

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tassellamenti euclidei e tassellamenti iperbolici

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:

Chiar.ma Prof.ssa

MONICA IDÀ

Candidato:

FILIPPO BARTOLETTI

Sessione Unica

Anno Accademico 2020-2021

Introduzione

Il termine geometria deriva dalle parole greche *geo* e *metria* e significa dunque "misura della terra". Tuttavia i Greci, a differenza ad esempio degli Egiziani prima di loro, non concepirono la geometria solo come uno strumento pratico atto a misurare campi, progettare edifici e così via. La loro cultura si fondava sulla ricerca della verità e sulla conoscenza. Non è un caso dunque che i Greci abbiano creato una delle più grandi rivoluzioni del pensiero umano attraverso l'*astrazione*, ovvero la distinzione tra il mondo reale e gli ideali a cui le forme concrete assomigliano; e non è un caso che proprio durante il periodo delle *poleis* siano fioriti molti aspetti del sapere e della cultura che ancora oggi caratterizzano il pensiero occidentale. In particolare, i Greci ritenevano che la matematica fosse la disciplina più pura nella ricerca della verità.

Attorno al 300 a.C. tutte le conoscenze di Geometria fino ad allora acquisite furono raccolte da *Euclide di Alessandria* negli *Elementi*, opera sulla quale si fonda la geometria del piano, oggi chiamata anche, per questo motivo, *euclidea*. Si tratta della prima formalizzazione di una costruzione assiomatica: a partire dalla definizione di oggetti e da assiomi, si dimostrano teoremi. Così gli Elementi di Euclide si fondano su *nozioni comuni* e su cinque *postulati*. Il quinto postulato, che è stato al centro di un dibattito durato molti secoli, dice la cosa seguente:

V Postulato: Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.

Molti matematici dopo Euclide hanno tentato invano di dimostrarlo a partire dagli altri quattro; l'unico risultato ottenuto è stato sostituirlo con altre forme più intuitive ma ad esso equivalenti.

In seguito si è passati alla dimostrazione per assurdo. Il principale esponente di questa linea è stato il gesuita Giovanni Girolamo Saccheri. La sua dimostrazione, pubblicata nel 1733 e rivelatasi poi non corretta, ha aperto la strada all'ideazione di geometrie che

non rispettassero il V postulato: le geometrie non euclidee.

Attorno al 1813 il matematico tedesco Carl Friedrich Gauss sviluppò una geometria fondata sulla negazione del V postulato, ma non pubblicò il suo lavoro per paura del clamore che avrebbe suscitato. Nel 1829 il russo Nikolai Lobachevski pubblicò un trattato sulla stessa geometria. Poiché tale lavoro era scritto in lingua russa, in Europa si venne a conoscenza di tale geometria tre anni più tardi, con il trattato dell'ungherese Janos Bolyai, approvato e condiviso dallo stesso Gauss. Dunque era stata scoperta l'esistenza di una geometria non euclidea: la *geometria iperbolica*.

Nel 1854 il tedesco George Riemann affermò che sostituire il V postulato con la sua negazione non era il solo modo di modificare la geometria Euclidea. Nacquerò così altre geometrie non euclidee, fra cui quella *sferica*.

Verso la fine del XIX secolo il francese Jules Henry Poincaré fornì un interessante *modello* per la geometria iperbolica, costruibile a partire da un disco sul piano euclideo.

Tornando alla geometria euclidea, negli *Elementi* vi sono alcuni aspetti che non soddisfano completamente un lettore moderno. In questa ottica il matematico tedesco David Hilbert si propose di rivedere la struttura di Euclide, cercando di conferire alla Geometria un rigore e un formalismo assiomatico paragonabili a quelli già esistenti per l'Algebra e l'Analisi Matematica, e nel 1899 scrisse quindi *I Fondamenti della Geometria*, in cui si costruisce la geometria euclidea in modo assiomatico, eliminando alcune lacune presenti in Euclide. Il successo di questo lavoro è stato tale da influenzare molti sviluppi della Matematica del XX secolo fino ad oggi.

Nel primo capitolo di questa tesi si ripercorre la teoria assiomatica di Hilbert (limitatamente al piano) seguendo la trattazione del matematico statunitense Robin Hartshorne ([1]), e si costruisce un modello della struttura in cui valgono i primi quattro gruppi di assiomi di Hilbert: tale modello è dato dal *piano cartesiano* su un campo ordinato pitagorico F . Se si aggiunge al campo F l'ipotesi più forte che sia euclideo, si ha una struttura che chiamiamo *piano euclideo*, dove due circonferenze sotto certe ipotesi sono obbligate ad incontrarsi. Seguendo Hartshorne, nei successivi capitoli 2 e 3 lavoriamo quindi senza chiedere che valgano necessariamente gli assiomi del quinto gruppo di Hilbert, che sono quelli che forzano il campo ad essere il campo reale.

Nel secondo capitolo studiamo un'applicazione chiamata *inversione circolare*, che viene utilizzata nel terzo capitolo per la costruzione del *piano di Poincaré*, discutendo la validità degli assiomi di Hilbert in questo modello.

Negli ultimi due capitoli della tesi parliamo di tassellamenti regolari del piano carte-

siano reale e del piano di Poincaré. I tassellamenti del piano sono stati utilizzati nell'arte e nell'architettura fin dall'antichità. Celebri sono le decorazioni che ornano le pareti del palazzo dell'Alhambra a Granada (risalente al XIII secolo), alle quali si è ispirato, settecento anni più tardi, l'artista olandese Maurits Cornelis Escher per realizzare molte delle sue opere.

Un *tassellamento* del piano è un ricoprimento del piano che utilizza tessere tutte fra loro congruenti, senza creare buchi o sovrapposizioni; un *tassellamento regolare* del piano è un tassellamento in cui le tessere sono poligoni regolari, e in ogni vertice concorre lo stesso numero di poligoni.

Nel quarto capitolo sono descritti i possibili reticoli di un tassellamento del piano, da cui si ricavano le possibili forme di una tessera poligonale di un tassellamento regolare del piano, osservando come vi siano solo tre casi possibili, e analizzandone alcuni esempi attraverso opere di M.C.Escher.

Nel quinto ed ultimo capitolo si studiano i tassellamenti regolari del piano di Poincaré, analizzandone le differenze rispetto ai tassellamenti regolari del piano euclideo.

In questo caso vi sono infinite possibili scelte del poligono-tessera; se ne osservano alcuni esempi, si trattano i tassellamenti duali e i tassellamenti di ordine infinito. Si applicano poi i risultati ottenuti per studiare la serie di quattro di opere di M.C.Escher denominate Limite del Cerchio I,II,III,IV, individuando i tassellamenti dei quali l'artista si è servito per realizzare i disegni. Infine sono riprese le tre stampe di Escher sul piano euclideo già analizzate nel quarto capitolo, ma "trasportate" nel piano di Poincaré, osservando come il tassellamento cambi al variare della struttura geometrica in cui è ambientata l'opera.

Indice

Introduzione	i
1 Richiami sugli assiomi di Hilbert per il piano euclideo	1
1.1 Gli assiomi del gruppo I	1
1.2 Gli assiomi del gruppo II	1
1.3 Gli assiomi del gruppo III	5
1.4 Gli assiomi del gruppo IV	7
1.5 Il piano cartesiano	7
1.6 Gli assiomi del gruppo V	21
2 Inversione circolare	23
2.1 Definizione e prime proprietà	23
2.2 Rette e circonferenze	26
2.3 Angoli e birapporto	32
3 Modello di Poincaré	37
3.1 Assiomi di incidenza e assioma di Playfair	38
3.2 Assiomi di ordinamento e congruenza	40
3.3 Assioma (E) e assioma archimedeo	48
4 Tassellamenti del piano euclideo	53
4.1 Reticoli	53
4.2 Tassellamenti regolari	59
5 Tassellamenti del piano di Poincaré	65
5.1 Rivestimenti regolari del P -modello	65
5.2 La produzione artistica di M.C.Escher	74
5.3 Limite del Cerchio	75

Bibliografia

93

Capitolo 1

Richiami sugli assiomi di Hilbert per il piano euclideo

In questo capitolo ripercorriamo la teoria assiomatica di David Hilbert, seguendo l'esposizione di Robin Hartshorne.

1.1 Gli assiomi del gruppo I

Siano dati un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *punti*, e un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *rette*.

Postuliamo una relazione, detta di *incidenza*, che soddisfa i seguenti assiomi:

(I1): Per ogni coppia di punti A e B , esiste ed è unica una retta r che contiene A e B .

(I2): Ogni retta contiene almeno 2 punti.

(I3): Esistono almeno 3 punti non allineati.

Una geometria in cui vale una relazione di questo tipo è detta *geometria di incidenza*.

Osservazione 1.1. Dall'assioma (I1) segue immediatamente che due rette distinte hanno al massimo un punto in comune.

1.2 Gli assiomi del gruppo II

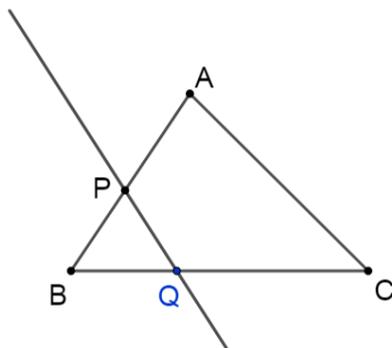
Su una geometria di incidenza postuliamo una relazione fra terne di punti ($A * B * C$), detta di *interposizione* od *ordinamento*, che rispetta i seguenti assiomi:

(B1): Se $A * B * C$ allora i tre punti sono allineati e vale $C * B * A$.

(B2): Se A, B sono punti distinti, allora sulla retta AB esiste un punto C tale che $A * B * C$.

(B3): Dati tre punti su una retta, uno ed un solo punto sta tra gli altri due.

(B4): (*Assioma di Pasch*) Siano A, B, C tre punti non allineati, e sia l una retta tale che $A, B, C \notin l$. Se esiste un punto $P \in l$ tale che $A * P * B$, allora esiste un punto $Q \in l$ tale che $A * Q * C$ oppure $B * Q * C$, ma non entrambi.



Definizione 1.2. Dati due punti A e B , il *segmento* AB è l'insieme costituito da A , B e da tutti i punti della retta AB che stanno tra A e B , cioè tutti i C tali che $A * C * B$.

Definizione 1.3. Siano A, B, C punti non allineati. Il *triangolo* $\triangle ABC$ è costituito dall'unione dei segmenti AB , BC e CA , detti *lati*, mentre i punti A , B e C sono detti *vertici*.

Definizione 1.4. Sia X un insieme costituito da almeno due punti. Diciamo che X è un insieme *convesso* se, presi due punti $A, B \in X$, il segmento AB è interamente contenuto in X , cioè $\forall P$ t.c. $A * P * B$, si ha $P \in X$.

Teorema 1.5. (*Teorema di separazione del piano*)

Sia l una retta; allora l'insieme dei punti del piano che non stanno sulla retta quozientato con la relazione di equivalenza

$$A \sim B \iff \text{il segmento } AB \text{ non incontra } l \text{ (cioè } \nexists C \in l \text{ t.c. } A * C * B)$$

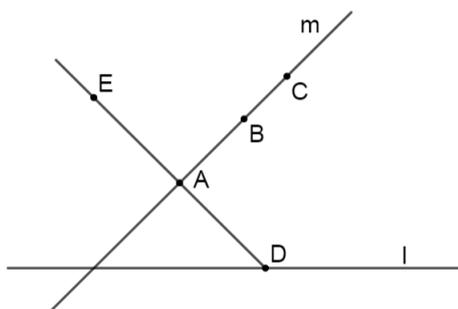
ha 2 classi di equivalenza, che sono entrambe sottoinsiemi convessi del piano, e vengono chiamati semipiani individuati da l .

Dimostrazione. Siano X l'insieme dei punti del piano, l una retta e $A, B \in X \setminus l$ due punti. Proviamo che la relazione definita è di equivalenza: la riflessività e la simmetria

CAPITOLO 1. RICHIAMI SUGLI ASSIOMI DI HILBERT PER IL PIANO
EUCLIDEO

sono ovvie, mentre per la transitività siano A, B, C tali che $A \sim B$, $B \sim C$. Se i tre punti non sono allineati, allora, per l'assioma di Pasch (B_4), se $A \not\sim C$ si avrà necessariamente $A \not\sim B$ oppure $B \not\sim C$, in contraddizione con l'ipotesi.

Se invece i punti A, B, C sono allineati, sia m la retta che li contiene. Chiaramente $m \neq l$ perchè i punti non appartengono a l per ipotesi. Per l'Osservazione (1.1) m e l hanno al più un punto in comune, ma per l'assioma (I_2) ogni retta ha almeno due punti, quindi esiste un punto $D \in l$ tale che $D \notin m$.



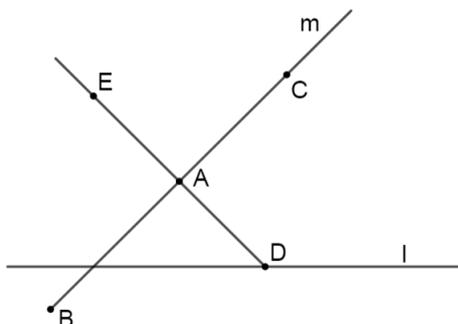
Ora per l'assioma (B_2) possiamo trovare un punto E tale che $D * A * E$. Allora per l'assioma (B_1) i punti D, A, E sono allineati e si ha $E \notin l$ poichè $D \in l$ e la retta DAE non può incontrare la retta l in due punti. Inoltre il segmento AE non può incontrare l : in tal caso infatti si avrebbe $A * D * E$, ma questo non è possibile perchè l'assioma (B_3) ci assicura che un unico punto si trova fra gli altri due, e per costruzione abbiamo posto $D * A * E$. Quindi $A \sim E$. Osserviamo che $E \notin m$, poichè, se così fosse, la retta DAE dovrebbe essere uguale alla retta m , ma $D \notin m$ per ipotesi. Allora i punti A, B, E non sono allineati, e siccome valgono $B \sim A$ (per simmetria su $A \sim B$) e $A \sim E$, per quanto visto in precedenza si avrà $B \sim E$. Allo stesso modo, siccome $C \sim B$ (per simmetria su $B \sim C$) e $B \sim E$, si avrà $C \sim E$. Applicando ancora una volta la stessa procedura per i tre punti non allineati A, C, E , siccome $A \sim E$ ed $E \sim C$ (per simmetria su $C \sim E$), concluderemo che $A \sim C$.

Quindi abbiamo provato che \sim è una relazione di equivalenza. Le sue classi di equivalenza sono almeno 2, infatti $X \setminus l \neq \emptyset$ per l'assioma (I_3), e dati un punto $A \notin l$ e un punto $P \in l$, sappiamo che esiste un punto B sulla retta AP tale che $A * P * B$, cioè tale che $A \not\sim B$.

Mostriamo ora che le classi di equivalenza della relazione \sim sono esattamente 2; basta far vedere che dati tre punti A, B, C , se $A \not\sim B$ e $B \not\sim C$, allora $A \sim C$.

Se i tre punti non sono allineati, l'assioma di Pasch ci assicura che non esiste un punto $P \in l$ sul segmento AC , giacché la retta l interseca i segmenti AB e BC ; quindi $A \sim C$. Se i tre punti sono allineati, sia m la retta che li contiene. Come fatto in precedenza,

scegliamo un punto $D \in l$ che non stia su m , e, utilizzando l'assioma $(B2)$, prendiamo un punto E tale che $D * A * E$. Allora abbiamo visto che $A \sim E$.



Ora, se $A \not\sim B$, poichè \sim è una relazione di equivalenza avremo $B \not\sim E$ (infatti $B \sim E$ implicherebbe $A \sim B$ per transitività, contraddicendo l'ipotesi). Considerando i tre punti non allineati C, B, E , per quanto visto in precedenza, siccome valgono $C \not\sim B$ ed $E \not\sim B$, si ha $E \sim C$, da cui, per transitività, concludiamo che $A \sim C$. \square

Corollario 1.6. (*Separazione della retta*)

Siano r una retta e A un punto. Allora i punti di $r \setminus \{A\}$ sono divisi in due parti disgiunte, non vuote, con la proprietà seguente: due punti B e C di r stanno dalla stessa parte rispetto ad A se e solo se $A \notin BC$.

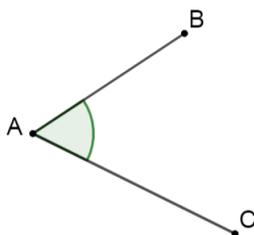
Dimostrazione. Consideriamo una retta r e un punto $A \in r$. Per l'assioma $(I3)$ esiste un punto $E \notin r$; sia allora m la retta passante per A ed E , che per l'assioma $(I1)$ esiste ed è unica. Per il teorema di separazione del piano, la retta m divide il piano in due sottoinsiemi convessi S_1 e S_2 con intersezione vuota. Definiamo le due parti della retta r (rispetto al punto A) come $S'_1 = S_1 \cap r$ e $S'_2 = S_2 \cap r$. Risulta immediato verificare che due punti B e C di r stanno dalla stessa parte rispetto ad A se e solo se $B * A * C$ è falsa.

Infine le due parti della retta r sono non vuote: questo deriva dall'assioma $(I2)$, secondo il quale esiste un punto $B \in r$ tale che $B \neq A$, e dall'assioma $(B2)$ secondo il quale esiste un punto D tale che $B * A * D$. Per come abbiamo definito S'_1 e S'_2 , i punti B e D non staranno dalla stessa parte di r rispetto ad A , quindi i due sottoinsiemi S_1 e S_2 sono non vuoti. \square

Definizione 1.7. Data una retta AB , il raggio o semiretta di origine di A passante per B è l'insieme costituito da A e tutti i punti sulla retta AB che si trovano dalla stessa parte di B rispetto ad A .

Definizione 1.8. Siano A, B, C tre punti non allineati, e consideriamo due raggi di vertice A passanti per, rispettivamente, B e C . L'angolo \widehat{BAC} è l'unione dei due raggi AB e AC , mentre il punto A è detto *vertice*.

L'interno dell'angolo \widehat{BAC} è l'insieme costituito dai punti che stanno sia nel semipiano individuato da AC e contenente B , che nel semipiano individuato da AB e contenente C .



L'interno di un triangolo $\triangle ABC$ è definito come l'insieme dei punti interni ai tre angoli \widehat{BAC} , \widehat{ABC} , \widehat{BCA} .

Osservazione 1.9. Dalla definizione precedente segue che tutti gli angoli sono convessi, non esistono cioè gli angoli comunemente noti come angoli piatti, nè angoli di ampiezza maggiore di un angolo piatto (concavi).

1.3 Gli assiomi del gruppo III

Postuliamo ora una relazione di *congruenza tra segmenti* che rispetta i seguenti assiomi:

(C1): Dati un segmento AB , un punto C e un raggio r con origine C , esiste ed è unico il punto $D \in r$ tale che $AB \cong CD$.

(C2): Un segmento AB è congruente a sè stesso, cioè $AB \cong AB$. Inoltre, dati tre segmenti AB, CD, EF , se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, allora $CD \cong EF$.

(C3): Siano A, B, C tre punti tali che $A * B * C$, e D, E, F tre punti tali che $D * E * F$; se $AB \cong ED$ e $BC \cong DF$, allora $AC \cong EF$.

Osservazione 1.10. Si vede come conseguenza dell'assioma (C2) che la congruenza tra segmenti è una relazione di equivalenza.

Definizione 1.11. Siano AB e CD due segmenti; sia r il raggio con origine in A e contenente B , e sia E l'unico punto su r (la cui esistenza è garantita dall'assioma (C1))

tale che $CD \cong BE$; diciamo che il segmento AE è la *somma* dei segmenti AB e CD , scrivendo $AE = AB + CD$.

Osservazione 1.12. La somma di segmenti è ben definita sulle classi di congruenza, cioè dati i segmenti $AB \cong A'B'$ e $CD \cong C'D'$, si avrà $AB + CD \cong A'B' + C'D'$.

Definizione 1.13. Siano AB, CD due segmenti; diciamo che $AB < CD$ se esiste un punto E tale che $C * E * D$ e $AB \cong CE$.

Si prova che ([1] prop.8.4) la relazione ($<$) tra segmenti è ben definita sulle classi di congruenza ed è una relazione d'ordine totale.

Postuliamo anche una relazione di *congruenza tra angoli* che rispetta i seguenti assiomi:

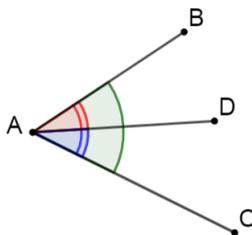
(C4): Dati un angolo \widehat{BAC} e un raggio DE , scelto uno dei due semipiani individuati da DE esiste ed è unico l'angolo tale che F stia in tale semipiano, e $\widehat{FDE} \cong \widehat{BAC}$.

(C5): Un angolo α è congruente a sè stesso, cioè $\alpha \cong \alpha$. Inoltre, dati tre angoli α, β, γ , se $\alpha \cong \beta$ e $\alpha \cong \gamma$, allora $\beta \cong \gamma$.

(C6): (*Primo criterio di congruenza dei triangoli*) Dati due triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, supponiamo che $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ e $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}$. Allora i due triangoli sono congruenti, cioè si avrà anche $BC \cong EF$, $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ e $\widehat{ACB} \cong \widehat{DFE}$.

Osservazione 1.14. Come conseguenza dell'assioma (C5), la congruenza tra angoli è una relazione di equivalenza.

Definizione 1.15. Dato un angolo \widehat{BAC} , sia D un punto interno ad esso; consideriamo il raggio AD . Allora diremo che l'angolo \widehat{BAC} è la *somma* degli angoli \widehat{BAD} e \widehat{DAC} , e scriveremo $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$.



Definizione 1.16. Siano \widehat{BAC} e \widehat{EDF} due angoli; diciamo che $\widehat{BAC} < \widehat{EDF}$ se esiste un raggio DG interno a \widehat{EDF} tale che $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDG}$.

La relazione ($<$) tra angoli è ben definita sulle classi di congruenza ed è una relazione d'ordine totale.

1.4 Gli assiomi del gruppo IV

Per il quarto gruppo di assiomi, abbiamo bisogno della nozione di rette parallele.

Definizione 1.17. Due rette si dicono *parallele* se non hanno punti in comune, oppure coincidono.

Possiamo ora introdurre *l'assioma di Playfair*, che costituisce da solo il quarto gruppo di assiomi:

(*P*): Dati un punto P ed una retta r , esiste al più una retta passante per P e parallela a r .

Osservazione 1.18. Si dimostra che l'assioma (*P*) è equivalente al Quinto Postulato di Euclide.

1.5 Il piano cartesiano

In questa sezione trattiamo il piano cartesiano definito su un campo F , una struttura sulla quale valgono, come vedremo, gli assiomi di Hilbert, e sulla quale lavoreremo nei capitoli successivi. Per cominciare, riportiamo la definizione di campo ordinato e alcune sue proprietà.

Definizione 1.19. Un *campo ordinato* è un campo F con un suo sottoinsieme P , detto *cono degli elementi positivi*, tale che:

1. $a, b \in P \implies (a + b) \in P, a \cdot b \in P$;
2. $\forall a \in F$ vale una e una sola delle seguenti: $a \in P, a = 0, -a \in P$.

Definizione 1.20. Sia (F, P) un campo ordinato e siano $a, b \in F$. Se $a \in P$, diciamo che $a > 0$, e inoltre diciamo che $a < b$ se $b - a > 0$.

È immediato vedere che la relazione $<$ così definita è una relazione di ordine totale su F .

Ricordiamo la definizione di caratteristica di un campo:

Definizione 1.21. Sia F un campo; preso $n \in \mathbb{Z}$ poniamo, $\forall a \in F$:

$$na := \begin{cases} a + a + \dots + a & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ -a - a - \dots - a & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Se $\exists m \in \mathbb{N} \setminus 0$ t.c. $m1_F = 0$, definiamo la *caratteristica* di F come:

$$\text{car}F := \min \{n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \text{ t.c. } n1_F = 0\};$$

Se un tale m non esiste (cioè se $\forall n > 0, n1_F \neq 0$), allora per definizione $\text{car}F = 0$.

Proposizione 1.22. *Sia (F, P) un campo ordinato; allora:*

- a) $1 > 0$;
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$, si ha $n1_F > 0$, dunque $\text{car}F = 0$;
- c) $\forall a \neq 0, a^2 > 0$.

Dimostrazione. a) Non può essere $1 = 0$ perchè F è un campo, dove quindi $1 \neq 0$, ma non può neanche essere $1 < 0$ perchè questo vorrebbe dire $-1 > 0$, cioè $-1 \in P$, e dunque:

$$1 = (-1) \cdot (-1) > 0, \text{ in contraddizione con l'ipotesi } 1 < 0;$$

Allora deve essere $1 > 0$.

b) Siccome $1 \in P$, allora $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, si ha $n1 = (1 + \dots + 1) \in P$, cioè $n1 > 0$ e di conseguenza $\text{car}F = 0$.

c) Sia $a \neq 0$. Se $a > 0$ allora $a \in P$, quindi $a^2 = a \cdot a > 0$. Se invece $a < 0$ si avrà $-a > 0$, da cui $a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$.

□

Notazione 1.23. Se F è un campo ordinato e un elemento $b \in F$ ha una radice quadrata, denotiamo con \sqrt{b} la sua radice quadrata > 0 .

Esempio 1.24. \mathbb{R} con l'ordine usuale è un campo ordinato. Se F è un sottocampo di \mathbb{R} , F è un campo ordinato con l'ordine indotto da \mathbb{R} , cioè prendendo come cono degli elementi positivi P l'insieme degli elementi di F che siano positivi in \mathbb{R} .

Definizione 1.25. Un campo F si dice *pitagorico* se $\forall a \in F$ l'elemento $1 + a^2$ ha una radice quadrata in F .

Un campo ordinato F si dice *euclideo* se $\forall a \in F, a > 0, a$ ha una radice quadrata in F . Se F è un campo ordinato euclideo, allora F è pitagorico.

Definizione 1.26. Il *campo di Hilbert* Ω è l'insieme dei numeri reali ottenibili a partire da \mathbb{Q} con un numero finito delle operazioni seguenti: $+, -, \cdot, \div$ e $a \mapsto \sqrt{1 + a^2}$.

Proposizione 1.27. *Il campo di Hilbert Ω è un campo ordinato pitagorico.*

Dimostrazione. Per provare che Ω è un campo, siano $a, b \in \Omega$. Per definizione di Ω , a e b possono essere espressi con un numero finito di operazioni $+$, $-$, \cdot , \div e $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$. Dunque lo stesso si può dire degli elementi $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ e $a \div b$ con $b \neq 0$, quindi è immediato vedere che Ω è un campo.

Per provare che Ω è pitagorico, prendiamo $c \in \Omega$: ancora una volta, per definizione di Ω , c può essere espresso con un numero finito di operazioni $+$, $-$, \cdot , \div e $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$, quindi lo stesso si può dire dell'elemento $\sqrt{1+c^2}$.

Infine Ω è un campo ordinato perché è un sottocampo di \mathbb{R} . □

Definizione 1.28. Se F è un campo ordinato, definiamo il *valore assoluto* di $a \forall a \in F$ nel modo seguente:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Parliamo ora di piano cartesiano su un campo.

Definizione 1.29. Sia F un campo; chiamiamo *piano cartesiano* su F la struttura seguente, denotata con Π_F :

Insieme dei punti $= F^2$;

Insieme delle rette $= \{(x, y) \in F^2 \mid ax + by + c = 0\}$.

Definizione 1.30. Data una retta nella forma $y = mx + q$, chiamiamo *coefficiente angolare* (o *slope*) l'elemento m . Una retta della forma $x = c$ ha per definizione coefficiente angolare ∞ .

Proposizione 1.31. *Dato un campo F , il piano cartesiano Π_F su esso definito soddisfa gli assiomi (I1), (I2), (I3) e (P).*

Dimostrazione. (I1): Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$, se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

è una equazione lineare a coefficienti in F , che rappresenta l'unica retta che contiene P_1 e P_2 . Altrimenti la retta è data da $x = x_1$ (se $x_1 = x_2$) oppure $y = y_1$ (se $y_1 = y_2$).

(I2): Ogni campo F contiene almeno i due elementi distinti 0 e 1. Data una retta, se la sua equazione è del tipo $y = mx + q$ basta porre $x = 0, 1$ per trovare due punti distinti che le appartengono; se la sua equazione è invece del tipo $x = c$, i punti $(c, 0)$ e $(c, 1)$

soddisfano l'assioma.

(I3): Si verifica immediatamente considerando i punti $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

(P): Ricordando che due rette sono parallele se non si incontrano o se sono uguali, mostriamo innanzitutto che due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare. Date due rette della forma $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$, cerchiamo i loro eventuali punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = m_2x + q_2 \end{cases}$$

quindi

$$m_1x + q_1 = m_2x + q_2,$$

da cui

$$x(m_1 - m_2) = q_2 - q_1$$

che ha una soluzione unica se e solo se $m_1 \neq m_2$. Se invece $m_1 = m_2$ e $q_1 = q_2$, cioè se le due rette coincidono, il sistema è indeterminato e fornisce infinite soluzioni.

Data invece una retta del tipo $x = c$, che avrà coefficiente angolare uguale a ∞ , si prova facilmente che le parallele ad essa sono tutte e sole le rette di equazione $x = d$, anch'esse di coefficiente angolare ∞ .

Consideriamo una retta r di equazione $y = mx + q$, e un punto $A = (x_0, y_0)$, $A \notin r$. Allora la formula

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

fornisce l'unica retta parallela a r passante per A .

Se la retta r è del tipo $x = c$, l'unica retta parallela a r e passante per A avrà equazione $x = x_0$.

Il piano cartesiano Π_F soddisfa dunque l'assioma di Playfair (P) (in realtà abbiamo provato non solo l'unicità ma anche l'esistenza della parallela). \square

Definiamo ora la relazione di ordinamento (o interposizione) in un piano cartesiano su un campo ordinato.

Definizione 1.32. Sia F un campo ordinato, sia r una retta di Π_F e siano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ tre punti distinti di Π_F allineati su r : allora diciamo che $A * B * C$ se e solo se si verifica una delle condizioni seguenti:

- r è una retta del tipo $y = mx + q$ e si ha: $a_1 < b_1 < c_1$ o $c_1 < b_1 < a_1$;
- r è una retta del tipo $x = c$ e si ha: $a_2 < b_2 < c_2$ o $c_2 < b_2 < a_2$.

Proposizione 1.33. *Sia F un campo ordinato. Con la relazione di ordinamento sopra definita, Π_F soddisfa gli assiomi (B1), (B2), (B3) e (B4).*

Dimostrazione. La validità dell'assioma (B1) segue direttamente dalla definizione di interposizione in Π_F .

L'assioma (B2) segue dalla seguente proprietà, vera in ogni campo ordinato F :

Siano $b, d \in F$ tali che $b > d$; allora esistono $a, c, e \in F$ tali che $a < b < c < d < e$.

Infatti, dati b e d , gli elementi

$$a = b - 1, \quad c = \frac{1}{2}(b + d), \quad e = d + 1$$

verificano la condizione richiesta. Osserviamo che essendo F un campo ordinato, per la Proposizione (1.22) F avrà caratteristica 0, quindi $\frac{1}{2} \in F$.

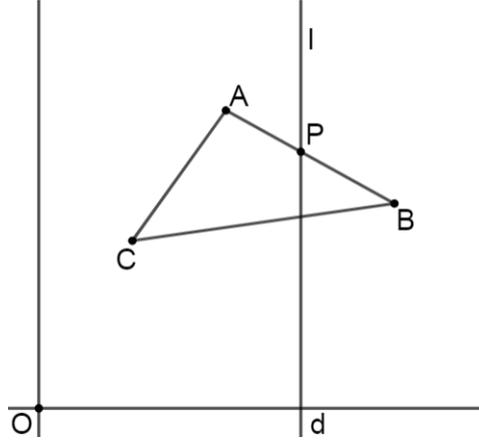
L'assioma (B3) deriva dal fatto che dati tre elementi distinti a, b, c di un campo ordinato F , si verifica solo una delle 6 possibilità seguenti:

$$\begin{aligned} a < b < c; \\ a < c < b; \\ b < a < c; \\ b < c < a; \\ c < a < b; \\ c < b < a. \end{aligned}$$

Veniamo ora all'assioma di Pasch (B4). Nel piano cartesiano Π_F siano $\triangle ABC$ un triangolo e l una retta che incontra il lato AB , ovvero tale che esista un punto $P \in l$ tale che $A * P * B$. Assumendo che $A, B, C \notin l$, mostriamo che l incontra il lato BC o il lato AC , ma non entrambi.

Se la retta l ha equazione del tipo $x = d$, chiamiamo le prime coordinate di A, B, C (ovvero le x-coordinate, dette ascisse), rispettivamente a, b, c . Per ipotesi, d sarà l'ascissa del punto P e si avrà $a < d < b$ oppure $b < d < a$. Supponiamo che valga $a < d < b$.

Ora, se $c < d$ (come in figura), e quindi $c < d < b$, esisterà un punto Q del segmento



BC che avrà ascissa d (chiaramente non può essere $Q = B$ o $Q = C$, quindi $B * Q * C$); allora $Q \in l$, e allo stesso tempo non esisterà un punto sul segmento AC con ascissa d poiché $d > a$ e $d > c$. Dunque in questo caso l incontrerà BC e non incontrerà AC .

Se invece $c > d$, e quindi $a < d < c$, si prova allo stesso modo che la retta l incontrerà il segmento AC e non il segmento BC .

Se invece la retta l ha equazione del tipo $y = mx + q$, la dimostrazione è analoga ma più articolata. □

In un piano cartesiano su un campo ordinato possiamo definire una relazione di congruenza tra segmenti:

Definizione 1.34. Sia F un campo ordinato e siano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $D = (d_1, d_2)$ quattro punti di Π_F .

Definito l'elemento di F $dist^2(A, B) := (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$ per ogni coppia di punti di Π_F , diciamo che i segmenti AB e CD sono congruenti ($AB \cong CD$) se e solo se $dist^2(A, B) = dist^2(C, D)$.

Osservazione 1.35. Dati due punti A, B di Π_F , si ha $dist^2(A, B) \geq 0$, e $dist^2(A, B) = 0$ se e solo se $A = B$.

Per la congruenza tra angoli abbiamo bisogno di alcune definizioni.

Definizione 1.36. Sia F un campo ordinato. Diciamo che un angolo è *retto* se è formato da due raggi giacenti su rette di coefficienti angolari m, m' tali che valga $m \cdot m' = -1$ oppure $\{m, m'\} = \{0, \infty\}$.

Un angolo si dice *acuto* se è contenuto all'interno di un angolo retto, *ottuso* se contiene al suo interno un angolo retto.

Definizione 1.37. Sia F un campo ordinato, e sia α un angolo formato da due raggi giacenti su rette r, r' di Π_F con coefficienti angolari $m, m', m \neq m'$. Allora definiamo la *tangente* di α come segue:

$$\tan\alpha := \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha \text{ è un angolo retto} \\ \left| \frac{m'-m}{1+mm'} \right| & \text{se } \alpha \text{ è un angolo acuto} \\ - \left| \frac{m'-m}{1+mm'} \right| & \text{se } \alpha \text{ è un angolo ottuso} \end{cases}$$

Nel caso in cui uno dei due coefficienti angolari sia ∞ e l'altro sia diverso da 0, la scrittura

$\frac{m'-m}{1+mm'}$ viene così interpretata:

$$\text{Se } m = \infty \text{ e } m' \neq 0 \implies \frac{m'-m}{1+mm'} = \frac{m'-\infty}{1+m'\infty} := -\frac{1}{m'};$$

$$\text{Se } m \neq 0 \text{ e } m' = \infty \implies \frac{m'-m}{1+mm'} = \frac{\infty-m}{1+m\infty} := \frac{1}{m};$$

$$\text{Se } m = \infty \text{ e } m' = 0 \text{ o } m = 0 \text{ e } m' = \infty \implies \frac{m'-m}{1+mm'} = \frac{\infty-m}{1+m\infty} := \infty.$$

Possiamo ora definire una relazione di congruenza tra angoli in Π_F :

Definizione 1.38. Sia F un campo ordinato, e siano α, β due angoli in Π_F . Diciamo che α e β sono congruenti ($\alpha \cong \beta$) se e solo se $\tan\alpha = \tan\beta$.

Proposizione 1.39. Sia F un campo ordinato; allora in Π_F valgono gli assiomi (C2), (C3), (C4) e (C5).

Dimostrazione. L'assioma (C2) segue direttamente dalla definizione della funzione dist^2 . L'assioma (C3) richiede alcuni calcoli. Siano dati i seguenti punti di Π_F :

$$A = (x_A, y_A), \quad B = (x_B, y_B), \quad C = (x_C, y_C) \quad \text{t.c.} \quad A * B * C$$

$$D = (x_D, y_D), \quad E = (x_E, y_E), \quad G = (x_G, y_G) \quad \text{t.c.} \quad D * E * G$$

e supponiamo che valgano $AB \cong DE$ e $BC \cong EG$. Dunque si avrà:

$$\text{dist}^2(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2 = \text{dist}^2(D, E),$$

$$\text{dist}^2(B, C) = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = (x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2 = \text{dist}^2(E, G).$$

Supponiamo che i punti A, B, C giacciono sulla retta di equazione $y = mx + q$, e che i punti D, E, G giacciono sulla retta di equazione $y = lx + t$. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(A, B) &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (x_A - x_B)^2 + (mx_A + q - mx_B - q)^2 = \\ &= (x_A - x_B)^2(1 + m^2). \end{aligned}$$

Applicando lo stesso procedimento si ottengono:

$$\text{dist}^2(B, C) = (x_B - x_C)^2(1 + m^2),$$

$$\text{dist}^2(D, E) = (x_D - x_E)^2(1 + l^2),$$

$$\text{dist}^2(E, G) = (x_E - x_G)^2(1 + l^2),$$

Quindi valgono:

$$(x_A - x_B)^2(1 + m^2) = (x_D - x_E)^2(1 + l^2), \quad (1.1)$$

$$(x_B - x_C)^2(1 + m^2) = (x_E - x_G)^2(1 + l^2). \quad (1.2)$$

Siccome $A * B * C$, si ha $(x_A - x_B)(x_B - x_C) > 0$; allo stesso modo siccome $D * E * G$ si ha $(x_D - x_E)(x_E - x_G) > 0$.

Quindi da (1.1) e (1.2) si ottiene:

$$\frac{x_A - x_B}{x_D - x_E} = \frac{x_B - x_C}{x_E - x_G}. \quad (1.3)$$

Calcoliamo dunque:

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(A, C) &= (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = \\ &= ((x_A - x_B + x_B - x_C)^2 + (y_A - y_B + y_B - y_C)^2 = \\ &= [(x_A - x_B) + (x_B - x_C)]^2 + [(y_A - y_B) + (y_B - y_C)]^2; \end{aligned}$$

Svolgendo i quadrati (e riordinando) otteniamo:

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(A, C) &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + \\ &+ 2(x_A - x_B)(x_B - x_C) + 2(y_A - y_B)(y_B - y_C). \end{aligned}$$

Ora osserviamo che:

$$\begin{aligned} 2(y_A - y_B)(y_B - y_C) &= 2(mx_A + q - mx_B - q)(mx_B + q - mx_C - q) = \\ &= 2m^2(x_A - x_B)(x_B - x_C), \end{aligned}$$

e sostituendo nel calcolo precedente si ha:

$$\begin{aligned} dist^2(A, C) &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + \\ &+ 2(x_A - x_B)(x_B - x_C) + 2m^2(x_A - x_B)(x_B - x_C), \end{aligned}$$

da cui, raccogliendo $(x_A - x_B)(x_B - x_C)$, si giunge a:

$$\begin{aligned} dist^2(A, C) &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + \\ &+ 2(x_A - x_B)(x_B - x_C)(1 + m^2). \end{aligned}$$

Analogamente si avrà

$$\begin{aligned} dist^2(D, G) &= (x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2 + (x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2 + \\ &+ 2(x_D - x_E)(x_E - x_G)(1 + l^2). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Osserviamo che dalla espressione (1.3) si ricava $(x_A - x_B) = \frac{(x_B - x_C)(x_D - x_E)}{(x_E - x_G)}$; sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned} dist^2(A, C) &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + \\ &+ 2 \frac{(x_B - x_C)^2 (x_D - x_E)}{(x_E - x_G)} (1 + m^2). \end{aligned}$$

Ora sfruttiamo le ipotesi $dist^2(A, B) = dist^2(D, E)$ e $dist^2(B, C) = dist^2(E, G)$.

Inoltre per la (1.2) si ha $(x_B - x_C)^2 = \frac{(x_E - x_G)^2 (1 + l^2)}{(1 + m^2)}$. Dunque otteniamo:

$$\begin{aligned} dist^2(A, C) &= (x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2 + (x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2 + \\ &+ 2 \frac{(x_E - x_G)^2 (1 + l^2)}{(1 + m^2)} \cdot \frac{(x_D - x_E)}{(x_E - x_G)} \cdot (1 + m^2) \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} dist^2(A, C) &= (x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2 + (x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2 + \\ &+ 2(x_D - x_E)(x_E - x_G)(1 + l^2) \end{aligned}$$

e per (1.4) il secondo membro è $\text{dist}^2(D, G)$, provando la validità dell'assioma $(C3)$. Nel caso in cui almeno una delle due rette in questione sia del tipo $x = c$, si procede in modo analogo, con una sola differenza: non si potrà utilizzare la (1.3), ma di fatto non ve ne sarà bisogno.

Veniamo ora all'assioma $(C4)$: siano dati nel piano cartesiano un angolo α , un punto A e un raggio con origine in A e coefficiente angolare m . Dobbiamo trovare una retta passante per A e con coefficiente angolare m' tale che

$$\tan\alpha = \pm \left| \frac{m' - m}{1 + mm'} \right|,$$

dove il segno dipende dal fatto se α sia acuto od ottuso; se per esempio α è acuto, dovremo risolvere

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{m' - m}{1 + mm'} & \text{se } \frac{m' - m}{1 + mm'} > 0, \\ \tan\alpha &= \frac{-m' + m}{1 + mm'} & \text{se } \frac{m' - m}{1 + mm'} < 0. \end{aligned}$$

In entrambi i casi si tratta di risolvere una equazione lineare in m' .

Le soluzioni ci forniscono un angolo per ciascuno dei due semipiani individuati dalla retta passante per A , provando la validità dell'assioma $(C4)$.

L'assioma $(C5)$ segue direttamente dalla definizione di tangente. □

Veniamo ora all'assioma $(C1)$ in Π_F .

Proposizione 1.40. *Sia F un campo ordinato; allora Π_F verifica l'assioma $(C1)$ se e solo se F è pitagorico.*

Dimostrazione. Sia $a \in F$; consideriamo il segmento che ha per estremi i punti $O = (0, 0)$ e $A = (a, 1)$. Affinché valga l'assioma $(C1)$, cioè affinché esista un segmento con un estremo in O , giacente sull'asse x e congruente ad OA , deve esistere un elemento $b \in F$ tale che

$$\text{dist}^2(O, A) = \text{dist}^2(O, (b, 0)),$$

da cui

$$a^2 + 1 = b^2.$$

Quindi l'elemento $b \in F$ deve essere una radice quadrata di $1 + a^2$, il ché corrisponde alla definizione di campo pitagorico per F .

Al contrario, supponiamo che il campo ordinato sia pitagorico, e quindi che $\forall c \in F$ si abbia $\sqrt{1+c^2} \in F$. Siano $a, b \in F$, con $a \neq 0$, possiamo scrivere:

$$a^2 + b^2 = a^2 \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right).$$

Poniamo ora $c = \frac{b}{a}$; otteniamo:

$$a^2 + b^2 = a^2 (1 + c^2)$$

e quindi avremo

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |a| \cdot \sqrt{1 + c^2} \in F.$$

Questo significa che per ogni $A, B \in \Pi_F$, è possibile definire

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

È immediato verificare che $AB \cong CD$ se e solo se $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(C, D)$.

Ora supponiamo di avere una retta r di equazione del tipo $y = mx + q$, e di volere trasportare su r un segmento di lunghezza d . Prendiamo un punto $A \in r$ di ascissa a . Possiamo scrivere $A = (a, ma + q)$, e cerchiamo un punto $C = (c, mc + q)$ tale che

$$\text{dist}(A, C) = d,$$

da cui

$$\sqrt{(a - c)^2 + (ma + b - (mc + b))^2} = d,$$

quindi avremo

$$|a - c| \cdot \sqrt{1 + m^2} = d.$$

Siccome stiamo supponendo F archimedeo, la quantità $\sqrt{1 + m^2}$ appartiene a F , quindi possiamo risolvere questa equazione per c . Le due soluzioni saranno

$$c < a \quad \Longrightarrow \quad c = a - \frac{d}{\sqrt{1 + m^2}},$$

$$c > a \quad \Longrightarrow \quad c = a + \frac{d}{\sqrt{1 + m^2}},$$

ciascuna delle quali è riferita a una delle due semirette in cui il punto A divide la retta r . □

Osservazione 1.41. Nel campo dei numeri razionali \mathbb{Q} , che non è pitagorico, non vale l'assioma (C1): il segmento che ha per estremi i punti $(0,0)$ e $(1,1)$, ad esempio, non può essere trasportato sull'asse x poiché la sua lunghezza è $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Per provare l'assioma (C6) in Π_F , dobbiamo invece ricorrere alla nozione di movimento rigido:

Definizione 1.42. Dato un piano Π , ovvero una geometria che consiste delle nozioni di punto, retta e relazioni di incidenza, interposizione e congruenza tra segmenti ed angoli, e che verifica gli assiomi (I1), (I2), (I3) e gli assiomi (B1), (B2), (B3), (B4), definiamo un *movimento rigido* di Π come una applicazione $\phi : \Pi \mapsto \Pi$ tale che:

- ϕ sia una biezione sui punti di Π ;
- ϕ sia una biezione sulle rette di Π ;
- ϕ preservi l'incidenza;
- ϕ preservi la nozione di interposizione tra punti allineati:
 $A * B * C \implies \phi(A) * \phi(B) * \phi(C)$;
- ϕ preservi la congruenza tra segmenti:
 Per ogni coppia di punti A, B , si ha $AB \cong \phi(A)\phi(B)$;
- ϕ preservi la congruenza tra angoli:
 Per ogni angolo \widehat{ABC} , si ha $\widehat{ABC} \cong \phi(A)\phi(B)\phi(C)$.

Osservazione 1.43. La composizione di due movimenti rigidi è un movimento rigido, quindi l'insieme G dei movimenti rigidi di un piano Π , con la composizione, è un gruppo con elemento neutro id_Π .

Definizione 1.44. Dato un piano Π , diciamo che su Π vale l'assioma (ERM) (esistenza di sufficienti movimenti rigidi) se:

- a) Dati A, B punti di Π , esiste un movimento rigido ϕ tale che $\phi(A) = B$;
- b) Dati O, A, A' punti di Π , esiste un movimento rigido ϕ che lascia fisso il punto O e porta il raggio OA nel raggio OA' .
- c) Data l retta di Π , esiste un movimento rigido ϕ tale che $\phi(P) = P \ \forall P \in l$ e che ϕ scambi i due semipiani individuati da l .

Proposizione 1.45. *Sia F un campo ordinato pitagorico; allora Π_F soddisfa l'assioma (ERM).*

Dimostrazione. Definiamo in Π_F le seguenti biezioni:

- a) $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ (diremo che questa è una traslazione);
- b) $\begin{cases} x' = cx - sy \\ y' = sx + cy \end{cases}$ con $c^2 + s^2 = 1$, (diremo che questa è una rotazione di centro O);
- c) $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ (questa viene chiamata riflessione di asse l'asse x).

Si prova che tutti questi sono movimenti rigidi, e che il gruppo generato da tutte le traslazioni, tutte le rotazioni di centro O e dalla riflessione di asse l'asse x contiene abbastanza movimenti rigidi da soddisfare l'assioma (ERM). \square

Proposizione 1.46. *Sia Π un piano in cui valgono gli assiomi (I1-3), (B1-4) e (C1-5). Allora (ERM) \implies (C6).*

Dimostrazione. Supponendo l'esistenza di movimenti rigidi (ERM), si può provare il primo criterio di congruenza dei triangoli (ovvero l'assioma (C6)) utilizzando il metodo di Euclide. Supponiamo quindi di avere due triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ con $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$. Per provare che i due triangoli sono congruenti, dobbiamo mostrare che $BC \cong B'C'$, $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$.

Per il punto a) di (ERM), esiste un movimento rigido ϕ tale che $\phi(A) = A'$. Sia $B'' = \phi(B)$. Allora $AB \cong A'B''$ e, poiché $AB \cong A'B'$ per ipotesi, sfruttando l'assioma (C2) si ha $A'B' \cong A'B''$.

Ora, per il punto b) di (ERM), esiste un movimento rigido ψ che lascia fisso il punto A' e manda il raggio $A'B''$ nel raggio $A'B'$. Siccome abbiamo visto che $A'B'' \cong A'B'$, e siccome ψ preserva la congruenza, per l'assioma (C1) possiamo affermare che $\psi(B'') = B'$.

Sia $C''' = \psi(\phi(C))$ e chiamiamo l la retta $A'B'$. Se i due raggi $A'C'$ e $A'C'''$ sono dalla stessa parte di piano individuata da l consideriamo $\theta = \psi \circ \phi$; in caso contrario consideriamo $\theta = \sigma(\psi(\phi))$, dove σ è un movimento rigido che lascia i punti di l fissi e scambia i due semipiani individuati da l . Tale σ esiste per il punto c) di (ERM). Allora il movimento rigido θ avrà le seguenti proprietà: $\theta(A) = A'$, $\theta(B) = B'$ e $C''' = \theta(C)$ si trova nella stessa parte di piano individuata da l in cui è situato C' .

Essendo θ un movimento rigido, si avrà $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'''}$. Ma per ipotesi vale $\widehat{BAC} \cong$

$\widehat{B'A'C'}$, quindi per l'assioma (C5) si ottiene $\widehat{B'A'C'} \cong \widehat{B'A'C''}$. Inoltre, per il fatto che C' e C'' si trovano dalla stessa parte di piano individuata da l , per l'assioma (C4) i raggi $A'C'$ e $A'C''$ sono uguali.

Ora, essendo $A'C' \cong AC$ per ipotesi, ed essendo $AC \cong A'C''$ perchè θ è un movimento rigido, per l'assioma (C2) avremo $A'C' \cong A'C''$. Inoltre, C' e C'' si trovano dalla stessa parte rispetto ad A' . Allora per l'assioma (C1) possiamo affermare che $C' = C''$.

Quindi $\theta(B) = B'$ e $\theta(C) = C'$. Siccome θ è un movimento rigido, si avrà $BC \cong B'C'$. Allo stesso modo, $\theta(\widehat{ABC}) = \widehat{A'B'C'}$ e $\theta(\widehat{ACB}) = \widehat{A'C'B'}$; essendo θ un movimento rigido, possiamo concludere $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$. Abbiamo così dimostrato la validità dell'assioma (C6). \square

Corollario 1.47. *Sia F un campo ordinato pitagorico; allora Π_F soddisfa l'assioma (C6).*

Definizione 1.48. Un *piano di Hilbert* è una struttura costituita da un insieme di punti, un insieme di rette, relazioni di incidenza, di interposizione e di congruenza, e tale che valgano gli assiomi (I1-3), (B1-4) e (C1-6).

Definizione 1.49. Sia Π un piano di Hilbert. Dati due punti C, A di Π , chiamiamo *circonferenza* Γ di centro C e raggio CA l'insieme dei punti B di Π tali che $CA \cong CB$.

Un punto D di Π è detto *interno* a Γ se $CD < CA$.

Un punto D di Π è detto *esterno* a Γ se $CD > CA$.

Definizione 1.50. Chiamiamo *assioma (E)* il seguente assioma:

(E): Date due circonferenze Γ e Δ , se Γ contiene un punto interno a Δ , e Δ contiene un punto interno a Γ , allora Γ e Δ si incontrano.

Definizione 1.51. Un *piano euclideo* è un piano di Hilbert in cui valgono (P) ed (E).

Proposizione 1.52. *Sia F un campo ordinato pitagorico. Il piano cartesiano Π_F è un piano euclideo se e solo se F è un campo euclideo.*

Dimostrazione. Si veda [1], 16.2. \square

Corollario 1.53. *Sia F un campo ordinato euclideo; allora Π_F è un piano di Hilbert in cui valgono gli assiomi (P) ed (E), cioè è un piano euclideo.*

Dimostrazione. Segue da tutto quanto visto sopra, ricordando che se un campo è euclideo allora in particolare è pitagorico. \square

1.6 Gli assiomi del gruppo V

Giungiamo infine agli assiomi del quinto gruppo in Hilbert, l'assioma archimedeo (V1) e l'assioma di completezza (V2):

(V1) : Dati due segmenti AB, CD , $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $nAB > CD$.

(V2) : Il sistema dei punti di una retta con sue relazioni di ordinamento e congruenza non è suscettibile di un ampliamento per il quale rimangono inalterate le relazioni sussistenti tra gli elementi precedenti, come pure le proprietà fondamentali di ordinamento lineare e congruenza che seguono dagli assiomi (I1-3), (B1-4), (C1-6) e (V1).

Un campo ordinato F è detto *archimedeo* se vale:

$$\forall a \in F, a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n > a. \quad (1.5)$$

Osservazione 1.54. Si può dimostrare che in un piano cartesiano Π_F su un campo ordinato F vale l'assioma archimedeo (V1) se e solo se F è un campo archimedeo.

1.6. GLI ASSIOMI DEL GRUPPO V

Capitolo 2

Inversione circolare

2.1 Definizione e prime proprietà

L'inversione circolare è una trasformazione del piano che lascia fissi i punti sul bordo di una circonferenza data, manda i punti interni di tale circonferenza in punti che si trovano all'esterno di essa e viceversa. Si tratta di una tecnica non utilizzata dagli antichi Greci, i quali facevano una geometria statica, non dinamica: Euclide nella dimostrazione del *Primo criterio di congruenza dei triangoli* parla di *sovrapposizione*, ma non è chiaro se si riferisca ad una trasformazione dell'intero piano in sè stesso. Possiamo immaginare quindi che difficilmente i Greci avrebbero apprezzato le proprietà di una applicazione che non preserva le distanze, quale l'inversione circolare trattata in questo capitolo.

Noi utilizzeremo l'inversione circolare per costruire il piano di Poincaré, che è un esempio di geometria non euclidea. È possibile sviluppare la teoria dell'inversione circolare restando nell'ambito della geometria di Euclide, cioè senza utilizzare le misure di segmenti ed angoli; tuttavia è più agevole mettersi nell'ambito di una geometria cartesiana, di lavorare cioè in un piano cartesiano Π_F , dove F è un campo ordinato euclideo. Ricordiamo che il Corollario (1.53) ci garantisce che prendendo F campo ordinato euclideo, in Π_F valgono gli assiomi di *incidenza* (I1-3), *ordinamento* (B1-4), *congruenza* (C1-6), *l'assioma di Playfair* (P) e *l'assioma euclideo* (E).

In questo capitolo e nel successivo utilizzeremo molti risultati della geometria di Euclide, che sono dimostrabili in un piano cartesiano Π_F con F campo ordinato euclideo: per le dimostrazioni di tali risultati facciamo riferimento, senza più menzionarlo esplicitamente, al libro di R.Hartshorne [1], e citeremo direttamente le proposizioni di Euclide.

Con un abuso di notazione denoteremo nel seguito con AB non solo il segmento AB , ma anche la sua classe di congruenza identificata alla sua lunghezza tramite l'applicazione ben definita e biettiva che alla classe di congruenza di AB associa $dist(A, B) \in F$. Quindi

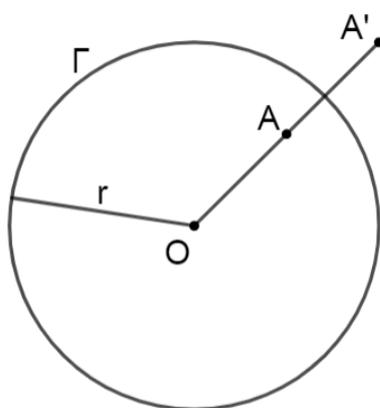
2.1. DEFINIZIONE E PRIME PROPRIETÀ

una scrittura del tipo $\frac{AB}{CD}$ denoterà un rapporto tra le lunghezze, e una scrittura del tipo $AB \cdot CD$ denoterà il prodotto nel campo tra le lunghezze.

Definizione 2.1. Sia Γ una circonferenza fissata di centro O e raggio r , e sia $A \neq O$. Tracciando il raggio passante per O e per A , sia A' l'unico punto appartenente al raggio tale che

$$OA \cdot OA' = r^2. \quad (2.1)$$

Diciamo che A' è ottenuto da A tramite *inversione circolare* rispetto alla circonferenza



Γ ; denoteremo l'applicazione che ad A associa A' con ρ_Γ . Chiameremo quindi A' l'*inverso* di A rispetto alla circonferenza Γ e scriveremo $\rho_\Gamma(A) = A'$.

Osservazione 2.2. Essendo la condizione $OA \cdot OA' = r^2$ simmetrica per A e A' , risulta che A' è inverso di A se e solo se A è inverso di A' . Data una circonferenza Γ , si avrà quindi $\rho_\Gamma^2 = id$ su $\Pi_F \setminus \{O\}$.

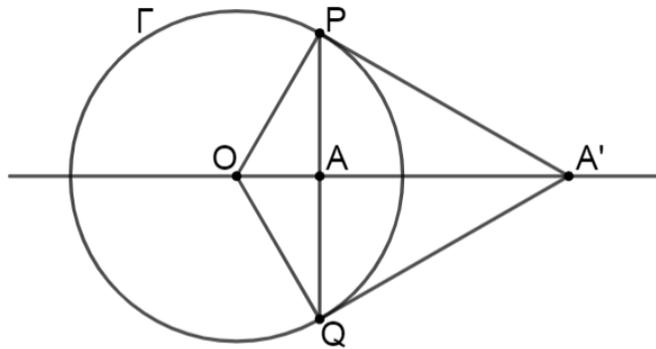
L'*inversione circolare* rispetto a una circonferenza Γ è una trasformazione definita su tutti i punti del piano eccetto il centro O di Γ ; i punti di Γ restano fissi, i punti interni a Γ vengono mandati in punti esterni a Γ e viceversa.

Più il punto A è preso vicino al centro O , più il suo inverso A' si troverà lontano da O . Dunque il punto O rappresenta il caso limite: potremmo infatti completare il piano con un punto detto "punto all'infinito" (∞) e definire l'inversione circolare su tutti i punti del piano in modo che O e ∞ siano uno l'inverso dell'altro.

Notazione 2.3. In tutto questo capitolo, Γ denota una circonferenza di centro O fissata, e ρ_Γ l'inversione circolare rispetto a Γ .

La proposizione seguente ci permette di costruire l'inverso di un punto con riga e compasso.

Proposizione 2.4. *Sia $A \neq O$ un punto interno alla circonferenza Γ e tracciamo il raggio passante per O e per A . Sia PQ la corda di Γ perpendicolare al raggio OA in A . Allora le tangenti a Γ in P e Q incontreranno il raggio OA nel punto inverso di A rispetto alla circonferenza Γ .*



Dimostrazione. Sia A' il punto di intersezione tra la tangente a Γ passante per P ed il prolungamento del raggio OA . Essendo Q simmetrico a P rispetto ad A , anche la tangente a Γ passante per Q incontrerà il raggio OA nel punto A' .

Consideriamo i triangoli retti $\triangle OPA$ e $\triangle OPA'$; essi hanno l'angolo in O in comune, dunque sono simili e vale:

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OA'}$$

da cui

$$OA \cdot OA' = OP^2 = r^2$$

Quindi A' è l'inverso di A rispetto alla circonferenza Γ (e viceversa). \square

Osservazione 2.5. La Proposizione (2.4) mostra che si può trovare l'inverso di un punto interno alla circonferenza Γ con riga e compasso. Poiché la definizione di inversione circolare è simmetrica, anche nel caso in cui A sia un punto esterno a Γ è possibile trovare il suo inverso con riga e compasso. È sufficiente infatti tracciare le tangenti a Γ passanti per A , le quali intersecheranno Γ in due punti P e Q ; il segmento PQ intersecherà quindi il raggio OA nel punto A' , che sarà l'inverso di A rispetto a Γ .

2.2 Rette e circonferenze

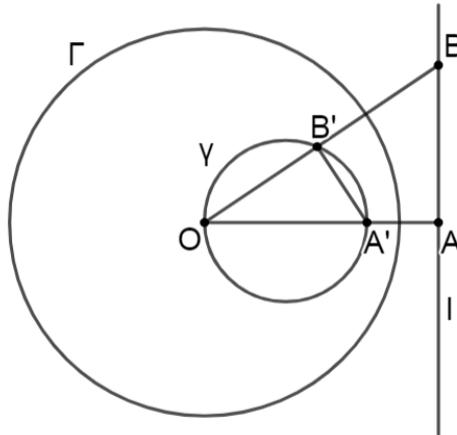
Finora abbiamo osservato l'azione dell'inversione circolare su un solo punto. Vediamone gli effetti quando viene applicata a tutti i punti di una retta o di una circonferenza.

Osservazione 2.6. L'inversione circolare ρ_Γ manda ogni retta passante per O in sè stessa; questo segue direttamente dalla definizione di inversione circolare.

Per capire il comportamento dell'inversione circolare nei confronti delle rette non passanti per il centro di Γ , ci servirà un risultato dal Terzo Libro degli Elementi di Euclide, la proposizione (III,31), secondo la quale dati tre punti A, B, C su una circonferenza, tali che il segmento AB ne sia un diametro, l'angolo \widehat{ACB} è retto.

Proposizione 2.7. L'inversione circolare rispetto a Γ trasforma ogni retta non passante per O in una circonferenza passante per O , e viceversa.

Dimostrazione. Sia l una retta non passante per O e sia A il punto di l tale che il segmento OA sia perpendicolare a l . Siano quindi A' l'inverso di A (rispetto a Γ), e γ la circonferenza di diametro OA' .



Mostriamo che i punti di γ (eccetto O) sono gli inversi dei punti di l e viceversa. Il punto A' è l'inverso di A per costruzione. Prendiamo dunque un punto $B \neq A$ su l e chiamiamo B' il punto di intersezione tra il segmento OB e la circonferenza γ . Per la [3],(III,31) l'angolo $\widehat{OB'A'}$ è retto. Osserviamo ora che il triangolo $\triangle OA'B'$ e il triangolo $\triangle OAB$ hanno l'angolo in O in comune, dunque sono simili. Allora vale:

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{OA}{OB}$$

da cui

$$OB \cdot OB' = OA \cdot OA',$$

ma siccome A' è l'inverso di A , sarà $OA \cdot OA' = r^2$, quindi si ottiene

$$OB \cdot OB' = r^2,$$

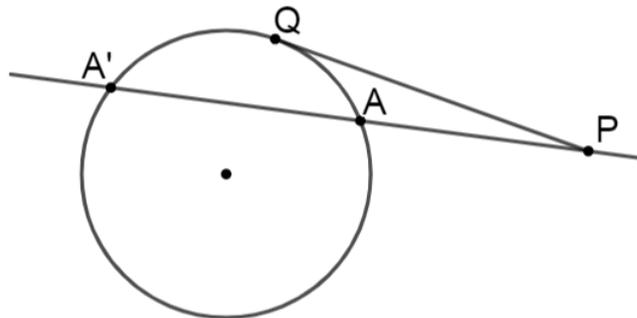
cioè B e B' sono reciprocamente inversi rispetto a Γ . Dunque l'inversione circolare rispetto a Γ manda i punti della retta l nella circonferenza γ (eccetto O) e viceversa. \square

Per i prossimi risultati avremo bisogno di alcune proposizioni tratte dal Terzo Libro degli Elementi di Euclide:

La proposizione (III,18) dichiara che il raggio di una circonferenza e la tangente in un suo punto sono perpendicolari.

La proposizione (III,36) afferma che dati una circonferenza e un punto P ad essa esterno, se tracciamo un segmento da P secante la circonferenza in due punti A e A' , e un segmento da P tangente la circonferenza in un punto Q , allora il quadrato costruito su PQ è uguale al rettangolo costruito su PA e PA' : esprimendo il risultato in Π_F , possiamo utilizzare le lunghezze, e scriveremo $PQ^2 = PA \cdot PA'$.

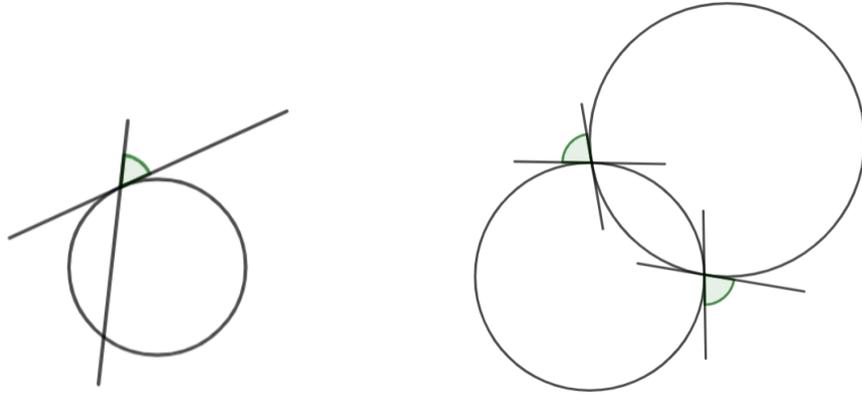
Infine ci serviremo della proposizione (III,37), che è invece l'implicazione opposta della precedente, quindi dati una circonferenza, un punto P ad essa esterno e un segmento da P secante la circonferenza in due punti A, A' , se Q è un punto della circonferenza tale che $PQ^2 = PA \cdot PA'$, allora PQ è tangente alla circonferenza.



Introduciamo ora la nozione di angolo formato tra una retta e una circonferenza, o tra due circonferenze.

Definizione 2.8. Quando una retta e una circonferenza si incontrano, l'*angolo* da esse formato è l'angolo tra la retta e la tangente alla circonferenza nel punto di intersezione. Quando due circonferenze si incontrano, l'*angolo* da esse formato è l'angolo tra le due

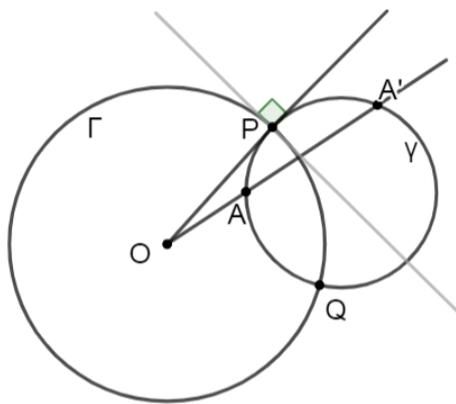
tangenti alle circonferenze nel punto di intersezione. Due circonferenze si dicono *perpendicolari* se si incontrano formando un angolo retto.



Osservazione 2.9. Quando due circonferenze si incontrano in due punti, gli angoli che formano in entrambi i punti sono uguali. Questo deriva dal fatto che le due circonferenze sono simmetriche rispetto alla retta passante per i loro centri.

Proposizione 2.10. Se una circonferenza γ contiene due punti A e A' inversi rispetto a Γ (ovvero tali che $\rho_{\Gamma}(A) = A'$ e $\rho_{\Gamma}(A') = A$), allora γ è perpendicolare a Γ .

Dimostrazione. Sia Γ una circonferenza e siano A e A' due punti inversi rispetto a Γ ; sia ora γ una circonferenza passante per A e A' . Essa intersecherà Γ in due punti, che chiameremo P e Q . Essendo OP un raggio di Γ , vale $OA \cdot OA' = OP^2$ perché A e A'



sono inversi.

Per [3],(III,18) la tangente a Γ in P è perpendicolare ad OP ; ma per [3],(III,37), OP è tangente a γ (in P), dunque le due tangenti a Γ e γ nel punto P formano un angolo retto. Allora le due circonferenze Γ e γ sono perpendicolari. \square

Proposizione 2.11. *Se una circonferenza γ è perpendicolare a Γ , allora*

$$\rho_{\Gamma}(\gamma) = \gamma,$$

cioè l'inversione circolare rispetto a Γ trasforma γ in sè stessa.

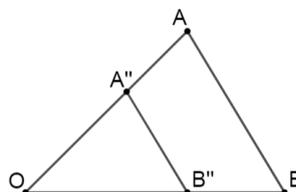
In altre parole, una circonferenza perpendicolare a Γ contiene l'inverso rispetto a Γ di ogni suo punto.

Dimostrazione. Utilizzando la figura della dimostrazione precedente, supponiamo che γ sia perpendicolare a Γ e siano P e Q i loro punti di intersezione. Allora per [3],(III,18) il raggio OP è tangente a γ .

Sia $A \neq P, Q$ un altro punto di γ ; la semiretta OA incontrerà γ anche in un punto A' . Per [3],(III,36) vale $OP^2 = OA \cdot OA'$, ed essendo $OP = r$, i punti A e A' sono inversi rispetto a Γ . Questo vale per ogni A appartenente a γ , quindi l'inversione circolare rispetto a Γ manda γ in sè stessa. \square

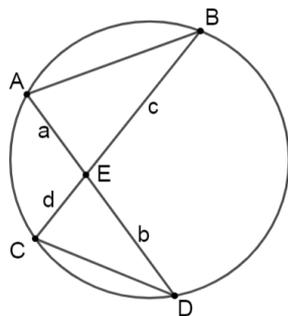
Prima di passare al prossimo enunciato, ricordiamo che dato un punto O di Π_F , una *omotetia* di centro O è una trasformazione di Π_F che lascia fisso O e avvicina o allontana i punti di $\Pi_F \setminus \{O\}$ rispetto ad O secondo un rapporto k . In coordinate cartesiane con centro nell'origine si può esprimere come:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$



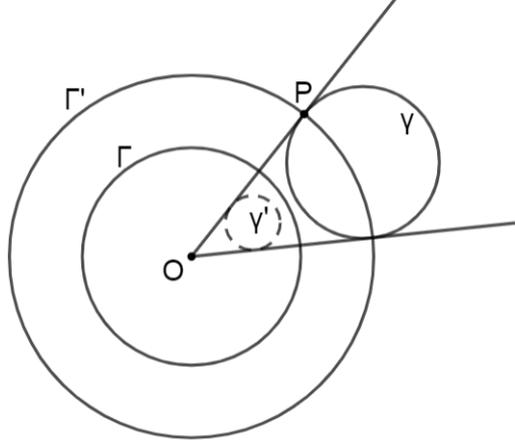
Dunque questa trasformazione cambia tutte le distanze secondo il fattore k .

Nella prossima dimostrazione faremo inoltre ricorso alla proposizione (III,35) degli Elementi di Euclide, secondo la quale se due corde di una circonferenza si incontrano dividendosi in segmenti di lunghezza a, b, c, d come in figura, allora $ab = cd$ nel campo F .



Proposizione 2.12. *Se una circonferenza γ non passa per il centro O di Γ , allora l'inversione circolare rispetto a Γ trasforma γ in un'altra circonferenza γ' .*

Dimostrazione. Supponiamo che O si trovi fuori da γ . Sia OP una tangente a γ , e sia Γ' la circonferenza di centro O passante per P . Per costruzione le circonferenze Γ' e γ



sono perpendicolari, quindi per la Proposizione (2.11) l'inversione circolare rispetto a Γ' manda γ in sè stessa. Indicate ρ_{Γ} l'inversione circolare rispetto a Γ , e $\rho_{\Gamma'}$ l'inversione circolare rispetto a Γ' , avremo:

$$\rho_{\Gamma'}(\gamma) = \gamma \quad \implies \quad \rho_{\Gamma}(\gamma) = \rho_{\Gamma}(\rho_{\Gamma'}(\gamma))$$

Ora, siano r il raggio di Γ e s il raggio di Γ' . Per ogni punto A siano $A' = \rho_{\Gamma'}(\gamma)$ e $A'' = \rho_{\Gamma}(A')$. Per la proprietà delle inversioni circolari avremo:

$$OA \cdot OA' = s^2 \quad , \quad OA' \cdot OA'' = r^2$$

quindi il rapporto dei raggi sarà:

$$\frac{r^2}{s^2} = \frac{OA''}{OA},$$

da cui possiamo scrivere:

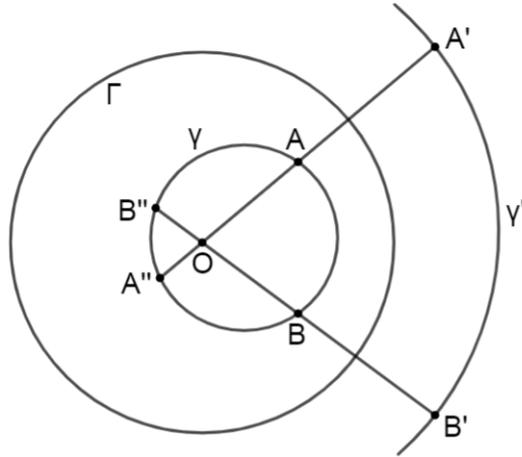
$$OA'' = k \cdot OA$$

dove $k = \frac{r^2}{s^2}$.

Si tratta di una omotetia di centro O e fattore k . Le distanze cambiano secondo lo stesso rapporto, dunque ogni circonferenza viene mandata in un'altra circonferenza.

Quindi $\rho_{\Gamma}(\gamma) = \rho_{\Gamma}(\rho_{\Gamma'}(\gamma))$ è una circonferenza.

Supponiamo ora che O si trovi all'interno della circonferenza γ . Dati due punti A, B su γ , siano A', B' i loro inversi rispetto a Γ . La retta passante per O, A incontrerà γ in un altro punto che chiamiamo A'' ; allo stesso modo, la retta passante per O, B incontrerà γ in un altro punto che denominiamo B'' . Per [3], (III, 35) si ha:



$$OA \cdot OA'' = OB \cdot OB'' = c,$$

dove c è una costante indipendente dai punti A, B , dipende solo da O e γ .

Siccome vale $OA \cdot OA' = r^2$, si avranno:

$$OA = \frac{r^2}{OA'} \quad , \quad OA = \frac{c}{OA''}$$

quindi

$$\frac{r^2}{OA'} = \frac{c}{OA''}$$

da cui:

$$OA' = \frac{r^2}{c} OA''.$$

Quindi γ' è ottenuto da γ tramite una omotetia di centro O e rapporto $k = \frac{r^2}{c}$. Concludiamo che $\rho_\Gamma(\gamma) = \gamma'$ è una circonferenza. \square

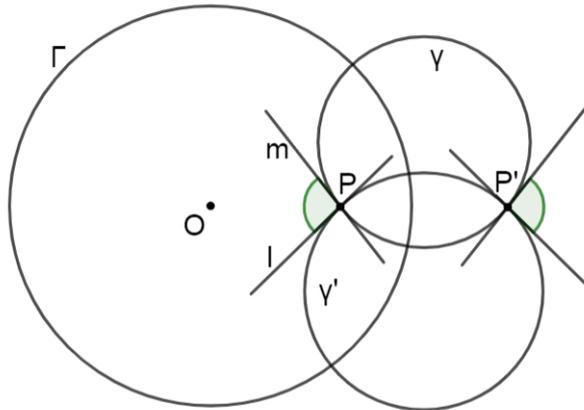
2.3 Angoli e birapporto

Osservazione 2.13. L'inversione circolare rispetto a Γ è una biezione dell'insieme dei punti del piano meno O in sè. Poiché una circonferenza e una retta (rispettivamente due circonferenze) sono tangenti se e solo se hanno esattamente un punto in comune, l'inversione circolare conserva la proprietà di tangenza. In altre parole, se una circonferenza e una retta (rispettivamente due circonferenze) sono tangenti, allora anche le loro trasformate rispetto a una circonferenza data saranno a loro volta tangenti.

Proposizione 2.14. *L'inversione circolare preserva gli angoli.*

Dimostrazione. Sia P un punto, $P \notin \Gamma$. Consideriamo due curve che si incontrano in P con tangenti l e m , e sia P' l'inverso di P .

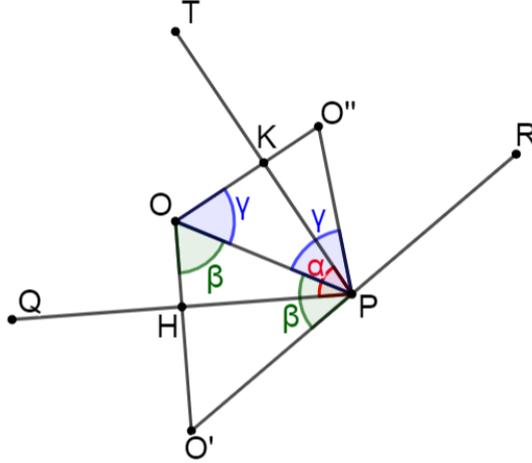
Sappiamo che esiste una circonferenza γ passante per P e P' con tangente m in P ; allo stesso modo esiste una circonferenza γ' passante per P e P' con tangente l in P . Come abbiamo visto, tali circonferenze si incontreranno in P e P' formando lo stesso angolo. Per la Proposizione (2.10), γ e γ' (che contengono i due punti inversi P e P') sono per-



pendicolari a Γ , quindi verranno mandate in loro stesse dall'inversione circolare rispetto a Γ , per la Proposizione (2.11). Siccome la proprietà di tangenza viene mantenuta dall'inversione circolare, le due curve originali si dovranno necessariamente trasformare in due curve passanti per P' e tangenti alle circonferenze γ e γ' , ovvero in due curve che si incontrano formando lo stesso angolo.

Consideriamo ora due curve che si incontrano in un punto $P \in \Gamma$ con tangenti l, m , e supponiamo $O \notin l, m$. Siano Q l'altro punto di intersezione di l con Γ , e T l'altro punto di intersezione di m con Γ ; chiamiamo α l'angolo \widehat{QPT} . Per la Proposizione (2.7), l'inversione circolare rispetto a Γ porterà le due rette l, m in due circonferenze passanti per

il centro O ; in particolare, $\rho_{\Gamma}(l) = \xi$ sarà l'unica circonferenza passante per i punti O, P e Q , mentre $\rho_{\Gamma}(m) = \delta$ sarà l'unica circonferenza passante per i punti O, P e T .



Siano O' il centro di ξ e O'' il centro di δ ; chiamiamo inoltre K il punto di intersezione tra $O''O$ e PT , e H il punto di intersezione tra $O'O$ e PQ . Il triangolo $\triangle OO'P$ in figura è isoscele poiché $O'O$ e $O'P$ sono due raggi di ξ , quindi gli angoli alla base $\widehat{O'OP}$ e $\widehat{O'PO}$ sono congruenti (chiameremo β un rappresentante della loro classe di congruenza). Allo stesso modo, il triangolo $\triangle OO''P$ è isoscele poiché $O''O$ e $O''P$ sono due raggi di δ , quindi gli angoli alla base $\widehat{O''OP}$ e $\widehat{O''PO}$ sono congruenti (chiameremo γ un rappresentante della loro classe di congruenza).

Consideriamo ora il quadrilatero $OHPK$. La somma dei suoi angoli interni deve essere congruente a quattro angoli retti, ma gli angoli \widehat{OHP} e \widehat{OKP} sono retti per costruzione. Allora l'angolo $\widehat{QPT} = \alpha$ e l'angolo \widehat{KOH} sono supplementari; ma $\widehat{KOH} = \beta + \gamma$, dunque si avrà che $\alpha + \beta + \gamma$ è congruente a due angoli retti, quindi α è supplementare di $\beta + \gamma$.

Sia ora R un punto sulla retta $O'P$ che si trovi dalla parte opposta di quella in cui si trova O' rispetto a P . La proposizione (III,18) degli Elementi di Euclide, già richiamata a pagina 27, afferma che il raggio OP di una circonferenza e la tangente nel punto P sono perpendicolari. Poiché l'angolo formato dalle circonferenze ξ e δ in P è definito come l'angolo formato dalle due tangenti alle circonferenze in P , per (III,18) esso sarà congruente all'angolo formato dai raggi $O'P$ e $O''P$ (prolungati). Quindi ci basta mostrare che l'angolo α sia congruente all'angolo $\widehat{O''PR}$. Per costruzione, gli angoli $\widehat{O''PR}$ e $\widehat{O'PO''}$ sono supplementari; ma $\widehat{O'PO''} = \beta + \gamma$, dunque si avrà che $\beta + \gamma$ è supplementare di $\widehat{O''PR}$.

Essendo entrambi supplementari di $\beta + \gamma$, gli angoli α e $\widehat{O''PR}$ sono congruenti. \square

2.3. ANGOLI E BIRAPPORTO

Per quanto riguarda le distanze, si osserva facilmente che esse non vengono preservate dall'inversione circolare. Viene tuttavia mantenuta costante una particolare quantità denominata *birapporto*:

Definizione 2.15. Dati quattro punti distinti A, B, P, Q del piano Π_F , il *birapporto* di tali punti nell'ordine dato è un elemento del campo F così definito:

$$(AB, PQ) = \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP}. \quad (2.2)$$

Proposizione 2.16. Siano A, B, P, Q quattro punti distinti del piano, tutti distinti da O . Allora l'inversione circolare rispetto a Γ preserva il birapporto di tali punti, ovvero se A', B', P', Q' sono i loro inversi, si ha:

$$(AB, PQ) = (A'B', P'Q').$$

Dimostrazione. Sia Γ una circonferenza di centro O , e siano A e P due punti diversi da O ; considerando i loro inversi A' e P' si ha, per definizione:

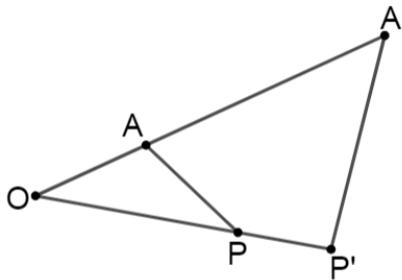
$$OA \cdot OA' = r^2 = OP \cdot OP',$$

quindi

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'}.$$

Se i punti O, A, P non sono allineati (come in figura), i triangoli $\triangle OAP$ e $\triangle OA'P'$ avranno l'angolo in O in comune, dunque saranno simili. Allora si avrà:

$$\frac{AP}{A'P'} = \frac{OA}{OP'}. \quad (2.3)$$



Se invece O, A, P sono allineati, non è restrittivo supporre $O * A * P$. Allora $AP = OP - OA$ e $A'P' = OA' - OP'$.

In un campo F vale

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} = \frac{c-a}{d-b},$$

allora ponendo $a = OA$, $b = OP'$, $c = OP$ e $d = OA'$ si ottiene nuovamente il risultato (2.3).

Sia ora Q un altro punto (diverso dai precedenti); procedendo analogamente si avrà

$$\frac{AQ}{A'Q'} = \frac{OA}{OQ'}, \quad (2.4)$$

quindi da (2.3) e (2.4) si ottiene, dividendo:

$$\frac{AP}{A'P'} \cdot \frac{A'Q'}{AQ} = \frac{OQ'}{OP'}. \quad (2.5)$$

Ora per un altro punto B , lavorando nello stesso modo si ha:

$$\frac{BP}{B'P'} \cdot \frac{B'Q'}{BQ} = \frac{OQ'}{OP'}. \quad (2.6)$$

Dalle espressioni (2.5) e (2.6) si ottiene dunque

$$\frac{AP}{A'P'} \cdot \frac{A'Q'}{AQ} = \frac{BP}{B'P'} \cdot \frac{B'Q'}{BQ}, \quad (2.7)$$

da cui:

$$\frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP} = \frac{A'P'}{A'Q'} \cdot \frac{B'Q'}{B'P'} \quad (2.8)$$

cioè $(AB, PQ) = (A'B', P'Q')$. □

2.3. ANGOLI E BIRAPPORTO

Capitolo 3

Modello di Poincaré

In questo capitolo presentiamo il *modello* (o *disco*) di *Poincaré*, il cui nome deriva dal matematico francese Jules Louis Poincaré che lo ideò nella seconda metà del XIX secolo. Si tratta di un modello di geometria non euclidea, che è però costruito a partire dalla geometria euclidea.

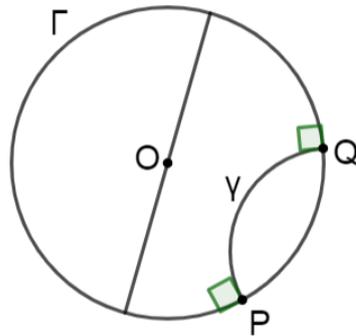
Il modello di Poincaré è definito a partire da un piano cartesiano Π_F , dove F è un campo ordinato euclideo, in cui consideriamo una circonferenza Γ di centro O . Procediamo così: seguendo Hilbert, definiamo un insieme di punti (i punti interni a Γ), un insieme di rette, dove ogni retta è data come insieme di punti, una relazione di incidenza (che sarà quella ovvia di appartenenza), una relazione di interposizione, una di congruenza sia per i segmenti che per gli angoli, e proviamo che sono verificati i gruppi di assiomi I, II e III di Hilbert. Per distinguere tra i punti, le rette e le relazioni del piano cartesiano Π_F e quelli del disco di Poincaré, faremo precedere questi ultimi da "P-".

Nel seguito F denota un fissato campo ordinato euclideo, e Γ denota una fissata circonferenza nel piano cartesiano Π_F ; denotiamo inoltre con O il centro di Γ .

Definizione 3.1. I punti del modello di Poincaré, chiamati *P-punti*, sono i punti di Π_F interni alla circonferenza Γ (i punti di Γ non sono quindi *P-punti*).

Una retta del modello di Poincaré, chiamata *P-retta*, è l'insieme dei *P-punti* che giacciono su una retta passante per O (quindi un diametro di Γ senza gli estremi), oppure l'insieme dei *P-punti* che giacciono su una circonferenza γ perpendicolare a Γ .

Diciamo che un *P-punto* e una *P-retta* sono incidenti se il *P-punto* appartiene alla *P-retta*.



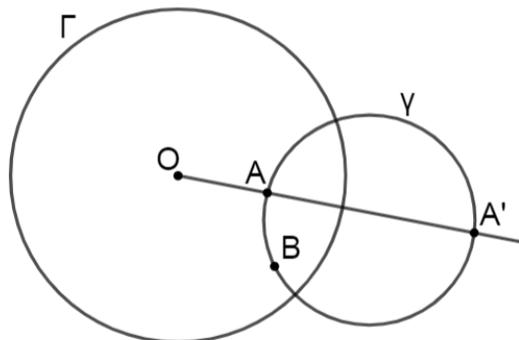
3.1 Assiomi di incidenza e assioma di Playfair

Ora che abbiamo definito P -punti e P -rette, possiamo verificare la validità degli assiomi di Hilbert nel nuovo modello.

Proposizione 3.2. *Nel modello di Poincaré valgono gli assiomi di incidenza (I1), (I2), (I3).*

Dimostrazione. Per provare l'assioma (I1), consideriamo due P -punti A e B , ovvero due punti interni a Γ . Trattandosi di P -punti, essi saranno anche punti del piano euclideo, e sappiamo che nel piano euclideo l'assioma (I1) è valido, cioè esiste ed è unica una retta r passante per A e B . Se il punto O appartiene a r (e dunque se i punti O , A e B sono allineati), allora esiste ed è unica una P -retta passante per A e B , che è data dall'insieme dei P -punti di r .

Supponiamo ora che i punti O , A e B non siano allineati. Sia A' l'inverso di A per inversione circolare rispetto a Γ . Allora esiste ed è unica una circonferenza γ passante per i punti A , A' e B .



Per la Proposizione (2.10) γ è perpendicolare a Γ ; inoltre, per la Proposizione (2.11) qualsiasi circonferenza perpendicolare a Γ e passante per A deve passare anche per A' .

Quindi γ sarà l'unica circonferenza perpendicolare a Γ passante per i punti A e B .

La validità degli assiomi (I2) e (I3) è ovvia. \square

Osservazione 3.3. Dalla Proposizione (3.2) segue che nel modello di Poincaré due P -rette distinte si incontrano al più in un punto; quindi due circonferenze ortogonali a Γ hanno al più un punto in comune all'interno di Γ .

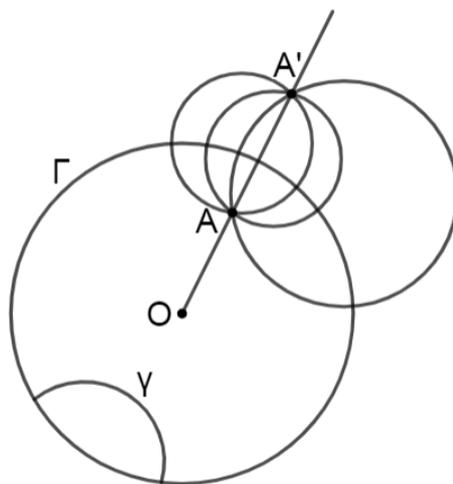
Vediamo ora che il modello di Poincaré non soddisfa l'assioma di Playfair (P), rendendo così non euclidea la geometria di cui stiamo trattando.

Ricordiamo che (Definizione (1.17)) due P -rette si dicono P -parallele se non hanno punti in comune, oppure se coincidono.

Proposizione 3.4. *Nel modello di Poincaré l'assioma di Playfair (P) non è valido.*

Dimostrazione. Confutare l'assioma di Playfair significa trovare una P -retta γ e un P -punto A tali che esistano almeno due P -rette passanti per A e parallele a γ .

Consideriamo allora, data una circonferenza Γ di centro O , una P -retta γ e un punto $A \notin \gamma$, come in figura. Sia A' l'inverso di A rispetto a Γ .

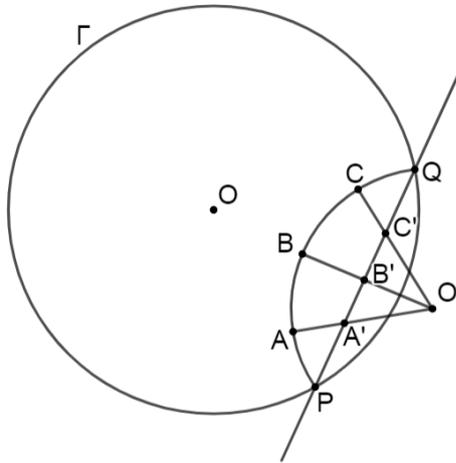


Per la Proposizione (2.10), ogni circonferenza passante per A e A' è perpendicolare a Γ e, considerando i P -punti che ne fanno parte, ci fornisce una P -retta passante per A . Delle P -rette così trovate, si può provare che molte non intersecano γ , e queste sono tutte P -rette passanti per A e parallele a γ . \square

3.2 Assiomi di ordinamento e congruenza

Diamo ora una relazione di *interposizione* nel disco di Poincaré.

Definizione 3.5. Siano A, B, C tre P -punti su una P -retta γ . Nel caso in cui γ sia l'insieme dei P -punti di una retta passante per O , la relazione di P -*interposizione* (cioè di *interposizione* nel modello di Poincaré) è la relazione di *interposizione* nel piano euclideo. Se invece γ è l'insieme dei P -punti di una circonferenza perpendicolare a Γ , sia O' il centro della circonferenza γ (che si troverà sempre fuori da Γ) e siano P, Q i punti di intersezione tra γ e Γ . Tracciamo le rette (euclidee) $PQ, O'A, O'B$ e $O'C$. Siano quindi A', B' e



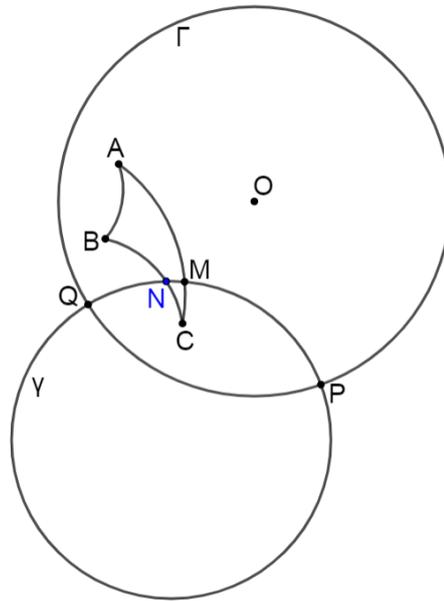
C' i punti di intersezione della retta PQ con, rispettivamente, le rette $O'A, O'B$ e $O'C$ (come in figura). Diremo che $A * B * C$ secondo la nozione di P -*interposizione* se e solo se $A' * B' * C'$ sulla retta PQ secondo la nozione di *interposizione* nel piano Π_F .

Osservazione 3.6. Dati due P -punti A e B , il P -segmento AB è l'insieme costituito da A, B e da tutti i P -punti C tali che $A * C * B$, secondo la nozione di P -*interposizione*, e dati tre P -punti A, B, C non P -allineati (cioè tali che non esista una P -retta γ per cui $A, B, C \in \gamma$), il P -triangolo $\triangle ABC$ è l'unione dei P -segmenti AB, BC, CA .

Proposizione 3.7. Nel modello di Poincaré valgono gli assiomi di ordinamento $(B1), (B2), (B3), (B4)$ rispetto alla nozione di P -*interposizione*.

Dimostrazione. La validità degli assiomi $(B1), (B2)$ e $(B3)$ segue immediatamente dalla definizione di P -*interposizione*.

Per l'*assioma di Pasch* $(B4)$ facciamo così: dati tre P -punti A, B e C non P -allineati, consideriamo il P -triangolo $\triangle ABC$. Sia γ una P -retta tale che $A, B, C \notin \gamma$ e tale che esista un P -punto $M \in \gamma$ sul P -segmento AC (quindi $M \in \gamma$ e $A * M * C$).



Supponiamo che il punto B si trovi all'esterno di γ (come in figura). Dato che in Π_F vale l'assioma (E) , la circonferenza γ incontrerà la circonferenza su cui giace il P -segmento BC in un P -punto N . Essendo C interno a γ e B esterno a γ , si avrà necessariamente $C * N * B$, cioè il P -punto N apparterrà al segmento BC .

Al contrario, poichè entrambi i punti A e B sono esterni a γ , la circonferenza γ non intersecherà il P -segmento AB .

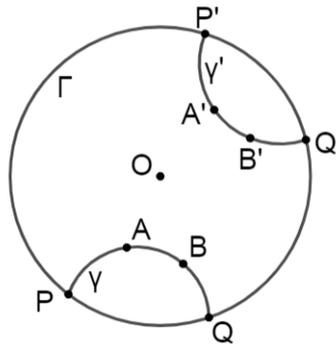
Se il punto B si trova all'interno di γ , si procede in modo analogo sul P -segmento AB . \square

Osservazione 3.8. Il teorema di separazione del piano (1.5) nel modello di Poincaré dice che una P -retta γ divide il piano di Poincaré in due insiemi P -convessi con intersezione vuota; due P -punti A, B si trovano dalla stessa parte del P -piano rispetto a γ se il P -segmento AB non ha P -punti in comune con γ .

Osserviamo che dati due P -punti A e B , il P -raggio (o P -semiretta) di origine A passante per B è l'insieme costituito da A e da tutti i P -punti del P -segmento AB che si trovano dalla stessa parte di B rispetto ad A , quindi è un segmento se A e B stanno su un diametro, è un arco di circonferenza se A e B non sono allineati con O .

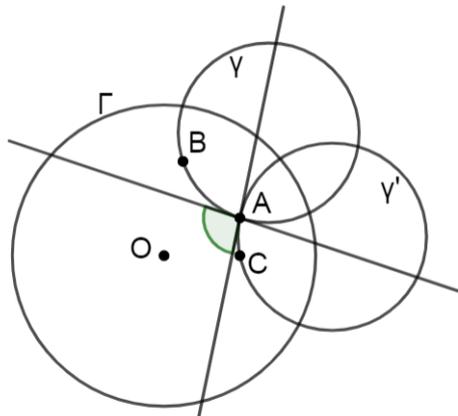
Per mostrare la validità degli assiomi di congruenza $(C1-6)$, dobbiamo introdurre il concetto di congruenza (per P -segmenti e P -angoli) nel modello di Poincaré. Inoltre, per provare gli assiomi $(C1)$ e $(C6)$ sarà necessario dimostrare l'esistenza di movimenti rigidi (ERM) in questo modello.

Definizione 3.9. Siano (A, B) e (A', B') due coppie di P -punti. Consideriamo la P -retta γ passante per i P -punti A, B ; γ può essere quindi un diametro oppure un arco di circonferenza perpendicolare a Γ . Essa incontrerà la circonferenza Γ in due punti (che non sono P -punti poichè appartengono a Γ). Di questi due punti, chiamiamo P quello più vicino ad A , e Q quello più vicino a B . Prendiamo ora la P -retta γ' passante per A' e B' , la quale incontrerà Γ in due punti: denominiamo P' il punto più vicino ad A' , e Q' il punto più vicino a B' .



Allora diciamo che il P -segmento AB è P -congruente al P -segmento $A'B'$ se il birapporto (AB, PQ) è uguale al birapporto $(A'B', P'Q')$.

Un P -angolo \widehat{ABC} è formato da due raggi, ciascuno dei quali è un segmento ordinario contenuto in un diametro di Γ oppure un arco di circonferenza perpendicolare a Γ . Diciamo che due P -angoli sono P -congruenti se sono congruenti gli angoli euclidei formati dalle tangenti ai P -raggi.



Osservazione 3.10. Nel modello di Poincaré dati due P -punti distinti A e B , il P -punto medio del P -segmento AB è il P -punto M del P -segmento AB tale che il P -segmento AM sia P -congruente al P -segmento MB .

Proposizione 3.11. Siano $C, C' \neq O$ due punti interni a Γ . Il P -segmento OC corrisponde al segmento euclideo OC , poiché la P -retta passante per O, C è una retta euclidea per O , così come il P -segmento OC' corrisponde al segmento euclideo OC' . Allora i P -segmenti OC e OC' sono P -congruenti se e solo se i segmenti euclidei OC e OC' sono congruenti.

Dimostrazione. Siano P e Q i due punti di intersezione della retta passante per O e C con Γ . Per la definizione di P -congruenza dovremo considerare il birapporto

$$(OC, PQ) = \frac{OP}{OQ} \cdot \frac{CQ}{CP}.$$

Chiamiamo r il raggio di Γ e x la distanza euclidea tra O e C , e sia $PC \geq CQ$. Quindi possiamo scrivere:

$$(OC, PQ) = \frac{r}{r} \cdot \frac{r-x}{r+x} = \frac{r-x}{r+x}.$$

Siano ora P', Q' i due punti di intersezione della retta passante per O e C' con Γ , e y la distanza euclidea tra O e C' . Avremo:

$$(OC', P'Q') = \frac{r-y}{r+y}.$$

Quindi OC è P -congruente a OC' se e solo se

$$\frac{r-x}{r+x} = \frac{r-y}{r+y},$$

moltiplicando si ottiene:

$$r^2 - rx + ry - xy = r^2 + rx - ry - xy,$$

da cui

$$2rx = 2ry.$$

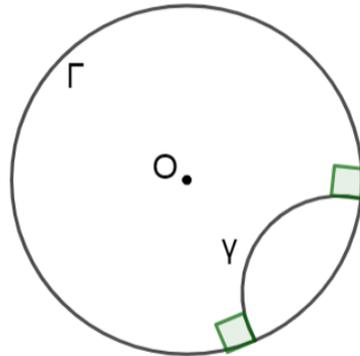
Siccome il campo F in cui ci troviamo ha caratteristica 0, questo è equivalente a $x = y$, cioè OC è congruente a OC' . \square

Ci apprestiamo ora a dimostrare l'esistenza di molti movimenti rigidi (si veda (ERM) (1.44)) nel modello di Poincaré, osservando che (si veda la Definizione (1.42)) un P -movimento rigido ϕ è una trasformazione sull'insieme dei punti interni a Γ biunivoca, che manda P -rette in P -rette, e che preserva le nozioni di P -interposizione e P -congruenza fra P -angoli e P -segmenti.

Proposizione 3.12. *Nel modello di Poincaré vale l'assioma (ERM), cioè esistono abbastanza P -movimenti rigidi da soddisfare le seguenti proprietà:*

1. *Per ogni coppia di P -punti A, B , \exists un P -movimento rigido che manda A in B .*
2. *Per ogni terna di P -punti A, B, B' , \exists un P -movimento rigido che manda il P -raggio AB nel P -raggio AB' .*
3. *Per ogni P -retta γ , \exists un P -movimento rigido che lascia i P -punti di γ fissi e scambia le due parti del piano di Poincaré individuate da γ .*

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando la proprietà (3). Sia γ una P -retta, e sia ρ_γ l'inversione circolare rispetto a γ (più precisamente, ρ_γ è l'inversione circolare rispetto alla circonferenza che ci fornisce la P -retta γ).

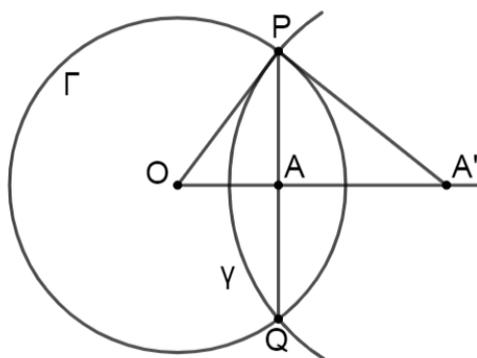


Essendo Γ perpendicolare a γ , per la Proposizione (2.11) si ha $\rho_\gamma(\Gamma) = \Gamma$; inoltre, anche l'interno di Γ è mandato in sè stesso da ρ_γ , in modo chiaramente biunivoco. Per le Proposizioni (2.12) e (2.14), una circonferenza perpendicolare a Γ viene mandata da ρ_γ in un'altra circonferenza perpendicolare a Γ , dunque ρ_γ manda P -rette in P -rette.

Si può dimostrare inoltre che l'inversione circolare ρ_γ preserva la nozione di P -interposizione, la P -congruenza tra P -angoli e la P -congruenza tra P -segmenti. Infine, per come è definita, l'inversione circolare ρ_γ scambia la parte del piano di Poincaré che si trova dentro γ con la parte del piano di Poincaré che si trova al di fuori di γ , quindi è un P -movimento

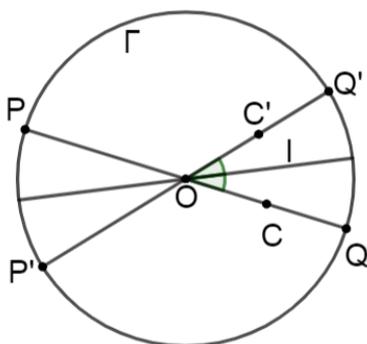
rigido che rispetta tutte le caratteristiche richieste dalla proprietà (3). Diremo che ρ_γ è la *P-riflessione* di asse γ .

Passiamo ora alla proprietà (1). Mostriamo che per ogni *P*-punto $A \neq O$ esiste una *P*-retta γ perpendicolare a Γ tale che la *P*-riflessione ρ_γ scambi O e A . Sia A' l'inverso di A ; sia γ la circonferenza di centro A' perpendicolare a Γ . Seguendo la costruzione della Proposizione (2.4) per γ , si trova che l'inversione circolare rispetto a γ manda A in O e viceversa: $\rho_\gamma(A) = O$ e $\rho_\gamma(O) = A$.



La composizione di *P*-movimenti rigidi è ancora un *P*-movimento rigido, allora dati due *P*-punti A e A' possiamo sfruttare il procedimento descritto sopra per mandare A in O , e in seguito O in A' ; la composizione di questi due *P*-movimenti rigidi sarà quindi un *P*-movimento rigido che manda A in A' , come richiesto dalla proprietà (1).

Infine, per la proprietà (2), siano A, B, B' tre *P*-punti. Sia ρ un *P*-movimento rigido tale che $\rho(A) = O$, e siano $C = \rho(B)$ e $C' = \rho(B')$. Vediamo innanzitutto che è possibile trovare un movimento rigido che lasci fisso O e che mandi il *P*-raggio OC nel *P*-raggio OC' :



Consideriamo la retta l , bisettrice dell'angolo $\widehat{COC'}$; trattandosi di una retta passante

per O , sarà anche una P -retta. Ora, sia θ la riflessione rispetto a l ; θ è un P -movimento rigido che lascia fisso O e manda il raggio OC nel raggio OC' . Allora il P -movimento rigido $\rho^{-1}\theta\rho$ è un P -movimento rigido che lascia O fisso e manda il raggio OB nel raggio OB' , come richiesto dalla proprietà (2). \square

Ora possiamo dimostrare che gli assiomi di congruenza valgono nel nostro modello.

Proposizione 3.13. *Il modello di Poincaré soddisfa gli assiomi di congruenza (C1), (C2), (C3), (C4), (C5), (C6).*

Dimostrazione. (C1): Dati un P -segmento AB e un P -raggio r che origina in un P -punto C , dobbiamo dimostrare l'esistenza di un P -punto D su tale P -raggio tale che il P -segmento CD sia P -congruente ad AB . Sappiamo, per la Proposizione (3.12), che esiste un P -movimento rigido ϕ che porta A in C ; ma esiste anche un P -movimento rigido ψ che porta il P -raggio $\phi(AB)$ nel P -raggio r . Allora $D = \psi(\phi(C))$ è un punto su r , e $AB \cong CD$ perché i P -movimenti rigidi preservano la P -congruenza.

(C2): Ovvio per definizione di P -congruenza tra P -segmenti.

(C3): Deriva dalla seguente proprietà: quando due P -segmenti vengono addizionati, i relativi birapporti si moltiplicano. Siano infatti A, B, C tre P -punti tali che $A * B * C$. Consideriamo dunque i P -segmenti AB, BC e la loro somma AC . Allora avremo:

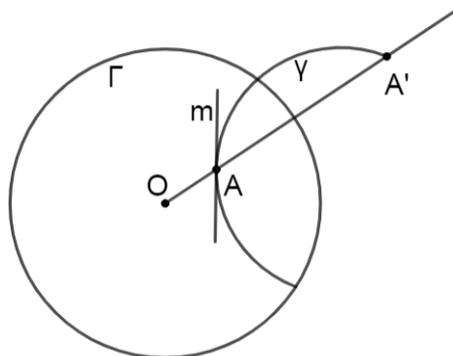
$$(AB, PQ) = \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP}, \quad (BC, PQ) = \frac{BP}{BQ} \cdot \frac{CQ}{CP}, \quad (AC, PQ) = \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{CQ}{CP};$$

da cui:

$$(AB, PQ) \cdot (BC, PQ) = \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP} \cdot \frac{BP}{BQ} \cdot \frac{CQ}{CP} = \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{CQ}{CP} = (AC, PQ).$$

L'assioma (C3) risulta quindi immediato.

(C4): Siano A un P -punto (cioè punto interno a Γ) e m una retta euclidea passante per A . Consideriamo il punto A' inverso di A rispetto a Γ . Sappiamo che esiste ed è unica una circonferenza γ passante per i punti A, A' e che abbia m come tangente in A . Per la Proposizione (2.10), γ è perpendicolare a Γ , dunque ci fornisce una P -retta. Siccome questo vale qualunque sia la retta euclidea m , possiamo affermare che esiste una (unica) P -retta passante per A per ogni direzione di tangenza. Inoltre l'assioma (C4) vale nel piano euclideo Π_F , allora dati un P -angolo α e una P -retta γ con tangente m in



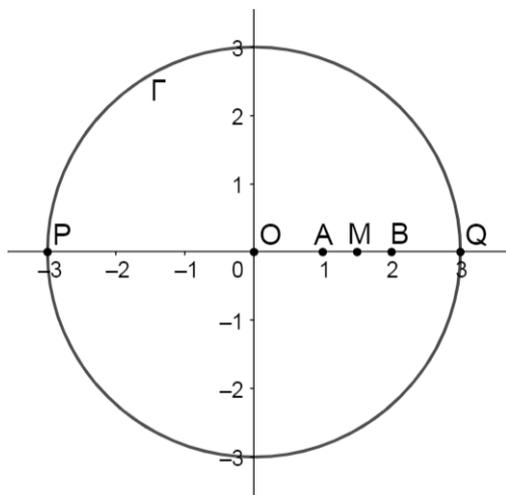
A, esiste ed è unica una retta euclidea n che formi con m un angolo α . Quindi esiste ed è unica una P -retta che abbia tangente n in A e che formi il P -angolo α con γ .

(C5): Ovvio per definizione di P -congruenza tra P -angoli.

(C6): Avendo provato (C1-5), oltre agli assiomi di incidenza (I1-3) e ordinamento (B1-4), per la Proposizione (1.46) si ha $(ERM) \Rightarrow (C6)$. \square

Osservazione 3.14. Siano A e B due P -punti distinti allineati con O . Mostriamo con un esempio che, in generale, il P -punto medio del P -segmento AB non coincide con il punto medio del segmento AB .

In $\Pi_{\mathbb{R}}$ sia Γ la circonferenza di centro $O = (0, 0)$ e raggio $r = 3$, e consideriamo il segmento di estremi $A = (1, 0)$ e $B = (2, 0)$. Siccome A e B sono allineati con O , il P -segmento AB coinciderà con il segmento euclideo AB . Seguendo la costruzione della Definizione (3.9), chiameremo $P = (-3, 0)$ e $Q = (3, 0)$.



Sia ora M il P -punto medio del P -segmento AB . I P -segmenti AM e MB dovranno essere

P -congruenti, dunque:

$$(AM, PQ) = (MB, PQ)$$

cioè

$$\frac{AP}{AQ} \cdot \frac{MQ}{MP} = \frac{MP}{MQ} \cdot \frac{BQ}{BP}$$

dove $AP = 4$, $AQ = 2$, $BP = 5$ e $BQ = 1$; allora:

$$\frac{4}{2} \cdot \frac{MQ}{MP} = \frac{MP}{MQ} \cdot \frac{1}{5}$$

da cui si ottiene

$$\frac{MQ^2}{MP^2} = \frac{1}{10}$$

e quindi

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Sia ora M il punto medio del segmento AB , cioè $M = (\frac{3}{2}, 0)$. In questo caso dunque $MQ = \frac{3}{2}$ e $MP = \frac{9}{2}$, ma allora

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{\sqrt{10}},$$

quindi il punto medio di AB come segmento non coincide con il P -punto medio di AB come P -segmento.

3.3 Assioma (E) e assioma archimedeo

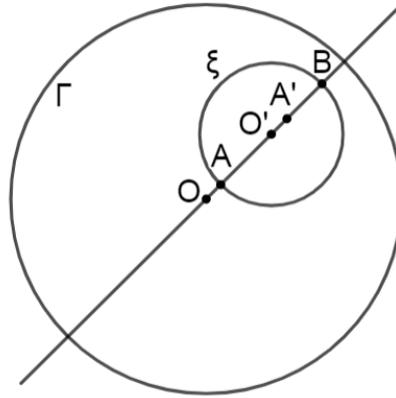
Proposizione 3.15. *Una P -circonferenza è una circonferenza interamente contenuta in Γ (cioè i cui punti sono tutti interni a Γ) e, viceversa, una circonferenza interamente contenuta in Γ è una P -circonferenza.*

Solitamente il P -centro di una P -circonferenza è diverso dal suo centro euclideo.

Dimostrazione. Sia ξ una P -circonferenza con P -centro A' . Per la Proposizione (3.12), esiste un P -movimento rigido θ tale che $\theta(A') = O$; esso porterà ξ in una P -circonferenza di P -centro O . Per la Proposizione (3.11), la P -congruenza equivale alla congruenza euclidea per segmenti che originano in O ; allora $\theta(\xi)$ sarà una circonferenza euclidea di centro O . Ora, osserviamo che nella dimostrazione della Proposizione (3.12), tutti i movimenti

che occorre erano composizioni di P -riflessioni (che sono inversioni circolari rispetto a una circonferenza γ ortogonale a Γ) o riflessioni rispetto a una retta passante per O . Per la Proposizione (2.12) queste trasformazioni mandano circonferenze in circonferenze, e siccome ξ è contenuta in Γ , anche $\theta(\xi)$ sarà una circonferenza contenuta in Γ ; quindi $\xi = \theta^{-1}\theta(\xi)$ è una circonferenza.

Al contrario, data una circonferenza ξ di centro O' e completamente contenuta in Γ , tracciamo il segmento OO' ; siano A, B i punti di intersezione tra ξ e OO' , come in figura. Sia A' il P -punto medio del P -segmento AB , che per quanto visto nell'Osservazione



(3.14) non coinciderà, in generale, con O' . Scegliamo ora una P -retta opportuna γ tale che la P -riflessione ρ_γ mandi A' in O ; tale P -retta γ sarà dunque un arco di circonferenza perpendicolare a Γ e con centro (esterno a Γ) sulla retta OO' .

Per la Proposizione (2.12) $\rho_\gamma(\xi)$ sarà una circonferenza, e sarà simmetrica rispetto alla retta OO' che viene mandata in sè stessa da ρ_γ ; inoltre $O = \rho_\gamma(A')$ è il P -punto medio di $\rho_\gamma(A)\rho_\gamma(B)$ come P -segmento, in quanto ρ_γ è un P -movimento rigido che quindi conserva le distanze, e A' è P -punto medio di AB per costruzione. Poiché $OA \cong OB$ come P -segmenti implica che $OA \cong OB$ come segmenti (Proposizione (3.11)), O è il punto medio del segmento $\rho_\gamma(A)\rho_\gamma(B)$, quindi $\rho_\gamma(\xi)$ è una circonferenza di centro O e dunque anche una P -circonferenza di centro O .

Applicando ρ_γ^{-1} si ottiene che anche la circonferenza iniziale ξ è una P -circonferenza. \square

Proposizione 3.16. *Il modello di Poincaré soddisfa l'assioma (E).*

Dimostrazione. Sia Γ una circonferenza. Essendo le P -circonferenze contenute in Γ per definizione, anche le loro possibili intersezioni si troveranno all'interno di Γ . Dunque la validità di (E) nel modello di Poincaré segue direttamente dalla validità di (E) nel piano euclideo Π_F . \square

Cerchiamo ora di definire una *funzione distanza* in questo modello, ricordando come una distanza è definita su un piano di Hilbert:

Definizione 3.17. Una *funzione distanza* in un piano di Hilbert è una funzione d che ad ogni segmento assegna un elemento di un gruppo abeliano ordinato G tale che:

- $d(AB) > 0$ per ogni segmento AB ;
- $d(AB) = d(A'B')$ se e solo se $AB \cong A'B'$;
- se $A * B * C$, allora $d(AC) = d(AB) + d(BC)$.

Se il gruppo G è moltiplicativo, d è detta *funzione distanza moltiplicativa*.

Si osservi che la funzione $dist(A, B)$ definita in Π_F se F è un campo ordinato pitagorico (si veda la dimostrazione della Proposizione (1.40)) prende valori nel gruppo $(F, +)$.

Proposizione 3.18. *Nel modello di Poincaré su un campo F , la funzione*

$$\mu(AB) = (AB, PQ)^{-1},$$

dove A e B sono due punti e P, Q sono punti presi seguendo lo schema della Definizione (3.9), è una *funzione distanza moltiplicativa con valori nel gruppo moltiplicativo $(F_{>0}, \cdot)$.*

Dimostrazione. Riguardo i punti P e Q , siccome abbiamo adottato la convenzione di chiamare P il punto più vicino ad A e Q il punto più vicino a B , risulterà $AP < AQ$ e $BQ < BP$. Dunque $0 < (AB, PQ) < 1$, e di conseguenza $\mu(A, B) = (AB, PQ)^{-1} > 1$. Inoltre essendo il birapporto moltiplicativo, come abbiamo visto nella dimostrazione della Proposizione (3.13), lo è anche μ . Allora μ è una funzione di distanza moltiplicativa. \square

Giungiamo infine all'assioma archimedeo (V1).

Proposizione 3.19. *Il modello di Poincaré su un campo F soddisfa l'assioma archimedeo (V1) se assumiamo che l'assioma archimedeo valga per il campo F .*

Dimostrazione. Dati due P -segmenti nel piano di Poincaré, utilizzando la funzione μ della Proposizione (3.18) associamo a tali P -segmenti i corrispondenti valori di μ , che saranno elementi del campo F . Allora l'assioma archimedeo per il modello di Poincaré equivale alla seguente condizione su F :

$$\forall c, d \in F, \quad c, d > 1, \quad \exists n > 0 \quad t.c. \quad c^n > d.$$

Questa proprietà è una conseguenza dell'assioma archimedeo per F , infatti:
 Scriviamo $c = 1 + x$ in modo da considerare $x \in F$, $x > 0$. Allora:

$$c^n = (1 + x)^n = 1 + nx + \text{quantità positive} \geq 1 + nx.$$

L'assioma archimedeo su F ci dice che $\exists n$ tale che $nx > d$. In tal caso avremo anche $c^n > d$, quindi se l'assioma archimedeo vale per F , varrà anche per il modello di Poincaré costruito su F . □

Capitolo 4

Tassellamenti del piano euclideo

In questo capitolo ci occuperemo dei tassellamenti del piano. Un *tassellamento del piano* è un ricoprimento del piano fatto con infinite *tessere* tutte congruenti fra loro, che non lascino spazi vuoti e che non si sovrappongano. L'idea per costruire un tassellamento è la seguente: prendiamo una tessera e trasliamola, ruotiamola, ribaltiamola come vogliamo purché questo ci consenta di ricoprire il piano come si è detto.

Si vede subito che vi sono solo poche forme fondamentali permesse per la tessera di partenza (tenendo presente che dalla forma fondamentale si possono ottenere infinite variazioni equivalenti dal punto di vista geometrico). I tassellamenti che ci interessano in particolare sono quelli *regolari*, cioè i rivestimenti dell'intero piano euclideo con poligoni regolari ripetuti all'infinito senza sovrapposizioni.

I tassellamenti del piano ricorrono nella pittura e nell'architettura fin dall'antichità. Celebri sono le decorazioni del palazzo dell'Alhambra a Granada, realizzate dalla dinastia araba dei Nasridi nel XIII secolo.

4.1 Reticoli

In questa sezione analizzeremo la struttura che giace sotto i tassellamenti del piano. Questi rivestimenti, infatti, si basano su motivi che vengono ripetuti all'infinito attraverso traslazioni lungo due direzioni indipendenti, cioè attraverso reticoli.

Definizione 4.1. Un *reticolo piano* L è un sottogruppo di \mathbb{R}^2 generato da due vettori linearmente indipendenti a, b :

$$L = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

dove (a, b) è detta *base* del reticolo L .

Teorema 4.2. *Nel piano esistono esattamente 5 tipi di reticoli, determinati dalla forma del parallelogramma individuato dai generatori a e b del reticolo. Possiamo supporre, senza perdere di generalità:*

$$\|a\| \leq \|b\| \leq \|a - b\| \leq \|a + b\|;$$

Allora i possibili reticoli piani sono i seguenti:

- 1) *Reticolo Parallelogrammico:* $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| < \|a + b\|;$
- 2) *Reticolo Rettangolare:* $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|;$
- 3) *Reticolo Rettangolare Centrato:* $\|a\| < \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|;$
- 4) *Reticolo Quadrato:* $\|a\| = \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|;$
- 5) *Reticolo Esagonale:* $\|a\| = \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|;$

Dimostrazione. Innanzitutto proviamo che non è restrittivo supporre che:

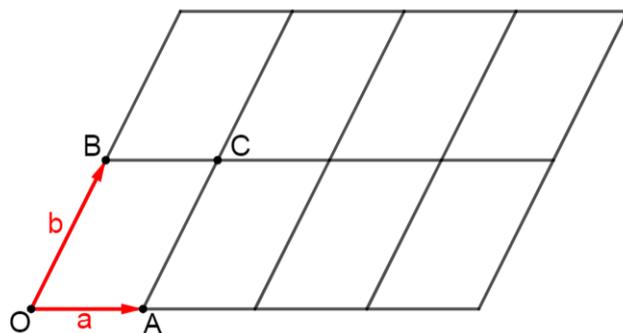
$$\|a\| \leq \|b\| \leq \|a - b\| \leq \|a + b\|. \tag{4.1}$$

Possiamo scegliere la base (a, b) per L in modo che a sia un vettore di lunghezza minima; se è possibile prendiamo come b un vettore linearmente indipendente con a e della stessa lunghezza di a , altrimenti lo scegliamo come un vettore di lunghezza minima tra quelli tali che $\|a\| \leq \|b\|$. Allora, si avranno $\|b\| \leq \|a - b\|$ e $\|b\| \leq \|a + b\|$, poichè in caso contrario a e b non sarebbero vettori di lunghezza minima. Inoltre, siccome $\|b\| = \|-b\|$, possiamo considerare $-b$ al posto di b , se necessario, per assicurarci che $\|a - b\| \leq \|a + b\|$. L'ipotesi (4.1) è così soddisfatta.

Ora procediamo ad analizzare tutti gli 8 possibili casi che si possono verificare in (4.1):

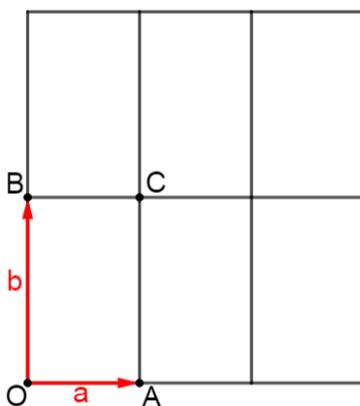
- 1) $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| < \|a + b\|.$

I vettori a e b sono linearmente indipendenti per ipotesi (altrimenti non formerebbero una base del reticolo), quindi il quadrilatero da essi generato ($OACB$ nella figura) è un parallelogramma.



2) $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$.

Chiamiamo $OACB$ il quadrilatero generato dai vettori a e b .



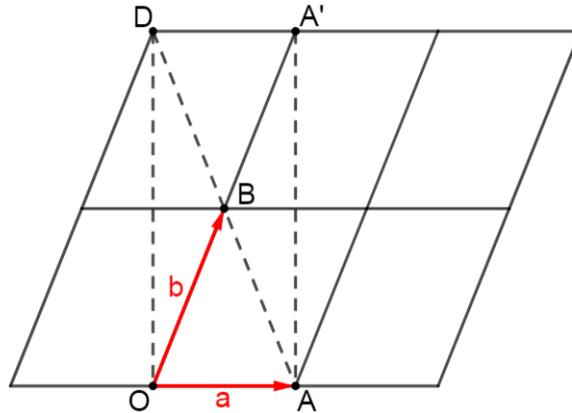
Siccome $\|a - b\| = \|a + b\|$, allora deve valere $AB \cong OC$. Dunque il parallelogramma $OACB$ ha le diagonali congruenti, cioè si tratta di un rettangolo.

3) $\|a\| < \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$.

Considerando i triangoli $\triangle OBD$ e $\triangle ABA'$ nella figura, si può osservare che:

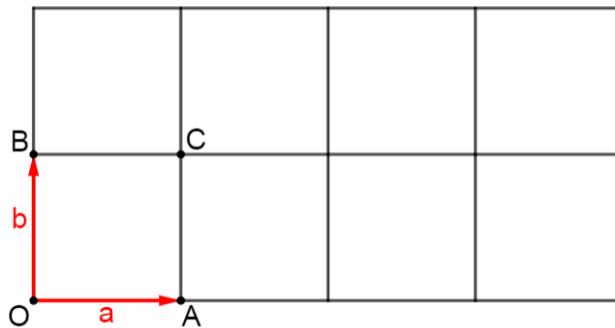
- $OB \cong AB$ perché $\|b\| = \|a - b\|$;
- $DB \cong BA'$ perché $\|b\| = \|a - b\|$;
- $\widehat{OBD} \cong \widehat{ABA'}$ perché angoli opposti al vertice.

Quindi, per l'assioma (C6), i due triangoli sono congruenti; in particolare si avrà $OD \cong AA'$.



Consideriamo ora il quadrilatero $OAA'D$; essendo $OA \cong DA'$ e $OD \cong AA'$, si tratta di un rettangolo. Abbiamo così ottenuto un reticolo rettangolare, detto *centrato*, i cui rettangoli hanno base uguale ad a , e altezza $\sqrt{4b^2 - a^2}$.

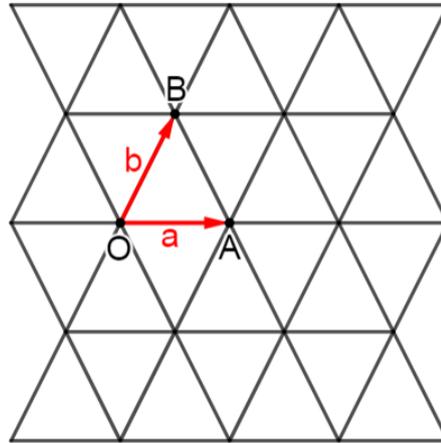
4) $\|a\| = \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$.



Per la condizione $\|a - b\| = \|a + b\|$, il parallelogramma generato da a e b ($OACB$ nella figura) deve essere un rettangolo, e poiché in questo caso $\|a\| = \|b\|$, sarà un quadrato.

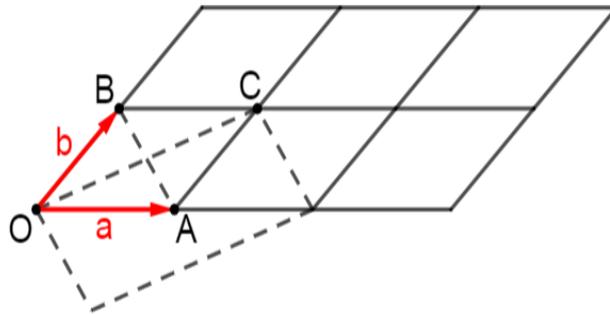
5) $\|a\| = \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$.

La condizione $\|a\| = \|b\| = \|a - b\|$ impone che nel triangolo $\triangle OAB$ in figura si abbia $OA \cong OB \cong AB$. Dunque il triangolo $\triangle OAB$ è equilatero, così come gli altri triangoli che compongono il reticolo. Poiché 6 triangoli equilateri con un vertice in comune formano un esagono regolare, il reticolo può essere visto come costituito



da esagoni, e dunque chiamato *esagonale*.

6) $\|a\| = \|b\| < \|a - b\| < \|a + b\|$.



Consideriamo il parallelogramma $OACB$ in figura. Poiché vale $\|a\| = \|b\|$, ricordando che un parallelogramma che ha due lati consecutivi congruenti è un rombo, si deduce che $OACB$ è un rombo. Ricordiamo inoltre che in un rombo le diagonali sono perpendicolari, dunque nel nostro caso avremo che $a - b$ e $a + b$ sono perpendicolari. Allora abbiamo ottenuto un reticolo rettangolare centrato come nel caso 3), in cui i vettori $a - b$ e $a + b$ costituiscono base e altezza dei rettangoli.

7) $\|a\| < \|b\| = \|a - b\| = \|a + b\|$.

Consideriamo il parallelogramma generato dai vettori a e b . Per quanto visto nel caso 2), il fatto che $\|a - b\| = \|a + b\|$ implica che il parallelogramma sia un

rettangolo; ma al tempo stesso abbiamo $\|b\| = \|a - b\| = \|a + b\|$, cioè le diagonali del rettangolo devono essere congruenti ad un suo lato, ma questo non è possibile. Dunque tale reticolo non può esistere.

$$8) \|a\| = \|b\| = \|a - b\| = \|a + b\|.$$

Come nel caso precedente, la condizione $\|a - b\| = \|a + b\|$ implica che il parallelogramma generato da a e b sia un rettangolo, e inoltre $\|a\| = \|b\|$ impone che si tratti di un quadrato; ma siccome deve valere anche $\|a\| = \|b\| = \|a - b\| = \|a + b\|$, il lato del quadrato dovrebbe essere congruente alla sua diagonale, che è assurdo. Quindi tale reticolo non può esistere.

Concludiamo allora che i tipi di reticoli esistenti nel piano sono i 5 elencati nell'enunciato.

□

Le decorazioni di un tassellamento del piano sono costituite di motivi traslati (e dunque ripetuti) in due direzioni differenti. I gruppi delle simmetrie dei ricoprimenti di questo tipo contengono un reticolo di traslazioni, e sono chiamati *gruppi cristallografici piani*. Si può dimostrare che i gruppi cristallografici piani sono, a meno di isomorfismi, 17. Quindi 17 sono anche le possibili simmetrie che una decorazione ottenuta ripetendo un motivo in due direzioni indipendenti può avere. Questa classificazione dipende non solo dalla forma del reticolo delle traslazioni, ma anche dalla forma dei tasselli e dalle loro simmetrie.

4.2 Tassellamenti regolari

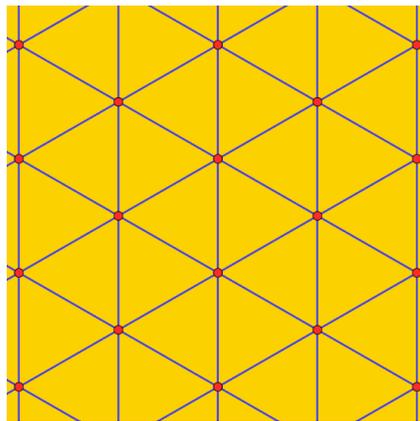
Un *tassellamento regolare del piano* è un tassellamento del piano che utilizza come *tessere* (o *tasselli*) poligoni regolari tutti congruenti, e tali che in ogni vertice si incontri lo stesso numero di poligoni. In altre parole, un tassellamento regolare del piano è un puzzle infinito con tessere congruenti, costituite da poligoni regolari, che si ripetono in due direzioni indipendenti, e tali che ogni vertice sia toccato dallo stesso numero di poligoni.

Se n è il numero di lati del poligono regolare che costituisce il tassello e k è il numero di poligoni che si incontrano ad ogni vertice, un tassellamento regolare del piano si indica con la notazione $\{n, k\}$, detta *simbolo* (o *notazione*) di *Schläfli*.

Dal Teorema (4.2) e da quanto visto nella sua dimostrazione si deduce che gli unici tassellamenti le cui tessere sono poligoni regolari sono quello con reticolo esagonale e quello con reticolo quadrato.

Analizziamo dunque i tassellamenti con questi reticoli e vediamo come essi fungano da base per la realizzazione di tassellamenti regolari del piano in apparenza differenti:

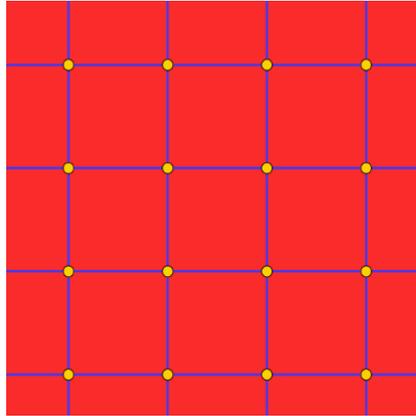
Il tassellamento $\{3, 6\}$ è rappresentato da triangoli equilateri ed è tale che in ogni vertice se ne incontrino 6:



$\{3, 6\}$

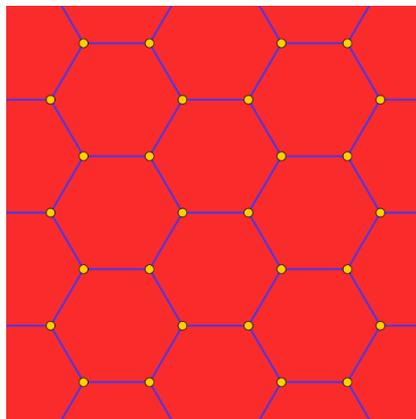
4.2. TASSELLAMENTI REGOLARI

Il tassellamento $\{4, 4\}$ ha invece come poligoni dei quadrati, con 4 di essi che si incontrano ad ogni vertice:



$\{4, 4\}$

Infine il tassellamento $\{6, 3\}$ presenta come tasselli degli esagoni, con 3 di essi che si incontrano in ogni vertice:

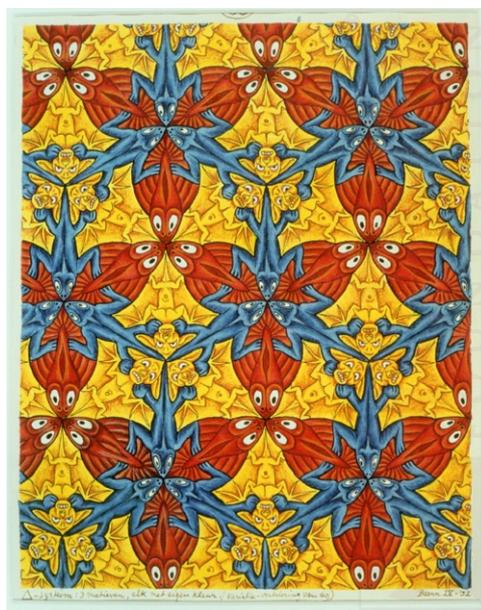


$\{6, 3\}$

Osserviamo che ciascun esagono regolare è costituito da 6 triangoli equilateri (ottenibili congiungendo il centro dell'esagono con i suoi vertici), così come 6 triangoli equilateri con un vertice in comune formano un esagono regolare. Dunque il tassellamento $\{3, 6\}$ e il tassellamento $\{6, 3\}$ sono di fatto coincidenti: si tratta cioè di due modi diversi di "guardare" lo stesso ricoprimento.

In una decorazione ottenuta ripetendo un motivo sul piano, i tasselli che compongono la figura non devono necessariamente essere poligoni regolari, ma sotto il disegno si potrà sempre scorgere uno dei tre tassellamenti mostrati. Vediamone alcuni esempi attraverso tre litografie dell'artista olandese Maurits Cornelis Escher:

Nell'opera *E85* si può scorgere il tassellamento triangolare $\{3, 6\}$, ad esempio considerando come vertici dei triangoli i punti in cui i musci rossi vermigli dei pesci si incontrano; in questo caso i triangoli sono resi ben visibili dall'accesa colorazione dorata dei pipistrelli (anche se i loro lati non ricalcano esattamente i confini della colorazione stessa).



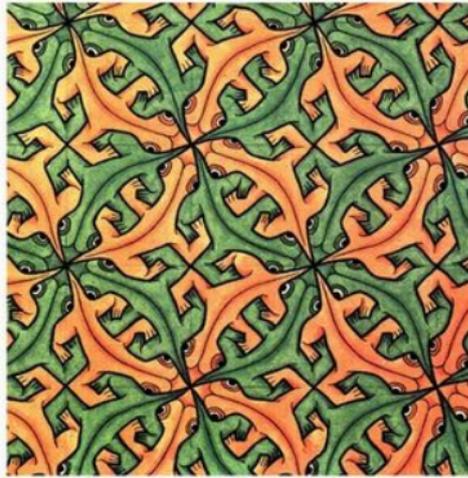
M.C.Escher - E85

All M.C. Escher works © 2021 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

In questa figura si può risalire anche ad un rivestimento $\{6, 3\}$ di esagoni regolari, ad esempio considerando come vertici degli esagoni tutti i punti in cui le teste o le code delle lucertole blu cerulee si toccano. Notiamo che il numero di poligoni regolari che si incontrano in ogni vertice, ovvero k , corrisponde proprio a 6 per i triangoli e 3 per gli esagoni.

4.2. TASSELLAMENTI REGOLARI

L'opera *E35* è basata sul tassellamento quadratico del piano $\{4, 4\}$, che si può individuare considerando come vertici dei quadrati, ad esempio, i punti in cui i musi dei gechi color sabbia si incontrano.



M.C. Escher - E35

All M.C. Escher works © 2021 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

In tal modo, ogni tessera è costituita da 4 gechi marroni (e rispettivamente 4 gechi verdi), ciascuno dei quali si ottiene da un altro tramite una rotazione di angolo $\theta = \frac{\pi}{2}n$, con $n \in \{1, 2, 3\}$.

Sotto il disegno si possono intravedere le linee, molto fini, che compongono il suddetto tassellamento; si tratta probabilmente di linee guida delle quali l'autore si è servito per realizzare la composizione.

Vediamo infine l'opera *E69*, in cui si può scorgere il tassellamento esagonale $\{6, 3\}$ considerando come vertici degli esagoni i punti in cui le piccole tartarughe rosse si incontrano (con il muso o con la coda).



M.C. Escher - E69

All M.C. Escher works © 2021 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

Ogni lato di un esagono percorre così il corpo di una tartaruga dalla testa alla coda, dividendola in due parti simmetriche.

Il rivestimento esagonale si può ottenere anche in altri modi, ad esempio considerando come vertici degli esagoni regolari i punti in cui si incontrano i pesci gialli, oppure i punti in cui si incontrano le anatre azzurre. Allo stesso modo, però, è possibile risalire al rivestimento triangolare $\{3, 6\}$, unendo i centri degli esagoni regolari con i loro vertici.

4.2. TASSELLAMENTI REGOLARI

Capitolo 5

Tassellamenti del piano di Poincaré

In questo capitolo tratteremo la possibilità di tassellare il piano di Poincaré in modo regolare, ovvero ricoprire l'intero disco utilizzando poligoni regolari come tessere (senza sovrapposizioni), e facendo sì che in ogni vertice si incontri lo stesso numero di poligoni. Come nel caso euclideo, rivestimenti di questo tipo hanno trovato terreno fertile nell'arte, anche se naturalmente non con la stessa frequenza dei tassellamenti del piano, e anzi rappresentano un esempio di come, in certi casi, non solo la matematica ispiri la realizzazione di opere artistiche, ma l'arte possa rivelarsi uno strumento importante per meglio comprendere i concetti matematici.

Inizialmente tratteremo come possono essere costituiti i tassellamenti regolari del piano di Poincaré, in seguito ne osserveremo alcune applicazioni artistiche attraverso le opere di M.C.Escher.

5.1 Rivestimenti regolari del P -modello

Nel piano di Poincaré si può parlare di P -poligoni, intendendo la naturale trasposizione dal piano euclideo del concetto di poligono. Allo stesso modo, si può mutuare dal piano euclideo nel modello di Poincaré la nozione di poligono regolare, dunque un P -poligono viene detto P -regolare se è P -convesso, P -equilatero e P -equiangolo. Infine, anche il concetto di P -congruenza di P -poligoni può essere importato in maniera naturale dal piano euclideo nel modello di Poincaré.

Si intuisce che un P -poligono, dovendo necessariamente contenere almeno un P -segmento che sia un arco di circonferenza, non può essere anche un poligono euclideo, e viceversa. Ma soprattutto, poiché, come mostrato nel capitolo 3, il modello di Poincaré non preserva, in generale, la distanza euclidea, se con un P -movimento rigido spostiamo un P -poligono all'interno del disco, esso cambia dal punto di vista euclideo, ma non secondo

la geometria del piano di Poincaré. I suoi lati si possono allungare o accorciare come archi euclidei, ma come P -segmenti mantengono sempre la stessa lunghezza, che è definita dall'inverso del birapporto, come abbiamo visto nella Definizione (3.9) e nella Proposizione (3.18).

Chiamiamo *tassellamento regolare del piano di Poincaré* un rivestimento del disco in cui le *tessere* (o *tasselli*) sono P -poligoni P -regolari fra loro P -congruenti, e in cui ad ogni vertice si incontra lo stesso numero di P -poligoni. Come nel caso euclideo, indichiamo i tassellamenti regolari del piano di Poincaré con la *notazione di Schläfli* $\{n, k\}$, dove n indica il numero di lati del P -poligono che costituisce il tassello, e k rappresenta il numero di P -poligoni che si incontrano ad ogni vertice.

Per quanto detto finora, si deduce che i tassellamenti nel piano di Poincaré sono costituiti da tessere che, man mano che ci si allontana dal centro del disco e ci si avvicina al bordo, diventano sempre più piccole dal punto di vista euclideo.

Anche per quanto riguarda gli angoli interni di un poligono, la questione cambia rispetto al piano euclideo. In un P -poligono P -regolare infatti, la somma dei P -angoli interni è sempre minore rispetto a quella che caratterizza un poligono regolare euclideo con lo stesso numero di lati. In particolare, la somma dei P -angoli interni di un P -triangolo è sempre minore di due angoli retti. Questo ha importanti conseguenze sulla tassellazione del disco di Poincaré, vediamo di dare un'idea del perché:

Sia $\{n, k\}$ un tassellamento del piano di Poincaré in cui le tessere sono P -poligoni P -regolari di n lati, e in cui ad ogni vertice si incontrano k P -poligoni. Sia ora α il P -angolo interno di un tassello. La somma dei k angoli che si formano presso un vertice è sempre 2π , e poiché ogni tassello è un P -poligono P -regolare (dunque P -equiangolo), si avrà:

$$\alpha \cdot k = 2\pi.$$

Nel piano euclideo, la somma degli angoli interni di un poligono regolare di n lati è $\pi(n - 2)$. Al contrario, nel modello di Poincaré la somma dei P -angoli di interni di un P -poligono P -regolare è minore di $\pi(n - 2)$. Allora si avrà:

$$\frac{\pi(n - 2)}{n} > \alpha,$$

da cui segue:

$$\frac{\pi(n - 2)}{n} \cdot k > \alpha \cdot k = 2\pi,$$

che si può scrivere in questo modo:

$$\frac{\pi n}{2\pi n} - \frac{2\pi}{2\pi n} > \frac{1}{k},$$

da cui:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} > \frac{1}{k},$$

e quindi concludiamo:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}. \tag{5.1}$$

Vi sono infinite coppie $\{n, k\}$ che soddisfano la (5.1). Questo fa pensare che sia possibile costruire un tassellamento del piano di Poincaré con qualsiasi coppia $\{n, k\}$ che rispetti la condizione (5.1), e in effetti questo è vero.

Osserviamo che la stessa procedura nel piano euclideo dà la condizione $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$, che ha solo le soluzioni viste nel capitolo 4.

Un altro aspetto molto importante riguarda le dimensioni che i tasselli possono assumere.

Nel seguito, intenderemo con ($<$) la naturale trasposizione sul piano di Poincaré della relazione ($<$) vista nel piano euclideo per segmenti (Definizione (1.13)) e per angoli (Definizione (1.16)). Inoltre, chiameremo due P -triangoli P -simili se hanno i P -angoli P -congruenti, mutuando il concetto di similitudine in maniera naturale dal piano euclideo.

Osservazione 5.1. Nel piano di Poincaré vale il secondo criterio di congruenza dei triangoli, ovvero se due P -triangoli hanno due P -angoli e il lato fra essi compreso P -congruenti, allora sono P -congruenti.

Questo deriva dalla validità nel modello di Poincaré dell'assioma (ERM) (Proposizione (3.12)) e degli assiomi di congruenza ($C1-6$) (Proposizione (3.13)).

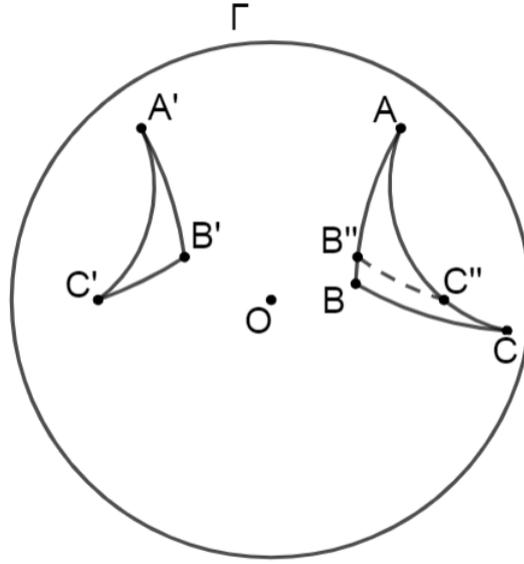
Possiamo ora dimostrare un risultato che si rivelerà molto importante per comprendere i tassellamenti nel modello di Poincaré:

Proposizione 5.2. *Nel piano di Poincaré, se due P -triangoli sono P -simili, allora sono P -congruenti.*

Dimostrazione. Proviamo che negare questa proposizione equivale a negare che la somma degli angoli interni di un P -quadrilatero sia $< 2\pi$, giungendo ad un assurdo. Consideriamo un disco di Poincaré e siano $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ due P -triangoli P -simili ma non P -congruenti. Possiamo supporre, senza perdere di generalità, $A'B' < AB$ e $A'C' < AC$.

Per definizione della relazione ($<$), esisteranno un P -punto B'' su AB e un P -punto C'' su AC tali che $AB'' \cong A'B'$ e $AC'' \cong A'C'$. Osserviamo ora che quando due curve si incontrano nel disco di Poincaré formano P -angoli adiacenti supplementari, poiché i P -angoli sono definiti come gli angoli euclidei che si formano tra le tangenti alle curve (Definizione (3.14)). Quindi i P -angoli $\widehat{AB''C''}$ e $\widehat{BB''C''}$ sono supplementari, così come i P -angoli $\widehat{AC''B''}$ e $\widehat{CC''B''}$.

Consideriamo dunque i P -triangoli $\triangle A'B'C'$ e $\triangle AB''C''$ nella figura:



Essi hanno $A'B' \cong AB''$ e $A'C' \cong AC''$ per costruzione, e $\widehat{B'A'C'} \cong \widehat{C''AB''}$ per ipotesi iniziale. Per la validità dell'assioma (C6) nel modello di Poincaré (Proposizione (3.13)), i due P -triangoli saranno P -congruenti e si avranno $B'C' \cong B''C''$, $\widehat{A'B'C'} \cong \widehat{AB''C''}$ e $\widehat{A'C'B'} \cong \widehat{AC''B''}$.

Ora, per la validità dell'assioma (C5) nel modello di Poincaré (Proposizione (3.13)), avremo $\widehat{AB''C''} \cong \widehat{ABC}$ e $\widehat{AC''B''} \cong \widehat{ACB}$. Dunque il P -quadrilatero $BCC''B''$ contiene P -angoli a due a due supplementari, che sono le coppie $(\widehat{ABC}, \widehat{BB''C''})$ e $(\widehat{ACB}, \widehat{CC''B''})$. Dunque la somma dei P -angoli interni di tale P -quadrilatero è 2π , ma questo è impossibile. \square

La Proposizione (5.2) ha come conseguenza che nel piano di Poincaré due triangoli equilateri qualsiasi sono congruenti. Questo ci permette di evidenziare un'altra differenza tra i tassellamenti euclidei e quelli del piano di Poincaré: mentre nel piano euclideo abbiamo solamente tre possibili scelte per la coppia $\{n, k\}$ ma non vi sono restrizioni sulle dimensioni dei poligoni, nel piano di Poincaré abbiamo infinite possibilità per scegliere la coppia $\{n, k\}$ (purché la condizione (5.1) sia soddisfatta), ma dati n e k abbiamo una

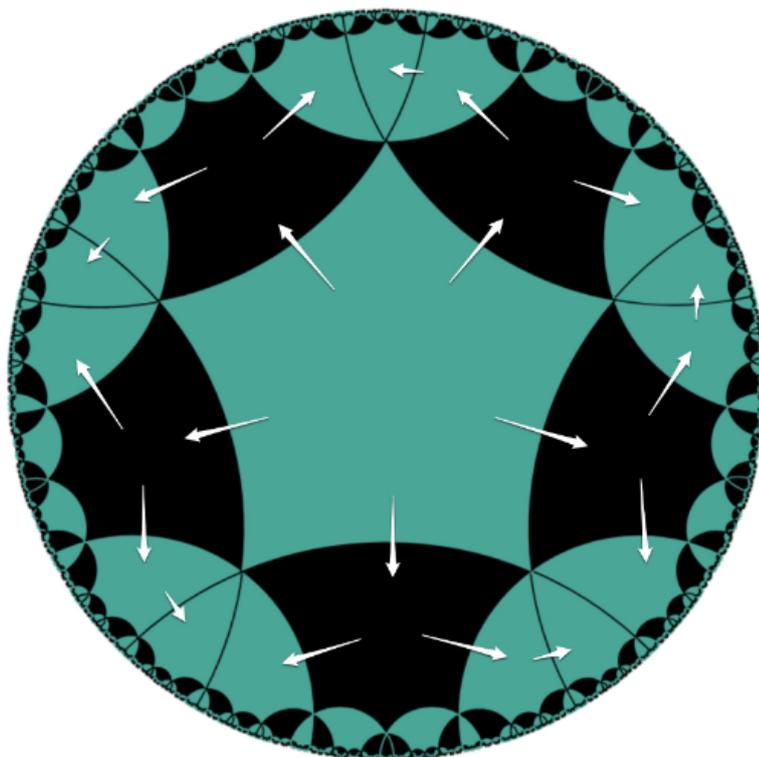
sola possibilità, a meno di rotazioni, per il poligono centrale se lo prendiamo centrato nel centro di Γ .

Precisamente, si può dimostrare ([13]) che dato un rivestimento $\{n, k\}$ del piano di Poincaré con una tessera centrata nell'origine del disco, la distanza euclidea tra il centro del disco e un vertice qualsiasi del poligono che compone la tessera centrale è:

$$d = \sqrt{\frac{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}) - \tan(\frac{\pi}{n})}{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}) + \tan(\frac{\pi}{n})}}, \quad (5.2)$$

determinata in maniera univoca dalla coppia $\{n, k\}$.

Consideriamo, per convenzione, un P -poligono con P -centro coincidente con il centro del disco, e creiamo da esso il tassellamento. Per farlo, P -riflettiamo il P -poligono rispetto alle P -rette su cui giacciono i suoi lati, e continuiamo in questo modo come mostrato in figura dalle frecce bianche.

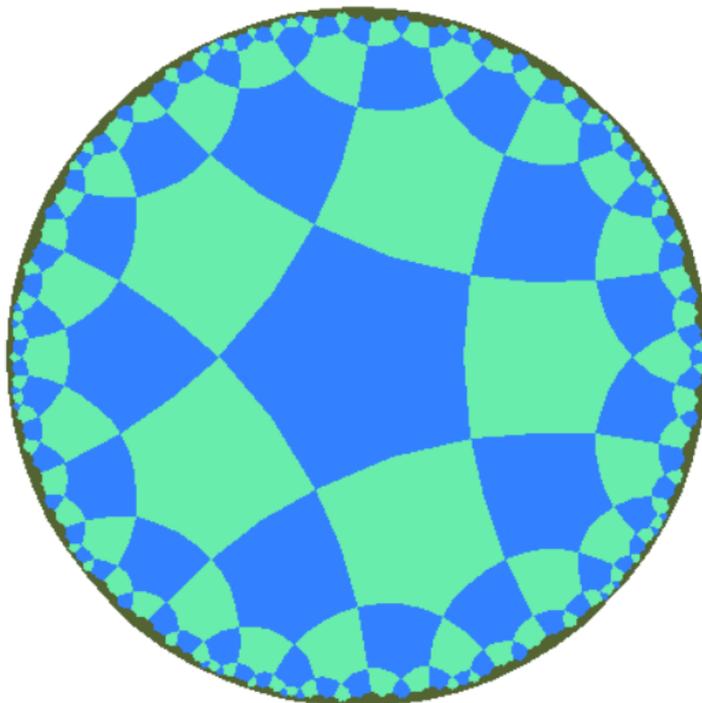


$\{5, 6\}$

L'immagine raffigura un tassellamento $\{5, 6\}$ del piano di Poincaré, in cui dunque ogni

tessera è un P -pentagono e in ogni vertice si incontrano 6 tessere. Nonostante siano molto differenti dal punto di vista euclideo, tutti i P -pentagoni che costituiscono i tasselli sono congruenti secondo la geometria del modello di Poincaré. Questo è l'unico rivestimento $\{5, 6\}$ del piano di Poincaré con una tessera centrata nel centro del disco. Se ne possono creare altri senza imporre quest'ultima condizione (ottenibili dal rivestimento in figura applicando P -movimenti rigidi), ma comunque le tessere non cambieranno dimensione (secondo la geometria del modello).

Per ottenere un tassellamento del disco con P -pentagoni di dimensioni differenti, dobbiamo variare il termine k . La figura successiva mostra un tassellamento $\{5, 4\}$, dove quindi si hanno quattro P -pentagoni che si incontrano in ogni vertice.

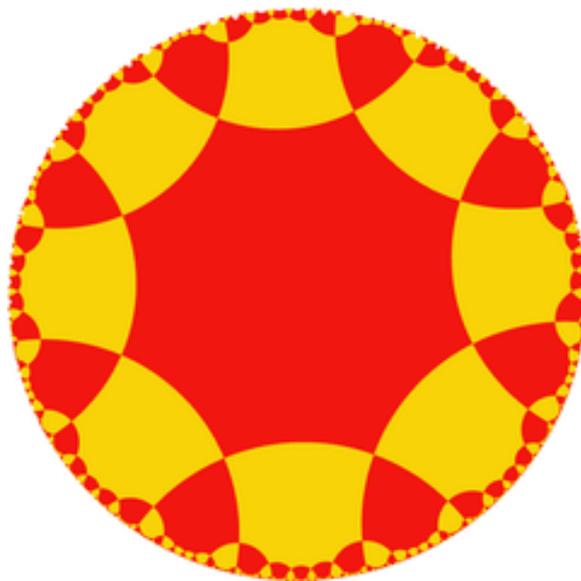


$\{5, 4\}$

Dato un tassellamento regolare $\{n, k\}$, chiamiamo *duale* il tassellamento regolare $\{k, n\}$, unico a meno di P -movimenti rigidi. Ovviamente, un tassellamento $\{n, n\}$ coincide con il suo duale. Nel piano euclideo il tassellamento $\{3, 6\}$ è il duale del tassellamento $\{6, 3\}$, e viceversa, mentre il tassellamento $\{4, 4\}$ è il duale di sé stesso.

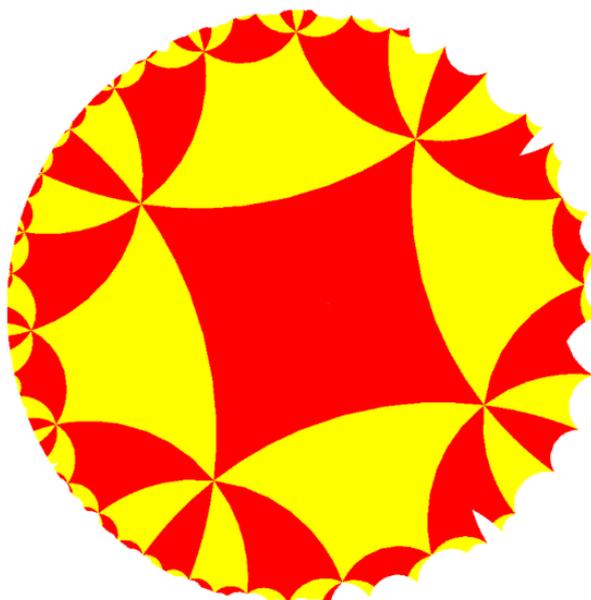
Vediamo un esempio di tassellamenti duali sul piano di Poincaré:

Nella figura seguente è rappresentato il tassellamento $\{8, 4\}$, in cui P -ottagoni P -regolari costituiscono le tessere, con 4 di essi che si incontrano in ogni vertice:



$\{8, 4\}$

Il suo tassellamento duale è $\{4, 8\}$, in cui ogni tessera è un P -quadrilatero P -regolare (dunque un P -quadrato), e tale che in ogni vertice si incontrino otto tessere:

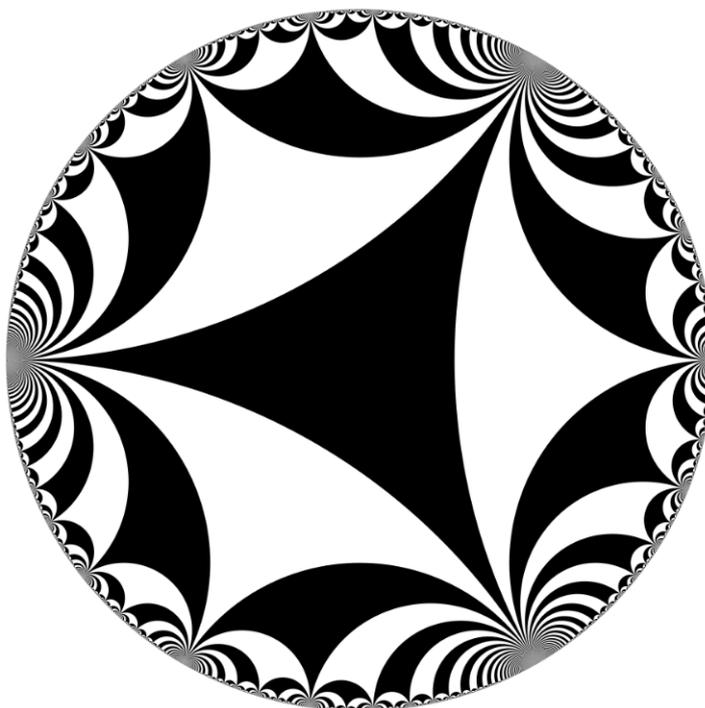


$\{4, 8\}$

Attraverso molti esempi, si può osservare che all'aumentare di k i vertici dei P -poligoni tendono ad allontanarsi dal centro del disco, avvicinandosi al bordo. Dunque sorge spontaneo domandarsi cosa possa succedere nel caso limite.

Un'altra tipologia di tassellamenti regolari del piano di Poincaré è quella dei *tassellamenti di ordine infinito*, che nella notazione di Schläfli si indicano con $\{n, \infty\}$. Il fatto che si abbia $k = \infty$ implica che ad ogni vertice si debbano incontrare infiniti P -poligoni di n lati. Allora i vertici non saranno P -punti, ma si troveranno sul bordo del disco e saranno solamente "vertici ideali" in cui confluiscono infiniti P -poligoni. Vediamone alcuni esempi:

Nella figura seguente è rappresentato il tassellamento $\{3, \infty\}$:



$\{3, \infty\}$

I tasselli di questo rivestimento sono P -triangoli senza vertici. Più precisamente, ogni vertice di un P -triangolo è un punto sul bordo del disco in cui idealmente si incontrano infiniti P -triangoli, creando un effetto suggestivo di continuità e movimento.

Osserviamo infine i tassellamenti $\{4, \infty\}$ e $\{5, \infty\}$. Le colorazioni scelte ne sottolineano l'aspetto simile, ma si può chiaramente osservare che il numero di lati di ogni tassello è quattro nella prima figura e cinque nella seconda. Anche in questi casi, i vertici dei P -poligoni non sono P -punti poiché appartengono al bordo del disco, e rappresentano i punti di ideale incontro di infiniti tasselli.



Sopra il tassellamento $\{4, \infty\}$, sotto il tassellamento $\{5, \infty\}$

I tassellamenti regolari del piano di Poincaré hanno ispirato una serie di litografie dell'artista Maurits Cornelis Escher. Prima di analizzare tali opere, ripercorriamo la vita e la produzione dell'artista olandese, al fine di comprendere il motivo che lo ha portato ad approfondire lo studio del modello di Poincaré.

5.2 La produzione artistica di M.C.Escher

Maurits Cornelis Escher nasce il 17 giugno 1898 a Leeuwarden, nel nord dei Paesi Bassi, ultimo di cinque fratelli in una famiglia di agiata condizione economica. Fin dalla giovane età, manifesta abilità artistiche superiori alla media, nonostante a scuola sia un pessimo allievo. Il padre, ingegnere idraulico, tenta di assecondarne il talento iscrivendolo alla Scuola di Architettura e Arti Decorative di Haarlem, e appare fin da subito evidente che la vocazione del figlio sia rivolta verso le arti grafiche. Nel 1919 Escher incontra il grafico Samuel Jessurun de Mosquita, che lo convince ad iscriversi ai suoi corsi di disegno, una volta ottenuto il consenso del padre. Qui rivela un'inaspettata passione per la xilografia e la litografia, procedimenti di incisione su matrici rispettivamente di legno e di pietra calcarea, che egli impara a padroneggiare in poco tempo.

Le prime opere di Escher vengono realizzate durante un lungo soggiorno in Italia (1923-1935) caratterizzato da numerosi viaggi lungo la penisola. Il tema principale sono i paesaggi del Meridione, in particolare la Calabria, la Sicilia e la costiera amalfitana, che lo affascina per gli elementi romani, greci e saraceni armonicamente mescolati nelle architetture. Proprio ad Amalfi conosce Jetta Umiker, che sposa nel 1924 e con la quale avrà tre figli. La famiglia vive a Roma fino al 1935, quando il clima politico diventa per Escher insopportabile e decide di trasferirsi in Svizzera.

Nel 1937 Escher organizza, pagandolo con circa cinquanta sue opere, un viaggio nel Mediterraneo con sua moglie, che lo porterà a visitare il palazzo dell'Alhambra a Granada. Da questo momento la sua produzione artistica cambierà radicalmente. Egli è infatti colpito dalle decorazioni moresche che ornano pareti e pavimenti del palazzo. I rivestimenti del piano che le caratterizzano sono per Escher una nuova fonte di ispirazione, un nuovo strumento per raggiungere risultati espressivi sensazionali. Ciò che cattura il centro dell'attenzione non sono più i canonici aspetti dell'arte figurativa, ma nuove strutture matematiche, continuità e ricerca dell'infinito.

Così Escher, che nel frattempo si sposta in Belgio per poi fare definitivamente ritorno in Olanda, si cimenta nella realizzazione di decine di lavori basati sui tassellamenti regolari del piano, fra cui le tre opere mostrate nel capitolo precedente. L'estrema regolarità delle sue stampe, dovuta alla ripetizione di tasselli che si completano a vicenda ricoprendo

l'intero piano, crea nello spettatore un effetto armonico, ma allo stesso tempo di smarrimento. Ed è proprio allo smarrimento che l'artista ambisce: l'assenza di riferimenti, la dissolvenza dei contorni. Questa ricerca lo porta a spingersi oltre la divisione del piano, verso geometrie differenti, in cui sia più forte l'effetto dispersivo, in cui non esistano limiti; in particolare, verso geometrie che possano rappresentare l'infinito su una superficie finita. Escher studia così il modello di Poincaré per la geometria iperbolica, nel quale ambienterà una serie di quattro opere denominata *Limite del Cerchio*, che tratteremo nella sezione successiva. Realizza inoltre svariate opere contenenti giochi prospettici che esasperano il rapporto tra spazio e superficie, o in cui spazi diversi coesistono nello stesso tempo e nella stessa raffigurazione, ingannando lo spettatore.

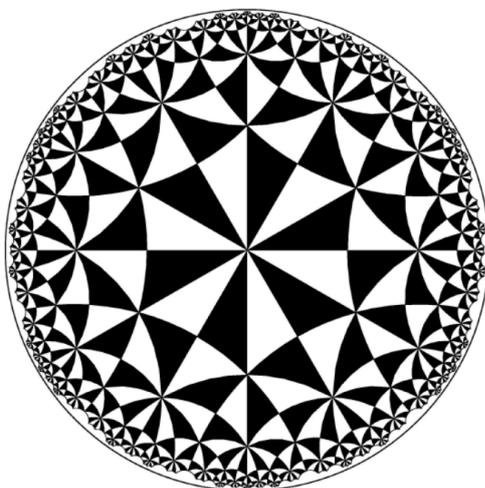
Il suo lavoro inizialmente viene ignorato dalla critica e apprezzato, invece, dalla comunità scientifica, in particolare da matematici, cristallografi e fisici, che vedono le sue stampe come interessanti applicazioni delle conoscenze sulle simmetrie del piano, sulle geometrie non euclidee, sulle strutture dei cristalli e sulla teoria della Relatività. Solo dalla metà degli anni Cinquanta le sue opere iniziano ad essere valutate favorevolmente anche dalla critica, fino a diventare molto popolari, apparendo in due copertine di dischi dei Pink Floyd, in numerosi film, puzzle e capi di abbigliamento. Escher muore a Laren il 27 marzo 1972.

5.3 Limite del Cerchio

Nella produzione artistica di Escher, i tassellamenti del piano euclideo rappresentano certamente un punto focale, una costante, un'ispirazione per decine e decine di lavori svolti nell'arco di trent'anni. Ma, allo stesso tempo, l'ossessione per i rivestimenti del piano euclideo porta Escher all'ossessione per il suo limite: l'infinito. Il problema delle opere basate sui tassellamenti del piano sono i confini della superficie su cui le si realizza. Lo spettatore può facilmente immaginare che il tassellamento sia in grado di rivestire un piano infinito, ma ciò che vede è solamente una porzione di piano, che bruscamente si interrompe per raggiunti limiti della matrice su cui è avvenuta la stampa.

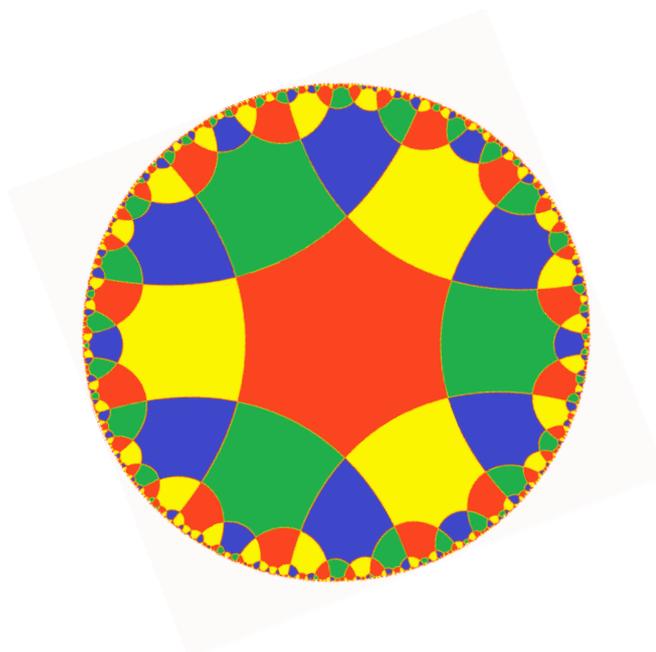
Escher inizia allora la ricerca verso altre geometrie in grado di rappresentare l'infinito su una superficie finita bidimensionale. Il punto di svolta avviene ad Amsterdam nel 1954, in occasione del XII Congresso Internazionale dei Matematici, a cui partecipa il matematico inglese Harold Coxeter. Contemporaneamente si tiene un'importante mostra di opere di Escher allo Stedelijk Museum della città. Coxeter visita l'esibizione e conosce l'artista olandese. Alcuni anni più tardi, Coxeter chiede a Escher il permesso di illustrare alcune sue opere su un manoscritto per la Royal Society canadese. Escher acconsente, e

quando, nel 1958, riceve da Coxeter una copia del lavoro, rimane colpito da un'immagine riguardante il modello di Poincaré per la geometria iperbolica.



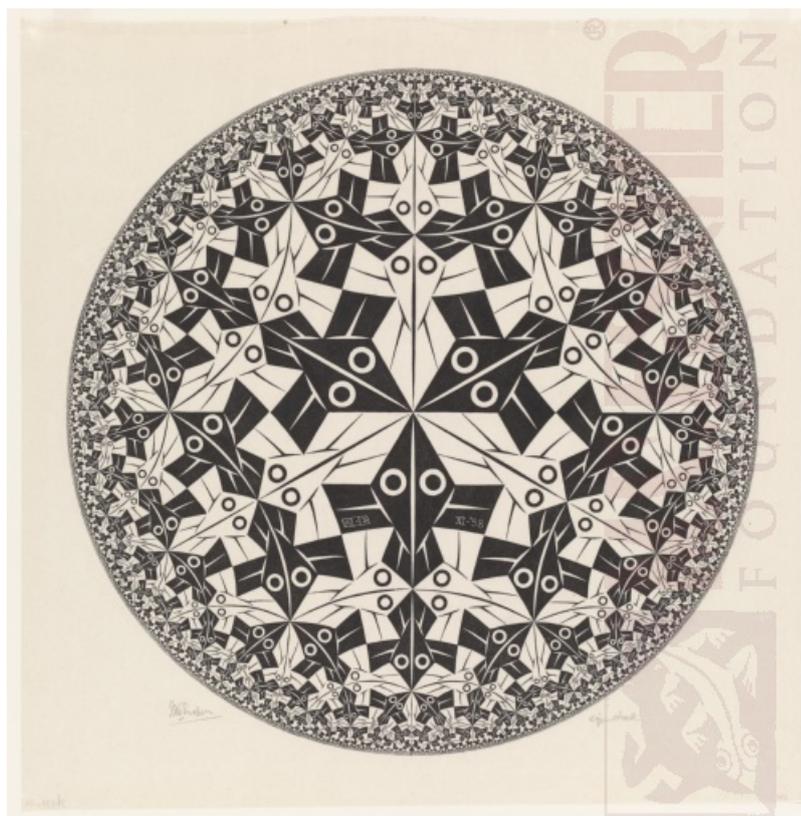
Rivestimento iperbolico di Coxeter

Si tratta di un tassellamento $\{6, 4\}$ del disco di Poincaré, in cui ogni P -esagono che costituisce una tessera è diviso in dodici P -triangoli (non P -equilateri) alternati in bianco e nero. La figura successiva mostra lo stesso ricoprimento, ma privo dei P -triangoli bianchi e neri, in cui le colorazioni differenti delle tessere rendono evidente che in ogni vertice si incontrano quattro P -esagoni regolari.



$\{6, 4\}$

L'artista olandese intuisce immediatamente le nuove possibilità espressive offerte dalla geometria iperbolica. In particolare, il modello di Poincaré permette di rappresentare l'infinito sulla superficie di un disco euclideo, rispondendo all'esigenza di Escher di superare l'ostacolo legato alle rappresentazioni nel piano. Nello stesso anno realizza la sua prima litografia ambientata nel modello di Poincaré, dal titolo *Limite del Cerchio I*:



M.C.Escher - Limite del Cerchio I

All M.C. Escher works © 2021 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

Quest'opera si basa sul tassellamento $\{6, 4\}$, dove i vertici delle tessere P -esagonali sono i punti in cui si incontrano due musi di pesci bianchi e due code di pesci neri (si veda ad esempio [14]). In particolare, una tessera è centrata nel centro del disco. Oppure, si può interpretare questo come un tassellamento duale $\{4, 6\}$: i vertici in cui si incontrano sei tessere P -quadrato sono i punti già considerati come vertici dei P -esagoni e i punti in cui i musi di tre pesci neri e le code di tre pesci bianchi si toccano (si veda [15]); dunque in questo caso il centro è un vertice. Avvicinandosi al bordo, i pesci diventano sempre più piccoli dal punto di vista euclideo, ma non secondo la geometria del disco di Poincaré.

5.3. LIMITE DEL CERCHIO

Non soddisfatto del primo lavoro, Escher realizza una seconda litografia, intitolata *Limite del Cerchio II* (1959):



M.C.Escher - Limite del Cerchio II

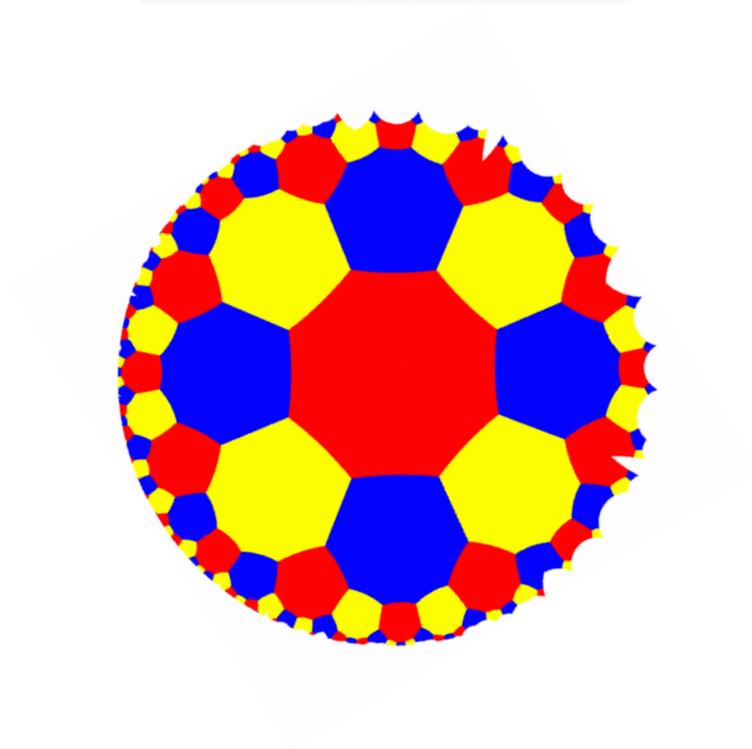
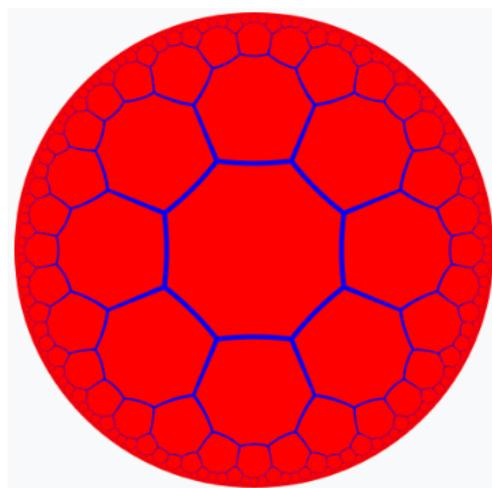
All M.C. Escher works © 2021 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

Il tassellamento caratterizzante quest'opera è $\{8, 3\}$, dunque le sue tessere sono P -ottagoni P -regolari e in ogni vertice tre di essi si incontrano. Ogni tessera è composta da una croce, escluse le quattro "punte" alle estremità e incluse invece quattro punte di un altro colore appartenenti a quattro croci diverse. I punti in cui tre croci si toccano sono i vertici in cui tre tessere P -ottagonali si incontrano. Una tessera, costituita da una croce bianca e nera, ha il centro coincidente con il centro del disco.

Contemporaneamente però, considerando i centri di tutte le croci, e unendoli, si ottiene il duale del tassellamento precedente, ovvero il tassellamento $\{3, 8\}$, con otto P -triangoli P -equilateri che si incontrano ad ogni vertice (il centro del disco in questo caso coincide con un vertice).

Secondo la geometria del modello di Poincaré, le tessere sono tutte congruenti, nonostante, ancora una volta, ciò non sia vero per l'occhio abituato a proporzioni euclidee.

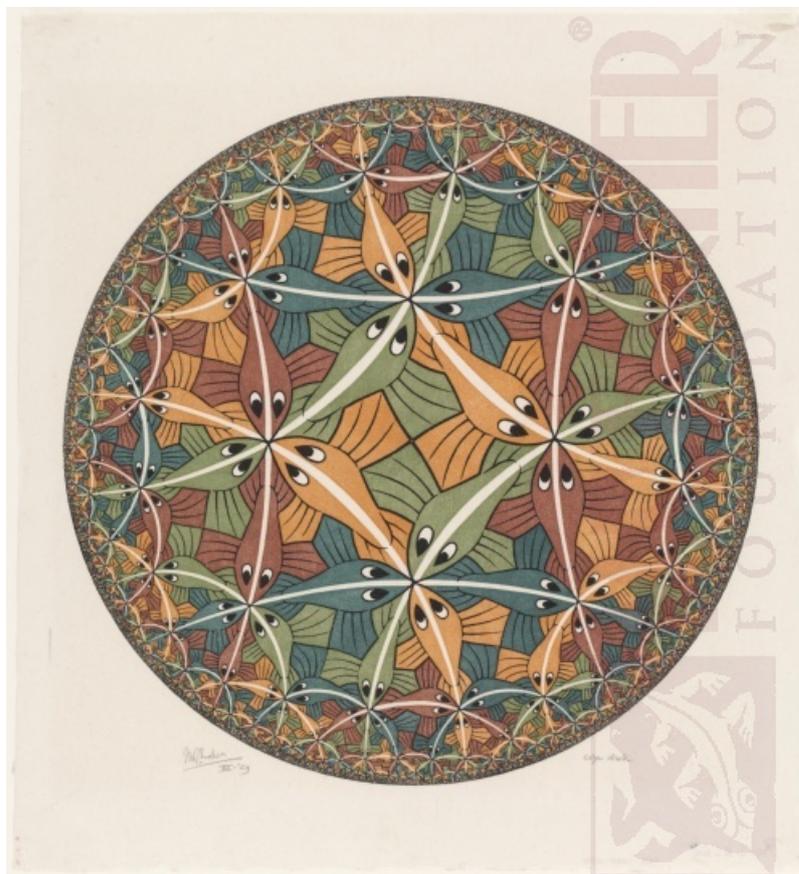
Nella figura seguente è riportato, con due colorazioni differenti, il tassellamento $\{8, 3\}$ che giace sotto l'opera *Limite del Cerchio II*. Nel primo caso le tessere sono tutte P -congruenti e dello stesso colore, dunque il disegno è simmetrico rispetto a rotazioni centrate nel centro del disco di angolo $\theta = \frac{\pi}{4}$ e suoi multipli interi. Nel secondo invece la colorazione segue lo schema dell'opera di Escher; la disposizione dei colori rende questo secondo caso (e dunque anche l'opera *Limite del Cerchio II*) simmetrica attraverso rotazioni centrate nel centro del disco di angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e suoi multipli interi.



Due rappresentazioni del tassellamento $\{8, 3\}$

5.3. LIMITE DEL CERCHIO

La terza opera della serie, realizzata anch'essa nel 1959 e intitolata *Limite del Cerchio III*, è quella di cui Escher rimane maggiormente soddisfatto:



M.C. Escher - Limite del Cerchio III

All M.C. Escher works © 2021 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

Le figure dei pesci sono più realistiche rispetto a quelle di *Limite del Cerchio I*; le loro forme, unite alla presenza di quattro colori oltre al bianco e al nero, rendono una maggiore sensazione di continuità e armonia. Da punti sul bordo del disco appaiono pesci dello stesso colore, che procedono in fila indiana variando le loro dimensioni euclidee (ma non iperboliche) fino a scomparire in altri punti all'infinito sul bordo del disco.

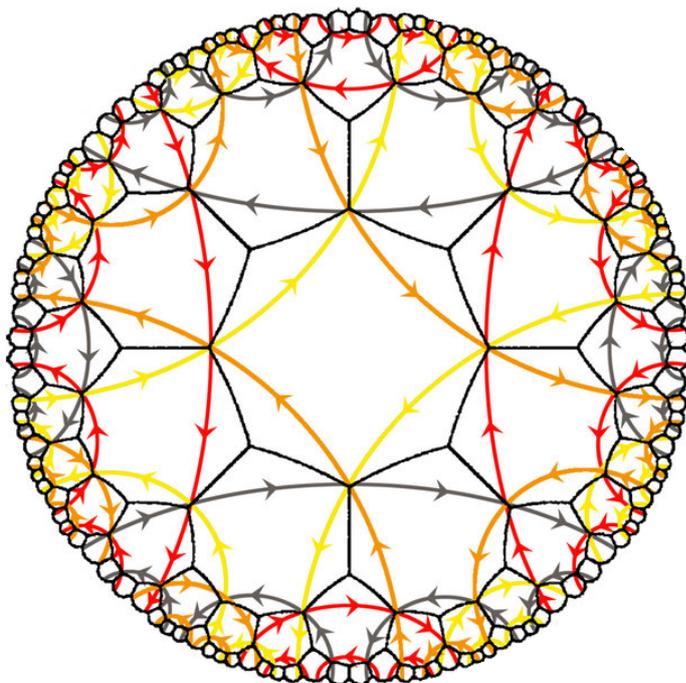
Anche quest'opera, come la precedente, si basa sul tassellamento $\{8,3\}$ del piano di Poincaré. I vertici in cui tre P -ottagoni P -regolari si incontrano sono dati dai punti in cui i musci di tre pesci si toccano e dai punti in cui tre pinne si toccano.

Tuttavia nell'opera si può scorgere anche il tassellamento duale $\{3,8\}$: i punti in cui quattro pinne (di due colori diversi) si toccano, compreso il centro del disco, costituiscono i vertici in cui otto tessere P -triangolari (P -equilatero) si incontrano.

Interessanti sono le linee bianche che percorrono le colonne di pesci dello stesso colore, dividendoli in due parti simmetriche. Esse infatti potrebbero sembrare P -rette ad un primo sguardo, ma non lo sono. Il matematico Coxeter ha fatto notare che esse incontrano il bordo del disco formando un angolo di 80° , dunque non sono P -rette poiché non sono archi di circonferenze perpendicolari al disco. Si tratta invece di quelle che in geometria iperbolica sono chiamate *ipercirconferenze*, ovvero linee equidistanti, secondo la metrica iperbolica, da P -rette.

La figura seguente rappresenta le ipercirconferenze di *Limite del Cerchio III* poste sul tassellamento $\{8, 3\}$ su cui è basata l'opera.

Dal momento che tali linee non sono P -rette, i triangoli e i quadrilateri che sembrano formare tra di loro non sono in realtà P -poligoni, poiché i loro lati non sono P -segmenti.



Van Dusen, Ben & Scannell, BC & Taylor, Richard. (2012). A Fractal Comparison of MC Escher's and H. von Koch's Tessellations.

5.3. LIMITE DEL CERCHIO

Giungiamo ora all'ultima litografia della serie, denominata *Limite del Cerchio IV* o *Paradiso e Inferno* (1960):



M.C.Escher - Limite del Cerchio IV (Paradiso e Inferno)

All M.C. Escher works © 2021 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

In quest'opera le figure di angeli bianchi e demoni neri si completano a vicenda ricoprendo l'intero disco. Alcuni di essi sono raffigurati di spalle; se si trascura questo dettaglio, per la geometria iperbolica gli angeli sono tutti congruenti fra loro, così come i demoni, e la figura risulta simmetrica per rotazioni centrate nel centro del disco di angolo $\theta = \frac{2\pi}{3}$ e suoi multipli interi.

Il tassellamento giacente sotto l'opera è $\{6, 4\}$: i vertici delle tessere P -esagonali sono costituiti dai punti dove quattro ali di angeli e quattro ali di demoni si incontrano. Ogni tessera si può vedere come composta da tre angeli e tre demoni (le figure non sono in realtà del tutto racchiuse all'interno della tessera, ma terminano in tessere adiacenti). In particolare, una tessera ha il centro coincidente con il centro del disco. Considerando però come vertici i punti in cui i piedi di tre angeli e tre demoni si toccano (compreso il centro del disco), è possibile scorgere il tassellamento duale $\{4, 6\}$, con sei P -quadrilateri P -regolari (ovvero P -quadrati) che si incontrano in ogni vertice.

Durante la realizzazione della serie *Limite del Cerchio*, Escher si tiene costantemente in contatto con Coxeter, al quale invia i lavori svolti e chiede consigli per realizzare i successivi. D'altra parte però, anche il lavoro di Coxeter beneficia delle opere di Escher: esse rappresentano infatti applicazioni straordinarie della teoria sui tassellamenti del piano di Poincaré, oggetto di studio da parte del matematico inglese. Coxeter stesso ha affermato che attraverso le opere di Escher ha acquisito maggiore consapevolezza delle leggi che regolano il disco iperbolico. I due studiosi continuano il loro rapporto di corrispondenza fino alla morte di Escher.

Un aspetto strabiliante è il fatto che Escher abbia realizzato i suoi lavori solamente utilizzando l'arte del disegno e dell'incisione. All'epoca non esistevano computer in grado di riprodurre queste opere, e sorge spontaneo chiedersi come il suo lavoro sarebbe stato influenzato se avesse potuto utilizzare i mezzi di cui disponiamo oggi.

Riguardo l'opera *Limite del Cerchio III*, Escher scrive a suo figlio Arthur nel 1960: "Ho lavorato terribilmente duro per finire questa litografia, e poi con i denti stretti ho passato altri quattro giorni per realizzare stampe estremamente complesse di questo limite del cerchio a colori. Ogni stampa è una serie di venti stampe: cinque colori, ognuno quattro volte. Tutto questo con la straordinaria sensazione che questo lavoro è una pietra miliare nello sviluppo della mia arte, e che nessuno, eccetto me stesso, se ne accorgerà mai."

Fortunatamente Escher si sbagliava. Dopo alcuni decenni le sue opere sono diventate molto popolari e molto studiate, ispirando alcuni progetti interessanti. Uno di questi è il sito *Mathematical Imagery* dell'ingegnere belga Jos Leys ([11]). Egli, appassionato della matematica e dei suoi punti di incontro con l'arte figurativa, dedica una pagina del sito ai tassellamenti del piano di Poincaré utilizzando opere euclidee di Escher. Ciò che ha compiuto è stato prendere alcuni tassellamenti che Escher aveva svolto sul piano euclideo e, con l'aiuto di un computer, trasformarli sul piano di Poincaré.

Nelle prossime pagine riprenderemo le tre opere di Escher sul piano euclideo già analizzate nel capitolo 4, e le confronteremo con il tassellamento effettuato da Jos Leys sul piano di Poincaré.

Un'importante osservazione riguarda il fatto che, per quanto detto, un tassellamento $\{n, k\}$ del piano euclideo non può essere direttamente applicato sul piano di Poincaré, dato che nel piano euclideo deve valere $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$, mentre sul piano di Poincaré deve valere $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$. Quindi per trasportare un tassellamento euclideo nel disco iperbolico è necessario aumentare il numero di tessere che devono incontrarsi in ogni vertice. Tenendo fisso n , qualsiasi $k \in \mathbb{N}$ che sia maggiore del valore assunto nel tassellamento euclideo risponde a questa esigenza. Ogni trasposizione effettuata da Jos Leys rappresenta dunque una tra infinite possibili scelte del tassellamento da adottare.

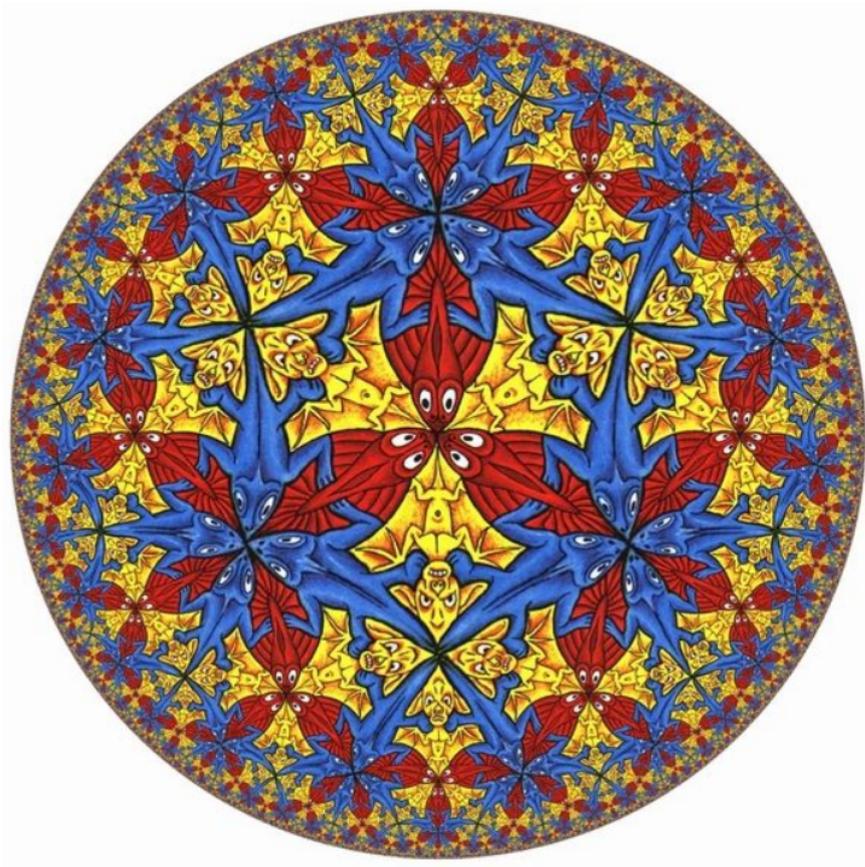
5.3. LIMITE DEL CERCHIO

L'opera *E85* presenta un tassellamento $\{3, 6\}$, o $\{6, 3\}$, del piano euclideo.

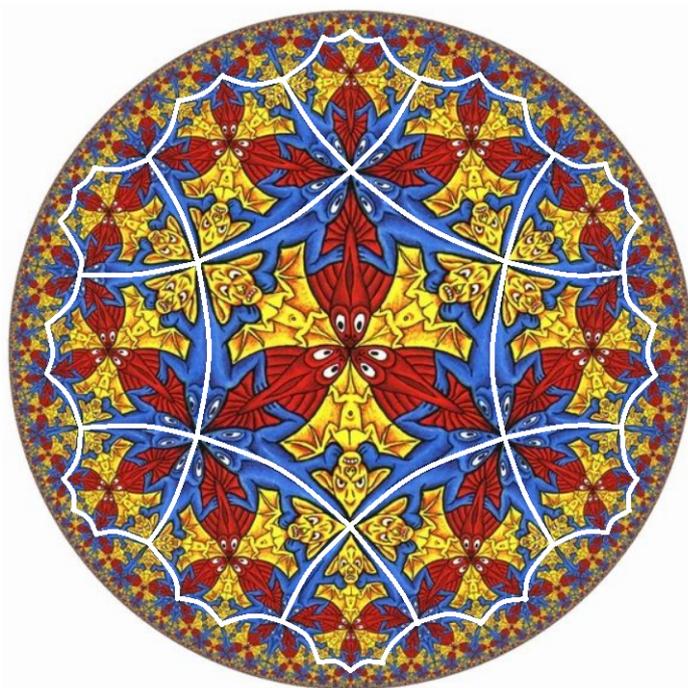


All M.C. Escher works © 2021 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

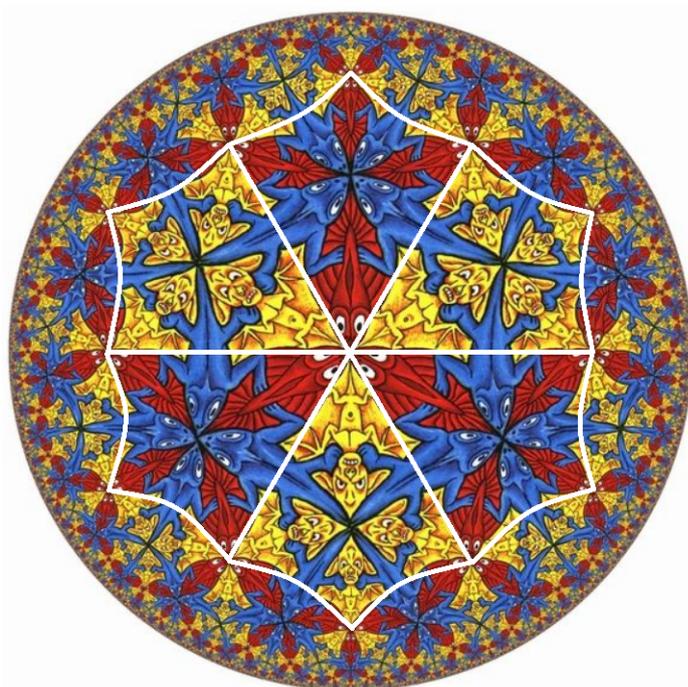
Così appare invece sul piano di Poincaré, con un tassellamento $\{6, 4\}$: i punti in cui quattro lucertole blu si incontrano sono i vertici in comune a quattro tessere P -esagonali.



La seguente rappresentazione qualitativa mostra alcune tessere che compongono il tassellamento $\{6, 4\}$ su cui si basa l'opera.



È anche possibile scorgere il tassellamento duale $\{4, 6\}$ (figura seguente): i vertici in comune a sei tessere P-quadrate sono i punti in cui tre musci di pesci rossi si incontrano.



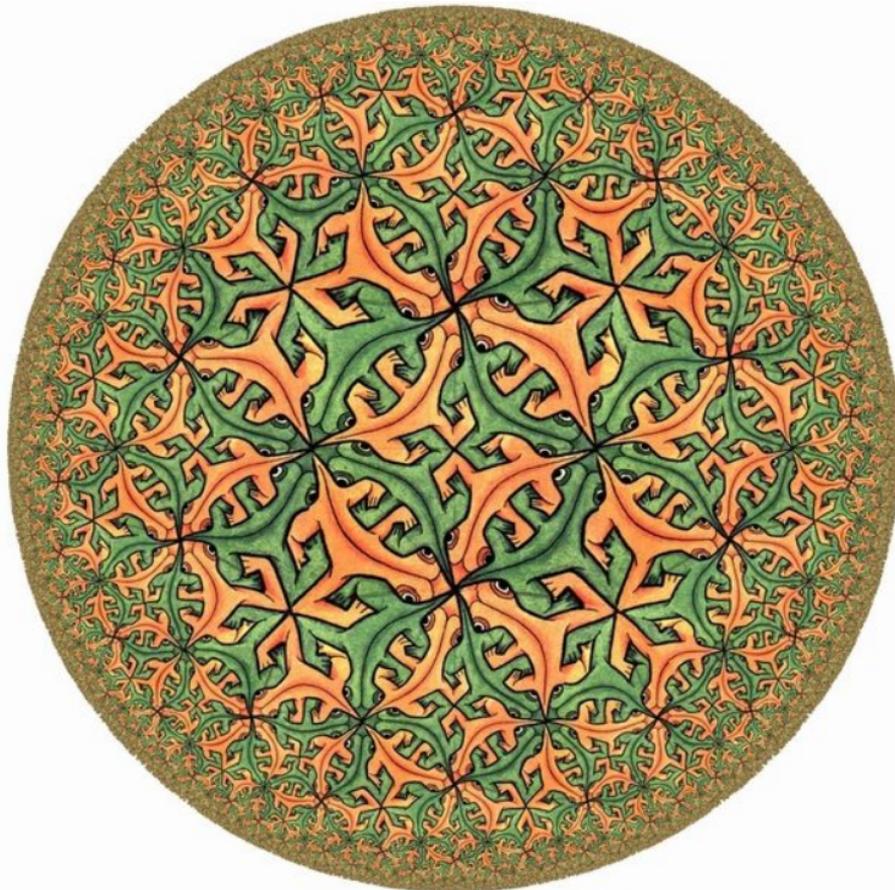
5.3. LIMITE DEL CERCHIO

L'opera *E35* è caratterizzata da un tassellamento $\{4, 4\}$ del piano euclideo.

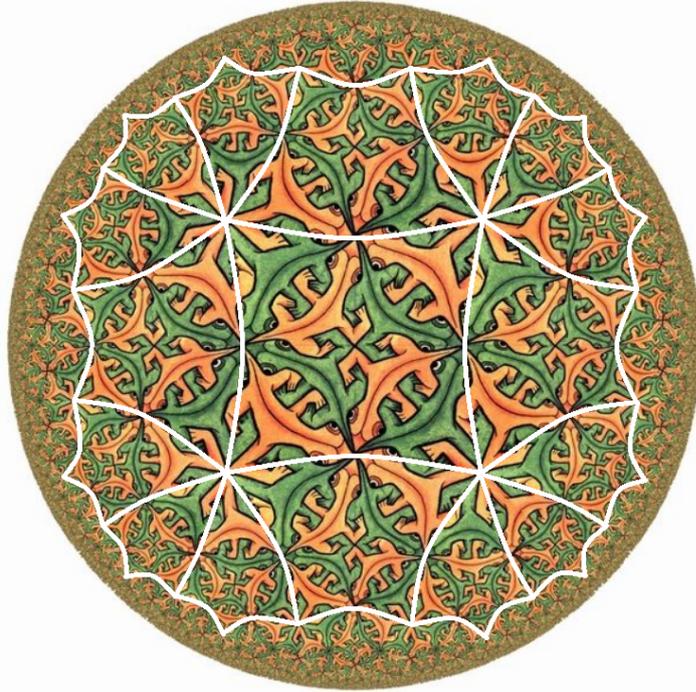


All M.C. Escher works © 2021 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

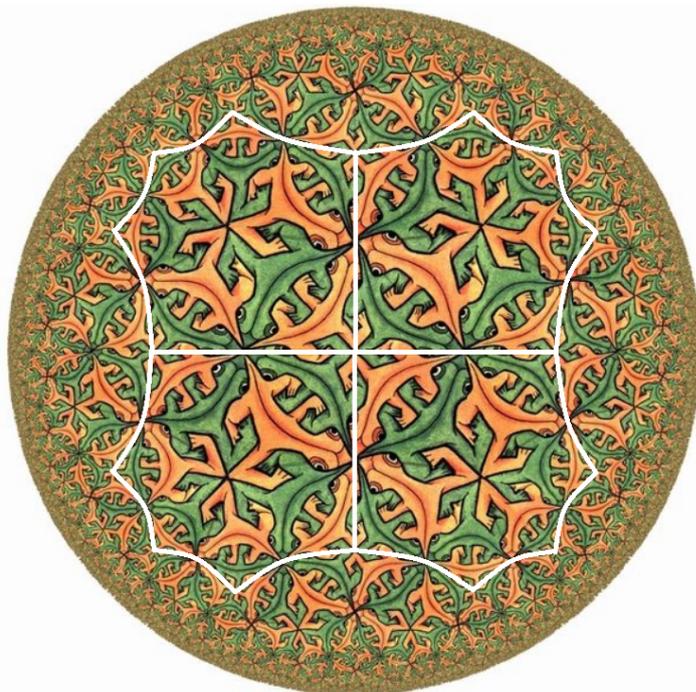
Osserviamo ora la sua trasposizione sul piano di Poincaré, con un tassellamento $\{4, 6\}$: i punti in cui le zampe di tre gechi marroni (e le zampe di tre gechi verdi) si incontrano rappresentano i vertici in cui sei tessere P -quadrate si toccano.



La figura seguente mostra il tassellamento $\{4, 6\}$ giacente sotto il disegno.



Oppure, si può interpretare l'opera come fondata sul tassellamento duale $\{6, 4\}$: i vertici in comune a quattro tessere P-esagonali sono i punti in cui le zampe di due gechi marroni (e le zampe di due gechi verdi) si incontrano.



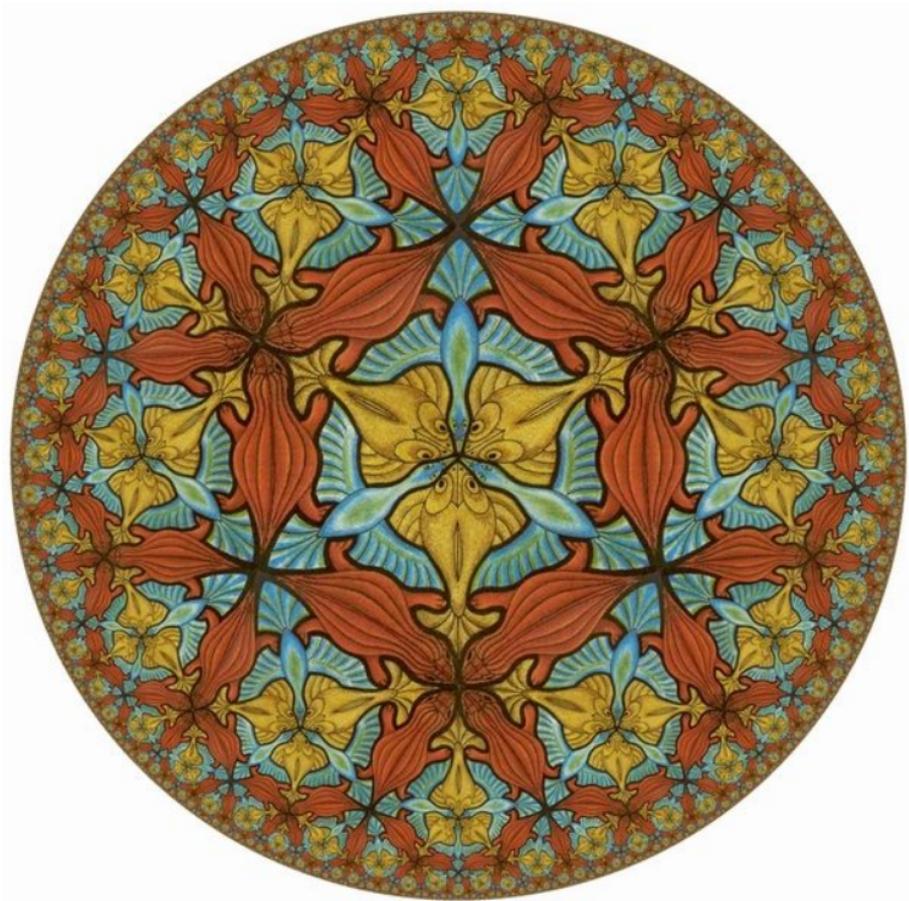
5.3. LIMITE DEL CERCHIO

L'opera *E69* si fonda su un tassellamento $\{6, 3\}$, o $\{3, 6\}$, del piano euclideo.

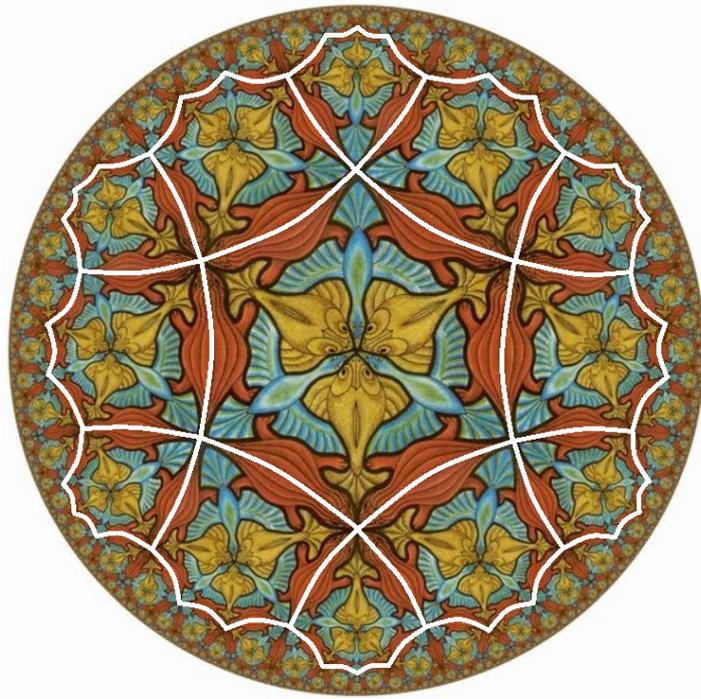


All M.C. Escher works © 2021 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

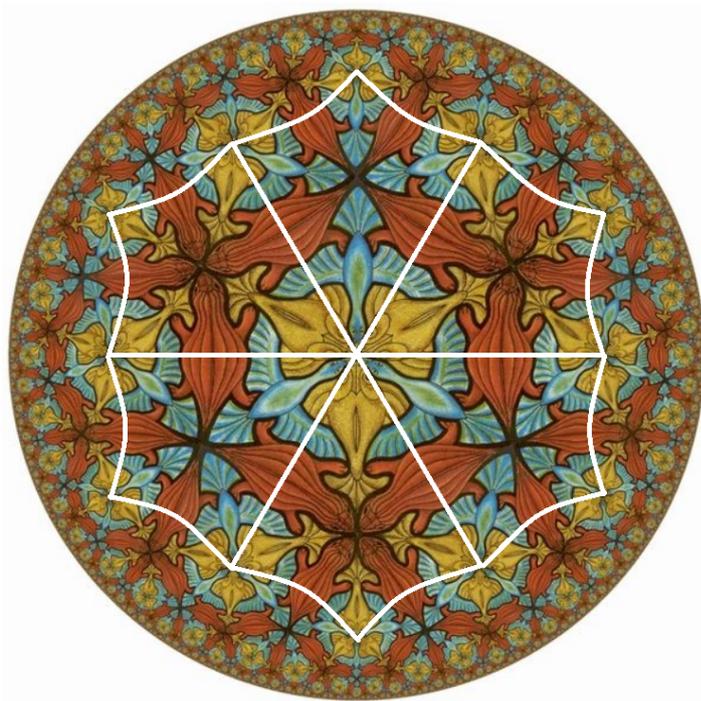
Ecco invece la sua trasposizione sul piano di Poincaré, con un tassellamento $\{6, 4\}$: i punti di incontro fra quattro tartarughe sono i vertici comuni a sei tessere P -esagonali.



La figura seguente rappresenta in modo qualitativo il tassellamento $\{6, 4\}$ sul quale si fonda l'opera.

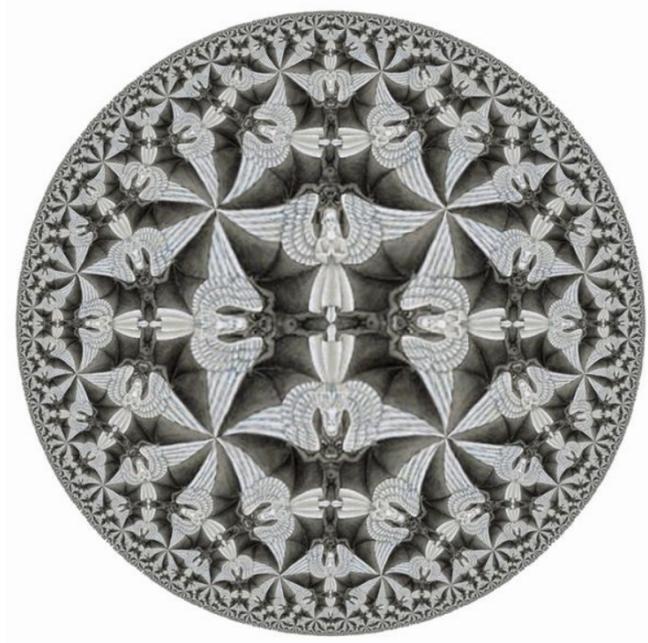


Anche in questo caso si può scorgere il tassellamento duale $\{4, 6\}$: i punti in cui tre pesci gialli e tre anatre azzurre si incontrano sono i vertici delle tessere P-quadrate.



5.3. LIMITE DEL CERCHIO

Riportiamo infine altri lavori dell'interessante galleria di Jos Leys, ciascuno dei quali è tratto da un tassellamento che M.C.Escher ha svolto sul piano euclideo.



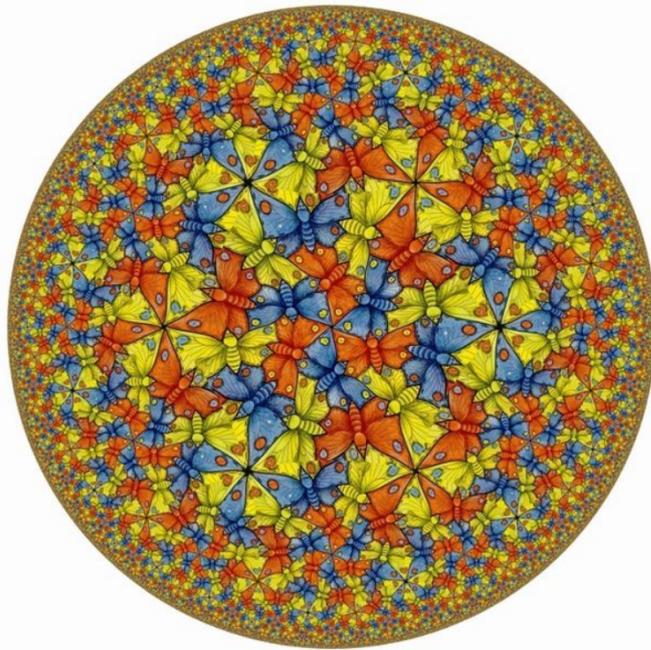
Tratta da M.C.Escher - E45



Tratta da M.C.Escher - E67



Tratta da M.C.Escher - E57



Tratta da M.C.Escher - E70

5.3. LIMITE DEL CERCHIO

Bibliografia

- [1] Robin Hartshorne: *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer (2000).
- [2] David Hilbert: *Fondamenti della Geometria*. Feltrinelli (1970).
- [3] Euclide: *Gli Elementi*. A cura di Attilio Frajese, Lamberto Maccioni. UTET (1970).
- [4] Carl Benjamin Boyer: *Storia della Matematica*. Mondadori (1990).
- [5] Mark Anthony Armstrong: *Groups and Symmetry*. Springer (1988).
- [6] Edoardo Sernesi: *Geometria 1*. Bollati Boringhieri (1989).
- [7] Monica Idà: Appunti del corso di *Elementi di Geometria da un punto di vista superiore* (2019-2020).
- [8] Monica Idà: Appunti del corso di *Geometria 1* (2014-2015).
- [9] Salvatore Coen, Maria Giulia Lugaresi: Appunti del corso di *Storia della Matematica* (2019-2020).
- [10] <https://mcescher.com/>
- [11] <http://www.josleys.com/galleries.php>
- [12] <https://brewminate.com/escher-and-coxeter-a-mathematical-conversation/>
- [13] <http://www.malinc.se/noneuclidean/en/poincaretiling.php>
- [14] <https://www.d.umn.edu/ddunham/isis4/index.html>
- [15] <https://joshtaylor361.medium.com/tesselations-of-the-hyperbolic-plane-and-the-art-of-m-c-escher-8bde89d77c70>
- [16] <http://pi.math.cornell.edu/mec/Winter2009/Mihai/index.html>

BIBLIOGRAFIA

Ringraziamenti

Desidero ringraziare la Professoressa Monica Idà per avermi seguito con grande disponibilità durante la realizzazione della tesi.

Ringrazio inoltre la mia famiglia e chi mi è stato sempre vicino, gli amici e i compagni di studio.