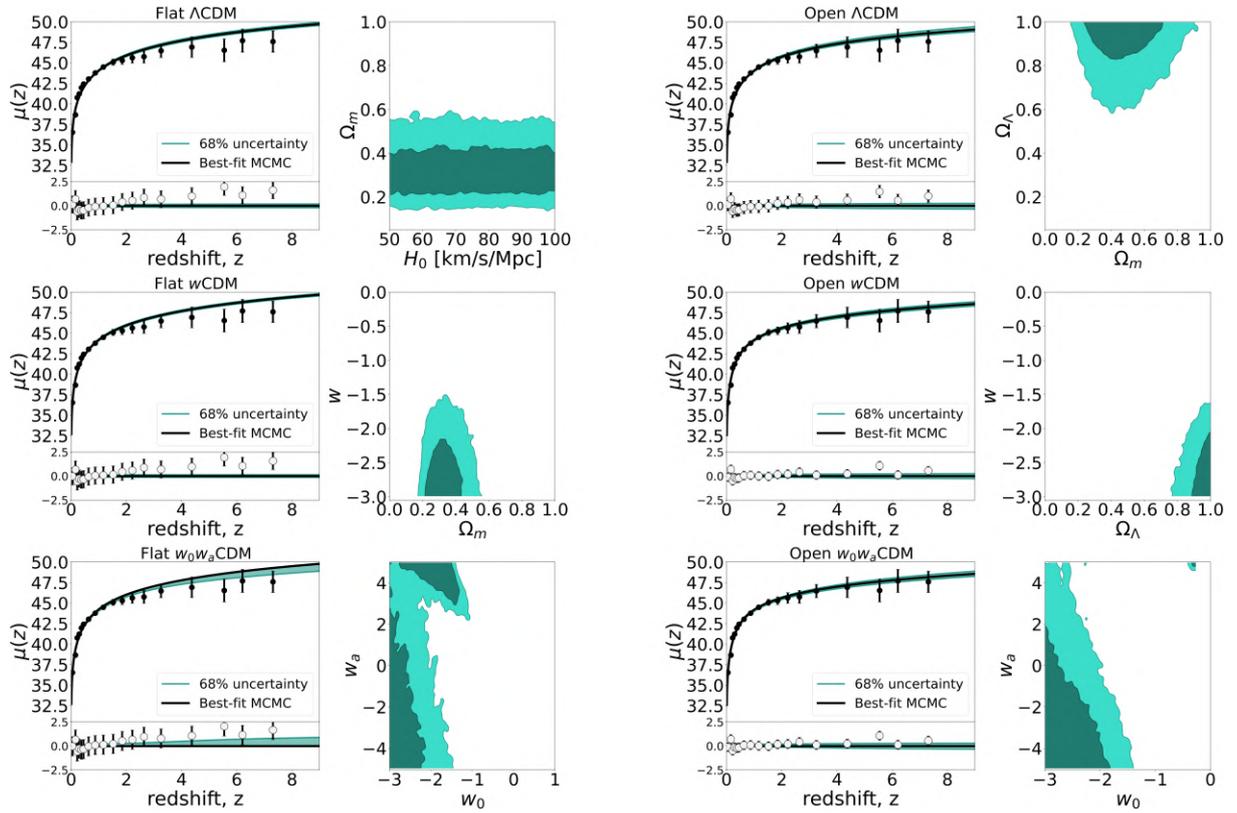


Figura 3.10: Proiezione dei vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni QSO. Ogni coppia di pannelli riporta i risultati per ciascuna cosmologia. Il pannello sinistro mostra l'adattamento tra le osservazioni QSO ed i risultati riportati in Tabella 3.11, con la curva nera e la regione blu in ombra raffiguranti, rispettivamente, il *best-fit* ed il livello di incertezza al 68%. Nella porzione superiore, i punti in nero sono riferiti alla raccolta di osservazioni in [152]. Nella porzione inferiore, riportiamo invece la distribuzione dei residui e loro deviazione standard. Nel pannello destro, contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura) e al 95% (regione chiara). La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 3.2.

Gamma-Ray Burst

In Figura 3.11, l'andamento del modulo di distanza rende evidente la diversa normalizzazione delle osservazioni GRB [10] rispetto alle precedenti candele standard: mentre SNeIa e QSO giacciono sulla curva con normalizzazione $M = 25$, i GRB sembrano essere descritti da una normalizzazione pari a $M \sim 24$. Ciò non rappresenta un grosso ostacolo quando i GRB vengono analizzati singolarmente. Infatti, come visto, essendo M fortemente degenere con H_0 , questo è un parametro senza alcuna valenza vincolante se il suo valore è ottenuto dall'analisi di una candela standard priva di una calibrazione su M . D'altro canto, questa differenza può essere causata da bias sistematici nella misura nel momento in cui si conduca una analisi combinata, utilizzando candele standard con normalizzazioni diverse. Successivamente, in Sezione 4.1, descriveremo il processo utilizzato per rinormalizzare i dati ottenuti dalle osservazioni di GRB.

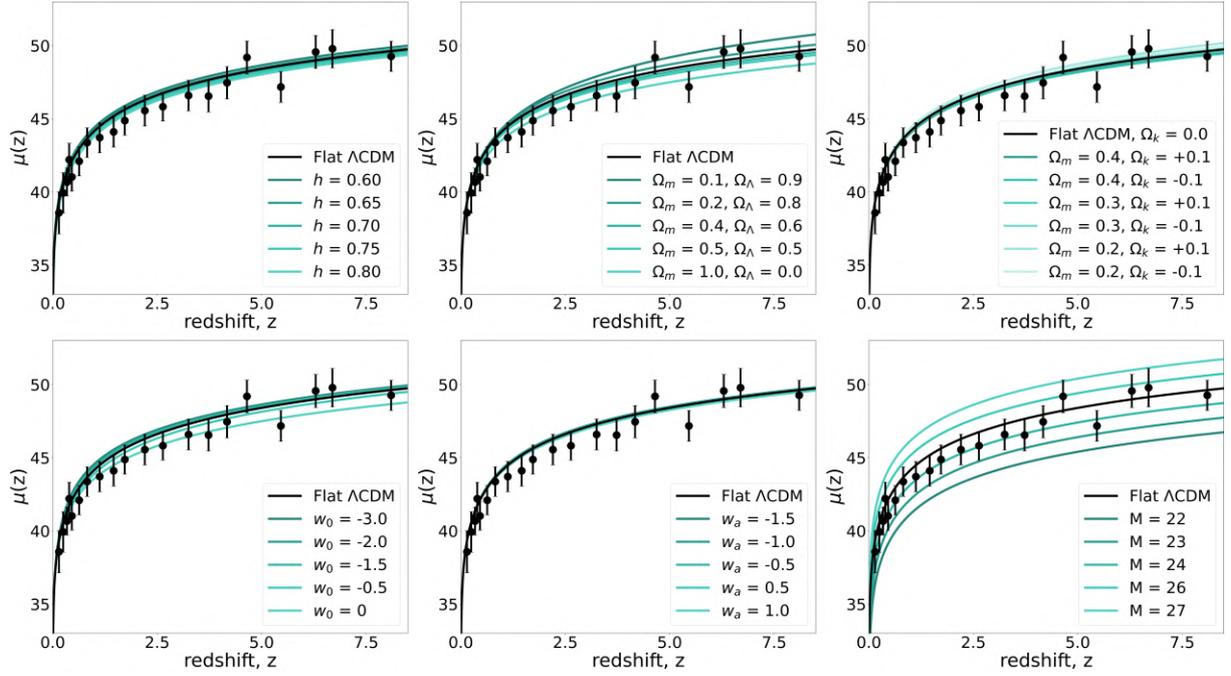


Figura 3.11: Andamento del modulo di distanza $\mu(z)$ al variare dei parametri cosmologici. L'intervallo di variazione è riportato in legenda. La curva nera raffigura il modello Flat Λ CDM (Tabella 3.1), con la normalizzazione $M = 25$. I punti in nero si riferiscono alle osservazioni GRB [10], con differenti tonalità di blu ad identificare diversi andamenti dell'osservabile.

Proseguiamo con una analisi dei risultati riportati in Tabella 3.12 e in Tabella 3.13. È evidente che, seppur con errori percentuali elevati, le stime ottenute tramite l'analisi dei GRB non presentano le problematiche evidenziate nel caso dei QSO, a riprova che una differenza di calibrazione in M non va ad inficiare sui vincoli cosmologici se la sonda viene analizzata singolarmente.

Parametro	f Λ CDM	o Λ CDM	fwCDM	owCDM	fw w_0w_a CDM	ow w_0w_a CDM
H_0	$75.0^{+17.1}_{-16.9}$	$73.9^{+17.7}_{-16.2}$	$74.3^{+17.4}_{-17.0}$	$75.0^{+17.2}_{-16.7}$	$74.6^{+17.1}_{-16.9}$	$76.9^{+15.7}_{-18.1}$
Ω_m	$0.35^{+0.36}_{-0.21}$	$0.30^{+0.28}_{-0.17}$	$0.37^{+0.38}_{-0.24}$	$0.29^{+0.29}_{-0.17}$	$0.38^{+0.37}_{-0.23}$	$0.30^{+0.30}_{-0.17}$
Ω_Λ	...	$0.4^{+0.3}_{-0.3}$...	$0.3^{+0.3}_{-0.2}$...	$0.3^{+0.3}_{-0.2}$
Ω_k	...	$0.3^{+0.6}_{-0.4}$...	$0.4^{+0.6}_{-0.4}$...	$0.4^{+0.6}_{-0.4}$
w_0	$-1.3^{+0.9}_{-1.1}$	$-1.4^{+0.9}_{-1.1}$	$-1.3^{+1.4}_{-1.2}$	$-1.6^{+1.1}_{-0.9}$
w_a	$-1.4^{+3.1}_{-2.4}$	$-0.9^{+3.0}_{-2.9}$
χ^2_{min}	6.5	5.7	5.8	5.6	5.5	5.6
<i>d.o.f.</i>	18	17	17	16	16	15
χ^2_{rid}	0.36	0.33	0.34	0.35	0.34	0.38

Tabella 3.12: Vincoli cosmologici ottenuti dall'analisi dei GRB, marginalizzando i *posterior* ricavati tramite il campionamento MCMC. Le incertezze sono riferite all'intervallo di confidenza al 68%. I valori di H_0 sono in unità di km/s/Mpc.

Parametro	Λ CDM	Λ CDM	w CDM	o w CDM	fw_0w_a CDM	ow_0w_a CDM
H_0	22.8%	24.0%	23.4%	22.9%	22.9%	23.5%
Ω_m	102.9%	93.3%	102.7%	100.0%	97.4%	100.0%
Ω_Λ	...	75.0%	...	100.0%	...	100.0%
Ω_k	...	200.0%	...	150.0%	...	150.0%
w_0	84.6%	78.6%	107.7%	68.8%
w_a	221.4%	333.3%

Tabella 3.13: Errori percentuali sulle misure dei parametri cosmologici ottenuti dall'analisi dei GRB. Il calcolo avviene seguendo il metodo piú conservativo: quando gli errori non sono simmetrici, viene considerato l'errore il cui valore assoluto è maggiore.

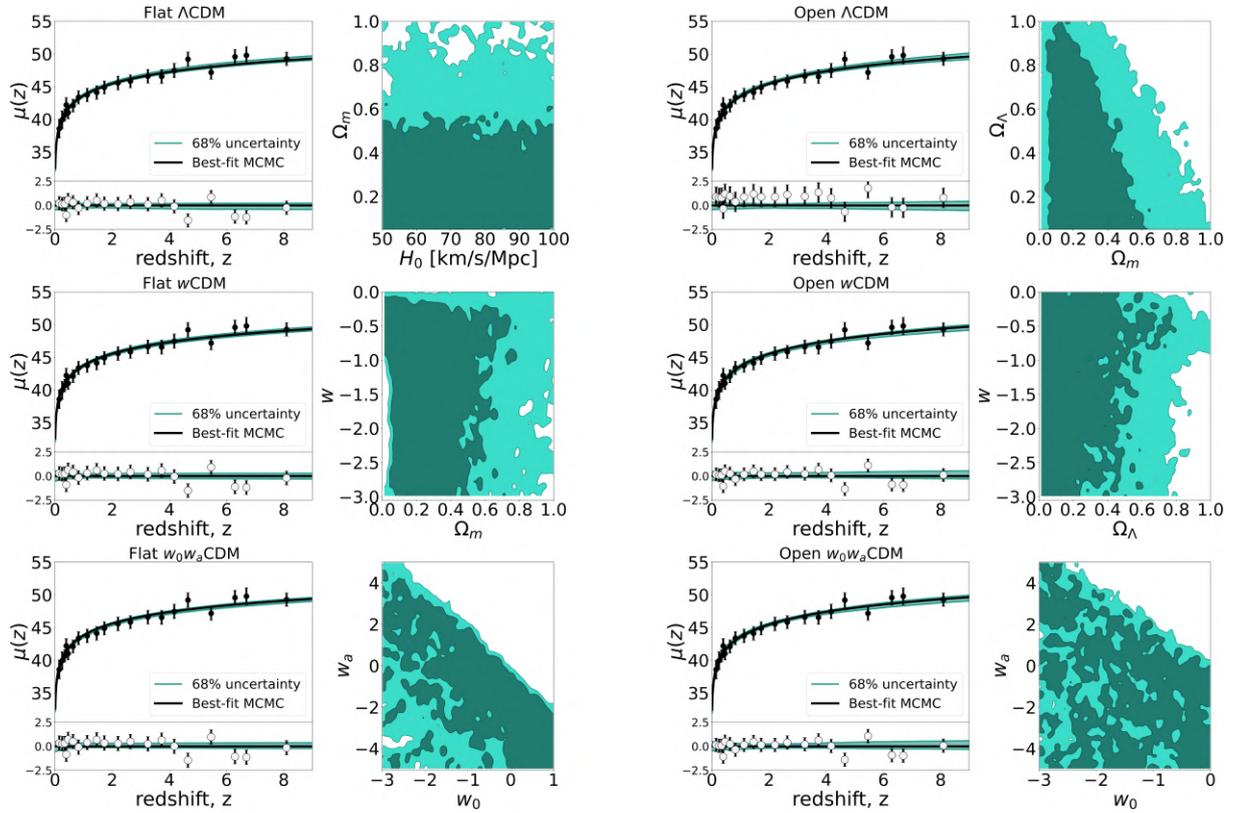


Figura 3.12: Proiezione dei vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni GRB. Ogni coppia di pannelli riporta i risultati ottenuti per ciascuna delle cosmologie. Il pannello sinistro mostra l'adattamento tra le osservazioni GRB ed i risultati riportati in Tabella 3.12, con la curva nera e la regione blu in ombra raffiguranti, rispettivamente, il *best-fit* ed il livello di incertezza al 68%. Nella porzione superiore, i punti in nero sono riferiti alla raccolta di osservazioni in [10]. Nella porzione inferiore, riportiamo invece la distribuzione dei residui e loro deviazione standard. Nel pannello destro, contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura) e al 95% (regione chiara). La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 3.2.

Un'altra sostanziale differenza con i QSO viene trovata osservando i corrispettivi valori del χ^2_{rid} . Mentre in precedenza i loro valori superavano di gran lunga l'unità (sintomo di un cattivo adattamento tra la distribuzione osservata e quella attesa), per i GRB otteniamo invece $\chi^2 < 1$. Come già osservato, questo può significare che la stima dei parametri ottenuta è in buon accordo con la distribuzione reale anche se, da un punto di vista statistico, un valore $\chi^2 \ll 1$ potrebbe essere indicativo di una errata stima degli errori. Ad ogni modo, l'evidenza di incertezze elevate viene confermata in Figura 3.12, dove i contorni di confidenza bidimensionali risultano essere particolarmente estesi lungo tutto il piano, qualsiasi sia la coppia di parametri considerata, mentre la forma particolarmente irregolare e frastagliata è sintomo di una catena MCMC troppo corta. A differenza dei QSO, seppur con incertezze elevate, nel caso dei GRB il *best-fit* riproduce correttamente la distribuzione dei dati, con l'intervallo di incertezza che presenta il consueto allargamento all'aumentare del redshift.

Detto ciò, l'analisi delle sonde cosmologiche che estendono il Diagramma di Hubble, intuitivamente, suggerisce come esse (considerate singolarmente) forniscano dei vincoli sui vari parametri cosmologici non ancora competitivi e consistenti rispetto alle altre sonde cosmologiche esaminate. Al netto degli effetti sistematici che potrebbero ancora essere nascosti, la causa del debole potere vincolante sembra risiedere nella distribuzione dei dati a basso redshift. Non è un caso infatti se, nella maggior parte dei lavori in letteratura che propongono una analisi cosmologica tramite queste due nuove candele standard, i dati vengano "ancorati" a basso redshift includendo nell'analisi le osservazioni SNeIa ($0 < z < 2$). Questo processo, seppur necessiti di tenere in considerazione la correlazione tra le diverse osservazioni, permette di ottenere una stima dei parametri cosmologici molto accurata a basso z , che si riflette poi in una maggiore precisione ad alto z . È chiaro che il carattere innovativo di queste due sonde rappresenta allo stesso tempo un punto di forza e di debolezza. Il potersi spingere al di là dei redshift consentiti dalle osservazioni di SNeIa è sicuramente il maggior pregio di entrambe le sonde. D'altro canto, le raccolte di dati da cui attingere (con le eventuali sistematiche) non sono ancora state definite ed analizzate con lo stesso approfondimento che caratterizza le SNeIa. Perciò, in entrambi i casi, è fondamentale un ampliamento dei campioni e delle tecniche di selezione che permetterebbe, con un approfondimento della sistematica, di superare gli ostacoli ad un loro utilizzo standard nei processi di inferenza cosmologica.

Vedremo ora come la possibilità di combinare in maniera pratica diverse raccolte di dati, ci permetterà di superare questi primi ostacoli ed ottenere, a partire dallo studio completo del Diagramma di Hubble, una stima dei parametri cosmologici confrontabile con le altre sonde cosmologiche a disposizione.

Capitolo 4

Analisi delle Combinazioni Ottimali tra Sonde Cosmologiche

Combinare sonde cosmologiche diverse, essenzialmente, equivale alla combinazione delle rispettive distribuzioni di probabilità. Ciò significa che, a scopo puramente illustrativo e senza la pretesa di un rigore statistico, possiamo immaginare la distribuzione di probabilità totale strettamente correlata all'intersezione tra le singole distribuzioni. Poiché ogni distribuzione sarà caratterizzata da degenerazioni con direzioni diverse all'interno dello spazio dei parametri, è intuitivo capire che, più le direzioni degenerative di ogni singola sonda saranno tra loro perpendicolari, più l'intersezione delle distribuzioni (ovvero la distribuzione totale) risulterà stringente e gaussiana, a cui seguirà un aumento della precisione spinto dalla "rottura" delle degenerazioni (come verrà discusso in riferimento alla Figura 4.4). Dovrebbero perciò essere chiare le motivazioni che rendono la combinazione di sonde cosmologiche (indipendenti) uno strumento di fondamentale importanza quando si tratta di estrarre vincoli cosmologici sempre più precisi e liberi da degenerazioni.

Allo stesso modo, è oramai evidente la necessità di studiare in dettaglio le modalità con cui sonde con diverse direzioni di degenerazioni possano essere combinate per ottimizzare la qualità e la quantità delle informazioni cosmologiche. Sarebbe infatti impensabile raggiungere l'accuratezza richiesta per risolvere le questioni cosmologiche moderne, senza che l'ampliamento ed il miglioramento dei dati osservativi sia condotto in parallelo con una combinazione di osservazioni indipendenti sempre più accurata ed efficiente.

Obiettivo finale di questo studio è dunque una prima definizione di un metodo in grado di quantificare le sinergie tra sonde cosmologiche diverse e di identificare quale particolare combinazione possa massimizzare il potere vincolante sui parametri.

Ovviamente, quando si ha a disposizione un ridotto numero di dati osservativi e sonde cosmologiche, la combinazione che massimizza i vincoli è quella che tiene in considerazione tutte le raccolte di dati. Sarebbe però ingenuo, se non fuorviante, pensare che l'aumento esponenziale di indagini osservative non renderà necessaria una selezione dettagliata delle sonde cosmologiche da utilizzare per i propri scopi. Anzi, la conseguente crescita delle raccolte di dati e del numero di osservabili indipendenti, metterà la comunità di cosmologi di fronte ad una situazione in cui la consistenza e l'indipendenza tra le osservazioni non sarà più garantita a priori e la combinazione di dati (così come una loro analisi) a "scatola chiusa" potrà introdurre ulteriori fonti di incertezza.

L'introduzione ed il consolidamento di un metodo di efficientamento statistico potrà dunque giocare un ruolo cruciale quando *ottimizzare la combinazione di sonde cosmologiche* diventerà una prerogativa della cosmologia osservativa, sia che essa si occupi di sonde del Tardo Universo, dell'Universo primordiale o di una loro combinazione.

In questo capitolo proponiamo dunque uno studio sistematico dell'analisi combinata di sonde cosmologiche, alla ricerca della combinazione ottimale in funzione del modello cosmologico e del numero/tipo di sonde combinate. Questo lavoro rappresenta un contributo originale non ancora adeguatamente studiato ed analizzato in letteratura, che manca completamente di uno studio analitico dei risultati ottenibili per diversi modelli cosmologici da una così grande varietà di sonde cosmologiche del Tardo Universo.

Infatti, a dispetto del crescente numero di sonde cosmologiche, i lavori che riportano una loro analisi comparata, al variare del modello cosmologico e del numero/tipo di sonde combinate, sono pochi e (quasi) sempre riferiti ad un esiguo numero di modelli cosmologici: ovviamente il modello cosmologico standard, con singole estensioni sulla curvatura e sull'equazione di stato dell'energia oscura (Λ CDM e f_w CDM, rispettivamente). Se non per una cerchia ristretta di lavori [8, 127, 205, 206, 7], non troviamo inoltre un'analisi approfondita della combinazione di sole sonde cosmologiche del Tardo Universo: è prassi combinare i risultati ricavati del Tardo Universo con quanto ottenuto dalla CMB.

Chiaramente, il riferimento di tutte gli studi è sempre l'analisi proposta dalla Collaborazione Planck [5], a cui si aggiungono i lavori della SuperNova Cosmology Project [207], della DES Collaboration [208] e della Pantheon Collaboration [104, 6]. Seppur in [68, 65] sia stato sottolineato come la procedura di combinazione possa essere soggetta a criticità, è inoltre possibile combinare i propri vincoli con quanto ottenuto dalle misure locali della costante di Hubble da parte della collaborazione SH0ES [204].

È in questo contesto che nasce perciò la necessità di produrre una analisi dettagliata del Tardo Universo che tenga in considerazione un discreto numero di sonde cosmologiche ed una pletora di modelli cosmologici in grado di indagare gli effetti generati da assunzioni diverse sulla stessa famiglia di cosmologie.

Il secondo elemento di novità di questa analisi consiste nello studio analitico delle direzioni di degenerazione emerse, in funzione del modello cosmologico, dallo studio delle diverse sonde cosmologiche. Volta all'individuazione di sinergie e complementarità tra sonde cosmologiche indipendenti, l'ultima parte del nostro studio verrà perciò dedicata alla definizione di un metodo innovativo che permetta di quantificare analiticamente le sinergie tra le diverse sonde cosmologiche esaminate. L'obiettivo è dunque quello di compiere un primo passo verso una comprensione approfondita dei requisiti necessari che debbono essere soddisfatti, da un qualsivoglia studio cosmologico, quando il fine ultimo dell'analisi è quello di massimizzare, in termini di precisione ed accuratezza, le informazioni estraibili dalla combinazione di più sonde cosmologiche indipendenti.

Il lavoro verrà dunque organizzato come segue. Allo scopo di alleviare e (sperabilmente) rompere alcune delle degenerazioni osservate, la prima parte di questo capitolo viene dedicata all'analisi dei vincoli cosmologici ottenuti dalla combinazione di tutte le sonde a nostra disposizione: BAO, CC, SNeIa, GRB e QSO, con lo scopo di raggiungere una potenza di vincolo sui parametri cosmologici maggiore rispetto a quanto ottenuto nel caso delle singole sonde cosmologiche. Seppur la forma particolarmente semplice della *likelihood* totale lo faccia sembrare di facile attuazione, in realtà, questo approccio nasconde alcune insidie e dunque le caratteristiche delle singole sonde devono essere studiate in dettaglio, sfruttando i risultati ottenuti nel capitolo precedente.

In particolare, lo studio sulle singole candele standard ha evidenziato una diversa normalizzazione del Diagramma di Hubble nel caso dei GRB: in Sezione 4.1, prima di combinare tutte le sonde cosmologiche, ci occuperemo dunque di trovare una soluzione a questa criticità così da rendere l'analisi successiva affidabile e robusta.

Dato il numero di sonde e modelli cosmologici su cui è basata la nostra analisi, il numero totale di possibili combinazioni è elevato: a partire dalle 5 sonde cosmologiche selezionate siamo in grado di produrre 31 diverse combinazioni per ogni modello cosmologico, per un totale di 186 analisi inferenziali.

Una trattazione dettagliata di ciascuna combinazione, oltre a problematiche di carattere illustrativo, porterebbe ad una ridondanza inutile e probabilmente confusionaria: in Sezione 4.2 selezioneremo perciò solo le combinazioni più significative, in funzione del tipo di informazioni che è possibile ricavare da ciascuna di esse. Una raccolta completa dei risultati ottenuti viene riportata in Appendice 5 e, qualora il lettore volesse approfondire lo studio, è possibile richiedere agli autori¹ la proiezione grafica di tutti i risultati o, alternativamente, le catene MCMC da cui la nostra analisi è estratta.

Infine, il lavoro si conclude in Sezione 4.3 con la definizione di un primo metodo atto allo studio analitico di degenerazioni e sinergie tra sonde cosmologiche indipendenti, a cui seguono alcune verifiche di validità per l'approccio proposto.

4.1 Unificazione del Diagramma di Hubble

4.1.1 Normalizzazione dei Gamma-Ray Bursts

Dallo studio sulle dipendenze dai parametri cosmologici del modulo di distanza è emersa una sensibile deviazione della normalizzazione M dei GRB rispetto alle altre due candele standard. Questa prima valutazione qualitativa viene ora analizzata nello specifico in modo da determinare quantitativamente la deviazione. Il fine è dunque quello di ottenere un Diagramma di Hubble la cui estensione in redshift arrivi da $z \sim 0$ fino a $z \sim 8$, combinando simultaneamente tutte e tre le candele standard a disposizione. Per fare ciò è ovvio che le osservazioni debbano essere tra loro consistenti e si rende perciò necessaria una calibrazione a priori.

Il principale problema, come detto, risiede nella diversa normalizzazione dei GRB rispetto alle altre candele. Questa deviazione, a causa della forte degenerazione con la costante di Hubble, rende particolarmente complicata la sua combinazione con le altre candele standard. Il motivo, essenzialmente, lo si può comprendere da un'analisi comparata dei *posterior* ottenuti per le diverse candele standard, di cui un esempio verrà mostrato in Figura 4.2 (pannello sinistro).

Al netto di tutti i parametri cosmologici, valori diversi della normalizzazione M corrispondono a distribuzioni il cui picco è localizzato in regioni diverse dello spazio dei parametri. Se a questo fattore aggiungiamo le forme particolarmente distorte delle distribuzioni, una combinazione di più candele standard porterà alla costruzione di una distribuzione di probabilità ben lontana da una forma simil-gaussiana. È perciò chiara la motivazione che ci spinge ad avviare a questa caratteristica osservativa.

In Sezione 3.3.3, abbiamo già discusso come M sia fortemente degenerare con la costante di Hubble H_0 . Possiamo sfruttare questa caratteristica per correggere la deviazione dei GRB, dato che, tra tutte le sonde utilizzate nell'analisi, due di esse (BAO e CC) sono completamente indipendenti da M . In pratica, combinando ciascuna candela con BAO e CC, otteniamo una precisa stima dei rispettivi valori di M . Infatti, queste due sonde vincolano fortemente il valore di H_0 , indipendentemente da M , e consentono dunque di allentare la degenerazione su M se combinati con le candele standard.

¹E-mail: fabrizio.cogato@studio.unibo.it; michele.moresco@unibo.it

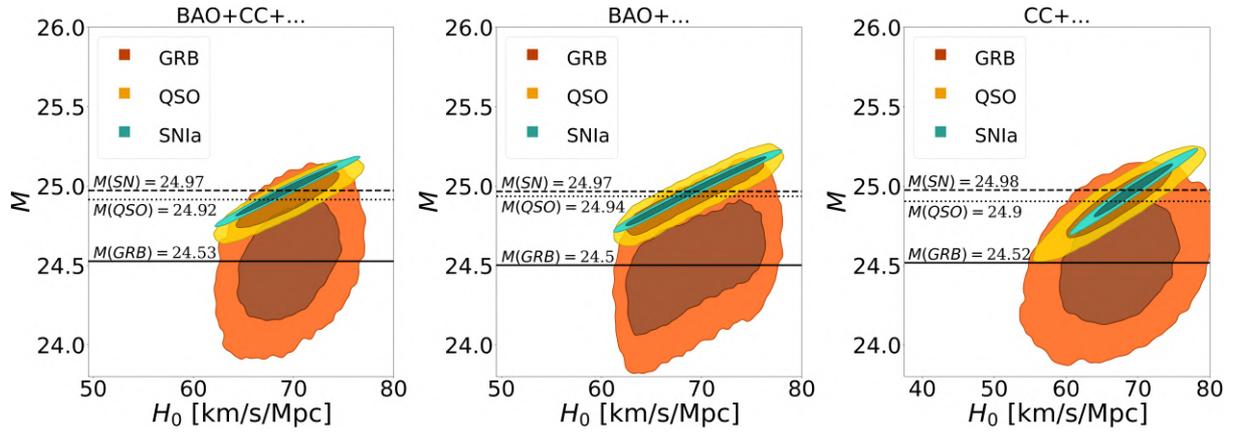


Figura 4.1: Studio della normalizzazione M per ogni candela standard (SC). Consideriamo una cosmologia Λ CDM: GRB (arancione), SNeIa (blu) e QSO (giallo) vengono combinati singolarmente con BAO e CC. Da sinistra troviamo le combinazioni: BAO+CC+SC, BAO+SC e CC+SC, con i valori della normalizzazione M riportati a lato per ogni SC.

In Figura 4.1, viene rappresentato il valore di M calcolato per ciascuna candela standard (SC) a partire dalle combinazioni: BAO+CC+SC, BAO+SC e CC+SC. Consideriamo una cosmologia Λ CDM in modo che eventuali degenerazioni con altri parametri non influenzino la misura di M . Emerge subito come, nel caso di QSO e SNeIa, le normalizzazioni siano tra loro consistenti, mentre risulta evidente la deviazione nel caso dei GRB (con un valore $M_{GRB} \simeq 24.5$).

Per ogni SC il valore di M viene dedotto attraverso la media pesata delle misure ottenute dalle diverse combinazioni. Prendendo come riferimento il valore di M ottenuto per le SNeIa, calcoliamo la deviazione della normalizzazione per i GRB come:

$$\Delta M = M_{GRB} - M_{SN}$$

che, in Sezione 4.1.2, verrà utilizzata come fattore correttivo per la *likelihood* dei GRB.

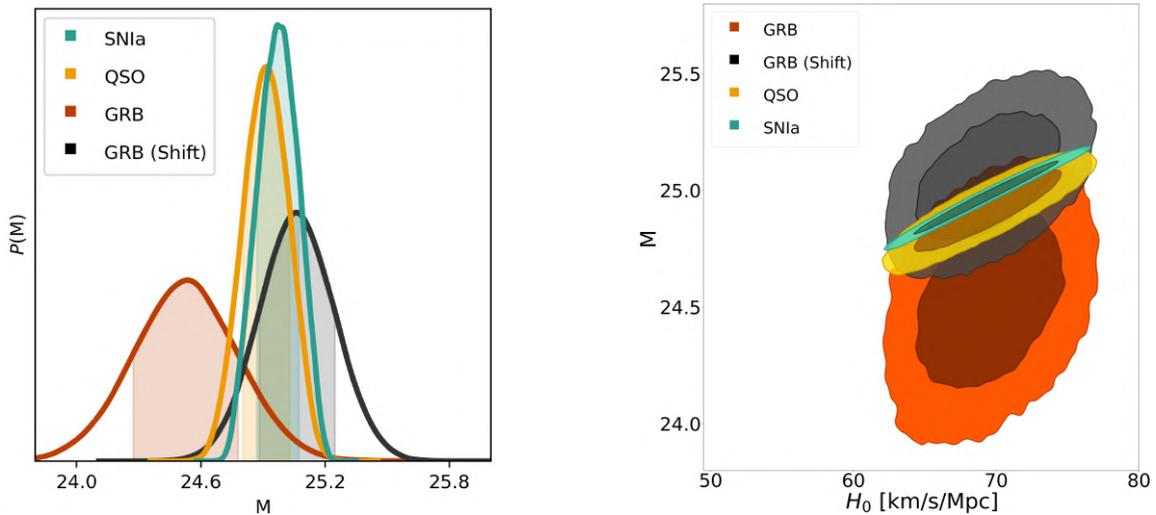


Figura 4.2: Effetti della correzione ΔM sull'analisi dei GRB. Per una cosmologia Λ CDM, mostriamo le combinazioni di BAO e CC (BAO+CC+...) con le candele standard SNeIa (blu), QSO (giallo) e GRB (prima della correzione in arancione, dopo la correzione in nero). Il pannello sinistro mostra il *posterior* (marginalizzato su M). Il pannello destro mostra i contorni di confidenza sul piano $H_0 - M$.

In pratica, utilizzando comunque il parametro di appoggio M come parametro libero nel processo inferenziale, la quantità ΔM viene addizionata al valore teorico del modulo di distanza μ , in modo che non siano introdotti bias nell'analisi bayesiana ed il massimo del *posterior* (lungo la direzione M) sia localizzato in una regione consistente con quanto ottenuto nel caso delle altre candele.

L'effetto di questo processo è mostrato in Figura 4.2, dove in nero troviamo i contorni di confidenza (e la distribuzione di probabilità) ottenuti in seguito alla correzione ΔM . Alternativamente, avremmo potuto agire direttamente sull'insieme di dati ricavato dalle osservazioni GRB, correggendo con il fattore ΔM il valore di μ per ogni singola osservazione. Questo avrebbe però comportato l'introduzione di una correlazione aggiuntiva tra i dati, con effetti sistematici che avrebbero potuto falsare la stima dei parametri cosmologici. Osservando i risultati ottenuti prima (arancione) e dopo (nero) la correzione in Figura 4.2, è evidente come l'effetto di questo processo non infici sulla stima dei parametri cosmologici (in questo caso la costante di Hubble) le cui stime, nei due casi, risultano tra loro consistenti. Viceversa, il nostro approccio soddisfa quanto richiesto per M : dopo la correzione, infatti, il picco della distribuzione di probabilità giace in un intervallo di valori consistente con quanto ottenuto dalle combinazioni di SNeIa e QSO ed inoltre il valore della probabilità al picco aumenta, segno di un miglior adattamento del modello.

4.1.2 Vincoli Cosmologici

Tenendo conto della correzione, passiamo alla combinazione di tutte le candele standard a disposizione, in modo da ottenere una stima dei parametri cosmologici dall'analisi del Diagramma di Hubble unificato ($0 < z < 8$). Un primo esempio della combinazione di sonde cosmologiche indipendenti lo si è avuto quando, nel capitolo precedente, abbiamo combinato i diversi osservabili a disposizione per le osservazioni BAO. Nella sezione precedente, lo stesso procedimento è stato utilizzato (implicitamente) per calcolare la normalizzazione delle diverse candele standard a partire dalla loro combinazione con BAO e CC. Diamo ora qualche dettaglio aggiuntivo sul metodo di combinazione.

Come già visto da un punto di vista teorico, la combinazione di sonde consiste essenzialmente nella costruzione di una *likelihood* comune. Per fare ciò, sfruttando la loro forma logaritmica, calcoliamo la *likelihood* per ogni singola sonda per poi sommare i rispettivi logaritmi ed ottenere la *likelihood* totale (in forma logaritmica). Ricordiamo qui che questa operazione risulta corretta nell'assunzione che le diverse sonde cosmologiche siano tra loro indipendenti. Nel caso del Diagramma di Hubble (HD):

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}_{HD} &\propto \ln \mathcal{L}_{SNeIa} + \ln \mathcal{L}_{GRB} + \ln \mathcal{L}_{QSO} \propto \\ &\propto -\frac{1}{2} \left[\sum_{ij} (\mu_i^{SNeIa} - \mu_i^{th}) Cov_{ij}^{-1} (\mu_j^{SNeIa} - \mu_j^{th}) + \right. \\ &\left. + \sum_i \left(\frac{\mu_i^{GRB} - \mu_i^{th} + \Delta M}{\sigma_i^{GRB}} \right)^2 + \sum_i \left(\frac{\mu_i^{QSO} - \mu_i^{th}}{\sigma_i^{QSO}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove $\mu_i^{SC} \equiv \mu^{SC}(z_i)$ e $\mu_i^{th} \equiv \mu^{th}(z_i)$. Le somme corrono sulle i -esime misurazioni relative a ciascuna sonda e μ_i^{th} rappresenta, in funzione del modello cosmologico selezionato, il valore teorico di μ calcolato a partire dai valori z_i a cui la i -esima osservazione è riferita. Nel termine riferito ai GRB è possibile notare la correzione della *likelihood* tramite il termine ΔM , mentre nel termine riferito alle SNeIa viene inclusa la matrice di covarianza

Cov_{ij} mostrata in Sezione 3.3.3. Così facendo, otteniamo i vincoli cosmologici sui diversi modelli a partire da una analisi congiunta di tutte le candele standard.

In Tabella 4.1, tralasciando per un attimo i vincoli sui singoli parametri, osserviamo come varia la distribuzione del χ^2 passando dall’analisi delle singole candele standard alla loro combinazione. Mediamente osserviamo un $\chi_{rid}^2 \sim 1.5$ il quale, se confrontato con il corrispettivo QSO, rappresenta un enorme progresso in termini di adattamento delle distribuzioni. Allo stesso modo, i risultati dell’analisi HD costituiscono una miglioria anche rispetto al caso GRB, dove il valore del $\chi_{rid}^2 \ll 1$ poteva essere interpretato come una errata stima delle incertezze osservative.

Con la combinazione di tutte le candele standard otteniamo quindi un risultato che, almeno in linea di principio, sembra fornire vincoli cosmologici consistenti. È chiaro che, rispetto a quanto ottenuto per le SNeIa, l’analisi congiunta di tutte le candele standard si allontana da un $\chi_{rid}^2 \sim 1$ ma, allo stesso tempo, l’inclusione di osservazioni a $z > 2$ rende i vincoli cosmologici molto più informativi sulla storia di evoluzione dell’Universo, con un valore del χ_{rid}^2 che risulta comunque statisticamente accettabile.

Ciò ci permette dunque di confermare quanto detto in precedenza relativamente allo scarso potere vincolante di QSO e GRB: “ancorare” le osservazioni GRB e QSO tramite le SNeIa, permette di ottenere una precisa calibrazione a basso redshift che tende a diminuire le incertezze quando si considerano le misurazioni ad alto redshift. I risultati così ottenuti permettono dunque di sondare l’evoluzione del cosmo in un intervallo di tempo (~ 12 miliardi di anni) irraggiungibile per le altre sonde cosmologiche del Tardo Universo.

	f Λ CDM				o Λ CDM			
	SNeIa	GRB	QSO	HD	SNeIa	GRB	QSO	HD
χ_{min}^2	39.3	6.5	68.6	114.9	39.1	5.7	60.6	113.0
<i>d.o.f.</i>	37	18	15	76	36	17	14	75
χ_{rid}^2	1.06	0.36	4.57	1.51	1.09	0.33	4.33	1.51
	fwCDM				owCDM			
	SNeIa	GRB	QSO	HD	SNeIa	GRB	QSO	HD
χ_{min}^2	39.2	5.8	56.4	113.6	38.9	5.7	43.2	113.0
<i>d.o.f.</i>	36	17	14	75	35	16	13	74
χ_{rid}^2	1.09	0.34	4.03	1.52	1.11	0.35	3.32	1.53
	fw $_0w_a$ CDM				ow $_0w_a$ CDM			
	SNeIa	GRB	QSO	HD	SNeIa	GRB	QSO	HD
χ_{min}^2	39.2	5.5	49.9	113.2	38.4	5.6	42.0	112.8
<i>d.o.f.</i>	35	16	13	74	34	15	12	73
χ_{rid}^2	1.12	0.34	3.84	1.53	1.13	0.37	3.5	1.55

Tabella 4.1: Confronto tra la distribuzione χ^2 relativa all’analisi congiunta delle candele standard (HD) e quella relativa alle singole analisi (SNeIa, GRB, QSO).

Per capire come la forte indeterminazione ad alto redshift influisca sull'analisi a basso redshift, in Tabella 4.2, confrontiamo i risultati delle analisi SNeIa e HD. Entro le barre di errore al 68%, i risultati delle due analisi sono tra loro consistenti, con l'indeterminazione su H_0 che persiste a causa della forte degenerazione con M . Notiamo una tendenza dell'analisi HD a fornire valori di Ω_m e Ω_Λ leggermente (ma sistematicamente) maggiori rispetto all'analisi SNeIa, portando ad una diminuzione di Ω_k .

Parametro	f Λ CDM		fwCDM		fw $_0w_a$ CDM	
	SNeIa	HD	SNeIa	HD	SNeIa	HD
H_0	79.9 $^{+13.6}_{-14.1}$	81.3 $^{+13.4}_{-15.0}$	76.8 $^{+15.6}_{-15.0}$	78.6 $^{+15.0}_{-13.6}$	79.7 $^{+13.8}_{-14.9}$	81.6 $^{+12.5}_{-14.5}$
Ω_m	0.3 $^{+0.02}_{-0.02}$	0.3 $^{+0.02}_{-0.02}$	0.32 $^{+0.07}_{-0.08}$	0.36 $^{+0.05}_{-0.06}$	0.37 $^{+0.06}_{-0.11}$	0.4 $^{+0.05}_{-0.11}$
w_0	-1.1 $^{+0.2}_{-0.2}$	-1.2 $^{+0.2}_{-0.2}$	-1.1 $^{+0.2}_{-0.2}$	-1.1 $^{+0.2}_{-0.3}$
w_a	-0.7 $^{+1.7}_{-2.4}$	-1.2 $^{+2.3}_{-2.3}$
χ^2_{min}	39.3	114.9	39.2	113.6	39.2	113.2
<i>d.o.f.</i>	37	76	36	75	35	74
χ^2_{rid}	1.06	1.51	1.09	1.52	1.12	1.53
Parametro	o Λ CDM		owCDM		ow $_0w_a$ CDM	
	SNeIa	HD	SNeIa	HD	SNeIa	HD
H_0	80.7 $^{+13.3}_{-14.2}$	77.0 $^{+15.0}_{-14.3}$	77.6 $^{+14.6}_{-16.4}$	82.1 $^{+12.2}_{-14.0}$	82.6 $^{+12.0}_{-13.4}$	83.2 $^{+11.8}_{-14.0}$
Ω_m	0.32 $^{+0.07}_{-0.08}$	0.36 $^{+0.05}_{-0.05}$	0.28 $^{+0.09}_{-0.08}$	0.35 $^{+0.06}_{-0.06}$	0.26 $^{+0.12}_{-0.11}$	0.36 $^{+0.08}_{-0.09}$
Ω_Λ	0.7 $^{+0.1}_{-0.1}$	0.8 $^{+0.1}_{-0.1}$	0.5 $^{+0.3}_{-0.2}$	0.7 $^{+0.2}_{-0.2}$	0.4 $^{+0.2}_{-0.1}$	0.5 $^{+0.2}_{-0.1}$
Ω_k	-0.1 $^{+0.2}_{-0.2}$	-0.2 $^{+0.1}_{-0.1}$	0.3 $^{+0.3}_{-0.2}$	0.0 $^{+0.3}_{-0.3}$	0.3 $^{+0.3}_{-0.2}$	0.1 $^{+0.3}_{-0.2}$
w_0	-1.5 $^{+0.5}_{-0.8}$	-1.2 $^{+0.3}_{-0.5}$	-1.5 $^{+0.5}_{-0.8}$	-1.3 $^{+0.4}_{-0.6}$
w_a	-0.2 $^{+3.3}_{-2.9}$	-1.5 $^{+2.9}_{-2.3}$
χ^2_{min}	39.1	113.0	38.9	113.0	38.4	112.8
<i>d.o.f.</i>	36	75	35	74	34	73
χ^2_{rid}	1.09	1.51	1.11	1.53	1.13	1.55

Tabella 4.2: Confronto tra i vincoli cosmologici ottenuti dall'analisi congiunta delle candele standard (HD) e delle SNeIa, marginalizzando il *posterior* ricavato tramite il campionamento MCMC. Le incertezze si riferiscono all'intervallo di confidenza al 68% mentre i valori di H_0 sono in unità di km/s/Mpc.

Lo studio degli errori percentuali in Tabella 4.3 rende evidente come la combinazione delle candele standard produca risultati con errori percentuali tendenzialmente minori rispetto all'analisi delle singole candele. Questo è vero qualsiasi parametro si consideri, fatta eccezione per la costante di Hubble e per il parametro di stato w_0 nel caso di una cosmologia fw $_0w_a$ CDM. Per quel che riguarda H_0 , la scarsa precisione con cui viene determinato il vincolo non è fonte di preoccupazione dato che il potere vincolante delle candele standard su questo parametro, è comunque nullo. Nel caso di w_0 , invece, se si osservano i risultati in Tabella 4.2, la minor precisione con cui viene stimato il parametro

può essere ricondotta alla forma distorta della distribuzione di probabilità e dunque ad errori asimmetrici rispetto al *best-fit*. Infatti, l'introduzione di GRB e QSO (con i loro contorni di confidenza particolarmente irregolari e difformi) produce una distorsione del *posterior* ottenuto dalla combinazione HD. Questo non rappresenta un grande ostacolo dato che i risultati ottenuti sono comunque tra loro consistenti.

	f Λ CDM		fwCDM		fw ₀ w _a CDM	
Parametro	SNeIa	HD	SNeIa	HD	SNeIa	HD
H_0	17.6%	18.5%	20.3%	19.1%	18.7%	17.8%
Ω_m	6.7%	6.7%	25.0%	16.7%	29.7%	27.5%
w_0	18.2%	16.7%	18.2%	27.3%
w_a	342.9%	191.7%
	o Λ CDM		owCDM		ow ₀ w _a CDM	
Parametro	SNeIa	HD	SNeIa	HD	SNeIa	HD
H_0	17.6%	19.5%	21.1%	17.1%	16.2%	16.8%
Ω_m	25.0%	13.9%	32.1%	17.1%	46.2%	25.0%
Ω_Λ	14.3%	12.5%	60.0%	28.6%	50.0%	40.0%
Ω_k	200.0%	50.0%	100.0%	–	100.0%	300.0%
w_0	53.3%	41.7%	53.3%	46.2%
w_a	1650.0%	193.3%

Tabella 4.3: Confronto tra gli errori percentuali sui vincoli cosmologici ottenuti analizzando tutte le candele standard (HD) e le SNeIa. Seguiamo il metodo più conservativo: se gli errori non sono simmetrici, si considera l'errore maggiore in valore assoluto.

Le differenze evidenziate trovano una conferma grafica in Figura 4.3.

I punti in arancione rappresentano le osservazioni GRB, per le quali il valore di μ è corretto con ΔM in modo da riprodurre l'andamento delle altre due sonde. Escludendo i QSO (in giallo), sistematicamente al di sotto della curva di *best-fit* (in nero), a basso redshift l'adattamento ai dati osservativi dei vincoli cosmologici viene imposto dalle SNeIa, che ancorano l'andamento di μ . All'aumentare del redshift la dispersione dei residui attorno alla curva di *best-fit* aumenta notevolmente, specie per $z > 4$.

Osservando i contorni di confidenza si evince una generale diminuzione delle incertezze attorno ai valori di *best-fit*, con l'aumento dei valori Ω_m e Ω_Λ che tende a spostare i contorni verso destra se si considerano i piani $\Omega_m - \Omega_\Lambda$, $\Omega_m - w$ e $\Omega_\Lambda - w$.

Concludiamo dunque che la combinazione di tutte le candele standard fornisce vincoli cosmologici più stringenti rispetto al caso delle singole candele ma, al contempo, il ridotto potere vincolante dei dati ad alto redshift (GRB e QSO) non permette di superare le degenerazioni osservate. I risultati sono comunque significativi poiché indicano che, il poter "ancorare" il Diagramma di Hubble tramite le SNeIa, ci consente di andare oltre le forti incertezze riscontrate nell'analisi GRB e QSO. Questo suggerisce che, con tutta probabilità, un ampliamento dei campioni di dati a disposizione che sia in grado di colmare gli intervalli di redshift in cui il numero di osservazioni è particolarmente limitato, potrebbe

ridurre le incertezze riscontrate senza necessitare (per il momento) dell'introduzione di una nuova fisica. La forma particolarmente frastagliata dei contorni di confidenza, indica che in alcuni casi la catena MCMC non abbia ampiamente campionato la superficie del *posterior*. Questo non rappresenta comunque un grosso ostacolo poiché, con un aumento del numero di passi all'interno dello spazio dei parametri, saremo certamente in grado di ottenere contorni migliori qualora sia richiesta un'analisi dettagliata del campione HD.

Risulta perciò evidente la necessita di ulteriori indagini sia osservative che teoriche, approfondendo gli effetti sistematici e di selezione in grado di influenzare negativamente i vincoli cosmologici, specie ad alto z . La combinazione di tutte le candele standard fornisce perciò una prima prova della consistenza e della validità del metodo utilizzato per la combinazione di sonde cosmologiche indipendenti.

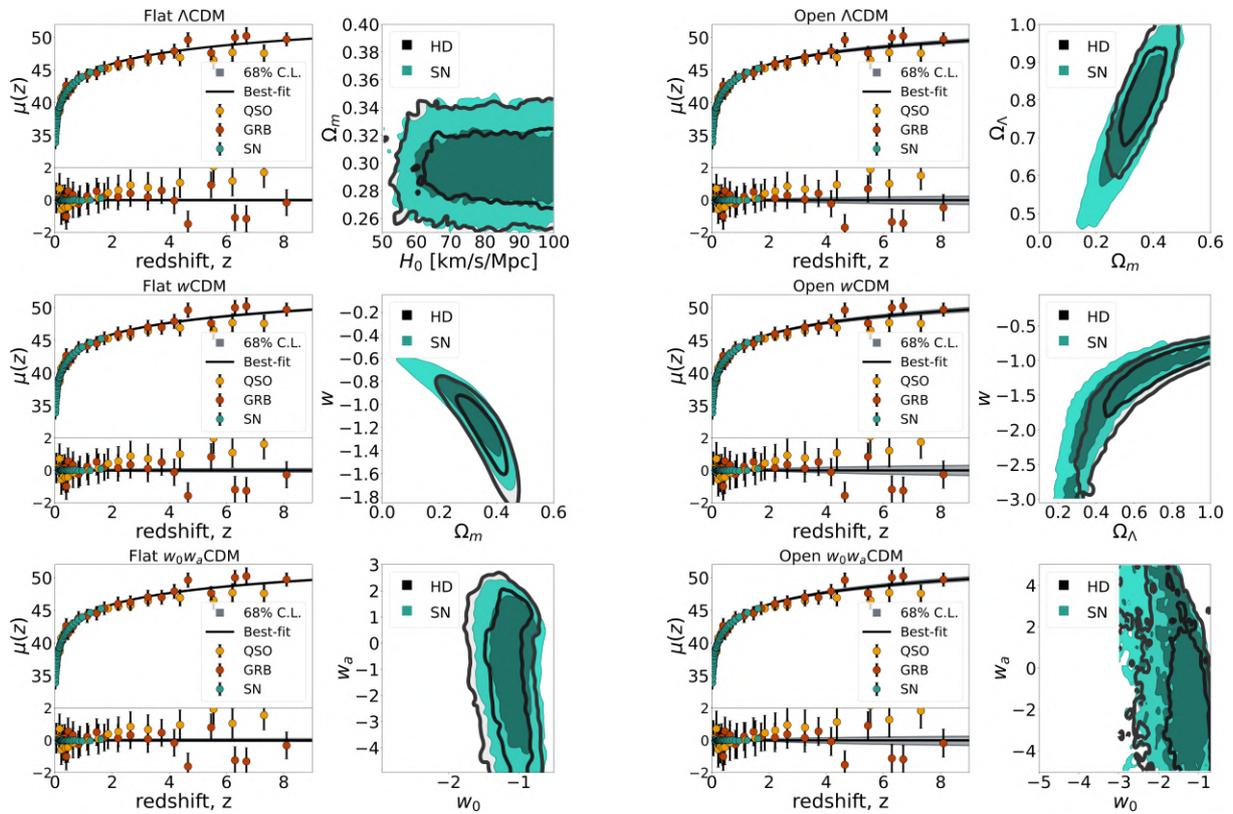


Figura 4.3: Confronto tra le proiezioni dei vincoli cosmologici imposti dalla combinazione di candele standard (HD) e dalle SNeIa. Ogni coppia di pannelli riporta i risultati ottenuti per ciascuna delle cosmologie. Il pannello sinistro mostra l'adattamento dei risultati alle osservazioni, con la curva nera (*best-fit*) che riporta l'andamento di $\mu(z)$ ottenuto dalle stime dei parametri cosmologici in Tabella 4.2. Nella porzione superiore, i punti in blu sono riferiti alla raccolta di osservazioni SNeIa in [108], in giallo la raccolta QSO [152] e in arancione [10]. Nella porzione inferiore vengono mostrati il valore dei residui e la loro deviazione standard, con la regione grigia in ombra che riporta il livello di incertezza al 68% sui vincoli imposti da HD. Il pannello destro mostra i contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura/esterna) e al 95% (regione chiara/interna) ottenuti dall'analisi HD (contorni in nero) e dall'analisi SNeIa (contorni in blu). La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 3.2.

Al contempo, l'analisi HD non fornisce uno strumento in grado di superare le degenerazioni tra i parametri. Inoltre, seppur consistenti con l'ipotesi di curvatura nulla e costante cosmologica Λ , i risultati ottenuti non raggiungono la precisione richiesta per una conferma delle ipotesi cosmologiche oltre un livello di confidenza $\mathcal{O}(10^0)$.

Rimane comunque il mistero dell'appiattimento nella distribuzione ad alto z dei QSO. Infatti, la combinazione di tutte le candele standard riduce sensibilmente le incertezze ad alto redshift, rendendo ancor più sfavorito l'andamento suggerito dalle osservazioni QSO. Data la significatività della deviazione dall'andamento di *best-fit* offerto dall'analisi HD, torneremo ad analizzare questa questione in Sezione 4.2.3.

4.2 Massimizzare le Informazioni sul Tardo Universo

Come già sottolineato, la combinazione di tutte le candele standard richiede un procedimento analogo a quanto fatto inizialmente per le osservazioni BAO. Questo ci spinge a riassumere in tre classi l'insieme delle sonde cosmologiche a disposizione: Oscillazioni Barioniche Acustiche (BAO), Cronometri Cosmici (CC) e Diagramma di Hubble (HD).

L'obiettivo ora è quello di combinare queste tre classi massimizzando la quantità e la qualità delle informazioni estraibili da ciascuna sonda, in modo da ottenere vincoli ancora più stringenti sulla storia evolutiva del cosmo nelle sue fasi più recenti. Il procedimento è sempre lo stesso: calcoliamo la *likelihood* totale e la combiniamo con i prior (Tabella 3.3) per costruire il *posterior* il quale viene poi campionato tramite MCMC (Tabella 3.2). I vincoli cosmologici vengono estratti marginalizzando, rispetto ai singoli parametri, la distribuzione campionata. La *likelihood* totale, al solito, viene calcolata sfruttando la forma logaritmica delle singole *likelihood*, ovvero:

$$\ln\mathcal{L}_{Tot} \propto \ln\mathcal{L}_{BAO} + \ln\mathcal{L}_{CC} + \ln\mathcal{L}_{HD} . \quad (4.2)$$

Andremo dunque ad analizzare nel dettaglio i risultati ottenuti dalla combinazione totale delle sonde cosmologiche a nostra disposizione, confrontandoli con alcuni dei riferimenti classici che è possibile trovare in letteratura, per poi verificare la validità del nostro approccio confrontando l'analisi congiunta con le analisi delle singole sonde. In questo modo è possibile quantificare l'effetto della combinazione totale sulla qualità dei vincoli cosmologici, ponendo dunque le basi per lo studio che verrà affrontato in conclusione.

4.2.1 Vincoli Cosmologici

In Tabella 4.4, per ciascuna cosmologia, riportiamo i vincoli ottenuti dalla combinazione di tutte le sonde cosmologiche a disposizione. È evidente come, ad una prima analisi qualitativa, questo procedimento produca una stima dei parametri cosmologici consistente con quanto ottenuto per le singole sonde, con una sensibile riduzione delle incertezze. La forza e le potenzialità del metodo di combinazione diventano particolarmente evidenti considerando i parametri di densità Ω_m e Ω_Λ , ed il parametro di stato w_0 .

Mentre l'analisi delle singole sonde ha prodotto stime dei parametri approssimative che, in alcuni casi, mostravano incertezze dello stesso ordine di grandezza della misura, la combinazione totale riduce sensibilmente le incertezze non subendo (apparentemente) gravi conseguenze rispetto all'aumento di dimensionalità. Questa considerazione vale qualsiasi cosmologia si consideri, con alcuni casi in cui l'incertezza sulla stima del parametro viene ridotta anche di un ordine di grandezza, come ad esempio il parametro Ω_m per cosmologie *open*, il parametro Ω_Λ nel caso di una cosmologia Λ CDM oppure il parametro

w_0 se si considera la cosmologia fw CDM.

Da una analisi qualitativa della distribuzione del χ^2 (Tabella 4.4) è possibile evincere come il valore del χ^2_{min} risulti approssimativamente equivalente al numero di gradi di libertà, per ciascuna cosmologia in analisi. Un valore medio di $\chi^2_{rid} \sim 1.14$ permette dunque di affermare con discreta sicurezza che il campionamento MCMC individui correttamente la regione di massima probabilità nello spazio dei parametri.

Un'ulteriore considerazione degna di nota riguarda la simmetria degli intervalli di confidenza attorno al 50° percentile. È infatti possibile notare come, per cosmologie $f\Lambda$ CDM, $o\Lambda$ CDM e fw CDM, gli errori sulle misure di tutti i parametri siano perfettamente simmetrici (entro l'approssimazione delle cifre significative), segno di distribuzioni di probabilità più gaussiane. La simmetria inizia a venire meno con il rilassamento dell'ipotesi di piattezza per cosmologie w CDM. L'introduzione del parametro Ω_Λ , infatti, fornisce le prime evidenze della degenerazione tra i parametri di densità ed i parametri di stato, le cui conseguenze possono essere osservate nell'accentuata asimmetria degli errori sulle misure di Ω_Λ e w_0 . Questa degenerazione appare ancor più chiara analizzando le misure di Ω_m , Ω_Λ , w_0 e w_a nel caso di cosmologie w_0w_a CDM.

Parametro	$f\Lambda$ CDM	$o\Lambda$ CDM	fw CDM	ow CDM	fw_0w_a CDM	ow_0w_a CDM
H_0	$69.4^{+3.2}_{-3.2}$	$69.7^{+3.3}_{-3.2}$	$69.4^{+3.2}_{-3.3}$	$69.8^{+3.3}_{-3.2}$	$69.2^{+3.2}_{-3.1}$	$69.4^{+3.5}_{-3.3}$
Ω_m	$0.29^{+0.01}_{-0.01}$	$0.31^{+0.03}_{-0.03}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$0.32^{+0.03}_{-0.04}$	$0.26^{+0.04}_{-0.08}$	$0.28^{+0.05}_{-0.07}$
Ω_Λ	...	$0.76^{+0.07}_{-0.07}$...	$0.81^{+0.11}_{-0.13}$...	$0.79^{+0.12}_{-0.15}$
Ω_k	...	$-0.07^{+0.11}_{-0.11}$...	$-0.1^{+0.1}_{-0.2}$...	$-0.1^{+0.2}_{-0.2}$
w_0	$-1.00^{+0.07}_{-0.07}$	$-0.94^{+0.07}_{-0.1}$	$-0.98^{+0.09}_{-0.09}$	$-0.96^{+0.09}_{-0.14}$
w_a	$0.6^{+0.5}_{-0.8}$	$0.4^{+0.6}_{-0.8}$
χ^2_{min}	138.3	137.9	138.3	136.9	137.6	136.6
<i>d.o.f.</i>	122	121	121	120	120	119
χ^2_{rid}	1.13	1.14	1.14	1.14	1.15	1.15

Tabella 4.4: Vincoli cosmologici ottenuti dalla combinazione totale delle sonde cosmologiche (BAO+CC+HD). Le incertezze si riferiscono all'intervallo di confidenza al 68% mentre i valori di H_0 sono in unità di km/s/Mpc.

Ad ogni modo, questa analisi fornisce un insieme di parametri cosmologici consistente con i risultati ottenuti dall'analisi della CMB da parte della collaborazione Planck [5]. In particolare, nel caso di una cosmologia $f\Lambda$ CDM:

$$[\text{Planck 2018}] \quad H_0 = 67.36 \pm 0.54 \text{ km/s/Mpc} ; \quad \Omega_m = 0.3153 \pm 0.0073$$

$$[\text{Questo Studio}] \quad H_0 = 69.4 \pm 3.2 \text{ km/s/Mpc} ; \quad \Omega_m = 0.292 \pm 0.014$$

dove tutti gli errori sono riportati ad un livello di confidenza del 68% ed i valori di Planck si riferiscono alla combinazione TT, TE, EE+lowE+lensing. Seppur la precisione dei vincoli ottenuti dalle osservazioni CMB risulti maggiore, sottolineiamo come la nostra analisi, completamente basata su una analisi del Tardo Universo, produca dei valori consistenti con quanto ottenuto dall'analisi dell'Universo primordiale (con una minima deviazione del parametro Ω_m che rientra se si considero le incerte al 95%).

Il risultato ottenuto per il parametro di densità della materia Ω_m sottolinea dunque come un approfondimento ed una estensione della combinazione di più sonde cosmologiche del Tardo Universo sia in grado di raggiungere la precisione ottenuta dalle osservazioni CMB che, ad oggi, rappresenta il miglior risultato disponibile in letteratura.

Sempre in riferimento ai risultati Planck [5], mostriamo il confronto tra i vincoli cosmologici ottenuti sul parametro w per una cosmologia fw CDM:

$$\begin{aligned} [\text{Planck 2018}] \quad w &= -1.028 \pm 0.031 \\ [\text{Questo Studio}] \quad w &= -1.00 \pm 0.07 \end{aligned}$$

dove tutti gli errori sono riportati ad un livello di confidenza del 68%. Poiché le osservazioni dell'Universo primordiale non sono sensibili ai parametri di stato dell'energia oscura, i risultati Planck in questo caso si riferiscono alla combinazione della CMB con le osservazioni del Tardo Universo SNeIa e BAO, ossia: TT, TE, EE+lowE+lensing+SNeIa+BAO. In questo caso le incertezze sono confrontabili, con i vincoli Planck che offrono una precisione maggiore ($\sim 3\%$) rispetto alla nostra analisi ($\sim 7\%$). Pur basando il nostro studio unicamente sull'analisi del Tardo Universo, è interessante notare come con la combinazione delle principali sonde cosmologiche (SNeIa, BAO) ed alcune delle sonde più innovative (CC, GRB, QSO), l'incertezza aumenti solamente di un fattore ~ 2 rispetto ai risultati prodotti dalla combinazione della CMB con le principali sonde del Tardo Universo SNeIa e BAO. Notevole inoltre il fatto che la nostra analisi, più sensibile al parametro w rispetto alla sola analisi della CMB, produca un vincolo simmetrico attorno a $w = -1$.

Dal confronto dei risultati ottenuti per una cosmologia fw_0w_a CDM, otteniamo:

$$\begin{aligned} [\text{Planck 2018}] \quad w_0 &= -0.957 \pm 0.080 \quad ; \quad w_a = -0.29_{-0.26}^{+0.32} \\ [\text{Questo Studio}] \quad w_0 &= -0.98 \pm 0.09 \quad ; \quad w_a = 0.6_{-0.8}^{+0.5} \end{aligned}$$

anche in questo caso tutti gli errori sono riportati ad un livello di confidenza del 68% ed i risultati Planck si riferiscono alla combinazione della CMB con le osservazioni del Tardo Universo SNeIa (Pantheon) e BAO (misure D_V/r_d contenute anche nei nostri dati), ossia: TT, TE, EE+lowE+lensing+SNeIa+BAO.

Notevole la sostanziale equivalenza tra le precisioni delle due analisi sul vincolo di w_0 , mentre entrambe non sono in grado di fornire un risultato informativo sul parametro w_a . Per quel che riguarda quest'ultimo parametro, il nostro risultato appare significativamente spostato verso valori positivi rispetto all'analisi della missione Planck perciò, in prospettiva, diventa interessante capire se sia un particolare tipo di sonda ad imporre tale vincolo.

Indipendentemente da quanto riportato in letteratura, considerando i risultati ottenuti con il minor numero di assunzioni possibili (ovvero dall'analisi del modello ow_0w_a CDM) le misure ottenute dalla combinazione di BAO, CC e HD, mostrano una consistenza con il paradigma Λ CDM, seppur questa non sia sempre statisticamente soddisfacente:

$$H_0 = 69.4_{-3.3}^{+3.5} \quad ; \quad \Omega_m = 0.28_{-0.07}^{+0.05} \quad ; \quad \Omega_\Lambda = 0.79_{-0.15}^{+0.12} \quad ;$$

$$\Omega_k = -0.1_{-0.2}^{+0.2} \quad ; \quad w_0 = -0.96_{-0.14}^{+0.09} \quad ; \quad w_a = 0.4_{-0.8}^{+0.6} \quad .$$

L'elevata dimensionalità dello spazio dei parametri non consente, in questo caso, di ottenere una stima precisa di tutti i parametri cosmologici. Va comunque sottolineato che, rispetto alla letteratura odierna, questa analisi rappresenta una delle più accurate misure dei parametri cosmologici per cosmologie dalla così elevata dimensionalità.

Per concludere il confronto con quanto ottenuto in letteratura, riportiamo di seguito un'analisi comparata tra i nostri risultati e quanto ottenuto dalle analisi di riferimento per il campione Pantheon (SNeIa). In [104], considerando una cosmologia Λ CDM, il campione di SNeIa viene combinato con le osservazioni CMB ed un insieme di osservazioni BAO (con l'ausilio di un prior su H_0 dalle misure locali SH0ES [209]), da cui:

$$[\text{Jones 2018}] \quad \Omega_m = 0.303 \pm 0.007 ; \Omega_\Lambda = 0.694 \pm 0.008$$

$$[\text{Questo Studio}] \quad \Omega_m = 0.31 \pm 0.03 \quad ; \Omega_\Lambda = 0.76 \pm 0.07$$

dove è evidente la discrepanza nella precisione a favore della letteratura. Tuttavia, sottolineiamo come i loro risultati siano ottenuti dalla combinazione con le osservazioni CMB le quali, rompendo la degenerazione con il parametro di curvatura, offrono vincoli molto precisi sui parametri di densità. Inoltre, l'utilizzo di un prior gaussiano su H_0 pone forti restrizioni alle degenerazioni tra la costante di Hubble ed i parametri di densità.

La stessa combinazione di sonde, per una cosmologia fw CDM, restituisce:

$$[\text{Jones 2018}] \quad \Omega_m = 0.299 \pm 0.008 ; w = -1.045 \pm 0.045$$

$$[\text{Questo Studio}] \quad \Omega_m = 0.292 \pm 0.018 ; w = -1.00 \pm 0.07$$

dove la combinazione con la CMB produce su Ω_m gli stessi effetti già riscontrati.

Il maggior potere vincolante della nostra analisi rispetto ai parametri di stato dell'energia oscura, diventa evidente se si considera la cosmologia fw_0w_a CDM:

$$[\text{Jones 2018}] \quad w_0 = -0.972 \pm 0.102 ; w_a = -0.372 \pm 0.452$$

$$[\text{Questo Studio}] \quad w_0 = -0.98 \pm 0.09 \quad ; w_a = 0.6_{-0.8}^{+0.5}$$

dove la nostra analisi conduce ad un vincolo più stringente su w_0 , con l'incertezza su w_a che rimane comunque elevata. Gli errori sono sempre riferiti ad una confidenza del 68%.

L'altra referenza quando si analizza il campione Pantheon è rappresentata da [6], dove viene proposta una interessante analisi che combina progressivamente le diverse sonde cosmologiche già esaminate in [104]. In Figura 4.4, le proiezioni sul piano $\Omega_m - w$ dei vincoli ottenuti per una cosmologia fw CDM dallo studio in [6] e dalla nostra analisi, ci danno la possibilità di fare alcune considerazioni che introducono lo studio seguente.

La prima cosa che può essere notata da questo confronto è il limite inferiore molto più stringente che la nostra combinazione di SNeIa, GRB e QSO (HD) produce rispetto a quanto ottenuto in [6] per la densità di materia Ω_m nel caso SNeIa.

Considerando le combinazioni CMB+BAO e SN+CMB possiamo nuovamente notare come i vincoli cosmologici imposti dalla nostra analisi del Tardo Universo siano estremamente competitivi rispetto all'analisi combinata di sonde cosmologiche del Tardo Universo e dell'Universo primordiale:

$$[\text{Scolnic '18 (CMB+BAO)}] \quad \Omega_m = 0.312 \pm 0.013 ; w = -0.991 \pm 0.074$$

$$[\text{Scolnic '18 (SN+CMB)}] \quad \Omega_m = 0.307 \pm 0.012 ; w = -1.026 \pm 0.041$$

$$[\text{Questo Studio}] \quad \Omega_m = 0.292 \pm 0.018 ; w = -1.00 \pm 0.07$$

Il nostro risultato acquisisce ulteriore valore se si osservano i contorni di confidenza relativi ai vincoli ottenuti tramite la CMB.

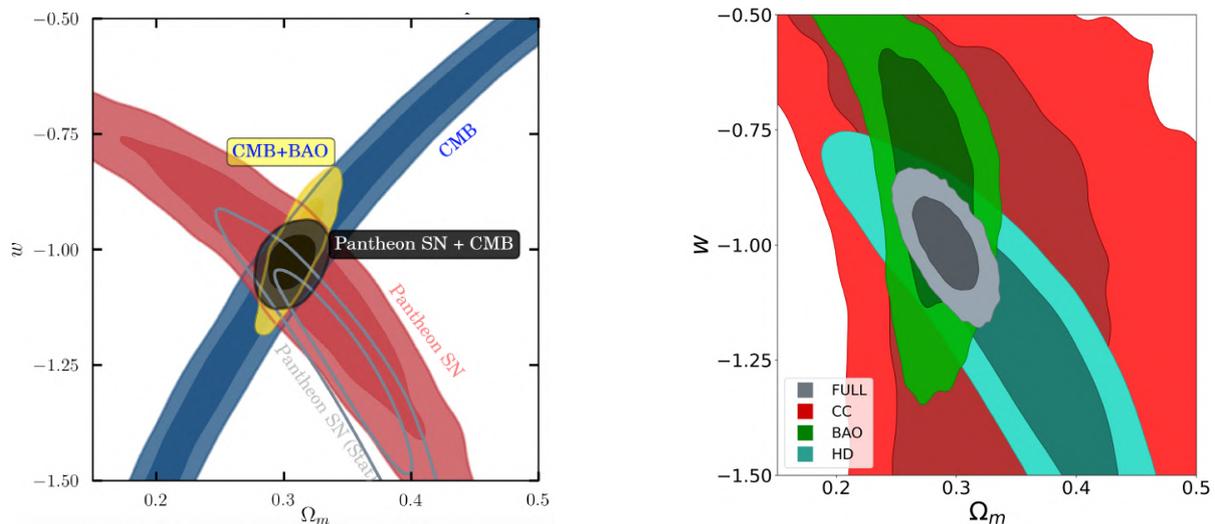


Figura 4.4: Confronto sul piano $\Omega_m - w$ tra i risultati ottenuti in [6] (Pannello sinistro) e la nostra analisi (Pannello destro). Considerando una cosmologia fw CDM, nel pannello sinistro (preso da [6]) vengono mostrate diverse combinazioni di sonde del Tardo Universo con osservazioni CMB (in blu). Troviamo BAO+CMB (in giallo), SNeIa+CMB (in nero) e SNeIa (in rosso). Nel pannello destro riportiamo i risultati della nostra analisi per le sonde BAO (in verde), CC (in rosso), HD (in blu) e la loro combinazione completa BAO+CC+HD (in grigio).

Questi infatti mostrano una direzione di degenerazione estremamente perpendicolare rispetto alle SNeIa ed è dunque ovvio come una loro combinazione produca una drastica riduzione per gli intervalli di possibili valori dei parametri, come è possibile osservare dai contorni in nero. È perciò intuitivo immaginare la precisione che la nostra analisi potrebbe raggiungere se combinata con l'analisi della CMB.

Il punto su cui si vuole porre l'accento è però un altro: l'ortogonalità tra le degenerazioni segna inequivocabilmente la via da seguire per raggiungere vincoli sempre più precisi ed accurati. È proprio da questa considerazione che partirà il nostro studio conclusivo.

Quanto detto finora sulla precisione della nostra analisi, assume un significato più quantitativo analizzando la variazione degli errori percentuali in Tabella 4.5.

Le misure della costante di Hubble riportano una precisione $< 5\%$, indipendentemente dal modello cosmologico considerato. Assumendo una cosmologia standard, la stima sulla densità di materia Ω_m raggiunge una precisione considerevole che non è però mantenuta costante all'aumentare delle dimensioni dello spazio dei parametri, raggiungendo valori del 25 – 30% a causa della degenerazione evidenziata con il parametro di densità Ω_Λ ed i parametri di stato w_0 e w_a . Notevole inoltre l'aumento di precisione nella stima di w_0 e Ω_Λ , le cui incertezze percentuali risultano cospicuamente ridotte rispetto all'analisi delle singole sonde, portando a valori dell'ordine di $\sim 7\%$ (fw CDM) e $\sim 9\%$ ($o\Lambda$ CDM), rispettivamente. Anche se meno significativo da un punto di vista statistico, è interessante notare come i parametri che non venivano vincolati dalle singole sonde, come il parametro di curvatura Ω_k ed il parametro di stato w_a , vengano invece inferti con una precisione tale da restringere sensibilmente l'intervallo delle possibili soluzioni.

Concludiamo con alcune considerazioni sulle problematiche del panorama cosmologico moderno. Nel nostro processo di inferenza, la precisione sulla costante di Hubble non è paragonabile con le misure che hanno evidenziato l'attuale tensione (Planck [5] e SH0ES [67]). Per ora, dunque, la risoluzione della tensione non è alla portata della nostra analisi.

	f Λ CDM				o Λ CDM			
Parametro	BAO	CC	HD	FULL	BAO	CC	HD	FULL
H_0	7.4%	8.1%	18.5%	4.6%	7.5%	8.8%	19.5%	4.7%
Ω_m	6.9%	23.5%	6.7%	3.4%	29.2%	50.0%	13.9%	9.7%
Ω_Λ	33.3%	50.0%	12.5%	9.2%
Ω_k	150.0%	500.0%	50.0%	100.0%
	f w CDM				o w CDM			
Parametro	BAO	CC	HD	FULL	BAO	CC	HD	FULL
H_0	7.6%	13.4%	19.1%	4.8%	8.0%	12.6%	17.1%	4.7%
Ω_m	10.7%	25.8%	16.7%	6.9%	55.6%	69.6%	17.1%	12.5%
Ω_Λ	75.0%	60.0%	28.6%	12.5%
Ω_k	100.0%	133.3%	–	200.0%
w	25.0%	57.1%	16.7%	7.0%	90.9%	56.2%	41.7%	10.6%
	f w_0w_a CDM				o w_0w_a CDM			
Parametro	BAO	CC	HD	FULL	BAO	CC	HD	FULL
H_0	8.8%	13.8%	17.8%	4.6%	7.7%	13.6%	16.8%	5.0%
Ω_m	21.9%	30.3%	27.5%	30.8%	75.0%	81.0%	25.0%	25.0%
Ω_Λ	50.0%	60.0%	40.0%	12.5%
Ω_k	80.0%	133.3%	300.0%	200.0%
w_0	83.3%	60.0%	27.3%	9.2%	100.0%	52.9%	46.2%	14.6%
w_a	161.5%	290.0%	191.7%	133.3%	270.0%	320.0%	193.3%	200.0%

Tabella 4.5: Confronto tra gli errori percentuali sui vincoli cosmologici ottenuti dalla combinazione totale delle sonde cosmologiche (FULL) e dall’analisi delle singole sonde (BAO, CC, HD). Il calcolo segue il metodo piú conservativo: quando gli errori non sono simmetrici, si considera l’errore maggiore in valore assoluto.

Al contempo, aver combinato cinque sonde cosmologiche del Tardo Universo ($0 < z < 9$) ed aver ottenuto, in maniera completamente indipendente, un risultato consistente con quanto osservato nell’Universo primordiale, rappresenta un ottimo fondamento su cui costruire metodi sempre piú accurati ed efficienti per raggiungere un’accuratezza nelle stime dei parametri cosmologici tale da porre una parola conclusiva sulle questioni cosmologiche ancora aperte. Cosí come osservato per H_0 , la nostra analisi non possiede ancora una precisione tale da poter dedurre considerazioni degne di nota per ciò che riguarda l’assunzione di piattezza. Allo stesso tempo, la precisione raggiunta sul parametro w per una cosmologia $f w$ CDM, ci permette di affermare la validità dell’assunzione di costante cosmologica Λ con $w = -1$ ad un significativo livello di confidenza dell’ordine di $\mathcal{O}(10^{-1})$, con una distribuzione di probabilità spiccatamente gaussiana attorno al massimo.

4.2.2 Consistenza e Miglioramento dei Vincoli

Come già osservato in Figura 4.4, è possibile esplicitare gli effetti della combinazione sovrapponendo, alle proiezioni dei singoli vincoli di CC, BAO e HD, le proiezioni ricavate dalla loro combinazione BAO+CC+HD.

Per i CC in Figura 4.5, l'effetto della combinazione sulla cosmologia Λ CDM, oltre alla riduzione delle incertezze, è quello di allentare significativamente la degenerazione $H_0 - \Omega_m$ con i contorni in grigio che mostrano un andamento più parallelo alle ascisse rispetto al caso dei CC. Per le altre cosmologie, la combinazione riduce enormemente i contorni di confidenza ma le degenerazioni parametriche persistono.

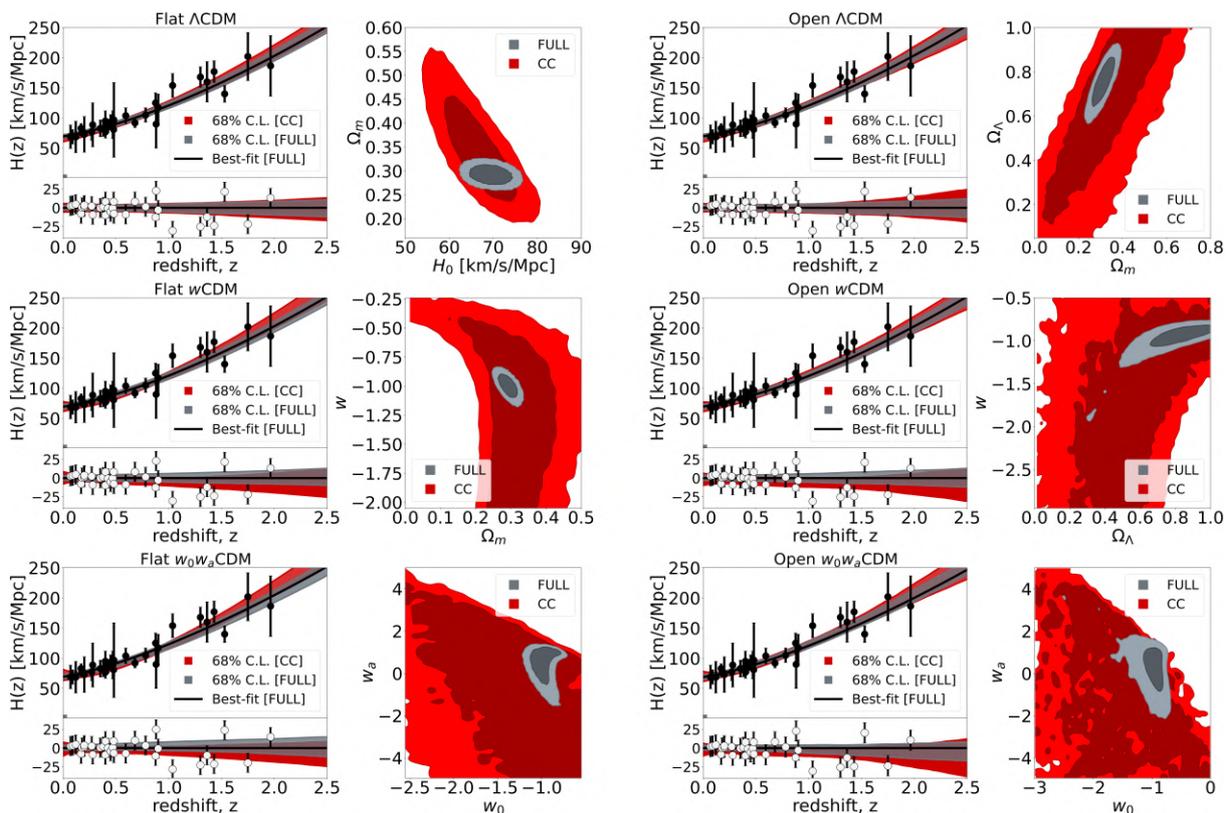


Figura 4.5: Confronto tra le proiezioni dei vincoli cosmologici imposti dalla combinazione totale delle sonde cosmologiche (FULL) e dai CC. Ogni coppia di pannelli riporta i risultati ottenuti per ciascuna delle cosmologie. Il pannello sinistro mostra l'adattamento (*best-fit*) dei risultati alle osservazioni, con la curva nera che riporta l'andamento di $H(z)$ ottenuto dall'analisi FULL (Tabella 4.4). La regione grigia in ombra riporta il livello di incertezza al 68% sui vincoli imposti da FULL, mentre in rosso (per confronto) viene riportata l'incertezza relativa all'analisi CC. Nella porzione superiore, i punti in nero sono riferiti alla raccolta di osservazioni CC in [87]. Nella porzione inferiore vengono mostrati il valore dei residui e la loro deviazione standard. Il pannello sulla destra mostra i contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura) e al 95% (regione chiara) ottenuti dall'analisi FULL (contorni in grigio) e dall'analisi CC (contorni in rosso). La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 3.2.

Dal confronto con le BAO (Figura 4.6) notiamo come in alcuni casi l'elevata precisione di tale sonda, renda meno evidenti gli effetti della combinazione. Infatti, specie sul piano $H_0 - \Omega_m$, l'estensione dei due contorni risulta pressoché equivalente, con la combinazione FULL (in grigio) più stringente attorno al valore di *best-fit*. Degna di nota è inoltre la variazione nella forma dei contorni: mentre per le BAO la forma particolarmente squadrata suggerisce una distribuzione simil-gaussiana troncata; combinando tutte le sonde, la forma dei contorni suggerisce una distribuzione gaussiana con un picco ben definito. Sugli altri piani, l'effetto combinatorio è quello di ridurre sensibilmente l'estensione dei contorni di confidenza, specie considerando le dimensionalità maggiori (*ow*CDM, *fw*₀*w*_aCDM e *ow*₀*w*_aCDM), senza che vengano però risolte le degenerazioni presenti. Questo effetto è massimo sul piano $w_0 - w_a$ (*ow*₀*w*_aCDM), mentre le degenerazioni sono particolarmente evidenti nel caso *ow*CDM, dove l'orientazione pressoché parallela alle ascisse non permette di ottenere una precisione significativa per Ω_Λ . Al contempo, la combinazione totale aumenta decisamente il vincolo su w .

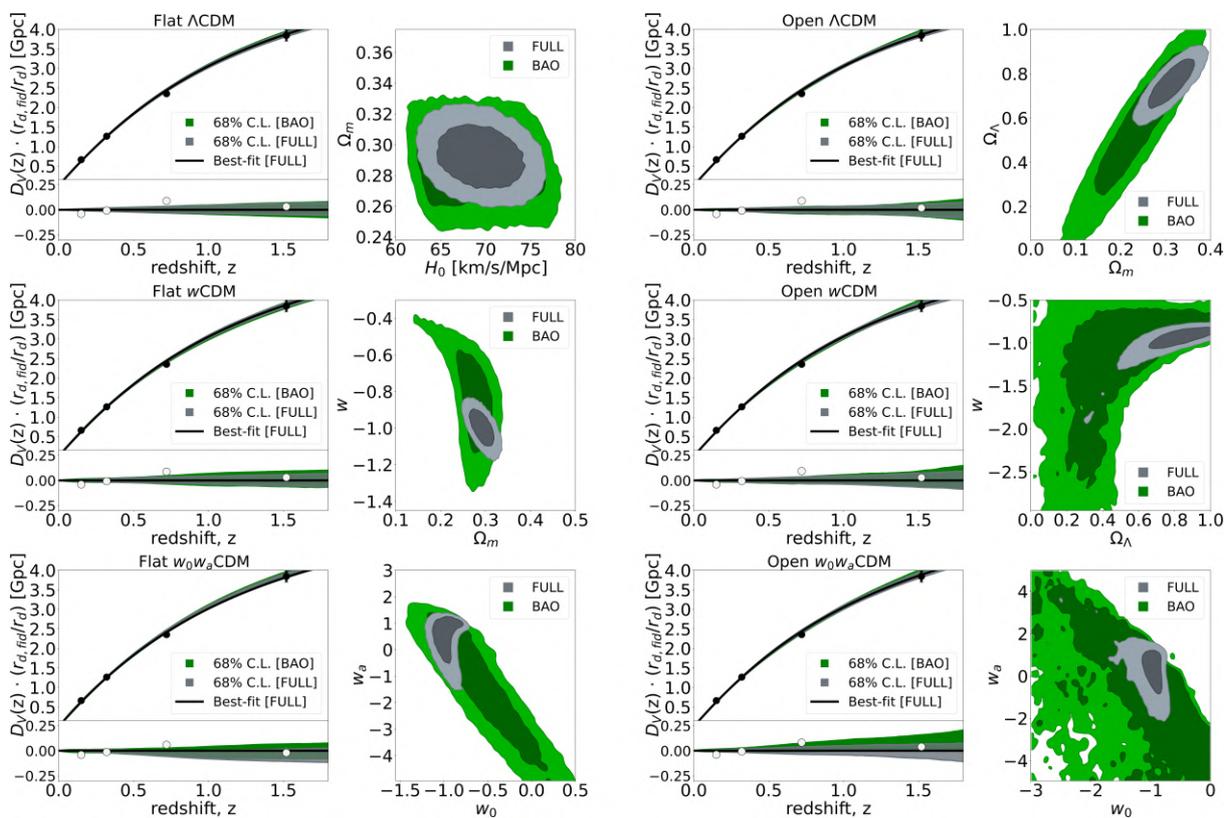


Figura 4.6: Confronto tra le proiezioni dei vincoli cosmologici imposti dalla combinazione totale delle sonde cosmologiche (FULL) e dalle BAO. Ogni coppia di pannelli riporta i risultati ottenuti per ciascuna delle cosmologie. Il pannello sinistro mostra l'adattamento (*best-fit*) dei risultati alle osservazioni, con la curva nera che riporta l'andamento di $D_V(z)$ ottenuto dall'analisi FULL (Tabella 4.4). La regione grigia in ombra riporta il livello di incertezza al 68% sui vincoli imposti da FULL, mentre in verde (per confronto) viene riportata l'incertezza relativa all'analisi BAO. Nella porzione superiore, i punti in nero riportano la raccolta di osservazioni BAO in [7]. Nella porzione inferiore mostriamo il valore dei residui e la loro deviazione standard. Il pannello destro mostra i contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura) e al 95% (regione chiara) ottenuti dall'analisi FULL (contorni in grigio) e dall'analisi BAO (contorni in verde). La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 3.2.

Il confronto con i risultati ottenuti dalla combinazione HD (Figura 4.7), rende invece evidente il fatto che, per cosmologie Λ CDM e ow CDM, sia proprio HD a dominare il processo di inferenza quando la combinazione comprende tutte le sonde.

Nel caso Λ CDM, l'estensione dei contorni di confidenza in grigio (FULL) risulta infatti di poco inferiore rispetto ai contorni in blu (HD), mentre nel caso di BAO e CC questa differenza è molto più marcata, con i contorni in grigio che occupano una porzione minima dei rispettivi contorni (in verde ed in rosso). Questo significa che la differenza nella precisione è minima quando le misure sono ottenute dalla combinazione FULL o dalla combinazione HD.

Lo stesso ragionamento vale per la cosmologia ow CDM, dove sono proprio le misure HD ad identificare in maniera chiara la direzione di degenerazione $\Omega_\Lambda - w$. D'altra canto, come già osservato, la combinazione di tutte le sonde cosmologiche diventa determinante nella misura di H_0 , su cui le candele standard non offrono alcun potere predittivo.

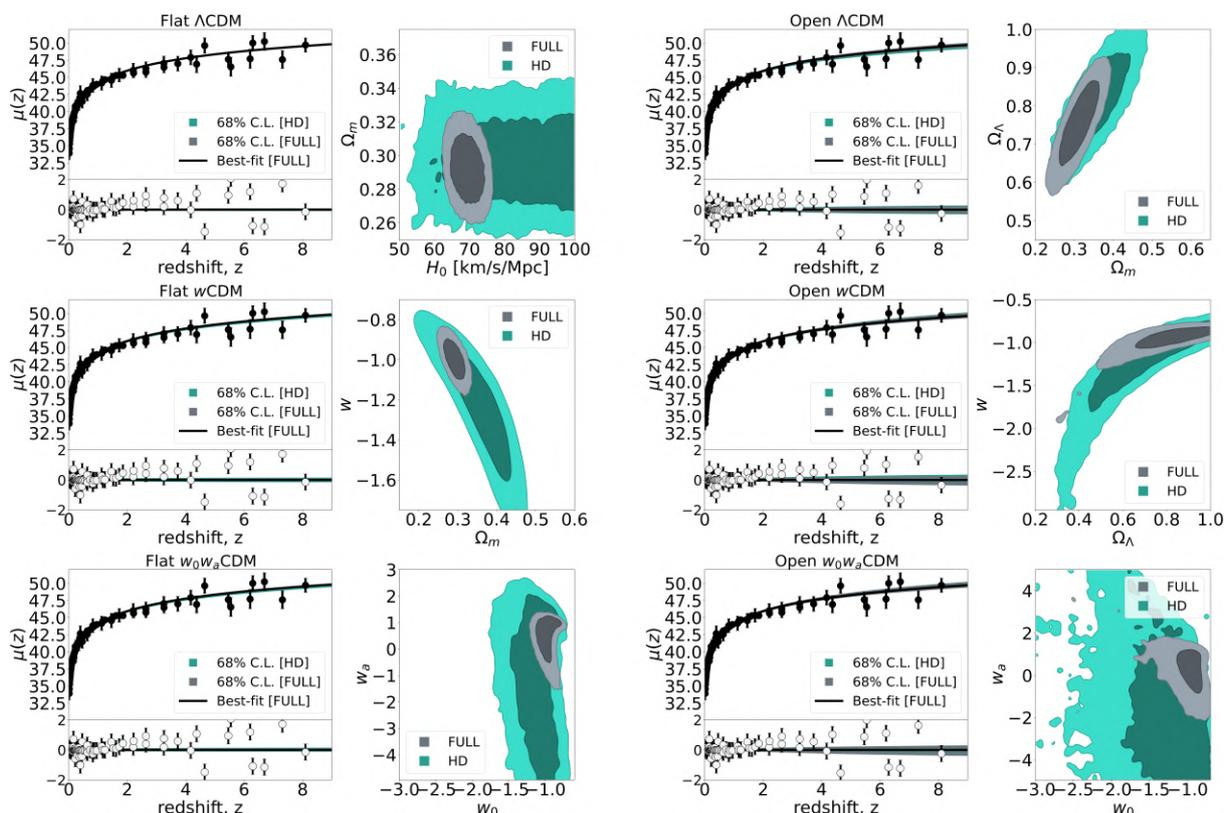


Figura 4.7: Confronto tra le proiezioni dei vincoli cosmologici imposti dalla combinazione totale delle sonde cosmologiche (FULL) e dai HD. Ogni coppia di pannelli riporta i risultati ottenuti per ciascuna delle cosmologie. Il pannello sinistro mostra l'adattamento (*best-fit*) dei risultati alle osservazioni, con la curva nera che riporta l'andamento di $\mu(z)$ ottenuto dall'analisi FULL (Tabella 4.4). La regione grigia in ombra riporta il livello di incertezza al 68% sui vincoli imposti da FULL, mentre in blu (per confronto) viene riportata l'incertezza relativa all'analisi HD. Nella porzione superiore, i punti in nero sono riferiti alle raccolte combinate per ottenere la sonda HD, ovvero osservazioni SNeIa in [108], osservazioni QSO [152] ed osservazioni GRB [10]. Nella porzione inferiore vengono mostrati il valore dei residui e la loro deviazione standard. Il pannello sulla destra mostra i contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura) e al 95% (regione chiara) ottenuti dall'analisi FULL (contorni in grigio) e dall'analisi HD (contorni in blu). La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 3.2.

In tutti i casi esaminati, osservando la proiezione dei risultati nello spazio dei dati, possiamo evincere la consistenza tra la combinazione FULL e le singole sonde. Qualsiasi sia l'osservabile considerato, il *best-fit* della combinazione FULL (curva nera) è sempre contenuto all'interno delle incertezze ottenute per le singole sonde. Al contempo, la combinazione mostra un intervallo di incertezza significativamente ridotto attorno al *best-fit*, con la differenza che diventa più evidente osservando i residui. Per tutte le sonde, l'adattamento tra la distribuzione dei dati ed il risultato dell'inferenza risulta particolarmente elevato, specie a basso z , con la dispersione dei residui che tende ad aumentare con z . Per quel che riguarda la relazione tra la forma dei contorni di confidenza e la simmetria dell'intervallo di incertezza attorno al *best-fit*, osserviamo come la combinazione FULL produca, in generale, contorni di confidenza maggiormente concentrici rispetto a quanto ottenuto per le singole sonde. Questa proprietà si riflette poi in una accentuata simmetria della distribuzione di incertezza attorno al *best-fit*.

Otteniamo dunque una importante conferma di alcune conclusioni dedotte in precedenza: a differenza di quanto osservato nell'analisi delle singole sonde, il *posterior* costruito tramite la *likelihood* totale (4.2) risulta pressoché gaussiano, con alcune deviazioni (a seconda della cosmologia considerata) dovute alla presenza di forti degenerazioni. Come dovrebbe essere oramai chiaro, la gaussianità è un requisito fondamentale dei *posterior* che favorisce l'accuratezza del campionamento MCMC ed aumenta la precisione nella stima dei parametri cosmologici. Basta confrontare le incertezze percentuali in Tabella 4.5 tra le misure di H_0 e Ω_m (Λ CDM) ed una qualsiasi altra coppia di parametri, per rendersi conto di come la presenza di una degenerazione renda i contorni di confidenza maggiormente ellissoidali, con una conseguente deformazione della distribuzione di probabilità ed una diminuzione della precisione sui parametri cosmologici inferti.

Questa osservazione non è di certo una nuova scoperta in ambito statistico ma, il ragionamento che ne consegue, pone le basi per lo studio successivo.

4.2.3 Una Nuova Fisica dietro i Quasars?

Prima di passare alla definizione del metodo analitico per la quantificazione delle sinergie tra sonde cosmologiche, dedichiamo l'ultima parte di questa sezione all'approfondimento dell'apparente deviazione delle osservazioni QSO [9] dal paradigma standard Λ CDM.

Dall'analisi dei risultati ottenuti combinando la totalità di sonde cosmologiche a disposizione in Sezione 4.2.1, si è potuto evincere come tutte le stime sui parametri cosmologici (al variare della cosmologia) sembrano riprodurre in maniera consistente il modello cosmologico standard. Questo, ovviamente, si riflette in un andamento di *best-fit* degli osservabili che rimane sostanzialmente costante al variare delle cosmologie.

In Figura 4.8, mostriamo i vincoli cosmologici ottenuti dall'analisi combinata (FULL) proiettati nello spazio delle osservazioni QSO (punti in nero) e li confrontiamo con i risultati ottenuti dall'analisi QSO presi singolarmente, discussa precedentemente in Sezione 2.1.4. Come già osservato in [9], mentre a basso redshift i dati risultano in accordo con il modello standard, il campione di dati mostra una deviazione significativa dall'andamento standard Λ CDM per $z > 1.5$. Osservando i risultati ottenuti per le cosmologie *flat* (colonna sinistra), notiamo come le due analisi (FULL e QSO) forniscano dei risultati tra loro consistenti solamente nel caso di ipotesi particolarmente stringenti (Λ CDM). Viceversa, questa consistenza svanisce invece all'aumentare delle dimensioni del modello.

Sottolineiamo nuovamente che, nel caso di una cosmologia Λ CDM, l'apparente consistenza tra i vincoli cosmologici produce comunque una deviazione significativa dei dati osservativi, segno che il modello non riproduce l'andamento dei dati per $z > 1.5$. La distribuzione dei dati per $z > 2$ è sistematicamente al di sotto del *best-fit* ottenuto dalla combinazione FULL, con l'intervallo di incertezza riferito all'analisi QSO (regione in blu) che mostra una tendenza verso μ minori man mano che le assunzioni sull'equazione di stato dell'energia oscura diventano meno stringenti (Λ CDM \rightarrow $f w_0 w_a$ CDM). Se lasciamo il parametro Ω_k libero di variare, osservando i risultati per le cosmologie *open* (colonna destra), possiamo notare che gli andamenti di $\mu(z)$, ricavati dalle due diverse analisi, mostrano una deviazione significativa proprio per $z > 2$. All'aumentare della complessità dell'equazione di stato dell'energia oscura (Λ CDM \rightarrow $o\Lambda$ CDM \rightarrow $ow_0 w_a$ CDM), la deviazione risulta sempre più consistente, con il *best-fit* dei QSO (linea nera tratteggiata con contorni di incertezza in blu) che riproduce sempre meglio la distribuzione dei dati.

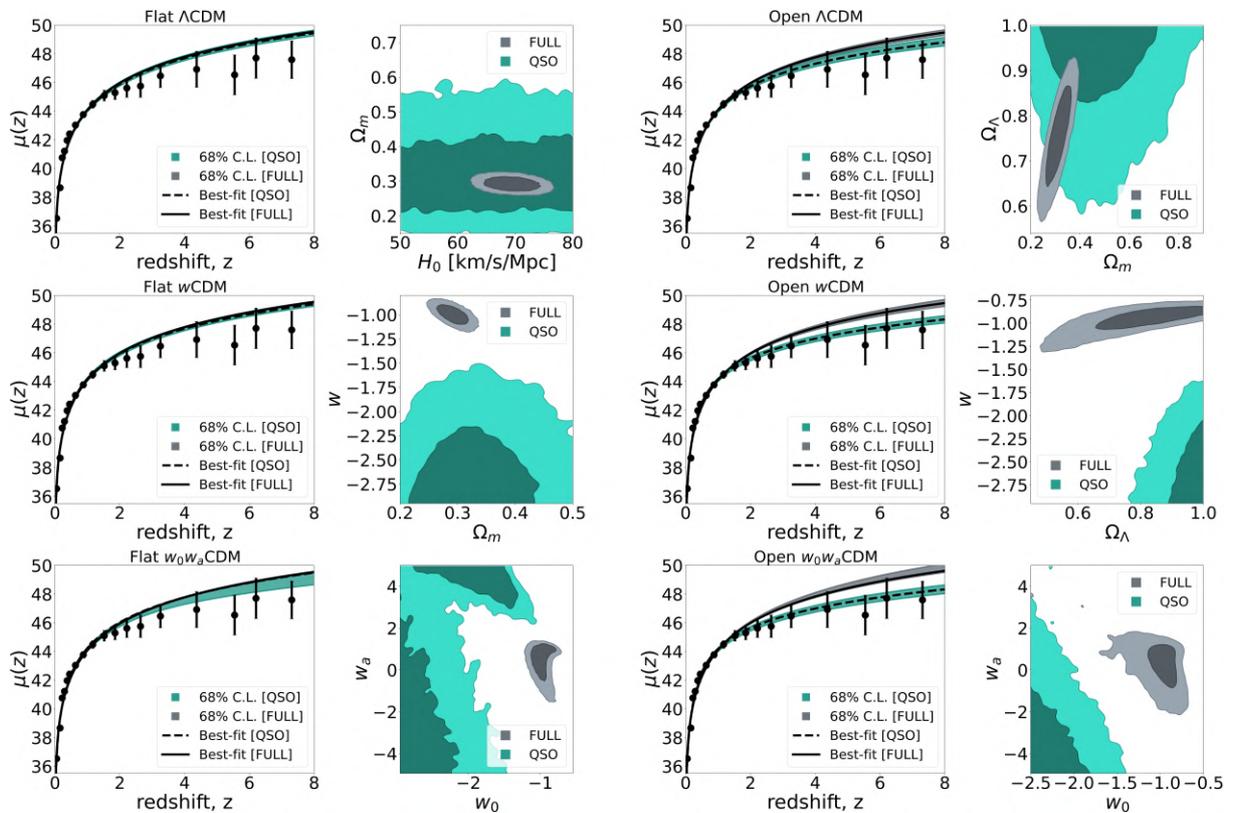


Figura 4.8: Confronto tra le proiezioni dei vincoli cosmologici imposti dalla combinazione totale delle sonde cosmologiche (FULL) e dai QSO. Ogni coppia di pannelli riporta i risultati ottenuti per ciascuna delle cosmologie. Il pannello sinistro mostra l'adattamento (*best-fit*) dei risultati alle osservazioni, con la curva nera che riporta l'andamento di $\mu(z)$ ottenuto dall'analisi FULL (Tabella 4.4). La regione grigia in ombra riporta il livello di incertezza al 68% sui vincoli imposti da FULL, mentre in blu (per confronto) viene riportata l'incertezza relativa all'analisi QSO. Nella porzione superiore, i punti in nero sono riferiti alle raccolte QSO in [152]. Nella porzione inferiore vengono mostrati il valore dei residui e la loro deviazione standard. Il pannello sulla destra mostra i contorni di confidenza bidimensionali al 68% (regione scura) e al 95% (regione chiara) ottenuti dall'analisi FULL (contorni in grigio) e dall'analisi QSO (contorni in blu). La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 3.2.

I meccanismi evidenziati in Sezione 3.3.4 rendono chiari i motivi dell'inconsistenza tra i contorni di confidenza ricavati dalle due analisi. Infatti, l'appiattimento della distribuzione dei dati ad alto z porta i contorni dei QSO ad uscire dagli intervalli di validità imposti dal prior; cosa che non accade invece per la combinazione di tutte le sonde dato l'elevato potere di vincolo a basso redshift.

Sebbene l'eventualità di non avere considerato tutti gli effetti sistematici o di aver introdotto alcuni effetti di selezione venga considerata, in [9] si suggerisce la possibilità di interpretare questa deviazione come una tendenza dei dati a favorire una parametrizzazione CPL, corrispondente ad un parametro dell'equazione di stato dell'energia oscura che evolve in funzione del tempo (con chiare conseguenze sull'evoluzione della densità di energia oscura). In due lavori precedenti [151, 148], lo stesso gruppo di ricerca ha registrato la medesima deviazione: dalla consistenza tra le analisi indipendenti di GRB e QSO, gli autori suggeriscono nuovamente che la deviazione dal modello standard non sia dovuta ad effetti sistematici bensì ad una nuova fisica.

Dall'analisi dei risultati riportati in Figura 4.8 ed elencati in Tabella 3.11, evidenziamo invece come la deviazione dei dati ad alto redshift sembra essere meglio spiegata con un parametro di curvatura fortemente negativo $\Omega_k < -0.4$ ($\Omega_m \sim 0.5$ e $\Omega_\Lambda > 0.9$). Infatti, come mostrato in Figura 3.9, è proprio l'introduzione di Ω_Λ a permettere un miglioramento nell'adattamento del modello ai dati. La parametrizzazione dell'equazione di stato dell'energia oscura gioca invece un ruolo minore, come è possibile evincere dalla comparazione (a parità di parametrizzazione) dei grafici in Figura 4.8.

Questo rappresenta un primo campanello di allarme poiché un Universo con curvatura negativa viene fortemente sfavorito da una miriade di osservazioni indipendenti. Inoltre, poiché la combinazione con le altre candele standard e con le restanti sonde cosmologiche, produce dei risultati significativamente in disaccordo con l'analisi QSO, ci sembra appropriato affermare che, prima di andare alla ricerca di un superamento del modello cosmologico standard, sia necessario approfondire lo studio delle sistematiche in gioco e definire un criterio di selezione robusto che non lasci spazio ad indeterminazioni quando le osservazioni QSO vengono utilizzate in analisi cosmologiche.

A tal proposito, sottolineiamo come nella nostra analisi, a differenza di quanto suggerito in [9], al campione iniziale di osservazioni non stati sottratti i dati per $z < 0.7$. Ancorare i dati con le osservazioni SNeIa è infatti sufficiente a calibrare correttamente la normalizzazione del diagramma di Hubble. Inoltre, è utile sottolineare che, mentre nella loro analisi viene utilizzato il campione QSO completo, i nostri risultati vengono ottenuti tramite l'analisi del campione binnato. Per un confronto significativo dunque si richiede un approccio comune all'analisi, il quale potrà essere oggetto di studi futuri.

4.3 Quantificare Sinergie e Degenerazioni

Ogni sonda cosmologica possiede specifici poteri vincolanti su ciascuno dei parametri. Analizzare la variazione del potere vincolante in funzione della combinazione, permette di identificare le sinergie tra le diverse sonde, individuando quale sia la combinazione in grado di massimizzare la precisione sui vincoli in funzione dei parametri cosmologici.

L'obiettivo è dunque quello di definire un metodo che sfrutti le proprietà delle distribuzioni di probabilità per rendere efficiente ed ottimizzare la procedura di combinazione. Diamo perciò una prima definizione analitica di alcune proprietà statistiche ottenute dall'analisi delle diverse sonde che mira alla costruzione di un metodo atto ad identificare e sfruttare sinergie e complementarità tra sonde cosmologiche diverse.

La finalità risiede dunque in una quantificazione parametrica delle sinergie, dove con questo termine identifichiamo la capacità di due o più sonde di aumentare sensibilmente la precisione nella stima di un parametro, attraverso la loro combinazione.

4.3.1 Definizione di Ortogonalità tra Sonde Cosmologiche

La caratteristica più evidente quando si analizzano i contorni di confidenza è la loro orientazione sul piano parametrico esaminato. Tale orientazione viene identificata a mezzo della direzione di degenerazione che caratterizza ciascuna sonda.

La prima proprietà che tentiamo di definire è proprio l'orientazione dei contorni di confidenza su ciascun piano parametrico la quale, essenzialmente, equivale ad una misura dell'angolo di inclinazione della direzione di degenerazione. Una volta individuate le direzioni di degenerazione per ciascuna sonda, ciò a cui siamo interessati per quantificare eventuali sinergie è l'orientazione relativa tra le direzioni di degenerazioni di sonde diverse. In una situazione ideale in cui due sonde siano soggette ad un'unica degenerazione (che giacerà dunque su di un unico piano), la loro combinazione produrrà un vincolo cosmologico tanto più preciso quanto più le direzioni di degenerazione saranno tra loro perpendicolari. Assumiamo implicitamente che su tale piano i vincoli imposti dalle singole sonde siano tra loro consistenti e che le due sonde abbiano lo stesso potere vincolante, così non fosse, la combinazione di due sonde con poteri vincolanti ben distinti (ovvero che conducono a precisioni sensibilmente diverse) tenderà a riprodurre i vincoli imposti dalla sonda il cui potere risulti maggiore.

Si necessita dunque della definizione di un parametro che quantifichi analiticamente l'orientazione relativa tra le diverse direzioni di degenerazione e che ci permetta poi di trarre le prime conclusioni quantitative sulle sinergie tra sonde cosmologiche.

Direzione di Degenerazione. Il primo passo è quello di ottenere una definizione di *direzione di degenerazione*. Per farlo, sfruttiamo le proprietà del campionamento MCMC. Ogni passo della catena (una volta eliminato il *burn-in*) individua un punto all'interno dello spazio dei parametri, la cui proiezione sui diversi piani consente poi di ricavare i contorni di confidenza. Per stimare le direzioni di degenerazione allora, in prima approssimazione, considerando la distribuzione dei punti su ciascun piano, ricaviamo la cosiddetta *ellisse di covarianza* che individua la regione nel piano all'interno della quale il valore dei punti differisce dal valore medio della distribuzione entro un multiplo della deviazione standard. Nel nostro caso, scegliamo di costruire l'ellisse considerando come valor medio della distribuzione il 50° percentile, con una variazione entro 1σ , in modo da approssimare la distribuzione dei punti contenuta nei contorni di confidenza al 68%.

La direzione di degenerazione viene dunque individuata come la direzione su cui giace l'asse maggiore dell'ellisse. Calcolando, rispetto alle ascisse, l'inclinazione β di quest'asse definiamo la direzione di degenerazione semplicemente come la retta con coefficiente angolare $m_{DD} = \tan\beta$ passante per il 50° percentile della distribuzione.

Parametro di Ortogonalità. Supponiamo di aver individuato lungo un generico piano xy le direzioni di degenerazione di due particolari sonde cosmologiche e di averle rispettivamente caratterizzate attraverso gli angoli di inclinazione β_1 e β_2 .

Nasce allora spontanea la definizione dell'orientazione relativa delle due sonde come l'angolo compreso tra le due direzioni di degenerazione. L'orientazione relativa α equivarrà perciò alla differenza in valore assoluto tra le inclinazioni β_1 e β_2 . Poiché le orientazioni β per costruzione soddisfano la condizione: $0 < \beta < \pi$, definiamo α tale che $0 < \alpha < \pi/2$,

ovvero in modo che l'orientazione relativa sia sempre riferita al minore degli angoli ottenuti dall'intersezione delle due direzioni, banalmente:

$$\alpha \equiv \begin{cases} \|\beta_2 - \beta_1\| & \text{se } \|\beta_2 - \beta_1\| < \pi/2 \\ \|\beta_2 - \beta_1\| - \frac{\pi}{2} & \text{se } \|\beta_2 - \beta_1\| > \pi/2 \end{cases} \quad (4.3)$$

Segue che, rinormalizzando α rispetto all'angolo retto, possiamo utilizzare questa quantità come indicatore dell'ortogonalità tra le due degenerazioni.

Definiamo dunque il *parametro di ortogonalità* come:

$$\varkappa \equiv \frac{2\alpha}{\pi} . \quad (4.4)$$

Ovviamente, quando due sonde mostrano direzioni di degenerazione ortogonali sul piano xy , avremo $\alpha = \pi/2$ e $\varkappa = 1$. Viceversa, due direzioni di degenerazione parallele restituiranno $\alpha = \varkappa = 0$. Ci si aspetta perciò che più il valore di \varkappa sarà vicino all'unità, più le direzioni saranno tra loro ortogonali e maggiori saranno gli effetti della combinazione.

4.3.2 Ellisse di Covarianza e Direzione di Degenerazione

Descriviamo di seguito il procedimento per la costruzione dell'ellisse di covarianza e la conseguente individuazione della direzione di degenerazione.

Il primo passo consiste nella manipolazione delle catene MCMC in maniera equivalente a quanto fatto per la derivazione dei vincoli cosmologici. Eliminiamo dunque il periodo iniziale di *burn-in* ed appiattiamo le catene, in modo da avere un'unica distribuzione.

Poiché il campionamento MCMC viene ottenuto a partire da 250 camminatori che compiono 1500 passi all'interno dello spazio di parametri, selezionando un *burn-in* di 500 passi, otteniamo una distribuzione di $2.5 \cdot 10^5$ punti. Proiettandoli su di un generico piano definito da una coppia di parametri cosmologici, la matrice di covarianza della distribuzione sarà una matrice reale simmetrica 2×2 , di cui è possibile calcolare gli autovalori e gli autovettori. Siamo quindi in grado di dedurre l'equazione parametrica dell'ellisse contenente il 68% della distribuzione: tramite gli autovettori calcoliamo le direzioni degli assi dell'ellisse e, tramite gli autovalori, calcoliamo le dimensioni degli assi in multipli di una deviazione standard (1σ). È dunque immediata la deduzione dell'angolo β sotteso dall'intersezione tra le ascisse e l'asse maggiore dell'ellisse. Considerando come centro dell'ellisse il punto individuato dal 50° percentile della distribuzione, ecco che viene individuata la direzione di degenerazione caratteristica della sonda cosmologica oggetto dell'analisi.

In Figura 4.9, mostriamo i risultati di tale operazione nel caso dei CC. La direzione di degenerazione è identificata dalla retta in rosso, mentre la curva in giallo individua la regione al 68% di confidenza calcolata tramite MCMC, con la nuvola di punti in nero che rappresenta la proiezione bidimensionale della catena MCMC.

Questa figura rivela alcune interessanti caratteristiche del metodo appena implementato. La direzione di degenerazione (in rosso) calcolata tramite l'ellisse di covarianza, è tanto più rappresentativa dell'orientazione dei contorni di confidenza ottenuti tramite MCMC (in giallo), quanto più la distribuzione dei punti risulta uniforme e regolare. Forme altamente difformi sono riportate nel pannello *fwCDM* e *owCDM*. Lo stesso vale nel caso in cui la distribuzione risulti particolarmente irregolare, ovvero nel caso in cui la dispersione dei punti lungo il piano sia elevata, come per il pannello *ow₀w_aCDM*.

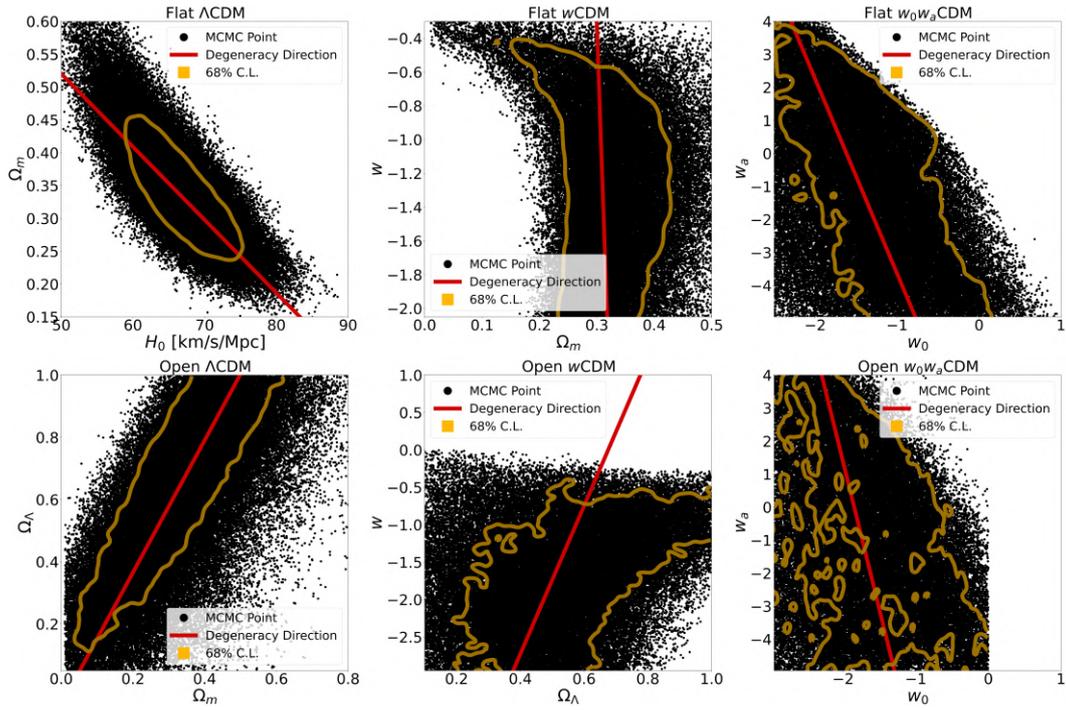


Figura 4.9: Calcolo della direzione di degenerazione per le distribuzioni ottenute dall’analisi CC. In nero vengo rappresentati i punti che costituiscono la catena MCMC, di volta in volta, proiettati su un diverso piano. La retta (in rosso) riporta l’andamento della direzione di degenerazione ottenuto seguendo la procedura descritta in questa sezione. La curva in giallo rappresenta invece il contorno di confidenza al 68% ottenuto tramite dal campionamento MCMC relativo all’analisi CC. La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 3.2.

L’approssimazione nella stima della degenerazione è ovviamente dovuta al metodo utilizzato. Sfruttare l’asse maggiore dell’ellisse per dedurre l’inclinazione della degenerazione riduce la sensibilità ad eventuali deviazioni curvilinee dell’orientazione. Questo effetto cresce all’aumentare della dispersione dei punti, basti osservare i pannelli $f\Lambda\text{CDM}$, $fw\text{CDM}$ e $ow\text{CDM}$. Noto invece il caso $o\Lambda\text{CDM}$ dove la degenerazione geometrica $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ viene stimata correttamente, data l’evidente uniformità e regolarità della distribuzione. Insieme al caso $f\Lambda\text{CDM}$, esso rappresenta la migliore stima delle degenerazione per i CC.

Dall’analisi delle BAO, in Figura 4.10, è subito evidente come la maggiore precisione dei vincoli sia sintomo di una minore dispersione dei punti ed una maggiore uniformità dei contorni di confidenza (in giallo). Difatti, le stime delle direzioni di degenerazione (in verde) sembrano raggiungere una accuratezza maggiore, basti osservare i pannelli $o\Lambda\text{CDM}$, $fw\text{CDM}$ e $fw_0w_a\text{CDM}$. In analogia con quanto osservato per i CC, il miglior risultato lo si trova sul piano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$, dove la potenza della degenerazione definisce chiaramente l’orientazione della distribuzione. A questo, segue il risultato ottenuto sul piano $H_0 - \Omega_m$. L’elevata precisione sul parametro Ω_m rende la degenerazione parallela alle ascisse, con una leggera tendenza verso valori negativi del coefficiente angolare m_{DD} . Lo stesso ragionamento fatto per la degenerazione geometrica $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ può essere applicato al caso $w_0 - w_a$ per $fw_0w_a\text{CDM}$, anche se con minor significatività. Infine, osserviamo il piano $\Omega_m - w$ in cui, seppur la distribuzione risulti particolarmente distorta, l’elevata densità di punti permette di identificare in buona approssimazione la reale orientazione dei contorni al 68%. Persistono comunque le forti incertezze dovute alle distorsioni dei contorni ($ow\text{CDM}$) ed alla eccessiva dispersione dei punti ($ow_0w_a\text{CDM}$).

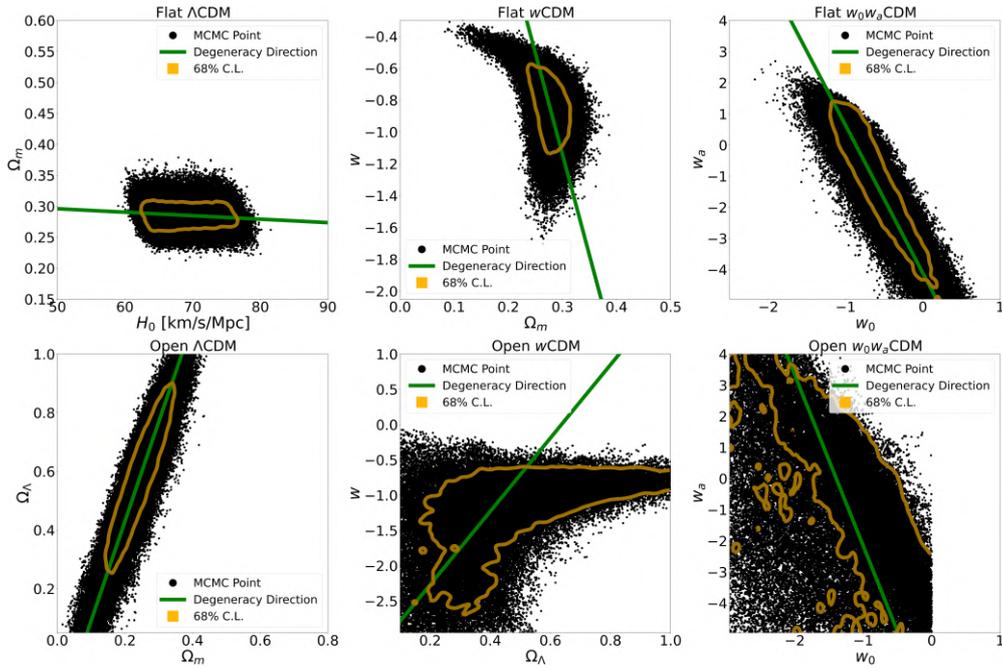


Figura 4.10: Calcolo della direzione di degenerazione nel caso BAO. I punti della catena MCMC (in nero) vengono proiettati sui diversi piano. La retta (in verde) riporta l'andamento della direzione di degenerazione ottenuto seguendo la procedura descritta in questa sezione. La curva in giallo rappresenta il contorno di confidenza al 68% ottenuto dal campionamento MCMC. La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 4.9.

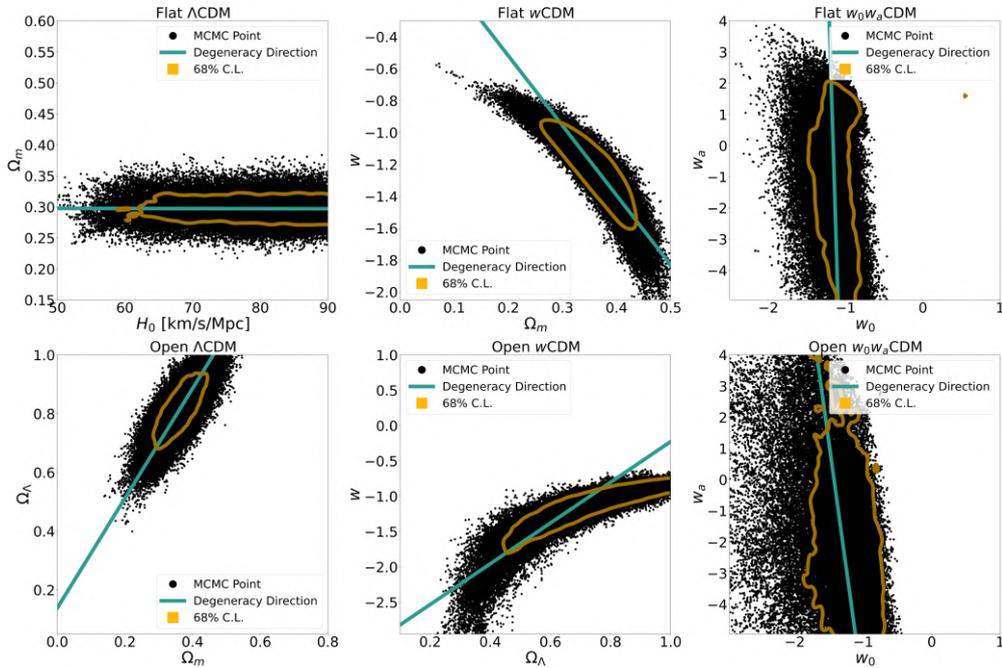


Figura 4.11: Calcolo della direzione di degenerazione nel caso HD. I punti della catena MCMC (in nero) vengono proiettati sui diversi piano. La retta (in blu) riporta l'andamento della direzione di degenerazione ottenuto seguendo la procedura descritta in questa sezione. La curva in giallo rappresenta il contorno di confidenza al 68% ottenuto dal campionamento MCMC. La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 4.9.

Per concludere, osserviamo in Figura 4.11 i risultati ottenuti dall’analisi HD. La stima delle degenerazioni (in blu) calcolate tramite l’ellisse di covarianza, sembra qui raggiungere la massima significatività. Notevole infatti la precisione con cui viene determinata la direzione di degenerazione sul piano $w_0 - w_a$, sia nel caso *flat* che *open*. Allo stesso modo, risulta particolarmente accurata la stima ottenuta sui piani $H_0 - \Omega_m$ e $\Omega_m - \Omega_\Lambda$. Per cosmologie w CDM (pannelli centrali), possiamo invece notare che la forma particolarmente ricurva della distribuzione (specie nel caso *open*) allontani la nostra stima dall’andamento apparente dei contorni di confidenza (in giallo). In realtà, nel caso *flat*, il risultato ottenuto sembra comunque in buono accordo con l’orientazione dei contorni. Sul piano $\Omega_\Lambda - w$ sembrano essere i punti con $w < -2$ la causa della discrepanza: tendono, infatti, ad abbassare la normalizzazione della retta e ad aumentare il valore del coefficiente angolare m_{DD} poiché, per costruzione, la retta passa per il 50° percentile della distribuzione.

4.3.3 Calcolo del Parametro di Ortogonalità

Determinare le orientazioni relative α , e di conseguenza il parametro di ortogonalità \varkappa , è immediato una volta ottenute le stime delle inclinazioni β per ciascuna sonda.

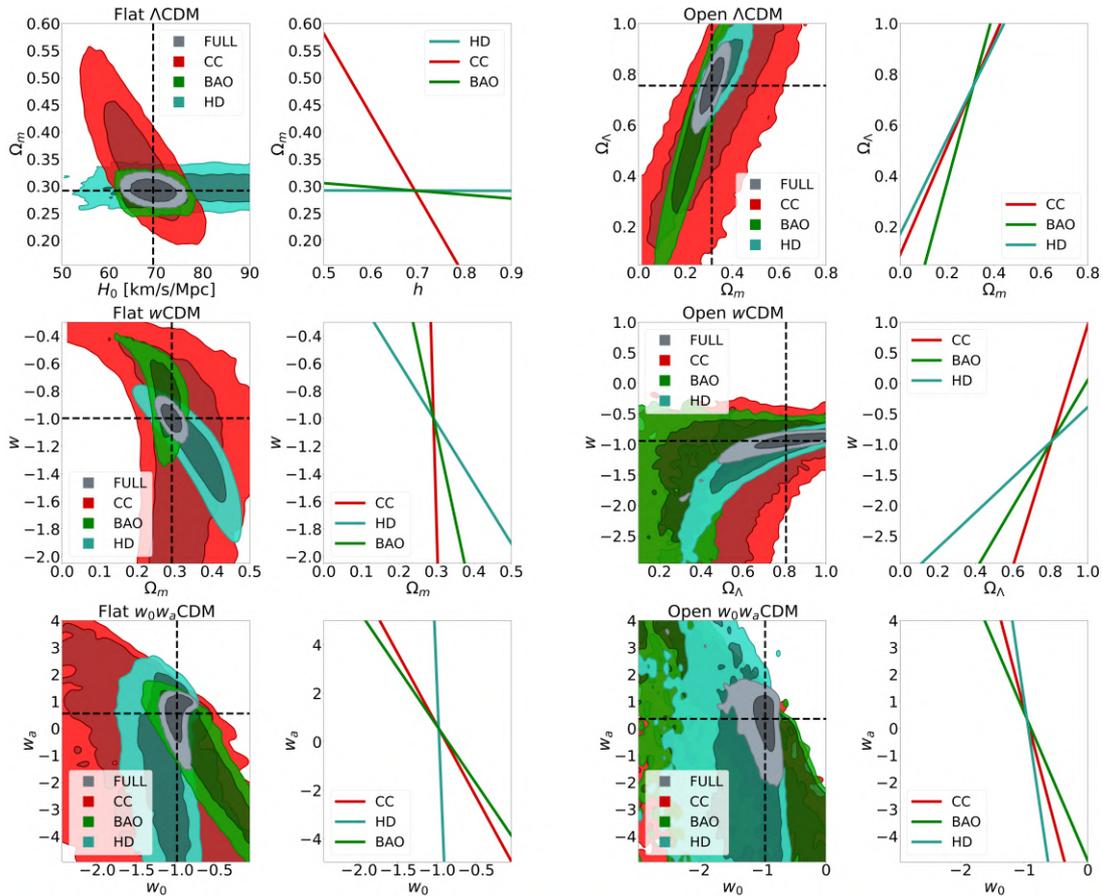


Figura 4.12: Sovrapposizione dei contorni di confidenza al 68% e al 95% ricavati dall’analisi delle singole sonde (BAO–verde, CC–rosso, HD–blu) e dalla loro combinazione (FULL–grigio). Per confronto, viene mostrata la sovrapposizione delle direzioni di degenerazione delle singole sonde ottenute tramite il metodo dell’ellisse di covarianza. La retta in nero riporta le stime sui parametri ottenuti nel caso FULL (Tabella 4.4). La rappresentazione dei diversi piani per le varie cosmologie segue lo stesso schema riportato in Figura 4.9. Nel caso $f\Lambda$ CDM, mostriamo le direzioni di degenerazione sul piano $h - \Omega_m$.

In Figura 4.12 mostriamo la sovrapposizione dei contorni di confidenza al 68% e al 95% ricavati per le singole sonde (CC in rosso, BAO in verde, HD in blu), a cui aggiungiamo i contorni ricavati dalla loro combinazione totale (in grigio). Ciò permette di dedurre una proprietà della combinazione totale di sonde, finora rimasta parzialmente implicita: notiamo infatti come i contorni così ottenuti si stringano sensibilmente attorno ai valori dei parametri cosmologici standard ($H_0 \sim 70$ km/s/Mpc, $\Omega_m \sim 0.3$, $\Omega_\Lambda \sim 0.7$, $w_0 \sim -1$, $w_a \sim 0$), in maniera consistente con tutte le misure ottenute dalle singole analisi. Inoltre, la potenza del metodo di combinazione viene esplicitata osservando i contorni di confidenza al 95% ottenuti dalla combinazione totale i quali, in buona approssimazione, giacciono sempre all'interno dei contorni di confidenza al 68% ottenuti nel caso delle singole sonde. Deduciamo dunque che la combinazione di sonde porta ad un sensibile aumento della precisione sulle stime dei parametri cosmologici che risultano sempre consistenti con quanto ottenuto dalle analisi precedenti ma con errori percentuali decisamente ridotti.

Tralasciamo per ora questo aspetto e ci focalizziamo invece sull'analisi dei risultati ottenuti tramite il calcolo del parametro di ortogonalità \varkappa . Le orientazioni relative α tra le diverse sonde ed i rispettivi parametri di ortogonalità \varkappa vengono riportati in Tabella 4.6.

Sonde	f Λ CDM $H_0 - \Omega_m$		f w CDM $\Omega_m - w$		f w_0w_a CDM $w_0 - w_a$	
	α	\varkappa	α	\varkappa	α	\varkappa
$\widehat{BAO\ CC}$	52.0°	0.58	3.9°	0.04	2.3°	0.03
$\widehat{BAO\ HD}$	4.0°	0.04	8.4°	0.09	11.2°	0.12
$\widehat{CC\ HD}$	56.0°	0.62	12.3°	0.14	8.9°	0.10
Sonde	o Λ CDM $\Omega_m - \Omega_\Lambda$		o w CDM $\Omega_\Lambda - w$		o w_0w_a CDM $w_0 - w_a$	
	α	\varkappa	α	\varkappa	α	\varkappa
$\widehat{BAO\ CC}$	8.8°	0.10	5.1°	0.06	3.9°	0.04
$\widehat{BAO\ HD}$	11.7°	0.13	8.2°	0.09	6.7°	0.07
$\widehat{CC\ HD}$	3.0°	0.03	13.4°	0.15	2.8°	0.03

Tabella 4.6: Orientazioni relative α e parametri di ortogonalità \varkappa ottenuti comparando le direzioni di degenerazione di ciascuna sonda cosmologica (BAO, CC, HD) calcolate tramite il metodo dell'ellisse di covarianza. Riportiamo i risultati per ciascuna coppia di sonde: $\widehat{BAO\ CC}$, $\widehat{BAO\ HD}$ e $\widehat{CC\ HD}$, su ciascun piano parametrico in Figura 4.12.

Analisi dei Risultati

Per ogni cosmologia e sonda cosmologica, la Figura 4.12 mostra le direzioni di degenerazione ricavate tramite il metodo dell'ellisse di covarianza. Difatti, ogni coppia di pannelli riporta il confronto tra i contorni di confidenza ricavati tramite MCMC e le direzioni di degenerazione calcolate analiticamente.

Dall'analisi svolta in Sezione 4.3.2 possiamo dedurre che, per quelle che sono le attuali capacità di vincolo, il metodo dell'ellisse di covarianza permette di ottenere una stima ve-

rosimile delle direzioni di degenerazione solo per cosmologie $f\Lambda$ CDM, fw CDM e $o\Lambda$ CDM. Nei restanti casi, le irregolarità e difformità delle distribuzioni producono evidenti errori nella stima delle direzioni di degenerazione.

Decidiamo perciò di focalizzare la nostra attenzione solo su quei casi in cui il metodo dell'ellisse di covarianza sembra aver prodotto i risultati migliori, ovvero: $f\Lambda$ CDM (piano $H_0 - \Omega_m$), fw CDM (piano $\Omega_m - w$) e $o\Lambda$ CDM (piano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$). L'obiettivo di questo approccio è capire quale sia la relazione tra l'orientazione relativa dei contorni di confidenza di due sonde e l'aumento del potere vincolante quando queste vengono combinate.

Sonde	$f\Lambda$ CDM		fw CDM		$o\Lambda$ CDM	
	H_0	Ω_m	Ω_m	w	Ω_m	Ω_Λ
BAO	$69.0^{+5.1}_{-4.4}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$0.28^{+0.02}_{-0.03}$	$-0.8^{+0.2}_{-0.2}$	$0.24^{+0.06}_{-0.07}$	$0.6^{+0.2}_{-0.2}$
CC	$66.3^{+5.4}_{-5.3}$	$0.34^{+0.08}_{-0.06}$	$0.31^{+0.08}_{-0.07}$	$-1.4^{+0.7}_{-0.8}$	$0.32^{+0.15}_{-0.16}$	$0.6^{+0.2}_{-0.3}$
HD	$76.5^{+16.1}_{-16.0}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$0.35^{+0.05}_{-0.06}$	$-1.2^{+0.2}_{-0.2}$	$0.33^{+0.05}_{-0.05}$	$0.78^{+0.08}_{-0.09}$
BAO+CC	$69.5^{+3.3}_{-3.3}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$0.28^{+0.02}_{-0.02}$	$-0.9^{+0.2}_{-0.2}$	$0.25^{+0.06}_{-0.06}$	$0.6^{+0.2}_{-0.2}$
BAO+HD	$68.9^{+5.0}_{-4.5}$	$0.29^{+0.01}_{-0.01}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$-0.99^{+0.07}_{-0.07}$	$0.30^{+0.03}_{-0.03}$	$0.74^{+0.07}_{-0.08}$
CC+HD	$69.3^{+3.7}_{-3.4}$	$0.30^{+0.02}_{-0.02}$	$0.34^{+0.04}_{-0.05}$	$-1.2^{+0.2}_{-0.2}$	$0.34^{+0.05}_{-0.05}$	$0.78^{+0.08}_{-0.08}$
BAO+CC+HD	$69.4^{+3.2}_{-3.2}$	$0.29^{+0.01}_{-0.01}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$-1.00^{+0.07}_{-0.07}$	$0.31^{+0.03}_{-0.03}$	$0.76^{+0.07}_{-0.07}$

	α	\varkappa	α	\varkappa	α	\varkappa
\widehat{BAOCC}	52.0°	0.58	3.9°	0.04	8.8°	0.10
\widehat{BAOHD}	4.0°	0.04	8.4°	0.09	11.7°	0.13
\widehat{CCHD}	56.0°	0.62	12.3°	0.14	3.0°	0.03

	δH_0	$\delta\Omega_m$	$\delta\Omega_m$	δw	$\delta\Omega_m$	$\delta\Omega_\Lambda$
BAO	7.4%	6.9%	10.7%	25.0%	29.2%	33.3%
CC	8.1%	23.5%	25.8%	57.1%	50.0%	50.0%
HD	21.0%	6.9%	17.1%	16.7%	15.2%	12.5%
BAO+CC	4.7%	6.9%	7.1%	22.2%	24.0%	33.3%
BAO+HD	7.3%	3.4%	6.9%	10.0%	10.0%	14.3%
CC+HD	5.3%	6.7%	14.7%	16.7%	14.7%	12.5%
BAO+CC+HD	4.6%	3.4%	6.9%	7.0%	9.7%	9.7%

Tabella 4.7: Comparazione tra le analisi cosmologiche condotte sulle singole sonde e sulle rispettive combinazioni, rispetto alle cosmologie di interesse per lo studio delle sinergie: $f\Lambda$ CDM, fw CDM e $o\Lambda$ CDM. Nella porzione superiore riportiamo i vincoli ottenuti con gli errori ad un livello di confidenza del 68%. La porzione centrale riporta il valore delle orientazioni relative α e del parametro di ortogonalità \varkappa per ciascuna combinazione. Nella porzione inferiore riportiamo invece gli errori relativi riferiti alla porzione superiori.

In altre parole, lo scopo è capire se e quanto l'orientazione relativa tra le direzioni di degenerazioni influenzi la precisione dei vincoli cosmologici, nel momento in cui questi siano dedotti dall'analisi combinata di più sonde.

Tramite questa analisi vogliamo dunque quantificare le sinergie tra le diverse sonde cosmologiche. L'evidenza più immediata di tali sinergie può essere ottenuta confrontando i risultati delle analisi cosmologiche condotte sulle singole sonde (BAO, CC e HD), sulle rispettive combinazioni in coppia (BAO+CC, BAO+HD e CC+HD) e sulla loro combinazione totale (BAO+CC+HD). A questi risultati, in Tabella 4.7, aggiungiamo i valori di α e \varkappa ricavati per le diverse combinazioni interessate di modo che sia possibile ottenere una visione di insieme degli effetti che la combinazione di sonde cosmologiche apporta nel processo inferenziale, confrontandoli con le orientazioni relative delle degenerazioni.

Flat Λ CDM.

Questa cosmologia si presta particolarmente a questo tipo di analisi, poiché gli unici parametri coinvolti sono H_0 e Ω_m e non subentrano dunque ulteriori degenerazioni che potrebbero portare a dei contributi nascosti.

È questo il caso in cui le sonde cosmologiche possiedono la maggiore ortogonalità, come è possibile osservare in Figura 4.12. Infatti, le combinazioni $\widehat{BAO\ CC}$ e $\widehat{CC\ HD}$ mostrano dei valori di $\alpha = 52.0^\circ$ ($\varkappa = 0.58$) e $\alpha = 56.0^\circ$ ($\varkappa = 0.62$). Osservando i contorni è evidente come la combinazione $\widehat{BAO\ HD}$ risulti pressoché parallela e difatti otteniamo $\alpha = 4.0^\circ$ ($\varkappa = 0.04$). Come già evidenziato in Sezione 4.3.2, le BAO possiedono una leggera inclinazione (con coefficiente angolare negativo) che ne riduce dunque l'orientazione relativa rispetto ai CC.

Se la nostra ipotesi iniziale è verificata, ovvero se una maggiore ortogonalità tra le sonde conduce a vincoli più stringenti quando queste sono tra loro combinate, ci aspetteremo di osservare un vincolo estremamente preciso sulla costante di Hubble quando il suo valore è inferto dalla combinazione di CC e HD, dato che è proprio questa combinazione a possedere il valore di \varkappa maggiore. Come mostrano i risultati in Tabella 4.7, invece, la combinazione che fornisce la maggior precisione su H_0 è BAO+CC, la quale domina poi la precisione sulla misura anche nella combinazione totale BAO+CC+HD. È infatti evidente, sia in termini di misura che di errore percentuale, l'equivalenza tra il risultato ottenuto da BAO+CC e quello ottenuto da BAO+CC+HD, con i risultati che in quest'ultimo caso vengono leggermente rinormalizzati dalla combinazione con HD.

Questo risultato, all'apparenza incongruente, ci permette in realtà di confermare quanto detto in Sezione 4.3.1: oltre alle direzioni di degenerazione, a giocare un ruolo fondamentale nella combinazione di sonde cosmologiche sono le incertezze percentuali sulle stime dei parametri, ovvero la precisione con cui tali parametri vengono vincolati.

Infatti, nel caso precedente, BAO e CC mostrano all'incirca la stessa incertezza percentuale ($\sim 7 - 8\%$) che viene essenzialmente dimezzata quando queste due sonde vengono combinate. Viceversa, HD mostra una incertezza percentuale maggiore (ricordiamo che le candele standard per definizione non hanno alcuna capacità di vincolo su H_0) e la sua combinazione con le altre sonde non produce gli stessi effetti.

Va comunque sottolineato che la nostra ipotesi non risulta del tutto inappropriata, poiché la combinazione CC+HD produce una incertezza percentuale confrontabile con quella ottenuta per BAO+CC, anche se le barre di errore in quest'ultimo caso risultano perfettamente simmetriche attorno al 50° percentile, mentre per CC+HD e BAO+HD mostrano una certa asimmetria.

Quanto detto sin qui ottiene una ulteriore riprova se ci si sofferma sul vincolo ottenuto per Ω_m . Come possiamo osservare, seppur i CC risultino avere un valore di $\varkappa > 0.5$ ($\alpha > \pi/4$) in entrambe le combinazioni proposte, la sua combinazione con le altre sonde produce stime di Ω_m con incertezze apprezzabili ma non predominanti rispetto alle altre due sonde. Cosa che accade invece nel caso BAO+HD per il quale, grazie al forte potere di vincolo offerto dalle due sonde ($\sim 7\%$), si ottiene una misura di Ω_m la cui precisione ($\sim 3.4\%$) domina anche quando la combinazione viene completata.

Concludiamo dunque che, per una cosmologia Λ CDM, è la sinergia tra BAO e CC a determinare la massima precisione con cui può essere inferta la costante di Hubble H_0 , mentre è la sinergia tra BAO e HD ad imporre il vincolo dominante nel caso del parametro di densità della materia Ω_m . L'orientazione relativa tra le direzioni di degenerazione assume dunque un ruolo di accentuazione delle sinergie, ma è l'incertezza percentuale ricavata dalle singole sonde a fornire il contributo più significativo in termini di precisione quando la misura è ottenuta dalla combinazione di più sonde. Difatti, quando due sonde mostrano una incertezza confrontabile sulla misura di uno specifico parametro, la loro combinazione porta ad una elevata precisione che si riflette poi in una incertezza percentuale il cui valore diminuisce anche di un fattore ~ 2 rispetto alle singole sonde.

La precisione nei vincoli cosmologici ottenuta dalla combinazione di sonde cosmologiche indipendenti è dunque il frutto dello sforzo offerto dalle sinergie tra le singole sonde: BAO e CC pongono forti vincoli su H_0 , mentre sono BAO e HD a determinare la precisione sul parametro Ω_m .

Flat w CDM.

Osservando la combinazione BAO+HD possiamo studiare la complementarità tra le direzioni di degenerazione e la precisione nei vincoli quando due sonde, con diverse orientazioni sul piano parametrico, vengono combinate per ottenere un unico vincolo sui parametri. Escludiamo i CC da questa discussione perché, come evidente dalla Figura 4.12, sul piano $\Omega_m - w$ essi non possiedono un potere vincolante confrontabile con BAO e HD.

BAO e HD mostrano una orientazione relativa di $\alpha = 8.4^\circ$ ($\varkappa = 0.09$) ed i rispettivi *posterior* unidimensionali, $P(\Omega_m)$ e $P(w)$, appaiono essenzialmente gaussiani attorno al picco di probabilità, specie per il parametro w . Questo rappresenta il caso ideale per il nostro scopo poiché le due sonde mostrano essenzialmente le stesse proprietà statistiche (con i vincoli BAO leggermente più stringenti) ed è possibile dedurre abbastanza semplicemente gli effetti della combinazione.

Considerando il parametro Ω_m , la discreta precisione con cui questo viene determinato, unita all'intersezione delle rispettive direzioni di degenerazione, consente alla loro combinazione di fornire un vincolo cosmologico di elevata precisione ($\delta\Omega_m \sim 6.9\%$) che domina gli errori percentuali anche quando BAO e HD vengono combinate con i CC. Infatti, i risultati della combinazione BAO+CC+HD coincidono con quanto ottenuto da BAO+HD. Di fondamentale importanza il caso del parametro w , dove l'errore sulla misura di w viene ridotto di un ordine di grandezza quando il suo valore è inferto dalla combinazione BAO+HD. In questo caso però le incertezze percentuali maggiori non consentono di fissare univocamente il valore del parametro. La combinazione con i CC porta, infatti, ad una rinormalizzazione della distribuzione verso il valore $w = -1.00$ ($\delta w \sim 7\%$).

Anche in questo caso dunque il risultato finale è frutto della sinergia tra tutte e tre le sonde a disposizione, anche se il maggior contributo lo si deve alla coppia BAO+HD, per la quale i risultati ottenuti coincidono con quanto ricavato per BAO+CC+HD. Il ruolo delle direzioni di degenerazione in questo caso rispecchia quanto affermato in precedenza: la combinazione di due sonde i cui rispettivi contorni mostrano forme ellissoidali uniformi,

ottenuti dunque dalla proiezione bidimensionale di distribuzioni degeneri lungo un specifica direzione parametrica, permette di ottenere un contorno di confidenza circolare (ovvero una distribuzione complessiva simil-gaussiana) quanto più le direzioni di degenerazione delle singole sonde posseggono andamenti tra loro perpendicolari sul piano considerato. In realtà, poiché la combinazione BAO+CC+HD non è in grado superare la degenerazione presente tra Ω_m e w , la distribuzione complessiva assumerà comunque la forma di *gaussiana multi-variata*, la cui proiezione è essenzialmente un'ellisse con asse maggiore giacente sulla direzione di degenerazione.

L'effetto dell'intersezione è dunque quello di rendere l'ellisse maggiormente uniforme rispetto al caso delle singole sonde, con gli assi dell'ellisse che non mostreranno più l'andamento curvilineo osservato. Difatti, osservando sul piano $\Omega_m - w$ il contorno di confidenza della combinazione BAO+CC+HD (FULL in Figura 4.12), è evidente la forma maggiormente regolare rispetto alle singole sonde.

Open Λ CDM.

Osservando la sovrapposizione dei contorni in Figura 4.12, la forza della degenerazione geometrica risulta particolarmente evidente. L'orientazione pressoché parallela di tutti i contorni dimostra il predominio di tale degenerazione rispetto ad eventuali ulteriori degenerazioni. Dai risultati in Tabella 4.7 possiamo notare come le barre di errore sulle misure di entrambi i parametri siano sostanzialmente simmetriche per ciascuna sonda e come tale simmetria diventi più definita man mano che più sonde vengono combinate. Questo comportamento si riflette in dei contorni di confidenza particolarmente ellissoidali. Tale degenerazione sembra dunque influire con stessa forza e modalità su tutte le sonde, con la maggior precisione nelle misure di Ω_m e Ω_Λ ottenuta dalla combinazione totale.

In questo caso, dunque, la maggior precisione su entrambi i parametri viene raggiunta solamente dalla combinazione di tutte le sonde a disposizione. Ciò rende evidente la necessità di combinare un gran numero di sonde cosmologiche quando le degenerazioni tra parametri dominano l'incertezza nel processo di inferenza dei parametri cosmologici.

4.3.4 Criticità e Potenzialità del Metodo Analitico

Questa prima implementazione di un metodo analitico in grado di quantificare le sinergie tra sonde cosmologiche indipendenti, ha messo in evidenza le potenzialità di un tale approccio ma, allo stesso tempo, ha mostrato alcune criticità in particolari condizioni.

Andiamo dunque a riassumerne i principali punti di forza e debolezza, in modo da avere una visione generale del contesto finora analizzato.

Direzione di Degenerazione. La maggior fonte di incertezza riscontrata riguarda essenzialmente il metodo con cui le direzioni di degenerazione vengono dedotte, a cui ci siamo riferiti come *metodo dell'ellisse di covarianza*. Poiché abbiamo identificato la direzione di degenerazione attraverso l'asse maggiore dell'ellisse, il metodo fallisce nel momento in cui le distribuzioni mostrano delle forme particolarmente curvilinee e la loro proiezione bidimensionale si allontana da una forma puramente ellissoidale. Ne sono un evidente esempio le distribuzioni ottenute per cosmologie w CDM in Figura 4.9, 4.11 e 4.10. In questi casi, infatti, la stima dell'ellisse di covarianza non coincide con il contorno di confidenza ottenuto tramite MCMC e di conseguenza la stima della degenerazione risulta inesatta.

Di contro, quando le distribuzioni appaiono spiccatamente ellissoidali, questo metodo mostra le sue potenzialità fornendo ottime stime delle direzioni di degenerazione.

Difatti, nel caso di cosmologie Λ CDM, w CDM e Λ CDM, dopo aver ricavato i parametri di ortogonalità per ciascuna coppia di sonde, siamo stati in grado di produrre una prima quantificazione analitica delle sinergie tra le sonde cosmologiche esaminate.

Fattore di Scala. Questo è stato uno dei primi problemi riscontrati durante il nostro lavoro, ma che fino ad ora è rimasto implicito. Esso può essere semplicemente visualizzato considerando la scala su cui varia la distribuzione dei punti, in funzione dell'asse parametrico considerato.

L'esempio più emblematico è quello del piano $H_0 - \Omega_m$, dove la distribuzione lungo le ascisse essenzialmente varia tra $50 < H_0/(\text{km/s/Mpc}) < 100$, mentre lungo le ordinate la variazione avviene nell'intervallo $0 < \Omega_m < 1$. Questa differenza, nel momento in cui si tenta di quantificare l'ortogonalità tra sonde, può essere fonte di particolari incongruenze che possono essere facilmente dedotte dall'analisi della Figura 4.12. Infatti, i contorni che sul piano $H_0 - \Omega_m$ mostrano una forte ortogonalità (come i CC rispetto a BAO e HD), nel momento in cui vengono analizzati tramite questo metodo, producono valori di $\alpha \ll 1$ (associato a due distribuzioni fortemente parallele) proprio perché la variazione della distribuzione lungo le ordinate ($0 < \Omega_m < 1$) è per definizione due ordini di grandezza inferiore alla variazione lungo le ascisse ($50 < H_0/(\text{km/s/Mpc}) < 100$).

È evidente dunque come tale effetto sia dovuto alla scala utilizzata per visualizzare i contorni. Ciò significa che per evitare queste incongruenze dovremmo mostrare i contorni su di un piano tale per cui l'intervallo di variazione sull'asse delle x e delle y sia comparabile. Difatti, questa prima definizione di ortogonalità restituisce i risultati più consistenti proprio quando consideriamo il piano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$, dove entrambi i parametri variano tra 0 e 1.

La problematica riscontrata sul piano $H_0 - \Omega_m$, durante l'analisi precedente è stata implicitamente superata considerando che la costante di Hubble viene spesso misurata tramite il parametro adimensionale $h \equiv H_0/100$, come è possibile notare dal pannello Λ CDM in Figura 4.12. Riscalando in tale modo la distribuzione, abbiamo ridotto questo effetto ed ottenuto una stima più accurata dell'ortogonalità tra le direzioni di degenerazioni sul piano $H_0 - \Omega_m$, il cui valore così calcolato è stato riportato in Tabella 4.6.

Capitolo 5

Conclusioni e Prospettive Future

Gli ultimi 20 anni hanno consolidato l'enorme successo dell'attuale Modello Cosmologico Standard Λ CDM. Con una modellizzazione relativamente semplice, basata essenzialmente su 6 parametri cosmologici fondamentali, siamo in grado di descrivere l'origine, la composizione e l'evoluzione dell'intero Universo, riuscendo a fornire non solo una spiegazione a svariati fenomeni fisici, ma anche una serie di previsioni sulle proprietà statistiche dell'Universo che puntualmente vengono confermate dalle osservazioni [5].

Allo stesso tempo però, le forti assunzioni di cui questo modello fa uso, rendono la nostra conoscenza del cosmo ancora incompleta. È questo il caso delle componenti del bilancio energetico totale, come l'energia oscura e la materia oscura, la cui natura ignota ha portato ad una complessità di questioni irrisolte che mettono in evidenza la profonda differenza tra la modellizzazione e la reale comprensione di un fenomeno fisico.

Per cercare di trovare una risposta a tali domande, sono state dunque sviluppate una grande quantità di sonde cosmologiche indipendenti dalle quali estrarre precisi vincoli sui parametri cosmologici e restringere così la rosa delle possibili soluzioni [55]. Purtroppo però, l'analisi approfondita delle varie sonde cosmologiche nell'ultimo decennio ha mostrato che nessuna di esse sia in grado da sola di fornire tutte le informazioni necessarie per comprendere a pieno la fisica del nostro Universo.

Si è dunque reso necessario sviluppare sofisticate tecniche statistiche tramite le quali combinare le diverse sonde cosmologiche in modo da massimizzare la quantità e la qualità delle informazioni estraibili da ciascuna, ed ottenere così una visione quanto più completa ed accurata della struttura e dell'evoluzione dell'Universo.

La crescente disponibilità di sonde cosmologiche e le accurate tecniche di analisi hanno quindi consentito di dedurre con precisione percentuale le proprietà dell'Universo. È il caso, per esempio, della missione spaziale ESA Euclid, programmata per il 2022, che andrà a studiare l'Universo fino a $z \sim 2$ combinando essenzialmente le informazioni estraibili da due tra le principali sonde cosmologiche: il lensing debole e gli ammassi di galassie.

Tuttavia, ciò ha anche messo in luce alcune incongruenze e criticità dell'attuale modello cosmologico standard. In particolare, l'estrema precisione con cui, a partire dall'analisi della radiazione cosmica di fondo [5] (Cosmic Microwave Background, CMB), è possibile misurare la Costante di Hubble H_0 ha dato vita alla cosiddetta Tensione di Hubble [3]. Questo valore, infatti, risulta fortemente in disaccordo ($\sim 4\sigma$) con quanto ottenuto nell'Universo locale dall'analisi di un'altra delle principali sonde cosmologiche, le Supernovae di Tipo Ia (SNeIa) [67].

Un tale scenario evidenzia dunque due punti fondamentali e strettamente correlati. Innanzitutto, date le attuali tensioni e la complessità delle questioni ancora aperte, non è

più sufficiente misurare i parametri cosmologici con precisione percentuale ma è necessario raggiungere una profonda accuratezza nella misura di tutti i parametri.

In secondo luogo, oltre alle future campagne osservative, la combinazione di sonde cosmologiche si è dimostrata essere una delle principali strade percorribili per vincolare in maniera sempre più approfondita ed accurata le caratteristiche dell'Universo, con la possibilità di studiare la cosmologia attraverso nuove sonde indipendenti che aprono la strada al superamento delle attuali tensioni del panorama cosmologico moderno.

In questo contesto, è dunque di fondamentale importanza esplorare accuratamente le potenzialità delle nuove sonde cosmologiche dato che, negli ultimi anni, queste hanno dimostrato la loro capacità di offrire un punto di vista sinergico e complementare rispetto alle cosiddette sonde cosmologiche standard. Allo stesso tempo, è importante studiare la validità e la consistenza del paradigma cosmologico moderno allargando lo studio delle sonde cosmologiche a tutti quei modelli che si propongono di estendere l'attuale modello Λ CDM standard.

Lo scopo principale di questa Tesi è stato dunque quello di produrre uno studio analitico dei vincoli cosmologici imposti da una vasta composizione di sonde cosmologiche, su un altrettanto vasto numero di modelli cosmologici con l'obiettivo di studiare il potere specifico di ciascuna sonda e le potenzialità di una loro combinazione nel massimizzare i vincoli cosmologici, in funzione della complessità e delle diverse assunzioni dei modelli.

In particolare, basandoci su alcune delle sonde che attualmente rappresentano lo standard per gli studi cosmologici, come le SNeIa e le Oscillazioni Barioniche Acustiche (Baryonic Acoustic Oscillations, BAO), abbiamo ricavato robusti vincoli cosmologici combinando queste due sonde principali con alcune delle più innovative e promettenti sonde cosmologiche attualmente a disposizione in letteratura, ovvero i Cronometri Cosmici (CC), i Quasar (Quasi Stellar Objects, QSO) ed i Gamma-Ray Burst (GRB).

In questo modo, considerando esclusivamente sonde cosmologiche del Tardo Universo ($z < 10$) abbiamo, per la prima volta in letteratura, vincolato un'ampia rosa di modelli cosmologici, esplorando le ipotesi dell'attuale modello cosmologico standard attraverso assunzioni progressivamente meno stringenti sulla curvatura e sulla forma dell'energia oscura.

L'analisi dettagliata delle singole sonde ci ha permesso poi di implementare un primo metodo analitico per la quantificazione delle sinergie e delle complementarità tra osservazioni indipendenti nel contesto della combinazione di sonde cosmologiche.

Risultati

Per quel che riguarda lo stato attuale delle osservazioni e dei metodi di analisi, i risultati sono principalmente due.

Dati Osservativi. Il punto cardine del nostro studio è stato quello di analizzare esclusivamente i vincoli cosmologici imposti dalle osservazioni dell'Universo nelle sue fasi più recenti, il cosiddetto Tardo Universo. Abbiamo perciò escluso dalla nostra analisi la CMB, ovvero la sonda cosmologica che rappresenta tuttora lo standard per tutti gli studi di cosmologia ma che, sondando l'Universo nelle sue fasi primordiali, sfugge agli obiettivi prefissati.

Il primo passo della Tesi è stato dunque quello di riunire all'interno di un'unica libreria la maggior parte dei metodi utilizzati per sondare il Tardo Universo, con

particolare attenzione allo stato dell'arte delle osservazioni e alla trattazione degli errori statistici e sistematici. Abbiamo dunque raccolto dalla letteratura gli insiemi di dati più aggiornati e, ove disponibili, le matrici di covarianza associate a queste misure.

In particolare, per le SNeIa abbiamo utilizzato i dati provenienti dalla recente raccolta Pantheon [108] confrontandoli con una delle raccolte precedenti (JLA [107]) per verificare gli effetti sul processo di analisi di una riduzione degli errori statistici e sistematici.

Nel caso delle BAO, abbiamo riunito all'interno di un'unica raccolta alcuni insiemi di dati ottenuti da osservabili differenti [7]. Ciò ha fornito una prima evidenza della maggiore capacità di vincolo che osservazioni indipendenti possono produrre quando utilizzate in combinazione. Nello specifico, la possibilità di estrarre dalle BAO sia misure di distanza di diametro angolare $D_A(z)$ che del parametro di Hubble $H(z)$, rende questa sonda un incredibile strumento per esplorare in maniera efficace una vastità di quantità cosmologiche diverse.

Lo stato dell'arte per le osservazioni dei CC può essere trovato in [87], a cui si è aggiunta di recente un'ulteriore misurazione [210] che non è stata però inclusa nell'analisi. Il potere innovativo di questa sonda, che permette di misurare direttamente la storia del tasso di espansione dell'Universo, è stato esplicitato dalla costruzione della matrice di covarianza (attraverso il procedimento proposto in [99]) che ne ha quantificato analiticamente gli errori sistematici.

Infine, per quel che riguarda QSO e GRB, la scarsa comprensione della natura di questi fenomeni rende complicata una stima robusta degli effetti sistematici che si celano dietro la loro osservazione. Queste sono infatti le sonde che hanno mostrato le maggiori criticità quando analizzate indipendentemente. Allo stesso tempo, offrono la possibilità unica di esplorare l'evoluzione dell'Universo su di un elevato intervallo di redshift ($0 < z < 8$) ed hanno mostrato le loro potenzialità quando utilizzate in combinazione con la candela standard per eccellenza, le SNeIa.

Data la vastità dei campioni di dati [9, 10], abbiamo implementato un metodo per la stima dell'andamento medio delle osservazioni. Pur rappresentando una possibile fonte di incertezza nell'analisi, dopo un'adeguata messa a punto, questo metodo (*binnaggio*) è risultato particolarmente utile e robusto ai fini della nostra trattazione.

Metodo di Analisi. Per sfruttare la pluralità delle raccolte di dati descritte in precedenza, il fulcro del nostro studio è stato lo sviluppo di un codice computazionale in grado di fornire in maniera adeguata, robusta e flessibile gli strumenti necessari per applicare i metodi bayesiani all'analisi delle sonde cosmologiche.

La principale caratteristica di questo codice è la sua versatilità. L'impostazione generale è stata infatti quella di automatizzare la procedura di inferenza in modo che fornisca risultati consistenti al variare delle ipotesi cosmologiche e dei dati, permettendo così una semplicità di base nelle situazioni in cui il numero di sonde cosmologiche indipendenti sia elevato o si necessiti di una comparazione sistematica tra i risultati ottenibili da modelli cosmologici diversi. Nello specifico, a partire dal modello cosmologico standard Λ CDM, sono state implementate varie sue estensioni a complessità crescente, rilassando in successione l'ipotesi di curvatura nulla e la forma assunta per l'equazione di stato dell'energia oscura.

Lavorando in un contesto bayesiano, abbiamo la possibilità di combinare (in maniera semplice e flessibile) le diverse sonde cosmologiche così da studiare gli effetti di una loro progressiva combinazione.

L'algoritmo implementato permette infatti di manipolare in maniera semplice e diretta le distribuzioni di probabilità su cui l'analisi bayesiana si basa, fornendo un ventaglio di risultati complementari, al variare degli obiettivi dell'analisi.

In particolare, dà la possibilità di costruire il *posterior*, in funzione dell'insieme di dati e del *prior* con cui si intende analizzare un determinato modello cosmologico, campionandolo in maniera automatica tramite un particolare metodo MCMC.

Inoltre, le proprietà del campionamento possono essere facilmente modificate in base agli scopi e alle caratteristiche della propria analisi.

I risultati vengono poi salvati in modo che sia possibile analizzarli a posteriori senza dover necessariamente ripetere il campionamento. A partire da essi, è possibile estrarre i valori di *best-fit* secondo statistiche diverse (*cumulative*, *mean*, *maximum likelihood*) che possono essere visualizzati attraverso particolari grafici che ne mettono in evidenza proprietà e caratteristica differenti.

Avendo lavorato su tre fronti distinti, suddividiamo i risultati ottenuti dall'analisi cosmologica in tre categorie.

1) Singole Sonde Cosmologiche. Come detto, a partire dal modello Λ CDM, le ipotesi sulla curvatura e sulla forma dell'energia oscura sono state gradualmente rilassate in modo da determinare, al variare del modello cosmologico, la potenza di vincolo di ciascuna sonda cosmologica, evidenziandone punti di forza e di debolezza che saranno poi fondamentali per meglio interpretare la loro combinazione.

Ciascuna sonda è stata perciò analizzata in riferimento a sei modelli cosmologici differenti. Questi sono suddivisibili in tre classi principali, in funzione della forma dell'equazione di stato dell'energia oscura, dove a parità di parametrizzazione viene esplorato sia il caso *flat* ($\Omega_k \equiv 0$) che il caso *open* (Ω_k libero di variare), per cui:

Λ CDM Il parametro di stato w è fissato a $w = -1$, in modo che l'energia oscura sia matematicamente equivalente all'energia del vuoto.

w CDM Si assume un parametro di stato w costante nel tempo, ma il suo valore deve essere determinato con il processo di inferenza.

$w_0 w_a$ CDM Si assume un parametro di stato w variabile con il redshift, la cui evoluzione viene parametrizzata secondo la forma $w(z) = w_0 + w_a (z/1+z)$, con i parametri w_0 e w_a che devono essere determinati con il processo di inferenza.

Sintetizziamo quindi le principali considerazioni derivate dall'analisi delle singole sonde cosmologiche.

SNeIa. In quanto candela standard, l'osservabile tramite il quale è possibile dedurre i vincoli cosmologici è il cosiddetto Diagramma di Hubble, essenzialmente il modulo di distanza $\mu(z)$.

La nostra analisi ha confermato la grande capacità di tali oggetti di vincolare in maniera precisa i parametri di densità di materia Ω_m ed energia oscura Ω_Λ . Viceversa, la forma funzionale del modulo di distanza, unita alle caratteristiche osservative di questa sonda, rendono nullo il loro potere vincolante sulla costante di Hubble H_0 .

Tuttavia, al contrario delle altre sonde cosmologiche in esame, le SNeIa hanno dimostrato di poter vincolare con ottima precisione il parametro w_0 che descrive

l'equazione di stato dell'energia oscura, specie quando le dimensionalità del modello cosmologico sono elevate.

Sono chiari perciò i motivi per cui questa venga annoverata all'interno delle principali sonde cosmologiche, anche se una forte degenerazione tra Ω_Λ , Ω_m e w_0 ne limita la potenza in riferimento a cosmologie *open*, si veda Tabella 5.1.

L'analisi delle SNeIa, sondando l'evoluzione dell'Universo tra $0 < z < 2$, ha dunque prodotto dei vincoli cosmologici compatibili e competitivi con quanto riportato in letteratura [6].

Tabella 5.1: Principali vincoli cosmologici (SNeIa–Pantheon), estratti da Tabella 3.8.

Parametro	Λ CDM	ω Λ CDM	f w CDM	ω w CDM	f w_0 w_a CDM	ω w_0 w_a CDM
Ω_m	$0.30^{+0.02}_{-0.02}$	$0.32^{+0.07}_{-0.08}$	$0.32^{+0.07}_{-0.08}$	$0.28^{+0.09}_{-0.08}$	$0.37^{+0.06}_{-0.11}$	$0.26^{+0.12}_{-0.11}$
Ω_Λ	...	$0.7^{+0.1}_{-0.1}$...	$0.5^{+0.3}_{-0.2}$...	$0.4^{+0.2}_{-0.1}$
w_0	$-1.1^{+0.2}_{-0.2}$	$-1.5^{+0.5}_{-0.8}$	$-1.1^{+0.2}_{-0.2}$	$-1.5^{+0.5}_{-0.8}$

BAO. L'analisi di questa particolare sonda cosmologica ha confermato le potenzialità della combinazione di osservazioni indipendenti in un processo di inferenza. Infatti, in un intervallo di redshift pari a $0 < z < 2.5$, la raccolta di osservazioni si riferisce ad osservabili distinti i quali sono essenzialmente funzione di due quantità cosmologiche principali: la distanza di diametro angolare $D_A(z)$ ed il parametro di Hubble $H(z)$.

La combinazione di osservabili differenti permette dunque di ottenere precisi vincoli sia su Ω_m che su H_0 , cosa non scontata dato che il principale osservabile delle BAO è $D_A(z)$ la cui forma funzionale è fondamentalmente la stessa di $\mu(z)$. Il potere di vincolo sul parametro w_0 , nel caso di una cosmologia f w CDM è paragonabile con quanto ottenuto per le SNeIa, ma tende a scemare man mano che le dimensioni del modello cosmologico aumentano (specie considerando le cosmologie *open*), come mostrato in Tabella 5.2.

Tabella 5.2: Principali vincoli cosmologici (BAO), estratti da Tabella 3.6.

Parametro	Λ CDM	ω Λ CDM	f w CDM	ω w CDM	f w_0 w_a CDM	ω w_0 w_a CDM
H_0	$69.0^{+5.1}_{-4.4}$	$67.8^{+5.1}_{-4.5}$	$67.2^{+5.1}_{-4.5}$	$67.2^{+5.4}_{-4.8}$	$65.6^{+5.8}_{-5.1}$	$67.2^{+5.2}_{-4.9}$
Ω_m	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$0.24^{+0.06}_{-0.07}$	$0.28^{+0.02}_{-0.03}$	$0.18^{+0.1}_{-0.07}$	$0.32^{+0.05}_{-0.07}$	$0.16^{+0.12}_{-0.06}$
w_0	$-0.8^{+0.2}_{-0.2}$	$-1.1^{+0.3}_{-1.0}$	$-0.6^{+0.5}_{-0.4}$	$-1.2^{+0.7}_{-1.2}$

CC. Al momento, il maggior potenziale di questa sonda risiede essenzialmente nella sua capacità di sondare direttamente il tasso di espansione dell'Universo (senza alcuna assunzione cosmologica) attraverso misure del parametro di Hubble $H(z)$ nell'intervallo $0 < z < 2$.

I risultati suggeriscono una forte capacità di vincolo sul parametro H_0 , in maniera indipendente rispetto alle BAO e senza bisogno di una calibrazione esterna. Viceversa, il ridotto numero di osservazioni (specie a $z > 0.5$) non

permette per il momento di ottenere precisi vincoli sugli altri parametri cosmologici, anche se le potenzialità di questo approccio sono evidenti specie in prospettiva di osservazioni future che vadano a colmare gli intervalli di redshift meno esplorati.

I risultati ottenuti al variare della cosmologia sono mostrati in Tabella 5.3.

Tabella 5.3: Principali vincoli cosmologici (CC), estratti da Tabella 3.4.

Parametro	Λ CDM	$o\Lambda$ CDM	fw CDM	ow CDM	fw_0w_a CDM	ow_0w_a CDM
H_0	$66.3^{+5.4}_{-5.3}$	$65.8^{+5.8}_{-5.6}$	$70.1^{+9.4}_{-8.0}$	$67.7^{+8.5}_{-6.8}$	$70.8^{+9.8}_{-9.1}$	$67.7^{+9.2}_{-7.2}$
Ω_m	$0.34^{+0.08}_{-0.06}$	$0.32^{+0.15}_{-0.16}$	$0.31^{+0.08}_{-0.07}$	$0.23^{+0.16}_{-0.12}$	$0.33^{+0.1}_{-0.09}$	$0.21^{+0.17}_{-0.12}$
Ω_Λ	...	$0.6^{+0.2}_{-0.3}$...	$0.5^{+0.3}_{-0.3}$...	$0.5^{+0.2}_{-0.3}$

QSO. Facendo parte delle nuove candele standard, l'osservabile a cui si riferiscono è anche in questo caso il Diagramma di Hubble. Ciò permette di indagare la storia evolutiva dell'Universo in maniera complementare rispetto alle SNeIa, con il vantaggio di poter accedere ad intervalli di redshift ($0 < z < 8$) inesplorabili dalle SNeIa.

Allo stato attuale, considerare solamente questa sonda nel processo di inferenza non produce risultati consistenti. Infatti, a causa del ridotto potere di vincolo a basso redshift, l'analisi dei QSO richiede di ancorare le osservazioni tramite le SNeIa, il cui potere a basso redshift è predominante e permette di calibrare adeguatamente il Diagramma di Hubble dei QSO.

La distribuzione dei dati ad alto redshift ha sottolineato inoltre una forte discrepanza con il modello standard Λ CDM, anche se uno studio comparato con le altre sonde cosmologiche a disposizione ha messo in evidenza come lo scenario favorito dai QSO venga invece fortemente sfavorito dalle altre sonde.

Si richiede dunque un approfondimento degli effetti sistematici, dei metodi di selezione e del metodo di *binnaggio* con cui il campione viene analizzato.

GRB. Così come per i QSO, l'osservabile a cui si riferiscono le osservazioni di GRB ($0 < z < 8$) è il Diagramma di Hubble, dando la possibilità di affiancare alle osservazioni di SNeIa un'ulteriore candela standard. Anche in questo caso, a causa del ridotto potere di vincolo a basso redshift (essenzialmente dovuto al ristretto numero di osservazioni in questo intervallo), la sola analisi dei GRB non permette di ottenere vincoli significativi sui parametri cosmologici.

Al contempo, i risultati ottenuti (anche in relazione alle distribuzioni χ^2) sembrano mostrare un accordo maggiore rispetto ai QSO, sottolineata dal fatto che le osservazioni ad alto redshift appaiono consistenti con un modello Λ CDM.

Da un'analisi comparata con le altre candele standard, abbiamo registrato una differenza nella normalizzazione M del Diagramma di Hubble dei GRB. In Sezione 4.1, questa è stata ricalibrata attraverso uno shift rigido del loro Diagramma di Hubble, ottenuto combinando questa sonda con le due sonde cosmologiche indipendenti dal parametro M , ossia BAO e CC.

Anche in questo caso, oltre ad un ampliamento delle osservazioni, si richiede un approfondimento degli effetti sistematici e del metodo di binnaggio con cui il campione viene analizzato, oltreché del processo di calibrazione.

2) Combinazione di Sonde Cosmologiche. Sempre in riferimento ai modelli cosmologici discussi in Sezione 3.2, le singole sonde cosmologiche vengono combinate tra loro per massimizzare i vincoli sui parametri cosmologici. La raccolta completa dei risultati ottenuti per tutte le permutazioni possibili è disponibile in Appendice A.

Pur avendo prodotto i vincoli cosmologici per ogni possibile combinazione, il nostro studio si è focalizzato principalmente su due casi: la combinazione di tutte le candele standard (HD) e la combinazione di tutte le sonde cosmologiche (FULL).

La prima combinazione consente di estendere il Diagramma di Hubble per $0 < z < 8$. La seconda produce invece i vincoli più stringenti sui parametri cosmologici.

HD. Dopo aver calibrato la normalizzazione M dei GRB, in modo da rendere tra loro consistenti i *posterior* delle tre candele standard, abbiamo estratto i vincoli cosmologici a partire da una analisi del Diagramma di Hubble unificato, ovvero analizzando in combinazione le osservazioni indipendenti di SNeIa, QSO e GRB.

La forte incertezza che caratterizza le misure di QSO e GRB ad altissimo redshift ($z > 2$) viene attenuata dalla precisa calibrazione a basso redshift offerta dalle SNeIa, che permette dunque di stabilizzare i risultati ottenuti dalle analisi indipendenti di QSO e GRB.

Questo approccio offre la possibilità unica di sondare in maniera consistente e alquanto robusta un intervallo di redshift inesplorato dalle altre sonde del Tardo Universo.

I risultati così ottenuti (mostrati in Tabella 5.4), hanno dimostrato come l'analisi del Diagramma di Hubble unificato sia in grado di fornire vincoli competitivi con le altre sonde cosmologiche in analisi.

In particolare, questa combinazione ha fornito dei vincoli particolarmente competitivi per ciò che riguarda il parametro di densità di materia Ω_m (Λ CDM), oltre ad aver riportato risultati notevoli per la stima della densità Ω_Λ (Λ CDM) e del parametro di stato w_0 (fw CDM) relativi alla componente di energia oscura.

Tabella 5.4: Principali vincoli cosmologici (Diagramma di Hubble unificato).

Parametro	Λ CDM	Λ CDM	fw CDM	ow CDM	fw_0w_a CDM	ow_0w_a CDM
Ω_m	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$0.33^{+0.05}_{-0.05}$	$0.35^{+0.05}_{-0.06}$	$0.33^{+0.06}_{-0.06}$	$0.39^{+0.05}_{-0.09}$	$0.32^{+0.08}_{-0.09}$
Ω_Λ	...	$0.78^{+0.08}_{-0.09}$...	$0.56^{+0.2}_{-0.17}$...	$0.47^{+0.16}_{-0.11}$
Ω_k	...	$-0.1^{+0.1}_{-0.1}$...	$0.1^{+0.3}_{-0.2}$...	$0.2^{+0.2}_{-0.2}$
w_0	$-1.2^{+0.2}_{-0.2}$	$-1.3^{+0.3}_{-0.6}$	$-1.1^{+0.2}_{-0.2}$	$-1.5^{+0.4}_{-0.6}$

FULL. Questa è la combinazione da cui è possibile estrarre i vincoli cosmologici più stringenti e dunque, come approfondiremo in seguito, il potere vincolante di ogni singola sonda cosmologica esaminata contribuisce in forme diverse ai risultati in Tabella 5.5.

I vincoli cosmologici ottenuti tramite questa combinazione rappresentano perciò il principale risultato di questa Tesi. A partire da una combinazione di 5 sonde cosmologiche del Tardo Universo è stato ricavato un risultato consistente e competitivo con tutta la letteratura di riferimento, sia per quel che riguarda le sonde cosmologiche dell’Universo primordiale (Planck Collaboration [5]) che quanto concerne le analisi svolte sulle singole sonde cosmologiche esaminate nel nostro studio (SNeIa [6, 104], BAO [7], CC [8], QSO [9] e GRB [10]).

Per la prima volta in letteratura, questa particolare combinazione di sonde cosmologiche è stata analizzata su di un’ampia classe di cosmologie, producendo vincoli significativi sui principali parametri cosmologici (H_0 , Ω_m , Ω_Λ , w_0) al progredire della complessità del modello.

Viste le ipotesi su cui il nostro studio indaga (essenzialmente curvatura ed energia oscura), i risultati ottenuti suggeriscono come non vi siano chiare evidenze di una deviazione dal modello standard Λ CDM. E anzi appaiono fortemente in accordo con l’ipotesi di costante cosmologica Λ , la cui significatività raggiunge il massimo nel caso della cosmologia fw CDM.

Tabella 5.5: Principali vincoli cosmologici (FULL), estratta da Tabella 4.4.

Parametro	$f\Lambda$ CDM	$o\Lambda$ CDM	fw CDM	ow CDM	fw_0w_a CDM	ow_0w_a CDM
H_0	$69.4^{+3.2}_{-3.2}$	$69.7^{+3.3}_{-3.2}$	$69.4^{+3.2}_{-3.3}$	$69.8^{+3.3}_{-3.2}$	$69.2^{+3.2}_{-3.1}$	$69.4^{+3.5}_{-3.3}$
Ω_m	$0.29^{+0.01}_{-0.01}$	$0.31^{+0.03}_{-0.03}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$0.32^{+0.03}_{-0.04}$	$0.26^{+0.04}_{-0.08}$	$0.28^{+0.05}_{-0.07}$
Ω_Λ	...	$0.76^{+0.07}_{-0.07}$...	$0.81^{+0.11}_{-0.13}$...	$0.79^{+0.12}_{-0.15}$
Ω_k	...	$-0.07^{+0.11}_{-0.11}$...	$-0.1^{+0.1}_{-0.2}$...	$-0.1^{+0.2}_{-0.2}$
w_0	$-1.00^{+0.07}_{-0.07}$	$-0.94^{+0.07}_{-0.1}$	$-0.98^{+0.09}_{-0.09}$	$-0.96^{+0.09}_{-0.14}$
w_a	$0.6^{+0.5}_{-0.8}$	$0.4^{+0.6}_{-0.8}$

Nello specifico troviamo che, per una cosmologia $f\Lambda$ CDM, le misure della densità di materia Ω_m mostrano una significativa consistenza con la letteratura. Inoltre, il risultato ottenuto acquisisce di valore se si considera che, basandosi esclusivamente su sonde del Tardo Universo, abbiamo raggiunto una precisione minore solo di un fattore ~ 2 rispetto a quella ottenuta dalle misure della Planck Collaboration [5].

Per una cosmologia $o\Lambda$ CDM, il vincolo sul parametro Ω_k mostra la consistenza dell’ipotesi di curvatura con un livello di confidenza $\mathcal{O}(10^0)$ il quale, seppur in minor misura, risulta comunque consistente con quanto prodotto in letteratura [5, 87].

Per ow CDM e le cosmologie w_0w_a CDM, possiamo notare come i risultati ottenuti siano pienamente consistenti con quanto ottenuto per le altre cosmologie. L’elevata dimensionalità dei modelli ha però un impatto maggiore sulla significatività dei vincoli i quali risultano perciò meno precisi.

Ci soffermiamo ora sui risultati da cui è possibile trarre interessanti spunti in vista di analisi future.

Il risultato che può fornire una chiave di lettura indipendente sulla nota Tensione di Hubble, è il vincolo imposto sul parametro H_0 nel caso di una cosmologia standard Λ CDM. In Figura 5.1, confrontiamo i risultati prodotti dalla nostra analisi rispetto alla principale letteratura in riferimento a tale tensione.

Non avendo una precisione comparabile con le misure che hanno evidenziato la tensione [5, 67], la combinazione totale delle sonde esaminate non è in grado di proporre una possibile risoluzione, ma sottolineiamo comunque come l'accordo con entrambe le “fazioni”, con una leggera tendenza verso il risultato ottenuto dall'analisi della CMB.

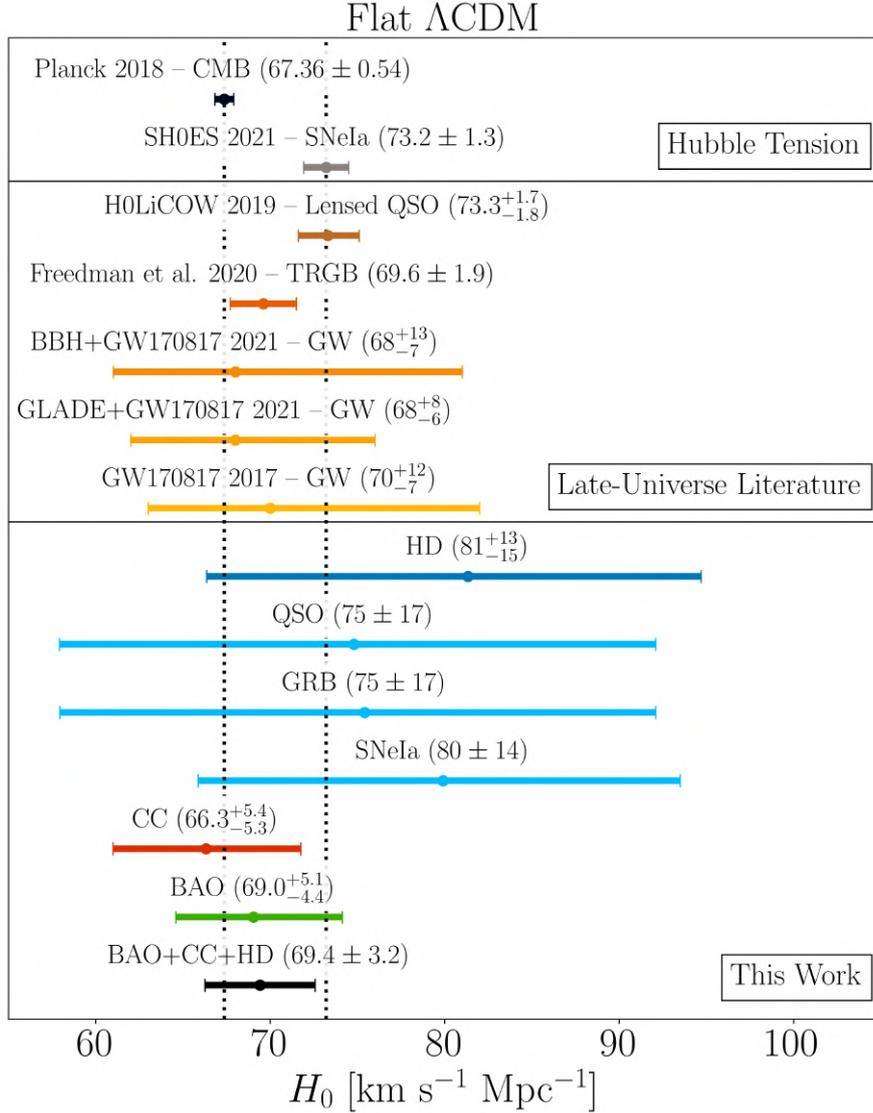


Figura 5.1: Tensione sulla misura del parametro H_0 in Λ CDM. Nel pannello inferiore riportiamo i risultati ottenuti dalla nostra analisi, presi da Tabella 6. Nel pannello centrale riportiamo alcuni dei valori ottenuti in letteratura da analisi del tardo Universo: H0LiCOW [83], Freedman et al. [90], BBH+GW170817 [211], GLADE+GW170817 [211] e GW170817 [212]. Infine, nel pannello superiore riportiamo le misure che hanno sollevato la Tensione di Hubble: Planck [5] e SHOES [67]. Le linee tratteggiate verticali riportano per confronto i risultati relativi alla Tensione di Hubble. Il grafico è riadattato da [213].

È interessante notare che, tra tutte le sonde esaminate, solo BAO e CC abbiano la capacità di vincolare H_0 poiché le candele standard (dato il loro osservabile) risultano completamente insensibili a tale parametro. Allo stesso tempo però, data la maggiore sensibilità di queste ultime al parametro di densità della materia Ω_m , la loro inclusione nell'analisi permette di ottenere una significatività maggiore in quanto riduce gli effetti della degenerazione tra H_0 e Ω_m . Inoltre, osservando i vincoli su H_0 ricavati per le altre cosmologie (Tabella 5.5) possiamo notare come tutti i valori siano tra loro consistenti, con una precisione sempre $< 5\%$, a riprova della grande forza di vincolo di BAO e CC.

Questo ci permette di dunque affermare che, in prospettiva futura, l'inclusione all'interno della nostra analisi di ulteriori sonde cosmologiche del Tardo Universo potrà contribuire significativamente al raggiungimento di una precisione competitiva rispetto alle misure riportate in letteratura.

A tal proposito, vogliamo qui anticipare alcune considerazioni sul futuro della combinazione di sonde cosmologiche, di cui daremo maggiori dettagli in seguito. Tra le possibili sonde cosmologiche emerse nell'ultimo decennio, le Onde Gravitazionali (GW) presentano sicuramente il maggior carattere innovativo. Abbiamo visto in Sezione 1.3, come le misure di H_0 ricavate dall'osservazione delle SNeIa nell'Universo locale (essenzialmente le misure della SH0ES Collaboration che hanno evidenziato la Tensione di Hubble) richiedano l'utilizzo della scala delle distanze e dunque di una calibrazione a priori.

Viceversa, la profonda conoscenza della Relatività Generale e le caratteristiche osservative delle GW (che discuteremo in seguito) permettono di utilizzare questi straordinari eventi come sonde cosmologiche indipendenti per la misura di H_0 , senza la necessità di una calibrazione esterna.

Sono dunque evidenti le potenzialità dell'utilizzo di questa nuova sonda cosmologica, con i vincoli cosmologici ricavati finora (in Figura 5.1) che ci permettono di sottolineare un importante aspetto.

Per estrarre dei vincoli da una qualsivoglia sonda cosmologica, abbiamo bisogno di misurare una certa quantità (che dipenda dai parametri cosmologici) in funzione del redshift. Nel caso delle GW, però, misurare il redshift è praticamente impossibile se non per quegli eventi in cui la radiazione gravitazionale possiede una controparte elettromagnetica (le cosiddette Sirene Luminose, tipicamente sistemi binari di stelle di neutroni). Nasce qui la maggior fonte di incertezza nel caso delle GW, infatti quando l'evento non produce una controparte elettromagnetica il redshift della sorgente (o meglio della galassia che la ospita) deve essere derivato statisticamente all'interno di un catalogo di possibili galassie ospite, con ovvie conseguenze sulla stima del redshift. Non è infatti un caso che le misure più accurate finora prodotte (BBH e GLADE [211]) includano nella loro analisi l'unico evento mai osservato in cui al segnale gravitazionale (GW170817) sia stata associata la controparte elettromagnetica (GRB170817A). A riprova di quanto detto, osserviamo come (da solo) questo evento fornisca una precisione paragonabile con le altre due misure, ottenute invece da un catalogo composito di eventi GW.

La strada verso l'accuratezza nei vincoli cosmologici è dunque ancora lunga, ma le potenzialità di questa sonda sono evidenti tanto da poter affermare che, in un futuro prossimo, rappresenterà sicuramente un punto di svolta nella nostra comprensione dell'Universo.

Concludiamo con il notevole risultato ottenuto, per una cosmologia fw CDM, nella misura del parametro di stato w_0 . La combinazione totale delle sonde cosmologiche a disposizione permette infatti di ottenere un vincolo particolarmente stringente su questo parametro ($w = -1.00 \pm 0.07$ 68%) il quale ci consente di affermare la consistenza dell'ipotesi di energia oscura sotto forma di costante cosmologica con un livello di confidenza pari a $\mathcal{O}(10^{-1})$.

Questa risulta essere una misura estremamente valida se confrontata con quanto riportato da altre analisi indipendenti [6, 7], come è possibile dedurre osservando la Figura 5.2. Tramite questa rappresentazione possiamo inoltre ricavare delle informazioni molto significative sulla nostra analisi e sullo stato dell'arte nella misura di questo parametro.

Innanzitutto, la nostra analisi ricavata dalle SNeIa mostra una totale consistenza con quanto ricavato indipendentemente in [6] (Scolnic 2018 - SNeIa), confermando la validità e la robustezza del nostro processo di analisi.

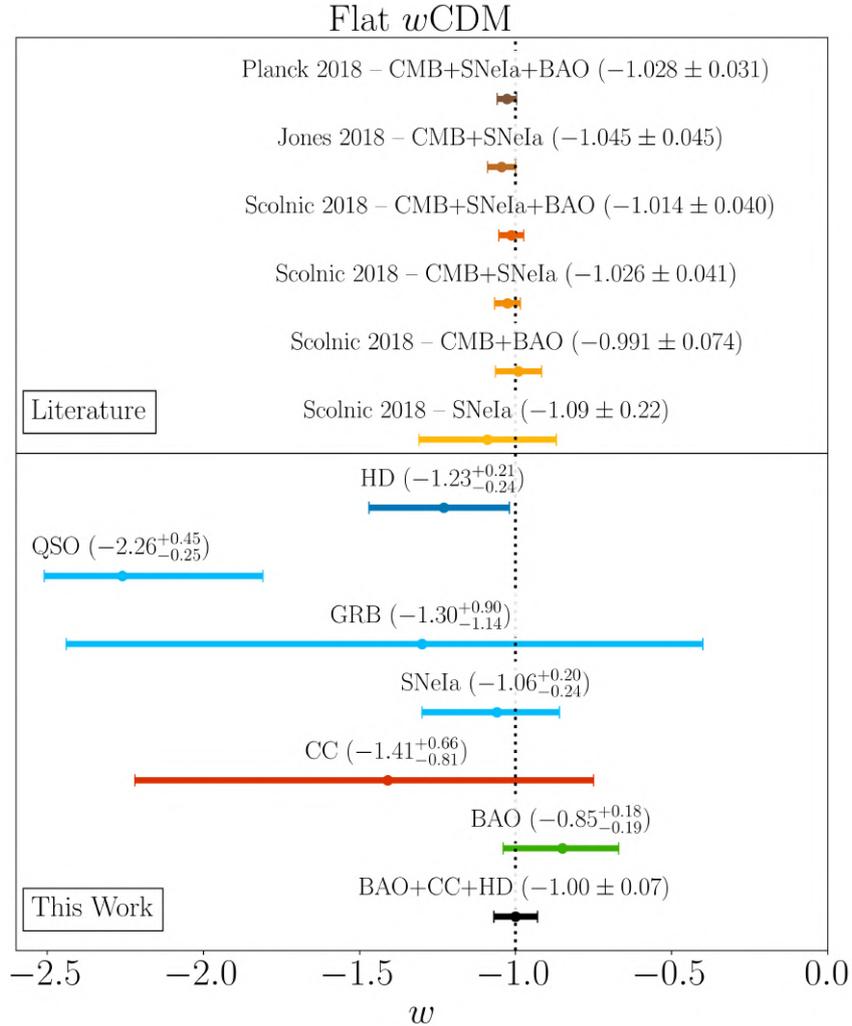


Figura 5.2: Confronto tra misure del parametro w per una cosmologia fw CDM. Nel pannello inferiore riportiamo i risultati ottenuti dalla nostra analisi, presi da Tabella 7. Nel pannello superiore riportiamo alcuni dei valori ottenuti in letteratura: Planck [5], Jones [104] e Scolnic [6]. La linea tratteggiata verticale segna il valore di $w = -1$ assumendo una costante cosmologica. Il grafico è riadattato a partire da [213].

In secondo luogo, notiamo come, analizzando esclusivamente un insieme di sonde cosmologiche del Tardo Universo, la nostra analisi raggiunga una precisione ed un'accuratezza estremamente competitive rispetto ai risultati ottenuti da analisi indipendenti [5, 6, 104] che fanno però uso di una combinazione di sonde del Tardo Universo (SNeIa, BAO) e dell'Universo primordiale (CMB).

Questo conferma le potenzialità di un approccio completamente basato sull'osservazione dell'Universo nelle sue fasi più recenti.

L'ultima considerazione che facciamo a riguardo è forse la più importante nell'ottica di studi futuri. Osservando i valori di w_0 ricavati tramite le analisi sulle singole sonde, possiamo notare come, mentre le SNeIa producono un vincolo alquanto preciso, le due candele standard alternative QSO e GRB mostrano problematiche maggiori.

La forte deviazione dei QSO è essenzialmente dovuta al comportamento osservato in Sezione 4.2.3 per $z > 1.5$, mentre i GRB appaiono altamente imprecisi nella stima di w probabilmente a causa delle lacune nei dati osservativi. Questi comportamenti si riflettono poi nella stima ottenuta tramite l'analisi del Diagramma di Hubble unificato (HD). È dunque evidente, date le potenzialità delle candele standard nel vincolare tale parametro, come un miglioramento statistico nell'analisi di QSO e GRB (coadiuvato da un ampliamento e miglioramento delle osservazioni) possa contribuire significativamente alla riduzione delle incertezze nella misura di w . La stessa considerazione sembra valere per i CC, anche se in questo caso le ridotte capacità di vincolo appaiono principalmente dovute al ridotto numero di osservazioni a $z > 0.5$ dove la sensibilità da questo parametro è maggiore.

3) Sinergie e Complementarità. L'analisi svolta sulle singole sonde ne ha messo in evidenza il potere vincolante in riferimento a specifici parametri cosmologici. Sfruttando queste informazioni, abbiamo costruito un primo metodo analitico per identificare le degenerazioni parametriche definendo l'angolo di degenerazione β come l'orientazione, rispetto alle ascisse, dei contorni di confidenza su un dato piano all'interno dello spazio dei parametri. Abbiamo quindi implementato un secondo metodo per quantificare l'ortogonalità tra sonde cosmologiche indipendenti. Essenzialmente, a partire dalle misure degli angoli di degenerazione β , abbiamo definito l'orientazione relativa α tra due sonde come la differenza tra i propri angoli di degenerazione. Per quantificare meglio l'ortogonalità abbiamo poi introdotto un parametro \varkappa tale per cui:

- $\varkappa = 0 \rightarrow$ contorni di confidenza paralleli ($\alpha = 0$);
- $\varkappa = 1 \rightarrow$ contorni di confidenza ortogonali ($\alpha = \pi/2$).

Attraverso la definizione (e l'implementazione) di questo metodo analitico per identificare le degenerazioni tra i parametri e quantificare le sinergie tra le sonde, siamo dunque riusciti a confermare numericamente alcune osservazioni ricavate dalla precedente analisi cosmologica.

In particolare, questa prima definizione è risultata particolarmente adatta ed efficace nel stimare le direzioni di degenerazione nel caso in cui i contorni di confidenza mostrino forme particolarmente regolari ed uniformi.

Viceversa, l'utilizzo del metodo dell'ellisse di covarianza come sonda della degenerazione conduce a forti incertezze a causa dell'andamento curvilineo del suo asse maggiore.

Il metodo è risultato perciò applicabile in maniera valida e consistente nel caso di cosmologie Λ CDM, $\text{o}\Lambda$ CDM e fw CDM, dove tutte le sonde cosmologiche in esame possiedono un potere vincolante tale da rendere regolari ed uniformi i contorni.

È dunque per queste cosmologie che si è riusciti ad ottenere una prima quantificazione analitica delle sinergie e complementarità tra le sonde cosmologiche.

In particolare, i risultati ottenuti possono essere riassunti come:

Flat Λ CDM. La precisione raggiunta dalla combinazione FULL sul parametro H_0 è essenzialmente dovuta alla sinergia tra le BAO ed i CC, mentre il vincolo sul parametro Ω_m è imposto dalla sinergia tra le BAO e HD.

Dunque, nel caso di una cosmologia Λ CDM, le sonde cosmologiche a disposizione svolgono un ruolo complementare nel miglioramento dei vincoli.

I CC spingono la precisione su H_0 , mentre è HD ad accentuare la precisione su Ω_m , con le BAO che (data la loro grande forza vincolante su entrambi i parametri) fungono da raccordo tra CC e HD.

In termini di α e \varkappa , la marcata ortogonalità tra BAO e CC, che amplifica la sinergia tra le due sonde, viene quantificata come:

$$BAO \widehat{CC} \quad \alpha = 52.0^\circ \text{ e } \varkappa = 0.58.$$

Lo sforzo offerto dalla combinazione di tutte le sonde a disposizione è dunque in grado di attenuare fortemente la degenerazione tra H_0 e Ω_m .

Open Λ CDM. In questo caso nessuna coppia è in grado da sola di massimizzare il vincolo sui parametri Ω_m e Ω_Λ , dunque per raggiungere la precisione massima si richiede la sinergia di tutte le sonde su entrambi i parametri.

La degenerazione geometrica appare perciò troppo forte per poter essere superata dagli attuali insiemi di dati a disposizione, il che si riflette come visto nella misura del parametro Ω_k .

La forza di tale degenerazione può essere esplicitata osservando che, sul piano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$, i contorni appaiono orientati approssimativamente lungo la stessa direzione:

$$BAO \widehat{CC} \quad \alpha = 8.8^\circ \text{ e } \varkappa = 0.10;$$

$$BAO \widehat{HD} \quad \alpha = 11.7^\circ \text{ e } \varkappa = 0.13;$$

$$CC \widehat{HD} \quad \alpha = 3.0^\circ \text{ e } \varkappa = 0.03.$$

Flat w CDM. Questo caso è forse il più interessante perché mostra come la precisione raggiunta tramite la combinazione FULL, sia essenzialmente dovuta alla sola combinazione BAO+HD.

È dunque la sinergia tra BAO e HD ad imporre il maggior vincolo su entrambi i parametri Ω_m e w_0 , con i CC che fungono da semplice rinormalizzazione sul parametro w_0 portando il risultato ottenuto da BAO+HD verso $w = -1$.

Anche in questo caso però, la degenerazione tra Ω_m e w_0 persiste, con i contorni di confidenza ottenuti dalla combinazione FULL che sembrano giacere lungo la stessa direzione che caratterizza la degenerazione nel caso HD (Figura 5.3).

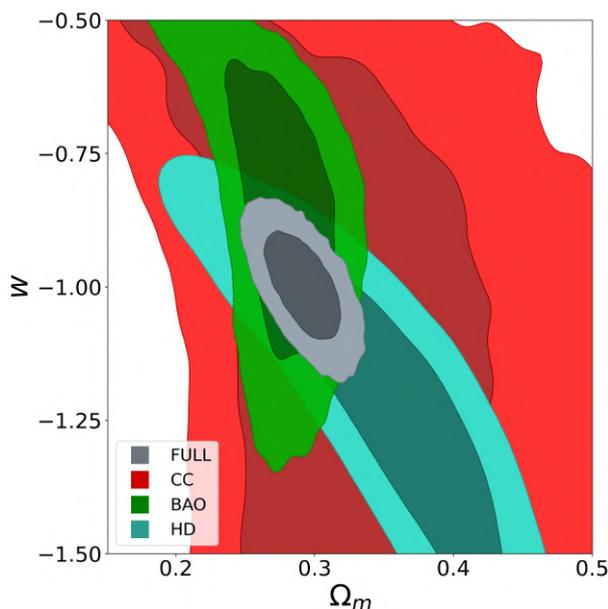


Figura 5.3: Sovrapposizione dei contorni di confidenza (piano $\Omega_m - w$, Flat w CDM) ottenuti dall'analisi di BAO (verde), CC (rosso), HD (blu) e BAO+CC+HD (grigio).

Prospettive Future

Il nostro è dunque uno dei periodi più floridi per la cosmologia moderna poiché la grande disponibilità di dati ci dà la possibilità di iniziare a rispondere alle questioni ancora aperte sulla natura del cosmo, con la prospettiva di migliorare sempre di più i vincoli sui modelli cosmologici man mano che le grandi indagini osservative previste per il prossimo futuro metteranno a disposizione un'ulteriore valanga di dati. In ottica di un miglioramento della nostra analisi, sono dunque diversi i punti su cui porre l'attenzione.

Il primo riguarda l'accuratezza e l'efficienza delle tecniche di campionamento MCMC su cui si basare la propria analisi. Finora la convergenza delle catene è stata valutata visivamente osservando l'andamento dei camminatori nello spazio dei parametri. Esistono diversi metodi che permettono di automatizzare questa procedura, attraverso l'utilizzo di particolari criteri di convergenza, garantendo la prosecuzione del campionamento MCMC finché la convergenza non sia raggiunta.

Sfruttando questi metodi saremo in grado di porre l'analisi su solide basi statistiche da cui poi sviluppare risultati cosmologici altrettanto solidi. Infatti, l'utilizzo di tali tecniche fa sì che, per ogni insieme di dati, il numero di campioni estratti dalla distribuzione sia imposto dal criterio di convergenza così che non si creino situazioni in cui i contorni di confidenza di alcune sonde (nel nostro caso i GRB o i QSO) risultino particolarmente frastagliati rispetto agli altri.

Il secondo punto riguarda la consistenza tra le diverse sonde cosmologiche esaminate. È ovvio che, come potuto vedere nel caso della normalizzazione M dei GRB, caratteristiche osservative peculiari di alcune sonde possano influire sulla bontà dei vincoli cosmologici. Perciò un accurato lavoro che vada a calibrare in maniera adeguata tutte le sonde cosmologiche a disposizione, provando anche a stimare una possibile covarianza tra di esse, potrà sicuramente giovare alla robustezza dei risultati cosmologici.

Terzo punto, la quantificazione delle sinergie per la quale le questioni su cui svolgere un approfondimento futuro sembrano essere principalmente due.

Innanzitutto, come visto, l'identificazione della direzione di degenerazione tramite l'asse maggiore dell'ellisse di covarianza genera delle incongruenze quando la forma dei contorni

si allontana sensibilmente da un ellissoide. Dunque, l'implementazione di un metodo più accurato per stimare tali direzioni è sicuramente centrale per una quantificazione precisa delle sinergie tra sonde cosmologiche.

Inoltre, analizzare le distribuzioni in maniera tale che esse varino all'interno degli stessi intervalli parametrici, attenuando dunque gli effetti del fattore di scala, permetterà di individuare accuratamente quali particolari combinazioni di sonde cosmologiche possiedano le proprietà adatte per rompere le degenerazioni.

Infine, per quel che riguarda l'ampliamento degli insiemi di dati a disposizione, da un punto di vista puramente osservativo, saranno sicuramente le future missioni spaziali a fornire il miglior strumento per comprendere meglio la fisica alla base dell'Universo.

Si prevede infatti che le osservazioni future, come Euclid [214] e Roman Space Telescope [215], produrranno misure cosmologiche sempre più accurate, specialmente per i modelli che consentono all'equazione di stato dell'energia oscura di evolvere nel tempo, consentendo così di ottenere una precisa mappatura della storia di espansione dell'Universo.

Dal punto di vista dello sviluppo di nuove sonde cosmologiche in grado di fornire strumenti cosmologici indipendenti, come detto, è il crescente numero di osservazioni di onde gravitazionali (GW) a rappresentare uno dei punti cardine della futura cosmologia osservativa. Forniamo qui alcuni spunti riassuntivi, con alcuni riferimenti alla letteratura e alla nuova generazione di strumenti per osservare questo peculiare fenomeno astrofisico.

Sirene Standard. Le GW sono un fenomeno previsto dalla Relatività Generale e ci si riferisce ad esse anche come radiazione gravitazionale, per sottolineare la sua equivalenza concettuale alla radiazione elettromagnetica. La prima rivelazione diretta di questo fenomeno [216] risale al 2015 da parte delle collaborazioni LIGO [217] e Virgo [218] ed ha aperto una nuova finestra per lo studio dell'Universo, la cosiddetta astronomia multi-messaggera.

Da allora, il catalogo di eventi GW osservati è in continua crescita [219, 220, 221]. Gli attuali rivelatori sono sensibili solo ad un particolare tipo di radiazione gravitazionale, infatti LIGO/Virgo sono in grado di rivelare eventi in un particolare range di frequenza, tra qualche decina di Hz fino a qualche kHz (con la massima sensibilità intorno ai 200Hz). Questo implica che le GW rivelabili siano emesse da sistemi binari compatti, ovvero una coppia di corpi massicci in orbita attorno al proprio centro di massa, la cui massa totale può andare da qualche volta a qualche centinaio di volte la massa solare. A causa della variazione temporale del termine di quadrupolo del potenziale gravitazionale, si ha una emissione di radiazione gravitazionale da parte del sistema il quale, subendo una perdita di energia, riduce la propria orbita fino a coalescere.

Quale sia il residuo della coalescenza non è ancora chiaro, infatti il sistema può essere composto da coppie di oggetti diversi: una coppia di buchi neri (BBH), una coppia di stelle di neutroni (BNS) oppure una stella di neutroni/nana bianca ed un buco nero (NS-BH). Mentre sistemi che includono coppie di nane bianche non sembrano in grado di emettere una quantità di radiazione gravitazionale rivelabile con le attuali sensibilità. Dunque il residuo potrebbe essere un buco nero di massa superiore, come osservato per la maggior parte degli eventi finora registrati, oppure una stella di neutroni nel caso di una BNS in cui la massa totale del sistema non superi la massa critica per un stella di neutroni. La prima rivelazione di una fusione binaria di stelle di neutroni (GW170817) ha evidenziato come questi sistemi potrebbero essere uno dei progenitori di alcuni dei fenomeni astrofisici più complessi ed energetici dell'Universo, i GRB.

L'osservazione di questi eventi ha dunque permesso di individuare un perno attorno al quale ruoteranno gran parte dei futuri studi astrofisici. Da un punto di vista cosmologico, il potenziale utilizzo delle GW è stato evidenziato per la prima volta alla fine degli anni

'80 [222]. Le caratteristiche del sistema possono essere ricavate dalla forma d'onda osservata, in maniera indipendente, senza bisogno di alcuna calibrazione esterna. Misurando la massa totale e la frequenza angolare dell'orbita è possibile ricavare la quantità di energia emessa sotto forma di GW da cui siamo in grado di dedurre la luminosità intrinseca (intesa come variazione temporale di energia) del sistema a partire dalla massa del sistema e dalle caratteristiche dell'orbita.

In analogia alle osservazioni di SNeIa, le osservazioni di GW rappresentano un nuovo tipo di strumento cosmologico noto come *Sirene Standard*. Infatti l'espansione dell'Universo influisce sulle quantità osservate, essenzialmente il flusso di energia, e conoscendo le caratteristiche intrinseche del sistema è possibile porre dei vincoli sui parametri cosmologici. L'ampiezza del segnale GW dipende direttamente dalla distanza dell'oggetto. È dunque fondamentale misurare il redshift a cui si trova la sorgente.

Questo può essere misurato in due modi differenti. Se il sistema comprende almeno un oggetto che emette radiazione elettromagnetica (BNS o NS-BH), la coalescenza porterà all'emissione di onde gravitazionali con una relativa controparte elettromagnetica. Quest'ultima è fondamentale per rivelare direttamente la sorgente ed individuarne il redshift, e si parla dunque di *Sirene Luminose*. Se invece il sistema è composto da una coppia di buchi neri, ma non è escluso che questo valga anche per un sistema NS-BH, il redshift della sorgente (in realtà quello della galassia ospite) è dedotto attraverso un approccio statistico utilizzando l'insieme di galassie contenute all'interno della regione di localizzazione del segnale GW. In questo caso si parla di *Sirene Oscure*.

Ad oggi, con la rete di rivelatori a disposizione, queste regioni sono dell'ordine di qualche centinaia di deg^2 ma nelle prossime decadi, con l'aggiunta di osservatori alla rete attuale, si prevede un miglioramento fino a 5-20 deg^2 [223]. In particolare, poiché le misure di GW per ora sono ristrette all'Universo locale, misurando la distanza di eventi a $z < 0.1$, è possibile vincolare, in maniera indipendente da qualsivoglia assunzione cosmologica, la costante di Hubble H_0 . Difatti, distanza e redshift sono correlati ad H_0 tramite la legge di Hubble. Per gli oggetti nell'Universo locale, la relazione è lineare e dipende dunque solo dal valore locale del parametro di Hubble.

È evidente a questo punto, come questa nuova sonda indipendente di H_0 potrebbe aiutare a chiarire la tensione sull'inferenza di questo parametro. Segnali GW a basso redshift, con i futuri miglioramenti osservativi e statistici, saranno in grado di stimare la costante di Hubble con precisione dell'ordine di qualche punto percentuale [224]. Poiché oltre $z \sim 0.1$, la relazione distanza-redshift dipende anche da altri parametri cosmologici, inclusa la densità di materia ed energia oscura, ne consegue quindi che gli eventi GW a questi redshift rappresenteranno un'opportunità unica per vincolare i parametri cosmologici.

Questo risultato sarà raggiunto grazie alla prossima generazione di rivelatori, come il Laser Interferometer Space Antenna, l'Einstein Telescope ed il Cosmic Explorer, la cui incredibile sensibilità permetterà di ampliare la tipologia di eventi osservabili e di ottenere misurazioni precise della distanza anche a redshift elevati [225, 226, 227, 228, 229, 230]. Maggiori dettagli possono essere trovati in diverse recensioni [103, 231], mentre lo stato delle osservazioni può essere trovato negli studi LIGO/Virgo [102].

Appendice A

Tabella 6: Vincoli cosmologici per un modello Flat Λ CDM. La dicitura delle sonde riporta: B=BAO; C=CC; S=SN; G=GRB; Q=QSO.

Probe	H_0 [km/s/Mpc]	Ω_m
-	-	-
BAO	$69.04^{+5.09}_{-4.45}$	$0.285^{+0.020}_{-0.018}$
CC	$66.31^{+5.44}_{-5.33}$	$0.339^{+0.081}_{-0.064}$
SN	$79.91^{+13.59}_{-14.06}$	$0.297^{+0.023}_{-0.021}$
GRB	$75.42^{+16.68}_{-17.49}$	$0.355^{+0.357}_{-0.216}$
QSO	$74.79^{+17.31}_{-16.87}$	$0.33^{+0.115}_{-0.092}$
B+C	$69.52^{+3.29}_{-3.27}$	$0.289^{+0.019}_{-0.018}$
B+S	$69.09^{+5.02}_{-4.56}$	$0.290^{+0.015}_{-0.014}$
B+G	$68.99^{+5.04}_{-4.42}$	$0.285^{+0.020}_{-0.019}$
B+Q	$68.97^{+5.05}_{-4.40}$	$0.286^{+0.019}_{-0.018}$
C+S	$69.19^{+3.60}_{-3.51}$	$0.300^{+0.020}_{-0.020}$
C+G	$67.35^{+5.38}_{-5.44}$	$0.325^{+0.076}_{-0.061}$
C+Q	$67.32^{+4.90}_{-4.75}$	$0.323^{+0.061}_{-0.052}$
S+G	$81.62^{+12.96}_{-14.57}$	$0.297^{+0.022}_{-0.022}$
S+Q	$75.47^{+16.35}_{-16.19}$	$0.298^{+0.022}_{-0.021}$
G+Q	$75.05^{+16.73}_{-17.02}$	$0.304^{+0.093}_{-0.077}$
B+C+S	$69.23^{+3.30}_{-3.25}$	$0.292^{+0.015}_{-0.014}$
B+C+G	$69.60^{+3.33}_{-3.33}$	$0.289^{+0.019}_{-0.018}$
B+C+Q	$69.38^{+3.32}_{-3.33}$	$0.292^{+0.019}_{-0.017}$
B+S+G	$68.91^{+5.08}_{-4.52}$	$0.290^{+0.015}_{-0.014}$
B+S+Q	$68.94^{+4.98}_{-4.49}$	$0.291^{+0.015}_{-0.014}$
B+G+Q	$68.94^{+5.15}_{-4.52}$	$0.286^{+0.019}_{-0.018}$
C+S+G	$69.21^{+3.60}_{-3.59}$	$0.298^{+0.021}_{-0.020}$
C+S+Q	$69.11^{+3.51}_{-3.51}$	$0.30^{+0.02}_{-0.02}$
C+G+Q	$67.90^{+4.70}_{-4.71}$	$0.317^{+0.057}_{-0.050}$
S+G+Q	$81.33^{+13.37}_{-14.98}$	$0.297^{+0.022}_{-0.021}$
B+C+S+G	$69.44^{+3.25}_{-3.17}$	$0.291^{+0.014}_{-0.014}$
B+C+S+Q	$69.21^{+3.27}_{-3.24}$	$0.293^{+0.014}_{-0.014}$
B+C+G+Q	$69.48^{+3.32}_{-3.30}$	$0.289^{+0.019}_{-0.018}$
B+S+G+Q	$68.80^{+5.07}_{-4.49}$	$0.290^{+0.014}_{-0.014}$
C+S+G+Q	$69.19^{+3.54}_{-3.55}$	$0.299^{+0.020}_{-0.019}$
B+C+S+G+Q	$69.41^{+3.16}_{-3.15}$	$0.292^{+0.014}_{-0.014}$

Tabella 7: Vincoli cosmologici per un modello Flat w CDM. La dicitura delle sonde riporta: B=BAO; C=CC; S=SN; G=GRB; Q=QSO.

Probe	H_0 [km/s/Mpc]	Ω_m	w
-	-	-	-
BAO	$67.18^{+5.08}_{-4.54}$	$0.277^{+0.023}_{-0.025}$	$-0.85^{+0.18}_{-0.19}$
CC	$70.06^{+9.42}_{-8.00}$	$0.311^{+0.077}_{-0.070}$	$-1.41^{+0.66}_{-0.81}$
SN	$76.78^{+15.56}_{-14.97}$	$0.321^{+0.069}_{-0.081}$	$-1.06^{+0.20}_{-0.24}$
GRB	$74.32^{+17.42}_{-16.86}$	$0.386^{+0.362}_{-0.238}$	$-1.30^{+0.90}_{-1.14}$
QSO	$74.8^{+17.08}_{-16.75}$	$0.328^{+0.078}_{-0.062}$	$-2.66^{+0.45}_{-0.25}$
B+C	$67.64^{+4.00}_{-3.82}$	$0.282^{+0.022}_{-0.023}$	$-0.87^{+0.17}_{-0.17}$
B+S	$68.60^{+4.95}_{-4.50}$	$0.284^{+0.019}_{-0.019}$	$-0.96^{+0.07}_{-0.07}$
B+G	$67.04^{+5.34}_{-4.61}$	$0.276^{+0.023}_{-0.027}$	$-0.83^{+0.18}_{-0.19}$
B+Q	$69.32^{+5.34}_{-4.72}$	$0.283^{+0.020}_{-0.019}$	$-1.03^{+0.18}_{-0.20}$
C+S	$68.18^{+3.75}_{-3.76}$	$0.333^{+0.044}_{-0.052}$	$-1.11^{+0.15}_{-0.17}$
C+G	$69.97^{+9.23}_{-7.54}$	$0.304^{+0.076}_{-0.070}$	$-1.33^{+0.64}_{-0.81}$
C+Q	$77.68^{+7.17}_{-6.73}$	$0.298^{+0.051}_{-0.042}$	$-2.47^{+0.50}_{-0.36}$
S+G	$77.36^{+15.16}_{-15.92}$	$0.31^{+0.064}_{-0.086}$	$-1.03^{+0.20}_{-0.21}$
S+Q	$77.87^{+15.19}_{-15.72}$	$0.375^{+0.050}_{-0.058}$	$-1.27^{+0.21}_{-0.24}$
G+Q	$74.67^{+17.42}_{-16.94}$	$0.318^{+0.073}_{-0.057}$	$-2.63^{+0.46}_{-0.27}$
B+C+S	$69.38^{+3.19}_{-3.24}$	$0.287^{+0.018}_{-0.018}$	$-0.97^{+0.06}_{-0.07}$
B+C+G	$67.47^{+4.07}_{-3.85}$	$0.280^{+0.022}_{-0.024}$	$-0.85^{+0.17}_{-0.18}$
B+C+Q	$69.85^{+4.16}_{-4.04}$	$0.287^{+0.019}_{-0.019}$	$-1.03^{+0.17}_{-0.18}$
B+S+G	$68.56^{+5.05}_{-4.40}$	$0.283^{+0.019}_{-0.018}$	$-0.96^{+0.07}_{-0.07}$
B+S+Q	$68.66^{+5.06}_{-4.36}$	$0.289^{+0.018}_{-0.018}$	$-0.99^{+0.07}_{-0.07}$
B+G+Q	$69.28^{+5.39}_{-4.76}$	$0.283^{+0.020}_{-0.019}$	$-1.02^{+0.18}_{-0.19}$
C+S+G	$68.44^{+3.96}_{-3.76}$	$0.321^{+0.047}_{-0.050}$	$-1.07^{+0.14}_{-0.17}$
C+S+Q	$67.32^{+3.72}_{-3.66}$	$0.358^{+0.044}_{-0.046}$	$-1.2^{+0.17}_{-0.18}$
C+G+Q	$78.07^{+6.91}_{-6.41}$	$0.294^{+0.048}_{-0.039}$	$-2.46^{+0.52}_{-0.37}$
S+G+Q	$78.63^{+14.97}_{-13.58}$	$0.365^{+0.050}_{-0.061}$	$-1.23^{+0.21}_{-0.24}$
B+C+S+G	$69.14^{+3.24}_{-3.23}$	$0.287^{+0.018}_{-0.018}$	$-0.97^{+0.07}_{-0.07}$
B+C+S+Q	$69.23^{+3.29}_{-3.24}$	$0.292^{+0.018}_{-0.018}$	$-1.00^{+0.07}_{-0.07}$
B+C+G+Q	$69.76^{+4.01}_{-3.98}$	$0.286^{+0.019}_{-0.018}$	$-1.03^{+0.17}_{-0.18}$
B+S+G+Q	$68.78^{+5.07}_{-4.47}$	$0.288^{+0.019}_{-0.018}$	$-0.99^{+0.07}_{-0.07}$
C+S+G+Q	$67.78^{+3.77}_{-3.73}$	$0.350^{+0.042}_{-0.045}$	$-1.19^{+0.16}_{-0.18}$
B+C+S+G+Q	$69.37^{+3.22}_{-3.27}$	$0.292^{+0.018}_{-0.018}$	$-1.00^{+0.07}_{-0.07}$

Tabella 8: Vincoli cosmologici per un modello Flat w_0w_a CDM. La dicitura delle sonde riporta: B=BAO; C=CC; S=SN; G=GRB; Q=QSO.

MARGINALIZED 1D CONSTRAINTS
Flat w_0w_a CDM

Probe	H_0 [km/s/Mpc]	Ω_m	w_0	w_a
-	-	-	-	-
BAO	$65.55^{+5.78}_{-5.15}$	$0.320^{+0.051}_{-0.072}$	$-0.59^{+0.48}_{-0.38}$	$-1.30^{+1.80}_{-2.13}$
CC	$70.76^{+9.84}_{-9.08}$	$0.326^{+0.103}_{-0.088}$	$-1.45^{+0.82}_{-0.89}$	$-0.96^{+2.86}_{-2.83}$
SN	$79.7^{+13.81}_{-14.93}$	$0.372^{+0.060}_{-0.113}$	$-1.08^{+0.21}_{-0.23}$	$-0.75^{+1.65}_{-2.37}$
GRB	$75.25^{+17.21}_{-17.28}$	$0.380^{+0.370}_{-0.228}$	$-1.29^{+1.38}_{-1.17}$	$-1.61^{+3.16}_{-2.3}$
QSO	$75.04^{+17.61}_{-17.81}$	$0.292^{+0.091}_{-0.179}$	$-2.37^{+0.65}_{-0.48}$	$0.27^{+4.29}_{-4.01}$
B+C	$66.96^{+4.58}_{-4.45}$	$0.303^{+0.056}_{-0.077}$	$-0.75^{+0.42}_{-0.29}$	$-0.53^{+1.30}_{-2.02}$
B+S	$68.71^{+5.13}_{-4.50}$	$0.268^{+0.037}_{-0.087}$	$-0.94^{+0.10}_{-0.09}$	$0.35^{+0.58}_{-0.95}$
B+G	$65.69^{+5.50}_{-4.92}$	$0.317^{+0.054}_{-0.079}$	$-0.62^{+0.49}_{-0.35}$	$-1.14^{+1.69}_{-2.25}$
B+Q	$70.34^{+5.73}_{-5.21}$	$0.263^{+0.046}_{-0.065}$	$-1.07^{+0.27}_{-0.27}$	$0.57^{+0.77}_{-1.40}$
C+S	$67.41^{+3.84}_{-3.79}$	$0.360^{+0.053}_{-0.09}$	$-1.05^{+0.17}_{-0.19}$	$-0.8^{+1.61}_{-2.06}$
C+G	$71.07^{+10.55}_{-9.02}$	$0.314^{+0.101}_{-0.085}$	$-1.42^{+0.82}_{-0.91}$	$-0.69^{+2.61}_{-2.91}$
C+Q	$77.71^{+7.22}_{-6.53}$	$0.290^{+0.055}_{-0.050}$	$-2.46^{+0.53}_{-0.37}$	$-0.55^{+3.72}_{-3.16}$
S+G	$80.71^{+12.99}_{-13.59}$	$0.365^{+0.063}_{-0.117}$	$-1.05^{+0.20}_{-0.23}$	$-0.82^{+1.63}_{-2.26}$
S+Q	$84.66^{+10.12}_{-13.17}$	$0.405^{+0.048}_{-0.090}$	$-1.19^{+0.23}_{-0.25}$	$-1.31^{+2.50}_{-2.33}$
G+Q	$75.26^{+16.85}_{-17.24}$	$0.312^{+0.071}_{-0.064}$	$-2.61^{+0.55}_{-0.28}$	$-1.92^{+4.42}_{-2.28}$
B+C+S	$69.20^{+3.22}_{-3.30}$	$0.265^{+0.040}_{-0.090}$	$-0.95^{+0.10}_{-0.09}$	$0.44^{+0.51}_{-0.90}$
B+C+G	$67.09^{+4.51}_{-4.22}$	$0.298^{+0.056}_{-0.080}$	$-0.76^{+0.39}_{-0.28}$	$-0.39^{+1.17}_{-1.99}$
B+C+Q	$70.89^{+4.36}_{-4.13}$	$0.258^{+0.045}_{-0.067}$	$-1.10^{+0.24}_{-0.26}$	$0.74^{+0.63}_{-1.17}$
B+S+G	$68.70^{+5.14}_{-4.38}$	$0.270^{+0.035}_{-0.068}$	$-0.94^{+0.09}_{-0.09}$	$0.29^{+0.60}_{-0.93}$
B+S+Q	$68.67^{+5.25}_{-4.44}$	$0.266^{+0.039}_{-0.081}$	$-0.97^{+0.09}_{-0.09}$	$0.48^{+0.51}_{-0.90}$
B+G+Q	$70.32^{+5.57}_{-5.20}$	$0.264^{+0.045}_{-0.062}$	$-1.07^{+0.27}_{-0.27}$	$0.56^{+0.75}_{-1.38}$
C+S+G	$67.56^{+3.85}_{-3.86}$	$0.350^{+0.057}_{-0.104}$	$-1.03^{+0.16}_{-0.18}$	$-0.63^{+1.51}_{-2.14}$
C+S+Q	$66.58^{+3.72}_{-3.65}$	$0.381^{+0.046}_{-0.092}$	$-1.11^{+0.17}_{-0.19}$	$-1.12^{+2.15}_{-2.21}$
C+G+Q	$77.90^{+6.68}_{-6.43}$	$0.293^{+0.050}_{-0.048}$	$-2.43^{+0.54}_{-0.40}$	$-0.67^{+3.38}_{-3.02}$
S+G+Q	$81.59^{+12.49}_{-14.49}$	$0.397^{+0.049}_{-0.108}$	$-1.15^{+0.21}_{-0.25}$	$-1.22^{+2.27}_{-2.32}$
B+C+S+G	$69.18^{+3.31}_{-3.13}$	$0.264^{+0.040}_{-0.087}$	$-0.95^{+0.10}_{-0.09}$	$0.46^{+0.48}_{-0.86}$
B+C+S+Q	$69.26^{+3.34}_{-3.26}$	$0.269^{+0.038}_{-0.076}$	$-0.98^{+0.09}_{-0.09}$	$0.50^{+0.49}_{-0.86}$
B+C+G+Q	$70.78^{+4.39}_{-4.27}$	$0.258^{+0.045}_{-0.063}$	$-1.09^{+0.24}_{-0.26}$	$0.69^{+0.67}_{-1.18}$
B+S+G+Q	$68.81^{+5.19}_{-4.40}$	$0.266^{+0.039}_{-0.077}$	$-0.97^{+0.09}_{-0.09}$	$0.47^{+0.51}_{-0.91}$
C+S+G+Q	$66.76^{+3.69}_{-3.65}$	$0.379^{+0.045}_{-0.073}$	$-1.11^{+0.17}_{-0.20}$	$-1.11^{+1.88}_{-2.22}$
B+C+S+G+Q	$69.22^{+3.23}_{-3.09}$	$0.264^{+0.041}_{-0.083}$	$-0.98^{+0.09}_{-0.09}$	$0.55^{+0.45}_{-0.84}$

Tabella 9: Vincoli cosmologici per un modello Open Λ CDM. La dicitura delle sonde riporta: B=BAO; C=CC; S=SN; G=GRB; Q=QSO.

Probe	H_0 [km/s/Mpc]	Ω_m	Ω_Λ	Ω_k
-	-	-	-	-
BAO	$67.76^{+5.12}_{-4.54}$	$0.240^{+0.064}_{-0.070}$	$0.567^{+0.198}_{-0.228}$	$0.193^{+0.262}_{-0.298}$
CC	$65.79^{+5.78}_{-5.61}$	$0.322^{+0.146}_{-0.161}$	$0.625^{+0.248}_{-0.33}$	$0.053^{+0.394}_{-0.490}$
SN	$80.69^{+13.30}_{-14.24}$	$0.324^{+0.072}_{-0.076}$	$0.748^{+0.111}_{-0.119}$	$-0.072^{+0.183}_{-0.195}$
GRB	$75.77^{+16.46}_{-17.15}$	$0.296^{+0.271}_{-0.166}$	$0.375^{+0.347}_{-0.262}$	$0.329^{+0.617}_{-0.428}$
QSO	$76.2^{+16.59}_{-17.47}$	$0.464^{+0.144}_{-0.119}$	$0.935^{+0.050}_{-0.112}$	$-0.398^{+0.193}_{-0.231}$
B+C	$67.63^{+4.03}_{-3.79}$	$0.251^{+0.057}_{-0.064}$	$0.587^{+0.168}_{-0.196}$	$0.163^{+0.225}_{-0.261}$
B+S	$68.98^{+4.96}_{-4.59}$	$0.281^{+0.039}_{-0.039}$	$0.690^{+0.082}_{-0.088}$	$0.029^{+0.122}_{-0.128}$
B+G	$67.33^{+5.08}_{-4.43}$	$0.228^{+0.056}_{-0.06}$	$0.526^{+0.175}_{-0.201}$	$0.246^{+0.232}_{-0.261}$
B+Q	$70.68^{+5.08}_{-4.66}$	$0.339^{+0.032}_{-0.038}$	$0.890^{+0.075}_{-0.118}$	$-0.230^{+0.108}_{-0.156}$
C+S	$69.29^{+3.64}_{-3.52}$	$0.331^{+0.065}_{-0.067}$	$0.752^{+0.103}_{-0.110}$	$-0.083^{+0.168}_{-0.177}$
C+G	$64.87^{+5.75}_{-5.54}$	$0.254^{+0.12}_{-0.108}$	$0.472^{+0.234}_{-0.250}$	$0.274^{+0.353}_{-0.358}$
C+Q	$69.18^{+4.78}_{-4.75}$	$0.444^{+0.084}_{-0.075}$	$0.937^{+0.047}_{-0.100}$	$-0.381^{+0.132}_{-0.175}$
S+G	$81.28^{+12.43}_{-13.35}$	$0.290^{+0.061}_{-0.059}$	$0.695^{+0.096}_{-0.097}$	$0.015^{+0.156}_{-0.156}$
S+Q	$76.11^{+16.15}_{-15.77}$	$0.402^{+0.048}_{-0.055}$	$0.883^{+0.071}_{-0.090}$	$-0.286^{+0.119}_{-0.145}$
G+Q	$75.66^{+16.59}_{-17.29}$	$0.349^{+0.105}_{-0.087}$	$0.882^{+0.088}_{-0.173}$	$-0.231^{+0.193}_{-0.260}$
B+C+S	$69.18^{+3.33}_{-3.33}$	$0.284^{+0.039}_{-0.039}$	$0.689^{+0.083}_{-0.085}$	$0.027^{+0.122}_{-0.124}$
B+C+G	$67.00^{+3.91}_{-3.60}$	$0.234^{+0.052}_{-0.056}$	$0.537^{+0.155}_{-0.174}$	$0.228^{+0.206}_{-0.230}$
B+C+Q	$71.4^{+3.67}_{-3.83}$	$0.339^{+0.034}_{-0.042}$	$0.864^{+0.09}_{-0.123}$	$-0.203^{+0.124}_{-0.165}$
B+S+G	$68.56^{+5.06}_{-4.37}$	$0.275^{+0.036}_{-0.036}$	$0.673^{+0.079}_{-0.082}$	$0.053^{+0.114}_{-0.119}$
B+S+Q	$69.16^{+5.10}_{-4.30}$	$0.324^{+0.035}_{-0.036}$	$0.789^{+0.076}_{-0.081}$	$-0.113^{+0.111}_{-0.117}$
B+G+Q	$69.86^{+5.08}_{-4.48}$	$0.316^{+0.037}_{-0.041}$	$0.817^{+0.106}_{-0.129}$	$-0.133^{+0.143}_{-0.170}$
C+S+G	$69.08^{+3.58}_{-3.50}$	$0.300^{+0.056}_{-0.057}$	$0.701^{+0.093}_{-0.095}$	$-0.001^{+0.149}_{-0.152}$
C+S+Q	$70.01^{+3.66}_{-3.62}$	$0.402^{+0.047}_{-0.054}$	$0.879^{+0.074}_{-0.089}$	$-0.281^{+0.121}_{-0.143}$
C+G+Q	$69.93^{+4.86}_{-4.98}$	$0.378^{+0.074}_{-0.068}$	$0.861^{+0.093}_{-0.142}$	$-0.239^{+0.167}_{-0.210}$
S+G+Q	$71.93^{+16.72}_{-14.58}$	$0.360^{+0.052}_{-0.052}$	$0.813^{+0.082}_{-0.087}$	$-0.173^{+0.134}_{-0.139}$
B+C+S+G	$68.96^{+3.41}_{-3.29}$	$0.277^{+0.035}_{-0.036}$	$0.672^{+0.077}_{-0.078}$	$0.051^{+0.112}_{-0.114}$
B+C+S+Q	$70.10^{+3.34}_{-3.33}$	$0.326^{+0.035}_{-0.036}$	$0.785^{+0.076}_{-0.079}$	$-0.111^{+0.111}_{-0.115}$
B+C+G+Q	$70.55^{+3.71}_{-3.79}$	$0.314^{+0.039}_{-0.041}$	$0.791^{+0.105}_{-0.122}$	$-0.104^{+0.143}_{-0.163}$
B+S+G+Q	$69.12^{+4.99}_{-4.48}$	$0.312^{+0.033}_{-0.034}$	$0.759^{+0.072}_{-0.075}$	$-0.071^{+0.105}_{-0.109}$
C+S+G+Q	$69.63^{+3.55}_{-3.71}$	$0.363^{+0.049}_{-0.050}$	$0.814^{+0.080}_{-0.082}$	$-0.177^{+0.129}_{-0.131}$
B+C+S+G+Q	$69.65^{+3.33}_{-3.19}$	$0.312^{+0.034}_{-0.034}$	$0.755^{+0.072}_{-0.074}$	$-0.068^{+0.105}_{-0.107}$

Tabella 10: Vincoli cosmologici per un modello Open w CDM. La dicitura delle sonde riporta: B=BAO; C=CC; S=SN; G=GRB; Q=QSO.

Probe	H_0 [km/s/Mpc]	Ω_m	Ω_Λ	Ω_k	w
-	-	-	-	-	-
BAO	$67.24^{+5.36}_{-4.80}$	$0.185^{+0.098}_{-0.072}$	$0.425^{+0.294}_{-0.212}$	$0.390^{+0.392}_{-0.284}$	$-1.10^{+0.34}_{-1.01}$
CC	$67.66^{+8.49}_{-6.76}$	$0.226^{+0.155}_{-0.124}$	$0.515^{+0.251}_{-0.258}$	$0.259^{+0.406}_{-0.383}$	$-1.59^{+0.76}_{-0.91}$
SN	$77.62^{+14.62}_{-16.36}$	$0.285^{+0.085}_{-0.081}$	$0.465^{+0.255}_{-0.157}$	$0.250^{+0.340}_{-0.238}$	$-1.49^{+0.46}_{-0.80}$
GRB	$74.57^{+17.18}_{-16.80}$	$0.295^{+0.296}_{-0.176}$	$0.339^{+0.333}_{-0.233}$	$0.366^{+0.629}_{-0.410}$	$-1.40^{+0.95}_{-1.06}$
QSO	$76.75^{+15.61}_{-17.65}$	$0.530^{+0.116}_{-0.100}$	$0.957^{+0.032}_{-0.063}$	$-0.487^{+0.148}_{-0.163}$	$-2.65^{+0.39}_{-0.25}$
B+C	$66.82^{+4.40}_{-3.86}$	$0.196^{+0.091}_{-0.073}$	$0.457^{+0.274}_{-0.197}$	$0.347^{+0.366}_{-0.270}$	$-1.10^{+0.33}_{-0.91}$
B+S	$68.38^{+5.16}_{-4.35}$	$0.273^{+0.054}_{-0.079}$	$0.674^{+0.186}_{-0.264}$	$0.054^{+0.240}_{-0.343}$	$-1.00^{+0.11}_{-0.35}$
B+G	$66.96^{+5.35}_{-4.68}$	$0.185^{+0.077}_{-0.066}$	$0.422^{+0.234}_{-0.198}$	$0.393^{+0.311}_{-0.263}$	$-1.07^{+0.34}_{-0.85}$
B+Q	$69.68^{+5.23}_{-4.76}$	$0.328^{+0.038}_{-0.053}$	$0.877^{+0.090}_{-0.173}$	$-0.205^{+0.128}_{-0.226}$	$-0.95^{+0.14}_{-0.2}$
C+S	$67.93^{+3.96}_{-4.04}$	$0.300^{+0.073}_{-0.074}$	$0.602^{+0.204}_{-0.182}$	$0.098^{+0.277}_{-0.256}$	$-1.17^{+0.22}_{-0.38}$
C+G	$66.54^{+8.79}_{-6.77}$	$0.199^{+0.11}_{-0.093}$	$0.444^{+0.208}_{-0.234}$	$0.356^{+0.318}_{-0.326}$	$-1.62^{+0.87}_{-0.89}$
C+Q	$77.91^{+6.96}_{-6.43}$	$0.421^{+0.082}_{-0.081}$	$0.888^{+0.077}_{-0.105}$	$-0.309^{+0.159}_{-0.186}$	$-2.02^{+0.44}_{-0.50}$
S+G	$81.65^{+13.06}_{-13.66}$	$0.274^{+0.066}_{-0.066}$	$0.505^{+0.236}_{-0.164}$	$0.221^{+0.302}_{-0.229}$	$-1.32^{+0.39}_{-0.65}$
S+Q	$77.76^{+14.50}_{-14.06}$	$0.383^{+0.069}_{-0.070}$	$0.781^{+0.155}_{-0.217}$	$-0.164^{+0.223}_{-0.287}$	$-1.07^{+0.17}_{-0.32}$
G+Q	$74.28^{+17.55}_{-16.37}$	$0.402^{+0.088}_{-0.076}$	$0.860^{+0.085}_{-0.108}$	$-0.262^{+0.174}_{-0.185}$	$-2.57^{+0.47}_{-0.31}$
B+C+S	$68.66^{+3.41}_{-3.37}$	$0.275^{+0.051}_{-0.066}$	$0.669^{+0.176}_{-0.217}$	$0.056^{+0.227}_{-0.283}$	$-1.01^{+0.11}_{-0.26}$
B+C+G	$66.94^{+4.31}_{-4.02}$	$0.193^{+0.070}_{-0.066}$	$0.445^{+0.215}_{-0.170}$	$0.363^{+0.285}_{-0.236}$	$-1.14^{+0.36}_{-0.86}$
B+C+Q	$70.38^{+4.09}_{-3.96}$	$0.328^{+0.040}_{-0.063}$	$0.856^{+0.103}_{-0.202}$	$-0.184^{+0.143}_{-0.265}$	$-0.95^{+0.14}_{-0.24}$
B+S+G	$68.54^{+5.08}_{-4.53}$	$0.253^{+0.049}_{-0.063}$	$0.606^{+0.164}_{-0.215}$	$0.141^{+0.213}_{-0.278}$	$-1.04^{+0.13}_{-0.36}$
B+S+Q	$68.97^{+5.18}_{-4.40}$	$0.331^{+0.033}_{-0.044}$	$0.877^{+0.086}_{-0.156}$	$-0.208^{+0.119}_{-0.200}$	$-0.92^{+0.06}_{-0.10}$
B+G+Q	$69.51^{+5.26}_{-4.71}$	$0.303^{+0.042}_{-0.052}$	$0.791^{+0.128}_{-0.164}$	$-0.094^{+0.169}_{-0.217}$	$-0.99^{+0.16}_{-0.23}$
C+S+G	$67.05^{+3.96}_{-3.65}$	$0.282^{+0.06}_{-0.061}$	$0.518^{+0.180}_{-0.146}$	$0.200^{+0.240}_{-0.207}$	$-1.29^{+0.28}_{-0.46}$
C+S+Q	$68.97^{+3.89}_{-3.95}$	$0.385^{+0.059}_{-0.060}$	$0.817^{+0.126}_{-0.193}$	$-0.202^{+0.185}_{-0.253}$	$-1.05^{+0.12}_{-0.24}$
C+G+Q	$78.25^{+7.34}_{-6.77}$	$0.344^{+0.072}_{-0.064}$	$0.783^{+0.093}_{-0.107}$	$-0.126^{+0.165}_{-0.171}$	$-2.23^{+0.52}_{-0.49}$
S+G+Q	$82.09^{+12.19}_{-13.98}$	$0.351^{+0.061}_{-0.057}$	$0.661^{+0.205}_{-0.205}$	$-0.012^{+0.266}_{-0.262}$	$-1.2^{+0.27}_{-0.51}$
B+C+S+G	$68.44^{+3.38}_{-3.21}$	$0.263^{+0.045}_{-0.053}$	$0.629^{+0.147}_{-0.171}$	$0.108^{+0.193}_{-0.224}$	$-1.03^{+0.11}_{-0.23}$
B+C+S+Q	$70.28^{+3.23}_{-3.47}$	$0.334^{+0.032}_{-0.041}$	$0.872^{+0.088}_{-0.136}$	$-0.206^{+0.120}_{-0.177}$	$-0.92^{+0.06}_{-0.08}$
B+C+G+Q	$69.86^{+4.06}_{-4.02}$	$0.302^{+0.044}_{-0.055}$	$0.766^{+0.134}_{-0.164}$	$-0.068^{+0.177}_{-0.219}$	$-0.98^{+0.16}_{-0.26}$
B+S+G+Q	$68.90^{+5.10}_{-4.40}$	$0.315^{+0.034}_{-0.040}$	$0.821^{+0.104}_{-0.141}$	$-0.136^{+0.138}_{-0.181}$	$-0.93^{+0.07}_{-0.10}$
C+S+G+Q	$68.06^{+4.43}_{-4.14}$	$0.354^{+0.054}_{-0.056}$	$0.699^{+0.157}_{-0.180}$	$-0.053^{+0.211}_{-0.236}$	$-1.14^{+0.17}_{-0.33}$
B+C+S+G+Q	$69.83^{+3.32}_{-3.25}$	$0.318^{+0.033}_{-0.041}$	$0.808^{+0.110}_{-0.134}$	$-0.126^{+0.144}_{-0.175}$	$-0.94^{+0.07}_{-0.10}$

Tabella 11: Vincoli cosmologici per un modello Open w_0w_a CDM. La dicitura delle sonde riporta: B=BAO; C=CC; S=SN; G=GRB; Q=QSO.

Probe	H_0 [km/s/Mpc]	Ω_m	Ω_Λ	Ω_k	w_0	w_a
-	-	-	-	-	-	-
BAO	$67.19^{+5.21}_{-4.94}$	$0.157^{+0.120}_{-0.062}$	$0.354^{+0.236}_{-0.190}$	$0.490^{+0.357}_{-0.252}$	$-1.22^{+0.74}_{-1.15}$	$-0.95^{+2.69}_{-2.49}$
CC	$67.69^{+9.22}_{-7.15}$	$0.207^{+0.174}_{-0.121}$	$0.467^{+0.249}_{-0.259}$	$0.326^{+0.423}_{-0.380}$	$-1.73^{+0.95}_{-0.82}$	$-1.01^{+3.24}_{-2.74}$
SN	$82.6^{+12.01}_{-13.36}$	$0.257^{+0.116}_{-0.115}$	$0.416^{+0.229}_{-0.125}$	$0.327^{+0.345}_{-0.240}$	$-1.54^{+0.52}_{-0.79}$	$-0.25^{+3.25}_{-2.91}$
GRB	$74.78^{+17.17}_{-16.69}$	$0.298^{+0.268}_{-0.168}$	$0.317^{+0.345}_{-0.231}$	$0.385^{+0.613}_{-0.399}$	$-1.62^{+1.08}_{-0.94}$	$-0.76^{+2.91}_{-2.84}$
QSO	$75.28^{+16.37}_{-16.96}$	$0.537^{+0.124}_{-0.103}$	$0.951^{+0.037}_{-0.071}$	$-0.488^{+0.161}_{-0.173}$	$-2.57^{+0.47}_{-0.3}$	$-2.81^{+3.23}_{-1.61}$
B+C	$66.49^{+4.70}_{-4.00}$	$0.172^{+0.108}_{-0.066}$	$0.397^{+0.234}_{-0.169}$	$0.431^{+0.342}_{-0.235}$	$-1.15^{+0.61}_{-1.05}$	$-0.74^{+2.28}_{-2.55}$
B+S	$68.42^{+5.09}_{-4.55}$	$0.197^{+0.088}_{-0.072}$	$0.481^{+0.255}_{-0.226}$	$0.322^{+0.343}_{-0.298}$	$-1.20^{+0.28}_{-1.02}$	$0.26^{+1.30}_{-1.58}$
B+G	$67.35^{+5.45}_{-5.15}$	$0.166^{+0.094}_{-0.060}$	$0.368^{+0.215}_{-0.167}$	$0.465^{+0.309}_{-0.226}$	$-1.13^{+0.67}_{-1.15}$	$-0.98^{+2.42}_{-2.51}$
B+Q	$70.13^{+5.49}_{-4.97}$	$0.294^{+0.076}_{-0.094}$	$0.838^{+0.117}_{-0.234}$	$-0.132^{+0.194}_{-0.329}$	$-1.02^{+0.27}_{-0.39}$	$0.23^{+0.92}_{-1.42}$
C+S	$65.84^{+3.76}_{-3.48}$	$0.260^{+0.106}_{-0.094}$	$0.425^{+0.190}_{-0.133}$	$0.315^{+0.296}_{-0.227}$	$-1.44^{+0.40}_{-0.70}$	$-0.80^{+2.70}_{-2.66}$
C+G	$67.48^{+9.59}_{-7.25}$	$0.195^{+0.115}_{-0.093}$	$0.431^{+0.193}_{-0.232}$	$0.374^{+0.308}_{-0.324}$	$-1.81^{+1.00}_{-0.80}$	$-0.90^{+3.11}_{-2.83}$
C+Q	$78.93^{+7.21}_{-7.09}$	$0.389^{+0.096}_{-0.082}$	$0.880^{+0.082}_{-0.109}$	$-0.269^{+0.178}_{-0.190}$	$-2.15^{+0.51}_{-0.48}$	$0.41^{+2.54}_{-3.34}$
S+G	$82.20^{+12.6}_{-14.23}$	$0.265^{+0.087}_{-0.090}$	$0.419^{+0.183}_{-0.113}$	$0.317^{+0.270}_{-0.204}$	$-1.56^{+0.52}_{-0.72}$	$-0.30^{+2.62}_{-2.91}$
S+Q	$80.10^{+12.68}_{-12.90}$	$0.409^{+0.112}_{-0.241}$	$0.657^{+0.224}_{-0.192}$	$-0.066^{+0.336}_{-0.433}$	$-1.10^{+0.28}_{-0.53}$	$-1.24^{+4.55}_{-2.11}$
G+Q	$76.62^{+16.24}_{-17.64}$	$0.402^{+0.094}_{-0.083}$	$0.859^{+0.082}_{-0.106}$	$-0.261^{+0.176}_{-0.189}$	$-2.50^{+0.52}_{-0.35}$	$-2.03^{+3.84}_{-2.21}$
B+C+S	$67.44^{+3.59}_{-3.16}$	$0.192^{+0.083}_{-0.067}$	$0.451^{+0.242}_{-0.192}$	$0.357^{+0.326}_{-0.258}$	$-1.24^{+0.29}_{-0.91}$	$0.22^{+1.29}_{-1.89}$
B+C+G	$66.38^{+4.65}_{-3.90}$	$0.166^{+0.090}_{-0.056}$	$0.379^{+0.180}_{-0.153}$	$0.455^{+0.270}_{-0.209}$	$-1.22^{+0.67}_{-1.07}$	$-0.98^{+2.45}_{-2.50}$
B+C+Q	$71.32^{+4.37}_{-4.42}$	$0.271^{+0.076}_{-0.090}$	$0.794^{+0.148}_{-0.260}$	$-0.065^{+0.224}_{-0.349}$	$-1.08^{+0.25}_{-0.55}$	$0.39^{+0.90}_{-1.32}$
B+S+G	$68.45^{+4.95}_{-4.48}$	$0.214^{+0.069}_{-0.065}$	$0.530^{+0.199}_{-0.217}$	$0.256^{+0.268}_{-0.283}$	$-1.14^{+0.21}_{-0.60}$	$0.28^{+1.03}_{-1.40}$
B+S+Q	$68.81^{+5.31}_{-4.49}$	$0.309^{+0.061}_{-0.097}$	$0.813^{+0.133}_{-0.314}$	$-0.123^{+0.194}_{-0.411}$	$-0.94^{+0.11}_{-0.28}$	$-0.10^{+0.77}_{-0.89}$
B+G+Q	$70.22^{+5.71}_{-5.18}$	$0.265^{+0.070}_{-0.075}$	$0.761^{+0.149}_{-0.195}$	$-0.026^{+0.219}_{-0.270}$	$-1.07^{+0.28}_{-0.40}$	$0.36^{+0.92}_{-1.47}$
C+S+G	$66.11^{+3.84}_{-3.68}$	$0.275^{+0.082}_{-0.078}$	$0.466^{+0.174}_{-0.127}$	$0.259^{+0.256}_{-0.205}$	$-1.32^{+0.33}_{-0.56}$	$-0.52^{+2.19}_{-2.55}$
C+S+Q	$67.11^{+4.10}_{-3.93}$	$0.413^{+0.087}_{-0.109}$	$0.704^{+0.175}_{-0.219}$	$-0.117^{+0.262}_{-0.327}$	$-1.04^{+0.19}_{-0.37}$	$-1.34^{+1.72}_{-1.90}$
C+G+Q	$78.74^{+7.23}_{-7.03}$	$0.330^{+0.076}_{-0.067}$	$0.781^{+0.100}_{-0.108}$	$-0.111^{+0.176}_{-0.175}$	$-2.30^{+0.57}_{-0.46}$	$0.0^{+2.9}_{-3.4}$
S+G+Q	$78.04^{+15.12}_{-18.00}$	$0.369^{+0.082}_{-0.109}$	$0.562^{+0.174}_{-0.141}$	$0.069^{+0.256}_{-0.250}$	$-1.26^{+0.34}_{-0.54}$	$-1.04^{+2.94}_{-2.30}$
B+C+S+G	$67.92^{+3.52}_{-3.25}$	$0.213^{+0.063}_{-0.062}$	$0.556^{+0.182}_{-0.202}$	$0.232^{+0.246}_{-0.264}$	$-1.11^{+0.18}_{-0.44}$	$0.45^{+0.88}_{-1.41}$
B+C+S+Q	$69.51^{+3.64}_{-3.48}$	$0.297^{+0.062}_{-0.093}$	$0.816^{+0.122}_{-0.218}$	$-0.114^{+0.184}_{-0.311}$	$-0.95^{+0.10}_{-0.18}$	$0.20^{+0.68}_{-0.80}$
B+C+G+Q	$71.00^{+4.55}_{-4.36}$	$0.253^{+0.066}_{-0.073}$	$0.729^{+0.157}_{-0.187}$	$0.018^{+0.223}_{-0.260}$	$-1.13^{+0.27}_{-0.51}$	$0.59^{+0.87}_{-1.41}$
B+S+G+Q	$68.59^{+5.13}_{-4.18}$	$0.281^{+0.062}_{-0.083}$	$0.756^{+0.141}_{-0.252}$	$-0.036^{+0.203}_{-0.336}$	$-0.97^{+0.11}_{-0.28}$	$0.08^{+0.77}_{-1.03}$
C+S+G+Q	$66.32^{+4.12}_{-3.88}$	$0.364^{+0.076}_{-0.081}$	$0.584^{+0.160}_{-0.149}$	$0.051^{+0.236}_{-0.231}$	$-1.17^{+0.24}_{-0.42}$	$-1.45^{+2.15}_{-2.09}$
B+C+S+G+Q	$69.43^{+3.49}_{-3.34}$	$0.282^{+0.055}_{-0.069}$	$0.79^{+0.12}_{-0.15}$	$-0.073^{+0.175}_{-0.218}$	$-0.96^{+0.09}_{-0.14}$	$0.35^{+0.57}_{-0.79}$

Bibliografia

- [1] Adam Riess et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, 106(3), 1998.
- [2] Saul Perlmutter et al. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(565), 1999.
- [3] Di Valentino E. et al. In the Realm of the Hubble Tension — A Review of Solutions. *Classical and Quantum Gravity*, 38(15), 2021.
- [4] Di Valentino E. et al. Cosmology intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8 . *Astroparticle Physics*, 131:102604, 2021.
- [5] Planck Collaboration (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641(A6), doi: 10.1051/0004-6361/201833910.
- [6] Scolnic D.M. et al. The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample. *The Astrophysical Journal*, 859(101), 2018.
- [7] Benitsy D. et al. Testing Late-Time Cosmic Acceleration with uncorrelated Baryon Acoustic Oscillations dataset. *Astronomy & Astrophysics*, 647(A38), 2021.
- [8] Moresco M. et al. Constraining the Time Evolution of Dark Energy, Curvature and Neutrino Properties with Cosmic Chronometers. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 12(039), 2016.
- [9] Lusso E. et al. Quasars as Standard Candles III. Validation of a New Sample for Cosmological Studies. *Astronomy & Astrophysics*, 642(A150), 2020.
- [10] Demianski M. et al. Cosmology with Gamma-Ray Bursts I. The Hubble Diagram through the Calibrated $E_{p,i}-E_{iso}$ Correlation. *Astronomy & Astrophysics*, 598(A112), 2017.
- [11] Verde L. Precision Cosmology, Accuracy Cosmology and Statistical Cosmology. *Statistical Challenges in 21st Century Cosmology Proceedings IAU Symposium*, 306, 2014.
- [12] Peebles P.J.E. From Precision Cosmology to Accurate Cosmology. *arXiv:astro-ph/0208037*, 2002.
- [13] Coles P., Lucchin F. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. John Wiley & Sons, Ltd, 2002.
- [14] D’Inverno R. *Introducing Einstein’s Relativity*. CLUEB, Bologna, 2001.
- [15] Cimatti A., Fraternali F., Nipoti C. *Introduction to Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge University Press, 2020.

- [16] Particle Data Group. Review of Particle Physics. *Oxford University Press*, Prog. Theor. Exp. Phys.(083C01), 2020.
- [17] WMAP Collaboration. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, (148):175, 2003.
- [18] WMAP Collaboration. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys. J. Suppl.*, 208(19), 2013.
- [19] Planck Collaboration (2020). Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck. *Astronomy & Astrophysics*, 641(A6), doi: 10.1051/0004-6361/201833910.
- [20] Planck Collaboration. Planck 2013 Results. XVI. Cosmological Parameters. *Astron. Astrophys.*, 571(A16), 2014.
- [21] Planck Collaboration. Planck 2015 Results. XIII. Cosmological Parameters. *Astron. Astrophys.*, 594(A13), 2016.
- [22] Yadav J. et al. Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364(2):601–606, 2005.
- [23] Eisenstein D.J. et al. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. *Astrophys. J.*, 633(560-74), 2005.
- [24] Tegmark M. et al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Phys. Rev. D*, 69(103501), 2003.
- [25] Slipher V.M. The radial velocity of the Andromeda Nebula. *Lowell Observatory Bulletin*, 1(56-57), 1913.
- [26] Friedmann A. Über die Krümmung des Raumes. *Z. Physics*, 10(377), 1922.
- [27] Lemaître G. A Homogeneous Universe of Constant Mass and Growing Radius Accounting for the Radial Velocity of Extragalactic Nebulae. *Annales Soc. Sci. Bruxelles*, A47(49-59), 1927.
- [28] Zwicky F. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6, 1933.
- [29] Penzias A., Wilson R. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *Astrophysical Journal*, 142(419–421), 1965.
- [30] Gamow G. The Origin of Elements and the Separation of Galaxies. *Physical Review*, 74(505–506), 1948.
- [31] Gamow G. The Evolution of the Universe. *Nature*, 162(680–682), 1948.
- [32] Alpher R. A., Herman R. C. On the Relative Abundance of the Elements. *Physical Review*, 74(1737–1742), 1948.
- [33] Elizalde E. All That Matter ... In One Big Bang ..., & Other Cosmological Singularities. *arXiv:1801.09550*, 1965.
- [34] Penrose R. *L'Universo è ancora un segreto*. (Edizione Italiana) Rizzoli, 2021.
- [35] Churchill C. W. *Cosmological Absorption Line Spectroscopy: Introduction to the Principles and Analysis of Quasar Absorption Lines*. New Mexico State University.

- [36] Hubble E. A Relation Between Distance and Radial Velocity Among Extra-Galactic Nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15(168–173), 1929.
- [37] Leavitt H., Pickering E. Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud. *Harvard College Observatory Circular*, 173(pp. 1-3), 1912.
- [38] IAU Executive Committee. On a Suggested Renaming of the Hubble Law. *XXX General Assembly of the International Astronomical Union*, 2018.
- [39] Frieman J., Turner M., Huterer D. Dark Energy and the Accelerating Universe. *Ann.Rev.Astron.Astrophys.*, 46(385-432), 2008.
- [40] Phillips M. The Absolute Magnitudes of Type Ia Supernovae. *Astrophysical Journal*, 413(L105–L108), 1993.
- [41] Huterer D., Turner M.S. Prospects for probing the dark energy via supernova distance measurements. *Phys. Rev.*, D60(081301), 1999.
- [42] Einstein A. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, Math. Phys.(142–152), 1917.
- [43] Eddington S.A. The Expanding Universe. *Cambridge University Press*, 1920.
- [44] Gliner E.B. Algebraic Properties of the Energy-momentum Tensor and Vacuum-like States of Matter. *Sov. Phys. JETP*, 22(378), 1966.
- [45] Zel'dovich Ya.B., Krasinski A., Zeldovich Ya. B. The Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles. *Sov. Phys. Usp.*, 11(381), 1968.
- [46] Peebles J. Tests of Cosmological Models Constrained by Inflation. *Astrophysical Journal*, 284(439–44), 1984.
- [47] Turner M.S., Steigman G., Krauss L. Flatness of the Universe - Reconciling Theoretical Prejudices with Observational Data. *Phys. Rev. Lett.*, 52(2090–3), 1984.
- [48] Efstathiou G., Sutherland W.J., Maddox S.J. The Cosmological Constant and Cold Dark Matter. *Nature*, 348(705–7), 1990.
- [49] Particle Data Group. Review of Particle Physics, Cap. 27 Dark Matter. *Oxford University Press*, Prog. Theor. Exp. Phys.(083C01), 2020.
- [50] White S.D.M., Navarro J.F., Evrard A.E., Frenk C.S. The Baryon Content of Galaxy Clusters: A Challenge to Cosmological Orthodoxy. *Nature*, 366(429–33), 1993.
- [51] Weinberg S. The Cosmological Constant Problem. *Rev.Mod.Phys.*, 61(1-23), 1989.
- [52] Guth A.H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev. D*, 23(347–56), 1981.
- [53] Linde A.D. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett. B*, 108(389–93), 1982.
- [54] Albrecht A., Steinhardt P.J. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking. *Phys. Rev. Lett.*, 48(1220–3), 1982.
- [55] Huterer D., Shafer D. Dark Energy Two Decades After: Observables, Probes, Consistency Tests. *Reports on Progress in Physics*, 81(016901), 2018.

- [56] Weinberg D.H. et al. Observational Probes of Cosmic Acceleration. *Phys. Rep.*, 530(2), 2013.
- [57] Frieman J.A. et al. Probing Dark Energy with Supernovae: Exploiting Complementarity with the Cosmic Microwave Background. *Phys. Rev. D*, 67(083505), 2003.
- [58] Hu W., Sugiyama N. The Small Scale Integrated Sachs–Wolfe Effect. *Phys. Rev. D*, 50(627-31), 1994.
- [59] Sachs R.K., Wolfe A.M. Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background. *Astrophys. J.*, 147(73-90), 1967.
- [60] Liddle A.R. Cosmological Inflation and Large-Scale Structure. *Cambridge University Press*, 2000.
- [61] Kowal C.T. Absolute Magnitudes of Supernovae. *Astron. J.*, 73(1021-4), 1968.
- [62] March M.C. et al. Improved Constraints on Cosmological Parameters from SNIa Data. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 418(2308–29), 2011.
- [63] Rubin D. et al. Unity: Confronting Supernova Cosmology’s Statistical and Systematic Uncertainties in a Unified Bayesian Framework. *Astrophysical Journal*, 813(137), 2015.
- [64] Fakhouri H.K. et al. Improving Cosmological Distance Measurements Using Twin Type Ia Supernovae. *Astrophysical Journal*, 815(58), 2015.
- [65] <https://www.sunnyvagnozzi.com/blog/what-is-the-hubble-tension-really>.
- [66] Freedman W.L. et al. Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant. *Astrophysical Journal*, 553(1), 2001.
- [67] Riess A.G. et al. Cosmic Distances Calibrated to 1% Precision with Gaia EDR3 Parallaxes and Hubble Space Telescope Photometry of 75 Milky Way Cepheids Confirm Tension with Λ CDM. *Astrophysical Journal*, 908(1), 2021.
- [68] Efstathiou G. To H_0 or Not To H_0 ? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 505(3), 2021.
- [69] Aghamousa A. et al. The DESI Experiment Part I: Science, Targeting and Survey Design. 2016.
- [70] Coe D., Moustakas L.A. Cosmological Constraints From Gravitational Lens Time Delays. *ApJ*, 706(45), 2009.
- [71] Linder E.V. Lensing Time Delays and Cosmological Complementarity. *Phys. Rev. D*, 84(123529), 2011.
- [72] Treu T., Marshall P.J. Time Delay Cosmography. *A&ARv*, 24(11), 2016.
- [73] Refsdal S. On the Possibility of Determining Hubble’s Parameter and the Masses of Galaxies from the Gravitational Lens Effect. *MNRAS*, 128(307), 1964.
- [74] Birrer S. et al. The Mass-Sheet Degeneracy and Time-Delay Cosmography: Analysis of the Strong Lens RXJ1131-1231. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 8(020), 2016.
- [75] Birrer S. et al. H0LiCOW – IX. Cosmographic Analysis of the Doubly Imaged Quasar SDSS 1206+4332 and a New Measurement of the Hubble Constant. *MNRAS*, 484(4726), 2019.

- [76] Bonvin V. et al. . *MNRAS*, 465(4914), 2017.
- [77] Bonvin V. et al. COSMOGRAIL XVII. Time Delays for the Quadruply Imaged Quasar PG 1115+080. *A&A*, 616(A183), 2018.
- [78] Courbin F. et al. COSMOGRAIL: the COSmological MONitoring of GRAVItational Lenses XVI. Time Delays for the Quadruply Imaged Quasar DES *J04085354* with High-Cadence Photometric Monitoring. *A&A*, 609(A71), 2018.
- [79] Tihhonova O. et al. H0LiCOW VIII. A Weak-Lensing Measurement of the External Convergence in the Field of the Lensed Quasar *HE04351223*. *MNRAS*, 477(5657), 2018.
- [80] Suyu S. H. et al. H0LiCOW – I. H_0 Lenses in COSMOGRAIL’s Wellspring: Program Overview. *MNRAS*, 468(2590), 2017.
- [81] Sluse D. et al. H0LiCOW –X. Spectroscopic/Imaging Survey and Galaxy-Group Identification around the Strong Gravitational Lens System *WFI20334723*. *MNRAS*, 490(613), 2019.
- [82] Rusu C. E. et al. H0LiCOW – III. Quantifying the Effect of Mass Along the Line of Sight to the Gravitational Lens *HE04351223* through Weighted Galaxy Counts. *MNRAS*, 467,(4220), 2017.
- [83] Kenneth C.W. H0LiCOW – XIII. A 2.4% Measurement of H_0 from Lensed Quasars: 5.3σ Tension between Early- and Late-Universe Probes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 498(1):1420–1439, 2019.
- [84] Bartelmann M., Schneider P. Weak Gravitational Lensing. *Phys. Rep.*, 340(291–472), 2001.
- [85] Jarvis M. et al. Dark Energy Constraints from the CTIO Lensing Survey. *Astrophys. J.*, 644(71-9), 2006.
- [86] DES Collaboration. Dark Energy Survey Year 1 Results: Cosmological Constraints from Cosmic Shear. *arXiv:1708.01538*, 2017.
- [87] Vagnozzi S. et al.). Eppur è piatto? The Cosmic Chronometers Take on Spatial Curvature and Cosmic Concordance. *The Astrophysical Journal*, 908(84), 2020.
- [88] Di Valentino E. et al. Snowmass2021 - Letter of Interest Cosmology Intertwined II: The Hubble Constant Tension. *Astroparticle Physics*, 131:102605, 2021.
- [89] Vagnozzi S. New Physics in Light of the H_0 Tension: An Alternative View. *Phys. Rev. D*, 102, 2020.
- [90] Freedman W.L. The Carnegie-Chicago Hubble Program. VIII. An Independent Determination of the Hubble Constant Based on the Tip of the Red Giant Branch. *ApJ*, 882(34), 2019.
- [91] Shah P., Lemos P., Lahav O. A buyer’s guide to the Hubble Constant. *arXiv:2109.01161*, 2021.
- [92] Verde, L., Treu, T. & Riess, A.G. (2019). Tensions Between the Early and Late Universe. *Nature Astronomy*, 3, doi: 10.1038/s41550-019-0902-0.
- [93] Henning J.W. et al. Measurements of the Temperature and E-mode Polarization of the CMB from 500 Square Degrees of SPTpol Data. *ApJ*, 852(97), 2018.

- [94] Humphreys E.M.L. et al. Toward a New Geometric Distance To The Active Galaxy NGC 4258. III. Final Results And The Hubble Constant. *ApJ*, 775(13), 2013.
- [95] Braatz J. et al. Science with the ngVLA: H2O Megamaser Cosmology. *arXiv:1810.06686*, 2018.
- [96] Domínguez A. et al. A New Measurement of the Hubble Constant and Matter Content of the Universe Using Extra-Galactic Background Light γ -Ray Attenuation. *ApJ*, 885(137), 2019.
- [97] Gall E.E.E. et al. Applying the Expanding Photosphere and Standardized Candle Methods to Type II-Plateau Supernovae at Cosmologically Significant Redshifts. The distance to SN 2013eq. *A&A*, 592(A129), 2016.
- [98] Jimenez R., Loeb A. Constraining Cosmological Parameters Based on Relative Galaxy Ages. *Astrophys. J.*, 573(37–42), 2002.
- [99] Moresco M. et al. Setting the Stage for Cosmic Chronometers. II. Impact of Stellar Population Synthesis Models Systematics and Full Covariance Matrix. *ApJ*, 898(1), 2020.
- [100] Amati L. et al. Intrinsic Spectra and Energetics of BeppoSAX Gamma-Ray Bursts with Known Redshifts. *Astronomy & Astrophysics*, 81(89), 2002.
- [101] Bargiacchi G. et al. Cosmography by Orthogonalized Logarithmic Polynomials. *Astronomy & Astrophysics*, 649(A65), 2021.
- [102] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration. A Gravitational-wave Measurement of the Hubble Constant Following the Second Observing Run of Advanced LIGO and Virgo. *The Astrophysical Journal*, 909(218), 2021.
- [103] Palmese A. et al. Gravitational Wave Cosmology and Astrophysics with Large Spectroscopic Galaxy Surveys. *arXiv:1903.04730*, 2019.
- [104] Jones D.O. et al. Measuring Dark Energy Properties with Photometrically Classified Pan-STARRS Supernovae. II. Cosmological Parameters. *The Astrophysical Journal*, 857(1), 2018.
- [105] Betoule M. et al. Improved Cosmological Constraints from a Joint Analysis of the SDSS-II and SNLS Supernova Samples. *Astronomy & Astrophysics*, 568(A22), 2014.
- [106] Flewelling H.A. et al. The Pan-STARRS1 Database and Data Products. *Astrophysical Journal*, 251(7), 2020.
- [107] https://supernovae.in2p3.fr/sdss_nls_jla/ReadMe.html.
- [108] <https://archive.stsci.edu/prepds/ps1cosmo/>.
- [109] Padilla L.E. et al. Cosmological Parameter Inference with Bayesian Statistics. *Universe*, 7(213), 2021.
- [110] Sunyaev R. A., Zeldovich Ya.B. Small Scale Fluctuations of Relic Radiation. *Astrophys. Space Sci.*, 7(3-19), 1970.
- [111] Peebles P.J., Yu J. Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe. *Astrophys. J.*, 162(815-36), 1970.
- [112] Blake C., Glazebrook K. Probing Dark Energy Using Baryonic Oscillations in the Galaxy Power Spectrum as a Cosmological Ruler. *Astrophys. J.*, 594(665-73), 2003.

- [113] Maor I. et al. Limitations in Using Luminosity Distance to Determine the Equation of State of the Universe. *Phys. Rev. Lett.*, 86, 2001.
- [114] Moresco M. et al. Improved Constraints on the Expansion Rate of the Universe up to $z \sim 1.1$ from the Spectroscopic Evolution of Cosmic Chronometers. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 08(006), 2012.
- [115] Stern D. et al. Cosmic Chronometers: Constraining the Equation of State of Dark Energy. I: $H(z)$ Measurements. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 02(008), 2010.
- [116] Cimatti A. et al. Old Galaxies in the Young Universe. *Nature*, 430:184, 2004.
- [117] Treu T. et al. The Assembly History of Field Spheroidals: Evolution of Mass-to-Light Ratios and Signatures of Recent Star Formation. *ApJ*, 633(174), 2005.
- [118] Pozzetti L. et al. zCOSMOS – 10k-Bright Spectroscopic Sample. The Bimodality in the Galaxy Stellar Mass Function: Exploring its Evolution with Redshift. *Astronomy & Astrophysics*, 523:A13, 2010.
- [119] Thomas D. et al. Environment and Self-Regulation in Galaxy Formation. *MNRAS*, 404:1775, 2010.
- [120] Citro A. et al. Inferring the Star-Formation Histories of the Most Massive and Passive Early-Type Galaxies at $z < 0.3$. *Astronomy & Astrophysics*, 592:A19, 2016.
- [121] Estrada-Carpenter V. et al. CLEAR. I. Ages and Metallicities of Quiescent Galaxies at $1.0 < z < 1.8$ Derived from Deep Hubble Space Telescope Grism Data. *ApJ*, 870(133), 2109.
- [122] Renzini A. Stellar Population Diagnostics of Elliptical Galaxy Formation. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 44(1):141–192, 2006.
- [123] Moresco M. et al. New Constraints on Cosmological Parameters and Neutrino Properties using the Expansion Rate of the Universe to $z \sim 1.75$. *JCAP*, 07(053), 2012.
- [124] Capozziello S. et al. Cosmographic Bounds on the Cosmological Deceleration-Acceleration Transition Redshift in $f(R)$ Gravity. *PhRvD*, 90(044016), 2014.
- [125] Moresco M. et al. Cosmological Constraints From a Joint Analysis of Cosmic Growth and Expansion. *MNRAS*, 471(L82), 2017.
- [126] Zhao G.B. et al. Dynamical Dark Energy in Light of the Latest Observations. *NatAs*, 1(627), 2017.
- [127] Gómez-Valent A. et al. H_0 from Cosmic Chronometers and Type Ia Supernovae, with Gaussian Processes and the novel Weighted Polynomial Regression Method. *JCAP*, 051, 2018.
- [128] Jimenez R. et al. The Local and Distant Universe: Stellar Ages and H_0 . *JCAP*, 03:043, 2019.
- [129] Daddi E. et al. Passively Evolving Early-Type Galaxies at $1.4 \leq z \leq 2.5$ in the Hubble Ultra Deep Field. *ApJ*, 626:680, 2005.
- [130] Tanaka M. et al. Stellar Velocity Dispersion of a Massive Quenching Galaxy at $z = 4.01$. *ApJL*, 885(L34), 2019.
- [131] Valentino F. et al. Quiescent Galaxies 1.5 Billion Years after the Big Bang and Their Progenitors. *The Astrophysical Journal*, 889(93), 2020.

- [132] Santini P. et al. The Emergence of Passive Galaxies in the Early Universe. *Astronomy & Astrophysics*, 652(A30), 2020.
- [133] Moresco M. et al. Constraining the Expansion Rate of the Universe Using Low-Redshift Ellipticals as Cosmic Chronometers. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 045, 2011.
- [134] Hamilton D. The Spectral Evolution of Galaxies. I - An Observational Approach. *ApJ*, 297(371), 1985.
- [135] Balogh M.L. et al. Differential Galaxy Evolution in Cluster and Field Galaxies at $z \sim 0.3$. *ApJ*, 527(54), 1999.
- [136] Bruzual G. et al. Stellar Population Synthesis at the Resolution of 2003. *MNRAS*, 344(1000), 2003.
- [137] Bruzual G. Spectral Evolution of galaxies. I - Early-Type Systems. *ApJ*, 273(105), 1983.
- [138] Moresco M. Raising the Bar: New Constraints on the Hubble Parameter with Cosmic Chronometers at $z \sim 2$. *MNRAS*, 450:L16, 2015.
- [139] Moresco M. et al. A 6% Measurement of the Hubble Parameter at $z \sim 0.45$: Direct Evidence of the Epoch of Cosmic Re-Acceleration. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 05(014), 2016.
- [140] Moresco M. et al. Setting the Stage for Cosmic Chronometers. I. Assessing the Impact of Young Stellar Populations on Hubble Parameter Measurements. *ApJ*, 868(84), 2018.
- [141] Borghi N. et al. Towards a Better Understanding of Cosmic Chronometers: Stellar Population Properties of Passive Galaxies at Intermediate Redshift. *pre-print*, arXiv:2106.14894, 2021.
- [142] <https://gitlab.com/mmoresco/CCcovariance/-/tree/master>.
- [143] Belgacem E. et al. Cosmology and Dark Energy from Joint Gravitational Wave-GRB Observations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019, 2019.
- [144] Lusso E., Risaliti G. Quasars as Standard Candles I. The Physical Relation Between Disc and Coronal Emission. *Astronomy&Astrophysics*, 602(A79), 2017.
- [145] Arcodia R. et al. Testing the Disk-Corona Interplay In Radiatively-Efficient Broad-Line AGN. *Astronomy&Astrophysics*, 628(A135), 2019.
- [146] Tananbaum H. et al. X-Ray Studies Of Quasars With The Einstein Observatory. *The Astrophysical Journal*,, 234(L9-L13), 1979.
- [147] Risaliti G., Lusso E. A Hubble Diagram For Quasars. *The Astrophysical Journal*, 815(1), 2015.
- [148] Lusso E. The Nonlinear X-ray/Ultraviolet Relation in Active Galactic Nuclei: Contribution of Instrumental Effects on the X-ray Variability. *Astronomical Notes*, 340(4), 2019.
- [149] Risaliti G., Lusso E. Cosmological Constraints from the Hubble Diagram of Quasars at High Redshifts. *Nature Astronomy*, 3(272–277), 2019.
- [150] Lusso E., Risaliti G. The Tight Relation Between X-Ray And Ultraviolet Luminosity Of Quasars. *The Astrophysical Journal*, 819(2), 2016.

- [151] Lusso E. et al. Tension with the Flat Λ CDM Model from a High-Redshift Hubble Diagram of SuperNovae, Quasars, and Gamma-Ray Bursts. *Astronomy&Astrophysics*, 628(L4), 2019.
- [152] <https://cdsarc.cds.unistra.fr/viz-bin/cat/J/A+A/642/A150>.
- [153] Kann D.A. et al. THE AFTERGLOWS OF SWIFT-ERA GAMMA-RAY BURSTS. II. TYPE I GRB VERSUS TYPE II GRB OPTICAL AFTERGLOWS. *ApJ*, 734(96), 2011.
- [154] Abbott B.P. et al. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger. *ApJ*, 848(L12), 2017.
- [155] Demianski M. et al. Investigating Dark Energy Equation of State With High Redshift Hubble Diagram. *Front. Astron. Space Sci.*, 2020.
- [156] Dainotti M.G. et al. A Time–Luminosity Correlation for γ -Ray Bursts in the X-Rays. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 391(1), 2008.
- [157] Demianski M. et al. The Gamma-Ray Bursts Hubble Diagram in Quintessential Cosmological Models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 411(2), 2011.
- [158] Postnikov S. et al. Nonparametric Study Of The Evolution Of The Cosmological Equation Of State With SNeIa, BAO, and High-Redshift GRBs. *The Astrophysical Journal*, 783(2), 2014.
- [159] Ghirlanda G. et al. The Collimation-corrected Gamma-Ray Burst Energies Correlate with the Peak Energy of Their νF_ν Spectrum. *The Astrophysical Journal*, 616(1), 2004.
- [160] Ghirlanda G. et al. Gamma-Ray Bursts as Standard Candles to Constrain the Cosmological Parameters. *New Journal of Physics*, 8, 2006.
- [161] Amati L. et al. Extremely Energetic Fermi Gamma-Ray Bursts Obey Spectral Energy Correlations. *Astronomy&Astrophysics*, 508(173-180), 2009.
- [162] Trotta R. Bayesian Methods in Cosmology. *arXiv:1701.01467*, 2017.
- [163] Trotta R. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology. *Contemporary Physics*, 49(2):71–104, 2008.
- [164] Bayes T. An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. *Biometrika*, 455(3-4), 1763 (Riprodotta nel 1958).
- [165] Cox R.T. Probability, Frequency and Reasonable Expectation. *American Journal of Physics*, 14(1), 1946.
- [166] Liddle A.R. Statistical Methods for Cosmological Parameter Selection and Estimation. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 59(1):95–114, 2009.
- [167] Metcalf R.B. Notes: Practical Statistics for Physics & Astronomy. *Alma Mater Studiorum - Università di Bologna*, <https://rbmetcalf.github.io/Practical-Statistics/>, 2020.
- [168] Sharma S. Markov Chain Monte Carlo Methods for Bayesian Data Analysis in Astronomy. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 55(1–49), 2017.
- [169] Christensen N., Meyer R. Bayesian Methods for Cosmological Parameter Estimation from Cosmic Microwave Measurements. *arXiv:astro-ph/0006401*, 2000.

- [170] Lewis A, Bridle S. Cosmological Parameters from CMB and Other Data: a Monte Carlo Approach. *Phys. Rev. D*, 66(10351), 2002.
- [171] Dunkley J. et al. Fast and reliable Markov chain Monte Carlo technique for cosmological parameter estimation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 356(3):925–936, 2005.
- [172] Andrae R. Error Estimation in Astronomy: A Guide. *arXiv:1009.2755v3*, 2010.
- [173] Eckhardt R. Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method. *Los Alamos Science*, 1987.
- [174] Ulam S., Richtmyer R.D., von Neumann J. Statistical Methods in Neutron Diffusion. *Los Alamos Scientific Laboratory Report*, LAMS(551), 1947.
- [175] Ulam S., Metropolis N. The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(335-341), 1949.
- [176] Metropolis N. et al. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *J. Chem. Phys.*, 21(1087), 1953.
- [177] Metropolis N. The Beginnig of the Monte Carlo Method. *Los Alamos Science Special Issue 1987*, 1953.
- [178] Medel R. et al. An Introduction to Markov Chain Monte Carlo. *Bol. Estad. Investig. Oper.*, 37(47), 2021.
- [179] Knox L., Christensen L., Skordis C. The Age of the Universe and the Cosmological Constant Determined from Cosmic Microwave Background Anisotropy Measurements. *The American Astronomical Society*, 563(L95), 2001.
- [180] Verde L. et al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* Observations: Parameter Estimation Methodology. *The American Astronomical Society*, 148(195), 2003.
- [181] Neal R.M. Probabilistic Inference Using Markov Chain Monte Carlo Methods, . *Technical Report*, CRG-TR-93-1, 1993.
- [182] Gilks W. R., Richardson S., Spiegelhalter D. J. Markov Chain Monte Carlo in Practice. *Chapman & Hall, London*, 1995.
- [183] Gelman A. et al. Bayesian Data Analysis. *Chapman and Hall/CRC: New York, NY, USA*,, 2013.
- [184] Cowles M.K., Carlin B.P. Markov Chain Monte Carlo Convergence Diagnostics: A Comparative Review. *Journal of the American Statistical Association*, 91(434):883–904, 1996.
- [185] Foreman-Mackey D. et al. **emcee**: The MCMC Hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(925):306, 2013.
- [186] **emcee**. <http://dfm.io/emcee/current/>, 2021.
- [187] Goodman J., Weare J. Ensemble Sampler with Affine Invariance. *Communication in Applied Mathematics and Computational Science*, 5(10), 2010.
- [188] Gilks W.R. et al. Adaptive Direction Sampling. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)*, 43(1):179–189, 1994.

- [189] Verde L. A practical guide to Basic Statistical Techniques for Data Analysis in Cosmology. *arXiv:0712.3028v2*, 2008.
- [190] Link W., Eaton M. On thinning of Chains in MCMC. *Methods in Ecology and Evolution*. *Methods Ecol. Evol.*, 3(112-115), 2012.
- [191] Kosowsky A. et al. Efficient Cosmological Parameter Estimation from Microwave Background Anisotropies. *Phys. Rev. D*, 66(063007), 2002.
- [192] Jimenez R. et al. Fast Cosmological Parameter Estimation from Microwave Background Temperature and Polarization Power Spectra. *Phys. Rev. D*, 70(023005), 2004.
- [193] Andreon S. Galaxy Luminosity Evolution: How Much is due to Model Choice? *A&A*, 416(3), 2004.
- [194] Chevallier M., Polarski D. Accelerating Universes with Scaling Dark Matter. *International Journal of Modern Physics D*, 10(02), 2001.
- [195] Linder E.V. Exploring the Expansion History of the Universe. *Physical Review Letters*, 90(091301), 2003.
- [196] <https://docs.python.org/3/library/os.html>.
- [197] <https://numpy.org/>.
- [198] <https://www.scipy.org/>.
- [199] <https://pandas.pydata.org/>.
- [200] <https://docs.astropy.org/en/stable/cosmology/index.html>.
- [201] <https://matplotlib.org/>.
- [202] <https://samreay.github.io/ChainConsumer/>.
- [203] Particle Data Group. Review of Particle Physics, Cap. 25 Cosmological Parameters. *Oxford University Press*, Prog. Theor. Exp. Phys.(083C01), 2020.
- [204] Riess A.G. et al. Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM. *The Astrophysical Journal*, 876(85), 2019.
- [205] Haridasu B.S. et al. An improved model-independent assessment of the late-time cosmic expansion. *JCAP10*, 015, 2018.
- [206] Weikang Lin et al. Investigating the Hubble Constant Tension: Two Numbers in the Standard Cosmological Model. *ApJL*, 904 L22, 2020.
- [207] Amanullah R. et al. SPECTRA AND HST LIGHT CURVES OF SIX TYPE IA SUPERNOVAE AT $0.511 < Z < 1.12$ AND THE Union2 COMPILATION. *The Astrophysical Journal*, 716(712), 2010.
- [208] Abbott T.M.C. et al. Cosmological Constraints from Multiple Probes in the Dark Energy Survey. *Phys. Rev. Lett.*, 122(171301), 2019.
- [209] Riess A.G. et al. A 2.4% DETERMINATION OF THE LOCAL VALUE OF THE HUBBLE CONSTANT. *ApJ*, 826 56, 2016.

- [210] Borghi N. et al. Towards a Better Understanding of Cosmic Chronometers: A new measurement of $H(z)$ at $z \sim 0.7$. <https://arxiv.org/abs/2110.04304>, 2021.
- [211] LIGO/Virgo/KAGRA Collaboration. Constraints on the cosmic expansion history from GWTC-3. *arXiv*, 2021.
- [212] Abbot B.P. et al. A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant. *Nature*, 551(85-88), 2017.
- [213] Lemos P. <https://github.com/Pablo-Lemos/plot1d/blob/main/plot1d/plotter.py>. 2021.
- [214] Laureijs R. et al. Euclid Definition Study Report. *arXiv:1110.3193*, 2011.
- [215] Spergel D. et al. Wide-Field Infrared Survey Telescope-Astrophysics Focused Telescope Assets WFIRST-AFTA 2015 Report. *arXiv:1503.03757*, 2015.
- [216] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(061102), 2016.
- [217] The LIGO Scientific Collaboration. Advanced LIGO. *Class. Quantum Grav.*, 32(074001), 2015.
- [218] Acernese F. The Advanced Virgo Detector. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 610(012014), 2015.
- [219] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(161101), 2017.
- [220] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. Properties of the Binary Neutron Star Merger GW170817. *Phys. Rev. X*, 9(011001), 2017.
- [221] B. P. Abbott. GW190425: Observation of a Compact Binary Coalescence with Total Mass $\sim 3.4 \odot M$. *ApJL*, 892(L3), 2020.
- [222] Schutz B.F. Determining the Hubble Constant from Gravitational Wave Observations. *Nature*, 323(310-1), 1986.
- [223] Abbott B.P. et al. Prospects for Observing and Localizing Gravitational-Wave Transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA. *Living Rev Relativ*, 23(3), 2020.
- [224] Chen H.Y. et al. A 2% Hubble Constant Measurement from Standard Sirens within Five Years. *Nature*, 562(545–547), 2018.
- [225] Amaro-Seoane P. et al. Laser Interferometer Space Antenna. *arXiv: 1702.00786*, 2017.
- [226] Del Pozzo W. et al. Stellar Binary Black Holes in the LISA Band: a New Class of Standard Sirens. *MNRAS*, 475(3485–3492), 2018.
- [227] Tamanini N. et al. Science with the Space-Based Interferometer eLISA. III: Probing the Expansion of the Universe using Gravitational Wave Standard Sirens. *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, 002, 2016.
- [228] Caprini C., Tamanini N. Constraining Early and Interacting Dark Energy with Gravitational Wave Standard Sirens: The Potential of the eLISA Mission. *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, 006, 2016.
- [229] Taylor S.R., Gair J.R. Cosmology with the Lights Off: Standard Sirens in the Einstein Telescope Era. *Phys. Rev. D*, 86(023502), 201.

- [230] Sathyaprakash B.S. et al. Cosmography with the Einstein Telescope. *Classical and Quantum Gravity*, 27(215006), 2010.
- [231] Ezquiaga J.M. et al. Dark Energy in Light of Multi-Messenger Gravitational-Wave Astronomy. *Front. Astron. Space Sci.*, 2018.