

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# **Proprietà degli Ammassi di Galassie**

Tesi di laurea

Presentata da:  
Simone Brazioli

Relatore:  
Chiar.mo Prof. Daniele Dalla Casa

---

Anno accademico 2020 - 2021

*A Zia Rosa. Luce della mia curiosità.*

### **Abstract**

Nella seguente Tesi di Laurea Triennale verranno esposte le attuali conoscenze di base dei Galaxy Clusters (GCs) che costituiscono la struttura macroscopica di base dell'Universo su grande scala.

Nella prima parte del preparato verranno considerate le condizioni fondamentali per l'identificazione dei GCs, esponendo poi alcuni famosi criteri per la loro classificazione. Nella seconda parte si procederà con una descrizione delle proprietà, evidenziando infine il problema della massa mancante. Nella terza parte verrà descritto il processo di radiazione fondamentale che ci permette di sondare le caratteristiche dei GCs.

# Contents

<b>1</b>	<b>Criteri e Classificazioni Morfologiche</b>	<b>7</b>
1.1	Criteri di Abell . . . . .	7
1.2	Criteri di Zwicky . . . . .	8
1.3	Confronto tra i criteri . . . . .	8
1.4	Classificazione di Abell . . . . .	8
1.5	Classificazione di Zwicky . . . . .	9
1.6	Classificazione di Bautz e Morgan . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Le Proprietà dei <math>GC</math></b>	<b>10</b>
2.1	Galassie Dominanti . . . . .	11
2.1.1	Distribuzione di Velocità delle Galassie . . . . .	11
2.1.2	Distribuzione Spaziale delle Galassie . . . . .	12
2.2	ICM . . . . .	14
2.2.1	Distribuzione Spaziale del Gas . . . . .	14
2.3	Il problema della Massa mancante . . . . .	15
2.3.1	La Materia Oscura . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Processi di Radiazione</b>	<b>17</b>
3.1	Radiazione di Bremsstrahlung . . . . .	17
3.2	Significato della bremsstrahlung per i $GC$ . . . . .	19

## Introduzione

La prima definizione, semplicistica, che potremo dare di Ammasso di Galassie è la seguente:

*Un ammasso di Galassie è un agglomerato più o meno concentrato di Galassie.*

Da questa prima definizione, vediamo che il concetto pare piuttosto semplice, ma avremo modo di complicarlo e raffinarlo nei paragrafi successivi di questa tesi.

Potrebbe, però, risultare necessario un ripasso sull'elemento unitario di questi ammassi, ovvero le galassie.

Le galassie sono un agglomerato di stelle, gas e polveri che si distribuiscono in tre regioni distinte.

- L'*Alone Galattico* che circonda, grossomodo sfericamente, l'intero sistema ed è composto in prevalenza da gas ionizzato caldo;
- Il *Disco Galattico* che costituisce il piano su cui si distribuiscono la maggior parte delle stelle. Qui è presente il gas che contribuisce primariamente alla formazione stellare;
- Il *Bulge* o *Sferoide* che corrisponde alla parte centrale della galassia e tende a una forma sferica o ellissoidale. Qui si possono incontrare soprattutto stelle molto vecchie.

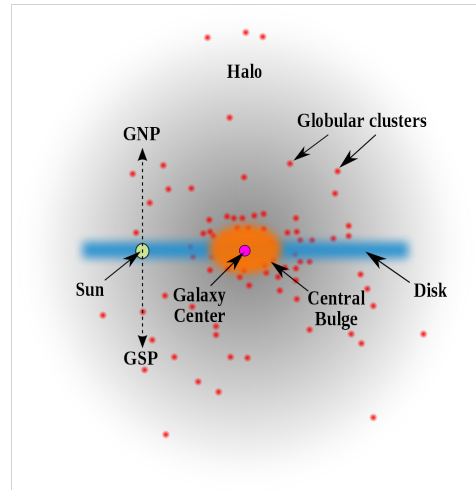


Figure 1: Struttura schematizzata di una galassia, nello specifico la Via Lattea - *RJHall, Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0*

## Morfologia Galattica

In base a quale delle tre regioni è più evidente o importante, possiamo distinguere quattro tipologie di galassie: *ellittiche, spirali, lenticolari e irregolari*.

### Galassie Ellittiche

Nelle galassie ellittiche (fig. 2.a), l'unica parte rilevante è il bulge centrale. A partire dal colore giallastro, possiamo supporre che siano composte da stelle generalmente molto antiche. Non mostrano segni evidenti di formazione stellare, poichè la quantità di gas presente al loro interno è alquanto ridotta, se non addirittura assente.

### Galassie Spirali e Spirali Barrate

Nelle Galassie a Spirali (fig. 2.b) il bulge è di importanza ridotta rispetto al disco. Esso risulta ricco di stelle, gas e polvere. Sono evidenti nelle fotografie le zone di formazione stellare, in cui il gas si comprime e scalda generando nuove stelle. Il bulge può essere attraversato da una struttura a barra dal quale si diramano i bracci delle spirali. In questo caso si parla di galassie a spirali barrate (fig. 2.c).

### Galassie Lenticolari

Nelle Galassie Lenticolari (fig. 2.d) la regione più importante è il bulge centrale, mentre il disco è appena accennato. Quest'ultimo non mostra un aspetto a spirale, ma appare perlopiù uniforme. In molti casi può assumere l'aspetto di un anello. Mentre lo sferoide centrale è composto perlopiù da stelle, il disco è costituito da gas e, spesso, una grande frazione di polveri.

## Galassie Irregolari

Le galassie irregolari (fig. 2.e) non rientrano in alcuna delle precedenti categorie. Non è quasi mai possibile distinguere alcuna struttura particolare al loro interno. L'irregolarità di queste galassie è spesso dovuta a fenomeni passati o presenti di interazione con altre galassie.



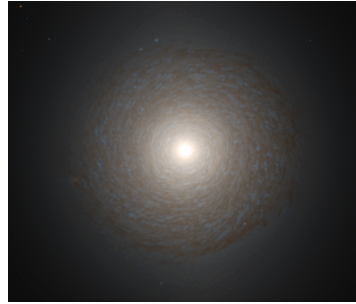
(a) Galassia Ellittica IC 2006 -  
*ESA Hubble - Judy Schmidt and  
J. Blakeslee (DAO), M. Carollo  
(ETH)*



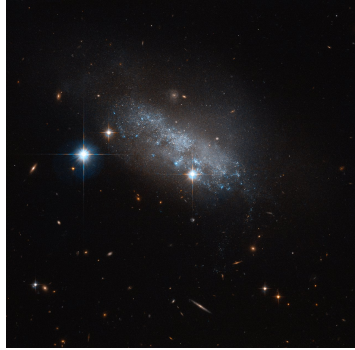
(b) Galassia Spirale M 101 -  
*ESA/Hubble*



(c) Galassia Spirale Barrata  
NGC 1300 - *NASA, ESA, and  
The Hubble Heritage Team  
STScI/AURA*



(d) Galassia Lenticolare  
NGC1387 - *Fabian RRRR,  
CC BY-SA 3.0*



(e) Galassia Irregolare IC 3583 -  
*ESA/Hubble*

Figure 2: Galassie

# 1 Criteri e Classificazioni Morfologiche

Il primo problema che hanno incontrato gli astronomi è la definizione di Ammasso di Galassie. Osservando la volta celeste, infatti, ci troviamo davanti a una proiezione su una superficie sferica. Non abbiamo alcun modo immediato di distinguere la profondità in questa proiezione e non è quindi facile capire se un insieme di galassie costituisce davvero un gruppo gravitazionalmente legato oppure è un semplice effetto di proiezione.

Per di più, è facile trovare più ammassi le cui proiezioni sono sovrapposte l'una sull'altra, dando l'impressione di un campo unico (più o meno omogeneo) di galassie. Questo toglie la possibilità di distinguere le galassie di cluster da quelle di foreground e background. I primi importanti tentativi di identificazione di clustering galattici vennero intrapresi negli anni 50-60.

## 1.1 Criteri di Abell

Storicamente, il primo tentativo di successo di catalogazione e identificazione degli ammassi fu svolto da **George O. Abell** di cui prendiamo in considerazione l'articolo pubblicato nel 1957 [3] per delineare le condizioni di lavoro e i criteri di raggruppamento. I criteri che prende sono, in un certo senso, soggettivi ma l'abilità di Abell fu quella di riuscire a porre delle condizioni ragionate che portano alla buona attendibilità, ancora oggi, del suo metodo.

Nel paper citato, infatti, Abell considera che ci sia un campo *generale* di galassie di sfondo del cui clustering si disinteressa. Sovrapposto a questo campo in background, vi sono brillanti cluster di galassie che si suppongono fisicamente legati. Questi ultimi sono i GC che Abell si occupa di studiare. Succederà sicuramente che alcune galassie di background vengano considerate erroneamente all'interno dei cluster, ma si prevede che il loro numero sia limitato, se consideriamo i cluster più ricchi.

I criteri che Abell prende in considerazione sono 4.

### Criterio di Ricchezza

*Un Cluster deve contenere almeno 50 membri che non salgano<sup>1</sup> di due magnitudini sopra la terza galassia più brillante.*

Si prende in considerazione la terza galassia per ridurre la possibilità di confondere le componenti più brillanti del cluster con galassie di *background*.

### Criterio di Compattezza

Un ammasso deve essere abbastanza compatto da poter contenere le sue galassie entro un raggio  $r_{abell}$ . Questo raggio è arbitrario, ma è importante che sia lo stesso per tutti gli ammassi. Correggendo per il redshift e ricercando una distanza angolare, possiamo esprimere il raggio di Abell come:

$$R_{abell} = \frac{1.7}{z} \text{ arcmin}$$

che vale per un redshift  $0.02 < z < 0.2$ . Generalmente questo  $R_{abell}$  è dell'ordine del  $Mpc$ .

### Criterio di Distanza e della Latitudine Galattica

Gli altri due criteri sono molto più tecnici, cioè legati alle condizioni di osservazione e di fotografia.

Il *criterio di distanza* stabilisce che un ammasso dovrebbe essere abbastanza distante da rimanere in una singola lastra fotografica. Maggiore è la distanza, infatti, più piccolo apparirà prospetticamente l'ammasso<sup>2</sup>.

Il *criterio di latitudine galattica* esclude l'analisi degli eventuali ammassi a basse latitudini galattiche (i.e. vicino al disco della Via Lattea proiettato nel cielo). In quelle zone, infatti, la densità di stelle e la maggiore entità dell'estinzione interstellare rendono più difficile la distinzione dei singoli clusters.

---

<sup>1</sup>La scala di magnitudini è inversa. A un numero più positivo, corrisponde un oggetto progressivamente meno luminoso.

<sup>2</sup>Tipicamente il range di lavoro all'epoca di Abell era tra i 30 e i 900  $Mpc$ . Oggi vi sono esempi di ammassi distinti anche a distanza superiore ai 1.5  $Gpc$ .

## 1.2 Criteri di Zwicky

Pochi anni dopo le prime pubblicazioni di Abell, nel 1968, l'astronomo Fritz Zwicky [19] considera un altro modo per poter determinare l'esistenza di un cluster. Secondo Zwicky, infatti, essi possono essere discriminati sulla base di tre criteri (che chiameremo in analogia con i criteri di Abell).

### Criterio dell'Isopleta

Il criterio dell'isopleta prende in considerazione una curva, l'isopleta, che unisce punti di densità uguale. In particolare, Zwicky definisce il contorno dell'ammasso come l'isopleta in cui la densità di galassie è doppia rispetto a quella di background.

### Criterio di Compattezza

L'isopleta considerata, deve contenere almeno 50 galassie entro le due magnitudini di distanza dalla più brillante.

### Criterio di Ricchezza

Più che un criterio è una definizione. Zwicky definisce *ricchezza* come il numero di galassie visibili all'interno dell'ammasso, una volta sottratto il numero atteso di galassie di background.

## 1.3 Confronto tra i criteri

Ciascuno dei due metodi di identificazione ha i suoi problemi e non è univoco dire quale sia migliore. Sicuramente avviene che il metodo di *Abell* sia più improntato a valutare la ricchezza degli ammassi ed è quindi più efficace per la statistica degli ammassi brillanti e ricchi di componenti. Per contro, i criteri di *Zwicky* risultano più efficaci nel valutare gli ammassi più piccoli e meno brillanti, riducendo di conseguenza un *observation bias* che potrebbe nascere nella catalogazione di Abell.

## 1.4 Classificazione di Abell

Sulla base dei criteri di Abell, si possono determinare dei gruppi di clusters che rispondono in maniera simile alle condizioni poste. Si può usare il criterio di *ricchezza*, sulla base del quale si possono distinguere 6 gruppi (contententi un numero crescente di galassie).

Gruppo 0	30 – 49
Gruppo 1	50 – 79
Gruppo 2	80 – 129
Gruppo 3	130 – 199
Gruppo 4	200 – 299
Gruppo 5	> 300

Abell fornisce anche una classificazione sulla base della distanza. Utilizzando la magnitudine come parametro per distinguere la distanza<sup>3</sup> degli ammassi e basandosi sulla brillantezza della decima componente, distingue 7 gruppi.

Gruppo 1	13.3 – 14.0
Gruppo 2	14.1 – 14.8
Gruppo 3	14.9 – 15.6
Gruppo 4	15.7 – 16.4
Gruppo 5	16.5 – 17.2
Gruppo 6	17.3 – 18.0
Gruppo 7	> 18.0

---

<sup>3</sup>Considerando tutti gli ammassi aventi la stessa luminosità, differenze in brillantezza corrispondono direttamente a differenze in distanza. Si tratta di un'approssimazione violenta, ma abbastanza sensata.



L'altra classificazione che si permette di fare Abell, più tardi rispetto alla distinzioni dei gruppi precedenti (1965 [2]) è sulla base della forma. Pone gli ammassi su una sequenza unidimensionale, dai più regolari ai più irregolari, estrapolando l'idea che questi ultimi fossero dinamicamente i meno evoluti e rilassati.

## 1.5 Classificazione di Zwicky

Una volta introdotti i suoi criteri, Zwicky stabilisce una classificazione degli ammassi sulla base, in particolare, della loro compattezza.

Distingue, infatti, ammassi compatti, medio-compatti e aperti.

- *Ammassi compatti* in cui è presente una singola concentrazione di galassie molto brillanti con almeno 10 componenti in contatto tra di loro.
- *Ammassi medio-compatti* in cui la concentrazione delle galassie centrali è più rilassata e la loro distanza è dell'ordine del loro diametro.
- *Ammassi aperti* che non mostrano concentrazioni particolari.

## 1.6 Classificazione di Bautz e Morgan

Probabilmente il metodo di classificazione più comodo da utilizzare è quello che viene formalizzato da **Bautz e Morgan**, nel 1970 [4]. Questo metodo eredita e rielabora i criteri visti poco fa e ne deduce tre tipologie di ammassi di galassie.

- *Type I*. Sono costituiti da un raggruppamento di galassie che fanno capo a una galassia dominante centrale di tipo cD (*central Dominant*, vedi paragrafo 2.1).

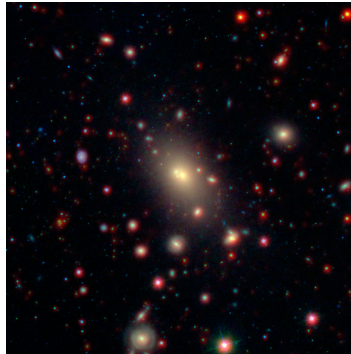


Figure 3: L'ammasso *Abell 2199* - *NASA/JPL-Caltech/SDSS/NOAO*

- *Type II*. La loro galassia più brillante è di tipologia intermedia tra cD e Giant Elliptical.

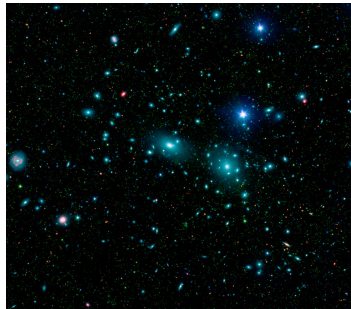


Figure 4: L'ammasso *Abell 1656* - *NASA/JPL-Caltech/L. Jenkins (GSFC)*

- Type III Gli ammassi Type III non mostrano una galassia dominante. Si possono distinguere due ulteriori tipologie: Type III-E oppure III-S sulla base rispettivamente della assenza o della presenza di numero considerevole di spirali brillanti.



Figure 5: Ammasso della Vergine. Particolare noto come Catena di Markarian - *Packbj, CC-BY-SA-3.0*].

Bautz e Morgan sottolineano poi che non si tratta di una classificazione stagna, ma si incontrano anche tipologie intermedie (e.g. Type II-III).

## 2 Le Proprietà dei $GC$

Gli ammassi di galassie sono le più grandi strutture dell'Universo legate gravitazionalmente. Tipicamente possono occupare regioni di diversi  $Mpc$ . Sebbene la componente principale e più visibile (almeno nelle frequenze ottiche) siano, appunto, le galassie (fig. 6), queste sono solo una delle componenti di un ammasso.

Contrariamente a quanto si possa pensare, infatti, le galassie sono solo una frazione, per di più poco significativa, della massa di un ammasso.

Considerando la massa totale di un  $GC$ , le galassie ne rappresentano solo il 5%. Circa il 15% è costituito dal *gas* in cui sono immerse tutte le componenti del cluster. Il restante e sbalorditivo 80% consiste nella cosiddetta *Dark Matter* ( $DM$ ) di cui avremo modo di parlare più in dettaglio nel paragrafo (2.3).

La frazione di gas presente tra le galassie prende il nome di **IntraCluster Medium (ICM)** (i.e. gas intracluster) e diventa evidente negli scatti effettuati nei raggi X (fig. 7).

Se prendiamo in considerazione gli ammassi più regolari, ci accorgiamo che le morfologie di galassie più comuni (soprattutto nelle regioni centrali) sono galassie di tipo ellittico e lenticolare. Passando agli ammassi più irregolari, invece, la situazione si ribalta e in generale possiamo notare un surplus di galassie spirali. Questa differenza potrebbe essere spiegata dall'*evoluzione dell'ammasso*.

Supponiamo che un ammasso irregolare sia uno stadio precoce di  $GC$ . Con il tempo, le sue galassie a spirale andranno incontro a diversi fenomeni che possono portare da un lato all'impoverimento di gas, dall'altro alla perdita della struttura a spirale.



Figure 6: L'ammasso di galassie denominato RXC J0232.2-4420.

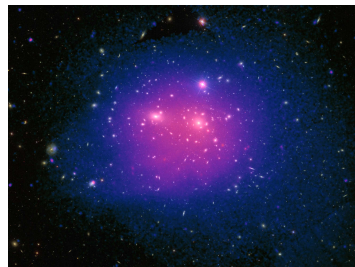


Figure 7: Immagine composta del Coma Cluster. Per ottenere l'immagine sono stati sovrapposti scatti nei raggi X (ICM) e nelle frequenze visibili (galassie) - *ESA/XMM-Newton/SDSS/J. Sanders et al. 2019*

Per questo ultimo caso, sappiamo che, almeno a livello generale, il *merging galattico* porta alla formazione di galassie ellittiche. Per cui, considerando gli urti e le interazioni che le galassie compiranno prima che il sistema sia dinamicamente rilassato, possiamo immaginare che con il passare del tempo si avranno sempre più *galassie ellittiche*.

D'altro canto, la perdita di gas delle galassie a spirali può spiegare anche la frazione di galassie di tipo S0 che si vedono nei *GC* più 'maturi'. Ci possono essere due processi che strappano gas alle galassie, entrambi dovuti alla presenza dell'ICM (di cui discuteremo tra poco in 2.2). Il moto delle galassie a spirale all'interno di questo ICM può determinare una *ram pressure*<sup>4</sup> dell'ICM sull'*InterStellar Medium (ISM)*<sup>5</sup> che può portare alla dispersione del suo gas. Inoltre, questo *ICM* è notevolmente caldo<sup>6</sup> ed è ragionevole pensare che nei punti di contatto con il gas interstellare possa cedere calore all'ISM per conduzione e portare al deperimento di quest'ultimo [11].

Presi in considerazione questi fenomeni, risulta giustificato pensare che man mano che l'età del *GC* si avvicina al suo tempo di rilassamento dinamico (per una stima si veda 2.2.1) la sua composizione sarà sempre più dominata dalle galassie ellittiche e lenticolari.

## 2.1 Galassie Dominanti

La dinamica gravitazionale degli ammassi regolari è spesso dominata da un singolo agglomerato che risiede nel centro della buca di potenziale del sistema. Questo nucleo è generalmente composto da una singola **galassia ellittica gigante** (*GEG*) a bassa brillantezza superficiale che prende il nome di **Central Dominant Galaxy** (*cD*). Può accadere, però, che la parte centrale del cluster ospiti due nuclei, ovvero due galassie *cD* immerse nello stesso alone. In quel caso si può parlare di galassie a manubrio (*dumbbell galaxies*).

Se escludiamo le galassie attive (e.g.: Seyfert), le galassie *cD* sono le più brillanti che possiamo incontrare in un ammasso. Vengono infatti chiamate anche **Brightest Cluster Galaxies** (*BCG*). Se studiassimo i profili di brillantezza di questo tipo di galassie, vedremo che sono ben descritte dalla legge di *de Vaucoulers*.

$$I(R) = I(0)e^{-7.67\left[\left(\frac{R}{R_e}\right)^{1/4} - 1\right]} \quad (1)$$

In questa equazione abbiamo  $I(0)$  che corrisponde alla magnitudine di brillantezza della regione centrale (cioè a  $R = 0$ ), mentre  $R_e$  corrisponde al cosiddetto *raggio efficace*, ossia il raggio che racchiude metà della brillantezza dell'oggetto.

Nonostante la buona accordanza nelle regioni centrali, l'alone devia da questa legge e si verifica un eccesso di brillantezza non facilmente spiegabile. Con un'analisi statistica ci si può accorgere di una correlazione tra questa brillantezza superiore alle aspettative e i cosiddetti *cooling flows*, responsabili degli spostamenti di gas in direzione delle regioni centrali del cluster.

### 2.1.1 Distribuzione di Velocità delle Galassie

Un aspetto cruciale per lo studio dei *GC* sono le velocità con cui le loro galassie attraversano l'*ICM*. Questo non solo ci dice che importanza possono avere i fenomeni di trasferimento di massa o trasporto di energia tra il gas e le galassie stesse, ma ci fornisce un importante strumento di analisi per la **dinamica** del sistema.

La prima cosa di cui, però, bisogna accorgersi è che rispetto al nostro punto di vista (i.e. dal Sistema Solare) l'ammasso non è in quiete. Per l'espansione cosmologica, sappiamo che c'è un *rate* di allontanamento proporzionale alla loro distanza. Per sottrarre ai valori che ricerchiamo questa velocità, ci serviamo del **redshift**.

Consideriamo dapprima il redshift galattico medio di un cluster  $\langle z \rangle$  e consideriamo una sua galassia con redshift  $z$ . Possiamo determinare la componente radiale della velocità di questa galassia e la dispersione di velocità corrispondente per l'ammasso:

$$v_r = (z - \langle z \rangle)c \quad (2)$$

<sup>4</sup>La *ram pressure* si può quantificare come  $P_{ram} = \rho v^2$ , dove  $\rho$  è la densità dell'ICM e  $v$  è la velocità della galassia all'interno del fluido.

<sup>5</sup>Il gas presente tra le stelle all'interno di una galassia. Ha temperature dell'ordine di  $T = 10^2 - 10^4$ .

<sup>6</sup>Come vedremo nel paragrafo 2.2, le temperature dell'ICM sono dell'ordine di  $T \sim 10^8$ .

$$\sigma_r = \langle (v_r - \langle v_r \rangle)^2 \rangle^{1/2} \quad (3)$$

Per determinare la probabilità di trovare una galassia con una velocità radiale compresa tra  $v_r$  e  $v_r + dv_r$ , utilizzeremo la dispersione di velocità nell'ambito di una distribuzione Gaussiana, che risulta essere un'ottima approssimazione del problema:

$$p(v_r)dv_r = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v_r^2}{2\sigma_r^2}} dv_r \quad (4)$$

La distribuzione Gaussiana corrisponde a un sistema di particelle in equilibrio termodinamico. In maniera generale, questo porta a una distribuzione delle velocità delle galassie di Maxwell-Boltzmann.

Nella statistica di Maxwell-Boltzmann, abbiamo delle importanti relazioni che ci serviranno nei paragrafi seguenti. Innanzitutto si ha che la velocità delle galassie e la dispersione è legata dalla formula:

$$\langle v^2 \rangle = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3\sigma_r^2 \quad (5)$$

e da questa possiamo scrivere:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{\langle m \rangle}{2} \langle v^2 \rangle$$

Questo ci porta all'importante relazione di cui faremo utilizzo:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{kT}{\langle m \rangle}} \quad (6)$$

Dove con  $T$  indichiamo la *Temperatura*<sup>7</sup>.

Va, però, detto che i *GC* non sono completamente rilassati e non si trovano esattamente all'equilibrio termodinamico. Le galassie al loro interno non hanno tutte la stessa temperatura, ma la loro dispersione di velocità tende a essere randomica<sup>8</sup> per cui le ipotesi che ci siamo posti, risultano piuttosto soddisfacenti.

### 2.1.2 Distribuzione Spaziale delle Galassie

Come possiamo facilmente supporre, la maggior parte dei *GC* mostrano una distribuzione spaziale delle galassie piccata sul centro. In altre parole, più ci si sposta verso le regioni esterne, più le galassie diminuiscono di densità. Ottenere una funzione che possa descrivere, in maniera affidabile, la distribuzione di galassie all'interno del *GC* è fondamentale. Se riuscissimo a trovarla, avremo una via per poter stimare la massa racchiusa all'interno di un ammasso. Questo ci permette di trarre informazioni preziose sulla sua evoluzione e, inoltre, sull'evoluzione dell'universo intero.

Nella maggior parte dei cluster, possiamo utilizzare, con buona approssimazione, una simmetria sferica. Purtroppo, a causa della proiezione *bidimensionale* del cluster sulla volta celeste, non ci è possibile passare a una distribuzione della densità.

Infatti, considerando la simmetria sferica, la sua proiezione sulla volta celeste sarebbe:

$$\Sigma(R) = 2 \int_R^\infty \frac{r n(r) dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}$$

dove abbiamo chiamato  $R$  la distanza dal centro della proiezione e  $n(r)$  la densità di galassie in funzione del raggio.

Sfruttando la simmetria del problema, possiamo ricostruire a ritroso la densità di galassie, con l'inversione di **Abel** e ottenere:

$$n(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{d\Sigma}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (7)$$

ma a questo punto, per poter continuare, dobbiamo fare delle assunzioni. In altre parole, dobbiamo ricorrere a dei modelli.

<sup>7</sup>Assumendo che vi sia un equilibrio termodinamico, possiamo definire il concetto di Temperatura anche per le galassie in movimento all'interno di un *cluster*.

<sup>8</sup>Vi è una leggerissima dipendenza dalla massa e dalla posizione della galassia nell'ammasso.

Il modello più efficace consiste nel considerare l'ammasso all'equilibrio termico. Questo vuol dire che la distribuzione delle galassie all'interno del *cluster* segue un modello a sfera isoterma. In questo modello, avremo che le galassie mostreranno delle velocità compatibili con la distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

Partendo dalla ben nota condizione di equilibrio fluidodinamico

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \quad (8)$$

possiamo esplicitare la massa  $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r)r^2 dr$  e differenziare. Otteniamo:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) + 4\pi G \rho r^2 = 0$$

A questo punto il gradiente di pressione si può esplicitare sfruttando la legge dei gas perfetti  $P = \frac{\rho(r)}{\bar{m}} kT$

$$\frac{dP}{dr} = kT \frac{1}{\bar{m}} \frac{d\rho}{dr} \quad (9)$$

dove si è chiamata  $\bar{m}$  la massa media delle galassie del cluster.

Possiamo estrarre la relazione tra la temperatura e la dispersione di velocità, vista nel paragrafo 2.1.1 e ottenere:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{kT}{\langle m \rangle}} \quad (10)$$

Sostituendo la massa media delle particelle, con la massa media delle galassie in un cluster  $\bar{m}$ , possiamo riscrivere il gradiente di pressione:

$$\frac{dP}{dr} = \sigma_r^2 \frac{d\rho}{dr} \quad (11)$$

Possiamo ora riscrivere la equazione dell'equilibrio:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\sigma_r^2 r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) + 4\pi G \rho r^2 = 0 \quad (12)$$

Tutto questo, però ci ha portato a un'equazione che non possiamo risolvere analiticamente. Ancora una volta dobbiamo servirci di modelli e approssimazioni. L'approssimazione più utilizzata è l'approssimazione di **King** [14] grazie alla quale possiamo scrivere la densità numerica delle galassie nel cluster.

$$n(r) = n_0 \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_e} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (13)$$

dove indichiamo con  $r_e$  il raggio al quale la densità in proiezione è metà di quella centrale e  $n_0$  la densità centrale.

Non ci dobbiamo rilassare troppo però. Questa approssimazione vale solo per le regioni centrali del cluster. Occorre infatti troncatura l'approssimazione per evitare il problema della massa infinita.

## 2.2 ICM

Come abbiamo detto, le galassie rappresentano solo una frazione di un *GC*. La seconda componente è il cosiddetto *intracluster medium* (**ICM**).

L'*ICM* costituisce la maggior parte della massa barionica che si può incontrare all'interno di un ammasso, corrispondente a circa il 20% della massa totale. Questo gas emette per *bremsstrahlung* (vd 3.1) ed è quindi osservabile nei raggi X. Questa osservabilità rende conto del fatto che si tratta di un gas molto caldo con una temperatura dell'ordine dei  $10^8 K$ . La sua densità è dell'ordine dei  $10^{-3} cm^{-3}$ .

Non è ancora ben chiaro se l'origine di questo gas siano le stelle che compongono le galassie dell'ammasso, oppure se sia gas intercluster primordiale catturato dalla gravità del gruppo di galassie. Le osservazioni spettrali hanno portato alla determinazione della *composizione* del gas che risulta avere una *metallicità* di poco superiore a 1/3 di quella solare.

Ciò conferma l'arricchimento dell'ICM da parte di gas provenienti dalle supernovae [5][12]. Se, infatti, il gas fosse risultato composto solo da atomi di *H* ed *He*, sarebbe stato sicuramente gas prodotto direttamente dalla nucleosintesi del Big Bang. La presenza di atomi più pesanti dell'*He*, invece, porta alla conclusione che deve essere intervenuta l'attività stellare, producendo atomi e disperdendoli. Tuttavia, le quantità osservate non sono compatibili con la sola dispersione di gas galattici. Confrontando le abbondanze con il numero delle galassie e la loro attività stimata, risulta possibile che vi sia anche una piccola parte di gas proveniente dall'esterno. Molto probabilmente i due processi agiscono in concomitanza.

### 2.2.1 Distribuzione Spaziale del Gas

Come abbiamo fatto per la distribuzione delle galassie, possiamo adottare un modello per poter studiare la distribuzione del gas. La condizione di lavoro da cui partiamo è l'equilibrio idrodinamico del quale ora ci occuperemo di dimostrare l'applicabilità.

Il primo valore che ci serve è la velocità del suono, ovvero della propagazione di una perturbazione all'interno del gas. Per questo calcolo, ci serviamo degli studi di fluidodinamica [10], che ci portano a una comoda formula:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma kT}{\mu m_p}} \quad (14)$$

dove abbiamo espresso l'indice adiabatico con  $\gamma$  e la massa molecolare media con  $\mu$ .

Provando a utilizzare un valore di massa molecolare tipico solare  $\mu \sim 0.64$  e approssimando il gas come monoatomico relativistico  $\gamma = 4/3$ , possiamo stimare una velocità dell'ordine di  $c_s \sim 1000 km/s$ .

A questo punto risulta abbastanza rapido poter stimare il tempo dinamico, ovvero il tempo che impiega una perturbazione per attraversare il *cluster*:

$$t_{din} = \frac{2R_c}{c_s} \quad (15)$$

Usando il valore di  $2R_c \sim 1 Mpc$  per il cluster tipico, possiamo stimare un tempo dinamico  $t_{din} \sim 10^9 yr$ . Ci risulta che il tempo dinamico è di un ordine di grandezza più breve dell'età dell'Universo (che supponiamo essere una stima decente per l'età dell'ammasso). Questo vuol dire

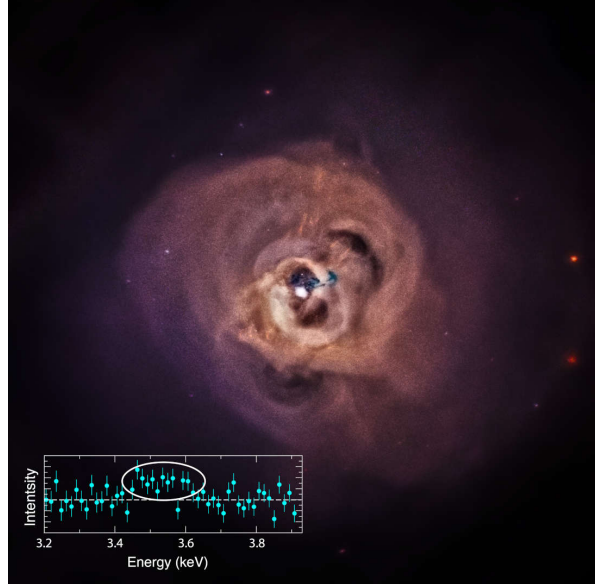


Figure 8: Il Gas intracluster riempie lo spazio tra le galassie e spesso si dispone in lobi. Nell'immagine, il gas dell'Ammasso di Perseo come osservato dal satellite Chandra nei raggi X - NASA/CXC/SAO/E. Bulbul, et al.

che le perturbazioni hanno avuto tempo sufficiente per attraversare l'ammasso e renderlo omogeneo e indipendente dalle condizioni iniziali. Possiamo concludere che il sistema dell'ammasso (e in particolare il suo ICM) è in una situazione di equilibrio.

Ci risulta possibile, ora, ipotizzare un modello isoterma a simmetria sferica. Utilizziamo però il cosiddetto  $\beta$  model che considera l'intero ammasso (con tutte le sue componenti) all'equilibrio idrostatico e in distribuzione isoterma nel potenziale gravitazionale.

L'equazione di equilibrio idrostatico per l'intero ammasso sarà la solita:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = - \frac{d\Phi}{dr}$$

Correlando la distribuzione del gas e delle galassie possiamo sfruttare l'equazione dell'equilibrio per scrivere:

$$\frac{1}{\rho_{gas}} \frac{d((kT/\mu m_p)\rho_{gas})}{dr} = \frac{1}{\rho_{gal}} \frac{d(\sigma_r^2 \rho_{gal})}{dr} \quad (16)$$

In questa equazione, applichiamo le nostre condizioni. Assumiamo la temperatura del gas costante  $T = T_{gas}$  e la dispersione di velocità costante  $\sigma_r = cost$  per il modello della sfera isoterma. Dopodichè applichiamo l'approssimazione di *King* per troncare la divergenza della massa e otteniamo un'indicativa relazione:

$$\rho_{gas}(r) \propto (\rho_{gal}(r))^\beta \quad (17)$$

dove l'esponente

$$\beta = \frac{\mu m_p \sigma_r^2}{kT} \quad (18)$$

indica il rapporto tra l'energia cinetica delle galassie e l'energia cinetica delle molecole del gas.

Otteniamo la distribuzione del gas che sarà del tipo:

$$\rho_{gas}(r) = \rho_{gas}(0) \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_e} \right)^2 \right]^{-3\beta/2} \quad (19)$$

Studiando la brillantezza di un caso reale, possiamo vedere che il modello si accosta molto bene con la realtà. In fig. 9 è visibile l'esempio del *Coma Cluster*[7].

### 2.3 Il problema della Massa mancante

Una volta studiate le distribuzioni spaziali e di velocità, siamo pronti per poter affrontare il problema della stima della massa all'interno di un ammasso. Questa stima ci permetterà di confrontare la massa derivabile dalla dinamica del sistema con quella derivabile dai processi di radiazione (si veda 3.1 e 3.2).

Il metodo che possiamo usare per ottenere una stima *dinamica* della massa viene dal **Teorema del Viriale** [15][9] (*TdV*). Le condizioni per l'utilizzo di questo teorema vivono nei paragrafi precedenti. Il *TdV*, infatti, si impone nelle strutture *virializzate*, dove cioè vige un equilibrio dinamico che dissipa efficacemente le eventuali perturbazioni o disomogeneità.

Considerando la più semplice identità tensoriale del *TdV*, abbiamo una relazione scalare tra l'energia cinetica e l'energia potenziale (gravitazionale):

$$2T + U = 0 \quad (20)$$

dove l'energia cinetica  $T$  e l'energia potenziale  $U$  possono essere espresse come:

$$T = \frac{1}{2} M_{tot} \sigma_V^2 \quad U = - \frac{GM_{tot}^2}{r_g} \quad (21)$$

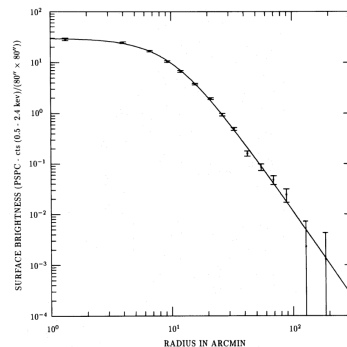


Figure 9: Brillanza superficiale del Coma Cluster nei raggi X rapportata a un  $\beta$  model analizzato in (Briel et al. 1992)

Questa relazione[1] vale per un sistema *autogravitante all'equilibrio* e può, quindi, essere usata in prima approssimazione al problema dei *GC*.

Sottolineiamo che in queste espressioni compaiono tre termini che occorre specificare. Nella prima compare un  $\sigma_V$  che corrisponde alla *dispersione di velocità viriale*. Nel caso di una simmetria sferica e di una distribuzione isotropica delle velocità (come nel nostro caso) si può scrivere tranquillamente:  $\sigma_v = \sigma_r$ . Nell'altra relazione abbiamo il raggio gravitazionale  $r_g$  che prende in considerazione la massa delle singole galassie  $m_i$  e la loro separazione  $r_{ij}$ :

$$r_g = 2 \left( \sum_i m_i \right)^2 \left( \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \right) \quad (22)$$

Riordinando le equazioni possiamo ottenere la massa totale dell'ammasso:

$$M_{tot} = \frac{3r_g \sigma_r^2}{G} \sim 7 \times 10^{14} \left( \frac{\sigma_r^2}{1000 \text{ km/s}} \right)^2 \left( \frac{r_g}{\text{Mpc}} \right) M_\odot \quad (23)$$

Questa equazione, noti  $\sigma_r$  e  $r_g$  ci permette di stimare la massa dell'ammasso che interviene nei fenomeni dinamici ovvero gravitazionali.

Se, per esempio, consideriamo valori tipici per ammassi ricchi e regolari del tipo

$$\sigma_r \sim 1000 \text{ km/s} \quad r_g \sim 1 \text{ Mpc}$$

otteniamo una massa dell'ordine di  $M_{tot} \sim 10^{15} M_\odot$ . Questa analisi ci porta a una massa inaspettatamente grande.

Se, infatti, confrontiamo questa massa con la luminosità totale di un ammasso che si aggira sui  $L_{tot} = 10^{13} L_\odot$  ci accorgiamo che i numeri non sono paragonabili. Già Zwicky nel lontano 1933 [18], quando eseguì i primi studi sulla massa dei cluster, si accorse di questa stranezza.

Introduciamo il cosiddetto *mass-to-light ratio* (i.e. il rapporto massa-luminosità) che generalmente si definisce utilizzando i valori solari:

$$\Upsilon_\odot = \frac{M_\odot}{L_\odot} \quad (24)$$

Cercando in letteratura i rapporti tipici per le galassie[13], vediamo che siamo tra i  $10 - 20 \Upsilon_\odot$  per le early-type (ovvero ellittiche e lenticolari). Facendo lo stesso rapporto per gli ammassi di galassie otteniamo un *ratio* dell'ordine dei  $300 \Upsilon_\odot$ [17]. Stiamo parlando di una differenza di più di un ordine di grandezza. In altre parole, un *cluster* emette proporzionalmente meno radiazione di quanto facciano le sue singole galassie. Ovvero se prendiamo un grammo di materiale dell'ammasso, questo emette 10 volte di meno rispetto a un grammo di una sua galassia tipica. Non è una discrepanza che si può ignorare facilmente.

Le possibilità di errore, guardando la formula della  $\Upsilon_\odot$  sono due:

- la massa è minore di quella calcolata con il metodo del *TdV*;
- la luminosità è maggiore di quella che finora abbiamo catturato con i telescopi.

Entrambe le possibilità, però, sono da scartare. Nel primo caso, le condizioni che impongono la validità del TdV sono abbastanza verificate da non concedere un errore di *ordini di grandezza* del calcolo della massa. Inoltre, si è confermato con altri metodi, indipendenti dal teorema, che la massa è corretta. Infatti, si può procedere con una misura della massa utilizzando l'effetto di *lente gravitazionale* che l'ammasso di galassie impone sulla luce che lo attraversa. Questo metodo permette delle misure molto più accurate di quanto abbiamo fatto qui, ma il risultato ottenuto è più che coerente con quello trovato.

Nel secondo caso, risulta difficile pensare che con le osservazioni multibanda di cui oggi siamo capaci, possiamo perderci della radiazione. In principio, potrebbe accadere, infatti, che un grande numero di galassie a bassa luminosità e con un grande  $\Upsilon_\odot$  siano sparse all'interno dell'ammasso. Queste galassie potrebbero essere talmente fioche da non essere rilevate individualmente e non essere conteggiate nell'analisi della luminosità. Nella realtà, queste galassie 'evanescenti' produrrebbero un alone diffuso tra le galassie dell'ammasso che sarebbe significativo e osservabile [16].



La possibilità che ormai da 40 anni risulta più probabile è che vi sia della materia all'interno dell'ammasso che esercita una influenza gravitazionale, ma non interagisce a livello elettromagnetico, nè emettendo nè assorbendo o scatterando radiazione.

### 2.3.1 La Materia Oscura

Nel seguente paragrafo mi limiterò a descrivere quali possono essere le possibili fonti di questa massa mancante e a sottolineare dove il consenso scientifico sembra puntare.

Cominciamo con il dire che il nome dato a questa massa nella letteratura e (spesso origine di confusione) nella comunicazione è **Materia Oscura** (*Dark Matter, DM*). Si è delineato questo termine per indicare contemporaneamente *quanto poco si sappia* di questa materia e l'*assenza* di sue interazioni *elettromagnetiche*.

Le possibilità che nel corso degli anni sono state sondate (sia tramite esperimenti che tramite ragionamenti teorici) sono sostanzialmente tre:

- oggetti di massa substellare (e.g. nane brune, corpi planetari e comete);
- resti di stelle massicce (e.g. buchi neri, stelle di neutroni e nane bianche avanzate);
- particelle elementari poco interagenti, le cosiddette **WIMP** (e.g. neutrini massivi, assioni);

In teoria, è possibile che sia una concomitanza di tutti questi fattori che rendono conto della massa che non riusciamo a trovare negli ammassi. Nella pratica, la ricerca sta delineando che probabilmente la porzione più importante è da ricercare nell'ultima ipotesi. Questa è suggerita anche da altre osservazioni, come la rotazione delle stelle all'interno delle galassie.

L'ipotesi delle particelle *WIMP* è in studio ormai da trent'anni, ma ancora poco si sa sulla sua eventuale composizione, per non parlare delle sue proprietà.

Per ora, gli esperimenti, in mancanza di indicazioni precise o strade percorribili, si sono occupati di *restringere* i limiti di ricerca.

Menzione obbligatoria meritano, però, gli sforzi delle cosiddette **teorie MOND** (*MOdified Newton Dynamics*). Queste cercano di risolvere la questione suggerendo che siano le leggi della gravità e della dinamica che conosciamo (i.e. *Relatività Generale*) ad essere sbagliate e a portare a risultati sbagliati. L'approccio che generalmente utilizzano queste teorie è quello di modificare le equazioni della dinamica di Newton, suggerendo modifiche e confrontando con i *dati sperimentali*. Nonostante alcuni importanti e recenti successi [8] nel riprodurre i dati, pare ancora *infantile* supporre che possano portare alla risoluzione del problema della materia oscura.

## 3 Processi di Radiazione

Gli ammassi di galassie emettono radiazione pressochè a *ogni* lunghezza d'onda [6]. Ogni banda dello spettro ci racconta una parte diversa della storia e ci permette di avere gli strumenti per sondare l'evoluzione e le caratteristiche di queste strutture ciclopiche.

Tralascieremo qui la produzione di radiazione galattica che produce soprattutto luce visibile, *IR* e *UV* (propria delle componenti stellari) ed *Radio* (tipica dei fenomeni galattici). Ci interessa in particolare la radiazione emessa nei *raggi X*, di cui gli ammassi sono la fonte più comune nell'universo. In questa banda, i *GC* emettono per **bremsstrahlung**, il processo tipico dei gas molto caldi.

### 3.1 Radiazione di Bremsstrahlung

La **bremsstrahlung** [10] (*radiazione di frenamento*) è il processo di radiazione più importante per plasmi molto caldi. Questo rende conto della sua centralità per una trattazione dei *GC*. L'**ICM**, come abbiamo visto, consiste in un plasma a temperature dell'ordine di  $T \sim 10^8 K$  con densità numeriche di  $n_{ICM} \sim 10^{-3} cm^{-3}$ . Giustificeremo tra poco l'importanza di queste condizioni per l'emissione di frenamento.

La bremsstrahlung (*radiazione di frenamento*) produce radiazione dovuta all'accelerazione di cariche all'interno di un campo coulombiano.

Consideriamo un elettrone e un protone. Non avviene nulla finché sono lontane. Nel momento in cui sono abbastanza vicine, l'interazione tra i due campi elettrici porta a un'emissione di radiazione che provoca un loro frenamento.

La trattazione classica e la comprensione fisica del fenomeno, parte dalla **Formula di Larmor** che relaziona la potenza emessa con l'accelerazione (o decelerazione) della particella:

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} a^2 \quad (25)$$

Utilizzando la *Legge di Coulomb*, inserita nella *Seconda Legge della Dinamica* di Newton, possiamo riscrivere la formula di Larmor come:

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{Z^2 e^4}{m^2 x^4} \quad (26)$$

in cui compare il numero atomico  $Z$ , la carica dell'elettrone  $e$ , la sua massa  $m$  e la distanza  $x$ .

Notiamo subito due dettagli importanti della formula di Larmor.

- La potenza emessa è rilevante solo per particelle *leggere*. Infatti  $P \propto m^{-2}$ .
- La potenza emessa è rilevante solo a una *distanza minima*. Infatti  $P \propto x^{-4}$ .

In particolare per l'ultimo punto, si considera una distanza minima al di là della quale il processo non si considera importante. Questa distanza è nota come *parametro di impatto*  $b$ .

Siccome il processo è di natura impulsiva, consideriamo un *tempo di interazione*  $\Delta t \sim \frac{2b}{v}$  che tiene conto del parametro di impatto. Grazie a questo tempo possiamo ricavare la **potenza emessa** nel corso di tutto il processo che risulterà proporzionale a:

$$P\Delta t \propto \frac{1}{b^3 v} \quad (27)$$

Questo indica che a parità di velocità, viene emessa più radiazione se le particelle si avvicinano di più. A parità di distanza di interazione, l'emissione è maggiore se le particelle si muovono *più lentamente*. Questo avviene proprio perché l'incontro delle particelle impiega più tempo per compiersi.

Se svolgessimo un'analisi di Fourier sulla potenza emessa nel tempo, possiamo ricavarci il **profilo spettrale** dell'emissione per bremsstrahlung che risulta *piatto* fino a una frequenza di *cut-off* esponenziale  $\nu_{max} \sim \frac{v}{4b}$ .

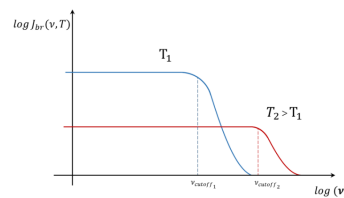


Figure 11: Forma dell'emissione del singolo evento bremsstrahlung.

Ci interessa però, come si comporta una distribuzione di particelle, piuttosto che il singolo evento. Assumiamo una *distribuzione di Maxwell-Boltzmann* relativa alle velocità delle particelle. Da questa distribuzione possiamo passare a una trattazione in temperatura. Si può dimostrare che l'**emissività totale** di una nube di gas per bremsstrahlung, al netto delle costanti è:

$$J_{br}(\nu, T) \propto T^{-1/2} e^{-h\nu/kT} n_e n_Z \quad (28)$$

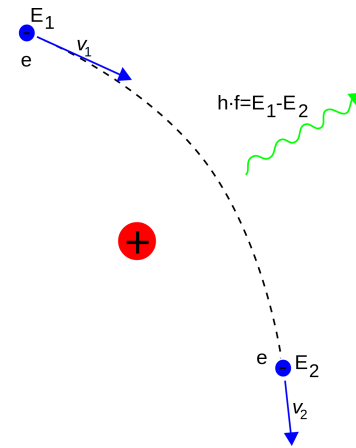


Figure 10: Rappresentazione schematica dell'interazione che produce radiazione di bremsstrahlung.

Questa relazione è fondamentale per capire le caratteristiche della radiazione per bremsstrahlung di interesse astrofisico. Capiamo, infatti, che plasmi molto caldi avranno un'emissione meno intensa ( $T^{-1/2}$ ) ma emetteranno fino a energie più alte. Anche l'abbassamento della densità del plasma  $n_{pl} = n_e n_Z$  porta a una diminuzione dell'emissione totale.

Studiandone lo spettro e identificandone la frequenza di cut-off, in cui l'emissione scende esponenzialmente, abbiamo una misura piuttosto accurata della **temperatura del plasma**. Infatti, fissando convenzionalmente la frequenza di cut-off nel momento in cui l'esponenziale vale  $1/e$ :

$$\frac{h\nu_c}{kT} = 1 \rightarrow \nu_c = \frac{k}{h}T$$

Otteniamo una comoda relazione del tipo:

$$\nu_c = 2.08 \times 10^{10} T \quad [Hz] \quad (29)$$

da cui possiamo derivare le temperature tipiche che abbiamo incontrato nel corso di questo preparato.

*Integrando* su tutte le frequenze possiamo determinare l'**emissività bolometrica** che sarà proporzionale a:

$$J_{br}(T) \propto 2.4 \times T^{1/2} n_e n_z \quad (30)$$

ed è da questa emissività bolometrica che possiamo determinare la cosiddetta **luminosità X**:

$$L_X = \int J_{br}(T) dV \quad (31)$$

Utilizzando questa luminosità bolometrica, si possono ottenere, aggiungendo opportunamente le emissioni delle componenti galattiche, le stime della luminosità dell'ammasso. Questi sono i valori che entrano in gioco nella discussione del paragrafo 2.3 per permettere l'imposizione del problema della *massa mancante*.

### 3.2 Significato della bremsstrahlung per i GC

Il *ricoscimento* della radiazione di bremsstrahlung per gli ammassi di galassie è uno strumento molto *potente*.

Da un lato, come abbiamo visto, ci permette di dare una stima della *temperatura* che sia pressoché indipendente da altre condizioni del plasma.

Ma la cosa più importante è il significato della **presenza stessa** di questa radiazione. Possiamo determinare un tempo scala per il raffreddamento del gas dell'ICM per perdite di bremsstrahlung. Questo ci permette di capire se l'assunzione di *equilibrio termico*, che abbiamo messo in campo nelle sezioni precedenti, è giustificata.

Il **cooling time** di un plasma in queste condizioni è calcolabile come rapporto tra l'*energia termica totale* e le *perdite per bremsstrahlung* che, tramite calcoli teorici, risulta essere:

$$t_{br} = \frac{6 \times 10^3}{\bar{g}_{ff}} \frac{1}{n_e} T^{1/2} \quad [yr] \quad (32)$$

in cui il termine  $\bar{g}_{ff}$  è noto come fattore di *Gaunt* ed è un termine correttivo quantistico, che per i raggi X è dell'ordine dell'unità.

Nella quasi totalità dei casi, questo tempo risulta superiore all'*età dell'universo*. Questo ci permette di ignorare le perdite di energia per bremsstrahlung nelle considerazioni dell'equilibrio idrostatico e come conseguenza ci *rassicura* circa le approssimazioni e modellizzazioni fatte nei paragrafi della sezione 2.

## References

- [1] Michael richmond, using the virial theorem: the mass of a cluster of galaxy.
- [2] G. O. Abell. Clustering of Galaxies. *ARA&A*, 3:1, January 1965.
- [3] George O. Abell. The Distribution of Rich Clusters of Galaxies. *ApJS*, 3:211, May 1958.
- [4] L. P. Bautz and W. W. Morgan. On the Classification of the Forms of Clusters of Galaxies. *ApJ*, 162:L149, December 1970.
- [5] Anne E Blackwell, Joel N Bregman, and Steven L Snowden. The missing metal problem in galaxy clusters: Characterizing the early enrichment population, 2021.
- [6] Enzo Branchini, Stefano Camera, Alessandro Cuoco, Nicolao Fornengo, Marco Regis, Matteo Viel, and Jun-Qing Xia. Cross-correlating the  $\gamma$ -ray Sky with Catalogs of Galaxy Clusters. *ApJS*, 228(1):8, January 2017.
- [7] U. G. Briel, J. P. Henry, and H. Boehringer. Observation of the Coma cluster of galaxies with ROSAT during the all-sky-survey. *A&A*, 259:L31–L34, June 1992.
- [8] Kyu-Hyun Chae, Federico Lelli, Harry Desmond, Stacy S. McGaugh, Pengfei Li, and James M. Schombert. Erratum: “testing the strong equivalence principle: Detection of the external field effect in rotationally supported galaxies” (2020, *ApJ*, 904, 51). *The Astrophysical Journal*, 910(1):81, mar 2021.
- [9] Luca Ciotti. Dispense e appunti di astrofisica extragalattica.
- [10] Daniele Dallacasa. Dispense e appunti di processi di radiazione e magnetoidrodinamica.
- [11] A. Dressler. Galaxy morphology in rich clusters: implications for the formation and evolution of galaxies. *ApJ*, 236:351–365, March 1980.
- [12] M K Erdim, C Ezer, O Ünver, F Hazar, and M Hudaverdi. The relative supernovae contribution to the chemical enrichment history of abell 1837. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 508(3):3337–3344, Oct 2021.
- [13] S. M. Faber and J. S. Gallagher. Masses and mass-to-light ratios of galaxies. *ARA&A*, 17:135–187, January 1979. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- [14] Ivan R. King. The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models. *AJ*, 71:64, February 1966.
- [15] Mancino. Appunti di astrofisica extragalattica.
- [16] Thomas W. Noonan. Cosmological implications of available counts in clusters of galaxies. *AJ*, 79:775, July 1974.
- [17] C.L. Sarazin. X-ray emission from clusters of galaxies. page 2.8.
- [18] F. Zwicky. Republication of: The redshift of extragalactic nebulae. *General Relativity and Gravitation*, 41(1):207–224, January 2009.
- [19] F. Zwicky and et al. VizieR Online Data Catalog: Zwicky Galaxy Catalog (Zwicky+ 1968). *VizieR Online Data Catalog*, page VII/190, March 1996.