Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Le geometrie non euclidee e la quarta dimensione: la loro influenza sul movimento cubista. Un approccio storico e didattico.

Tesi di Laurea in Storia e Didattica della Matematica

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
SILVIA BENVENUTI

Presentata da:
SOFIA RICCI

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione

Non capita spesso che le teorie matematiche trascendano l'ambito puramente scientifico e si addentrino nelle altre manifestazioni culturali e nella società in generale, e quando succede si tratta di solito di timide incursioni. Ciononostante, tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX furono proprio due teorie matematiche, le geometrie non euclidee e la geometria delle dimensioni superiori dello spazio, ad interessare il grande pubblico. La società fu affascinata dalla possibile esistenza di dimensioni superiori dello spazio, in particolare dalla "quarta dimensione", e dalla possibilità che lo spazio oltre le nostre immediate percezioni potesse non essere regolato dalla geometria di Euclide, ma magari da geometrie alternative, come quelle non euclidee.

Le "nuove geometrie" ebbero un fascino senza precedenti soprattutto per gli artisti del primo Novecento, rappresentando un simbolo di liberazione dalla tirannia della tradizione. Il Cubismo fu il movimento artistico maggiormente influenzato dalle nuove geometrie. I cubisti, nello specifico gli artisti del *Gruppo di Puteaux*, percepivano la loro vicenda artistica come parallela a quella dei geometri non euclidei, dove la prospettiva rinascimentale e la tradizione figurativa classica erano accostate alla matematica euclidea, mentre l'arte cubista era accomunata alla geometria non euclidea, in quanto rappresentante di nuove convenzioni, legittime quanto le precedenti; allo stesso tempo la credenza in una quarta dimensione li incoraggiava ad allontanarsi dalla "realtà visiva" e a rifiutare il sistema prospettico che da secoli aveva rappresentato il mondo come tridimensionale.

Il presente elaborato intende mostrare l'influenza che le nuove geometrie hanno avuto sulla teoria e sulla pratica cubista.

Nel primo capitolo vengono ripercorse le principali tappe della nascita delle geometrie non euclidee, si evidenzia l'importanza che queste teorie hanno avuto nella storia della matematica e le difficoltà incontrate nell'essere accettate dal mondo matematico e scientifico.

Nel secondo capitolo si evidenzia la grande popolarità raggiunta ad inizio Novecento dalla nozione di quarta dimensione e vengono illustrati i principali tentativi compiuti durante la seconda metà dell'Ottocento per visualizzare i politopi regolari quadridimensionali.

Nel terzo capitolo viene documentata l'influenza che le geometrie non euclidee e la nozione di quarta dimensione hanno avuto sul movimento cubista, nello specifico si pone l'attenzione su quegli artisti che hanno lasciato testimonianze dirette del loro interesse per i concetti spaziali collegati alle nuove geometrie. Inoltre, viene presentata la critica, mossa dalla storiografa Linda Dalrymple Henderson, agli storici dell'arte che fino agli anni '70 trascurarono i riferimenti alle nuove geometrie negli scritti e nelle opere degli artisti cubisti, vedendo ingenuamente nella quarta dimensione cubista un riferimento alla *Teoria della Relatività* di Einstein.

Nel quarto capitolo viene presentata una proposta di attività laboratoriale, dal titolo "Il Cubismo e la quarta dimensione", che prende spunto da alcuni degli argomenti affrontati in Capitolo 3. Scopo del capitolo e della proposta laboratoriale è quello di dimostrare la valenza didattica e culturale dell'inusuale accostamento matematica/arte.

Capitolo 1

La crisi dell'universo euclideo

Ai suoi esordi, la *geo-metria* era la scienza della misura della terra; fu solo con i Greci che ebbe inizio il processo di astrazione che ha fatto della geometria una disciplina teorica, astratta, rigorosa. Un contributo notevole in questo senso è rappresentato da Euclide e la sua opera *Gli Elementi*, pietra angolare di tutta la matematica successiva e un paradigma di rigore dimostrativo. Per secoli la geometria è rimasta comunque solidamente legata alla sua radice sperimentale, cioè all'esperienza dello spazio fisico.

Le teorie che avrebbero rivoluzionato la natura della geometria si svilupparono nel corso del XIX secolo, grazie a matematici quali Carl Friedrich Gauss, János Bolyai, Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, Bernhard Riemann, Eugenio Beltrami, Felix Klein, Henri Poincaré, e partirono dalla negazione del famoso quinto postulato di Euclide: per questo motivo saranno definite "non euclidee". Da quel momento in poi la geometria non sarà più una teoria dello spazio fisico, ma inizierà ad affermarsi l'idea che gli spazi della geometria possono essere creati dalla mente e immaginati in forme diverse da quelle fissate dalla geometria euclidea. La rivoluzione non euclidea è stata quindi una vera e propria rivoluzione di pensiero e segna la data d'inizio di una buona parte del pensiero matematico moderno.

In questo primo capitolo vengono ripercorse le principali tappe della nascita delle geometrie non euclidee, si evidenzia l'importanza che queste teorie hanno avuto nella storia della matematica e le difficoltà incontrate nell'essere accettate dal mondo matematico e scientifico.

Per i riferimenti bibliografici si rimanda a *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria* [1], *Geometrie non euclidee* [5] e *Immagini di storia della geometria* [39].

1.1 La nascita delle geometrie non euclidee

1.1.1 Gli *Elementi* di Euclide e il problema del V postulato

Intorno al 300 a.C. il matematico greco **Euclide** scrisse gli *Elementi*, un resoconto sistematico della geometria e della teoria dei numeri del suo tempo. Gli *Elementi* costituiscono il primo vero e proprio trattato di matematica che ci sia pervenuto e, al tempo stesso, hanno rappresentato il più autorevole testo di aritmetica e geometria della storia. Il grande contributo di Euclide consiste nell'aver raccolto la conoscenza geometrica del suo tempo e averla organizzata in un quadro logico coerente, dove ogni risultato può essere dedotto da quelli che lo precedono, a partire da un piccolo numero di assiomi considerati evidenti; per questo motivo rappresenta il primo esempio di modello assiomatico e nei secoli ha avuto un'influenza come modello di pensiero scientifico che si estende molto oltre la geometria. Si pensi, solo per dare degli esempi, all'*Ethica more geometrico demonstrata* (1677) di Spinoza, a *The Axiomatic Method in Biology* (1939) di Woodger o a *Principles of Behaviour* (1943) di Clark Hull (in psicologia).

L'opera è costituita di 13 libri: i primi sei riguardanti la geometria piana, i successivi tre la teoria dei numeri, il decimo le grandezze incommensurabili e gli ultimi tre la geometria solida.

All'inizio del I libro troviamo enunciati tre gruppi di proposizioni, le quali introducono i *termini*, i *postulati* e le *nozioni comuni*. L'elencazione dei termini si presenta come una serie di definizioni dei concetti geometrici fondamentali. Riportiamo, a mo' di esempio, le definizioni di alcuni di questi termini:

punto è ciò che non ha parti;

linea è lunghezza senza larghezza;

linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa;
superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza;
angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta;
parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.
Riportiamo ora i cinque postulati:

I Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;

II E che una retta terminata (finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;

III E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;

IV E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

V E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno a incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (la cui somma è minore di due retti).

Le nozioni comuni sono le seguenti:
Cose che sono uguali a una stessa sono uguali anche fra loro;
E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali;
E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali;
E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali;
E doppi di una stessa cosa sono uguali tra loro;
E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro;
E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali;
E il tutto è maggiore della parte.

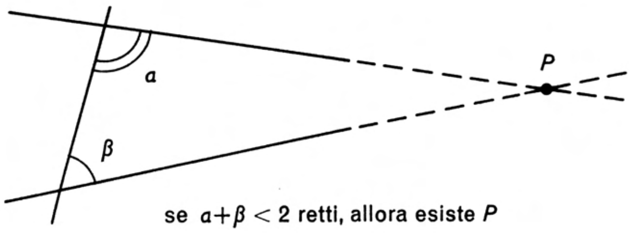
I termini non vanno intesi come definizioni in senso moderno, ma piuttosto come una nomenclatura. Euclide infatti si rivolge alla sua comunità culturale e dà per scontato che il lettore già possegga, almeno a livello intuitivo, i concetti di punto, retta e piano; e si limita a dar loro un nome. In altre parole, ricorda a chi legge come si chiamano quei dati oggetti già presenti nella sua intuizione e di cui ha già fatto esperienza. La matematica greca non è ancora arrivata ad un pieno grado di astrazione e il mondo della realtà sensibile mantiene ancora un ruolo non trascurabile [11].

Postulati e nozioni comuni sono proposizioni che vengono aprioristicamente assunte per vere e costituiscono il tassello iniziale nel processo di costruzione logica della geometria. I postulati hanno un carattere strettamente geometrico, in quanto in essi entrano proprio i concetti geometrici primitivi, mentre le nozioni comuni esprimono proprietà molto generali della relazione di identità (uguaglianza) o della relazione di ordine. Anche in questo caso postulati e nozioni comuni vanno intesi come una conseguenza della loro auto-evidenza e rimarcano l'immagine di geometria come rappresentazione del mondo reale [11].

Quindi, in accordo con quello che oggi definiamo metodo assiomatico, Euclide parte da questo piccolo numero di postulati e di nozioni comuni e da essi deduce tutti i successivi risultati (le proposizioni), raccolti nei vari libri degli Elementi, attraverso ragionamenti puramente logici. In realtà, come ci fa notare Robin Hartshorne in *Geometry: Euclid and Beyond* [27], Euclide non aderisce strettamente al metodo assiomatico, ma in alcuni passi ricorre a deduzioni che, benché si basino su ipotesi che sembrano evidenti, non possono fondarsi sulla base dei postulati e delle nozioni comuni a disposizione.

Si tratta di questioni di cui si occuparono matematici di tutti i tempi. I fondamenti logici della geometria furono ampiamente studiati alla fine del XIX secolo, ricordiamo in particolare il contributo di **David Hilbert** (1862-1943), che nella sua opera *Grundlagen der Geometrie*, ovvero i "Fondamenti della Geometria", introduce un insieme formale composto di 20 assiomi che sostituiscono gli assiomi di Euclide e che ne evitano le contraddizioni derivanti. Il suo obiettivo era quello di fornire un rigore e un formalismo assiomatico (confrontabili con quelli dell'algebra e dell'analisi matematica) anche alla geometria.

La questione che è stata oggetto di discussione per millenni riguarda il quinto postulato. Esso dà una condizione sufficiente affinché due rette non siano parallele e pertanto è passato alla storia come "postulato delle parallele"[1].



Mentre non è possibile avanzare dubbi sull'evidenza dei primi quattro postulati, altrettanto non può dirsi del quinto, meno accessibile all'esperienza relativa allo spazio fisico reale. Non è facile, in effetti, accettarlo come verità evidente: in alcuni casi infatti il punto di intersezione va immaginato talmente lontano da andare al di là di qualunque esperienza fisica diretta. Sembra che allo stesso Euclide il quinto postulato suscitasse delle perplessità circa la sua evidenza, tanto che nella dimostrazione delle prime ventotto proposizioni non se ne servì assolutamente. Inoltre una delle sue particolarità risiede proprio nella sua formulazione: essa ricorda molto più quella di un teorema che non di un assioma.

Dubbi sull'evidenza di questo postulato furono avanzati già dai primi commentatori dell'opera euclidea, e per oltre duemila anni i matematici cercarono invano di dimostrarne la validità a partire dagli altri postulati e assiomi [43]. Le loro dimostrazioni chiamavano tacitamente in causa enunciati che erano in realtà equivalenti al postulato da dimostrare (e quindi equivalenti tra loro), come per esempio, i seguenti più famosi:

- Formulazione di Playfair (sull'unicità della parallela):
  Dati nel piano un punto e una retta esterna a esso, per il punto passa al più una retta parallela a quella data.

[1] Il nome "postulato delle parallele" si deve alla Formulazione di Playfair, che è la versione più famosa del quinto postulato.

- Postulato sugli angoli di un triangolo:
  La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti (180°).

- Formulazione di Wallis (sulla similitudine):
  Dato un qualsiasi triangolo se ne può costruire un altro a esso simile (cioè con gli stessi angoli) di lato assegnato.

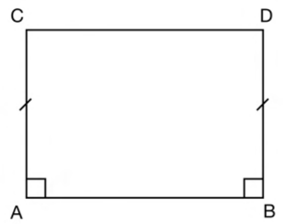
- Formulazione di Posidonio (sull'equidistanza, II secolo a.C.):
  Il luogo dei punti del piano equidistanti da una retta è una retta.

- Teorema di Pitagora:
  In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa ha area uguale alla somma delle aree dei due quadrati costruiti sui cateti.

- Postulato dell'obliqua:
  Una perpendicolare e un'obliqua a una stessa retta si incontrano dalla parte in cui l'obliqua forma con la retta un angolo acuto.

In epoca moderna, particolarmente interessante è stato il tentativo di dimostrazione del padre gesuita **Girolamo Saccheri** (1667-1733), matematico, filosofo e teologo. Nella sua opera più importante *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclide liberato da ogni neo) Saccheri si proponeva di liberare gli Elementi dal loro "neo" principale: il quinto postulato. Egli non cercò di sostituire il postulato con un enunciato simile, ma seguì un procedimento logico diverso dagli altri: assumendo per ipotesi che la proposizione che si vuole dimostrare sia falsa, si giunge alla conclusione che è vera. Nel caso del quinto postulato, supponendo veri tutti i postulati dal primo al quarto e la negazione del quinto, egli era sicuro di pervenire ad un assurdo. La contraddizione trovata deriverebbe dalla negazione della verità del quinto postulato, che risulterebbe quindi vero e dimostrato a partire dagli altri postulati e assiomi. Si tratta di una forma particolare di dimostrazione per assurdo e si basa sul principio logico detto *consequentia mirabilis* (o "costruire dal nulla"). Saccheri fu spinto dalla convinzione che la falsità si possa sempre scoprire mediante l'esibizione di una contraddizione; questa idea è interessante poiché, per la prima volta, la verità matematica viene fatta coincidere con la non contraddittorietà.

Al quinto postulato è dedicato il I libro dell'opera. Saccheri parte dalla considerazione di un *quadrilatero birettangolo isoscele*: un quadrilatero che si ottiene innalzando sopra una base AB due segmenti uguali AC e BD (isoscele) a essa perpendicolari (birettangolo) e unendo C con D.



Gli angoli in C e D sono uguali (la dimostrazione di ottiene facilmente considerando prima i triangoli uguali CAB e DAB e poi i triangoli uguali ACD e BDC) quindi possono essere entrambi acuti, entrambi retti o entrambi ottusi. Inoltre, Saccheri dimostra che se in un quadrilatero birettangolo isoscele gli angoli in C e D sono acuti, retti, ottusi, lo stesso avviene in ogni altro quadrilatero birettangolo isoscele. I tre casi sono quindi esaustivi e disgiunti e può valere uno solo di essi; abbiamo quindi tre possibilità:

1. $\widehat{C} = \widehat{D} > 90°$ (ipotesi dell'angolo ottuso)
2. $\widehat{C} = \widehat{D} = 90°$ (ipotesi dell'angolo retto)
3. $\widehat{C} = \widehat{D} < 90°$ (ipotesi dell'angolo acuto)

L'obiettivo di Saccheri era quello di dimostrare che non fosse possibile accettare le ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso, in quanto avrebbero condotto a contraddizioni, e che quindi l'unica ipotesi ammissibile era quella dell'angolo retto. La dimostrazione di Saccheri è molto lunga e articolata, in sunto egli riuscì a dimostrare che l'ipotesi dell'angolo retto è in linea con il quinto postulato e consente di dimostrarlo e che "l'ipotesi dell'angolo ottuso è completamente falsa perché distrugge se stessa", ossia conduce ad un assurdo.

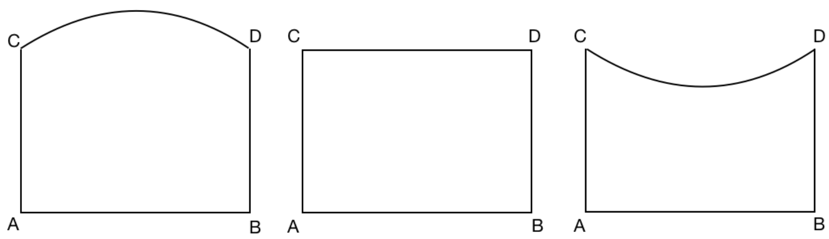


Figura 1.1: I tre casi di quadrilateri birettangoli isosceli

Per arrivare a queste conclusioni, Saccheri prima dimostrò che: se vale rispettivamente l'ipotesi dell'angolo acuto, retto, ottuso, allora la somma degli angoli interni di un triangolo è minore, uguale, maggiore di 180°. Questo ci consente di dire che, se vale l'ipotesi dell'angolo retto, allora vale una formulazione equivalente (quella sugli angoli di un triangolo) del quinto postulato e quindi vale il quinto postulato. Pertanto, l'ipotesi dell'angolo retto conduce alla geometria euclidea. Se invece vale l'ipotesi dell'angolo ottuso, allora la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180°. Con ragionamenti non troppo complicati, Saccheri riuscì inoltre a dimostrare che se vale questa ipotesi, allora vale il postulato dell'obliqua, visto in precedenza, che però è una formulazione equivalente del V postulato. Quindi anche l'ipotesi dell'angolo ottuso implica il V postulato. Ma, come mostrato da Euclide nella proposizione 32, se vale il V postulato allora "i tre angoli all'interno del triangolo sono uguali a due retti". Questa ipotesi conduce dunque a una contraddizione.

Dopodiché procede nel tentativo di ricavare una contraddizione dall'ipotesi dell'angolo acuto, tentativo che si rivelerà molto arduo e poco convincente. L'argomentazione nell'ipotesi dell'angolo acuto si basa sull'analisi del comportamento delle rette. Saccheri osserva che, in tale ipotesi, data una qualunque coppia di rette complanari si hanno tre possibilità:

a) Le rette sono incidenti

b) Le rette non sono incidenti e hanno una perpendicolare comune

c) Le rette non sono incidenti, non hanno una perpendicolare in comune e si avvicinano indefinitamente l'una all'altra.

Le prime due rappresentano i casi noti di rette rispettivamente secanti e parallele. La terza possibilità non è contemplata dalla geometria di Euclide, tuttavia Saccheri dimostra che, nell'ipotesi dell'angolo acuto, esistono effettivamente rette che si comportano come descritto in c). Perplesso dell'esistenza di rette così fatte, nella preposizione XXXIII conclude che "l'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta". Successivamente egli tenta anche un'altra confutazione dell'ipotesi dell'angolo acuto in termini di analisi infinitesimale ma lo stadio ancora iniziale della disciplina non consentiva di muoversi con la necessaria sicurezza. Saccheri pensò così di aver dimostrato il quinto postulato, in realtà aveva indicato la strada per descrivere due geometrie che non contenevano il postulato: una che si avvaleva dell'ipotesi dell'angolo ottuso e l'altra dell'ipotesi dell'angolo acuto (quasi un secolo più avanti, queste geometrie saranno rispettivamente definite Geometria Ellittica e Geometria Iperbolica).

L'opera di Saccheri rappresenta quindi un punto di svolta. Nel suo affannoso tentativo, Saccheri riuscì, suo malgrado, a stabilire dei veri e propri teoremi e proprietà di geometria non euclidea. I più interessanti di questi teoremi sono quelli dedotti a partire dall'ipotesi dell'angolo acuto (ottenuti ammettendo l'unica negazione che, come vedremo, si può fare all'interno del sistema euclideo del quinto postulato), ossia quella che nega l'unicità della parallela. Il contributo di Saccheri, con la sua "dimostrazione" per assurdo, è stato quindi quello di considerare la possibilità di ipotizzare la non validità del quinto postulato. Inoltre, la sua dissertazione apre la strada, come abbiamo visto, all'idea di fondare la validità di una geometria sulla sua non contraddittorietà logica, e non sull'evidenza intuitiva. L'opera, dopo aver destato inizialmente un certo interesse, venne ampiamente trascurata fino al 1889, anno in cui Beltrami, che ne era venuto a conoscenza grazie alla segnalazione del gesuita Padre Manganotti, richiamò nuovamente su di essa l'attenzione dei geometri, riscoprendo in essa la formulazione e la dimostrazione di teoremi che erano stati nel frattempo attribuiti ad altri, probabilmente non ignari del lavoro del matematico italiano.

Tra le ricerche successive a quelle di Saccheri, meritano di essere menzionate quelle del matematico svizzero **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777). Lambert ripercorse una strada per molti aspetti analoga a quella del gesuita, ma basò le sue considerazioni su una figura leggermente diversa: il quadrilatero trirettangolo isoscele, avente tre angoli retti e due coppie di lati uguali, e pose le tre ipotesi dell'angolo acuto, retto, ottuso in corrispondenza con le possibilità relative al quarto angolo del quadrilatero. Eglì confutò l'ipotesi dell'angolo ottuso e tentò di confutare quella dell'angolo acuto, ma a differenza di Saccheri fu consapevole della debolezza delle sue argomentazioni; pertanto sospese le pubblicazione della sua opera, intitolata *Theorie der Parallellinien*, che infatti fu pubblicata postuma.

Un altro matematico che stimolò l'interesse sui problemi riguardanti il quinto postulato fu il francese **Adrien Marie Legendre** (1752-1833). Il suo merito non fu tanto per la novità dei risultati, in massima parte già noti a Saccheri e Lambert, ma per l'influenza e la diffusione delle sue opere in Francia e in Germania che sollevarono un interesse ben maggiore di quello suscitato dai suoi predecessori.

Nessun matematico giunse mai ad una dimostrazione inconfutabile dell'impossibilità di dimostrare il postulato delle parallele. La comunità matematica si convinse così che il postulato delle parallele fosse davvero un postulato e che non si trattasse di un teorema, pertanto non richiedeva una dimostrazione. L'impossibilità di dimostrare il quinto postulato di Euclide fece incamminare la storia della geometria verso la concezione delle geometrie non euclidee [24].

1.1.2 I fondatori delle geometrie non euclidee

Tra la fine del secolo XVIII e l'inizio del XIX si era quindi giunti alla conclusione che il quinto postulato, pur con la sua non completa evidenza intuitiva, fosse indispensabile per la fondazione della geometria. L'interesse per l'argomento fu sempre vivo e, pur non cessando di affaticare inutilmente i ricercatori della sua presunta dimostrazione, cominciò ad affacciarsi l'idea che esso fosse veramente indimostrabile a partire dagli altri postulati. Questo rappresentò un ribaltamento di prospettiva nell'affrontare il problema, il quale, data la natura molto diversa, avrebbe richiesto considerazioni logico-matematiche nuove. Infatti, per stabilire se una proposizione non è dimostrabile occorre dimostrare che non è possibile dimostrarla, e non basta dire che non si è riusciti a farlo. D'altra parte, sebbene tutti i tentativi di dimostrazione fossero stati inutili, neppure si era riusciti a provare la falsità della sua negazione e, se non troppo intuitivo appariva il quinto postulato di Euclide, ancora meno intuitiva appariva la sua negazione.

Tuttavia, più che le ragioni teoriche, si dovettero superare quelle di natura culturale: secoli di predominio della geometria euclidea avevano abituato i matematici a considerarla come l'unica possibile. Tutta la difficoltà di entrare nel nuovo ordine di idee va ricollegata alla concezione allora dominante della filosofia kantiana [8]. Nel 1781 **Immanuel Kant** (1724-1804) aveva pubblicato la *Critica della ragion pura*, in cui viene presentata la famosa dottrina dello spazio e del tempo come forme pure a priori della sensibilità. Kant affermava che quello che possiamo conoscere del mondo ha origine da esperienze sensoriali, però il modo in cui lo comprendiamo dipende da certe condizioni a priori, presenti nel nostro intelletto; e secondo Kant la nostra intuizione a priori dello spazio è regolata dalla geometria euclidea, l'unica possibile nel caso della geometria. Nella terminologia kantiana, i postulati di Euclide sono giudizi sintetici a priori: enunciati che attribuiscono una proprietà a un soggetto, che non è implicita nella definizione del soggetto, e sono indipendenti dall'esperienza. Per questo motivo i giudizi sintetici a priori sono gli unici che garantiscono una conoscenza attendibile e indiscutibile, perché non mediata dall'esperienza. La filosofia kantiana non consentiva quindi di immaginare geometrie diverse da quella euclidea e, data la sua diffusione e autorevolezza, impedì per molto tempo alla comunità matematica di attribuire alle geometrie non euclidee la dignità scientifica che le spettava.

Il merito per la scoperta delle geometrie non euclidee va a quei matematici che fino alla fine credettero nell'impossibilità di dedurre il quinto postulato dalla *geometria assoluta*[2] e che ebbero il coraggio di ammettere l'esistenza di una geometria non contraddittoria in cui non fosse verificato.

Per capire cosa significa non ammettere il quinto postulato, riprendiamo l'enunciato nella Formulazione (ad esso equivalente) di Playfair: *Data una retta e un punto non appartenente ad essa, esiste ed è unica la retta passante per il punto e parallela alla retta data.* La sua negazione consiste nell'affermare che *esistono almeno due rette distinte passanti per il punto e parallele ad essa* (postulato N1) oppure che *non esiste alcuna retta passante per il punto e parallela ad essa* (postulato N2). Si possono quindi definire due geometrie alternative a quella euclidea, in cui il quinto postulato sia sostituito da una delle sue negazioni: è detta **geometria iperbolica**[3] quella ottenuta aggiungendo l'assioma N1 (dove si nega l'unicità della parallela) ed è detta **geometria ellittica** quella ottenuta aggiungendo l'assioma N2 (dove se ne nega l'esistenza[4]).

Allo stesso modo, se consideriamo la formulazione (equivalente) sugli angoli di un triangolo, dovuta a Saccheri, *in un triangolo la somma degli angoli interni è di* 180°, allora la sua negazione equivale a dire che *la loro somma è minore di* 180° o che *la loro somma è maggiore di* 180°. Dunque, nella geometria iperbolica esisteranno infinite parallele a una retta per un punto e la somma degli angoli di un triangolo sarà minore di 180°; viceversa nella geometria ellittica non esisterà alcuna parallela a una retta per un punto e la somma degli angoli di un triangolo sarà maggiore di 180°.

[2]Con *geometria assoluta* o *neutrale* viene detta oggi una geometria che non assume il quinto postulato di Euclide, in nessuna delle sue forme equivalenti e nemmeno nella sua negazione; si tratta quindi di un complesso di proposizioni geometriche che si possono dimostrare senza l'uso del quinto postulato e nella quale sono comprese, ad esempio, le prime 28 proposizioni di Euclide, che ne sono indipendenti.

[3]Questo tipo di geometria prende il nome di "iperbolica" in quanto "hyperbolé" in greco vuol dire proprio "eccesso" (di parallele); al contrario "ellittica" deriva dal greco "elliptikos" che significa "difetto".

[4] In realtà l'assenza totale di parallele, proposta dalla negazione N2, è incompatibile con altri postulati della geometria assoluta, che vanno quindi modificati se si vuole ottenere una geometria non contraddittoria.

A dire il vero, all'inizio la sola geometria non euclidea contemplata è stata quella iperbolica, che soddisfa i primi 4 postulati di Euclide ma nega l'unicità della retta parallela, e che corrisponde all'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri. In effetti, come si è visto, l'ipotesi dell'angolo ottuso è stata correttamente confutata dal gesuita, ma questo non significa che non sia comunque possibile costruire un sistema assiomatico coerente che si basi sul postulato N2 piuttosto che sul V postulato; si vedrà questa geometria nel successivo paragrafo.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) fu il primo ad avere chiara la visione di una geometria coerente in cui il quinto postulato fosse sostituito dalla sua negazione, visione che però per ben cinquant'anni rimase chiusa nella mente del sommo geometra [8]. In una lettera inviata all'amico astronomo F. W. Bessel nel gennaio 1829, egli scrisse "temo le strida dei Beoti, qualora volessi completamente esprimere le mie vedute". Secondo Gauss, infatti, i tempi non erano maturi per l'accettazione delle geometrie non euclidee e la sua reputazione poteva essere compromessa dal sostegno ad una teoria così nuova e in contrasto con le idee kantiane sulla natura a priori della geometria euclidea. Ciò che si sa delle sue ricerche è tratto dalle lettere agli amici, da due brevi recensioni apparse sul *Gottingische gelehrte Anzeigen* del 1816 e del 1822 e da alcune note del 1831 trovate fra le sue carte dopo la morte.

Anche Gauss cominciò a riflettere sui fondamenti della geometria con lo scopo iniziale di dimostrare il quinto postulato. Mettendo a confronto vari passi delle lettere di Gauss è possibile fissare come punto di partenza delle sue riflessioni l'anno 1792. Dopo una fase in cui trovò numerosi enunciati equivalenti, iniziò a pensare che la geometria non euclidea fosse realmente non contraddittoria. Già nel 1799 in una lettera all'amico Wolfgang Bolyai, suo ex compagno di Università, che gli chiedeva un'opinione sui suoi lavori concernenti il quinto postulato, scrisse:

> Mi dispiace di non aver sfruttato la nostra vicinanza di un tempo per conoscere meglio i tuoi lavori sui primi fondamenti della geo-

> metria. [...] Quanto a me, i miei lavori sono già molto avanzati; ma la via nella quale sono entrato non conduce al fine desiderato, e che tu affermi di aver raggiunto, ma conduce piuttosto a mettere in dubbio la verità della geometria. In realtà sono giunto a parecchie cose che i più riterrebbero una dimostrazione, ma che ai miei occhi non provano nulla. Ad esempio se si potesse dimostrare l'esistenza di un triangolo a lati rettilinei, la cui area sia maggiore di qualsiasi area data, allora sarei in grado di dedurre rigorosamente tutta la geometria. I più vorrebbero dare a ciò il titolo di assioma; io no, perchè potrebbe infatti accadere che, per quanto distanti tra loro fossero i vertici del triangolo, la sua area fosse non di meno sempre inferiore a un limite assegnato.

Il "limite assegnato" a cui fa riferimento Gauss è legato ad un'unità assoluta di misura dei segmenti, che gli compare nelle formule come una costante speciale k e "sappiamo per via dell'esperienza che essa deve essere eccezionalmente grande, in confronto a tutto ciò che possiamo misurare; nella geometria di Euclide essa diviene infinita". Nella lettera Gauss fa trapelare alcuni risultati di apparenza paradossale: ad esempio che nella geometria non euclidea gli angoli di un triangolo equilatero non hanno misura costante, ma al crescere della lunghezza dei lati, diventano piccoli a piacere; e che l'area di un triangolo iperbolico qualsiasi è limitata superiormente da πk^2 (e che esistono triangoli iperbolici di area arbitrariamente vicina a tale valore).

A questo primo periodo segue un secondo, dopo il 1813, in cui Gauss, vinta ogni esitazione, procedette nello sviluppo dei teoremi fondamentali di una nuova geometria, che egli chiama prima *anti-euclidea*, poi geometria *astrale*, infine *non-euclidea*. Giunse così ad avere la certezza che la geometria non euclidea non avesse nulla di contraddittorio, benché a prima vista parecchi dei suoi risultati apparissero come paradossi. Sappiamo di questi studi dalle lettere destinate solo ad alcuni amici fidati, in cui Gauss non lasciò comunque trapelare molto, certo di non venir compreso. Gli appunti trovati fra i suoi manoscritti contengono alcuni cenni della nuova teoria delle parallele e dovevano far parte di una esposizione più ampia, da lui progettata, sulla geometria non euclidea. A questo proposito egli scriveva nel maggio 1831 all'astronomo H.K. Schumacher:

> Da qualche settimana ho cominciato a mettere per iscritto i risultati delle mie meditazioni su questo soggetto, che risalgono in parte a quarant'anni, e di cui non avevo mai nulla redatto [...]. Non vorrei che tutto ciò perisse con me.

Tuttavia, Gauss interruppe la redazione delle note cui fa riferimento nella lettera a Schumacher quando venne a conoscenza dell'opera di Janos Bolyai.

Contemporaneamente a Gauss, anche **Ferdinand Karl Schweikart** (1780-1859), docente di giurisprudenza a Marburg, si dedicò a ricerche sulla teoria delle parallele. Egli sosteneva l'esistenza di due tipi di geometria: una geometria in senso stretto, quella euclidea; e una seconda nuova geometria, detta da lui *astrale*, in cui la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due angoli retti ed è tanto minore quanto maggiore è l'area del triangolo. Anche Schweikart arrivò alla conclusione che esiste una costante per le lunghezze dei segmenti[5] e che al tendere di questa costante all'infinito la somma degli angoli interni di un triangolo tende a 2 retti e si ricade nel caso euclideo. Comunicò a Gauss le sue ricerche in una lettera del 1818, il quale si dichiarò assolutamente d'accordo.

Schweikart, convinto delle sue scoperte, convinse il nipote **Franz Adolph Taurinus** (1794-1874) ad occuparsi della geometria astrale. In realtà, Taurinus era un sostenitore della validità della geometria euclidea e decise di muoversi sulle linee dei lavori di Saccheri e Lambert; decise di sviluppare le conseguenze dell'ipotesi dell'angolo acuto, così facendo riuscì ad ottenere le formule fondamentali della trigonometria non euclidea. Egli osservò che se nelle usuali formule di trigonometria sferica si cambia il raggio R della sfera

[5] Schweikart osservò che l'altezza di un triangolo rettangolo isoscele continua a crescere con i suoi lati ma non può mai superare una certa lunghezza C (detta costante di Schweikart). Successivamente Gauss osservò che la costante di Schweikart C e la sua k sono legate dall'equazione $C = klog(1 + \sqrt{2}) - 1$.

in $R\sqrt{-1}$ si ottengono tra lati e angoli del triangolo relazioni che assumono forma reale usando funzioni iperboliche, e che corrispondono a quelle relative all'ipotesi dell'angolo acuto. In questa maniera ottenne formalmente le formule per l'area del triangolo, la lunghezza della circonferenza, l'area del cerchio, l'area e il volume della sfera, valide per la geometria iperbolica[6]. Il merito quindi di Taurinus è stato quello di ammettere apertamente la possibilità logica di queste geometrie. Le opere di questi due autori non trovarono mai tuttavia il meritato riconoscimento.

Le prime esposizioni pubbliche di una geometria non euclidea sono dovute a due personaggi che intorno al 1830, l'uno all'insaputa dell'altro, giunsero quasi contemporaneamente ad analoghi risultati: l' ungherese János Bolyai (1802-1860) ed il russo Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856).

János Bolyai era un ufficiale di cavalleria. Fu introdotto agli studi sul postulato delle parallele dal padre Wolfgang Bolyai, ex compagno di Università di Gauss a Gottinga, che, come abbiamo visto dal carteggio con l'amico, aveva dedicato gran parte della sua vita ai tentativi di dimostrare il quinto postulato, senza mai riuscirci. Wolfgang, venuto a sapere del comune interesse del figlio Jànos, cercò quindi di dissuaderlo dall'occuparsene:

> Non imboccare la strada delle parallele! Io ne conosco bene l'intero cammino. Ho attraversato questa notte senza fondo che ha oscurato ogni luce e gioia nella mia vita. [...] Per amor di Dio, te ne supplico, lascialo stare.

Nonostante le esortazioni del padre, Bolyai iniziò ad occuparsi delle questioni relative al quinto postulato e anche lui dopo alcuni inutili tentativi si convinse della sua indimostrabilità. Da una lettera destinata al padre sappiamo che attorno al 1823 János aveva già sviluppato una geometria indipendente dal postulato euclideo, che chiamò *geometria assoluta*. Sempre più convinto della significatività dei risultati conseguiti, decise di comunicarli al padre:

[6]Si noti che Taurinus ottenne queste formule prima che, al termine di un lungo percorso, ci arrivassero Lobačevskij e Bolyai.

> Sono ormai risoluto a pubblicare un'opera sulla teoria delle parallele, appena avrò ordinato la materia e le circostanze me lo permetteranno. Non l'ho ancora fatto, ma la via che ho seguito ha certamente, per così dire, quasi raggiunto lo scopo; lo scopo proprio non è raggiunto, ma ho scoperto cose così belle che ne sono rimasto abbagliato, e si dovrebbero sempre rimpiangere se andassero perdute. Quando le vedrete, lo riconoscerete voi pure. Nell'attesa non vi posso dire altro che questo: ho creato dal nulla un nuovo universo.

L'entusiasmo di Bolyai colpì il padre, il quale lo sollecitò ad affrettarsi a rendere i suoi risultati di pubblico dominio, poichè "le idee passano facilmente da uno all'altro" ma "il vantaggio spetta al primo". La redazione delle sue indagini sulla geometria assoluta si protrasse fino al 1829 e i risultati furono pubblicati nel 1832 come appendice al I volume del *Tentamen*, un'opera didattica di matematica di Wolfgang.

Più che alla creazione di un nuovo sistema geometrico, Bolyai era interessato allo studio delle proprietà dello spazio indipendenti dal quinto postulato, cioè alla geometria assoluta, ma non si preoccupò di dimostrarne la consistenza. Come vedremo farà anche Lobačevskij, definisce il concetto di parallelismo e deriva tutte le proprietà delle rette parallele valide indipendentemente dal quinto postulato. Si rese poi conto che anche la trigonometria sferica ne era indipendente, ne studiò quindi le formule fondamentali, mostrando che al tendere all'infinito del raggio la geometria della sfera diventa indistinguibile da quella del piano. Un punto importante del suo lavoro consiste nella derivazione della formula dell'angolo di parallelismo[7]. Per finire si occupò anche del problema della quadratura del cerchio, risolvendolo con costruzioni non euclidee.

[7] In geometria iperbolica, l'angolo di parallelismo è una quantità dipendente da una retta r e un punto P non appartenente a r; indica il minimo angolo che una retta parallela a r e passante per P forma con la normale a r passante per P. Osserviamo che, a differenza di quanto accade nella geometria euclidea, l'angolo di parallelismo non è retto, bensì acuto.

Negli stessi anni, Gauss aveva cominciato a scrivere le sue note sull'argomento; la comparsa della pubblicazione di Bolyai rese tuttavia il suo sforzo inutile [43]. Un mese dopo aver ricevuto questa pubblicazione, Gauss scrisse all'amico Wolfgang:

> Se comincio col dire che non posso lodare questo lavoro tu certamente per un istante resterai meravigliato; ma non posso dire altra cosa; lodarlo sarebbe lodare me stesso; [...] i risultati ai quali egli fu condotto coincidono quasi interamente con le mie meditazioni.

Anche se Gauss concludeva affermando di essere "estremamente contento" per esser stato preceduto "in modo così notevole dal figlio di un vecchio amico", János vide in queste affermazioni un tentativo di plagio. I pochi riconoscimenti ottenuti e la successiva pubblicazione dell'opera di Lobačevskij nel 1835, che conteneva risultati praticamente analoghi ai suoi, amareggiarono Bolyai al punto che smise definitivamente di occuparsi dell'argomento. La parte maggiore del merito di avere gettato le basi della geometria non euclidea spetta quindi a Lobačevskij.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij svolse la sua attività accademica presso l'Università di Kazan, una città della Russia sud-occidentale, di cui fu anche rettore. Tra il 1823 e il 1825 orientò la sua ricerca verso la geometria non euclidea e nel 1826 presentò la sua prima esposizione sui principi della geometria non euclidea, la quale però andò perduta. Sul 'Messaggero di Kazan' tuttavia, nel 1829-30 apparve un'altra memoria che era un riassunto della precedente. In essa viene esposta la nuova geometria, detta da Lobachevskij *geometria immaginaria*, sviluppata fino alla trigonometria e al calcolo delle aree e dei volumi. A questi primi scritti ne seguirono altri tra cui, nel 1835, *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele*, e nel 1856, la *Pangeometria*, contenente un'esposizione completa della nuova geometria. Le sue prime pubblicazioni sulla geometria non euclidea erano scritte in russo, perciò il suo lavoro non diventò subito noto nell'Europa centrale e occidentale; cominciò a pubblicarli in francese nel 1837 e in tedesco nel 1840.

Lobačevskij non si limitò ad affrontare, se non agli inizi della sua attività, semplicemente la questione delle parallele, ma rivolse i suoi sforzi a una rifondazione globale della geometria. Le prime proposizioni dell'Introduzione ai *Nuovi principi della geometria* illustrano in modo chiaro il suo intento:

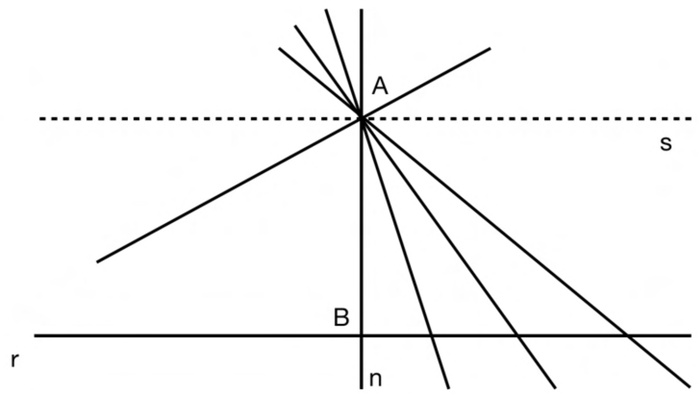
> A tutti è noto che, fino ad oggi, nella geometria la teoria delle parallele era rimasta incompiuta. I vani sforzi compiuti dai tempi di Euclide, per il corso di duemila anni, mi spinsero a sospettare che nei concetti stessi della geometria non si racchiuda ancora quella verità che si voleva dimostrare, e che può essere controllata, in modo simile alle altre leggi fisiche, soltanto da esperienze quali, ad esempio, le osservazioni astronomiche.

Dalle sue parole si rivela chiaramente un approccio empirista, in netta opposizione alla concezione filosofica kantiana che non ammetteva di derivare sperimentalmente le proprietà dello spazio. Questa posizione, unita alla decisione di chiamare *immaginaria* la sua geometria, non favorì la diffusione delle sue pubblicazioni: in un momento storico in cui c'era già una dilagante ostilità nei confronti delle ipotesi non euclidee, una tale presentazione non poteva fare altro che accentuare la diffidenza, in quanto suggeriva l'idea di una geometria meno reale di quella classica. In verità, con "immaginaria" egli si riferiva al fatto che le formule della geometria che presentava nell'opera (di tipo iperbolico) si ottenevano da quelle vere nella geometria di una sfera, semplicemente sostituendo numeri immaginari a numeri reali.
Per dare un esempio del suo spirito empirista, ricordiamo che egli effettuò una serie di misurazioni astronomiche, tra cui quella degli angoli del triangolo avente come vertici la Terra, il Sole e Sirio. Avendo ottenuto una somma molto vicina a 180° e valutando che il lieve scarto era indistinguibile da eventuali errori dovuti agli strumenti, concluse che ai fini pratici l'ordinaria geometria euclidea spiegava in maniera soddisfacente i dati empirici. Tuttavia, dal momento che "nella nostra immaginazione lo spazio può essere ampliato senza

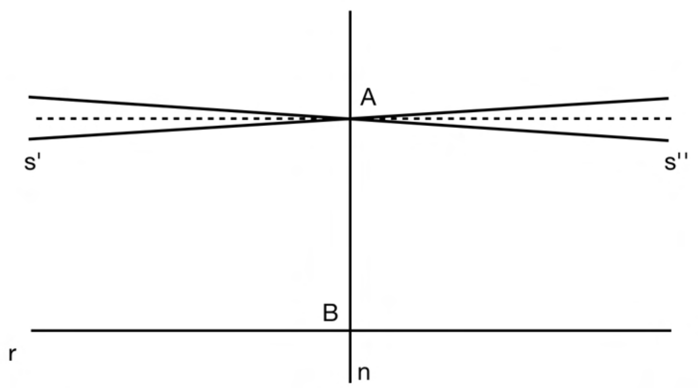
limiti" e "la natura ci indica distanze tali, in paragone alle quali svaniscono per la loro piccolezza perfino le distanze dalle stelle fisse dalla nostra terra", non è detto che la realtà a più grande scala non si comporti secondo le regole di una geometria differente. Lobačevskij non vedeva alcuna contraddizione per la nostra mente nel supporre che "talune forze della natura segnano una geometria, altre un'altra loro particolare geometria"; il suo pensiero appare molto rivoluzionario [43].

Lobačevskij parte sviluppando quella che oggi è detta la geometria assoluta (cioè quel complesso di proposizioni geometriche che si possono dimostrare senza l'uso del quinto postulato), ottenendo risultati molto interessanti, tra i quali ricordiamo l'indipendenza della geometria della sfera e della trigonometria sferica dal quinto postulato e la dimostrazione dell'esistenza dei cinque poliedri regolari ottenuta senza ricorso a considerazioni sulle rette parallele. Dopodiché introduce una nuova nozione di rette parallele e procede nello sviluppo della geometria immaginaria vera e propria. Riportiamo qui in dettaglio il ragionamento di Lobačevskij, che è lo stesso seguito separatamente da Bolyai.

Dati nel piano una retta r e un punto A non appartenente ad essa, tracciamo la perpendicolare n da A a r. Facciamo poi ruotare la retta n in verso antiorario, mantenendo fisso il punto A. Il punto B, di intersezione tra r e n si allontana sempre di più verso destra lungo la retta r fino a che, continuando a ruotare, il punto non ricompare a sinistra.



Se assumiamo il quinto postulato, l'intervallo in cui la retta n non interseca più r a destra, ma non la interseca ancora a sinistra è fatto di una sola retta, cioè quella parallela ad r passante per A. Lobačevskij, invece, coerentemente con la sua impostazione empirica, non escluse che questo intervallo potesse essere in realtà più esteso. Egli distinse le rette per A in *secanti*, se intersecano r, e in *non secanti*, se non intersecano r. Queste due tipologie di rette sono separate da un elemento separatore che non interseca r ed è la prima delle rette che non la intersecano. Tali elementi separatori sono le uniche "parallele in ciascun verso", mentre le altre sono secanti (o convergenti) o non secanti (o divergenti).



Indicando con s' la prima retta che non interseca r a destra e con s'' la prima che non la interseca a sinistra e procedendo in verso antiorario, le rette secanti sono quelle comprese tra s'' e s', mentre quelle non secanti sono quelle comprese tra s' e s'' (che nella terminologia moderna vengono dette *ultraparallele*).

Tra i contributi più interessanti di Lobačevskij troviamo:

- l'esposizione organica della trigonometria non euclidea
- l'introduzione e lo studio di due nuove figure: l'oriciclo e l'orosfera[8]

[8] Egli dimostra anche che, sotto oppurtune clausole interpretative, sull'orosfera vale la geometria euclidea.

- la considerazione del fatto che la geometria immaginaria, in zone di spazio sufficientemente piccole, coincide con l'ordinaria geometria euclidea

- l'osservazione che se, nelle formule della trigonometria non euclidea piana, sostituiamo ai lati a, b, c di un triangolo i lati immaginari, $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, si ottengono le formule dell'ordinaria trigonometria sulla sfera

- lo sviluppo di una geometria analitica corrispondente alla nuova geometria, introdotta mediante opportune coordinate cartesiane; questo consente l'applicazione di metodi analitici per la determinazione di lunghezze, aree e volumi di figure piane e spaziali.

Come si evince, il contributo di Lobačevskij è stato molto più esaustivo di quello di Bolyai e dimostra quanto il matematico russo fosse realmente consapevole della non contraddittorietà della sua teoria. La sua geometria, tuttavia, non fu molto apprezzata durante la sua vita e solo Gauss richiamò l'attenzione sulle sue idee in alcune lettere ai suoi corrispondenti scientifici. A dimostrazione della stima per il lavoro del matematico russo, Gauss propose la candidatura di Lobačevskij a corrispondente della Società delle Scienze di Gottinga, che non venne però approvata.

In conclusione, nè Bolyai nè Lobačevskij ebbero la soddisfazione di veder apprezzate in vita le loro opere; fu solo dopo la morte di entrambi che l'attenzione dei matematici cominciò a rivolgersi al loro lavoro, prima con la pubblicazione del libro di H. R. Baltzer, *Die Elemente der Mathematik*, che contiene un'ampia trattazione della geometria iperbolica, e successivamente con le relative traduzioni.

Come abbiamo visto la geometria non euclidea fu scoperta almeno quattro volte nel corso della prima metà dell'Ottocento. La ragione di questa ridondanza si può far ricondurre alla mancata comunicazione tra gli studiosi che, individualmente, hanno lavorato allo stesso problema senza conoscere i risultati degli altri. Quello che però stupisce di più nella storia delle geometrie non euclidee sta nel fatto che, sostanzialmente, i primi fondamentali tentativi vennero da ambienti estranei a quello matematico, come nel caso di Schweikart, Taurinus e Bolyai, e che anche il fondatore riconosciuto della geometria non euclidea, Lobačevskij, appartenesse ad ambienti accademici piuttosto periferici [43]. Questo ci fa riflettere sulla difficoltà impiegata ad ammettere queste teorie e su quanto la rivoluzione non euclidea sia stata una vera e propria rivoluzione di pensiero.

1.1.3 Il contributo di Riemann[9]

La geometria di Lobačevskij e Bolyai non è la sola possibile come alternativa a quella euclidea: un altro sistema geometrico si può ottenere anche in corrispondenza dell'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri o, equivalentemente, dalla negazione dell'esistenza di rette parallele.

La dimostrazione di Saccheri è corretta, tuttavia, si può osservare che nel dimostrare che dall'ipotesi dell'angolo ottuso segue il postulato dell'obliqua si usa il fatto che si possa prolungare indefinitamente un segmento; qui Saccheri sta usando il II postulato di Euclide. In altre parole, se vale il II postulato allora l'ipotesi dell'angolo ottuso porta a contraddizioni. Riemann suggerì di modificare l'ipotesi di infinita prolungabilità della retta con quella di non esistenza degli estremi: per lui una retta non doveva più essere necessariamente infinitamente prolungabile ma bastava che fosse illimitata. La distinzione tra infinito ed illimitato è di fondamentale importanza; riportiamo, a tale proposito, le parole di Riemann [8]:

> Quando si estendono le costruzioni dello spazio all'infinitamente grande bisogna fare distinzione fra l'illimitato e l'infinito: il primo appartiene ai rapporti d'estensione, il secondo ai rapporti metrici.

Euclide aveva tacitamente fatto coincidere l'illimitato con l'infinito, Riemann invece puntualizza che l'infinitezza non segue affatto dalla illimitatezza (la

[9]Per questo sotto-paragrafo si fa riferimento a **L'indirizzo metrico-differenziale e la sua applicazione negli sviluppi delle geometrie non euclidee** in [1], pp. 82-90.

prima è una nozione metrica mentre la seconda topologica) e che è possibile concepire una geometria le cui rette, seppur illimitate, abbiano lunghezza finita. Ad esempio, le circonferenze verificano la forma proposta da Riemann per il secondo postulato. Questo apre la possibilità di costruire una geometria, detta "sferica" (perché ha come modello la sfera), in cui non esistono rette parallele[10], la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180° e valgono i restanti assiomi della geometria elementare.

La scoperta di questo nuovo sistema geometrico spetta quindi al matematico tedesco **Bernhard Riemann** (1826-1866), il quale pervenne alla sua formulazione attraverso una concezione della geometria profondamente nuova. La geometria non euclidea era rimasta infatti per diverso tempo un aspetto marginale della geometria, fino a che la teoria di Riemann non la incorporò come sua parte integrante [20].

Nel giugno 1854 Riemann discuteva a Gottinga, alla presenza di Gauss, la sua lezione di abilitazione *Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen* - *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* - universalmente riconosciuta come uno dei più profondi lavori nella storia della matematica, dove introdusse il concetto di varietà e di curvatura di una varietà, e che racchiude le sue più rilevanti considerazioni. Questa dissertazione è importante, oltre che dal punto di vista matematico, soprattutto per le implicazioni filosofiche nella concezione matematica dello spazio. La conferenza di Riemann, accolta con molto entusiasmo da parte di Gauss, rimase tuttavia inedita fino al 1867, anno dopo la morte del suo autore; ricevette quindi la stessa indifferenza iniziale che era toccata alle opere di Lobačevskij e Bolyai sulle geometrie non euclidee.

Riemann riprese e generalizzò le idee sviluppate da Gauss sullo studio delle superfici dello spazio euclideo. Tuttavia, la geometria dello spazio presentata da Riemann non era soltanto un'estensione della geometria di Gauss, ma riconsiderava proprio l'intero approccio allo studio dello spazio.

[10] Nella geometria sferica o ellittica doppia, due rette hanno sempre due punti in comune, che sono quelli antipodali.

Nell'opera *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) - *Studi generali intorno alle superfici curve* - Gauss aveva esposto i fondamenti della geometria differenziale. Egli si prefisse lo studio di quelle proprietà geometriche delle superfici (immerse nello spazio euclideo) che si possono chiamare *intrinseche*, in quanto dipendono solo dal tipo di superficie considerato e non dallo spazio in cui sono immerse.

Egli dimostrò che, data una superficie qualsiasi, purché sufficientemente regolare (cioè priva di singolarità quali buchi o punte), è possibile introdurre su di essa un sistema di coordinate, mediante le quali si possono determinare le equazioni delle figure contenute sulla superficie stessa. Dimostrò inoltre che il concetto di linea retta del piano, intesa come linea di minima distanza fra due punti, può essere esteso a superfici qualsiasi: dati cioè su una superficie due punti A e B abbastanza vicini, vi sarà, tra tutti gli archi delle linee della superficie che uniscono i due punti, almeno un arco che determina il percorso minimo che bisogna compiere su quella superficie per spostarsi dal punto A al punto B; le linee della superficie che contengono questi archi sono dette *geodetiche*.

Si può dimostrare, tuttavia, che il carattere delle geodetiche dipende da una proprietà intrinseca della superficie, la quale varia da punto a punto, ma rimane inalterata quando la superficie viene sottoposta a deformazioni che non comportino dilatazioni o lacerazioni. La proprietà in questione è stata denominata da Gauss **curvatura della superficie** ed è intrinseca ad essa, nel senso che è esprimibile ricorrendo unicamente a un sistema di coordinate stabilito all'interno della superficie. Il fatto interessante è che la forma delle geodetiche di una superficie in un dato punto si può ricavare dalla curvatura della superficie in quel punto e viceversa.

Prima di definire la curvatura di una superficie, è opportuno definire la curvatura di una linea piana: la curvatura di una curva in un suo punto è un numero che misura di quanto e in che verso essa si distacca dalla retta tangente in tale punto. Ad essere più precisi, il valore assoluto della curvatura misura l'entità della piegatura, mentre il segno ne segnala il verso. Quindi una linea avrà curvatura nulla se e solo se è una retta. Una circonferenza avrà la stessa curvatura in ogni punto, per la simmetria di cui essa gode per cui ogni suo punto è indistinguibile dall'altro. Inoltre, tanto più è piccolo il suo raggio, tanto più la circonferenza si discosterà dalla tangente, ovvero la curvatura sarà maggiore; risulta quindi naturale definirla come l'inverso del suo raggio. La curvatura è quindi una nozione locale perché dipende da quale tratto di curva stiamo trattando.

La curvatura gaussiana di una superficie in un suo punto è un numero che misura di quanto e in che modo la superficie si distacca dal piano tangente alla superficie in tale punto. Se consideriamo il piano, esso coincide con il piano tangente in ogni suo punto, per cui non si distacca affatto da esso, e la sua curvatura quindi è nulla. Anche nel caso delle superfici, è chiaro che è una nozione del tutto locale.

Formalizziamo il concetto: data una superficie S e un suo punto P, tracciamo la retta n ortogonale a S in P, che verrà detta la normale a S in P. Sia ora Π un piano che contiene n. L'intersezione tra S e Π sarà una curva per P, che chiamiamo sezione normale per P. Ogni sezione normale è una curva piana, perchè giace su Π, per cui ha una curvatura ben definita in P. Al variare del piano Π, la sezione normale cambia e di conseguenza cambierà la sua curvatura in P. Si può dimostrare che tra tutte queste sezioni ne esiste una con la curvatura massima k_{max} e una con quella minima k_{min}, che vengono dette curvature principali e si trovano su piani perpendicolari tra loro.
La curvatura gaussiana di S in P è

$$K = k_{min} \cdot k_{max}$$

La curvatura della superficie in un punto può risultare positiva, nulla, negativa e in corrispondenza di tali casi il punto è detto rispettivamente ellittico, parabolico, iperbolico. Ad esempio, sono ellittici tutti i punti di una sfera, sono parabolici i punti di un cilindro, sono iperbolici i punti di sella di un paraboloide iperbolico.

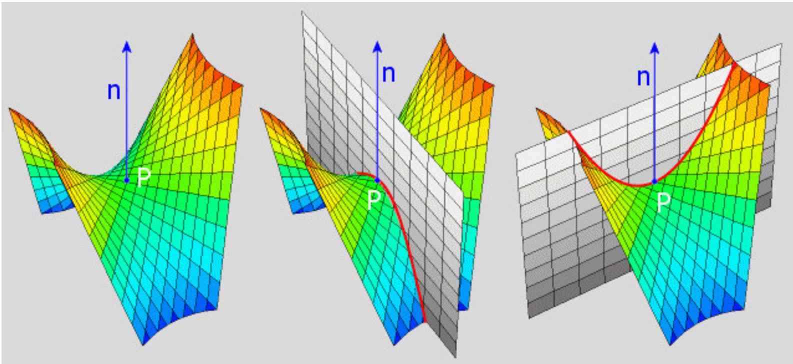


Figura 1.2: Esempio di curvature principali di una superficie in un punto P.

La curvatura di una superficie varia in genere da punto a punto, ma può anche essere costante. Ci sono superfici che hanno curvatura costante e altre che hanno curvatura variabile in base al punto considerato. Per esempio, la sfera è una superficie a curvatura costante pari a $\frac{1}{R^2}$, dove R è il suo raggio. Il piano, il cilindro, il cono sono superfici a curvatura costantemente nulla.

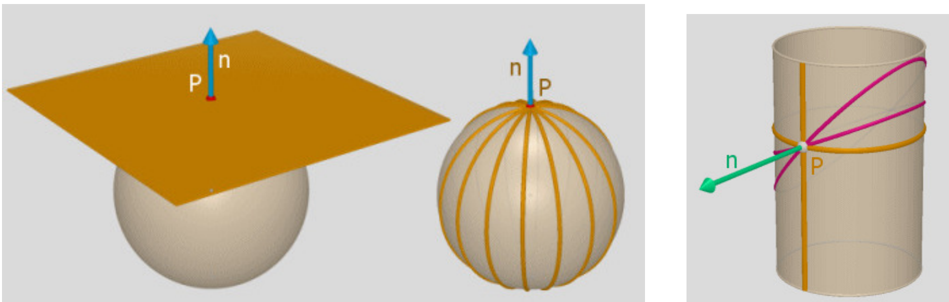


Figura 1.3: Sfera e cilindro sono superfici a curvatura costante.

A questo punto è utile menzionare il più importante tra i risultati di Gauss, il *theorema egregium*, enunciato da Gauss nelle *Disquisitiones* nel seguente modo:

> Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur[11], mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.

[11] Gauss usa il termine "explicatur" per descrivere il fatto che due superfici possono essere stese una sopra l'altra anche se non sono elastiche; in termini matematici che sono isometriche.

Il *theorema egregium* di Gauss afferma che se due superfici S e S' sono applicabili l'una sull'altra (cioè, usando il linguaggio intuitivo, se è possibile, immaginata S come un foglio flessibile e inestensibile, stenderla su S' senza rotture né ripiegamenti in modo che ogni punto di S si sovrapponga a uno e un solo punto di S'), le superfici hanno nei punti corrispondenti la stessa curvatura. Inoltre, si può dimostrare che, se due superfici sono applicabili una sull'altra, alle geodetiche della prima corrispondono le geodetiche della seconda; in altre parole, due superfici applicabili una sull'altra hanno la stessa geometria intrinseca.

Il theorema egregium afferma quindi che la curvatura gaussiana di una superficie è una proprietà intrinseca ad essa, cioè è invariante per isometrie (quindi superfici con differente curvatura non possono essere fra loro isometriche).

Ad esempio, se S è una parte di superficie cilindrica, essa è applicabile su una regione S' di piano (basta, per così dire, srotolare il cilindro e stenderlo sul piano). Poiché le geodetiche di S' sono rette, le geodetiche del cilindro sono le linee trasformate delle rette quando "avvolgiamo" il piano sopra il cilindro: si ottengono allora come geodetiche del cilindro delle linee, dette eliche cilindriche. La geometria intrinseca del cilindro coincide pertanto con la geometria del piano euclideo. La geometria intrinseca della sfera è invece diversa da quella del piano e questo si può vedere intuitivamente pensando che non è possibile far aderire, per sovrapposizione, a un piano una superficie sferica oppure, il che è lo stesso, avvolgere perfettamente un foglio piano attorno a una sfera senza ripiegarlo in vari punti su sè stesso. Le geodetiche della sfera sono i cerchi massimi. Un triangolo sulla sfera, i cui lati siano archi di cerchio massimo, ha somma degli angoli interni maggiore di due retti. Viceversa, su una superficie a curvatura negativa la somma degli angoli di un triangolo i cui lati siano delle geodetiche è minore di due angoli retti.

In conclusione, ogni superficie ha in generale in ogni intorno di un suo punto una diversa geometria, le cui caratteristiche sono determinate dalla curvatura della superficie in quel punto. Poiché in genere la curvatura varia, varia anche la geometria della superficie. Le superfici a curvatura costante hanno invece la proprietà che parti di esse sono applicabili su altre parti (per il theorema egregium) e quindi posseggono una geometria che si mantiene costante su di esse.

La rivoluzione iniziata da Gauss si manteneva comunque all'interno dello spazio euclideo tridimensionale. Secondo la definizione gaussiana, la curvatura di una superficie (che è un ente geometrico a due dimensioni) è una grandezza che determina di quanto, per così dire, la superficie si incurva nello spazio a tre dimensioni. D'altra parte, la curvatura può essere definita in modo intrinseco, senza alcun riferimento allo spazio circostante.

Il merito di Riemann è stato quello di estendere allo spazio a tre dimensioni il concetto di curvatura. Nella sua dissertazione si possono individuare tre grandi idee proposte [10]:

- L'introduzione delle "grandezze pluriestese" (chiamate oggi varietà differenziabili), che generalizzano il concetto di superficie introdotto da Gauss in dimensione arbitraria

- L'introduzione di un tensore metrico che generalizza il concetto di distanza e lo studio delle relazioni metriche sulle varietà differenziabili (la nascita della geometria riemanniana)

- La generalizzazione della curvatura e altri elementi della geometria intrinseca di superfici alle varietà di Riemann n-dimensionali.

Riemann dimostrò che la curvatura permette di determinare se il tipo di geometria di una superficie è euclidea, iperbolica o sferica: quindi la curvatura funge da **collante** tra la geometria euclidea e quelle non euclidee.

Riportiamo a grandi linee il ragionamento di Riemann per individuare le tre possibilità di geometrie su superfici a curvatura costante.
Supponiamo che i punti dello spazio siano individuati da tre coordinate x_1, x_2, x_3 (in realtà lui generalizzò il discorso a n dimensioni). Ammesso il principio di additività delle lunghezze, la distanza tra due punti su una linea sarà determinata quando si sappia sempre dare la distanza ds fra due suoi punti infinitamente vicini (x_1, x_2, x_3) e $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$.

Riemann assume che ds sia la radice quadrata di una forma quadratica omogenea nei differenziali dx_i delle variabili:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j} dx_i dx_j$$

dove i coefficienti $a_{i,j}$ sono funzioni delle coordinate x_1, x_2, x_3. Ammesso il principio di sovrapponibilità delle figure, con un opportuno cambiamento di coordinate si riesce ad arrivare alla seguente forma:

$$ds^2 = \frac{{dx_1}^2 + {dx_2}^2 + {dx_3}^2}{1 + \frac{k}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

La costante k è quella che Riemann chiama **curvatura dello spazio** e che può essere positiva, nulla, negativa. Se ora si ammette che il principio di sovrapponibilità sia valido nell'intero spazio e che una retta sia determinata da due punti, si dimostra che solo tre situazioni sono compatibili con le ipotesi di partenza, cioè solo tre possibili geometrie. Si avrà una geometria: **euclidea** se la curvatura della superficie è costantemente nulla ($k = 0$), come ad esempio nel piano; **sferica** se la curvatura è positiva ($k > 0$), come nel caso della sfera; **iperbolica** se la curvatura è negativa ($k < 0$), come nel caso di un oggetto elusivo, che non era ancora stato individuato al tempo di Riemann, ma che avrebbe dovuto avere curvatura negativa.

Le considerazioni di Riemann permisero quindi di dire che le tre geometrie sono legate dal concetto di curvatura: hanno quindi pari dignità matematica. Lo sviluppo del concetto di curvatura non solo dimostrò che le geometrie non euclidee erano attendibili ma anche che erano necessarie in quanto regolavano la struttura di alcune superfici o loro porzioni.

Nella dissertazione Riemann non allude alla geometria sferica, ma dal discorso comprendiamo le sue intenzioni. L'obbiettivo di Riemann era quello di dimostrare che i postulati di Euclide erano verità empiriche e non, come si era creduto, verità di per sé evidenti. Con le sue idee si proponeva di descrivere il mondo fisico in cui viviamo: egli interpretava lo spazio in cui siamo immersi come un caso particolare di grandezza estesa in tre dimensioni. Per comprendere le leggi che governano il nostro mondo, è necessario ricorrere all'esperienza sensibile. Anche se dalle misurazioni astronomiche sembra discendere che la geometria euclidea sia "garantita dall'esperienza", ossia che il nostro spazio sia effettivamente quello euclideo e a tre dimensioni, tuttavia, continuava Riemann, fino a quel momento era stata esplorata soltanto una piccola porzione di Universo, quella "accessibile ai nostri telescopi". Nulla dunque impediva di pensare che nell'infinitamente grande, così come nell'infinitamente piccolo, "le relazioni metriche dello spazio non si accordino con i postulati (euclidei) della geometria; ammissione questa che si renderebbe di fatto necessaria, se permettesse di spiegare in modo più semplice i fenomeni" [43]. Quello che intendeva dire era che passando al macroscopico, potesse essere necessario il passaggio a nuovi "sistemi di ipotesi", e egli individuò in quello della geometria sferica quello idoneo a descrivere ciò che accade nel nostro mondo su larga scala.

Già gli studi di Gauss sulle proprietà delle figure che si sviluppano su altri solidi avevano portato a riflettere se la geometria che rappresenta la natura fosse effettivamente quella euclidea. La teoria delle grandezze n-dimensionali di Riemann condurrà alla definitiva distinzione tra **spazio geometrico** e **spazio fisico**.

Nel corso dell'Ottocento le ricerche sulle geometrie non euclidee si possono suddividere in tre indirizzi di sviluppo: quello assiomatico, quello differenziale e quello proiettivo. Questi indirizzi rispecchiano le teorie geometriche che si stavano sviluppando in quegli stessi anni e le questioni che i matematici avevano premura di affrontare. L'indirizzo che abbiamo affrontato, per ragioni storiche, in questo paragrafo è quello differenziale, che ha promosso l'iniziale diffusione delle geometrie non euclidee.

In seguito, fu però l'indirizzo proiettivo a realizzare una sistemazione della geometria più unitaria e che superasse, comprendendola, l'impostazione euclidea. Importante a questo proposito è stato il lavoro di **Felix Klein** (1849-1925) e il suo cosiddetto *Programma di Erlangen*, in cui propone una diversa impostazione e classificazione della geometria sulla base dei gruppi di trasformazione geometrica. In esso Klein riconosce le tre geometrie (euclidea, ellittica, iperbolica) come casi particolari di una disciplina più grande, la geometria proiettiva. Tra l'altro fu proprio lui a coniare i termini iperbolica e ellittica per le due tipologie di geometrie non euclidee. Le idee esposte nel programma di Erlangen[12], oltre ad aver modificato notevolmente la direzione degli studi geometrici successivi, hanno contribuito a dare una nuova visione unificata delle diverse geometrie.

1.1.4 L'esigenza della modellizzazione

Nello stesso anno in cui fu pubblicata la memoria di Riemann vide la luce un altro scritto di enorme interesse per i fondamenti della geometria, il *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, di **Eugenio Beltrami** (1835-1900). Beltrami era allievo di Francesco Brioschi (1824-1897) e Luigi Cremona (1830-1903), fu nominato nel 1862 professore di algebra complementare e geometria analitica all'Università di Bologna. Oltre alla geometria non euclidea, i suoi campi di ricerca riguardavano la geometria differenziale e la fisica matematica. Il Saggio, direttamente ispirato alle idee di Gauss e Lobačevskij, era stato redatto nel 1867 e poi lasciato in sospeso in seguito a un'obiezione avanzata da Cremona. La lettura della lezione di Riemann indusse tuttavia Beltrami a pubblicare il suo scritto perché "sostanzialmente in accordo con alcune delle idee di Riemann" [43].

Nel Saggio, per dare maggior concretezza alle proprie affermazioni, Beltrami individuò un "substrato reale" alla geometria di Lobačevskij: in altre parole presentò il primo modello di geometria iperbolica. Tale modello ha come supporto una superficie che viene detta **pseudosfera di Beltrami**; ne mostriamo la costruzione.

Si consideri una curva, detta *trattrice*, definita come quella curva per la quale è costante il segmento di tangente compreso tra il punto di contatto e una retta fissa del piano; si può assumere come retta fissa del piano l'asse x.

[12]Vedi *Programma di Erlangen* in **Enciclopedia della Matematica** (2013)

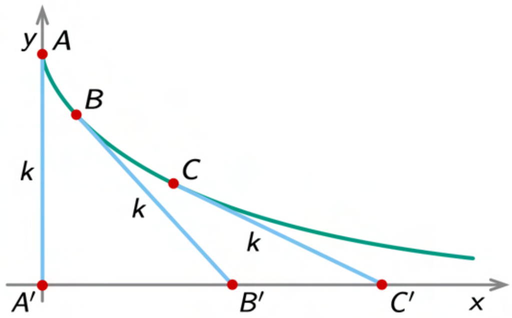


Figura 1.4: Il grafico della trattrice.

In tal caso, detta k la lunghezza costante del segmento di tangente, si può dimostrare, integrando una semplice equazione differenziale, che l'equazione della trattrice è:

$$x = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - y^2}}{y} - \sqrt{k^2 - y^2}.$$

Se ora si fa ruotare la trattrice intorno all'asse x nello spazio, essa genera una superficie di rotazione detta *pseudosfera*[13]. Tale superficie ha curvatura costante negativa pari a $-\frac{1}{k^2}$.

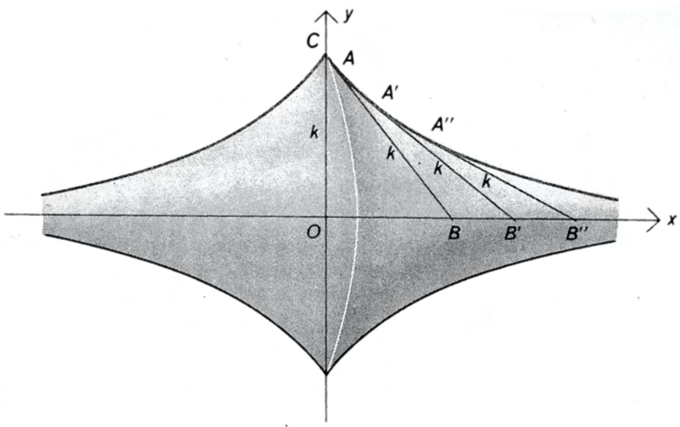


Figura 1.5: La superficie di rotazione, detta pseudosfera.

[13]Tra l'altro Beltrami costruì manualmente una superficie pseudosferica: il cosiddetto modello di cartone, del diametro di circa un metro, è ancora oggi custodito presso il dipartimento di matematica dell'Università di Pavia.

Sulla base delle considerazioni di Riemann, Beltrami ha dimostrato che alla pseudosfera compete una geometria che soddisfa, almeno in regioni limitate, gli assiomi della geometria di Lobačevskij e Bolyai. Infatti, i punti saranno i punti sulla superficie della pseudosfera, le rette saranno le geodetiche, si può osservare che per un punto esterno a una retta esistono più rette che non la incontrano e i triangoli hanno somma degli angoli interni minore di 180°; perciò costituisce un modello della geometria iperbolica.

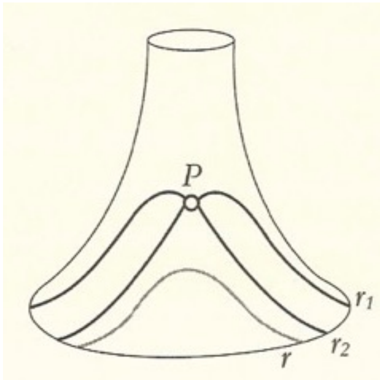


Figura 1.6: Il modello della pseudosfera di Beltrami.

Il modello presentato da Beltrami contribuì in modo notevole alla diffusione della geometria non euclidea: la possibilità di visualizzare definizioni e teoremi della geometria iperbolica su una superficie euclidea rendeva la nuova geometria più comprensibile e intuitiva. Ma, soprattutto, con ciò si dimostrò che la geometria non euclidea era perfettamente **coerente** e matematicamente definita senza bisogno di risolvere il problema della realtà di tale geometria.

Intorno al 1870 le principali geometrie non euclidee erano ormai state introdotte e studiate, tuttavia, nessuno ne aveva ancora dimostrato la coerenza. L'unica geometria ritenuta coerente era quella euclidea, perchè descrivendo il mondo fisico era inconcepibile che presentasse contraddizioni.

La pseudosfera di Beltrami suggerì di risolvere il problema della coerenza creando dei modelli per le geometrie non euclidee e di mettere in corrispondenza i loro enti, relazioni fra enti e relazioni logiche con quelli della geometria euclidea. Ciò infatti consentiva di affermare che, se queste geometrie fossero state contraddittorie, la loro contraddittorietà si sarebbe riversata sulla stessa geometria euclidea. Per dare un esempio, se la geometria iperbolica fosse stata contraddittoria, vi sarebbe stata una contraddizione nella geometria della pseudosfera, la quale, a sua volta, è stata definita mediante concetti di geometria euclidea. In altri termini, presentando modelli di geometrie non euclidee, costruiti utilizzando oggetti della geometria euclidea, esse godevano delle stesse garanzie di coerenza della geometria euclidea.

Questa soluzione del problema dimostrò anche l'indipendenza del quinto postulato dagli altri: attraverso la coerenza delle geometrie non euclidee si provò che il postulato delle parallele non poteva essere provato a partire dagli altri postulati, essendo coerente con gli altri una sua negazione.

Costruire modelli non fu un'impresa da poco; presentiamo alcuni tra i più importanti avanzati dai matematici di fine Ottocento.

I modelli della Geometria Iperbolica

Il modello di Klein

In questo modello si considera come piano la regione compresa da una circonferenza unitaria dell'usuale piano euclideo, i punti sono i punti all'interno della circonferenza e la retta per due punti è la corda che li contiene (bordi esclusi). È facile osservare che in questo modello non vale il V postulato: dati comunque una corda r e un punto P interno alla circonferenza e non appartenente a r, ci sono infinite corde che passano per P e non intersecano r. Questo vuol dire che vale la negazione N1, quella che caratterizza la geometria iperbolica.

Il modello del disco

Un altro modello è stato proposto dal francese **Henri Poincaré** (1854-1912), noto come il modello del disco, in riferimento al suo supporto. È un modello molto simile a quello proposto da Klein, la differenza sostanziale che si riscontra sta nel concetto di retta.

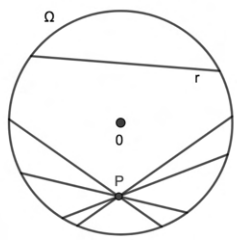


Figura 1.7: Il postulato N1 nel modello di Klein

Si considerano come piano la regione compresa da una circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine dell'usuale piano euclideo, come rette si considerano o i diametri del disco oppure gli archi di circonferenza interni al disco e ortogonali al suo bordo (estremi esclusi). Inoltre si considerano come angoli quelli compresi tra le tangenti ai corrispondenti archi di circonferenza nel punto di intersezione.

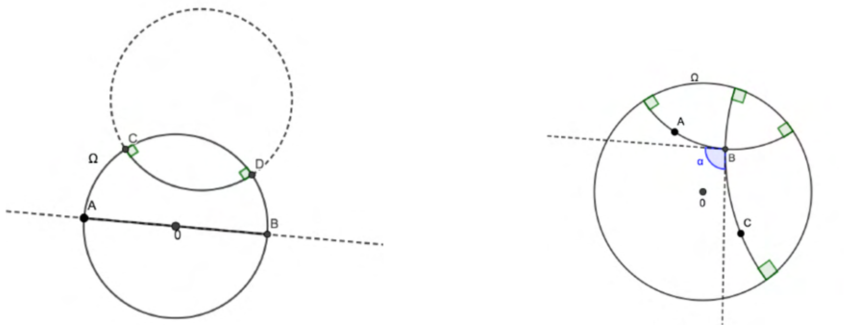
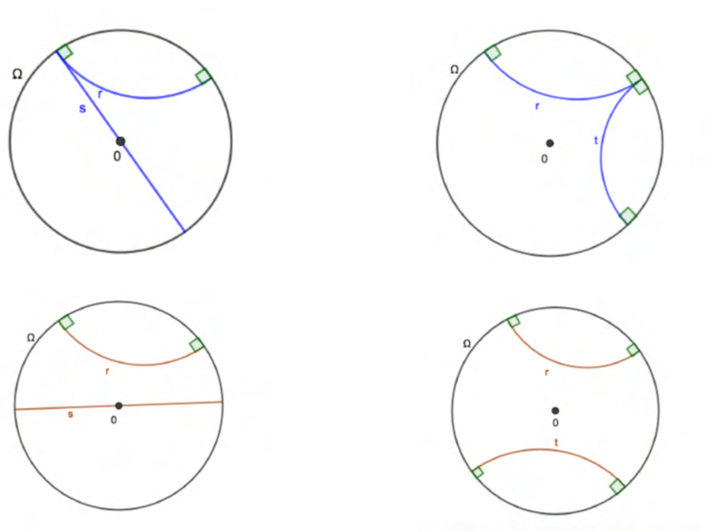


Figura 1.8: Rette e angoli nel modello del disco.

In questo modello possiamo avere due tipologie di rette che non si incontrano:
1. le *parallele* vengono definite come le rette che non si intersecano all'interno del disco, ma hanno un punto comune sul suo bordo (che comunque non appartiene al disco)
2. le *ultraparallele* sono le rette che non si intersecano nè all'interno nè sul bordo.

Osserviamo che mentre il modello di Klein non è conforme, cioè non consente di vedere le misure degli angoli e quindi confrontarle, quello proposto



da Poincaré è un modello conforme del piano iperbolico. Infatti è possibile stabilire una mappa conforme dal piano euclideo al disco di Poincaré, ovvero una riparametrizzazione della superficie tale da conservare gli angoli. Poincaré introdusse anche un altro modello, analogo a quello del disco: il modello del semipiano.

Il modello dell'iperboloide

Un altro modello di geometria iperbolica, molto usato dai matematici e fisici moderni, è quello dell'iperboloide (o di Minkowski): consideriamo lo spazio euclideo R^3 con un sistema di riferimento $(0, x, y, z)$ e la superficie definita dall'equazione:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

Si tratta dell'iperboloide a due falde. Essendo la superficie simmetrica rispetto al piano xOy, possiamo considerare solo la sua falda superiore, che denotiamo con I:

$$I = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ z > 0\}.$$

L'insieme I è il supporto del modello e le rette della geometria iperbolica sono tutte le curve che si possono ottenere intersecando I con piani passanti per l'origine di R^3; si può osservare che risulta verificato il postulato N1.

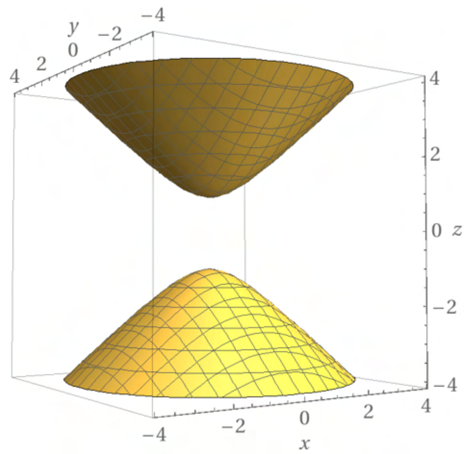


Figura 1.9: Iperboloide a due falde.

Come nei casi precedenti, si può definire una distanza appropriata su questa superficie, che viene chiamata *spazio-tempo di Minkowski*, la quale trova delle grandi applicazioni nella teoria Einsteiniana della relatività ristretta.

Infine è possibile dimostrare che tutti i modelli visti sono tra loro isometrici, quindi tutte le proprietà che si riescono a determinare in un modello sono valide anche negli altri.

I modelli della Geometria Ellittica

La geometria sferica

Riemann aveva osservato che se prendiamo la sfera come modello per una geometria allora vale il postulato ellittico N2. Tuttavia, in questo modello non è verificato il II postulato euclideo ("Che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta"), dal quale Euclide faceva discendere l'infinita lunghezza della retta. Perciò Riemann suggerì di sostituire l'ipotesi di infinita prolungabilità della retta con quella di non esistenza degli estremi: per lui una retta non doveva più essere necessariamente infinitamente prolungabile ma bastava che fosse illimitata. Di conseguenza, le circonferenze verificano questa forma, in quanto sono di lunghezza finita ma illimitate.

Quindi, modificando il II postulato, si costruisce sul modello della sfera una geometria perfettamente coerente di tipo *ellittico*, su cui vale cioè l'assioma ellittico N2, detta *geometria sferica*.

In questo modello consideriamo come piano l'insieme dei punti di una superficie sferica dello spazio euclideo, i punti sono i punti della superficie sferica e come retta consideriamo un cerchio massimo, cioè una circonferenza di raggio massimo sulla superficie. Osserviamo che per ogni coppia di punti non antipodali ci sono due archi di cerchio massimo che li congiungono, cosa che non accade né in geometria iperbolica né in quella euclidea. Questo è dovuto al fatto che le rette sono chiuse in questa superficie, per cui stabiliamo la convenzione di chiamare distanza tra P e Q la lunghezza dell'arco più corto.

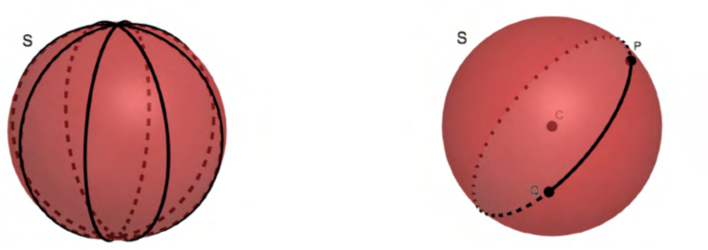


Figura 1.10: Rette e distanza nella geometria sferica.

In questo modello è ben visibile il fatto che la somma degli angoli interni ad un triangolo, sotto l'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri, é maggiore di 180°.

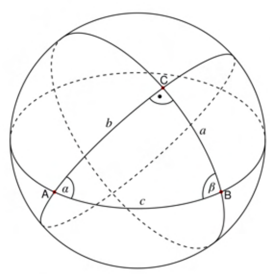


Figura 1.11: Un triangolo nella geometria sferica.

Tuttavia, in questo modello non viene a mancare solo il II postulato euclideo, ma non è verificato nemmeno il I postulato nella formulazione[14] "Per due punti distinti passa una ed una sola retta". Infatti, per due punti non passa necessariamente una sola retta, precisamente quando i due punti sono antipodali ne passano infinite.

Il modello della semisfera

Osservando il modello della sfera abbiamo visto che se due punti si trovano in posizione antipodale non è unica la retta che li contiene, ma ce ne sono infinite; questa eccezione non garantisce al modello di essere ottimale (perché, appunto, non vale il I postulato di Euclide). Possiamo però pensare di dividere la sfera a metà, in modo da non avere più i punti antipodali: per farlo possiamo quindi considerare la sfera ed identificare ogni punto con il suo antipodale, questo si traduce nel considerare una semi-sfera per rappresentare il piano ellittico. Le rette di questa geometria sono dunque semi-circonferenze massime che intersecano la circonferenza in due punti che si corrispondono; perciò in questo modello due qualunque rette hanno esattamente un punto in comune, cioè è valido il postulato N2 (quindi è un modello di geometria ellittica). Inoltre, avendo eliminato i punti antipodali, per due punti distinti passa una ed una sola retta (vale il I postulato).

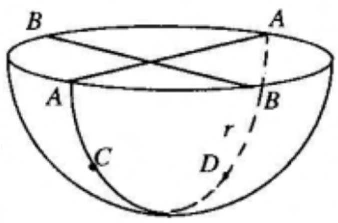


Figura 1.12: Rette nel modello della semisfera.

Questa geometria ellittica viene anche detta *singola*, enfatizzando il fatto che in essa due rette hanno esattamente un punto in comune. Al contrario,

[14]Questa proprietà venne assunta da Euclide negli *Elementi* senza però un'esplicita dichiarazione.

la geometria sferica viene anche detta *geometria ellittica doppia* proprio per sottolineare il fatto che in essa due rette hanno sempre due punti in comune. Nella geometria ellittica (singola) valgono tutti i teoremi della geometria sferica che non coinvolgono punti diametralmente opposti, ma il fatto che siano stati eliminati fa sì che i due modelli non siano isomorfi.

1.2 La divulgazione delle geometrie non euclidee[15]

L'eccellenza e la bellezza delle idee esposte nella dissertazione di Riemann si diffusero presto in tutti i centri di insegnamento e di ricerca d'Europa; ciò ebbe una diretta rilevanza per lo studio della geometria non euclidea, che cominciò a diventare popolare nel mondo matematico [30]. Come abbiamo visto, la ricerca successiva puntò al consolidamento delle nuove geometrie attraverso l'individuazione di modelli.

Allo stesso tempo, i matematici dell'epoca diedero un notevole impulso alla divulgazione delle geometrie non euclidee attraverso conferenze, articoli in riviste scientifiche e libri; questa diffusione non rimase circoscritta al solo mondo accademico ma arrivò ad estendersi anche ad un pubblico non specialistico [30]. Le idee derivanti dalle geometrie non euclidee, che erano state appannaggio dei soli matematici nella prima metà del diciannovesimo secolo, cominciarono gradualmente ad apparire nella letteratura non matematica a partire dagli anni '60 e '70 dell'Ottocento.

Uno dei maggiori divulgatori delle geometrie non euclidee fu il fisico e fisiologo tedesco **Hermann von Helmholtz** (1821-1894); scienziato tra i più poliedrici del suo tempo che contribuì in modo sostanziale all'evoluzione del pensiero scientifico del XIX secolo.

D'altronde l'avvento delle nuove geometrie ebbe conseguenze filosofiche importanti: la crisi dell'universo euclideo portò a chiedersi quale fosse la vera natura dello spazio e riconobbe la natura relativa delle "verità" matematiche che l'uomo può scoprire.

[15] Per i riferimenti si rimanda a **The Nineteenth-Century Background** in [29].

1.2.1 Helmholtz e l'opposizione alla filosofia kantiana

Helmholtz scrisse e parlò diffusamente di geometrie non euclidee: i suoi articoli sugli assiomi della geometria e la possibile curvatura dello spazio, pubblicati tra il 1860 e il 1870 non solo in Germania, ma anche in Francia, Inghilterra e Stati Uniti, attrassero fortemente l'attenzione del pubblico non specialistico cui erano rivolti. Successivamente, alla fine degli anni 1880 e 1890, si sviluppò un acceso dibattito a Parigi attraverso la *Revue Philosophique* e la *Revue de Métaphysique et de Morale de la France et de l'Etranger*, che rese le idee della geometria non euclidea un soggetto di interesse quotidiano per gli intellettuali di tutta Europa.

Due erano le aree del dibattito filosofico: la natura degli assiomi geometrici e la natura del nostro spazio. La controversia sulla natura degli assiomi geometrici era dovuta, come abbiamo visto, alla predominante visione di Kant, secondo cui gli assiomi della matematica erano a priori e la nostra intuizione a priori dello spazio era regolata dalla geometria euclidea. D'altra parte, lo sviluppo della geometria non euclidea comportava un ripensamento della natura sullo spazio; le questioni si concentravano sulla possibile curvatura dello spazio e sulla possibilità che lo spazio fosse di dimensioni superiori, suggerita dalla concezione n-dimensionale di Riemann.

Helmholtz fu uno dei partecipanti alla controversia tra nativismo ed empirismo in psicologia durante la seconda metà del XIX secolo; il suo obbiettivo era quello di combattere l'idea tradizionale kantiana di uno spazio a priori innato con la prova che la nostra conoscenza dello spazio ha origine nell'esperienza.

La possibilità di geometrie coerenti che negavano alcuni assiomi di Euclide metteva seriamente in discussione il sistema kantiano: in effetti, difficilmente si può dire che gli assiomi di Euclide abbiano origine in noi a priori, se possiamo tuttavia concepire altri sistemi di geometria. Nell'esistenza di queste geometrie Helmholtz vide la prova della sua fede nell'origine empirica degli assiomi geometrici e nell'impossibilità del loro essere a priori.

Per trasmettere il suo messaggio a un pubblico non matematico, nella celebre conferenza *Sull'origine e il significato degli assiomi geometrici* del 1870, Helmholtz utilizzò l'esempio di un mondo immaginario di esseri intelligenti bidimensionali che vivevano sulla superficie di una sfera. Supponendo che queste creature volessero stabilire un sistema di assiomi geometrici, Holmholtz fa osservare che certamente non avrebbero mai pensato di inserirvi delle linee parallele, poiché le linee nel loro mondo si incontravano sempre. Allo stesso modo, la somma degli angoli interni di un triangolo sarebbe stata pensata come maggiore di 180°, come tra l'altro si ritrova nella geometria di Riemann,"né sono necessari ulteriori esempi per mostrare che gli assiomi geometrici devono variare a seconda del tipo di spazio abitato da esseri le cui capacità di ragionamento sono del tutto conformi alle nostre".

Helmholtz era disposto ad ammettere che una certa spazialità kantiana di base potesse essere intrinseca alla mente, ma insisteva sul fatto che questa spazialità dovesse includere la possibilità di spazi sia euclidei che non euclidei e che la scelta tra di essi dovesse essere fatta dall'esperienza.

Una critica mossa dai sostenitori di Kant era che la geometria non euclidea non era così legittima come la geometria euclidea, perché lo spazio da essa generato non era intuitivo. Helmholtz invece sosteneva che la mente umana potesse intuire o rappresentare a sé stessa lo spazio non euclideo. Innanzitutto, qualsiasi intuizione dello spazio si basa sulle nostre operazioni di misura, nelle quali sono coinvolti non solamente oggetti fisici ma il nostro stesso corpo: i nostri sensi sono strumenti di misura, come lo stesso Helmholtz aveva investigato nei suoi studi di fisiologia. Quando prendiamo delle misure con un righello, quello che effettivamente osserviamo non è altro che una serie di coincidenze di punti, o congruenze, fra oggetti. Poiché le operazioni di misurazione spaziale sono osservazioni di congruenze, si può immaginare un mondo non euclideo (che lui indica con "pseudosferico" e "sferico") che sia indistinguibile, sulla base di operazioni di misura puramente geometriche, da un mondo euclideo [23]:

> Si può immaginare un determinato comportamento dei corpi che a noi appaiono rigidi, nel quale le misure dello spazio euclideo risulterebbero eguali a quelle che fossero eseguite nello spazio pseudosferico o sferico. Per visualizzare ciò ricordo innanzitutto che se tutte le dimensioni lineari dei corpi che ci circondano, e quelle del nostro corpo con essi, fossero tutte rimpicciolite o tutte ingrandite nello stesso rapporto, per esempio della metà o del doppio, non saremmo assolutamente in grado di rilevare un tale cambiamento con i nostri mezzi di percezione spaziale. [...] Si pensi all'immagine della realtà che ci dà uno specchio convesso.

Helmholtz fa riferimento allo specchio convesso: esso mostra l'immagine speculare di ogni oggetto antistante, conferendole un'apparenza corporea come se esso fosse posto in una certa posizione e a una certa distanza dietro la superficie dello specchio. Per ogni figura del mondo oggettivo viene a formarsi una corrispondente figura dietro lo specchio, nel mondo speculare. Inoltre, poiché nello specchio gli strumenti di misura si deformano allo stesso modo degli oggetti da misurare, la misura di un segmento nel mondo reale è identica a quella del mondo speculare. Di conseguenza gli uomini del mondo speculare non potrebbero scoprire che i loro corpi non sono rigidi [34]:

> Non vedo come gli uomini nello specchio potrebbero scoprire che i loro corpi non sono rigidi e le loro esperienze buoni esempi della correttezza degli assiomi di Euclide [...] e se gli uomini dei due mondi potessero conversare gli uni con gli altri, nessuno dei due potrebbe convincere l'altro di avere lui le vere relazioni e l'altro quelle errate.

Solo eseguendo delle misurazioni di quantità fisiche, gli uomini nello specchio potrebbero scoprire di vivere in un mondo non-euclideo, a patto naturalmente che "gli uomini dei due mondi" condividano le stesse teorie fisiche. Non vi è dunque nulla di contraddittorio né di fisicamente impossibile in tale immagine, contrariamente a quanto pensava Kant [23].

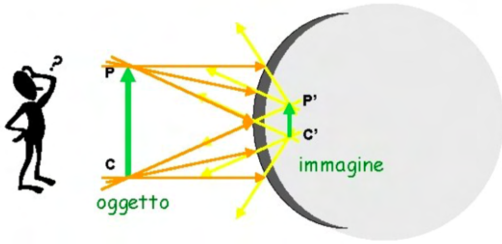


Figura 1.13: Esempio di riflessione su uno specchio convesso.

Helmholtz era molto interessato all'ottica, nel 1867 aveva scritto un lungo e dettagliato trattato sulla fisiologia dell'occhio e sulla percezione visiva. Secondo lui la maggior parte delle nozioni che riguardano lo spazio non è altro che il risultato dell'esperienza e dell'abitudine. Anche la rappresentazione della forma dei corpi e della loro localizzazione nello spazio si produce per mezzo del confronto delle immagini ricevute dai due occhi [34]. Il nostro spazio percettivo, lo spazio attorno a noi che i nostri sensi sono in grado di percepire, è euclideo, ma questa non è una ragione per concludere che la geometria euclidea sia l'unica possibile [23].

Le affermazioni di Helmholtz non convinsero tuttavia i neokantiani, i quali sostenevano che non fosse possibile una reale intuizione di uno spazio non euclideo.

1.2.2 Il convenzionalismo di Poincaré

La questione della natura degli assiomi geometrici non era stata affatto risolta da Helmholtz. La controversia si accentuò durante la fine degli anni 1880 e 1890 in Francia: oltre ai numerosi libri sull'argomento, i principali forum per il dibattito francese furono la *Revue Philosophique* e la *Revue de Métaphysique et de Morale*.

Fu il grande matematico francese **Jules Henri Poincaré** (1854-1912) a risolvere il dibattito ottocentesco su questo argomento, attraverso la sua teoria filosofica, nota come **convenzionalismo**. Solo i progressi della fisica del ventesimo secolo produrranno una modifica alla sua visione.

Poincaré è stato uno tra i più grandi matematici-scienziati del secolo scorso ed è considerato in matematica l'ultimo universalista, in quanto i suoi contributi spaziarono in ogni ambito della disciplina. Fu scrittore e filosofo della scienza; la sua opera filosofica più famosa è stata *La science et l'hypothèse (La scienza e l'ipotesi)*, pubblicata nel 1902 come risultato di dieci anni di riflessioni scientifiche. L'opera offre un quadro chiaro ed esauriente della sua filosofia convenzionalista e fu il primo tentativo dell'autore di affrontare alcune questioni di grande rilevanza nella nuova scienza da un punto di vista filosofico, tra cui la natura dell'aritmetica, la genesi della geometria, la costituzione dello spazio fisico, la forma del tempo, la struttura della materia, il mondo inorganico ed evoluzione del vivente, i fondamenti della probabilità e della statistica... fino ai famosi saggi e capitoli dedicati alle geometrie non euclidee, di cui esibiremo alcuni passi[16].

Poincaré è stato, più di ogni altro, fautore della divulgazione della geometria non euclidea a Parigi nel primo decennio del Novecento, in un contesto di grande fermento culturale; come leggiamo su *La scienza e l'ipotesi*, era infatti un grande sostenitore delle geometrie non euclidee:

> Ogni geometria suppone delle premesse; queste o sono evidenti di per sé stesse, e non hanno bisogno di dimostrazione, o possono essere stabilite solo appoggiandosi ad altre proposizioni; e poiché non si può andare così all'infinito, ogni scienza deduttiva, e in particolare la geometria, deve fondarsi su un certo numero di assiomi indimostrabili. Tutti i trattati di geometria cominciano dunque con l'enunciato di tali assiomi. Ma vi è tra gli assiomi una distinzione da fare: alcuni, come questo per esempio: "due quantità eguali a una terza sono eguali tra loro", non sono proposizioni di geometria, ma proposizioni di analisi. Io le considero come giudizi analitici a priori, e non me ne occuperò. Ma devo insistere su altri assiomi, peculiari alla geometria. La maggior parte

[16]Fonte: Poincaré H., *La Science et L'Hypothèse*, Flammarion, Parigi, 1902; traduzione a cura di F. Albergamo, La Nuova Italia, Firenze, 1949.

dei trattati ne enunciano esplicitamente tre: 1° Per due punti può passare solo una retta; 2° La linea retta è il piú breve cammino tra un punto e l'altro; 3° Per un punto non si può far passare che una sola parallela a una retta data.[...] Per lungo tempo si è cercato invano di dimostrare il terzo assioma, noto sotto il nome di postulato di Euclide. Gli sforzi fatti in questa chimerica speranza sono veramente inimmaginabili. Finalmente, al principio del secolo, e all'incirca nello stesso tempo, due scienziati, un russo e un ungherese, Lobačevskij e Bolyai, stabilirono in maniera irrefutabile che tale dimostrazione è impossibile; essi ci hanno quasi liberati dagli inventori di geometrie senza postulati; da allora, l'Accademia delle Scienze non riceve piú che una o due dimostrazioni nuove ogni anno.[...] Se fosse possibile dedurre il postulato di Euclide dagli altri assiomi, avverrebbe evidentemente che, negando il postulato e ammettendo altri assiomi, si arriverebbe a conseguenze contraddittorie; sarebbe dunque impossibile fondare su tali premesse una geometria coerente. Ora ciò è precisamente quello che ha fatto Lobačevskij. Egli suppone al principio che si possono per un punto condurre piú parallele a una retta data, e conserva, invece, tutti gli altri assiomi di Euclide. Da questa ipotesi deduce una serie di teoremi, tra i quali è impossibile rilevare alcuna contraddizione, e costruisce una geometria, la cui logica impeccabile non cede in nulla a quella della geometria euclidea. I teoremi di tale geometria sono, si capisce molto differenti da quelli a cui siamo abituati, ed essi in sul principio ci disorientano un poco. La geometria di Riemann è la geometria sferica estesa alle tre dimensioni. Per costruirla, il matematico tedesco ha dovuto buttar giú, non solo il postulato di Euclide, ma anche il primo assioma: per due punti si può condurre una sola retta. Sopra una sfera, per due punti dati si può far passare, in generale, solo un cerchio massimo [...]. Ma vi è un'eccezione: se i due punti dati

> sono diametralmente opposti, si potranno far passare per essi una infinità di cerchi massimi.

Fin dal principio, Poincaré non aveva esitato ad affermare le sue idee nel dibattito francese sulla natura degli assiomi geometrici: nel 1887 pubblicò per la prima volta la sua teoria secondo cui gli assiomi della geometria non sono né sintetici a priori né empirici, ma sono **convenzioni**. Riportiamo le sue illuminanti considerazioni:

> Dobbiamo prima domandarci quale sia la natura degli assiomi geometrici. Sono giudizi sintetici a priori, come diceva Kant? Ci si imporrebbero allora con tal forza, che non potremmo concepire la proposizione contraria, né costruire su di questa un edificio teorico. La geometria non euclidea non sarebbe possibile. [...]Dobbiamo dunque concludere che gli assiomi della geometria sono verità sperimentali? Ma non si esperimenta su rette o su circonferenze ideali; non si può farlo che su oggetti materiali. A che porterebbero dunque le esperienze fatte al fine di fondare la geometria? È facile la risposta. Abbiamo visto... che si ragiona costantemente come se le figure geometriche si comportassero alla maniera dei corpi solidi. Ciò che la geometria prende prestito dall'esperienza, sono dunque le proprietà di questi corpi. Le proprietà della luce e la sua propagazione rettilinea hanno dato così l'occasione, da cui sono sorte alcune proposizioni della geometria, e in particolare quelle della geometria proiettiva; da questo punto di vista, quindi, si sarebbe tentati di dire che la geometria metrica è lo studio dei solidi e che la geometria proiettiva è quello della luce. Ma una difficoltà sussiste, ed è insormontabile. Se la geometria fosse una scienza sperimentale, non sarebbe una scienza esatta, e andrebbe soggetta a una continua revisione. Che dico? Essa sarebbe fin d'ora riconosciuta erronea, poiché sappiamo che non esiste solido rigorosamente invariabile. Gli assiomi non sono dunque né giudizi sintetici a priori né fatti sperimen-

> tali: sono convenzioni. La nostra scelta fra tutte le convenzioni possibili è guidata da fatti sperimentali, ma essa resta libera ed è limitata solo dalla necessità di evitare ogni contraddizione. In tal modo i postulati possono rimanere rigorosamente veri, anche quando le leggi sperimentali, che ne hanno suggerita l'adozione, sono approssimative. In altri termini, gli assiomi della geometria (non parlo qui di quelli dell'aritmetica) sono semplici definizioni mascherate.

Quindi, secondo Poincaré, gli assiomi geometrici non sono né giudizi sintetici a priori o analitici né fatti empirici. Infatti, se fossero fatti sperimentali la geometria, sarebbe soggetta a incessante revisione e non sarebbe una scienza esatta; se fossero giudizi sintetici a priori o analitici, sarebbe allora impossibile rimuoverne uno e fondare un sistema sulla sua negazione. Gli assiomi geometrici sono semplicemente convenzioni, è vero però che l'osservazione di certi fenomeni fisici spiega la scelta di certe ipotesi tra tutte le possibili.

Queste idee non bastarono però all'inizio a convincere i forti sostenitori delle altre posizioni, che continuarono a discutere almeno per altri quindici anni. Nel frattempo, Poincaré continuò a produrre numerosi articoli durante gli anni 1890 e tre libri importanti tra il 1900 e il 1910, tra cui l'opera prima citata, in cui ribadì le sue opinioni sugli assiomi geometrici e portò avanti la sua visione convenzionalista pure della **natura dello spazio**. Ecco le sue parole tratte da *La scienza e l'ipotesi*:

> La maggior parte dei matematici non considera la geometria di Lobacevskij se non come una semplice curiosità logica; alcuni di essi sono andati tuttavia piú lontano. Poiché parecchie geometrie sono possibili, è proprio certo che la nostra è la vera? L'esperienza c'insegna, senza dubbio, che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti; ma perché noi non operiamo che su triangoli troppo piccoli; la differenza, secondo Lobacevskij, è proporzionale alla superficie del triangolo; non potrebbe diventar sensibile se operassimo su triangoli piú grandi, o se le nostre

> misure divenissero piú precise? La geometria euclidea sarebbe in tal caso non altro che una geometria provvisoria.[...] Che si deve quindi pensare della questione circa la verità della geometria? Essa non ha alcun senso. Sarebbe come domandare se siano vere le coordinate cartesiane e false quelle polari. Una geometria non può essere piú vera di un'altra; essa può essere soltanto piú comoda. Ora la geometria euclidea è e resterà la piú comoda: 1° Perché è la piú semplice; non solo in rapporto alle nostre abitudini intellettuali; ma anche è la piú semplice in sé [...] 2° Perché la geometria si accorda assai bene con le proprietà dei solidi naturali di questi corpi che noi tocchiamo e vediamo, e coi quali facciamo i nostri strumenti di misura.

Secondo Poincaré non è possibile dunque provare la verità o la falsità che il nostro spazio sia euclideo, infatti da misurazioni più accurate potrebbero emergere delle sorprese. Questo non significa che la geometria euclidea sia falsa, e magari quella non euclidea vera, ma significa semmai che ai fini pratici va sempre considerata la geometria più comoda. Poincaré porta questo esempio: se misurando un triangolo astronomico, si trovasse una deviazione dagli usuali 180°, si dovrebbe allora rinunciare alla geometria? No, si potrebbe semmai ipotizzare che la luce viaggi in linee curve invece che rette e adottare questa ipotesi, in quanto semplicemente la più conveniente in questo caso. Poincaré ha rafforzato la sua posizione nel corso del decennio, sottolineando che la misurazione non può mai essere fatta dello spazio stesso, ma solo dei corpi all'interno di quello spazio, corpi il cui comportamento durante il corso della misurazione non è affatto certo.

Nel discorso continua dicendo che anche la domanda "qual è la *vera* geometria?" è priva di significato, infatti "non esistono geometrie più o meno vere, ma soltanto geometrie più o meno comode". Ogni geometria ha un suo luogo di attuazione nella ricerca, ma a nessuna si può attribuire un carattere universale [24].

Poincaré si interessò anche allo studio di come le nostre conoscenze geometriche si formino a partire dall'esperienza dei corpi solidi. In un saggio del 1898 sviluppò una dettagliata analisi sulla costruzione dello spazio sensibile che la mente opera per mezzo di esperienze, costantemente correlate, come i movimenti dell'occhio, della testa o del corpo. Ogni tipo di attività corporea conduce alle idee di una geometria o dell'altra: la geometria proiettiva è essenzialmente una geometria della visione, quella euclidea è principalmente muscolare. Lo spazio sensibile che la mente arriva a costruire non è lo spazio geometrico, non essendo isotropo, omogeneo o infinito; lo spazio geometrico è piuttosto una forma della comprensione. Secondo Poincaré noi arricchiamo questa comprensione dello spazio con l'idea di gruppo[17], che ci proviene dai movimenti descritti; diversi tipi di movimenti corrispondono a differenti sottogruppi, come rotazioni intorno a una retta o traslazioni [25]. Il gruppo di trasformazioni che costituisce la geometria euclidea è quello delle *isometrie euclidee*; è il più semplice perché applicabile ai movimenti fisici dei corpi solidi [37].

In Francia il convenzionalismo di Poincaré venne accolto favorevolmente, mentre in altri paesi non mancarono né critiche né obiezioni. Ciononostante, a inizio Novecento Poincaré era considerato il più importante matematico di Francia e le sue teorie avrebbero presto influenzato gli intellettuali di tutta Europa.

[17]Una puntualizzazione: negli stessi anni in cui Poincaré scrive si stava consolidando il Programma di Erlangen, enunciato da Klein nel 1872 ma che iniziò a diffondersi solo negli anni Novanta. Scopo del programma era la rifondazione della geometria attraverso l'idea, già accennata, che esistono diverse geometrie (proiettiva, affine, euclidea e non euclidea), ciascuna caratterizzata da un proprio gruppo di trasformazioni geometriche. A partire dalle operazioni di un certo gruppo, si possono costruire delle geometrie che studiano le proprietà invarianti delle figure rispetto al gruppo di trasformazioni scelto. Secondo questa teoria però esiste una gerarchia tra queste geometrie: la geometria proiettiva è quella fondamentale da cui si derivano le altre. Anche Poincaré si occupò di questa rifondazione, collaborando con Klein.

1.2.3 Considerazioni finali

L'impatto filosofico delle geometrie non euclidee fu molto maggiore della semplice sfida iniziale alla filosofia kantiana. La geometria non era più in grado di fornire una conoscenza logica e inconfutabile dello spazio e la fiducia che i matematici vi avevano riposto fino a quel momento appariva infondata. Di conseguenza, la credenza ottimistica nella capacità dell'uomo di acquisire la verità assoluta cedette il posto al riconoscimento della relatività della conoscenza: la geometria non euclidea contribuì sostanzialmente alla scomparsa del positivismo tradizionale.

Anche con il mondo matematico l'impatto delle geometrie non euclidee fu complesso: Klein nel Programma di Erlangen proponeva una visione unificata delle diverse geometrie; d'altra parte, la geometria differenziale affermava che ogni superficie poteva avere una sua geometria intrinseca; rimaneva pure il problema del ruolo che potessero avere teorie assiomatiche coerenti ma in contrasto fra loro. Ebbene, verso la fine dell'Ottocento, iniziò ad affermarsi la visione moderna dell'assiomatica secondo cui le teorie matematiche vanno concepite come **sistemi ipotetico-deduttivi**.

In un sistema ipotetico deduttivo[18] sono assunti come ipotesi vere alcuni enunciati fondamentali, detti assiomi (per questo il sistema viene detto ipotetico), e da essi vengono logicamente dedotte tutte le altre affermazioni accettate nella teoria, dette teoremi (e per questo è deduttivo). Esempi di sistemi ipotetici deduttivi sono la geometria euclidea formalizzata secondo gli assiomi di Hilbert e l'aritmetica formalizzata dagli assiomi di Peano.

In questa visione moderna, gli enti primitivi delle teorie matematiche non hanno più bisogno di un preliminare riferimento ad enti esterni e, di conseguenza, gli assiomi sono considerati unicamente come proposizioni iniziali, senza più la richiesta che essi siano evidenti. In questo senso, le teorie matematiche diventano linguaggi non interpretati e non ci si pone più il problema della verità degli assiomi. Il requisito della **coerenza** degli assiomi è necessario e sufficiente affinché una teoria possa ritenersi legittima [36].

[18] Vedi *Sistema ipotetico deduttivo* in **Enciclopedia della Matematica** (2013)

Nell'assiomatica moderna un sistema ipotetico-deduttivo esiste come oggetto astratto e indipendente dalla realtà; questa caratteristica di astrazione lo rende svincolato da un singolo ambito di applicazione, ma capace di adattarsi alla descrizione di più aspetti della realtà, cioè di avere più modelli di interpretazione.

In conclusione, la scoperta e la diffusione delle geometrie non euclidee sono senza dubbio da annoverare fra gli eventi che hanno maggiormente influenzato lo sviluppo della matematica nel diciannovesimo secolo; in particolare esse hanno conseguito al processo di rifondazione della geometria. Al termine di questo percorso possiamo concludere che

- non esiste una geometria *vera*, ma ciascuna teoria geometrica non contraddittoria è da ritenersi legittima
- la geometria, perdendo la necessità di un aggancio preliminare con la realtà, non è più una teoria dello spazio fisico.

Capitolo 2

Il fascino di visualizzare la quarta dimensione

L'idea che si possa concepire e studiare matematicamente la geometria degli spazi di dimensione maggiore di tre si affermò tra il 1840 e il 1850, nello stesso periodo in cui stavano emergendo le geometrie non euclidee. Come abbiamo già appurato, per secoli la geometria era rimasta solidamente legata all'esperienza dello spazio fisico (euclideo) tridimensionale, pertanto la possibilità di immaginare spazi di dimensione superiore, anche quando veniva suggerita in maniera naturale dall'evoluzione stessa della matematica, non era mai stata presa in considerazione a causa del suo carattere speculativo, slegato dall'esperienza sensoriale [40]. Non è una coincidenza che le strade che portarono alla geometria superiore e alle geometrie non euclidee vengano percorse negli stessi anni: i tempi erano maturi per superare i forti pregiudizi culturali e concepire spazi geometrici senza che fosse necessario poterli sperimentare fisicamente.

Lo sviluppo della geometria n-dimensionale fu molto meno unificato rispetto a quello delle geometrie non euclidee ed avvenne grazie al contributo indipendente di alcuni grandi matematici dell'epoca che estesero a più dimensioni specifici problemi nei loro ambiti di interesse; pertanto, inizialmente rappresentò un accessorio per altre ricerche geometriche senza un corpo unificato di principi e teoremi propri [29].

In seguito, nel 1870, Cayley espose nel suo *Memoir on Abstract Geometry* i principi generali della geometria n-dimensionale; sarà comunque negli anni '80 che la geometria superiore diventerà un elemento costituente della ricerca matematica. [38] Possiamo in generale distinguere i seguenti contesti di sviluppo:

- il contesto geometrico - differenziale, con il lavoro di Riemann sulle varietà n-dimensionali;
- il contesto geometrico - sintetico, con il lavoro di Schläfli sui politopi;
- il contesto geometrico - algebrico, con i lavori di Cayley, Grassmann e Hamilton che porteranno alla nascita dell'algebra vettoriale;
- il contesto geometrico - proiettivo, con i lavori di Plücker sui complessi di rette.

2.1 La popolarità della quarta dimensione[19]

Non capita spesso che le teorie matematiche trascendano l'ambito puramente scientifico e si addentrino nelle altre manifestazioni culturali e nella società in generale, e quando succede si tratta di solito di timide incursioni. Ciononostante, tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX la società fu affascinata dalla possibilità dell'esistenza di dimensioni superiori, ed in particolare dalla **quarta dimensione**.

La quarta dimensione catturò l'immaginario collettivo e raggiunse una grande popolarità; furono proprio i matematici a promuoverne la divulgazione tramite libri, conferenze e articoli, inizialmente diretti alla sola comunità scientifica e successivamente ad un pubblico non specialistico. La divulgazione di questo argomento matematico non rimase confinata nell'ambito scientifico ma sorprendentemente raggiunse ogni ambito culturale: fisica, filosofia, teologia, letteratura e arte.

[19]Per il paragrafo si fa riferimento a **La quarta dimensione** [30].

Un personaggio fulcro per la divulgazione delle idee che circolavano sulla quarta dimensione fu l'inglese **C. Howard Hinton** (1853-1907), insegnante di matematica alla Uppingham School di Rutland. Egli dedicò i maggiori sforzi a tale scopo: oltre alcune pubblicazioni a carattere scientifico, scrisse diversi testi divulgativi sul tema e attualmente lo si può considerare il massimo esponente di quella che si conosce come "Filosofia dell'iperspazio", una filosofia popolare che rifletteva sugli spazi di dimensioni superiori e la loro interazione con le altre materie [34].

Come prima opera, Hinton pubblicò nel 1880 il saggio *What is the Fourth Dimension?*, in cui immagina che i punti dello spazio tridimensionale possano rappresentare intersezioni tra oggetti quadridimensionali e lo spazio tridimensionale. Successivamente, tra il 1884 e il 1886, scrisse diversi articoli e racconti a carattere scientifico in cui si proponeva di descrivere un universo immerso in una realtà quadridimensionale. Tutta la sua trattazione, forse per via dalla sua esperienza come insegnante, era basata su un espediente comunicativo che comprendeva il linguaggio comune, in modo che fosse alla portata di tutti, lontano dai tecnicismi del linguaggio matematico [34]. Per giunta, egli coniò diversi neologismi per descrivere gli elementi nella quarta dimensione: secondo l'Oxford English Dictionary utilizzò il termine *tesseract* nel 1888 nel suo saggio *A new era of thought*; inoltre inventò i termini *katà* (dal greco "verso il basso") e *anà* (dal greco "verso l'alto") per descrivere le direzioni quadridimensionali opposte.

I suoi racconti vennero raccolti in *Racconti scientifici*, edito da Swan Sonnenschein & Co. Tra questi citiamo *Un mondo piatto* (1884), nella cui introduzione Hinton si riferì all'allora recente *Flatland* di E. A. Abbott spiegando che, sebbene il suo racconto ne ricordasse le idee, le sue intenzioni erano assai differenti: secondo Hinton, Abbott usava la quarta dimensione come palcoscenico per mettere in scena la sua satira verso la società vittoriana, lui invece si preoccupava più degli aspetti fisici di questo mondo bidimensionale, che tra l'altro ambientò sopra una sfera e non un piano, come fece Abbott.

Peraltro *Flatland: a romance of many dimensions* è sicuramente l'opera che contribuì maggiormente alla popolarità della quarta dimensione: questo mix tra romanzo vittoriano e curiosità geometriche, come già evidenziò Hinton, ne determinò il grande successo. Scritto del teologo Edwin A. Abbott e pubblicato nel 1884, *Flatland* è un romanzo fantastico che narra la vita di un abitante di un ipotetico universo bidimensionale che entra in contatto con l'abitante di un universo tridimensionale; tramite questa metafora Abbott cerca di spiegare in modo semplice ai "non addetti" la questione delle dimensioni superiori. Riportiamo un dialogo che ne dimostra l'efficacia:

> In una dimensione un Punto in movimento non generava una linea con due punti terminali? In tre dimensioni un Quadrato non generava - e questo mio occhio non l'ha forse contemplato - quell'essere benedetto, un Cubo, con otto punti terminali? E in quattro dimensioni, un cubo in movimento non darà origine - ahimé per l'Analogia e ahimé per il Progresso della Verità se così non fosse - non darà origine, dicevo, il movimento di un cubo divino, a un organismo più divino con sedici punti terminali?

Flatlandia è un mondo bidimensionale euclideo, cioè è un piano (*flat* in inglese significa *piatto*), e gli abitanti sono delle figure geometriche. L'abitante protagonista è nello specifico un quadrato, che incontra una sfera proveniente da un mondo a tre dimensioni ("Spacelandia") che lo illumina sull'esistenza della terza dimensione. In seguito, il quadrato racconta di come gli abitanti di Flatlandia abbiano reagito negativamente al suo tentativo di illustrare la presenza di una terza dimensione. La provocazione di Abbott verso coloro che si rifiutavano di ammettere la possibilità di dimensioni superiori era abbastanza chiara. Il protagonista nel racconto non si ferma infatti ad un mondo a tre dimensioni e, riprendendo gli allora recenti lavori di Riemann, teorizza mondi a più dimensioni che aspettano solo di essere immaginati.

Flatland ottenne un successo immediato, con nove ristampe dal 1884 al 1915. Sebbene il libro non fosse stato tradotto in francese, era noto a

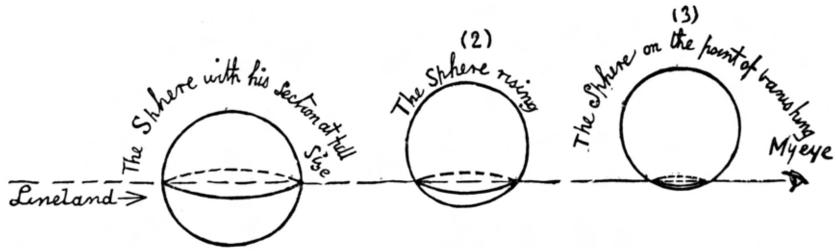


Figura 2.1: In Flatlandia la sfera, un corpo in tre dimensioni, si presenta al quadrato “attraversando” il suo mondo bidimensionale piatto, quindi facendosi sezionare dal piano. Poiché le sezioni di una sfera sono circonferenze, il cui raggio ha lunghezza che varia da 0 a quella massima del raggio della sfera, il quadrato vedrebbe inizialmente un punto (circonferenza degenere), poi una linea (le sezioni circolari della sfera) che diventa sempre più lunga e poi sempre più corta, di nuovo un punto e poi più nulla.

Parigi, poiché il francese **Esprit Jouffret** lo citò nel suo *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions* del 1903, un testo divulgativo di *La Scienza e l'Ipotesi* di Poincaré, nel quale Jouffret, tra le altre cose, descriveva ipercubi e altri ipersolidi complessi in quattro dimensioni e li proiettava sulla pagina bidimensionale.

La sfida principale di fine Ottocento divenne quella di **visualizzare** la quarta dimensione. Gli sforzi di questa ricerca si concentrarono sulla possibilità di visualizzare i solidi regolari in quattro dimensioni; ad esempio, la rappresentazione dell'*ipercubo* quadridimensionale rappresentò un simbolo di questa sfida. Alla base di questi tentativi di visualizzazione vi fu un inteso studio dei poligoni n-dimensionali (oggi detti *politopi*), figure geometriche delimitate da linee, piani o iperpiani che generalizzano il concetto di poligono nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Tra i protagonisti di questi sforzi citiamo: Ludwig Schläfli, W. Irving Stringham, Victor Schlegel, Alicia B. Stott e Harold Coxeter. Essenzialmente, come vedremo nel corso del prossimo paragrafo, le tecniche elaborate per visualizzare gli oggetti della quarta dimensione consistevano nello scendere alla terza dimensione mediante differenti tipi di proiezioni, la realizzazione di sezioni o utilizzando il metodo del *dispiegamento*.

La quarta dimensione aveva tutti gli ingredienti necessari per affascinare il grande pubblico, soprattutto perché si prestata a una grande varietà di interpretazioni. Gli scienziati la utilizzarono per tentare di descrivere l'universo e in generale gli spazi n-dimensionali diventarono uno strumento molto utile per la scienza. I filosofi meditarono sul concetto di spazio, sulla forma e la struttura dell'universo, e la quarta dimensione contribuì allo sviluppo di sistemi filosofici idealisti; i teologi ci videro la prova di una dimensione trascendentale. La quarta dimensione, in effetti, si prestava bene anche alle interpretazioni più mistiche e superstiziose, per questo fu adottata dagli spiritisti, nella teosofia, nel mondo del paranormale e dell'occultismo.

Anche gli scrittori ne presero in prestito gli aspetti più affascinanti, immaginando universi che la quarta dimensione apriva davanti a loro, viaggi in altre dimensioni e nel tempo. Oltre ad Abbott, citiamo H.G. Wells, precursore del genere letterario della fantascienza, che scrisse *La macchina del tempo* (1895) in cui considerava il tempo come quarta dimensione (ma non in senso relativista, teoria che divenne popolare solo dopo il 1920). Alla stregua di Wells, ci fu poi il francese Gaston Pawlowski e il suo romanzo *Viaggio nel paese della quarta dimensione* del 1912, che ebbe notevole successo. Pawlowski tratta sempre il tema del viaggio nel tempo, ma non lo considera come la quarta dimensione. I suoi viaggi nel futuro gli sono resi possibili dalla quarta dimensione, che interpreta come una sorta di stato trascendentale in cui tempo e spazio perdono di significato, diventando un'unica dimensione in cui tutto è compresente. Anche nell'arte la quarta dimensione rappresentò un simbolo di liberazione: per gli artisti, in particolare per i cubisti, la quarta dimensione, così come la possibilità di concepire geometrie non euclidee (basate su nuove convenzioni ma comunque legittime), significò la rottura con la prospettiva rinascimentale che imperava da cinque secoli.

Agli inizi del Novecento la quarta dimensione era diventata dunque un argomento molto popolare che continuava a suscitare interessanti discussioni tra gli intellettuali d'Europa e non solo; la geometria non euclidea invece non raggiunse mai una popolarità così diffusa, in parte perché non si prestava ad interpretazioni così numerose e richiedeva una più profonda conoscenza della matematica.

2.2 Studio dei politopi regolari

Chi per primo elaborò una teoria in n-dimensioni fu il matematico svizzero **Ludwig Schläfli**[20] (1814-1895). Tra il 1850 e il 1852 Schläfli lavorò alla sua opera principale *Theorie der vielfachen Kontinuität* (Teoria della continuità multipla), in cui affrontò lo studio della geometria degli spazi n-dimensionali, definendo i sottospazi lineari, che generalizzano le rette e i piani della geometria euclidea, e introdusse il concetto di *polischema*. Egli definì anche la sfera n-dimensionale e ne calcolò superficie e volume.

Un *polischema*, oggi detto *politopo*, rappresenta l'analogo multidimensionale dei poligoni e dei poliedri. Per dare una definizione formale possiamo affermare che [22]:

Definizione

Un n-politopo Π_n è un sottoinsieme convesso, chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ la cui frontiera è costituita da un certo numero di $(n-1)$-politopi, detti *celle*. Chiamiamo inoltre *vertici* le sue celle 0-dimensionali .

Dunque Π_n sarà:

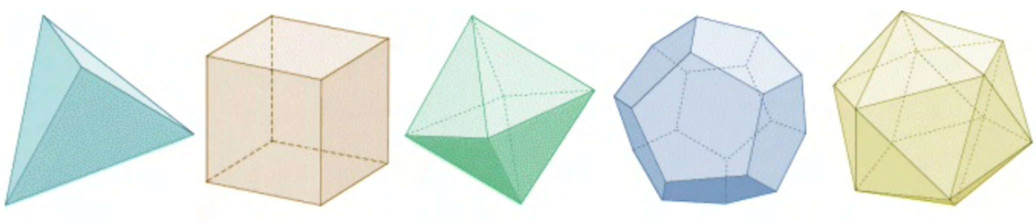
- per $n = 0$, un punto (0-politopo)
- per $n = 1$, un segmento (1-politopo)
- per $n = 2$, un poligono (2-politopo)
- per $n = 3$, un poliedro (3-politopo)

Avremo poi che Π_4 ha celle tridimensionali Π_3, celle piane Π_2 dette *facce* (ciascuna delle quali separa due Π_3), celle Π_1 dette *spigoli* e celle Π_0 dette *vertici*. In questo modo è possibile quindi definire ciascun Π_n, dato $n \in \mathbb{N}$. In modo analogo ai poliedri, un politopo Π_n si dice *regolare* se sono regolari tutti gli elementi che lo compongono aventi dimensioni inferiori a n.

[20]Per i riferimenti si rimanda a **Schläfli** in [38], pp. 3-9

A Schläfli si devono tutte le nozioni fondamentali della teoria dei politopi e la classificazione dei politopi regolari: determinò i politopi regolari in ogni dimensione e provò che ci sono esattamente sei politopi regolari in quattro dimensioni e tre nelle dimensioni superiori. Uno dei punti chiave del suo lavoro consiste anche nella generalizzazione multidimensionale della formula di Eulero per i poliedri $v - s + f = 2$, che mette in relazione il numero di facce (f), spigoli (s) e vertici (v).

Schläfli non diede immagini visualizzabili dei politopi, ma li descrisse associando loro un simbolo, che prende il suo nome. Il *simbolo di Schläfli* di un politopo regolare di dimensione n è una successione $\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\}$ di interi positivi, definita ricorsivamente nella maniera seguente. Per $n = 2$ il simbolo di Schläfli di un poligono regolare è $\{p\}$, dove p indica il numero dei lati; per esempio $\{3\}$ indica il triangolo equilatero, $\{4\}$ indica il quadrato. Per $n = 3$ il simbolo di Schläfli di un poliedro regolare è $\{p, q\}$, dove le facce che lo compongono sono poligoni a p-lati e ogni vertice è confine di q-facce; per esempio un cubo è rappresentato da $\{4, 3\}$ perché ha 3 quadrati attorno ad ogni vertice. Per $n = 4$ il simbolo di Schläfli di un politopo 4-dimensionale regolare è $\{p, q, r\}$, in quanto ha r $\{p, q\}$ celle poliedrali regolari attorno ad ogni spigolo; e così via. Ci sono infiniti poligoni regolari convessi, mentre i poliedri regolari tridimensionali convessi sono solo cinque (i *solidi platonici*).



tetraedro $\{3, 3\}$, cubo $\{4, 3\}$, ottaedro $\{3, 4\}$, dodecaedro $\{5, 3\}$, icosaedro $\{3, 5\}$

Per $n = 4$ ci sono esattamente 6 politopi regolari e sono $\{3, 3, 3\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 4, 3\}$, $\{5, 3, 3\}$, $\{3, 3, 5\}$; mentre si dimostra che i politopi regolari convessi per $n > 4$ sono solo tre e sono $\{3, 3, ..., 3\}$, $\{3, 3, ..., 3, 4\}$, $\{4, 3, 3, ..., 3\}$.

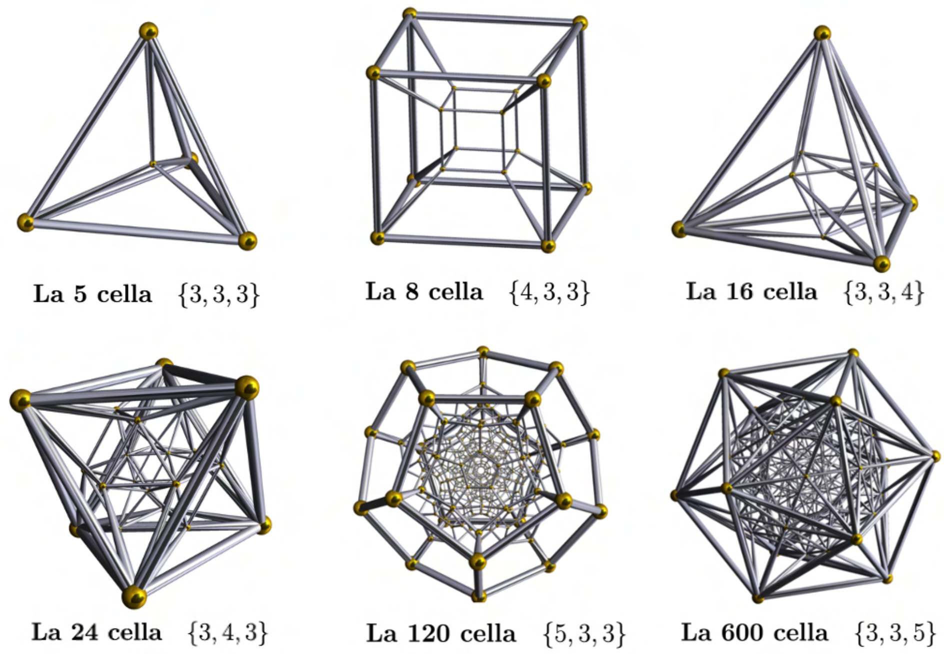


Figura 2.2: I diagrammi di Schlegel reticolari (proiezione prospettica) dei 6 politopi regolari quadridimensionali.

Schläfli sottopose all'*Akademie* di Vienna il suo scritto, che però venne rifiutato a causa della sua lunghezza. Alcuni frammenti vennero in seguito divulgati in Francia e in Inghilterra nel 1855 e 1858 ma passarono del tutto inosservati per il fatto che, come successivamente osservò Coxeter, i titoli erano troppo aridi e tendevano a nascondere i tesori geometrici che l'opera conteneva [20]. L'intero manoscritto fu pubblicato solamente sei anni dopo la morte dell'autore, nel 1901; pertanto non è difficile comprendere come i matematici che all'epoca si interessarono degli stessi argomenti fossero ignari delle scoperte dello svizzero [22].

Così molti ritengono che sia stato l'americano **W. Irving Stringham**[21] (1847-1909) il primo a determinare le figure regolari dello spazio a quattro dimensioni nella sua tesi di dottorato *Regular Figures in n-dimensional Space*,

[21] Per i riferimenti si rimanda a **La riscoperta dei politopi negli anni '80** in [34], pp. 58-63.

pubblicata nell'*American Journal of Mathematics* nel 1880, quasi trent'anni dopo i lavori di Schläfli [20]. L'articolo ottenne un incontestabile successo soprattutto perché forniva una prova intuitiva dell'esistenza dei sei politopi regolari e dava una costruzione esplicita per ciascuno di essi. Il contributo di Stringham è stato fondamentalmente quello di aver per primo tentato di rappresentare graficamente i politopi.

Anche Stringham partì col dimostrare la generalizzazione della formula di Eulero per ogni politopo convesso in uno spazio a dimensione n: denotando con N_0 il numero di vertici, con N_1 il numero di spigoli,..., con N_k il numero di celle poliedriche di dimensione k (chiaramente $N_n = 1$, perchè rappresenta il politopo), la generalizzazione della formula di Eulero è

$$1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k N_k = 0.$$

Nel caso $n = 3$ si ha $1 - N_0 + N_1 - N_2 + 1 = 0$, cioè $1 - v + s - f + 1 = 0$ che è la formula di Eulero.

In verità, Stringham denotava con *n-fold* (m)*-hedroid* un politopo a n dimensioni con m facce di dimensione $n - 1$; quindi un tetraedro era un 3-fold (4)-hedroid, un cubo un 3-fold (6)-hedroid.

Dopodiché, nella dissertazione, procedette alla classificazione dei politopi regolari quadridimensionali, presentandoli tutti e dando per ciascuno una descrizione intuitiva. La generalizzazione del tetraedro è il 4*-fold* (5)*-hedroid* (ipertetraedro) che ha 5 vertici, 10 spigoli, 10 facce triangolari e 5 celle tetraedrali. Riportiamo la costruzione proposta da Stringham, chiaramente si tratta di operazioni virtuali da immaginare nella quarta dimensione:

> Per costruire questa figura seleziona un vertice qualsiasi di ciascuno dei quattro tetraedri e uniscili. Porta le facce, che si trovano adiacenti l'una all'altra, due più due in coincidenza. Rimarranno quattro facce ancora libere; prendi un quinto tetraedro e unisci ciascuna delle sue facce a una di queste quattro rimanenti.
> La figura risultante sarà il completo 4-fold penta-hedroid.

Per rappresentare l'"ipercubo" in quattro dimensioni o 4-*fold* (8)-*hedroid* (oggi viene chiamato *tesseract*), Stringham ricorse alla costruzione, dedotta per analogia da quella del quadrato e del cubo, di immaginare di traslare un cubo nella direzione perpendicolare allo spazio in cui esso è collocato. Per stabilire le informazioni N_k su numero di vertici, spigoli, facce e celle del tesseract impiegò strategie combinatorie valide per un ipercubo di qualunque dimensione n: il numero dei vertici è $N_0 = 2^n = 2^4$, il numero di spigoli è $N_1 = n \cdot \frac{2^n}{2} = 4 \cdot 2^3$; il numero delle facce di dimensione generica k vale

$$N_k = 2^{(n-k)} \cdot \binom{n}{k}$$

quindi il numero delle facce è $N_2 = 2^{(n-2)} \cdot \binom{n}{2} = 2^2 \cdot 6$ e il numero delle celle (cubi) è $N_3 = 2^{(n-3)} \cdot \binom{n}{3} = 2^1 \cdot 4$, infine $N_4 = 2^{(n-4)} \cdot \binom{n}{4} = 1$.

La classificazione continua con la descrizione degli altri solidi via via più complessi: l'iperottaedro o 4-*fold* (16)-*hedroid*, il 4-*fold* (24)-*hedroid*, il 4-*fold* (120)-*hedroid* e il 4-*fold* (600)-*hedroid*.

Politopo 4-dim.	Celle 3-dim.	Facce	Spigoli	Vertici
Ipertetraedro	5 tetraedri	10	10	5
Ipercubo	8 cubi	24	32	16
Iperottaedro	16 tetraedri	32	24	8
24-celle	24 ottaedri	96	96	24
120-celle	120 dodecaedri	720	1200	600
600-celle	600 tetraedri	1200	720	120

Figura 2.3: Tabella riassuntiva dei 6 politopi regolari quadridimensionali.

Stringham conclude dimostrando, in parte intuitivamente, che in spazi di dimensioni maggiori di quattro ci sono solo tre politopi regolari e sono l'ipertetraedro, l'ipercubo, l'iperottaedro, illustrati prima.

Infine riportiamo alcune immagini tratte da "Figure regolari nello spazio n-dimensionale" di Stringham. Le immagini superiori rappresentano le "facce" margini di ciascun vertice di, rispettivamente, un ipertetraedro, un ipercubo e un iperottaedro, i quali, come abbiamo visto, sono la generalizzazione di tetraedro, cubo e ottaedro in 4 dimensioni. Infatti, se consideriamo ad esempio l'ipertetraedro, ad ogni vertice fanno capo 4 tetraedri, allo stesso modo in cui per un tetraedro (in 3 dimensioni) a ciascun vertice corrispondono 3 triangoli. Le immagini sottostanti rappresentano invece le proiezioni delle figure sul piano; in particolare quella dell'ipercubo (Figura 4) sarà in seguito molto adottata [30].

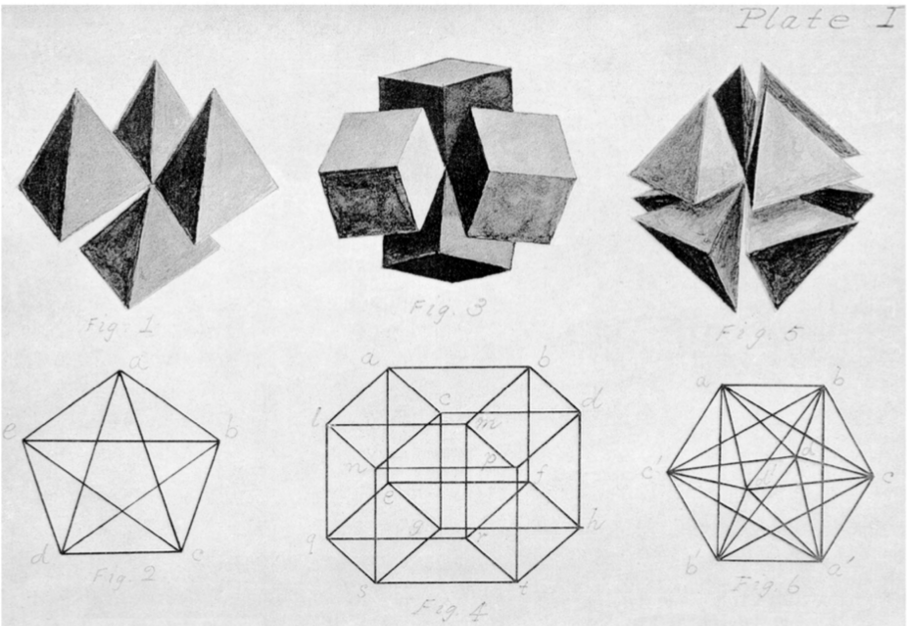


Figura 2.4: Alcune delle "Figure regolari nello spazio n-dimensionale" [41].

Dopo la pubblicazione del lavoro di Stringham apparvero altri lavori sugli iperspazi; i più significativi interventi nel corso degli anni '80 furono quelli di **Reinhold Hoppe**, che riscoprì i simboli di Schläfli, e di **Victor Schlegel**, che propose un particolare metodo di proiezione attraverso cui rappresentare i politopi.

Ai fini della divulgazione e della visualizzazione dello spazio a quattro dimensioni, contribuì un articolo di Schlegel del 1892, nel quale il matematico tedesco rilesse, alla luce delle contemporanee scoperte in algebra lineare di Hermann Grassmann, il lavoro di Stringham introducendo numerose illustrazioni dei politopi. Nel 1891, in un articolo pubblicato in Italia, Schlegel presentò anche il suo metodo di proiezione, oggi detto *diagramma di Schlegel*, che è tuttora uno degli strumenti di rappresentazione più utilizzati (sono diagrammi di Schlegel quelli precedentemente illustrati in Figura 2.2).

Un diagramma di Schlegel è uno strumento utile per descrivere politopi di dimensione arbitraria. Nel caso di un poliedro, ad esempio, il suo diagramma di Schlegel è un particolare *grafo piano* che ne ricostruisce l'intera struttura combinatoria, non tenendo conto delle caratteristiche metriche. Quindi, per costruire un diagramma di Schlegel di un poliedro, si considera il grafo ottenuto proiettando su un piano vertici e spigoli del poliedro da un punto P opportunamente scelto (si veda l'esempio sotto per il tetraedro).

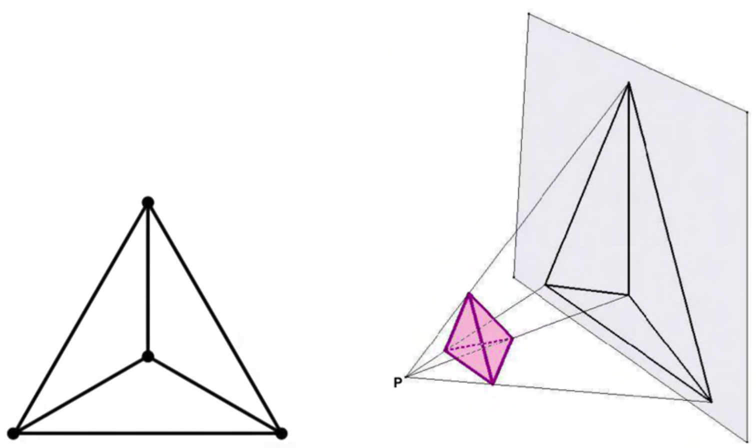


Figura 2.5: A sinistra, diagramma di Schlegel di un tetraedro. A destra, costruzione del diagramma di Schlegel di un tetraedro.

Più in generale, un diagramma di Schlegel è un oggetto geometrico ottenuto proiettando un politopo di dimensione n, contenuto nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, su un iperpiano di dimensione $n-1$.

Parallelamente una donna irlandese, **Alicia Boole Stott**[22] (1860-1940), terza figlia del logico George Boole, intraprese un solitario studio della geometria dei politopi, termine che fu tra l'altro coniato da lei stessa, e giunse alle stesse conclusioni di Schläfli e Stringham.

Non è immediato acquisire la capacità di visualizzare gli ipersolidi con la stessa facilità e naturalezza con cui concepiamo i solidi, perciò è sorprendente come Alicia Boole Stott, che non ricevette un'educazione matematica, giunse a questi risultati affidandosi solo alla sua inusuale abilità di visualizzare la quarta dimensione. Inizialmente, fu probabilmente influenzata da Hinton, che era suo cognato, il quale potrebbe averle suscitato l'interesse per l'argomento. Tra il 1880 e il 1895, ignara dei lavori di Schläfli e Stringham, fu capace di riscoprire i sei politopi regolari in quattro dimensioni e di ricavarne le sezioni tridimensionali. Nel 1894 il geometra olandese Pieter Hendrik Schoute, professore all'Università di Groninga, pubblicò un articolo in cui calcolava analiticamente le sezioni centrali dei sei politopi regolari in quattro dimensioni; Boole Stott, venuta a sapere della pubblicazione, vide che i risultati coincidevano con i suoi, pertanto gli inviò le foto dei suoi modelli. Stupito, Schoute le propose una collaborazione, che durò per quasi vent'anni, in cui i suoi metodi analitici erano combinati all'approccio intuitivo di Alicia; in seguito, Schoute la incitò a divulgare i suoi risultati, che furono pubblicati in due articoli, nel 1900 e nel 1910.

La strategia di Boole Stott per rappresentare i politopi regolari in quattro dimensioni consisteva nel destrutturare il politopo presentando le sue sezioni tridimensionali. Così come in tre dimensioni un poliedro può essere sviluppato sul piano bidimensionale considerando una sequenza di sue sezioni parallele (che può essere presa in qualunque direzione, ma per semplicità è meglio considerare piani perpendicolari ad uno degli assi di simmetria che unisce un vertice o un punto medio o il centro di una faccia al centro del solido), analogamente, secondo Boole Stott, era possibile sviluppare un politopo quadridimensionale in uno spazio tridimensionale attraverso la sequenza delle

[22] Per i riferimenti si rimanda a **Visualizzare la quarta dimensione** in [22]

sue sezioni parallele e perpendicolari ad una delle quattro direzioni principali; con questo sviluppo si riusciva quindi ad intuire il politopo e in qualche modo a visualizzarlo.

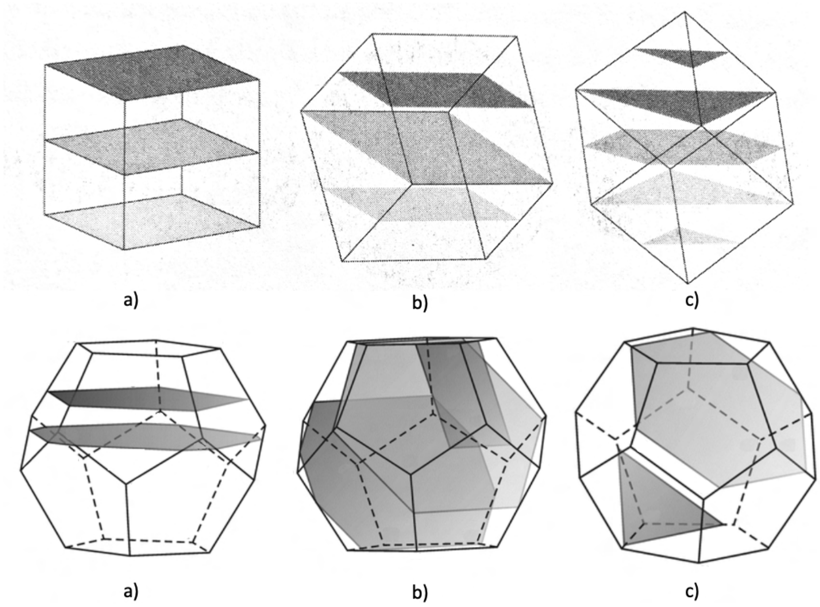


Figura 2.6: Esempi di sezioni di un cubo e di un dodecaedro, ottenute dall'intersezione del poliedro con piani rispettivamente: a) paralleli ad una faccia; b) perpendicolari al piano che unisce uno spigolo con il suo opposto; c) perpendicolari alla diagonale che unisce un vertice con il suo opposto.

Nel suo primo articolo del 1900 *On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids*, dove tra l'altro introdusse per la prima volta il termine politopo, Boole Stott costruì con questo procedimento le sezioni tridimensionali dei sei politopi regolari quadridimensionali.

Boole Stott comincia il trattato affermando che "nel determinare sequenze di sezioni delle figure regolari quadridimensionali con il metodo dato in questo articolo è solo necessario conoscere il numero di solidi che si incontrano in ogni vertice". Ad esempio, Figura 6 (immagine a pagina seguente) mostra una parte di sezione di un 24-celle (ipersolido le cui celle sono ottaedri che si incontrano a gruppi di sei per ciascun vertice); eccone la costruzione: "Sia $ABCDEF$, un ottaedro regolare in uno spazio tridimensionale, uno dei solidi delimitanti un 24-celle. In questa figura (il 24-celle) ci sono 6 solidi in ogni vertice, condizione che sarà soddisfatta se ne si mette uno su ogni faccia e uno su ogni vertice di $ABCDEF$". Per quanto riguarda l'ipercubo (ipersolido le cui celle sono cubi che si incontrano a gruppi di quattro per ogni vertice), così come è possibile trovare sezioni di un cubo intersecandolo con, ad esempio, piani (bidimensionali) paralleli ad una sua faccia, allo stesso modo si può determinare una sezione dell'ipercubo (Figura 1) intersecandolo con spazi tridimensionali paralleli ad una sua cella. Il risultato è una serie di cubi regolari, dove gli spazi tridimensionali considerati sono paralleli al cubo centrale $ABCDEFGH$.

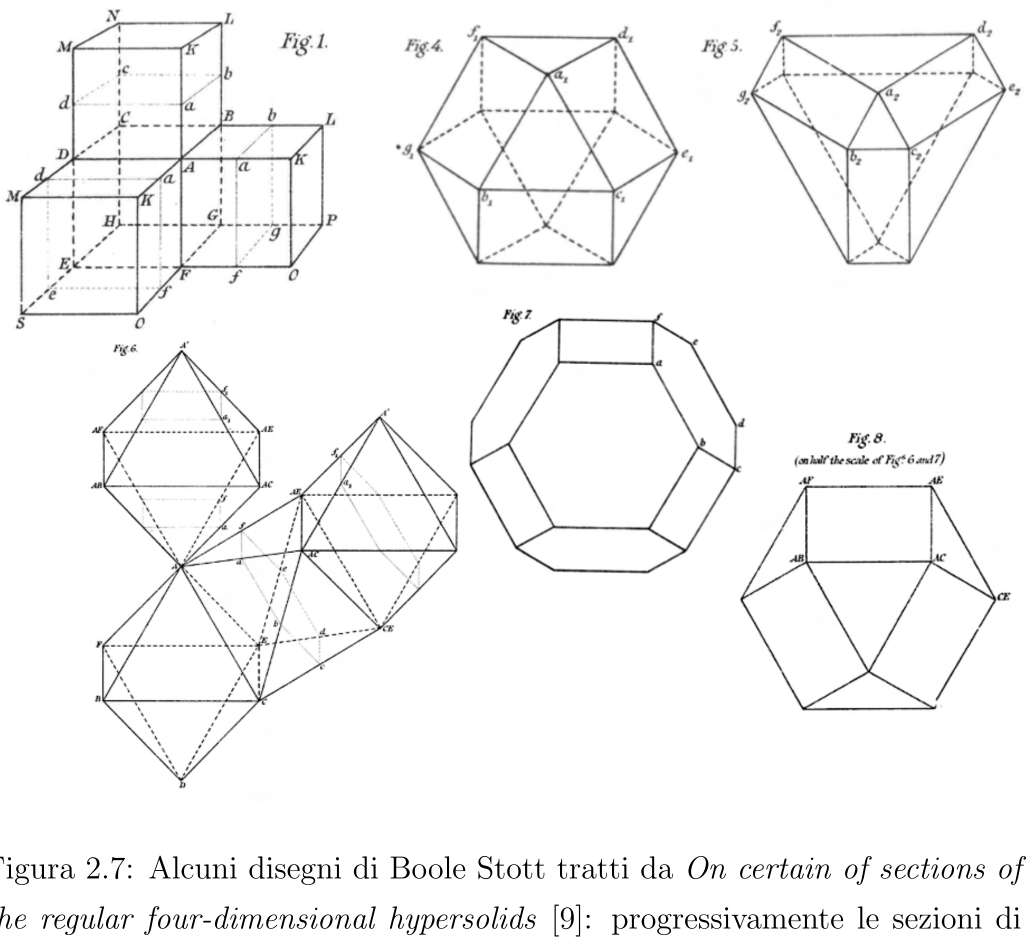


Figura 2.7: Alcuni disegni di Boole Stott tratti da *On certain of sections of the regular four-dimensional hypersolids* [9]: progressivamente le sezioni di un Ipercubo (Fig.1), 16-celle (Fig. 4 e 5), 24-celle (Fig. 6, 7 e 8).

Nell'articolo Boole Stott disegnò anche le sezioni del 600-celle, costituito da 600 tetraedri, e ne fornì pure i disegni delle sezioni "dispiegate". Il metodo del *dispiegamento* di un ipersolido quadridimensionale consiste nel ritagliare alcune delle facce tra le celle del politopo e poi incollarle nella terza dimensione. Per dare un esempio comune, mostriamo l'ipercubo dispiegato in tre dimensioni, che è l'analogo del cubo dispiegato in due dimensioni.

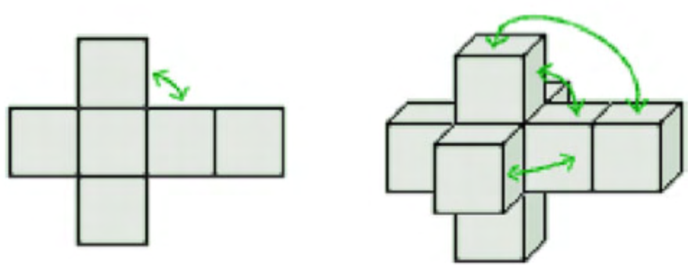


Figura 2.8: Cubo ed Ipercubo dispiegati.

Quelli presentati sono disegni, tuttavia ella ne costruì pure dei modelli in cartone, che sono tutt'ora conservati nel museo dell'Università di Groninga, dove nel 1914 conseguì il dottorato ad honorem per i suoi lavori.

Figura 2.9: Modelli in cartone delle sezioni parallele di un 600-celle.

Nell'articolo del 1910 *Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space filings*, invece, Boole Stott sviluppò un metodo per ottenere politopi semi-regolari partendo da quelli regolari e riuscì ad ottenere quarantacinque diversi politopi semi-regolari, anche se la maggior parte di questi sarà conosciuta per il successivo lavoro di W. A. Whythoff (1918) [34].

Dopo la morte di Schoute (1913), Boole Stott rimase isolata dalla comunità matematica fino al 1930, quando conobbe il giovane Harold S. M. Coxeter, con cui collaborò fino alla morte. Nel 1923 Coxeter aveva iniziato le sue ricerche sulla geometria n-dimensionale, la collaborazione con Boole Stott, i cui risultati sono racchiusi nel libro *Politopi regolari* del 1948, contribuì alla nascita della moderna visione della teoria, legata allo sviluppo dello studio dei gruppi finiti.

In conclusione, tra il 1900 e il 1910 la quarta dimensione era un tema molto diffuso e il fascino di poterla visualizzare, o quantomeno intuire, non lasciava indifferente nessuno. A dimostrazione di questo fatto, basti pensare che nel 1909 la rivista *Scientific American* sponsorizzò "the best explanation of the fourth dimension" e ricevette più di duecento contributi da tutto il mondo [20].

Capitolo 3

L'influenza delle "Nuove Geometrie" sul Cubismo

Sarebbe stato normale che la doppia rivoluzione geometrica, che vide la scoperta delle geometrie non euclidee e la nascita della geometria multidimensionale, restasse sconosciuta per la maggior parte della società dell'epoca e, per quanto importanti potessero essere dette teorie matematiche dal punto di vista scientifico, richiamasse l'attenzione solo degli scienziati, a cui tali teorie erano rivolte [30]. Sorprendentemente invece, come abbiamo mostrato nei capitoli precedenti, furono proprio queste teorie, la geometria delle dimensioni superiori dello spazio insieme alla geometria non euclidea, ad affascinare il pubblico di inizio Novecento.

In particolare, per gli artisti del primo Novecento le "nuove geometrie" ebbero un fascino senza precedenti, diventando un simbolo di liberazione dalla tirannia della tradizione. Queste geometrie, che sembravano così "nuove" e moderne, esistevano in realtà già dalla prima metà dell'Ottocento, ma iniziarono ad essere divulgate solo a partire dagli anni '70 e '80, pertanto divennero note al grande pubblico con un certo ritardo [29].

Eppure, il riferimento alle nuove geometrie è stato un aspetto a lungo trascurato nella storia dell'arte del XX secolo: come ci fa notare la storica dell'arte Linda Dalrymple Henderson in *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art* (1983) [29]

> In passato gli storici dell'arte hanno spesso ignorato o rifiutato i riferimenti alle "nuove geometrie" negli scritti e nelle opere degli artisti dell'arte di inizio Novecento. Tuttavia, se intese nel loro contesto originario, la quarta dimensione e la geometria non euclidea sono lungi dall'essere il "flagello di ogni storia della pittura moderna", come sono state definite. Questi concetti invece aprono la porta alla nostra comprensione più completa degli obiettivi di molti degli artisti più importanti ed influenti del primo Novecento. Solo uno storico dell'arte moderna, Meyer Schapiro, sembra aver intuito le più ampie implicazioni filosofiche delle nuove geometrie all'inizio del XX secolo.

Nel suo saggio, *The Nature of Abstract Art* del 1937, Schapiro osservava: "Proprio come la scoperta della geometria non euclidea diede un potente impulso alla visione che la matematica fosse indipendente dall'esistenza, così la pittura astratta tagliava le radici delle idee classiche di imitazione artistica". In altre parole, il precetto, di spirito profondamente anti-euclideo, di non imitare più la natura, fu di ispirazione anche per l'arte di inizio Novecento, sintetizzato nell'imperativo "Que le tableau n'imite rien"[23] [5].

Un aspetto comune alle principali avanguardie fu proprio la convinzione che l'arte non dovesse più imitare la realtà, ma solo la sua operazione di "creatrice di forme"; si può dire che in questo periodo si operò la trasformazione dell'arte da rappresentativa a funzionale. D'altronde, l'esigenza di sviluppare la funzionalità dell'arte rientrava nella tendenza generale della società, ormai totalmente coinvolta nel ciclo economico di produzione e consumo, a realizzare la massima funzionalità [3].

Di conseguenza, anche la visione prospettica tridimensionale, che cercava la rappresentazione di ciò che vede l'occhio dell'artista e che dominava l'arte dal Rinascimento, già messa in crisi dal consolidamento delle teorie non euclidee, fu relegata allo status di obsoleta regola accademica [44]. Inoltre,

[23] "Che il quadro non imiti nulla" scrivono i cubisti Metzinger e Gleizes in *Du Cubisme* nel 1912.

l'invenzione della fotografia, che permetteva di ottenere un'immagine fedele e in prospettiva di ciò che si trova davanti alla fotocamera, fece sì che gli artisti se ne allontanassero progressivamente [30].

Questo processo di trasformazione dell'arte iniziò timidamente con gli impressionisti (i quali, a differenza dei realisti che volevano rappresentare obiettivamente la realtà, cercavano di rappresentarla soggettivamente, nel modo in cui la vedevano in un esatto istante) e proseguì compiutamente con il pittore francese **Paul Cézanne** (1839-1906) (nella pittura di Cézanne gli oggetti sono scomposti e ritessuti nella trama dello spazio, il quadro non è più la superficie su cui si proietta, ma il piano plastico in cui si organizza la rappresentazione della realtà) [3]. Tuttavia, la rottura totale con la tradizione arrivò definitivamente per mano del **Cubismo**.

I cubisti operarono la prima ricerca analitica sulla struttura funzionale dell'opera d'arte (1908): il loro obiettivo non era quello di riprodurre un soggetto ma di dimostrare di conoscerlo in modo profondo, conferendogli una propria autonoma realtà e una propria funzione, "così di fronte al quadro non bisognava più chiedere che cosa rappresentasse, ma come funzionasse" [3].

Il cubismo è il movimento artistico che fu maggiormente influenzato dalle nuove geometrie. I cubisti, nello specifico gli artisti del *Gruppo di Puteaux*, percepivano la loro vicenda artistica come parallela a quella dei geometri non euclidei, dove la prospettiva rinascimentale e la tradizione figurativa classica erano accostate alla matematica euclidea, mentre l'arte cubista era accomunata alla geometria non euclidea, in quanto rappresentante di nuove convenzioni, legittime quanto le precedenti.

Come la geometria non euclidea, anche la quarta dimensione rappresentò per i cubisti un simbolo di liberazione e una fonte di nuove idee; in particolare li incoraggiava ad allontanarsi dalla "realtà visiva" e a rifiutare il sistema prospettico che per secoli aveva rappresentato il mondo come tridimensionale. Precisiamo che il termine "quarta dimensione" per i cubisti aveva associazioni geometriche e non era semplicemente un espediente filosofico; tra l'altro, si prestava molto più facilmente ad applicazioni pittoriche di quanto non facessero i principi della geometria non euclidea [29]. La quarta dimensione sarà un tema ricorrente, sia da un punto di vista geometrico che filosofico, in tutte le avanguardie del ventesimo secolo, ciascuna delle quali se ne interessò interpretandola secondo il proprio punto di vista. Tuttavia, anche gli artisti che si concentrarono solo sulla quarta dimensione dovevano qualcosa alle geometrie non euclidee, in quanto avevano preparato la strada all'accettazione di tipi di spazio alternativi. In fin dei conti, la rivoluzione artistica avviata dal cubismo ad inizio Novecento, parimenti a quella non euclidea un secolo prima, fu innanzitutto una rivoluzione di pensiero.

Il presente capitolo si prefigge di documentare l'influenza che le nuove geometrie hanno avuto sull'arte cubista. Seguendo l'approccio di Henderson in [29], ci concentreremo su quegli artisti che hanno lasciato testimonianze dirette del loro interesse per i concetti spaziali relativi alle nuove geometrie. Il capitolo si apre con una breve presentazione del movimento, dei suoi protagonisti e delle sue fasi di sviluppo; dopodiché vengono descritti i principali canali attraverso cui i cubisti avrebbero potuto conoscere le nuove geometrie. Nei primi due capitoli abbiamo citato alcuni tra i matematici e gli scrittori che più si sono dedicati alla divulgazione delle teorie non euclidee e della quarta dimensione; ora ne tracciamo l'effettiva influenza sulla teoria e pratica cubista. In ultimo, viene presentata la critica, mossa da Henderson, agli storici dell'arte che fino agli anni '70 videro ingenuamente nella quarta dimensione cubista un riferimento alla *Teoria della Relatività* di Einstein.

Per i riferimenti bibliografici si rimanda a *Cubismo* [33] e [26] (per gli aspetti storici e artistici) e *Cubism and the New Geometries* in [29] (per la parte sulle influenze).

3.1 Il movimento cubista

Il Cubismo è una corrente artistica e culturale che nasce a Parigi intorno al 1907, dalle ricerche di Pablo Picasso e Georges Braque, e si conclude nel 1914; è considerato il primo di quei movimenti, designati in ambito

artistico-letterario con il nome di *avanguardie*, che all'inizio del Novecento si adoperarono per il rinnovamento dell'arte, ponendosi in aperta opposizione alla tradizione. La sua reazione più immediata è sicuramente nei confronti dell'Impressionismo, al quale rimproverò di essere "solo retina e niente cervello"; dirà Picasso a una mostra impressionista: "Qui si vede che piove, si vede che splende il sole, ma non si vede mai la pittura" [16].
A determinare questo movimento rivoluzionario hanno concorso [3]:

- la vasta retrospettiva (56 opere) di Cézanne al Salon d'Automne di Parigi nel febbraio 1907;
- il *pointillisme* di Seurat, caratterizzato dalla scomposizione di colori puri e dalla ricomposizione retinica, che aveva aperto la strada ad una costruzione mentale del dipinto;
- il generale atteggiamento "primitivista" tra gli artisti dell'epoca, che risale almeno a Gauguin, e la suggestione per la scultura "negra".

Cézanne è considerato il predecessore dei cubisti: da un lato per la costruzione delle pennellate in tasselli ordinati secondo una propria interna geometria e animati da una direzionalità mutevole nei vari punti del quadro (si veda la serie di dipinti *La montagna Sainte-Victoire*); dall'altro per il principio di rappresentare gli oggetti attraverso solidi geometrici, sintetizzato in "bisogna trattare la natura secondo il cilindro, la sfera e il cono", ossia riconducendo la natura alle sue forme essenziali, distintivo in *I giocatori di carte*. Tuttavia, il suo maggiore contributo è stato quello di aver avviato la rivoluzione prospettica che costituì il punto di partenza per la contestazione cubista. Nelle sue opere troviamo anticipati: la resa simultanea degli oggetti da differenti punti di vista; il ribaltamento dei piani dei tavoli nei dipinti di natura morta; la compresenza, sulla superficie bidimensionale della tela, di elementi vicini e lontani. Fondamentale è anche la riduzione cromatica operata da Cézanne a tre elementi fondamentali (azzurro, verde e ocra).

Figura 3.1: *La montagna di Sainte-Victoire* (1904-1906), Kunsthaus, Zurigo.

Picasso e Braque si conobbero, grazie alla mediazione del poeta Guillaume Apollinaire (futuro autore del manifesto cubista), alla retrospettiva di Cézanne, della quale rimasero entrambi particolarmente colpiti. Da questo incontro nacque uno tra i sodalizi pittorici più intensi e fecondi di tutta la storia dell'arte moderna: non fu solo una collaborazione artistica quella tra Picasso e Braque, ma fu soprattutto un'amicizia, fortificata dall'euforia dell'avanguardismo, e un dialogo ricco di costanti stimoli. I due artisti erano profondamente diversi, anche perché diversa era stata la loro formazione. Lo spagnolo **Pablo Picasso** (1881-1973) esordì nella cultura simbolista, ricca di problematiche sociali e di tendenze anarchiche, della Barcellona di fine secolo, in cui va ricordato il cabaret *I Quattro Gatti*, punto di incontro di pittori e letterati. Trasferitosi a Parigi nel 1901, inizialmente lo interessò Toulouse-Lautrec, per il suo penetrante spirito di critica sociale, poi si avvicinò al sintetismo francese (Post-impressionista) nei cosiddetti *Periodo Blu* e *Periodo rosa* e, più tardi, alle sperimentazioni fauve (conobbe Matisse nel 1906), soffermandosi non tanto sulle potenzialità espressive dei colori puri, caratteristici del *Fauves*, quanto sulla solidificazione astratta di una tonalità uniforme. **Georges Braque** (1882-1963), originario della Normandia, si trasferì a Parigi nel 1900 per studiare all'Académie Humbert; presto anche lui aderì al movimento Fauves, adottandone la tecnica divisionista e l'uso di colori violenti dalle tonalità calde, e nel 1906 espose al Salon des Indépendants.

Figura 3.2: *I giocatori di carte* (1893-1896), Courtauld Gallery, Londra.

Partendo da tali premesse, prima fra tutti la rivoluzione prospettica inaugurata da Cézanne, Picasso e Braque giunsero alla conclusione di voler restituire tramite la pittura la verità delle cose, e non la loro apparenza, che invece la visione prospettica mostrava. Lo spazio della pittura tradizionale era uno spazio vuoto, che per dare l'idea di profondità tendeva ad isolare gli oggetti; in opposizione, l'obiettivo di Picasso e Braque era quello di rendere lo spazio plasticamente[24] visibile [42]. La costruzione dello spazio è sicuramente la caratteristica più saliente di questa avanguardia. L'espediente adottato fu quello di rappresentare figure e oggetti osservandoli da diversi punti di vista: il risultato era una somma di varie immagini mescolate insieme. In effetti, quando pensiamo ad un oggetto o a una persona, esso ci appare nella mente non come lo vedremmo con gli occhi, ovvero con una sola immagine osservata

[24]Nelle arti figurative la "plasticità" è la qualità di un'opera di articolarsi nello spazio e dare l'impressione di rilievo all'osservatore. In pittura il concetto è legato al problema della resa dello spessore e del volume delle figure, che si incorre disponendo di una superficie bidimensionale.

da un unico punto di vista, ma piuttosto nella sua interezza, data da diversi punti di osservazione. Secondo i cubisti questo procedimento consentiva di rappresentare gli oggetti senza imitare la realtà, ma unicamente secondo un'elaborazione mentale ("dipingo gli oggetti come li penso, non come li vedo", sosteneva Picasso).

L'inizio del cubismo è fatto coincidere con *Les Demoiselles d'Avignon*, opera realizzata da Picasso nell'autunno 1907. In esso l'artista sembra voler concentrare tutte le esperienze maturate negli anni precedenti, ma non sono solamente considerazioni sulle qualità pittoriche ad indurre gli storici a considerarlo l'atto di nascita del movimento; gli elementi di rottura più evidenti sono infatti la rinuncia all'armonia compositiva prospettica e il riempimento plastico dello spazio con la combinazione dei vari punti di vista in una sola immagine. L'opera, frutto di una lunga fase preparatoria fatta di oltre un centinaio di schizzi e disegni, rappresenta cinque prostitute all'interno di un bordello (la dicitura "d'Avignon" non fa riferimento alla cittadina francese, ma ad una strada di Barcellona dove si trovava un rinomato bordello). Il punto di partenza è ancora segnato dall'interesse per le problematiche sociali e dalla malinconia tipica degli ambienti squallidi, che caratterizzavano la sua produzione precedente. Tuttavia, l'atto di rivolta si vede nella costruzione dell'opera: le forme sono costruite mediante un incastro di piani taglienti, non sono più arrotondate ma spigolose; la natura morta in primo piano ha subito un ribaltamento prospettico verso l'osservatore; come le figure, anche lo spazio è sottoposto al procedimento di scomposizione secondo piani geometrici e le figure femminili, colte da diversi punti di vista, non sono immerse nello spazio circostante ma sono da esso compenetrate. Infine, si evince una netta riduzione cromatica, ripresa da Cézanne, a pochi colori fondamentali. Oltre a Cézanne, possiamo riscontrare l'influenza per la scultura "negra"[25], che per Picasso costituiva un ottimo esempio di arte non mimetica, in cui

[25]L'arte primitiva, in particolare la scultura africana, era stata riscoperta dopo che un'intensa attività di scavi aveva riportato alla luce molte opere d'arte appartenenti alle civiltà pre-classiche. Il poeta francese Max Jacob ha raccontato che fu Matisse a far conoscere a Picasso l'arte "negra", mostrandogli proprio una piccola scultura in legno.

non vi era l'intento di imitare la natura, né quello di narrare fatti o episodi: ciò rendeva quelle immagini fortemente comunicative.

Figura 3.3: *Les Demoiselles d'Avignon*, Museum of Modern Art, New York.

Braque, già impegnato in una reinterpretazione del paesaggio fauve proprio sull'esempio di Cézanne, venne affascinato dal travaglio formale del nuovo amico; in questa prima fase di collaborazione, possiamo dire che fu lui a subire una maggiore influenza dall'altro. Tra il 1908 e il 1909 la pittura di Picasso e Braque fu all'insegna di quella di Cézanne; si delinea in questi anni la fase **protocubista** o formativa.

A questa fase risale l'opera *Case all'Estaque*: durante un soggiorno nell'estate 1908 nei luoghi di Cézanne, all'Estaque nei pressi di Marsiglia, Braque dipinse una serie di paesaggi adottando la stessa riduzione cromatica operata dal maestro nelle *Montagne di Sainte-Victoire*, nei toni verdi e bruni, e trasformando ogni cosa in una semplice forma geometrica. Per evidenziare ancora di più i volumi, case e alberi sono resi tridimensionalmente grazie alla reintroduzione del chiaroscuro, che tuttavia non è realistico, poiché non vi è un'unica fonte di luce. Nel dipinto Braque abbandonò totalmente la prospettiva tradizionale attraverso l'utilizzo di più punti di vista sul piano di rappresentazione (nel quadro risulta infatti difficile distinguere il primo piano dall'orizzonte). Spiegherà Braque [15]:

> La prospettiva tradizionale non mi soddisfaceva più. È troppo limitata: non permette di possedere pienamente le cose rappresentate. Prevede un unico punto di vista, ma proprio l'unicità del punto di vista è davvero poco importante. È come se qualcuno spendesse la propria vita a disegnare profili e poi finisse col credere che uomini e donne hanno un solo occhio.

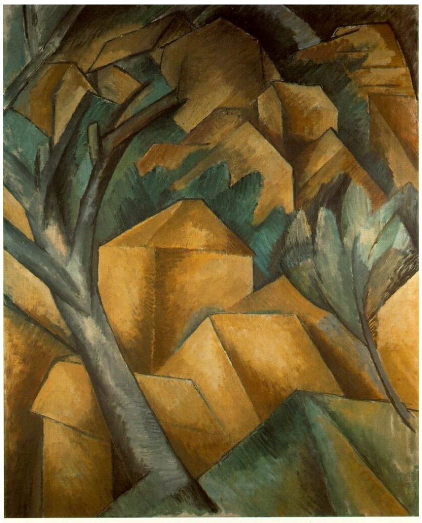


Figura 3.4: *Case all'Estaque*, 1908, Kunstmuseum, Berna.

Nel settembre 1908 i dipinti furono proposti al Salon d'Automne ma non ricevettero l'ammirazione sperata; nell'occasione Matisse, che era membro della giuria, descrisse alcuni quadri di Braque come composizioni di "piccoli cubi". Successivamente, vennero presentati in novembre da Apollinaire nella Galleria di Kahnweiler (che diverrà in seguito il gallerista del movimento). Il critico d'arte Louis Vauxecelles, a conoscenza del precedente commento di Matisse, nel recensire la prima personale di Braque scrisse in un articolo sul *Gil Blas* del 14 novembre: “Braque maltratta le forme, riducendo tutto, luoghi, figure, case, a schemi geometrici, a cubi” [15]. Fu proprio da questa critica negativa che scaturì il nome “cubismo” per designare il movimento artistico a cui facevano capo Picasso e Braque.

La collaborazione tra Picasso e Braque procedeva speditamente; anche se i due artisti lavoravano in maniera autonoma, possiamo riscontrare che le rispettive opere di questa prima fase si somigliano molto. Anche Picasso, nel 1909, si recò in campagna, nella località spagnola Horta de Ebro, per realizzare dei paesaggi; un esempio è *La fabbrica di Horta de Ebro* dove ogni elemento, edifici e alberi, è ricondotto a delle figure geometriche e lo spazio è costituito da piani che si compenetrano, come è possibile vedere nel cielo.

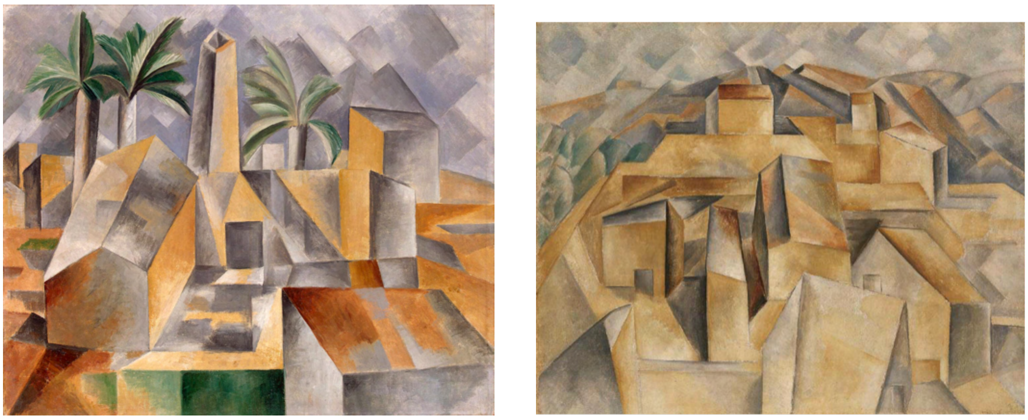


Figura 3.5: Due dipinti realizzati durante il soggiorno ad Horta de Ebro.

Arrivati al 1909, il processo di scomposizione nelle opere dei due artisti si era decisamente sviluppato: si vedano alcuni dipinti di nature morte, risalenti all'autunno, dove ormai i singoli oggetti quasi non sono più riconoscibili. Un tema ripreso dai due amici numerose volte è quello degli strumenti musicali, presumibilmente in quanto oggetti comodi ai fini di una deformazione prospettica. La musica aveva in verità acquisito un certo spessore simbolico nella cultura simbolista parigina, in quanto era ritenuta la più immateriale delle arti, capace di vivere anche solo nella mente.

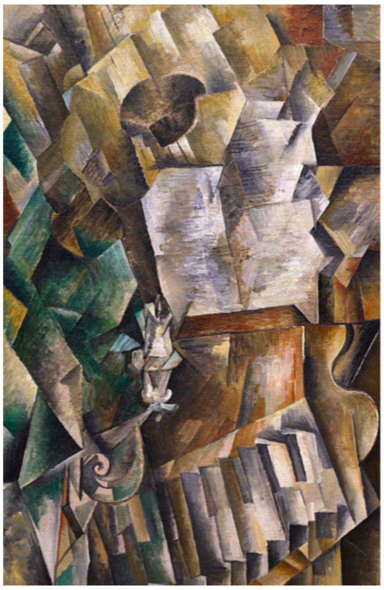



Figura 3.6: A sinistra, Georges Braque, *Piano e mandola* (1909-1910), Solomon R. Guggenheim Museum, New York. A destra, Pablo Picasso, *Donna con mandolino* (1909-1910), Museo dell'Ermitage, San Pietroburgo.

Gli anni che vanno dal 1909 al 1912 sono quelli del cosiddetto **cubismo analitico**, considerato il periodo più complesso e contorto di tutto il cubismo, in cui i due artisti giunsero al massimo grado di scomposizione delle forme. La riduzione cromatica toccò l'apice riducendosi a un solo colore (quasi sempre ocra, verde o grigio), utilizzato in varie tonalità, a favore dell'esaltazione delle forme. Anche la luce iniziò ad assumere maggiore importanza, usata come espediente per dematerializzare i solidi geometrici e rendere più vibrante la superficie pittorica. In questa conquista della luce, Braque indirizzò la sua tecnica pittorica verso una maggiore vibrazione luminosa, in particolare attraverso la gamma dei grigi, mentre l'interesse di Picasso per la luce fu maggiormente plastico. Nella pittura di Picasso la luce serviva a dissolvere i solidi geometrici in piani intersecati, sempre più frammentati.

Uno dei dipinti più caratteristici di questo periodo è il *Ritratto di Ambroise Vollard*, del 1910, in cui la figura appare come in uno specchio spezzato: ogni scheggia, delimitata da linee nere di contorno, riflette una sezione del volto o del busto secondo un piano diverso e la tridimensionalità è completamente delegata a una ricomposizione mentale delle varie vedute bidimensionali [35]. Ambroise Vollard era uno dei principali galleristi e mercanti d'arte francesi; nel 1895 aveva inaugurato la sua galleria in Rue Lafitte a Parigi, con la prima grande esposizione di dipinti di Van Gogh. Vollard aveva permesso a Picasso di esporre le sue opere fin dagli esordi, con i Periodi Blu e Rosa.

Figura 3.7: A sinistra, *Ritratto di Ambroise Vollard*, 1910, Pushkin Museum, Mosca. A destra, *Violino e brocca*, 1910, Kunstmuseum, Basilea.

Dello stesso anno è pure il dipinto *Violino e brocca* di Braque, in cui si possono distinguere un violino in primo piano, poco dietro una brocca e sullo sfondo un chiodo conficcato nella parete che regge alcuni fogli. Da notare come i vari oggetti non abbiano rapporti spaziali certi fra loro: il piano del tavolo attraversa verticalmente la brocca, il violino è sia sopra che dentro al tavolo, il foglio di carta (con l'angolo piegato) si stacca nettamente dal muro sul quale è appeso. A seguire presentiamo alcune opere del periodo analitico.

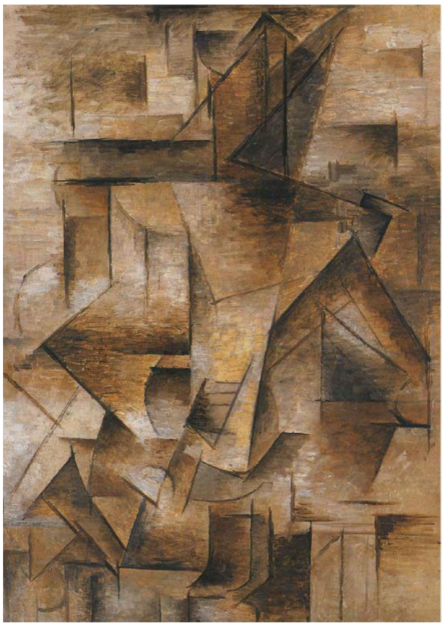
 

Figura 3.8: Pablo Picasso. A sinistra, *Chitarrista*, 1910, Musée National d'Art Moderne, Parigi. A destra, *Ritratto di Daniel-Henry Kahnweiler*, 1910, Art Institute, Chicago.

Figura 3.9: A sinistra, Pablo Picasso, *Ma Jolie* (1911-1912). A destra, Georges Braque, *Uomo con la chitarra* (1911-1912). Museum of Modern Art, New York.

Picasso e Braque esposero insieme nel 1910 alla seconda mostra della *Neue Künstlervereinigung München* (la *Nuova associazione di artisti di Monaco*, fondata nel 1909 su iniziativa di Kandinskij) alla galleria *Thannhauser*, divenendo i punti di riferimento dell'avanguardia internazionale. A poco a poco il riduzionismo geometrico e la costruzione mentale del quadro, proposti da Picasso e Braque, iniziarono ad affascinare e coinvolgere altri artisti. Fuori dalla cerchia di Picasso e Braque iniziarono a costituirsi altre aggregazioni che elaboravano declinazioni ulteriori del cubismo.

Una precisazione: durante la loro collaborazione (1908-1914) Braque e Picasso non furono propensi a commentare pubblicamente la propria attività e, anche in seguito, mostrarono sempre una certa diffidenza ad ogni tentativo di teorizzazione. Braque declinò l'invito a parlare di "cubismo" già nel 1909, fiducioso che i suoi propositi fossero già "espressi dalle tele con sufficiente chiarezza". Picasso chiuse a suo modo la discussione nel 1911 affermando: "le cubisme n'existe pass (il cubismo non esiste)" [15].

L'iniziativa di costituire un vero e proprio movimento nacque invece dagli artisti della *Ruche*[26], ai quali si aggiunse un'ulteriore aggregazione che si formò intorno ai fratelli Marcel Duchamp, Raymond Duchamp-Villon e Jacques Villon. Nell'atelier di Villon a Puteaux nacque il gruppo, detto della *Section d'Or*, per l'esplicita ispirazione al numero aureo; oltre ai fratelli Duchamp, al gruppo appartenevano: Robert Delaunay, Albert Gleizes, František Kupka, Henri Le Fauconnier, Fernand Léger e Jean Metzinger. Il loro motto, coniato da Villon, intendeva in qualche modo temperare l'estremismo intellettuale di Picasso e Braque: "Là dove il Cubismo sradica, la Section d'or radica". Mentre Picasso e Braque si rifiutavano di partecipare ai Salons ufficiali, preferendo mostre separate (come la famosa personale di Picasso nella primavera 1911 alla galleria 291 di Alfred Stieglitz a New York), furo-

[26]La Ruche ("l'alveare") è un luogo artistico di Parigi, situato nel quartiere Vaugirard ai confini di *Montparnasse*, dove dal 1902 si alternarono artisti di tutto il mondo. Il nome dell'edificio è riferito alla sua conformazione, a forma poligonale, che consentiva di ospitare numerosi atelier di artisti, che spesso vi vivevano addirittura, in una sorta di completa simbiosi tra vita e arte.

no i Cubisti della Ruche e di Puteaux a farsi movimento e ad assumersi il compito di polemizzare contro l'aggressività dei futuristi[27] italiani.

Tra i protagonisti di spicco citiamo Fernand Léger, Robert Delaunay e lo spagnolo Juan Gris; di un certo rilievo furono anche Albert Gleizes e Jean Metzinger, i quali elaborarono una prima teoria del cubismo, contenuta nel saggio *Du Cubisme* del 1912. Nel saggio i due artisti rimproveravano a Braque e Picasso l'eccessiva staticità e la mancanza di colore delle loro opere; Metzinger, in particolare, sosteneva un approccio più scientifico dell'arte, facendo riferimento ad alcune teorie matematiche diffuse al tempo, come la geometria a quattro dimensioni.

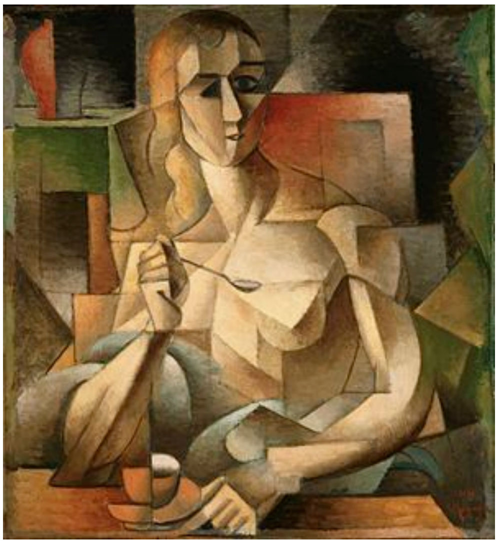



Figura 3.10: A sinistra, Jean Metzinger, *L'ora del tè*, 1911, Museum of Art, Filadelfia; definito la "Gioconda cubista". A destra, Albert Gleizes, *Paesaggio con figura*, 1911, Musée National d'Art Moderne, Parigi.

[27]Il *Futurismo* è un movimento letterario, artistico e politico italiano, fondato nel 1909 da Filippo Tommaso Marinetti, che si sviluppò parallelamente al Cubismo. Gli artisti futuristi esaltavano gli ideali della velocità, del dinamismo, della forza materiale, della violenza, della guerra concepita come sola igiene del mondo.

Lo scandalo delle presenze cubiste ai Salons fu grande, tanto da provocare addirittura un acceso dibattito parlamentare: nel dicembre 1912 alla Camera dei Deputati di Parigi ci si chiedeva: "quali misure prendere per evitare il rinnovarsi dello scandalo artistico cui ha dato luogo l'ultimo Salon d'Automne" poiché "da alcuni anni, con il pretesto di un rinnovamento dell'arte, alcuni sfruttatori della pubblica credulità si sono abbandonati alle più folli realizzazioni di stravaganze e di eccentricità".

Figura 3.11: Raimond Duchamp-Villon, *La Maison Cubiste*, 1912, installazione architettonica esposta nella sezione Art Décoratif del Salon d'Automne.

Nel frattempo, Picasso e Braque conducevano ricerche separate, in una sorta di rigore monacale che li isolava l'uno dall'altro, ma soprattutto li rendeva un po' estranei alle correnti cubiste che intanto si stavano sviluppando. L'essenza del cubismo analitico si manterrà all'interno del circolo di Puteaux; mentre Braque e Picasso volgeranno verso il cosiddetto **cubismo sintetico** (1912-1914), caratterizzato da una rappresentazione più diretta e immediata della realtà, resa attraverso l'inserimento sulla tela di carte e materiali di varia natura. A questa fase appartengono i *papiers collés* (letteralmente “carte incollate”): opere realizzate mediante l’accostamento di pezzi di carta incollati sulla tela (quali pezzi di carte da parati, carte da gioco, giornali, frammenti) che avevano lo scopo di avvicinarsi il più possibile alla realtà quotidiana. Con l’inserimento di materiali diversi, come paglia, corda, sabbia e legno, nascono invece i *collage*. Il cubismo sintetico propone un nuovo ruolo della materia, che irrompe nell’opera d’arte diventandone parte integrante e portando l’osservatore a un’intuizione ancora più immediata dell’essenza dell’oggetto: è l’evoluzione matura del cubismo.

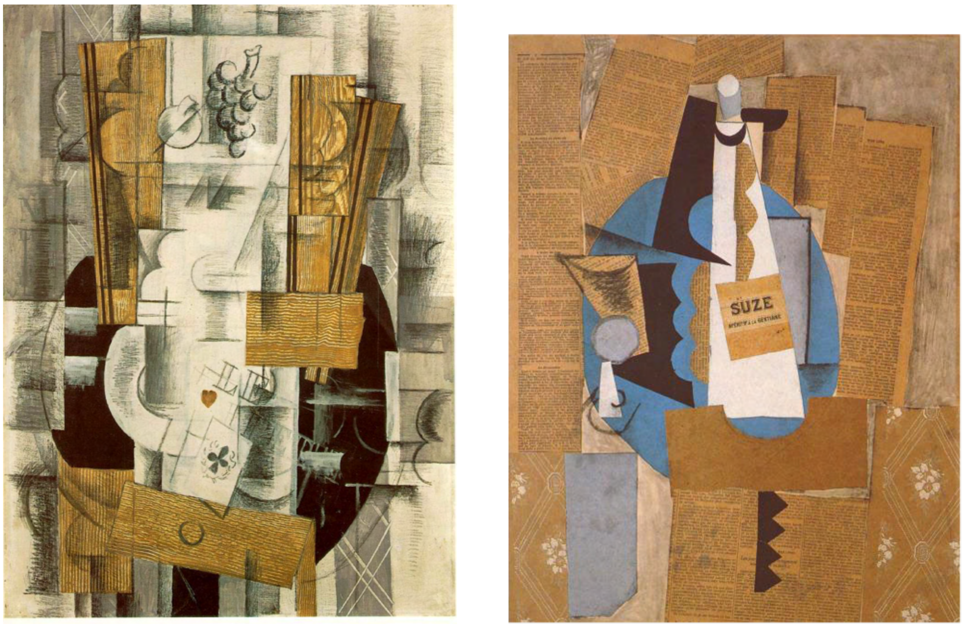


Figura 3.12: A sinistra, Georges Braque, *Fruttiera, asso di fiori*, 1913, Musée National d’Art Moderne, Parigi. A destra, Pablo Picasso, *Bicchiere e bottiglia di Suze*, 1912, Washington University Gallery of Art, Saint Louis.

Con lo scoppio della Prima guerra mondiale l’indagine artistica del cubismo vide la sua conclusione: Picasso trascorse il periodo della guerra a Parigi, mentre Braque venne chiamato al fronte, insieme a Léger, Gleizes, Metzinger e Villon, Duchamp e Picabia si spostarono negli Stati Uniti. Ciononostante la lezione cubista si era ormai diffusa in tutta Europa e America e non impiegò molto tempo a germinare in territori espressivi diversi: dalle esperienze precoci del giovane Giorgio Morandi a quelle di Marc Chagall, che nel 1914 tornò nella sua Vitebsk da Parigi; da Kazimir Malevič a Franz Marc; da Piet Mondrian a Vladimir Tatlin. In seguito sarà, ancora una volta, Picasso e il suo celebre *Guernica* (1937), ispirato dalla tragedia della guerra civile spagnola, la fonte del Neo-Cubismo del secondo dopoguerra.

Il cubismo è stato un movimento fondamentale nella storia dell'arte moderna e ha segnato l'inizio di un nuovo modo di pensare e vivere la pittura che avrebbe influenzato tutte le avanguardie successive. Tuttavia, esso non va considerato come un movimento capeggiato da un fondatore, o peggio una scuola di pittori, bensì come un "clima" operativo e una tendenza avviata dalla rivoluzione prospettica di Picasso e Braque. Come risulta anche da questa breve presentazione, il movimento non apparì mai come un gruppo unitario, legato per esempio dall'adesione ad un programma comune, ma piuttosto come una spontanea riunione di artisti che, in un clima culturale particolarmente segnato dall'esperienza cézanniana e da quelle più avanzate di Braque e Picasso, ricercarono il proprio personale linguaggio artistico [32].

In ogni caso, è possibile distinguere alcune tendenze del cubismo. Le delineò Apollinaire nel libro *Peintres Cubistes (I pittori cubisti)* [2], del 1913, considerato uno tra i testi più importanti dopo *Du Cubisme*, in cui il letterato fece luce sulla storia del cubismo, sulla sua nuova estetica, sulle sue origini e sulla sua evoluzione. Apollinaire individuò quattro tendenze:

> Il cubismo scientifico è una di queste tendenze pure. È l'arte di dipingere nuove strutture con elementi tratti non dalla realtà di visione, ma dalla realtà di intuito. [...] I pittori che appartengono a questa tendenza sono: Picasso, la cui arte luminosa si ricollega anche all'altra corrente pura del cubismo, Georges Braque, Albert Gleizes, Marie Laurencin e Juan Gris. Il cubismo fisico è l'arte di dipingere nuove strutture con elementi tratti in massima parte dalla realtà visiva. Quest'arte, tuttavia, dipende dal movimento cubista per la sua disciplina costruttiva. Ha un grande avvenire come pittura di storia. La sua funzione sociale è ben delineata,

> ma non è arte pura. [...] Il pittore fisico che ha creato questa corrente è Le Fauconnier. Il cubismo orfico è l'altra importante corrente della nuova scuola. È l'arte di dipingere nuove strutture con elementi attinti non alla sfera visiva, ma interamente creati dall'artista stesso, e da lui dotati di una possente realtà. [...] È arte pura. La luce nei dipinti di Picasso si basa su questa concezione, che Robert Delaunay è, da parte sua, sul punto di scoprire e verso la quale stanno già indirizzando le proprie energie Fernand Léger, Francis Picabia e Marcel Duchamp. Il cubismo istintivo è l'arte di dipingere nuove strutture con elementi non attinti alla realtà visiva, ma suggeriti all'artista dall'istinto e dall'intuizione; tende già da tempo verso l'orfismo. L'artista istintivo manca di lucidità e di un credo estetico; il cubismo istintivo comprende un gran numero di artisti, [...] ma Courbet è il padre dei nuovi pittori e André Derain.

3.2 L'influenza delle nuove geometrie

3.2.1 Il contesto di diffusione: Parigi 1900-1912

Agli inizi del Novecento, la città di Parigi rappresentava il cuore della vita intellettuale e del fermento artistico-culturale, tipico della Belle Époque, attirando artisti ed intellettuali da tutta Europa. La conoscenza pubblica delle nuove geometrie a Parigi era meno universale rispetto agli Stati Uniti, dove già da tempo un gran numero di riveste dedicava largo spazio all'argomento. Pertanto, agli occhi degli artisti e dei letterati francesi le nuove geometrie conservavano ancora un'aria di mistero e non erano argomenti così scontati; questo fu senza dubbio il motivo del loro fascino iniziale.

All'inizio fu sicuramente la fantascienza il canale più diretto della letteratura popolare, attraverso cui gli intellettuali avrebbero potuto entrare in contatto con la quarta dimensione, e magari anche sentir parlare di geometrie non euclidee. Sebbene il famoso romanzo britannico *Flatland* venne tradotto in francese solo dopo il 1910, in Francia divennero estremamente popolari le opere di Wells e i suoi racconti riguardanti la quarta dimensione, pubblicati separatamente a Parigi o sulla rivista *Mercure de France*. Negli anni dal 1910 al 1912 comparve poi il lungo racconto di Pawlowski, *Voyage au pays de la quatriéme dimension*, in cui l'autore sfruttò la nozione di quarta dimensione come strumento per una critica sociale: secondo lui, la capacità di vedere e comprendere la quarta dimensione extra dello spazio avrebbe condotto a una futura era di idealismo, priva dei mali della società materialista.

Nella letteratura popolare le nuove geometrie venivano chiamate in causa anche in questioni di natura filosofica; è il caso delle teorie di Hinton sugli iperspazi. Sebbene i libri di Hinton non fossero stati tradotti in francese, le sue idee erano conosciute a Parigi poiché venivano menzionate in numerose fonti popolari, così come in testi accademici quali *Essai sur l'hyperespace* di Boucher e *Traité elémentaire de geométrie à quatre dimensions* di Jouffret. In ogni caso, la voce più autorevole ed influente sul tema delle nuove geometrie a Parigi fu, come si è già detto, quella del matematico Poincaré. I suoi tre principali testi filosofici, *La Science et l' hypothese* (1902), *La Valeur de la science* (1904) e *Science et méthode* (1908), furono centrali per la diffusione del pensiero matematico corrente, e in particolare delle geometrie non euclidee e della geometria multidimensionale, ad un pubblico non necessariamente specialistico. I riferimenti a Poincaré si possono trovare in diverse fonti popolari, come le riviste *La Phalange*, *Le Théosophe* e *Comoedia*.

Perciò, senza avventurarsi in fonti più accademiche, gli artisti e i letterati che vivevano a Parigi negli anni dal 1900 al 1912 avrebbero potuto facilmente sentire parlare della quarta dimensione e persino delle geometrie non euclidee.

All'inizio del XX secolo, oltre alle discussioni verbali sulla quarta dimensione nella letteratura popolare e accademica, esisteva un piccolo corpo di fonti visive che tentavano di evocare dimensioni superiori. L'illustrazione che ricorreva più e più volte negli articoli e nei libri popolari era il classico ipercubo quadridimensionale dispiegato, mostrato nel Capitolo 2. In verità, anche Hinton aveva cercato di creare immagini quadridimensionali per accompagnare la sua filosofia, ma gli scrittori si interessarono solo alle nozioni filosofiche, praticamente ignorando i suoi complicati tentativi di visualizzazione. In confronto, le illustrazioni di Stringham dei politopi quadridimensionali del 1880, mostrate nel capitolo 2, ebbero molto più successo e furono citate in diverse discussioni francesi, tra cui *Essai sur l'hyperespace* di Boucher. Col finire del secolo le rappresentazioni degli ipersolidi divennero sempre più elaborate ed efficaci; alcuni esempi di queste rappresentazioni sono contenute nel celebre *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions* del 1903 di Esprit Jouffret (1837-1904).

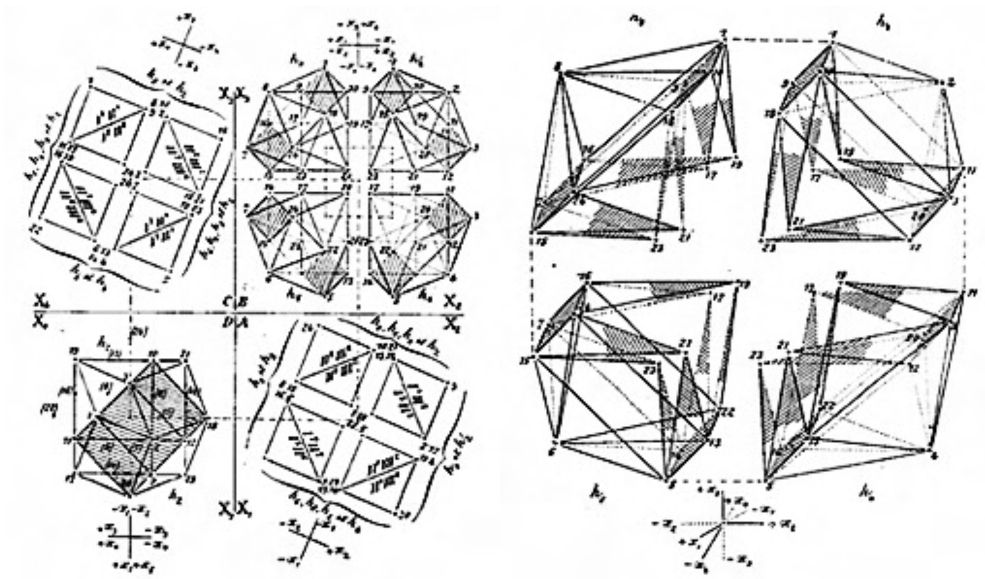


Figura 3.13: *Proiezioni piane e prospettiva cavaliera di un 24-celle*, tratto da E. Jouffret, *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions.* Nell'immagine a destra Jouffret impiega la **prospettiva cavaliera**; con questa tecnica riesce a trasmettere un senso molto più completo della presenza degli ottaedri.

3.2.2 Le geometrie non euclidee e la quarta dimensione nella teoria e nella pratica cubista

Vista la grande popolarità delle nuove geometrie, è chiaro che molti intellettuali all'inizio del XX secolo accettarono la possibilità di una quarta dimensione dello spazio oltre la percezione immediata. Gli artisti, in particolare, videro nella quarta dimensione una fonte di nuove idee per le proprie indagini, potendone coinvolgere anche gli aspetti visivi oltre che quelli filosofici. Così, quando Maurice Princet, matematico amico dei cubisti, fece notare la somiglianza visiva tra il dipinto *Ritratto di Ambroise Vollard* di Picasso e i disegni di Jouffret, nell'arte cubista venne riconosciuta la strada per giungere ad una realtà superiore.

Il fatto che le illustrazioni geometriche di Jouffret offrissero somiglianze così impressionanti con il linguaggio artistico sviluppato da Picasso e Braque suggerì ai cubisti che la loro arte si stava naturalmente sviluppando verso una quarta dimensione. In effetti, tra le due immagini c'è una sorprendente somiglianza nelle sfaccettature triangolari, che rappresentano una varietà di piani e angoli visti da diversi punti di vista; inoltre, entrambe esibiscono un nuovo tipo di spazio non dipendente dalla tradizionale prospettiva tridimensionale. È difficile stabilire fino a che punto Picasso sia stato influenzato da Princet o dalle discussioni intorno a lui. Ad ogni modo, non emerge nessuna relazione causale tra la geometria n-dimensionale e lo sviluppo dell'arte di Picasso: essa era il prodotto del suo genio artistico nella ricerca di alternative alla tradizione figurativa classica e allo spazio prospettico rinascimentale.

Tuttavia, gli artisti della *Section d'Or*, che costituivano l'ala più "intellettuale" del cubismo ed erano molto interessati alla geometria, accolsero volentieri l'intuizione di Princet. In *Note sur la peinture*, pubblicato nel numero di ottobre-novembre 1910 di *Pan*, Metzinger scrisse: "Cézanne ci ha mostrato forme che vivono nella realtà della luce, Picasso ci porta un resoconto materiale della loro vita reale nella mente: egli traccia una prospettiva libera, mobile, dalla quale il matematico Maurice Princet ha dedotto un'intera geometria". La "nota" di Metzinger è particolarmente significativa, poiché, come suggerisce Edward Fry in *Cubism* [21], in quel periodo egli era uno dei pochi pittori cubisti ancora vicini a Picasso e Braque.

Il ruolo di Princet nella storia del cubismo e, in particolare, nell'evoluzione di Picasso è stato ampiamente dibattuto, tuttavia è generalmente accettato che abbia influenzato gli artisti di Puteaux, più orientati alla teoria; che fosse stata o meno l'intenzione originale di Picasso, la quarta dimensione divenne un principio guida della pittura cubista.

Maurice Princet (1875-1973) era contabile nella compagnia di assicurazioni L'Abeille a Parigi, aveva acquisito una buona formazione matematica nel corso dei suoi studi all'*École Polytechnique* di Parigi, dove si era anche imbattuto nella scoperta delle nuove geometrie. Divenne membro del gruppo intorno a Picasso nel 1908 (quindi, sebbene Picasso abbia sempre negato di aver discusso di matematica con Princet, sembra altamente improbabile che durante gli anni che seguirono non sentì mai parlare di quarta dimensione e geometrie non euclidee) e lì conobbe Metzinger. Mentre i discorsi di Princet sulle nuove geometrie e le sue illustrazioni dalla geometria n-dimensionale ebbero poca influenza su Picasso, per Metzinger rappresentarono una fonte di ulteriori idee artistiche, sia visive che filosofiche; perciò quando iniziò a costituirsi il circolo di *Puteaux* anche Princet venne invitato a parteciparne. Come membro dei cubisti Metzinger sarebbe diventato il cubista più interessato alle nuove geometrie e più influenzato dal matematico Princet; nelle sue memorie *Le Cubisme était né* scriveva:

> Spesso Maurice Princet si univa a noi. Sebbene giovanissimo, ricoprì un ruolo importante in una compagnia di assicurazioni, alla quale doveva le sue conoscenze matematiche. Ma, al di là della sua professione, (egli) concepiva la matematica come un artista ed alludeva agli spazi n-dimensionali come un esteta. Gli piaceva far interessare i pittori ai nuovi concetti di spazio introdotti da Victor Schlegel[28] e da altri; e ci riuscì.

Anche A. Salmon, nella sua rubrica *Courrier des Ateliers* del 10 maggio 1910, annunciò che Maurice Princet, "un matematico che è stato ispirato

[28]Di grande importanza in questo passaggio è il riferimento a Schlegel, già citato in Capitolo 2, che contribuì alla crescita della geometria n-dimensionale verso la fine del diciannovesimo secolo; in quegli anni un certo numero di suoi articoli erano stati pubblicati su riviste matematiche francesi.

ad avere curiose riflessioni dagli sforzi dei pittori moderni", era al lavoro su un "curioso lavoro sull'estetica". Secondo Salmon, Princet "si preoccupa soprattutto dei pittori che disdegnano la prospettiva antica. Li loda per non aver più fiducia nell'ottica 'illusoria' del passato e li considera grandi geometri". Il legame di Princet con la pittura cubista è anche documentato dal resoconto di André Lhote di alcune loro conversazioni e dalla prefazione che scrisse per il catalogo della mostra di Delaunay del 1912 alla *Galerie Barbazanges*. In occasione della mostra del gruppo del 1912, Princet fu pure nominato come uno dei "collaboratori" nel *Bulletin de La Section d'Or*, un omaggio per la sua partecipazione allo sviluppo della loro teoria.

In effetti, attraverso Princet i cubisti del gruppo di *Puteaux*, che fondamentalmente conoscevano la quarta dimensione solo dalla lettura di Pawlowski, pervennero alle opere di Henri Poincaré e di Esprit Jouffret. Delle due fonti, la più importante era senza dubbio quella di Poincaré, i cui testi scientifici parlavano diffusamente delle geometrie non euclidee e sostenevano in modo convincente la possibilità di dimensioni superiori dello spazio. Probabilmente Princet non fece la sua prima conoscenza con le nuove geometrie solo leggendo Poincaré; tuttavia, fu lui a suggerire questi scritti a Gleizes e Metzinger: un confronto testuale di *Du Cubisme* con *La Science et l' hypothese* dimostra che Gleizes e Metzinger avevano studiato da vicino i suoi libri. Anche Duchamp citò più volte il nome di Poincaré nei suoi appunti per il *Grande Vetro* dimostrando grande apprezzamento per le sue teorie. Sempre negli appunti del *Grande Vetro* di Duchamp è confermata anche la conoscenza del trattato di Jouffret, di cui viene citato un passaggio e alcune immagini. Nel suo *Traité* Jouffret incluse pure diversi articoli della *Revue de Métaphysique et de Morale*, che facevano parte del dibattito di fine secolo sugli assiomi, citando molto spesso le opinioni di Poincaré. Jouffret credeva fermamente nel valore matematico della geometria n-dimensionale, tuttavia, al contrario di Poincaré, era convinto che la visualizzazione di dimensioni superiori fosse impossibile: "Poincaré ha detto, ≪Un uomo che vi dedichi tutta la vita forse potrebbe alla fine essere in grado di raffigurare la quarta dimensione≫. Da parte nostra, abbiamo già espresso la nostra opinione: se esistono davvero quattro dimensioni, la nostra mente è confinata nelle prime tre". I cubisti concordavano sul fatto che la nostra percezione sensoriale del mondo potesse essere tridimensionale, ma, come Poincaré, credevano fermamente nella possibilità di concepire quella quarta dimensione.

Come abbiamo visto, è stato il cubismo analitico, e la sua idea di rappresentare gli oggetti osservandoli da diversi punti di vista, a generare la teoria cubista in cui sono coinvolte le nuove geometrie. Pertanto, mentre Picasso e Braque si incamminavano verso il cubismo sintetico, gli artisti di *Puteaux* preferirono proseguire nell'esplorazione analitica, sviluppando una teoria e una pratica sempre più influenzate dalle geometrie non euclidee e dalla quarta dimensione.

Le geometrie non euclidee nella teoria e nella pratica cubista

Nelle geometrie non euclidee gli artisti cubisti trovarono un supporto teorico alla loro pratica di deformare gli oggetti nello spazio. In altre parole, a queste geometrie, in cui le figure si deformavano facilmente, paragonavano il loro spazio pittorico. Le parole che meglio spiegano la posizione dei cubisti sono contenute nell'opera *Du Cubisme* di Gleizes e Metzinger:

> Lasciamo che il quadro non imiti nulla, lasciamo che palesemente presenti la sua ragione, e dovremmo essere davvero ingrati a deplorare l'assenza di tutte quelle cose, fiori o paesaggi o volti, che non avrebbero potuto essere altro che un riflesso. Tuttavia, ammettiamo che il ricordo delle forme naturali non possa assolutamente essere bandito. In ogni caso l'arte non può essere improvvisamente posta al livello di pura effusione. Questo venne compreso dai pittori cubisti, che instancabilmente studiarono la forma pittorica e lo spazio che essa genera. Questo spazio è stato negligentemente confuso con lo spazio visivo puro o con lo spazio euclideo. Euclide, in uno dei suoi postulati, postula l'indeforma-

> bilità delle figure in movimento; quindi non è necessario insistere su questo. Se desiderassimo legare lo spazio pittorico ad un tipo di geometria, dovremmo riferirci ai saggi non euclidei, e studiare a lungo certi teoremi di Riemann.

Dunque, la pittura cubista consente di deformare le figure e regolarne le proporzioni, così come le geometrie non euclidee. L'affermazione "non è necessario insistere su questo" non si riferisce alla verità dell'indeformabilità delle figure, ma alla frase precedente sullo spazio pittorico ("Questo spazio è stato negligentemente confuso con lo spazio visivo puro o con lo spazio euclideo"). Quello che i due autori vogliono dire è che "non occorre insistere sulla confusione che comporta associare lo spazio pittorico allo spazio visivo puro o allo spazio della geometria euclidea, perché già Euclide postulava l'indeformabilità delle figure in movimento".

La fonte dei loro commenti su Euclide è il saggio *La Scienza e l'Ipotesi* di Poincaré; tuttavia, Euclide non ha mai postulato l'indeformabilità delle figure in movimento, perciò questa loro convinzione deriva certamente da una lettura errata di Poincaré. Nello specifico, nel capitolo *Les Géométries non euclidiennes*, Poincaré parla di una geometria, sviluppata da Riemann, dove non vale l'indeformabilità delle figure in movimento e le figure cambiano facilmente la loro forma come farebbero se si muovessero su una superficie di curvatura irregolare. Quindi è probabile che Gleizes e Metzinger si riferiscano proprio a questo capitolo (visto che parlano di "certi teoremi di Riemann") e alla frase: "la possibilità del moto di una figura rigida non è una verità auto-evidente, o almeno lo è solo alla maniera del postulato euclideo, e non come sarebbe un giudizio a priori". Tuttavia, Poincaré non sta dicendo che Euclide abbia postulato l'indeformabilità delle figure in movimento; il "postulato euclideo" a cui fa riferimento è invece la prima nozione comune ("cose uguali ad una stessa sono uguali fra loro"), assunta da Euclide per garantire[29] che, se spostate, le figure sarebbero rimaste rigide e immutabili.

[29] L'assunto di Euclide che le figure sarebbero rimaste sempre rigide e immutabili, quando spostate, introdotto per verificare la loro coincidenza, era un difetto fondamentale nel suo

Anche se effettivamente l'indeformabilità dei solidi è alla base di tutta la geometria euclidea, Euclide non la postulò mai formalmente.

Nella pittura cubista si vedono raramente gli spazi curvi della geometria non euclidea. Tuttavia, l'opera *Paesaggio cubista* del 1911 suggerisce che almeno Metzinger potrebbe aver sperimentato la deformazione nello spazio curvo. In seguito, Duchamp, altro appassionato studente di Princet, fece un uso molto più consapevole delle deformazioni curve della geometria non euclidea nei *Tre rammendi tipo* (1913-1914).

Figura 3.14: *Paysage Cubiste*, 1911, Sidney Janis Gallery, New York.

Proprio come l'applicazione pittorica della geometria non euclidea da parte dei cubisti aveva le sue origini negli scritti di Poincaré, allo stesso modo la loro interpretazione filosofica era basata sulle opinioni di Poincaré. La dichiarazione che riflette più chiaramente la visione condivisa dai cubisti è stata fatta da Mercereau, all'inizio del 1914, nella sua introduzione[30] al catalogo della mostra *Modern Art* della Mánes Society a Praga:

sistema di assiomi, un problema corretto solo nel 1899 da Hilbert.

[30]Vedi Fry in [21].

> I nostri artisti desiderano ardentemente raggiungere una verità integrale in contrapposizione a una realtà apparente. In sintonia con le innovazioni della scienza, l'arte di oggi cerca di scoprire leggi ultime più profonde di quelle di ieri. Ma proprio come i principi postulati da Bolyai, Lobačevskij, Riemann, Beltrami non hanno distrutto quelli di Euclide, ma li hanno semplicemente relegati al loro vero status di postulato tra i tanti, [...] il pittore moderno non pretende di negare tutto ciò che è stato compiuto prima del suo tempo. Ai vecchi assiomi se ne aggiungono di nuovi, e quello che era il vertice è ora il basamento su cui viene eretto un nuovo monumento.

Le affermazioni di Mercereau esprimono l'adozione da parte dei cubisti della filosofia convenzionalista di Poincaré. Secondo Mercereau, così come la geometria non euclidea non distrugge la validità di quella euclidea, "il pittore moderno non pretende di negare tutto ciò che è stato compiuto prima del suo tempo"; il cubismo e la geometria non euclidea sono nuove convenzioni altrettanto legittime quanto i loro predecessori nell'arte e nella geometria.

Tuttavia, sebbene i cubisti condividessero la filosofia convenzionalista di Poincaré, non ne seguivano la logica. Infatti, l'artista cubista si allontanava dal rigido convenzionalismo, caratterizzato dalla prospettiva classica, e seguiva il cubismo, perché credeva che potesse rappresentare una realtà superiore. Quindi, a differenza di Poincaré, di fatto dichiaravano che il cubismo era una convenzione più veritiera di tutte le altre; in altre parole sceglievano di favorire un sistema di convenzioni rispetto a un altro, sostenendo così i principi della geometria non euclidea e rifiutando la geometria di Euclide. Il *Du Cubisme* si conclude proprio con: "Un artista modellerà il reale a immagine della sua mente, perché c'è una sola verità, la nostra, quando la imponiamo a tutti".

Un'ultima osservazione: nel saggio Metzinger e Gleizes sostengono che l'arte cubista, e la sua pratica di deformare gli oggetti, fondata sulle geometrie non euclidee, possa rappresentare una verità quadrimensionale superiore.

Ciò riflette una confusione comune in quel periodo nel distinguere tra geometrie non euclidee e quarta dimensione. Anche Apollinaire impiega un uso simultaneo confuso delle due geometrie quando nei *Peintres Cubistes* dice "Oggi gli studiosi non si limitano più alle tre dimensioni di Euclide".

La quarta dimensione nella teoria e pratica cubista

Come le geometrie non euclidee, anche la quarta dimensione aveva un'associazione filosofica più ampia per i cubisti, nonché un'applicazione formale nella pittura. Le descrizioni più estese di una quarta dimensione cubista sono state fornite da Apollinaire nel suo articolo, *La Peinture nouvelle*, dell'aprile 1912 su *Les Soirées de Paris* e nel terzo capitolo di *Les Peintres Cubistes*, di inizio 1913; in questa versione finale[31] scriveva:

> Si sono rimproverate energicamente ai nuovi pittori le loro preoccupazioni geometriche. Ciononostante, le figure geometriche sono la parte essenziale di un disegno. La geometria, scienza che ha per oggetto lo spazio, la sua misura e le sue relazioni, è sempre stata la legge stessa della pittura. [...] Finora, le tre dimensioni della geometria euclidea erano sufficienti all'inquietudine dei grandi artisti desiderosi di infinito. I nuovi pittori non si propongono, così come i loro predecessori, di essere geometri. Ma si può dire che la geometria è per le arti plastiche ciò che la grammatica è per l'arte dello scrittore. Oggi gli studiosi non si limitano più alle tre dimensioni di Euclide. I pittori sono stati portati in modo del tutto naturale, si potrebbe dire per intuizione, a occuparsi delle nuove possibilità di misurazione spaziale che, nel linguaggio degli atelier moderni, sono designate con il termine di "quarta dimensione".

[31] Un confronto tra l'articolo del 1912 e *Les Peintres Cubistes* rivela che Apollinaire era stato più esplicito sul tema della quarta dimensione nel primo testo: ad esempio, mentre nei *Peintres* afferma "è a questo ideale che dobbiamo una nuova regola di perfezione", nel 1912 aveva scritto "è solo alla quarta dimensione che dobbiamo questa nuova regola di perfezione".

> [...] La quarta dimensione conferisce plasticità agli oggetti. Dà agli oggetti le proporzioni che meritano nell'opera d'arte; mentre nell'arte greca, per esempio, un ritmo un po' meccanico distrugge costantemente le proporzioni. L'arte greca aveva una concezione puramente umana della bellezza. Ha preso l'uomo come misura della perfezione. L'arte dei nuovi pittori prende come ideale l'universo infinito, ed è a questo ideale che dobbiamo una nuova regola di perfezione, che permette al pittore di proporzionare gli oggetti secondo il grado di plasticità che desidera abbiano.

Quindi, la quarta dimensione per Apollinaire era strettamente associata all'"universo infinito", un ideale che i nuovi pittori ricercavano nell'arte; in un'intervista con André Arnyvelde del gennaio 1912, Gleizes affermava: "oltre alle tre dimensioni di Euclide ne abbiamo aggiunta un'altra, la quarta dimensione, cioè la figurazione dello spazio, la misura dell'infinito".

In effetti, al di là delle sue applicazioni pittoriche, la quarta dimensione ha contribuito allo sviluppo di un idealismo cubista. In *Qu'est-ce que... le 'Cubisme'?* del dicembre 1913, anche Maurice Raynal sottolineò la connessione tra la quarta dimensione e l'aspetto idealista del cubismo, scrivendo "Invece di dipingere gli oggetti come li vedevano, li dipingevano come li pensavano, ed è proprio questa legge che i cubisti hanno riadattato, ampliato e codificato sotto il nome ben noto della quarta dimensione". Infatti

> Non vediamo mai, un oggetto in tutte le sue dimensioni contemporaneamente. Quindi ciò che si deve fare è colmare una lacuna nel nostro vedere. La concezione ci dà i mezzi, ci rende consapevoli dell'oggetto in tutte le sue forme, e ci rende anche consapevoli di oggetti che non saremmo in grado di vedere. E così, se il pittore riesce a rendere l'oggetto in tutte le sue dimensioni, realizza un'opera di metodo che è di ordine superiore a quella dipinta secondo le sole dimensioni visive.
>
> (*Conception et vision*, agosto 1912, *Gil Blas*)

Per i cubisti, quindi, l'uso più generale di "quarta dimensione" era quello di indicare una realtà superiore, una verità trascendentale che doveva essere scoperta individualmente da ciascun artista. Gleizes e Metzinger non nominano mai esplicitamente la quarta dimensione in *Du Cubisme*, tuttavia parlano della libertà dell'artista, consapevole di un ordine superiore, di raffigurare gli oggetti in "un diverso tipo di spazio" che non riproduce le proporzioni osservate.

Per quanto riguarda la rappresentazione dello spazio, i pittori cubisti hanno visto nell'esistenza di una quarta dimensione la giustificazione del loro rifiuto della prospettiva tradizionale e della loro pratica di deformare le figure. Apollinaire esprime chiaramente questo pensiero quando elogia Metzinger per il suo sforzo "di liberarsi della prospettiva, di quella miserabile prospettiva ingannevole, di quella quarta dimensione al contrario, di quell'infallibile espediente per far rimpicciolire tutte le cose". Il tipo di deformazione più frequente nella pittura cubista è la scomposizione di una figura in sfaccettature, una tecnica direttamente correlata al rifiuto della prospettiva tridimensionale, a favore dei molteplici punti di vista. Per esempio, nell'opera *Nude* di Metzinger, le molteplici sfaccettature aiutano a distruggere ogni percezione dell'esistenza tridimensionale della figura; allo stesso tempo, suggeriscono la maggiore complessità di un corpo nella quarta dimensione. In questa fase (1910-1911) Metzinger si stava già avvicinando alla geometria quadridimensionale di Jouffret.

La tecnica per visualizzare oggetti quadridimensionale è stata anche descritta in *La Scienza e l'Ipotesi*, lettura comune tra i cubisti, dove Poincaré dà istruzioni specifiche per rappresentare un oggetto quadridimensionale:

> Proprio come la prospettiva di una figura tridimensionale può essere fatta su un piano, possiamo fare quella di una figura quadridimensionale su un'immagine a tre dimensioni. Per un geometra questo è solo un gioco da ragazzi. Possiamo anche prendere della stessa figura diverse prospettive da diversi punti di vista. Possiamo facilmente rappresentarci queste prospettive, poiché sono

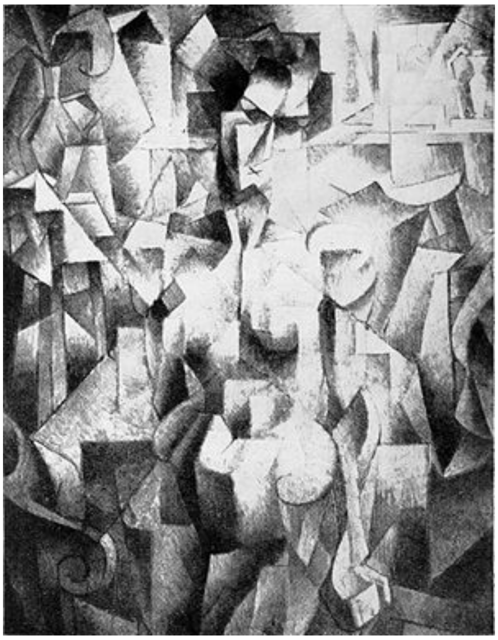


Figura 3.15: *Nude*, 1910, riproduzione in bianco e nero, attuale ubicazione sconosciuta.

> di sole tre dimensioni. [...] Nulla poi ci impedisce di immaginare che queste operazioni si combinino secondo qualunque legge scegliamo, ad esempio, in modo da formare un gruppo con la stessa struttura di quella dei movimenti di un solido rigido di quattro dimensioni. Qui non c'è nulla di impensabile, eppure queste sensazioni sono proprio quelle che proverebbero un essere dotato di una retina bidimensionale che potrebbe muoversi nello spazio a quattro dimensioni. In questo senso possiamo dire che la quarta dimensione è immaginabile.

Quindi, secondo Poincaré, l'idea di un oggetto quadridimensionale nasce dalla sovrapposizione di visioni successive tridimensionali che risultano dall'immagine mentale della sua rotazione nella mente del geometra. Il metodo proposto da Poincaré non è altro che un riadattamento della prospettiva cavaliera di Jouffret. Significativi sono alcuni lavori di altri membri del circolo di *Puteaux*, dove troviamo delle vere e proprie allusioni visive a solidi geometrici quadridimensionali; ciò suggerisce che per un certo periodo il gruppo provò concretamente ad avvicinarsi alla quarta dimensione. In *La femme aux phlox* di Gleizes, del 1910, le forme di un vaso sono molto simili al modello di Stringham per la sommità di un 24-celle (Fig. 7). In *Abundance* di Le Fauconnier, del 1910-1911, i frutti hanno una forte somiglianza con i "grappoli" di dodecaedri che Stringham disegnò al vertice di un 120-celle (Fig. 18-21).

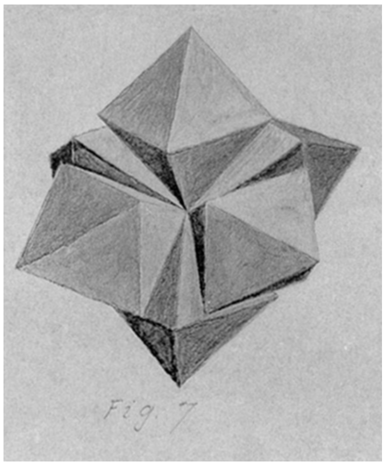


Figura 3.16: A destra, *La Femme aux phlox*, 1910, The Museum of Fine Arts, Houston. A sinistra, *Regular Figures in n-dimensional Space*, Figura 7, 1880.

Usando le parole di Apollinaire "la maggior parte dei nuovi artisti sta facendo matematica senza saperlo" (*Les Peintres Cubistes*, capitolo II). Di fronte a questi riferimenti matematici, tuttavia, non mancarono le critiche: verosimilmente molti matematici lamentarono la mancanza di rigore scientifico nelle raffigurazioni; di conseguenza tali riferimenti scomparvero rapidamente. Nel complesso, la pittura cubista di *Puteaux* durante il 1912 si allontanò dal volume, verso una maggiore preoccupazione per l'articolazione della superficie, come avevano fatto Picasso e Braque nel 1911; l'ultimo riferimento potrebbe essere stato la facciata della *Maison Cubista* di Duchamp-Villon, esposta al Salon d'Automne del 1912 (Fig. 3.11). La complessa composizione dei poliedri che si compenetrano sopra la porta suggerisce fortemente che anche Duchamp-Villon abbia conosciuto Jouffret.

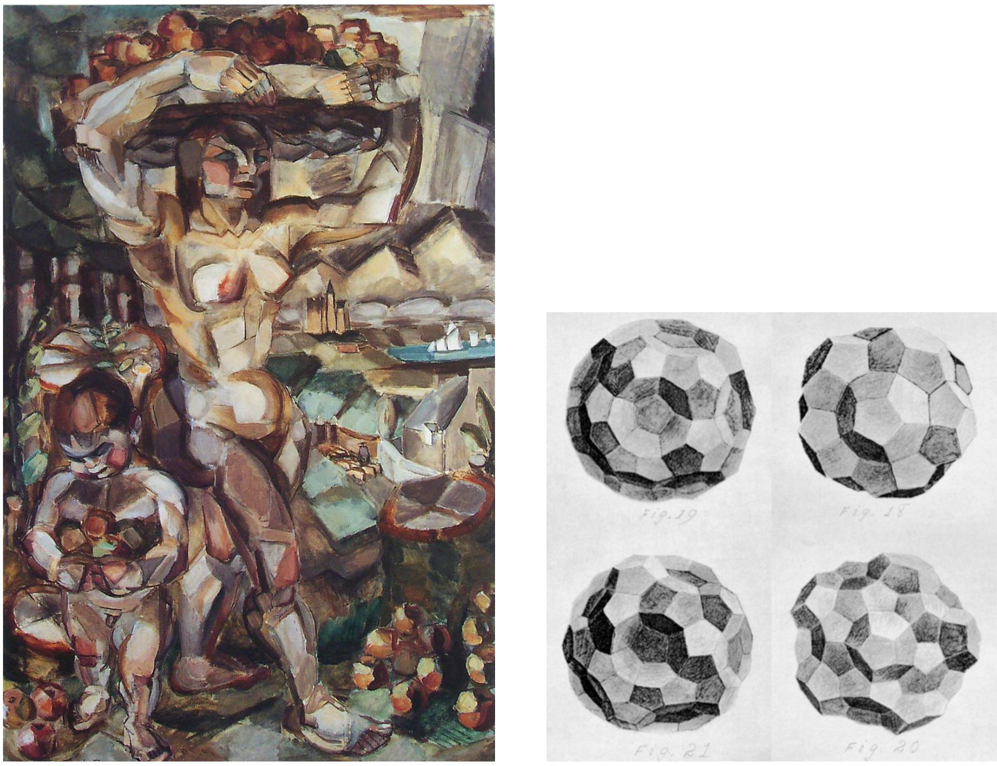


Figura 3.17: A destra, *Abundance* (1910-1911), Gemeentemuseum, L'Aia. A sinistra, *Regular Figures in n-dimensional Space*, Fig. 18-21, 1880

Un'opera di Metzinger del 1913, *L'Oiseau bleu (l'uccello azzurro)*, mostra la transizione nella pittura cubista verso elementi lineari e di superficie. L'influenza immediata su Metzinger fu Juan Gris, che aveva sviluppato il proprio stile a griglia nel 1912, basandosi sull'esempio di opere di Picasso e Braque del 1911. Nell'opera Metzinger, per mezzo di una griglia superficiale, rappresenta uno spazio indeterminato, dove i volumi si allontanano o avanzano e si fondono con lo spazio circostante.

Nel 1913 Metzinger espose pure un dipinto intitolato *Natura morta (4^a dimensione)*, un'opera presumibilmente oggi perduta. Questo dipinto sarebbe molto utile per esaminare il suo uso del concetto; tuttavia, senza quest'opera, si ipotizza che lo stile fosse simile a dipinti del tardo 1912 o dell'inizio del 1913, come *L'Oiseau bleu* o *Femme à l'Éventail (la donna con ventaglio).*

Figura 3.18: Jean Metzinger. A destra, *L'Oiseau bleu (L'uccello azzurro)*, 1913, Musée d'Art Moderne, Parigi. A sinistra, *Femme à l'Éventail*, 1912, Solomon R. Guggenheim Museum, New York.

Sebbene le opere del gruppo di *Puteaux* non furono mai così completamente libere dalla prospettiva e dalle tecniche di modellazione tradizionali, come magari lo erano state quelle analitiche di Picasso e Braque del 1911 e dell'inizio del 1912; i loro dipinti, in particolare quelli di Metzinger, rappresentano comunque un omaggio alle nuove geometrie.

3.2.3 Cubismo e Relatività[32]

Gli storici dell'arte della prima metà del Novecento hanno spesso ignorato o respinto i riferimenti alle nuove geometrie negli scritti di artisti cubisti e critici moderni. Come osservò la storiografa statunitense Linda Dalrymple Henderson nel suo studio inedito dei primi anni '70, la ragione di questa indifferenza va ricondotta ad una erronea convinzione degli storici dell'arte di vedere nella teoria e pratica cubista un riferimento alla *Teoria della Relatività*

[32]Per questo paragrafo si rimanda a *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art* [29], **Appendice A**, pp. 353-365.

ristretta di Einstein. Il primo a suggerire una relazione causale tra il lavoro di Einstein e Minkowski sulla Teoria della Relatività e l'arte dei cubisti fu Paul Laporte nel suo articolo del 1949 *Cubism and Science*, dove affermava:

> Si può benissimo sostenere che l'introduzione della geometria non euclidea nella fisica da un lato, e la rottura dalla prospettiva occidentale dall'altro, sono movimenti correlati nell'evoluzione della mente occidentale. Inoltre, il nuovo linguaggio pittorico creato dal cubismo è spiegato in modo più soddisfacente applicandogli il concetto di continuum spazio-temporale. Che questa spiegazione sia legittima è almeno indicato dai riferimenti di Apollinaire alla geometria non euclidea e alla quarta dimensione. [...] L'integrazione della geometria non euclidea con la quarta dimensione è un fattore costitutivo della fisica contemporanea. Ciò è avvenuto in fisica esattamente nello stesso momento in cui è avvenuto il passaggio al cubismo nella pittura (Einstein, Teoria della relatività speciale, 1905; Minkowski, 1908; Il primo quadro cubista di Picasso, Les Demoiselles d'Avignon, 1906-07).

Henderson fa notare come Laporte e altri storici non abbiano mai avuto prove di un cubismo relativistico più forti rispetto al semplice uso da parte dei cubisti dei termini "quarta dimensione" e "geometrie non euclidee".

Nella letteratura cubista, infatti, non compaiono mai i nomi di Einstein e Minkowski o alcun riferimento diretto alla "relatività"; d'altra parte, se si considera lo sviluppo della divulgazione della teoria della relatività, ci si rende subito conto che i cubisti francesi non avrebbero potuto conoscere questi progressi della scienza tedesca.

I principi della *Teoria della Relatività Speciale (o Relatività Ristretta)* di Einstein (così chiamata per distinguerla dalla successiva versione "generale", pubblicata nel 1916) sono stati esposti in un articolo pubblicato negli *Annalen der Physik* durante l'estate del 1905, dal titolo *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*. La teoria fu formulata da Einstein nel tentativo di spiegare alcune contraddizioni emerse nella fisica classica alla fine del diciannovesimo secolo; queste erano le anomalie create nelle equazioni per l'elettrodinamica di Maxwell dalla distinzione tra quiete e moto e il fallimento di tutti i tentativi di stabilire l'esistenza dell'etere misurando il moto relativo della terra.

La teoria della relatività ristretta si basa essenzialmente su due postulati fondamentali. Il primo postulato, o *principio di relatività speciale*, stabilisce che le leggi della meccanica, dell'elettromagnetismo e dell'ottica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali e rappresenta sostanzialmente un'estensione del principio di relatività di Galileo (per il quale le leggi della meccanica dovessero valere per tutti i sistemi di riferimento inerziali). Il secondo postulato, noto come principio di costanza della velocità della luce, afferma che la luce si propaga nel vuoto a velocità costante c, indipendentemente dallo stato di moto della sorgente che l'ha emessa o dell'osservatore.

Una delle maggiori conseguenze di questa teoria è che due eventi che sono simultanei[33] in un sistema di riferimento possono non esserlo in un altro. Altre sorprendenti conseguenze sono date dal fatto che, a velocità relativistiche, cioè paragonabili a quelle della luce, si riscontrano una dilatazione dei tempi, una contrazione delle lunghezze e un aumento della massa degli oggetti. In ultimo, dai due postulati si ricava anche che l'energia di un corpo include un termine additivo, indipendente dalla velocità del corpo e proporzionale alla sua massa, data dalla nota equazione $E = mc^2$, che rappresenta il cuore della teoria della relatività ristretta.

Già da questa breve descrizione è chiaro che né una quarta dimensione né la geometria non euclidea hanno avuto alcun ruolo nella Teoria Speciale del 1905. Solo nel 1908 la formulazione di Minkowski del continuum spazio-temporale creò una rappresentazione geometrica quadridimensionale della teoria di Einstein. La Teoria della Relatività Speciale è anche molto lontana dalla geometria riemanniana non euclidea che caratterizza il continuum spazio-temporale della Teoria della Relatività Generale del 1916. Quindi,

[33] Due eventi si dicono simultanei se avvengono esattamente nello stesso istante di tempo. Secondo la teoria della relatività occorre tuttavia specificare l'osservatore che può stabilire se i due eventi avvengono allo stesso istante di tempo; infatti due eventi, simultanei per un osservatore, possono non esserlo per un secondo osservatore.

prima della creazione del continuum spazio-temporale da parte di Minkowski, la Teoria della Relatività Speciale non aveva alcuna connessione con una quarta dimensione. E anche dopo il 1908, il ruolo che la geometria non euclidea avrebbe dovuto svolgere nella Teoria della Relatività Generale non fu chiaro fino al 1916. Come sostiene Henderson:

> L'errore degli storici dell'arte che si occupavano di cubismo e relatività è stato quello di rileggere nella letteratura cubista del 1911 e 1912 lo sviluppo in fisica di un continuum spazio-temporale non euclideo, che non fu completato fino al 1915 o 1916. L'assenza del termine quarta dimensione dalla Teoria della Relatività fino al 1908 e l'assenza di geometria non euclidea fino a quasi il 1916 rendono altamente discutibili i suggerimenti di una possibile influenza della Teoria della Relatività sul Cubismo. Inoltre, il lavoro di Einstein e Minkowski giunse all'attenzione del pubblico in modo così ritardato che è molto improbabile che i cubisti del 1911 e del 1912 sapessero qualcosa delle nuove teorie.

Poiché il concetto di simultaneità gioca un ruolo importante nella teoria di Einstein, alcuni storici hanno tentato di tracciare un parallelo con la "simultaneità" nelle opere cubiste in cui vengono presentati contemporaneamente punti di vista separati. Nel fare queste supposizioni, tuttavia, essi hanno trascurato lo scopo della discussione di Einstein, che era quello di smentire l'idea tradizionale di simultaneità assoluta. Pertanto, anche se fosse stata a loro nota, è improbabile che la negazione di Einstein della simultaneità assoluta sarebbe stata una fonte di incoraggiamento per i pittori cubisti a mostrare diverse viste di un oggetto o ad avvicinare oggetti distanti nello spazio. In effetti, l'impossibilità di mettere in relazione le tecniche cubiste con la Teoria della Relatività Speciale fu segnalata a Paul Laporte dallo stesso Einstein, che scrisse in una lettera del 1946: "Questo nuovo 'linguaggio' artistico non ha nulla in comune con la Teoria della Relatività".

Va anche ricordato che la figura di Einstein emerse come una celebrità solo nel novembre 1919, quando furono annunciati alla Royal Society di Londra i risultati di una spedizione astronomica inglese per fotografare l'eclissi del maggio 1919. Lo spostamento delle stelle fotografato all'orlo del sole confermò che i raggi luminosi delle stelle erano stati effettivamente piegati dalla massa gravitazionale del sole; con questa convalida osservativa la Teoria della Relatività Generale acquisì un'autorevolezza scientifica. L'*American Readers' Guide to Periodical Literature* del 1919-1921 ci fornisce una prova di questo cambiamento radicale: mentre prima del 1919 c'era stata solo una piccola generica categoria chiamata "Relativity, Principle of", che elencava un totale di diciotto articoli tra il 1910 e il 1918, nel 1919 apparvero invece ben quattro nuove categorie ("Einstein", "Einstein Theory", "Space and time" e "Relativity (physics)"); tra il 1919 e il 1921 infine il numero di articoli elencati in queste categorie raggiunse quasi il centinaio.

Una simile esplosione di interesse per Einstein e la teoria della relatività emerse nelle pubblicazioni europee solo dopo il 1919. In Francia una delle cause di questo lento sviluppo dell'interesse per la relatività potrebbe essere stata l'assenza di riviste scientifiche popolari, come quelle presenti negli Stati Uniti. Inoltre, dopo il 1914, le condizioni del tempo di guerra militarono ulteriormente contro l'entusiasmo per la scienza tedesca in Francia. Con la fine della Prima guerra mondiale e la conferma nel 1919 della Teoria della Relatività Generale, tuttavia, anche la Francia partecipò all'esplosione mondiale di articoli e libri su Einstein e la Teoria della Relatività. Appare quindi evidente che le teorie della relatività speciale e generale di Einstein non ebbero alcun impatto sugli artisti francesi fino agli anni '20.

In conclusione, la teoria della relatività non fu un supporto teorico né nella fase analitica del Cubismo né in quella sintetica; entrambe erano ben consolidate già prima della "Relativity Explosion" del 1919. Come abbiamo illustrato nel corso del capitolo, la teoria cubista si basava sulla nozione di quarta dimensione dello spazio che si era sviluppata dalla geometria n-dimensionale del diciannovesimo secolo.

Capitolo 4

Matematica e arte: relazioni possibili?

Hanno cercato di spiegare il Cubismo con la matematica, la trigonometria, la chimica, la psicoanalisi e non so cos'altro ancora. Tutto questo è stato solo letteratura, per non dire che sono state sciocchezze, che non hanno fatto altro che annoiare la gente.

Pablo Picasso

Quello tra matematica e arte è un accostamento di grande effetto, proprio per la percezione comune di contrasto tra questi due ambiti: l'arte è una disciplina considerata stimolante e piacevole, al contrario della matematica che spesso viene vista come arida e poco attraente [12].

Nel presente capitolo vogliamo invece mostrare come proprio l'inusuale connubio matematica/arte possa rivelarsi particolarmente fertile dal punto di vista didattico. Infatti, il legame con l'arte non solo incoraggia gli studenti ad avvicinarsi alla matematica, ma li fa anche affascinare ad essa, consentendo di superare il pregiudizio che la vede come una disciplina così asettica [6].

Il sistema scolastico tende a separare invece che a collegare le diverse discipline, tuttavia, per affrontare le sfide della società contemporanea, come sostiene Marcus du Sautoy, questi collegamenti andrebbero rafforzati [17]:

> La speranza è quella di un sistema di istruzione capace di abbattere le pareti che separano l'aula di matematica dallo studio tea-

> trale, il laboratorio di scienze dall'aula di musica. Il progresso per la società avverrà attraverso il collegamento e la comunicazione tra aree diverse.

4.1 Valenza didattica dell'accostamento matematica/arte

Troppo spesso la matematica viene percepita come una disciplina fredda e cerebrale, una scienza esatta dettata dal solo rigore logico, in netta opposizione al campo soggettivo ed estremamente individuale dell'arte. L'artista viene solitamente percepito come colui che si fa guidare dalla curiosità, dalla creatività, concetti che sono visti come lontani, se non addirittura antitetici, alla pratica della matematica (qualunque matematico sa, invece, che le stesse caratteristiche sono ingredienti fondamentali del suo lavoro) [7].

Per questa ragione, accostare la matematica a una materia così creativa come l'arte può dimostrarsi molto efficace al suo insegnamento: investigare la matematica nascosta nelle opere d'arte, analizzare il contenuto matematico che si cela negli oggetti d'arte, consente, innanzitutto, di catturare l'attenzione di tutti gli studenti, compresi quelli che sono respinti dal suo formalismo, ma anche di mostrare loro quanto la matematica possa rivelarsi, sorprendentemente, bella. Dopo averli affascinati, diventa allora più facile invogliarli ad affrontare la fatica, innegabile, di impadronirsi del linguaggio e della simbologia matematica; e questo perché, avendone compreso la bellezza, quella fatica trova una sua giustificazione [7].

4.1.1 Il justification problem

Una delle principali problematiche e sfide educative per l'insegnamento della matematica si identifica con quello che viene definito "justification problem", ovvero la necessità di giustificare il senso dell'educazione matematica; in altre parole, come spiegare agli studenti che studiare matematica è necessario, utile e anche bello?

Il ruolo della matematica nella società attuale è indubbio e innegabile, ma come risposta al justification problem questo non basta. In una plenaria al nono Convegno dell'International Congress on Mathematical Education, Shlomo Vinner punta il dito sulla differenza tra rilevanza sociale della matematica e necessità di insegnarla a tutti, di fatto affermando che la presenza della matematica nella società non sia una risposta convincente al justification problem. Vinner sottolinea come il justification problem si debba affrontare a livello individuale, cioè spiegando cosa lo studio della matematica possa offrire al singolo studente [4].

Secondo Carlo Felice Manara, la soluzione al "problema della giustificazione" sta nello "stimolare il discente, interessarlo, e convincerlo che quella fatica - spesso improba e scomoda - che egli deve fare per imparare il linguaggio della matematica e la sua struttura è degna di essere superata" [31]. Un espediente che suggerisce Manara è quello di mostrare il posto che ha la matematica nella cultura contemporanea.

> Si potrebbe cercare di presentare una componente umanistica della matematica che forse non viene sempre completamente messa in luce. [...] Non nascondiamo la difficoltà di insegnamento di una materia fondamentale come la matematica, che ha un suo essenziale valore formativo, soprattutto nel campo dell'astrazione e nel rigore; ma non rinunciamo a porci il problema di presentare la dimensione umanistica di questa scienza. Dimensione che potrebbe in qualche modo giustificare lo sforzo mentale necessario per apprenderla con pieno rigore e che porta a comprendere la sua evoluzione nell'interno della storia dell'uomo.

I contributi di Manara alla didattica della matematica sono stati costantemente diretti a contrastare l'opinione che considera questa materia come un complesso di strumenti teorici, utili unicamente alla scienza e alla tecnica; questa infatti è un'immagine puramente strumentale, si potrebbe dire quasi "servile", della matematica che, oltre ad essere parziale e fuorviante, ha influssi negativi anche sulla sua didattica. Una giusta impostazione didattica dovrebbe invece tener conto del fatto che la matematica possiede un profondo significato culturale e il suo metodo è alla base di tutti i progressi umani e non soltanto di quelle scienze che si servono dei suoi strumenti.

Su questa linea, l'accostamento con l'arte può rappresentare un approccio efficace a far emergere la dimensione umanistica della matematica e, così facendo, motivarne l'apprendimento. Nei successivi paragrafi presentiamo due esperienze concrete che manifestano la valenza didattica e culturale di questo approccio interdisciplinare.

4.1.2 Il programma *Learning Through the Arts* (LTTA)[34]

Learning Through the Arts (LTTA) è un programma educativo finalizzato al miglioramento scolastico che fornisce agli insegnanti strumenti creativi per far appassionare gli studenti alle varie discipline scolastiche: in pratica, l'arte diventa uno strumento per suscitare e tenere alto l'interesse in un curriculum di studi generale. Si tratta di uno dei più grandi programmi scolastici pubblici nel mondo che si basano sull'arte.

Sviluppato nel 1994 dal *Royal Conservatory of Music* di Toronto, è nato dalla premessa secondo cui le scuole che incoraggiano gli insegnanti a rendere l'insegnamento e l'apprendimento un atto partecipativo, attivo e legato agli interessi e alla cultura personale di ogni studente, siano le più efficaci nel conseguire uno sviluppo scolastico, sociale e personale dei suoi studenti. Nel mondo del futuro, che diventerà sempre più complesso e competitivo, la capacità di pensare in maniera laterale e innovativa sarà una caratteristica importante; di conseguenza anche l'istruzione necessiterà di un rinnovamento in questa direzione. Secondo LTTA, integrare l'arte nell'apprendimento stimola gli studenti ad andare oltre la pratica dell'imparare a memoria, permettendo loro di abituarsi a ragionare attivamente e a risolvere problemi in maniera più creativa e autonoma; in breve, l'arte aiuta ad insegnare agli studenti la capacità di introdurre innovazioni.

[34] Il contenuto di questo paragrafo è tratto da *Imparare la matematica attraverso l'arte* [18] di Elster A., Ward P., presentato durante il convegno *Matematica e Cultura* del 2005.

LTTA è un programma per tutta la scuola, al quale partecipa ogni studente e insegnante. Il programma si sviluppa per un periodo di tre anni per assicurare che la nuova pratica venga completamente integrata nell'istruzione quotidiana degli insegnanti. Gli scopi del programma sono:

- promuovere la crescita scolastica, sociale ed emotiva degli studenti;
- migliorare la riuscita scolastica di tutti gli studenti;
- fornire agli insegnanti diversi strumenti educativi;
- promuovere la creatività, la risoluzione dei problemi ed il lavoro di squadra;
- far sviluppare un forte senso decisionale e direttivo in ogni studente;
- fornire opportunità per esprimere e scoprire sé stessi;
- creare un mezzo per esplorare le questioni culturali, etiche e sociali.

LTTA si fonda sulla costante collaborazione tra gli insegnanti e gli educatori-artisti istruiti allo scopo, che servono da agenti di cambiamento all'interno della scuola. Al cuore del programma vi è proprio la figura dell'educatore-artista che combina le sue conoscenze pedagogiche al talento creativo.

Il programma, rigoroso e strutturato, ha un impatto quotidiano sulle classi e comprende lo sviluppo professionale continuo degli insegnanti e degli artisti, l'ideazione di sempre nuovi progetti di lezioni, lo sviluppo di un curriculum e di un modo di parlare all'interno delle classi innovativo, nonché una valutazione continua. Tra gli esempi di attività del programma troviamo:

- storia attraverso i giochi di ruolo;
- geometria attraverso l'arte visiva e l'architettura;
- abilità di comunicazione orale attraverso il raccontare storie;
- strutture e meccanismi attraverso movimenti creativi;
- punteggiatura attraverso percussioni globali;
- matematica attraverso i paesaggi;
- imparare a leggere e scrivere attraverso il giornalismo.

Grazie a questo approccio pratico e creativo, gli studenti di LTTA approfondiscono il curriculum scolastico in tutte le materie e, allo stesso tempo, si entusiasmano nei confronti dell'apprendimento.

Tuttavia, ciò che stupisce maggiormente è scoprire che per gli studenti di LTTA, che imparano le materie fondamentali attraverso l'arte, il maggiore profitto si verifica proprio nell'apprendimento della matematica. Uno studio del 2002 della *Queen's University* su 6750 studenti di tutto il Canada ha mostrato i vari benefici dell'arte per allievi e insegnanti, incluso un maggiore impegno e un atteggiamento più positivo nei confronti della scuola. Ma il risultato più interessante è stato il fatto che gli studenti che impiegano l'arte nel loro apprendimento per tutto il curriculum scolastico hanno raggiunto in matematica un punteggio di 11 punti percentuali più alto dei loro pari nelle scuole "non-LTTA".

Perché l'arte porta profitti così sensazionali in matematica? Innanzitutto, gli studenti godranno degli stessi benefici che l'arte apporta anche alle altre materie: essa riscuote interesse poiché fornisce un ambiente di risonanza emotiva e quindi impegna gli studenti in maniera più completa rispetto all'approccio lezioni/test tradizionale. Le notizie fornite dalle neuroscienze negli ultimi decenni hanno mostrato in maniera definitiva che l'arte è un agente vitale per la creazione di nuove reti neurali tra parti diverse del cervello, che aiuta a creare pensatori creativi che riescono ad attivare il loro cervello interamente per la risoluzione di un problema. In secondo luogo, per molti ragazzi imparare la matematica è un atto carico di paura e ansia e, quando questi sperimentano la paura e la trepidazione, l'apprendimento si blocca. Se invece le lezioni risultano piacevoli e sono vissute serenamente, ansia e paura si riducono e lo studente è più predisposto ad interiorizzare i nuovi contenuti. Quindi i benefici che l'arte apporta all'apprendimento della matematica non emergono solo nella maggiore motivazione, ma coinvolgono anche le abilità di pensiero. D'altronde, il pensiero matematico concettuale e l'approccio artistico sono caratterizzati da uno stesso pensare/imparare, induttivo e visivo, ed entrambi usano linguaggi rappresentativi e simbolici finalizzati all'astrazione del mondo sensoriale. Anche il movimento è utile agli studenti per codificare concetti matematici, tramite il quale sviluppano il proprio senso dello spazio e capiscono la geometria interiorizzandola.

4.1.3 Il progetto *Liceo Matematico*[35]

Anche in Italia esiste un progetto di sperimentazione didattica caratterizzato da un forte approccio interdisciplinare: è il *Liceo Matematico*, il quale si propone di offrire un percorso, per la Scuola Secondaria di secondo grado, rivolto all'approfondimento dei rapporti tra la matematica e le altre materie. I pilastri su cui si fonda il Liceo Matematico sono: interdisciplinarità[36]; didattica laboratoriale; elaborazione di percorsi didattici in cui affrontare temi matematici che non hanno ancora trovato posto nel curriculum.

Il progetto "Liceo Matematico" nasce nel 2014 come progetto di ricerca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno; per il suo carattere fortemente interdisciplinare, il progetto coinvolge immediatamente altri dipartimenti dello stesso Ateneo, per poi estendersi a numerose altre sedi universitarie. Dopo tre anni di ricerca, di sperimentazione nelle scuole, di riflessioni con gli insegnanti e di confronto con la comunità scientifica nell'ambito di numerosi congressi nazionali e internazionali, è stata poi valutata la possibilità di coinvolgere direttamente le scuole attraverso percorsi formativi rivolti agli insegnanti. Un liceo può quindi attivare una classe di Liceo Matematico inserendo i propri insegnanti in un percorso formativo in collaborazione con le università aderenti; ad oggi il progetto coinvolge circa 140 scuole superiori.

[35] Il contenuto di questo paragrafo è tratto da *Per il superamento della divisione della Cultura: la proposta del Liceo Matematico* [10] di Capone R., Rogora E., Tortoriello F.S.

[36] L'interdisciplinarità è un obiettivo costante in tutte le moderne teorie didattiche, volto a superare la frammentazione dei saperi tipica dell'organizzazione della scuola secondaria. Il metodo di insegnamento interdisciplinare si basa sulla presentazione, agli studenti, di argomenti o situazioni per affrontare i quali è necessario possedere abilità e conoscenze che vanno al di là delle specifiche conoscenze legate alla singola materia. Pertanto, può essere necessaria la collaborazione di altri colleghi per creare un percorso di tipo interdisciplinare, dove non deve esistere una primogenitura disciplinare. Lo scopo della pedagogia dell'interdisciplinarità è quello di incoraggiare gli studenti a stabilire interconnessioni tra le varie discipline di studio, favorendo così quel processo di integrazione di competenze che è spesso indispensabile per affrontare in modo completo ed efficace determinati problemi.

L'idea che sta alla base di questa iniziativa è quella di dare più spazio alla matematica, ma non si tratta di un potenziamento delle ore di matematica per introdurre un numero maggiore di nozioni, lo scopo è quello di offrire allo studente saperi e competenze matematiche per orientarsi consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo, sempre più collegati e complessi. Il piano di studi prevede l'aggiunta di ore al monte orario curriculare, dedicate ad attività laboratoriali in cui la matematica funge da collante culturale tra le diverse materie: la matematica è il motivo guida intorno a cui ruota l'azione didattica e fa da collegamento tra la cultura umanistica e quella scientifica, senza porsi in posizione dominante, ma piuttosto ponendosi in rapporto dialettico con le altre discipline. Ad esempio, si mettono in luce e si analizzano i rapporti della matematica con la letteratura, l'arte, la storia, la filosofia, la fisica, la biologia ecc., riscoprendo anche il ruolo che la matematica ha avuto nei secoli come linguaggio e modello di pensiero.

Per quanto riguarda il modulo matematica/arte, esso non si limita a "cercare la matematica nell'arte"' (e simmetricamente "l'arte nella matematica"), ma piuttosto cerca anche di riflettere sui legami che intercorrono tra il processo di interpretazione di un'opera d'arte (più precisamente un quadro) e quello di risoluzione di un problema di matematica (in particolare, ma non solo, di geometria), allo scopo di trarne alcuni spunti didattici che aiutino e motivino gli studenti nello svolgere entrambe le attività e, al tempo stesso, forniscano ai docenti suggerimenti su come aiutare gli studenti ad affinare le capacità di "saper vedere in matematica".

Accogliendo l'invito del Liceo Matematico ad "educare lo sguardo matematico" attraverso l'interpretazione di opere d'arte, ho deciso di progettare un'attività laboratoriale, intitolata "Il Cubismo e la quarta dimensione", che prende spunto da alcuni degli argomenti affrontati in Capitolo 3.

4.2 *Il Cubismo e la quarta dimensione*: una proposta di attività laboratoriale

Il laboratorio *Il Cubismo e la quarta dimensione* si propone di far comprendere agli studenti, attraverso la lettura di fonti storiche e l'analisi di un'opera di Picasso, l'espediente adottato dai cubisti per rappresentare la quarta dimensione spaziale. È pensato per le classi quinte di una scuola secondaria di secondo grado in cui sia presente l'insegnamento di Storia dell'Arte (Liceo artistico, Liceo classico, Liceo scientifico, Liceo delle scienze umane, Liceo linguistico, Liceo musicale e coreutico), in quanto prevede la collaborazione tra il docente di matematica e quello di storia dell'arte. Sarebbe opportuno che gli studenti non abbiano già affrontato il Cubismo a lezione, in modo da non essere influenzati dagli argomenti studiati, anzi il laboratorio potrebbe fungere da premessa introduttiva all'argomento.

Le motivazioni per proporre un laboratorio sul cubismo e la quarta dimensione sono di diverso ordine: da un lato si tratta di un argomento di forte impatto, che suscita curiosità e interesse, per cui ben si presta a stimolare negli studenti l'immaginazione e la creatività, facoltà che vengono normalmente ritenute assai lontane dal normale "fare matematica" in classe; dall'altro lato consente di mostrare agli studenti come la matematica sia stata una fonte d'ispirazione per i cubisti e, più in generale, abbia fornito in epoche diverse strumenti e suggestioni alle arti visive.

Il percorso si colloca perfettamente nel quadro dei traguardi che gli studenti debbono raggiungere al termine degli studi liceali, come dichiarato nelle Indicazioni Nazionali, per gli insegnamenti di Matematica e Storia dell'Arte:

> **Matematica - Linee generali e competenze**
>
> Al termine del percorso liceale [...] lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. [...] Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la

base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze, la filosofia e la storia.

Storia dell'arte - Linee generali e competenze
Le principali competenze acquisite dallo studente al termine del percorso liceale sono: essere in grado di leggere le opere architettoniche e artistiche per poterle apprezzare criticamente e saperne distinguere gli elementi compositivi, avendo fatto propria una terminologia e una sintassi descrittiva appropriata; acquisire confidenza con i linguaggi espressivi specifici ed essere capace di riconoscere i valori formali non disgiunti dalle intenzioni e dai significati, avendo come strumenti di indagine e di analisi la lettura formale e iconografica; essere in grado sia di collocare un'opera d'arte nel contesto storico-culturale, sia di riconoscerne i materiali e le tecniche, i caratteri stilistici, i significati e i valori simbolici.[37]

Il laboratorio si articola in tre fasi del percorso: la prima è condotta dal docente di matematica, la seconda dal docente di storia dell'arte, infine nella terza fase gli studenti, suddivisi in gruppi di lavoro, svolgono autonomamente l'attività finale. La durata prevista è di 3 ore (possibilmente consecutive), prevediamo infatti che ciascuna fase necessiti di un'ora per il completo svolgimento; è richiesto l'utilizzo di una lavagna LIM per proiettare le immagini.

4.2.1 Introduzione alla quarta dimensione

Il laboratorio si apre con la presentazione dell'argomento agli studenti, per introdurlo l'insegnante di storia dell'arte mostra loro il seguente passaggio dell'opera *Les Peintres cubistes. Méditations esthétiques* (1913), considerata il manifesto del movimento cubista, di Guillaume Apollinaire:

[37] Si fa riferimento alle *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento in relazione alle attività e agli insegnamenti compresi nel piano degli studi previsto per il Liceo scientifico.*

> I giovani artisti delle scuole d'avanguardia (si riferisce ai cubisti), anche se osservano ancora la natura, non la imitano più e si dedicano con cura alla rappresentazione delle scene naturali osservate e ricostruite con lo studio. [...] Si sono vivamente rimproverate ai nuovi artisti-pittori le loro preoccupazioni geometriche. Tuttavia, le figure della geometria sono alla base del disegno. La geometria, scienza che ha per oggetto lo spazio, la sua misura e i suoi rapporti, è stata in ogni tempo la regola stessa della pittura. [...] I nuovi pittori non si sono certo proposti, più degli antichi, di essere geometri. Ma si può dire che la geometria è per le arti plastiche ciò che la grammatica è per l'arte dello scrittore. Oggi i sapienti non si attengono più alle tre dimensioni della geometria euclidea. I pittori sono stati portati naturalmente e, per così dire, intuitivamente a preoccuparsi di nuove misure possibili dello spazio che, nel linguaggio figurativo dei moderni, si indicano tutte insieme brevemente col termine di "quarta dimensione".

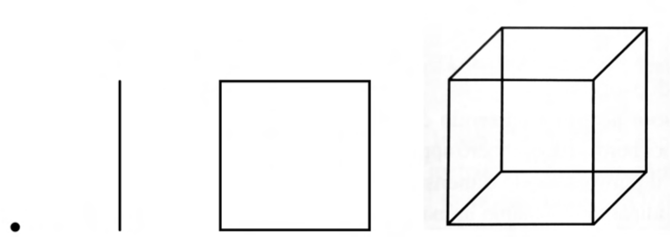
Dopo questa premessa, l'insegnante di matematica subentra al docente di storia dell'arte per condurre la prima fase dell'attività. L'insegnante esordisce chiedendo agli studenti se conoscono o hanno mai sentito parlare di "quarta dimensione", è l'occasione per intavolare un confronto iniziale tra le diverse considerazioni fatte dagli studenti.

A questo punto, l'insegnante procede nella lezione guidando gli studenti alla scoperta dello spazio a quattro dimensioni. Di seguito è riportato un discorso esemplificativo, tratto dal libro *Arte e matematica: metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili* [14] di Bruno D'Amore, utile a condurre la lezione; il punto di partenza considerato è l'analogia con la situazione nello spazio in dimensioni inferiori.

D'Amore - da La quarta questione[38]

Lo spazio dell'esperienza quotidiana ha tre dimensioni, che sono comunemente dette lunghezza, larghezza e altezza. La quarta dimensione spaziale è quindi la dimensione che viene dopo le 3 dimensioni che conosciamo.

Ma, prima di parlare di quarta dimensione, facciamo un passo indietro: partiamo considerando il punto, che è privo di dimensioni ("punto è ciò che non ha parti" recita il primo termine di Euclide all'inizio del primo libro degli Elementi), cioè ha dimensione 0. Muovendo il punto lungo una qualsiasi direzione percorrendo una lunghezza unitaria formiamo una dimensione. Per passare a due dimensioni dobbiamo tracciare una seconda linea, sempre di lunghezza unitaria, ortogonale a quella precedentemente tracciata; muovendo la prima linea lungo la seconda formeremo un quadrato, che è una superficie bidimensionale. Per passare in 3 dimensioni, di nuovo, dobbiamo tracciare una terza linea ortogonale alle due precedenti, sempre di lunghezza unitaria, e muovere quindi il quadrato lungo questa nuova linea tracciata, si formerà così un cubo. Dunque, il segmento può essere pensato come l'evoluzione nella dimensione uno del punto, il quadrato può essere pensato come l'evoluzione nelle due dimensioni del segmento, il cubo può essere pensato come l'evoluzione nelle tre dimensioni del quadrato. È lecito proseguire?



Contrariamente a quel che si crede, questa domanda ha origini molto antiche; per esempio è contenuta nel De Coelo, dove Aristotele credette di dimostrare l'impossibilità di concepire una quarta dimensione, oltre alle tre

[38]Vedi [14], pp. 367-371.

dimensioni "sensibili". Lo schema del suo ragionamento è il seguente: se si muove un punto (dimensione zero) si ottiene un segmento (dimensione 1), se si muove il segmento si ottiene un quadrato (dimensione 2), se si muove il quadrato si ottiene un cubo (dimensione 3), se si muove un cubo si ottiene un altro oggetto sempre di dimensione 3. Dunque, non si può concepire una dimensione maggiore di 3.

A ben guardare, con un'argomentazione come questa, non si giunge affatto a dimostrare alcuna impossibilità; in effetti, se si muovesse il segmento sulla stessa direzione della retta a cui appartiene, si avrebbe un nuovo segmento, semmai più grande, ma pur sempre di dimensione 1. Per passare al quadrato, invece, si deve uscire dal mondo di dimensione uno (la retta) e ipotizzare l'esistenza di un mondo di dimensione maggiore, la 2, nella quale il segmento genera il quadrato. Lo stesso vale per passare dal quadrato al cubo: bisogna far uscire il quadrato dal suo mondo di dimensione 2 (il piano a cui appartiene) e ipotizzare l'esistenza previa del mondo di dimensione 3.

Ora, se il cubo si muove nel suo stesso mondo di dimensione 3, effettivamente non si genera alcun oggetto a dimensione superiore; ma se, come si è fatto finora, si ipotizza un mondo di dimensione 4, allora il cubo tridimensionale può esservi portato a generare, per continuità, un "ipercubo" di dimensione 4. La vacuità del ragionamento aristotelico balza agli occhi di un moderno, eppure bloccò per secoli il superamento delle tre dimensioni; più precisamente, anche quei pensatori che intravidero la possibilità di superare lo spazio a tre dimensioni, preferivano fingere di accettare la "dimostrazione" di Aristotele e non osavano contraddirla.

D'altra parte, la quarta dimensione è inaccessibile alla nostra immaginazione, quindi come possiamo riuscire quanto meno a "capirla"? Il suggerimento ci giunge dall'analogia con quello che accade in dimensioni inferiori. Data la complessità di concepire la quarta dimensione, non tutti gli "ipersolidi" hanno avuto la stessa popolarità. Il più conosciuto è sicuramente l'ipercubo, vediamo come riuscire a "visualizzarlo". Cominciamo con l'osservare un cubo, che è un oggetto matematico tridimensionale (3D): le sue *sei facce (bordi del cubo) sono quadrati, oggetti matematici a due dimensioni (2D). Nulla ci impedisce di proiettare il cubo perpendicolarmente su uno dei piani che passano per una delle sue facce, tale proiezione dà luogo a un quadrato.*

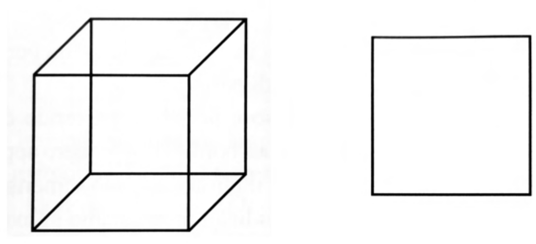


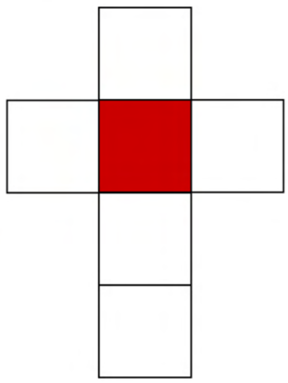
Figura 4.1: Rappresentazione bidimensionale in prospettiva di un cubo e della sua proiezione perpendicolare al piano di una delle sue facce.

I suoi quattro lati (bordi del quadrato) sono segmenti, oggetti matematici a una dimensione (1D). Nulla ci impedisce di proiettare il quadrato perpendicolarmente su una delle rette che passano per uno dei suoi lati. Tale proiezione dà luogo a un segmento. I suoi due vertici (bordi del segmento) sono punti, oggetti matematici a dimensione zero (0D). Nulla ci impedisce di proiettare il segmento su uno dei suoi vertici; tale proiezione dà luogo a un punto.

Figura 4.2: A sinistra, rappresentazione unidimensionale di un quadrato proiettato perpendicolarmente sulla retta che contiene uno dei suoi lati. A destra, rappresentazione zero dimensionale di un segmento proiettato su uno dei suoi vertici.

Dunque, il punto si può pensare come una rappresentazione del cubo in uno spazio 0D, il segmento come una rappresentazione del cubo in uno spazio 1D, il quadrato in uno spazio 2D. Ma chi ci impedisce di andare oltre, cioè di crescere di dimensione invece che scendere? Così come il quadrato è la proiezione di un cubo in 2D, il cubo si può pensare come la proiezione in 3D di un ipercubo dello spazio 4D, che è impossibile anche solo tentare di rappresentarlo. Tuttavia...

Se vogliamo passare dal quadrato 2D al cubo 3D possiamo operare così: disegniamo il quadrato (in rosso nella figura in basso a sinistra), disegniamo in corrispondenza di ogni suo bordo (che è un lato) un quadrato uguale (e siamo a 5 quadrati tutti uguali); e poi disegniamo su un qualsiasi bordo esterno (che è un lato di un quadrato aggiunto) un altro quadrato uguale; e siamo a sei quadrati uguali disposti in questo modo.



Ora la figura si può richiudere, com'è facilmente comprensibile a chiunque, per ottenere il cubo di partenza. Lo stesso procedimento si può ottenere a partire dal segmento (1D) per ottenere un quadrato che lo abbia come lato. Disegniamo il segmento (in rosso nella figura sopra a destra); su ciascuno dei suoi due bordi si disegna un segmento uguale; al bordo esterno dei segmenti aggiunti si disegna un nuovo segmento identico ai precedenti. Ora è facile ripiegare la figura per riavere il quadrato di partenza. Lo stesso è possibile partendo dal punto (0D); ai suoi bordi si dovrebbero applicare dei punti, ma il punto, avendo dimensione zero, non ha bordi; allora possiamo immagi-

nare un altro punto oltre a quello di partenza; abbiamo dunque 2 punti che costituiscono un segmento.

La formula che sta nascendo è dunque la seguente: l'oggetto matematico di partenza (1) + tanti oggetti uguali quanti sono i bordi + un ulteriore oggetto identico a quello di partenza. Questo significa:

- nel caso del punto $1+0+1=2$ *(risultato: segmento, composto da 2 punti);*
- nel caso del segmento $1+2+1=4$ *(risultato: quadrato, composto da 4 lati-segmenti);*
- nel caso del quadrato $1+4+1=6$ *(risultato: cubo, composto da 6 facce-quadrati).*

Se vogliamo ora passare al caso 4D, cioè all'ipercubo, possiamo ipotizzare per semplice estensione una situazione aritmetica di questo tipo: $1+6+1$, *ossia il cubo di partenza + 6 cubi identici attaccati alle 6 facce del cubo + 1 cubo attaccato a una faccia di un cubo esterno.*

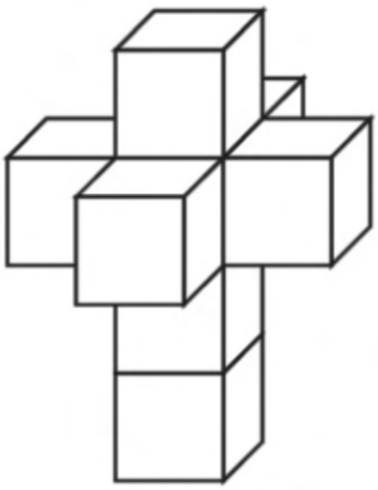


Figura 4.3: Sette cubi disposti attorno a uno dato; gli otto cubi possono "chiudersi" a formare un ipercubo nello spazio 4D.

Questa immagine, dunque, rappresenterebbe un ipercubo 4D proiettato in 3D; ma siccome la pagina è 2D, quella che possiamo vedere qui non è altro che la rappresentazione in 2D della rappresentazione in 3D dell'ipercubo 4D.

Terminata la lezione d'introduzione, sarebbe opportuno collocare storicamente la nozione di quarta dimensione e sottolineare la grande popolarità che raggiunse ad inizio Novecento. A tal proposito, si potrebbe mostrare il seguente brano, scritto nel 1902 dal noto matematico Poincaré:

> Così come è possibile realizzare su di un piano la prospettiva di una figura a tre dimensioni, è possibile realizzare quella di una figura a quattro dimensioni su di un quadro a tre (o due) dimensioni. Per il geometra far questo non è che un gioco. È possibile anche prendere, di una stessa figura, più prospettive da più punti di vista diversi. È facile, per noi, rappresentarci queste prospettive, poiché esse non hanno che tre dimensioni. Immaginiamo che le diverse prospettive di uno stesso oggetto si susseguano le une alle altre [...]. Nulla impedisce allora di immaginare che tali operazioni si combinino seguendo le leggi che noi vorremmo, ad esempio in modo da formare un gruppo che abbia la stessa struttura di quello dei movimenti di un solido invariabile a quattro dimensioni. Non c'è nulla in questo che non si possa rappresentare e tuttavia, queste sensazioni sono esattamente quelle che proverebbe un individuo che fosse dotato di una retina a due dimensioni e che si spostasse nello spazio a quattro dimensioni. In questo senso, è possibile affermare che sarebbe possibile rappresentare la quarta dimensione.

Lo scopo di questa attività è di presentare agli studenti come visualizzare la quarta dimensione nell'applicazione pittorica che venne adottata dai cubisti, ossia rappresentando un oggetto osservandolo da diversi punti di vista. L'attività si pone anche l'obiettivo di inquadrare il contesto storico in cui la teoria della quarta dimensione si sviluppò e di dimostrare, attraverso il riferimento a fonti scritte, l'influenza che tale teoria ebbe nell'arte cubista e, più in generale, nell'intero panorama culturale.

4.2.2 Analisi dell'opera *Maria Agustina Sarmiento (Velázquez)* di Pablo Picasso

La seconda fase del laboratorio è condotta dall'insegnante di storia dell'arte, il quale comincia introducendo (se non ancora affrontato in classe) le caratteristiche salienti del Cubismo: la volontà di non imitare la realtà, ma di rappresentarla unicamente attraverso un'elaborazione mentale; la rappresentazione degli oggetti osservandoli da diversi punti di vista; la resa plastica dello spazio; il riduzionismo geometrico. Dopodiché, procede a mostrare alcune tra le opere più famose, spiegando come l'espediente dei diversi punti di vista ricorda molto quello mostrato per rappresentare l'ipercubo.

Figura 4.4: Pablo Picasso, *Maria Agustina Sarmiento (Velázquez)*, 1957, Museo Picasso, Barcellona.

Segue l'analisi guidata dell'opera di Picasso *Maria Agustina Sarmiento (Velázquez)*. L'opera fa parte di una serie di dipinti e studi preparatori, portati avanti dall'artista dal 1950 al 1957, sulla scena rappresentata da Diego Velázquez in *Las Meninas* (1656). Il dipinto *Las Meninas* raffigura l'Infanta Margherita, figlia di Filippo IV e Marianna D'Austria, circondata dalle dame di corte, Doña María Agustina Sarmiento de Sotomayor e Doña Isabel de Velasco. È ambientato nello studio del pittore, il quale si autoritrae, a sinistra, nell'atto di dipingere. Sulla destra invece sono ritratti i due nani di corte, Nicolasito Pertusato e Mari Bárbola, e il cane della famiglia accucciato sul pavimento. Nello specchio si vedono riflesse le figure dei genitori, i Reali spagnoli, e sullo sfondo appare un uomo fermo alla porta.

Figura 4.5: Diego Velázquez, *Las Meninas*, 1656, Museo del Prado, Madrid.

Per l'analisi dell'opera *Maria Agustina Sarmiento (Velázquez)* di Picasso si fa riferimento all'articolo *Local/global in mathematics and painting* [13] di Capi Corrales Rodrigáñez, pubblicato nel secondo volume di "The Visual Mind" di Michele Emmer; di seguito se ne riporta un estratto.

Corrales Rodrigáñez - da Lo sguardo di un matematico su alcuni dipinti di Picasso[39]

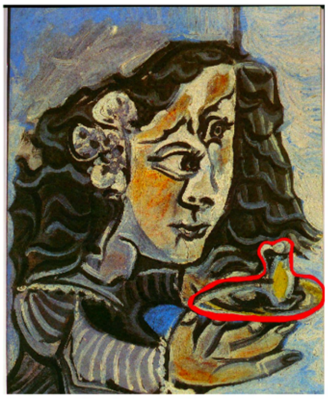
A prima vista, questo è un dipinto strano. La struttura globale (occhi sopra, naso al centro, bocca e mento sotto il naso) ci permette di riconoscere una persona: il suo viso e il suo busto. Ma non è un volto come otterremmo, ad esempio, da una fotografia. In una fotografia tutte le caratteristiche di un viso corrispondono l'una all'altra. Al contrario, in questo dipinto le caratteristiche non sembrano combaciare tra loro: sono combinate in modo tale da riconoscere il viso nel suo insieme, ma sicuramente non si abbinano tra loro.

Dal titolo che gli ha dato Picasso, sappiamo che questo dipinto è una riflessione su Las Meninas di Velázquez, quindi possiamo presumere che ci stia dicendo qualcosa sul pezzo di Velázquez. Ma cosa esattamente? Isolerò alcune delle immagini parziali che Picasso ha così brillantemente assemblato e cercherò di decodificare le informazioni sul dipinto di Velázquez nascoste in ognuna di esse. Invito il lettore a seguirmi in questo esperimento.

L'opera riproduce il volto e il busto di una signora, María Agustina Sarmiento. Chi è María Agustina Sarmiento? È una dama di corte che, posta al centro della scena dipinta da Velázquez, offre con grazia una brocca alla giovane principessa. Mi rendo conto che le linee nere che indicano la forma interna del vassoio appaiono davanti alla brocca nella tela di Picasso e non dietro, come si avrebbe dal punto di vista dello spettatore.


[39]Le immagini che accompagnano il testo non sono tratte dall'articolo di Corrales Rodrigáñez, ma sono inserite a scopo illustrativo.

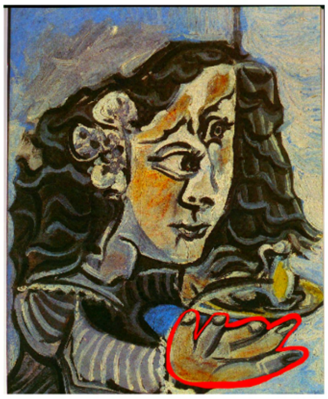
Da dove nella stanza di Velázquez si vedono queste linee come le ha dipinte Picasso? Lascio che la mia mente si muova intorno alla scena: è la stessa María Agustina che vede il vassoio come lo descrive Picasso.



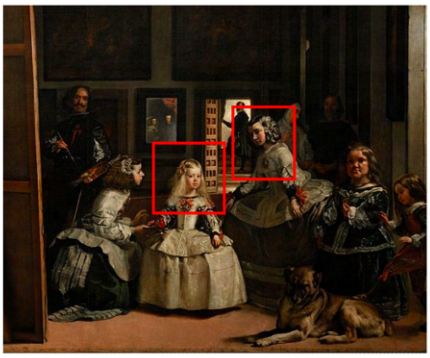
Allora il quadro di Picasso è un quadro di María Agustina visto da María Agustina? Mi bastano pochi secondi per rendermi conto di quanto sia assurdo questo suggerimento: il vassoio viene descritto come visto da María Agustina, ma nessuno degli occhi è visto da María Agustina, anzi ognuno di loro è visto da un luogo diverso.

L'ipotesi più plausibile è che Picasso abbia abbandonato il punto fisso e si muova fisicamente intorno alla figura di María Agustina, scegliendo alcuni luoghi dai quali osservarla, che poi assembla insieme in un'unica immagine. In altre parole, Picasso vuole descrivere la figura come vista simultaneamente da alcuni dei diversi occhi presenti nella stanza di Velázquez.

Osservando la mano che regge il vassoio, mi accorgo di un dettaglio che fino a quel momento mi era sfuggito: in questa mano le linee interne del pollice e del palmo sono accuratamente segnate. Da dove nella scena di Velázquez si possono percepire queste battute? Si potevano percepire le linee interne nel pollice e nel palmo della ragazza solo se si stava alla sua sinistra, esattamente dove si trova lo stesso Velázquez. Dunque, il vassoio è visto da María Agustina, mentre le linee interne del palmo e del pollice sono viste da Velázquez.

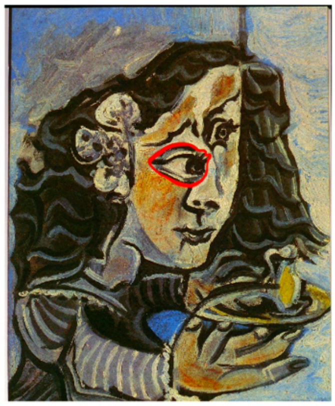



Dopodiché, noto che sia i capelli che il viso sono completamente delineati, i capelli incorniciano perfettamente il viso, come possono vedere solo la principessa e le sue inservienti, in piedi esattamente davanti a María Agustina nella scena di Velázquez.

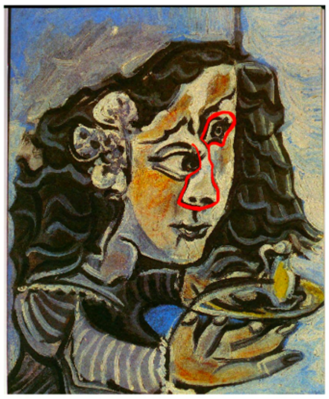



A questo punto mi sorge una domanda: può essere che Picasso sia riuscito a lasciare in questa figura tracce non di alcuni degli occhi, ma di esattamente tutti gli occhi presenti nel dipinto di Velázquez?

Mi soffermo sull'occhio sinistro: la linea nera orizzontale, l'accumulo di grigio a destra e la posizione della pupilla. Questi indizi indicano che l'occhio è tratto dal profilo destro della ragazza, cioè dal posto occupato dalla regina, dal re (e dagli spettatori) nel dipinto di Velázquez.



Finora Picasso ci ha offerto il punto di vista della ragazza stessa, di Velázquez, del re, della regina e degli spettatori, della principessa e dei servitori alla sua sinistra. Manca qualcosa? C'è una caratteristica che manca nella mia analisi: l'occhio destro. Osservandolo mi accorgo che è visto dallo stesso lato del naso. Da dove si vede questo profilo? Dalla sinistra di Sarmiento, cioè dal fondo della stanza. Quindi il profilo destro è descritto come visto dall'uomo in piedi sulla porta.



Picasso ha così descritto la figura di María Agustina come vista da davanti, da dietro, da sinistra, da destra e anche dai suoi stessi occhi, cioè dall'alto, della scena di Velázquez.

L'attività ha, innanzitutto, lo scopo di promuovere un approccio "matematico" al processo di interpretazione di un'opera d'arte, sulla base del suggerimento da parte del Liceo Matematico di educare lo sguardo degli studenti. Sebbene il dipinto non risalga al periodo cubista di Picasso, è stato scelto per l'attività perché molto efficace a far comprendere la tecnica cubista che coinvolge la quarta dimensione.

4.2.3 Riproduzione dell'opera da parte degli studenti

Nell'ultima attività gli studenti vengono suddivisi in gruppi da (almeno) 5 persone. L'attività prevede che ciascun gruppo metta in scena il dipinto *Las Meninas* di Velázquez, cioè che ogni componente assuma un ruolo della scena (i personaggi essenziali sono: Maria Agustina, la principessa, Velázquez, il re/la regina e l'uomo in fondo alla stanza). Dopodiché, ogni personaggio ha il compito di ritrarre Maria Agustina dal suo punto di vista (è sufficiente che disegni su un foglio lo stesso dettaglio che, nell'analisi precedente, è osservato dal punto di vista del suo personaggio). Infine, seguendo l'analisi svolta nella precedente attività, gli studenti assemblano insieme i loro disegni in un'unica immagine. Al termine, ciascun gruppo presenta la riproduzione ottenuta, verificando se rispecchi o meno l'opera di Picasso.

L'attività ha lo scopo di far interiorizzare, attraverso l'uso del corpo nella riproduzione scenica, la tecnica cubista che coinvolge la quarta dimensione.

Bibliografia

[1] Agazzi E., Palladino D., *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano, Edizioni scientifiche e tecniche Mondadori, 1978.

[2] Apollinaire G., *Méditations esthétiques. Les Peintres cubistes*, Parigi, Eugène Figuière & Cie, 1913.

[3] Argan G. C., *L'arte moderna: Il Novecento*, Firenze, Sansoni, 2008.

[4] Baccaglini-Frank A., Di Martino P., Natalini R., Rosolini G., *Didattica della matematica*, Milano, Mondadori Università, 2017.

[5] Benvenuti S., *Geometrie non euclidee*, monografia, Alpha Test, 2008.

[6] Benvenuti S., *I numeri della bellezza: la valenza didattica dell'accostamento matematica/arte*, Periodico di Matematiche 2, 2013, pp. 15-24.

[7] Benvenuti S., *La valenza didattica dell'accostamento matematica/arte: proposte interdisciplinari per il biennio della scuola superiore di secondo grado*, "Quaderni di Ricerca in Didattica", n.2, Numero speciale n.5, G.R.I.M., Università degli Studi di Palermo, 2019.

[8] Bonola R., *La geometria non-euclidea: esposizione storico-critica del suo sviluppo*, Bologna, Zanichelli, 1906.

[9] Boole Stott A., *On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids*, J. Müller, 1900.

[10] Capone R., Rogora E., Tortoriello F. S., *Per il superamento della divisione della Cultura: la proposta del Liceo Matematico*, Matematica, Cultura e Società 2 (3), 2017, pp. 293-304.

[11] Cappelli F., *I Grundlen Der Geometrie*, Tesi di Laurea magistrale, Università di Bologna, 2018.

[12] Catastini L., Ghione F., *Matematica e Arte. Forme del pensiero artistico*, Milano, Springer-Verlag, 2011.

[13] Corrales Rodrigáñez C., *Local/global in mathematics and painting*, The Visual Mind II, Michele Emmer ed., The MIT Press, 2005, pp. 273-294.

[14] D'Amore B., *Arte e matematica: metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili*, Bari, Edizioni Dedalo, 2015.

[15] Dantini M., *Cubismo. Distruggere per ricostruire*, Firenze, Giunti, 2003.

[16] De Micheli M., *Le avanguardie artistiche del Novecento*, Bologna, Feltrinelli, 1988.

[17] Du Sautoy M., *La matematica, un ponte tra le due culture*, Trento, Fondazione Bruno Kessler, 2015.

[18] Elster A., Ward P., *Imparare la matematica attraverso l'arte*, in: M. Emmer (ed.), Matematica e Cultura 2005, Springer-Verlag Italia, Milano, pp. 171-185.

[19] Emmer M., *La perfezione visibile*, Roma-Napoli, Theoria, 1991.

[20] Emmer M., *La quarta dimensione (euclidea): matematica e arte*, in: M. Emmer (ed.), Matematica e Cultura 2001, Springer-Verlag Italia, Milano, pp. 202-213.

[21] Fry E., *Cubism*, New York, McGraw-Hill, 1966.

[22] Gandolfo M., *Classificazione dei politopi regolari*, Tesi di Laurea in Matematica, Università degli studi di Genova, 2015.

[23] Garbolino P., *Il senso dello spazio e del tempo*, Corso di Teoria e filosofia dei linguaggi, 2013.

[24] Gómez Urgellés J., *Quando le rette diventano curve: le geometrie non euclidee*, Milano, RBA Italia, 2011.

[25] Gray J., *L'Ottocento: matematica. Dalla geometria proiettiva alla geometria euclidea*, Storia della Scienza, Treccani, 2003, www.treccani.it/enciclopedia/ottocento-dalla-geometria-proiettiva-alla-geometria-euclidea

[26] Gualdoni F., *Cubismo*, Milano, Skira, 2007.

[27] Hartshorne R., Geometry: Euclid and Beyond, Springer, 2013.

[28] Henderson L. D., *"Eppure è viva (per un soffio)": il destino della quarta dimensione geometrica intorno alla metà del Novecento*, in: M. Emmer (ed.), Matematica e Cultura 2003, Springer-Verlag Italia, Milano, pp. 107-117.

[29] Henderson L. D., *The Fourth dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton University of Press, 1983.

[30] Ibáñez Torres R., *La quarta dimensione: se il nostro universo fosse l'ombra di un altro?*, Milano, RBA Italia, 2015.

[31] Manara C. F., *La dimensione umanistica della matematica: problemi della ricerca e della didattica*, estratto dalla Rivista *Ricerca scientifica ed educazione permanente* dell'Università degli Studi di Milano, 1976.

[32] Martini A., *Picasso e il Cubismo*, Milano, Fratelli Fabbri, 1967.

[33] Nigro Covre J. , *Cubismo. Ediz. illustrata*, Firenze, Giunti, 2013.

[34] Occhipinti A., *L'idea di iperspazio e l'evoluzione del pensiero geometrico al quadrimensionale*, Dipartimento di Fisica e Chimica, Università degli Studi di Palermo, 2017.

[35] Odifreddi P., *La Geometria dell'Arte*, saggio concesso al Prof. G. Perlongo per tenere un convegno maieutico sulla geometria pluridimensionale.

[36] Palladino D., *Le geometrie non euclidee fra cultura, storia e didattica della matematica*, Università di Genova.

[37] Polizzi G., *La "Filosofia Scientifica" di Henri Poincaré*, Scienza e cultura in Henri Poincaré, Conferenza Enriques, 2013.

[38] Rogora E., *Breve storia della Geometria superiore*, corsomonografico/StoriaGeometriaSuperiore.pdf

[39] Rogora E., *Immagini di storia della geometria*, corsomonografico.pdf

[40] Rogora E., Tortoriello S., *Matematica e cultura umanistica*, Archimede (2), 2018, pp. 82-88.

[41] Stringham W. I. *Regular Figures in N-Dimensional Space*, American Journal of Mathematics, vol. 3, n. 1, Johns Hopkins University Press, 1880.

[42] Tassi R., *Le avanguardie: cubismo, futurismo, astrattismo*, I maestri del colore, vol. 275, Milano, Fratelli Fabbri, 1966.

[43] Tazzioli R., *L'Ottocento: matematica. La geometria non euclidea*, Storia della Scienza, Treccani, 2003, www.treccani.it/enciclopedia/ottocento-matematica-la-geometria-non-euclidea

[44] Zaganelli G., *Cubismo: l'arte del pensiero, l'esperienza del reale*, Lebenswelt, n. 14, 2019, www.riviste.unimi.it/Lebenswelt-14