

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**OSSERVARE ASPETTI QUANTISTICI  
DELLA GRAVITÀ IN LABORATORIO  
TRAMITE SISTEMI ENTANGLED**

**Relatore:**  
**Prof. Roberto Casadio**

**Presentata da:**  
**Francesco Mangialardi**

Anno Accademico 2020/2021



## Sommario

Come ben noto, uno dei più rilevanti problemi aperti della fisica moderna è riuscire a stabilire se anche la gravità, come le altre interazioni fondamentali, possieda o meno caratteristiche quantistiche. La ricerca teorica in questo campo è frammentata in più linee di pensiero, e ad oggi ancora nessun esperimento è stato in grado di trarre conclusioni sulla natura quantistica della gravità.

In questo elaborato vengono presentate due recenti proposte di esperimenti, una pubblicata da Chiara Marletto e Vlatko Vedral e l'altra da Sougato Bose e collaboratori, che permetterebbero finalmente di riuscire a discriminare se la gravità sia un mediatore classico o meno sfruttando le proprietà dell'entanglement quantistico. Dopo aver fornito una analisi approfondita dei risultati teorici su cui i due esperimenti sono fondati, si descrive la loro possibile implementazione sperimentale. Si conclude esponendo l'interpretazione dei fenomeni coinvolti data dalla teoria della relatività generale, e presentando poi alcune speculazioni sulla possibilità di osservare anche la discretizzazione del tempo attraverso questo tipo di esperimenti. Come complemento alla trattazione, sono stati inoltre inseriti due capitoli iniziali contenenti una introduzione storica allo studio sperimentale della gravità quantistica e un approfondimento teorico sul fenomeno dell'entanglement.



# Ringraziamenti

Al principio di questa tesi, che segna simbolicamente il termine della prima parte del mio percorso universitario, desidero ringraziare tutti coloro che ne hanno fatto parte e lo hanno reso davvero pieno di significato.

Il mio primo ringraziamento va al professore Roberto Casadio, per la pazienza e la dedizione con cui mi ha accompagnato durante il lavoro di tesi, dimostrando grande disponibilità ed offrendo sempre preziosi consigli.

Desidero ringraziare poi i miei genitori, i miei nonni e la mia famiglia tutta per avermi permesso di intraprendere questa esperienza universitaria e per avermi sostenuto durante tutta la sua durata, seguendomi quotidianamente con il pensiero quando la distanza non permetteva altrimenti.

Un altro grande grazie è dedicato a Linda, che ha conosciuto ogni gioia ed ogni fatica delle mie giornate, portandone il peso con me quando necessario. La relazione che ci lega, che va certamente oltre quanto io possa scrivere in queste righe, è passata anche attraverso le vicende dell'università.

Ringrazio tutti i ragazzi del collegio universitario in cui ho vissuto in questi anni, in particolare Alessandro, Alberto e Giovanni, per aver arricchito l'esperienza dell'università di bellissimi momenti di fraterna amicizia. Sono molto grato anche a Claudio, che con il suo accompagnamento e la sua guida si è speso affinché la mia formazione non si limitasse a quella accademica, oltre che per tutta la fiducia che ha riposto nei miei confronti.

Voglio ringraziare le amiche di Bologna conosciute in questi anni, assieme agli amici di Senigallia di più lunga data, per tutto l'affetto che mi hanno sempre dimostrato e per il dono della loro autentica compagnia, che ha fatto di ciascun incontro una occasione di sincera letizia.

In ultimo, ringrazio i miei compagni di università, che hanno reso più piacevole ogni momento trascorso dentro e fuori le aule di lezione, stimolando con i loro pensieri e le loro idee conversazioni interessanti, assieme a tutti i professori che con il loro impegno e la loro passione hanno contribuito a trasmettermi il piacere di studiare fisica.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Premessa storica</b>	<b>6</b>
1.1 Origini del dibattito sulla gravità quantistica . . . . .	6
1.2 L'esperimento COW . . . . .	11
1.2.1 Apparato sperimentale e risultati ottenuti . . . . .	12
1.2.2 Implicazioni e conseguenze dell'esperimento COW . . . . .	16
<b>2 Entanglement</b>	<b>18</b>
2.1 Sistemi compositi e operatore densità . . . . .	19
2.1.1 L'operatore densità . . . . .	19
2.1.2 Valori di aspettazione . . . . .	20
2.1.3 Operatore densità ridotto . . . . .	21
2.1.4 La decomposizione di Schmidt . . . . .	24
2.2 Stati entangled e loro proprietà . . . . .	26
2.2.1 Definizione di stati entangled . . . . .	26
2.2.2 Misure di stati entangled . . . . .	27
2.2.3 Come determinare se uno stato è entangled . . . . .	28
<b>3 Sondare il campo gravitazionale tramite sistemi entangled</b>	<b>31</b>
3.1 Principio di funzionamento . . . . .	31
3.1.1 Spiegazione dettagliata della tesi e dimostrazione . . . . .	33
3.1.2 Come la gravità quantistica genera entanglement . . . . .	37
3.2 Implementazione sperimentale . . . . .	39
3.2.1 Due possibili schemi di funzionamento . . . . .	40
3.2.2 Studio approfondito della proposta di Bose . . . . .	44
3.3 Ulteriori analisi e speculazioni . . . . .	51
3.3.1 L'effetto BMV nel contesto della relatività generale . . . . .	52
3.3.2 Possibilità di osservare in laboratorio la discretizzazione del tempo . . . . .	56
<b>Conclusioni e prospettive future</b>	<b>59</b>



# Introduzione

**L**A fisica contemporanea si trova di fronte ad un rompicapo di notevole portata. Nell'arco dell'ultimo secolo sono state formulate due teorie, la meccanica quantistica (MQ) e la relatività generale (RG), che si propongono come universalmente valide, ma presentano aspetti contrastanti tra loro.

La MQ è stata formulata considerando uno spazio-tempo non dinamico, cosa non compatibile con la RG. D'altra parte, la RG è stata costruita utilizzando gli strumenti della geometria differenziale riemanniana, assumendo che la metrica sia un campo dinamico deterministico ed essenzialmente continuo, mentre la MQ è governata da leggi probabilistiche e prevede l'esistenza di una quantizzazione degli osservabili fisici, sostenendo che questi non debbano essere descritti tramite variabili continue ma attraverso degli operatori.

Dal momento in cui queste teorie sono state formulate, gli scienziati si sono interrogati su come poter estendere le leggi e i principi su cui esse si basano in modo da poter trovare una riconciliazione tra le due. Questo percorso verso una descrizione della gravità compatibile con le proprietà del mondo quantistico (si parla solitamente di *gravità quantistica*) si è rivelato nel tempo essere più complicato di quanto inizialmente previsto, e il lavoro della comunità scientifica in questo ambito si è separato in più linee di ricerca, dando vita a teorie come la gravità quantistica a loop o la teoria delle stringhe.

Un aspetto importante che ha contribuito a frammentare il lavoro teorico nell'ambito della gravità quantistica è certamente l'assenza di risultati sperimentali. Più di un secolo è trascorso dalle prime speculazioni sulla gravità quantistica (si legga il Capitolo 1 per approfondire), eppure sino al giorno d'oggi non è stato realizzato alcun esperimento che permetta di trarre conclusioni sulla natura quantistica della gravità.

Senza il supporto di dati provenienti dagli esperimenti la genesi e lo sviluppo di una teoria fisica sono fortemente limitate: innanzitutto vengono a mancare dei riferimenti da utilizzare come punto di partenza per formulare nuove idee, ma in modo più drammatico diventa anche impossibile falsificare le teorie fisiche già formulate, costringendo possibili sviluppi futuri di tali teorie ad essere basati su (più o meno) fragili supposizioni.

Questa carenza di evidenze sperimentali è in parte dovuta al fatto che i fenomeni e le proprietà caratteristiche sia della MQ che della RG emergono in modo dominante soltanto a particolari scale di alcune grandezze fisiche come tempo, spazio o energia, e risulta molto complicato nella pratica realizzare delle condizioni di misura che permettano di osservare allo stesso tempo effetti previsti da una e dall'altra teoria (che non siano ovviamente giustificabili da una visione classica della meccanica o tramite la relatività ristretta). In particolare, si pensa (cfr. p.e. [1] o [2]) che la gravità possa manifestare aspetti quantistici alle cosiddette scale di Planck per la lunghezza, il tempo o la massa:

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616 \times 10^{-35} \text{ m}$$

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.391 \times 10^{-44} \text{ s}$$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

Dato che l'arena naturale in cui testare le previsioni della relatività generale è l'universo, un settore della ricerca in cui si prova ad osservare degli effetti di gravità quantistica è quello dell'astrofisica e della cosmologia. Sono state avanzate proposte che suggeriscono di cercare dei segnali lasciati da fenomeni di gravità quantistica nella radiazione cosmica di fondo [3] o nelle onde gravitazionali emesse dalla fusione di più buchi neri [4]. Negli ultimi anni tuttavia, si è rinnovato anche l'interesse verso una possibile verifica delle caratteristiche quantistiche del campo gravitazionale tramite esperimenti di laboratorio. Questa idea, già presente nelle menti dei fisici del primo Novecento, ha ritrovato oggi nuova vita grazie ad un rapido progresso delle tecniche sperimentali.

Nel 2017 in particolare, due diversi gruppi di ricerca, uno formato da Chiara Marletto e Vlatko Vedral [5] e l'altro composto da Sougato Bose et al. [6], hanno pubblicato due simili proposte di esperimenti che hanno avuto una risonanza notevole all'interno della comunità scientifica. L'idea su cui i due esperimenti si basano è quella di provare a verificare sperimentalmente se il campo gravitazionale possa indurre o meno l'entanglement tra due masse che si trovano entrambe in uno stato di sovrapposizione spaziale quantistica. Secondo gli autori infatti, osservare l'entanglement sarebbe una prova sufficiente per dimostrare che il campo gravitazionale è quantizzato.

A seguito della pubblicazione di queste due proposte, numerosi sono stati i dubbi e le critiche sollevate sulle forti affermazioni portate avanti dagli autori. Questi hanno replicato poi esponendo diverse chiarificazioni e precisazioni riguardo alle idee inizialmente pubblicate, oltre a fornire un'analisi più dettagliata dei due esperimenti.

In questo lavoro di tesi, dopo un approfondimento iniziale che mira ad inquadrare storicamente la genesi del dibattito sulla gravità quantistica e su una sua possibile verifica sperimentale, si passa poi a presentare il formalismo della matrice densità e la sua applicazione nel descrivere il fenomeno dell'entanglement. Questi concetti sono necessari per poter comprendere appieno la descrizione degli esperimenti e delle idee presentate negli articoli di Marletto-Vedral e Bose et al., che vengono discussi di seguito. Si illustra in modo dettagliato il principio teorico su cui sono fondati gli esperimenti proposti dai due gruppi, e si descrive poi la loro possibile implementazione sperimentale, oltre a presentare le implicazioni che seguirebbero nel caso in cui si riuscisse effettivamente a rivelare l'entanglement negli esperimenti descritti.

La trattazione si chiude con una rassegna di altri tipi di esperimenti recentemente proposti per sondare la natura quantistica della gravità in laboratorio e con una breve descrizione delle principali prospettive future nell'ambito della verifica sperimentale della gravità quantistica.

# Capitolo 1

## Premessa storica

### 1.1 Origini del dibattito sulla gravità quantistica

Gli studi pionieristici che hanno dato il via alla rivoluzione quantistica risalgono ai primi anni del 1900 (nel 1900 Planck espone la sua descrizione della radiazione di corpo nero, e nel 1905 Einstein descrive l'effetto fotoelettrico introducendo il concetto di fotone), anche se bisogna attendere il 1926 prima che Schrödinger formuli la nota equazione d'onda che porta il suo nome.

Non appena la relatività generale viene formulata (1915), già da subito gli scienziati iniziano ad interrogarsi se anche il campo gravitazionale dovesse presentare caratteristiche quantistiche. Nel 1916, nel suo primo articolo sulla radiazione gravitazionale [9], Einstein scrive:

*“A causa del movimento degli elettroni dentro di essi, gli atomi dovrebbero irradiare non solo energia elettromagnetica ma anche energia gravitazionale, sebbene in piccole quantità. Dato che è difficile che ciò sia vero in natura, sembra che la meccanica quantistica debba modificare non solo l'elettrodinamica Maxwelliana, ma anche la nuova teoria della gravità.”*

Qualche anno più tardi, nel 1927, anche il fisico svedese Oskar Klein evidenzia come la relatività generale dovesse essere rivista per incorporare la proprietà quantistica di indeterminazione dello spazio e del tempo [10]:

*“Come è ben noto, i concetti di spazio e tempo hanno perso il loro significato più*

---

Nella stesura di questo paragrafo sono stati utilizzati come riferimento generale gli articoli [7, 8].

*immediato per via dello sviluppo della teoria quantistica. [...] Da questo punto di vista ci si deve aspettare che la teoria della relatività generale necessiti di una revisione alla luce dei postulati quantistici, come anche richiesto dal fatto che molte delle sue conseguenze sono in contraddizione con i requisiti della teoria quantistica.”*

Nel loro primo articolo sulla elettrodinamica quantistica (1929), Heisenberg e Pauli suggeriscono già una strategia per poter quantizzare il campo gravitazionale, usando le stesse tecniche descritte nel loro articolo per il campo elettromagnetico [11]:

*“La quantizzazione del campo gravitazionale, che appare essere necessaria per ragioni fisiche (qui gli autori rimandano in una nota ai lavori di Einstein e Klein citati sopra), potrebbe essere portata a termine senza nessuna nuova difficoltà utilizzando un formalismo completamente analogo a quello applicato in questo articolo.”*

L’ipotetica particella mediatrice del campo gravitazionale quantizzato viene battezzata ‘gravitone’ (questo nome appare per la prima volta probabilmente in un articolo di Blokhintsev e Gal’perin del 1934 [12]), e nel 1939 Pauli e Fierz suggeriscono che questa particella potrebbe avere spin pari a due [13].

Oltre a quelli già citati, molti altri importanti fisici del tempo si mettono al lavoro per fare luce sul problema della gravità quantistica. Tra questi è importante ricordare Rosenfeld, Heisenberg, Bronstein, DeWitt, Gupta e Misner.

Dopo una prima fase di rapido sviluppo, su più fronti di lavoro emergono tuttavia difficoltà a costruire una teoria quantistica della gravità, portando alcuni scienziati a mettere in dubbio la necessità stessa di quantizzare il campo gravitazionale<sup>1</sup>.

I punti di vista della comunità scientifica si separano e nascono più correnti di pensiero. Una rappresentazione schematica delle principali linee di ricerca sulla gravità quantistica e della loro evoluzione durante tutto il Novecento è riportata nella Figura 1.1, estratta da alcune note sulla storia della gravità quantistica preparate da Rovelli per il nono Marcel Grossmann meeting, tenutosi a Roma nel 2000 [7].

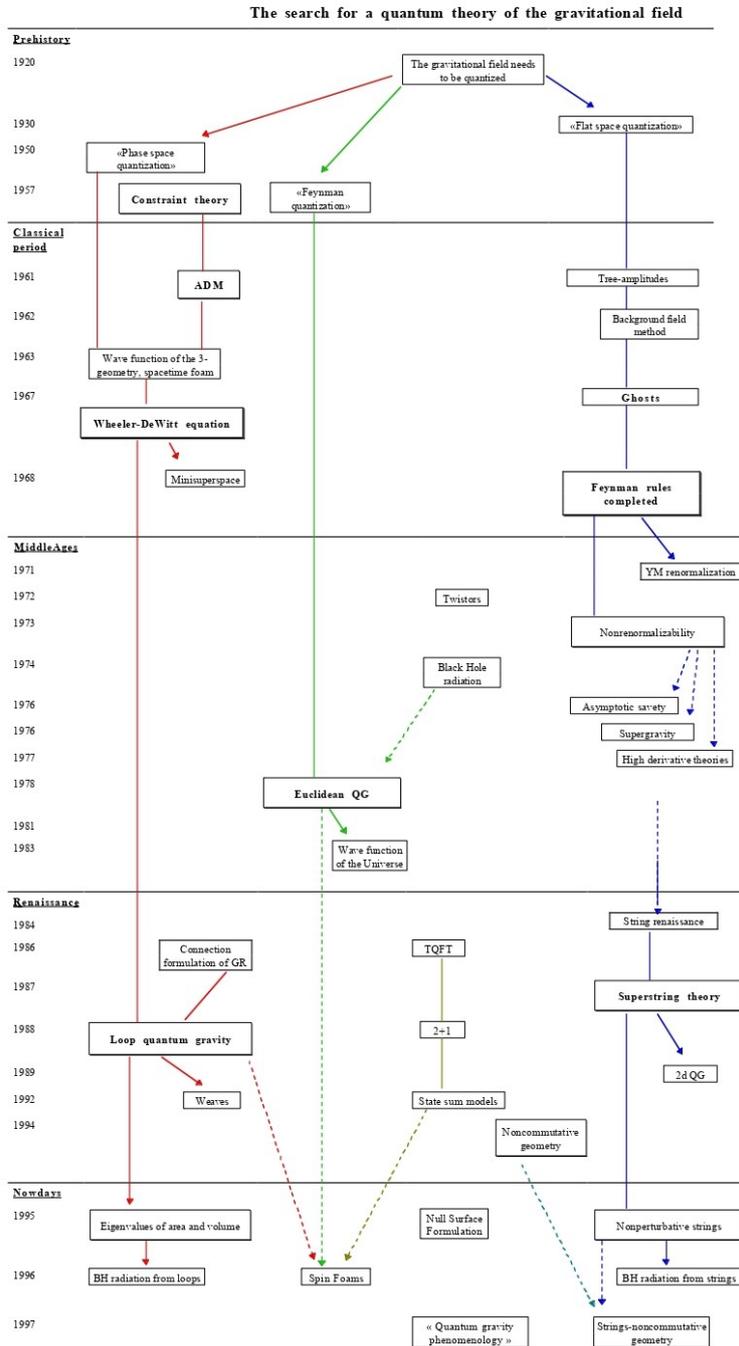
Con il passare del tempo diventa sempre più evidente come le controversie sulla gravità quantistica possano essere risolte in modo definitivo soltanto attraverso delle

---

<sup>1</sup>Per conciliare la relatività generale e la meccanica quantistica, vengono ad esempio proposti dei modelli in cui la materia è descritta tramite la meccanica quantistica, mentre il campo gravitazionale rimane trattato classicamente. Uno dei modelli più noti di questo tipo è quello della cosiddetta *gravità semiclassica*, il quale prevede che la sorgente della curvatura dello spazio tempo sia data dal valore di aspettazione del tensore energia-impulso, che viene promosso ad operatore quantistico.

Le equazioni che governano il campo gravitazionale vengono chiamate *equazioni di Einstein semiclassiche* ed assumono la forma:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$$



**Figura 1.1:** Rappresentazione schematica dell'evoluzione della ricerca nell'ambito della gravità quantistica. La figura è presa da [7].

prove sperimentali. Durante la celebre conferenza dedicata al ‘Ruolo della gravità nella fisica’, tenutasi nel 1957 a Chapel Hill, nella sede dell’Università della Carolina del Nord, numerosi fisici sottolineano la necessità di ideare e realizzare degli esperimenti per poter testare la natura quantistica della gravità. È tuttavia diffusa la convinzione che tali esperimenti potranno essere realizzati soltanto forse in un lontano futuro. [14]  
Tra i vari fisici che intervengono nei giorni della conferenza, Bergmann riassume bene questo punto di vista quando afferma:

*“Un appello a (realizzare) più esperimenti al giorno d’oggi è improbabile che porti ad un numero maggiore di esperimenti, ma più esperimenti sarebbero una cosa meravigliosa.”*

Anche Feynman affronta la problematica della carenza di prove sperimentali, sottolineando che

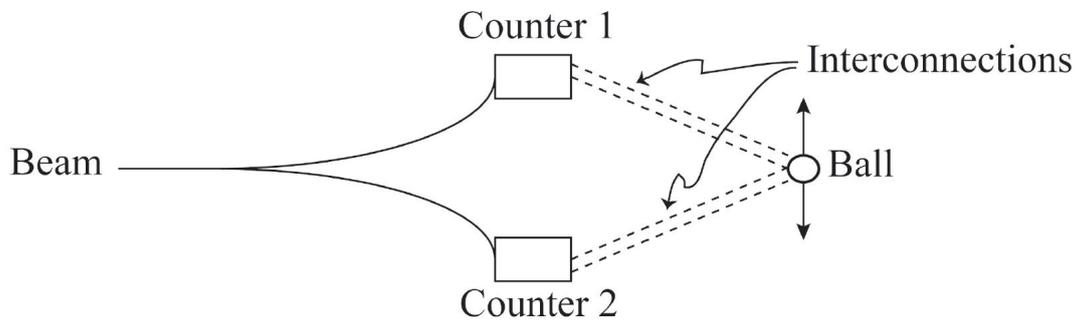
*“Esiste, tuttavia, una seria difficoltà, e questa è la mancanza di esperimenti. Per di più, non riusciremo a realizzare nessun esperimento (in tempo breve, NdR), e quindi dobbiamo affrontare la questione di come confrontarci con problemi per cui nessun esperimento è disponibile.”*

Procedendo su questa linea di ragionamento, il fisico americano sostiene poi che a parer suo *“il miglior approccio è fare finta che ci siano esperimenti e calcolare. In questo campo se non siamo spinti dagli esperimenti dobbiamo essere trainati dall’immaginazione.”* Più avanti nella discussione precisa: *“la vera sfida non è trovare un formalismo elegante, ma risolvere alcuni problemi i cui risultati possano essere verificati sperimentalmente.”*

Nonostante la poca fiducia nella possibilità di ottenere delle prove sperimentali, Feynman stesso propone durante la conferenza un’idea per testare in laboratorio le proprietà quantistiche del campo gravitazionale.

Il principio di funzionamento dell’esperimento è il seguente: si prende un oggetto di massa molto piccola (ma sufficientemente grande da generare un campo gravitazionale misurabile) e lo si porta in uno stato di sovrapposizione spaziale quantistica. Utilizzando una seconda massa (descritta in modo classico) come apparato di misura, si ripete più volte la misura del campo gravitazionale prodotto dalla prima massa, per vedere se questo varia tra un’osservazione e l’altra.

Se la gravità ha delle proprietà quantistiche, allora una massa posta in una sovrapposizione spaziale di stati quantistici dovrebbe portare anche il campo gravitazionale da essa prodotto a trovarsi in una sovrapposizione di più configurazioni. Quindi, secondo Feynman, misurare una forza variabile attraverso una massa di prova implicherebbe l’aver osservato sperimentalmente tale sovrapposizione del campo gravitazionale.



**Figura 1.2:** Schema dell'esperimento proposto da Feynman durante la conferenza a Chapel Hill, preso da [14]. Un fascio di particelle con spin  $1/2$  viene inviato all'interno di un apparato di Stern-Gerlach, dove ciascuna particella ha uguale probabilità di essere deflessa verso uno o l'altro dei due contatori. Tali contatori sono collegati tramite delle aste (o simili) ad una massa sferica, e quando rivelano una particella fanno muovere la sfera verso l'alto oppure verso il basso a seconda di quale contatore ha registrato l'arrivo della particella. In linea di principio, eliminando ogni effetto che potrebbe causare perdita di coerenza nel sistema, fino a quando la massa non viene osservata questa si trova in uno stato di sovrapposizione quantistica tra le posizioni 'alto' e 'basso', in modo analogo a quanto idealmente dovrebbe accadere per il gatto di Schrödinger.

Nel suo discorso durante la conferenza a Chapel Hill, Feynman propone un modo molto rudimentale per portare la prima massa in uno stato di sovrapposizione, utilizzando un apparato di Stern-Gerlach connesso alla massa tramite delle aste (si veda la Figura 1.2 per uno schema di funzionamento ed una breve spiegazione), anche se è consapevole che un tale apparato andrebbe di molto raffinato per evitare la perdita di coerenza del canale a seguito del rumore indotto dall'esterno o dell'emissione di energia da parte del sistema per via di effetti radiativi.

Più di cinquanta anni sono passati dalla conferenza di Chapel Hill, più di un secolo è trascorso dalle prime speculazioni di Einstein sulla gravità quantistica, ma ancora nessuno è riuscito a portare a termine un esperimento che permetta di trarre conclusioni sulla natura quantistica della gravità. Per anni l'approccio adottato dalla comunità scientifica è stato simile a quello espresso da Feynman durante i suoi interventi a Chapel Hill: lasciarsi guidare dall'immaginazione, e facendo leva sulle conoscenze oramai consolidate sulla relatività generale e la meccanica quantistica, ipotizzare delle nuove soluzioni al problema della gravità quantistica. In sostanza, le prove sperimentali sono state per lo più messe da parte.

È importante tuttavia sottolineare che ci sono stati alcuni isolati tentativi sperimentali

di fare luce sulle proprietà quantistiche della gravità, degli esperimenti ideati in modo tale che sia la meccanica quantistica che la gravità giocassero un ruolo determinante nel fenomeno in esame. Come già precisato tuttavia, da questi non si sono potuti trarre conclusioni sulla natura quantistica del campo gravitazionale.

Nel paragrafo successivo di questo capitolo viene descritto forse il più noto esperimenti di questo tipo, l'esperimento COW (dalle iniziali dei suoi autori, Colella, Overhauser e Werner), passato alla storia come un tentativo audace di avventurarsi in un campo sperimentale ancora inesplorato.

## 1.2 L'esperimento COW

Come ben noto, in meccanica quantistica le proprietà fisiche di una particella sono completamente descritte dalla sua funzione d'onda  $\psi(x, t)$ . La funzione d'onda della particella evolve nel tempo in modo dipendente dal potenziale a cui la particella è soggetta. In particolare, se la funzione d'onda della particella è inizialmente un'onda piana, e la particella si muove nell'approssimazione classica lungo un percorso  $\Gamma$ , descritta da una Lagrangiana contenente un termine perturbativo  $\mathcal{L}_P$ , si può dimostrare [15] usando il formalismo degli integrali di percorso ideato da Feynman, che la perturbazione porta una variazione nella fase della funzione d'onda stimabile come

$$\delta\phi = \frac{1}{\hbar} \int_{\Gamma} \mathcal{L}_P dt \quad (1.1)$$

Questa proprietà può essere utilizzata per realizzare esperimenti di interferometria che sfruttano non fasci di luce, ma particelle o atomi: si separa un fascio di particelle collimate in due percorsi differenti, aventi lunghezza uguale ma posti in due regioni con potenziale leggermente diverso, e si fa in modo che i percorsi si riuniscano poi in un medesimo punto. Le funzioni d'onda che descrivono la possibilità per le particelle di aver percorso uno oppure l'altro dei due bracci dell'interferometro accumulano una fase diversa per via del diverso potenziale che la particella percepisce, e a seguito di questo sfasamento generano una figura di interferenza nel punto in cui i due percorsi si riuniscono.

### 1.2.1 Apparato sperimentale e risultati ottenuti

Nel 1975, Colella, Overhauser e Werner hanno progettato e realizzato un interferometro del tipo sopra descritto in cui il potenziale a causare l'interferenza era il potenziale gravitazionale terrestre, considerato nella sua approssimazione Newtoniana [16].

In questo caso, lo sfasamento accumulato lungo un braccio dell'interferometro per via del campo gravitazionale era approssimabile tramite la (1.1) come

$$\delta\phi = -\frac{1}{\hbar} \int_{\Gamma} mgz dt \quad (1.2)$$

e per far accumulare una fase differente tra i due percorsi interferometrici era sufficiente disporli a quote differenti.

Nell'esperimento COW, come fascio di particelle è stato scelto un fascio di neutroni, e per separare e ricombinare i neutroni è stato realizzato un interferometro intagliando un cristallo di silicio. Una rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale utilizzato è riportata in Figura 1.3, in cui si può notare il cristallo intagliato che fungeva da interferometro. La fase relativa corrispondente ai due percorsi è stata variata ruotando l'interferometro attorno all'asse di incidenza del fascio.

Per contare il numero di neutroni a valle dell'interferometro sono stati utilizzati tre rivelatori contenenti  ${}^3\text{He}$  ad alta pressione; un rivelatore monitorava uno dei fasci non interferenti, mentre gli altri due registravano le particelle presenti nei due fasci che interferivano.

Fissate queste condizioni sperimentali, la fase relativa  $\beta$  dei due fasci interferenti nel punto in cui si ricombinavano era determinata totalmente dall'angolo  $\varphi$  a cui era ruotato l'interferometro:

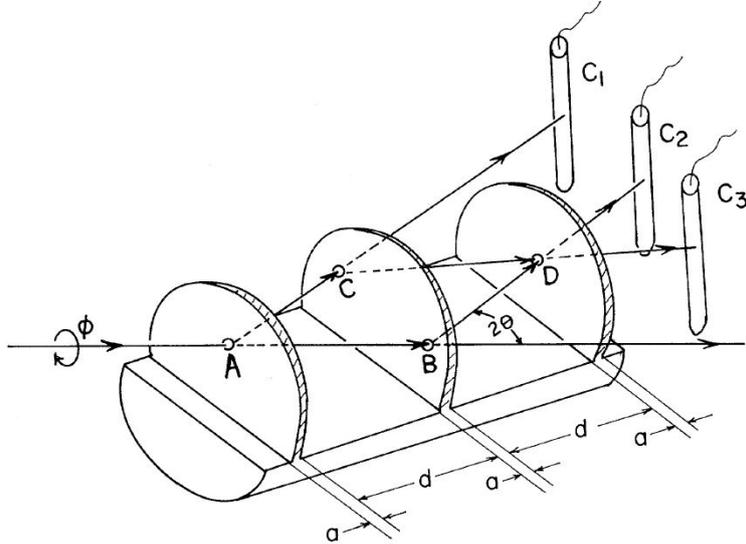
$$\beta = -q_{grav} \sin \varphi \quad (1.3)$$

essendo  $q_{grav}$  il coefficiente dato da

$$q_{grav} = 2\pi\lambda gh^{-2}M^2A \quad (1.4)$$

con  $\lambda$  = lunghezza d'onda dei neutroni,  $M$  = massa dei neutroni,  $A$  = area racchiusa dai due percorsi dell'interferometro, approssimabile come  $A = 2d(a + d) \tan \theta$ ,  $\theta$  = angolo di Bragg (da [17]). Per visualizzare meglio la geometria dell'interferometro si può fare riferimento alla Figura 1.4.

La formula (1.3) considera il caso ideale in cui il cristallo utilizzato come interferometro sia totalmente rigido, e di conseguenza la lunghezza dei due percorsi dell'interferometro rimanga invariata indipendentemente dall'angolo a cui il cristallo viene ruotato. In



**Figura 1.3:** Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale utilizzato nell'esperimento COW. La figura è presa da [16].

una situazione reale tuttavia, l'interferometro si deforma sotto il suo stesso peso in modo dipendente dall'angolo  $\varphi$  a cui viene ruotato, portando ad una variazione relativa della lunghezza dei due percorsi all'interno dell'interferometro e quindi ad uno sfasamento tra i fasci interferenti da aggiungere a quello indotto dal potenziale gravitazionale.

Per tenere conto di questo effetto, gli autori dell'esperimento COW hanno scelto di inserire nella formula (1.3) un termine  $q_{bend}$  da sommare al contributo  $q_{grav}$  già presente, ottenendo

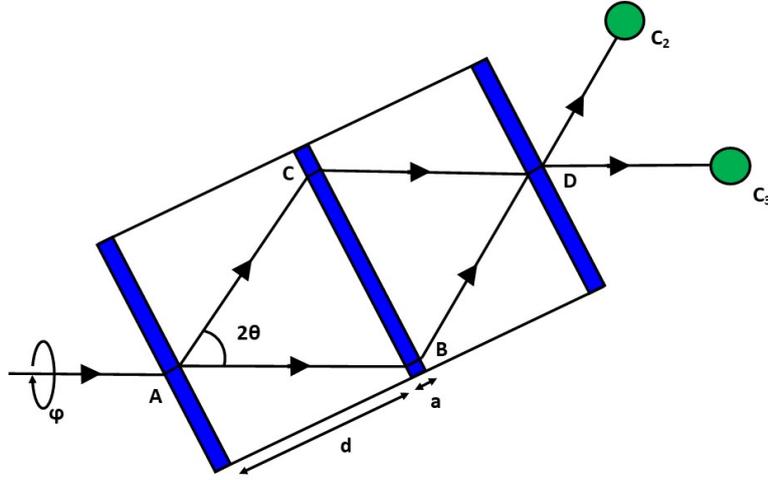
$$\beta = -(q_{grav} + q_{bend}) \sin \varphi \quad (1.5)$$

A seguito di questo sfasamento, era previsto un tasso di conteggi di neutroni sui rivelatori  $C_2$  e  $C_3$  pari a

$$I_2 = \gamma - \alpha \cos \beta \quad (1.6)$$

$$I_3 = \alpha(1 + \cos \beta) \quad (1.7)$$

dove  $\gamma/\alpha$  rappresenta un tasso medio di conteggi, il cui valore è stato stimato a partire dalle misure sperimentali. Per evidenziare la presenza dello sfasamento tra i due bracci dovuto al potenziale gravitazionale, gli autori dell'esperimento hanno scelto di riportare nell'articolo il grafico della differenza tra i conteggi  $I_2 - I_3$  al variare dell'angolo  $\varphi$  di rotazione dell'interferometro. I risultati ottenuti sono presentati nella Figura 1.5.



**Figura 1.4:** Vista dall'alto dell'interferometro utilizzato per l'esperimento COW.

La frequenza di oscillazione è stata ricavata calcolando la trasformata di Fourier dei dati sperimentali, ottenendo il risultato:

$$q_{grav} + q_{bend} = 54.3 \quad (1.8)$$

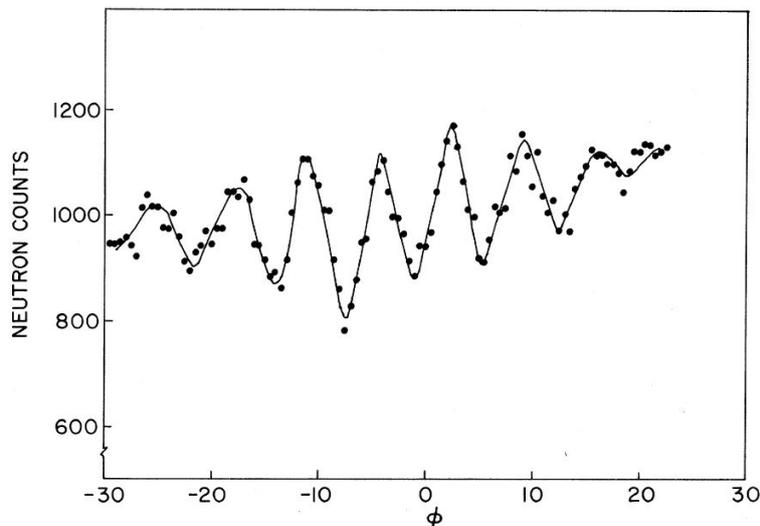
Dato che la formula (1.4) prevede, in base alle condizioni di lavoro misurate nell'esperimento,

$$q_{grav} = 59.6 \quad (1.9)$$

gli autori hanno attribuito la differenza tra i valori riportati nella (1.8) e nella (1.9) a  $q_{bend}$ .

Per ricavare  $q_{bend}$  separatamente da  $q_{grav}$  tramite una misura sperimentale, ed ottenere così una migliore stima sull'accordo tra previsioni e risultati ottenuti nell'esperimento, Colella, Werner e Overhauser suggerivano di costruire un interferometro che permettesse di utilizzare al suo interno contemporaneamente un fascio di protoni e uno di raggi X. Nell'approssimazione non relativistica della gravità difatti, un fascio di luce non subisce sfasamenti dovuti al potenziale gravitazionale, e l'unico sfasamento misurato a valle dell'interferometro è causato dalla deformazione del cristallo. Per rendere più evidente lo sfasamento, si suggeriva nell'articolo di inserire anche una sottile piastra con orientazione regolabile in uno dei due bracci dell'interferometro.

Negli anni successivi alla pubblicazione dell'articolo sull'esperimento COW, numerosi altri gruppi di ricerca hanno replicato questo tipo di esperimento, cercando di migliorare i risultati ottenibili in laboratorio tramite un lavoro su due fronti:



**Figura 1.5:** Differenza tra il tasso di conteggi di neutroni registrato dal rivelatore  $C_2$  e quello registrato dal rivelatore  $C_3$ , al variare dell'angolo  $\varphi$ . La figura è presa da [16]. Gli autori riportano un tempo di conteggio per ciascun punto del grafico approssimativamente pari a 80 min.

### 1. Affinamento delle tecniche sperimentali

Realizzazione di interferometri di tipo diverso (che permettessero ad esempio di stimare anche  $q_{bend}$  assieme a  $q_{grav}$ ), riduzione dell'effetto di deformazione dell'interferometro, utilizzo di strumenti di rivelazione più efficienti.

### 2. Sviluppo di una descrizione teorica più completa dell'esperimento

Calcolo di vari contributi minori allo sfasamento tra i due fasci dell'interferometro, tra cui quelli dovuti all'effetto Sagnac (causato dalla rotazione della Terra), alla teoria della dynamical diffraction (che descrive in modo più appropriato come i neutroni vengono diffusi dalle lamine dell'interferometro) o ad una trattazione della gravità tramite la relatività generale.

I risultati ottenuti nei più importanti esperimenti di questo tipo sono rappresentati nella tabella<sup>2</sup> in Figura 1.6, estratta da [17]. Si noti come si sia raggiunto un accordo tra previsioni teoriche e dati sperimentali inferiore all'1%.

<sup>2</sup>La tabella è stata modificata rispetto alla versione contenuta nel testo originale correggendo la data dell'esperimento COW da 1995 a 1975.

Authors	Interferometer	$\lambda$ [Å]	$A_0$ [cm <sup>2</sup> ]	$\theta_B$ [°]	$q_{\text{COW}}$ (theory) [rad]	$q_{\text{COW}}$ (exp) [rad]	$q_{\text{bend}}$ [rad]	Agreement with theory (%)
Colella et al. (1975)	Symmetric LLL #1	1.445(2)	10.52(2)	22.10(5)	59.8(1)	54.3(2.0)		12
Staudenmann et al. (1980)	Symmetric LLL #2	1.419(2)	10.152(4)	21.68(1)	56.7(1)	54.2(1)	3.30(5)	4.4
		1.060(2)	7.332(4)	16.02(1)	30.6(1)	28.4(1)	2.48(5)	7.3
Werner et al. (1988)	Symmetric LLL #2	1.417(1)	10.132(4)	21.65(1)	56.50(5)	56.03(3)	1.41(1)	0.8
Jacobson et al. (1993)	Symmetric LLL #2	1.422(1)	10.177(4)	21.73(1)	56.94(5)	54.7(2)	1.6(1)	3.9
Littrell et al. (1997)	Skew symmetric (440) reflection							
	Full range data	1.078(6)	12.016(3)	314.15(1)	50.97(5)	49.45(5)	2.15(4)	3.0
	Restricted range data	1.078(6)	12.016(3)	314.15(1)	50.97(5)	50.18(5)	2.03(4)	1.5
	(220) reflection							
Full range data	2.1440(4)	11.921(3)	33.94(1)	100.57(10)	97.58(10)	1.07(2)	3.0	
Restricted range data	2.1440(4)	11.921(3)	33.94(1)	100.57(10)	99.02(10)	1.01(2)	1.5	
Littrell et al. (1997)	Large symmetric LLL (440) reflection							
	Full range data	0.9464(5)	30.50(1)	29.50(1)	113.60(10)	112.89(15)	8.09(6)	0.6
	Restricted range data	0.9464(5)	30.50(1)	29.50(1)	113.60(10)	112.62(15)	8.36(6)	0.9
	(220) reflection							
Full range data	1.8796(10)	30.26(1)	29.30(1)	223.80(10)	222.38(30)	4.02(3)	0.6	
Restricted range data	1.8796(10)	30.26(1)	29.30(1)	223.80(10)	221.85(30)	4.15(3)	0.9	

**Figura 1.6:** Riepilogo dei parametri sperimentali più rilevanti e dei risultati ottenuti nell'esperimento COW e nei principali esperimenti simili che lo hanno seguito. La tabella è presa da [17].

## 1.2.2 Implicazioni e conseguenze dell'esperimento COW

Dato che l'esperimento COW si inserisce all'interno del filone della ricerca sperimentale nell'ambito della gravità quantistica, è opportuno chiedersi quali conclusioni si possono trarre a seguito di questo esperimento sulla natura quantistica del potenziale gravitazionale.

Certamente questo esperimento non permette di stabilire se il campo gravitazionale in sé abbia delle proprietà quantistiche. Ciò che l'esperimento COW ha permesso di verificare è che il potenziale gravitazionale interagendo con la materia quantistica varia la fase della funzione d'onda che descrive la materia alla stregua degli altri potenziali noti, e può indurre perciò effetti quantistici come l'interferenza tra onde di materia.

Nonostante questo risultato fosse senza dubbio già atteso nella comunità scientifica, l'esperimento COW ha acquisito un importante valore simbolico: per la prima volta è stato dimostrato che è possibile osservare in laboratorio fenomeni in cui sia la meccanica quantistica che la gravità rivestono un ruolo fondamentale, rinnovando l'interesse nello studio sperimentale delle possibili proprietà quantistiche della gravità.

Oltre alla sua importanza come studio pionieristico nel campo della gravità quantistica, l'esperimento COW ha portato anche ulteriori contributi alla fisica contemporanea, tra cui:

**1. Ha permesso una verifica sperimentale dei principi di equivalenza debole e forte<sup>3</sup>**

L'equivalenza debole può essere verificata in quanto il termine di sfasamento dovuto all'effetto Sagnac dipende unicamente dalla massa inerziale, mentre quello indotto dal potenziale gravitazionale dipende dal prodotto tra la massa inerziale e quella gravitazionale (per una analisi completa vedi [17]). Separato il contributo di questi due termini, e ricavato dal primo il valore della massa inerziale, è possibile ottenere dal secondo quello della massa gravitazionale, così da poterli confrontare.

Per provare l'equivalenza forte invece, è necessario accelerare l'apparato sperimentale in modo da annullare l'effetto della gravità. Bonse e Wroblewski, nel 1983, hanno realizzato questa condizione montando l'interferometro su un carrello mobile controllato tramite dei magneti e facendo oscillare il carrello in maniera controllata. Gli autori riportano nell'articolo [18] un accordo dei risultati sperimentali con il principio di equivalenza forte entro un errore del 4%.

**2. Ha dato il via alla produzione e all'utilizzo di interferometri gravitazionali che sfruttano onde di materia**

Gli interferometri gravitazionali che utilizzano particelle o atomi sono diventati largamente diffusi dopo la loro prima apparizione nell'esperimento COW, e hanno trovato un ampio spettro di applicazioni. Vengono utilizzati ad esempio come gravimetri<sup>4</sup> (si veda p.e. [19]) o come gradiometri<sup>5</sup> (si veda p.e. [20]), e si sta recentemente progettando di impiegarli anche come sensori per onde gravitazionali [21, 22].

---

<sup>3</sup>Il principio di equivalenza debole stabilisce che la massa inerziale e quella gravitazionale hanno lo stesso valore numerico (a meno che la prima non sia nulla), mentre quello di equivalenza forte stabilisce che un sistema in caduta libera non risente localmente della forza gravitazionale (è quindi inerziale se ha tutte le cariche di gauge relative alle interazioni fondamentali nulle).

<sup>4</sup>Un gravimetro è uno strumento che permette di misurare la costante di gravitazione universale.

<sup>5</sup>Un gradiometro è uno strumento che permette di valutare la variazione della costante di gravitazione universale con la quota.

## Capitolo 2

# Entanglement

L'entanglement è un fenomeno peculiare dei sistemi quantistici che li differenzia in maniera radicale da quelli classici. Le proprietà degli stati entangled, poco studiate nel periodo iniziale dello sviluppo della teoria dei quanti, sono state largamente approfondite soltanto in epoca più recente, arrivando ad essere utilizzate in numerose applicazioni anche al di fuori dell'ambito della ricerca scientifica.

In particolare, i sistemi entangled sono degli strumenti fondamentali nel campo della teoria dell'informazione quantistica; vengono ad esempio sfruttati per i protocolli di distribuzione di chiavi quantistiche, e sono inoltre parte integrante delle architetture che compongono i computer quantistici. Come anticipato poi nell'introduzione a questo elaborato, recenti lavori teorici hanno mostrato che i sistemi entangled potranno forse portare nei prossimi anni un contributo fondamentale anche nell'ambito dello studio della gravità quantistica in laboratorio.

In questo capitolo vengono presentate le conoscenze teoriche necessarie per poter operare con i sistemi entangled<sup>1</sup>. Lo scopo principale della seguente trattazione è quello di fornire al lettore alcuni strumenti indispensabili per la comprensione del successivo Capitolo 3, in cui si descrive come i sistemi entangled possano essere utilizzati per sondare la natura quantistica della gravità. Questo capitolo può risultare tuttavia anche un interessante approfondimento per chiunque sia intenzionato a conoscere la definizione formale di stati entangled e voglia comprendere le proprietà fondamentali dell'entanglement, un fenomeno affascinante della meccanica quantistica di cui si parla spesso, anche in ambito divulgativo, ma che è ai più noto soltanto in maniera superficiale.

---

<sup>1</sup>Per la stesura di questo approfondimento sono stati utilizzati come principali testi di riferimento [23–25].

Per semplicità di notazione, nella trattazione che segue si utilizzerà lo stesso simbolo per indicare un osservabile e l'operatore quantistico ad esso associato. Nel caso in cui sia importante per la comprensione del testo distinguere tra i due, verranno indicate in modo esplicito le convenzioni adottate.

## 2.1 Sistemi composti e operatore densità

Per poter studiare le proprietà degli stati entangled è necessario prima introdurre lo strumento matematico dell'operatore densità, indispensabile per la descrizione di sistemi fisici composti.

### 2.1.1 L'operatore densità

Utilizzando la notazione di Dirac, tradizionalmente lo stato di un sistema quantistico è rappresentato attraverso un ket di stato  $|\psi\rangle$ .

Si può formulare tuttavia un modo più generale per descrivere un sistema fisico quantistico, utilizzando l'operatore densità. Rispetto ad un semplice ket di stato infatti, l'operatore densità tiene in considerazione il fatto che un osservatore potrebbe non sapere con esattezza in quale stato quantistico si trovi il sistema che sta studiando, ma riesca comunque a fare una stima della probabilità  $p_\alpha$  di trovarlo in un determinato stato descritto dal ket  $|\psi_\alpha\rangle$ .

Possiamo sintetizzare questo concetto affermando che *l'operatore densità descrive la conoscenza che un osservatore ha riguardo allo stato di un determinato sistema quantistico*. Formalmente, l'operatore densità  $\rho$  è definito come:

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| \quad (2.1)$$

essendo  $|\psi_{\alpha}\rangle$  i ket di stato corrispondenti agli stati in cui il sistema si può trovare e  $p_{\alpha}$  la probabilità di trovare il sistema nel relativo stato  $|\psi_{\alpha}\rangle$ , in base alle informazioni che l'osservatore ha sul sistema in esame.

Essendo le  $p_{\alpha}$  delle probabilità, devono ovviamente soddisfare l'opportuna condizione di normalizzazione

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} = 1 \quad (2.2)$$

Si noti che l'operatore densità descrive un'incertezza riguardo alle proprietà di un sistema fisico che si aggiunge a quella minima imposta dal principio di indeterminazione, la quale

è contenuta in modo intrinseco nella rappresentazione degli stati quantistici mediante i ket di stato.

Nel caso in cui l'osservatore ha la certezza che il sistema fisico sotto esame si trovi in un determinato stato  $|\psi\rangle$ , l'operatore densità assume la semplice forma

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| \quad (2.3)$$

e si dice che il sistema si trova in uno **stato puro**. Se invece lo stato del sistema non è completamente noto, e quindi la matrice densità del sistema è della forma generale (2.1), con più di un termine nella sommatoria, allora si parla di **stato misto**. È evidente come, per uno stato puro, l'operatore densità non contenga nessuna informazione in più sul sistema rispetto al ket di stato  $|\psi\rangle$ .

Dalla definizione stessa dell'operatore densità seguono immediatamente alcune delle sue proprietà fondamentali:

- è limitato
- è autoaggiunto ( $\rho = \rho^\dagger$ ), e quindi ammette una base ortonormale di autoket
- è di classe traccia (cioè ha traccia ben definita), ed in particolare ha traccia unitaria (deriva dalla proprietà (2.2))
- è un operatore positivo (deriva dalla positività delle probabilità  $p_\alpha$ ), dunque i suoi autovalori sono tutti non negativi

Una ulteriore proprietà dell'operatore densità, che sarà utilizzata in seguito nella trattazione, è data dalla relazione  $Tr[\rho^2] \leq 1$ , con l'uguaglianza valida soltanto se lo stato del sistema è puro (in tal caso vale  $\rho^2 = \rho$ ).

### 2.1.2 Valori di aspettazione

Come è risaputo dalle conoscenze più basilari di meccanica quantistica, se si considera un sistema quantistico che si trova in uno stato puro, rappresentato da un ket di stato  $|\psi\rangle$ , per ottenere il valore medio (anche detto *valore di aspettazione*) di un generico osservabile  $A$  del sistema è sufficiente calcolare

$$\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \quad (2.4)$$

Nel caso in cui il sistema si trovi invece in uno stato misto, è naturale estendere questa definizione e considerare come valore medio di  $A$  la somma dei valori di aspettazione di

A negli stati puri  $|\psi_\alpha\rangle$  in cui il sistema si può trovare, ciascuno pesato con la probabilità  $p_\alpha$  che il sistema si trovi in tale stato:

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | A | \psi_{\alpha} \rangle \quad (2.5)$$

Si può facilmente dimostrare che questa relazione può essere scritta anche in termini dell'operatore densità come

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[A\rho] \quad (2.6)$$

dove  $\text{Tr}[M]$  indica l'usuale operazione di traccia sulla matrice  $M$ .

*Dimostrazione.*

Dimostriamo prima la formula nel caso di uno stato puro, per poi estenderla al caso di uno stato generico.

Sia  $|\beta\rangle$  una qualsiasi base ortonormale di ket. Per uno stato puro rappresentato dal ket  $|\psi_\alpha\rangle$ , indicando con  $\rho_\alpha = |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$  la matrice densità dello stato, vale

$$\begin{aligned} \text{Tr}[A\rho_\alpha] &= \sum_{\beta} \langle \beta | A \rho_\alpha | \beta \rangle = \sum_{\beta} \langle \beta | A (|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|) | \beta \rangle = \\ &= \sum_{\beta} \langle \beta | A | \psi_\alpha \rangle \langle \psi_\alpha | \beta \rangle = \left( \sum_{\beta} \langle \psi_\alpha | \beta \rangle \langle \beta | \right) A | \psi_\alpha \rangle = \\ &= \langle \psi_\alpha | A | \psi_\alpha \rangle = \langle A \rangle_{\alpha} \end{aligned}$$

Una volta dimostrata la relazione nel caso di uno stato puro, si prova immediatamente che questa continua a valere anche per uno stato misto, grazie alla proprietà di linearità della traccia

$$\begin{aligned} \text{Tr}[A\rho] &= \text{Tr}\left[A\left(\sum_{\alpha} p_{\alpha}\rho_{\alpha}\right)\right] = \text{Tr}\left[\sum_{\alpha} p_{\alpha}A\rho_{\alpha}\right] = \\ &= \sum_{\alpha} p_{\alpha}\text{Tr}[A\rho_{\alpha}] = \sum_{\alpha} p_{\alpha}\langle\psi_{\alpha}|A|\psi_{\alpha}\rangle = \langle A \rangle \end{aligned}$$

□

### 2.1.3 Operatore densità ridotto

L'operatore densità trova la sua applicazione più importante non tanto per lo studio di singoli sistemi quantistici, quanto per l'analisi di sistemi quantistici compositi. Spesso

lo si utilizza in particolare per descrivere sottosistemi non completamente noti che fanno parte di un più ampio sistema di cui invece si conosce esattamente lo stato quantistico. Per questo motivo è importante cercare di capire come poter ottenere la matrice densità di un sottosistema quando è nota quella del sistema più grande di cui fa parte.

Per semplicità, consideriamo un sistema composto di sole due parti  $A$  e  $B$ . Proviamo a ricavare l'operatore densità del sistema  $A$ , solitamente detto **operatore densità ridotto** e indicato con  $\rho^A$ , a partire dall'operatore densità  $\rho^{AB}$  del sistema complessivo.

Per capire quale è la corretta operazione da fare su  $\rho^{AB}$  per ottenere  $\rho^A$ , facciamo il seguente ragionamento: consideriamo un osservabile  $M$  per il sistema  $A$ , e indichiamo con  $\tilde{M}$  l'operatore che corrisponde al processo, realizzato sul sistema  $AB$ , in cui si misura l'osservabile  $M$  di  $A$  lasciando  $B$  inalterato. Necessariamente,  $\tilde{M} = M \otimes I_B$  (dove  $I_B$  è l'operatore identità relativo allo spazio dei ket di stato di  $B$ ).

Richiediamo poi per consistenza che la nostra prescrizione per associare un operatore densità  $\rho^A$  al sistema  $A$  debba avere la proprietà che il valore medio previsto per un qualsiasi osservabile di  $A$  sia lo stesso se calcolato tramite  $\rho^A$  o  $\rho^{AB}$ , il che implica:

$$Tr[M\rho^A] = Tr[\tilde{M}\rho^{AB}] = Tr[(M \otimes I_B)\rho^{AB}] \quad (2.7)$$

Si può dimostrare che questa relazione è soddisfatta se e solo se poniamo

$$\rho^A = Tr_B(\rho^{AB}) \quad (2.8)$$

dove si è introdotta l'operazione di traccia parziale sul sottosistema  $B$ , definita dalle proprietà:

1.  $Tr_B(\cdot)$  è lineare nel suo argomento
2. presa una coppia di ket qualsiasi  $|a_1\rangle$  e  $|a_2\rangle$  nello spazio degli stati di  $A$  e una coppia di ket qualsiasi  $|b_1\rangle$  e  $|b_2\rangle$  nello spazio degli stati di  $B$ , vale

$$Tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| Tr(|b_1\rangle\langle b_2|)$$

ovvero l'operazione di traccia parziale sul sistema  $B$  corrisponde effettivamente alla usuale operazione di traccia ristretta allo spazio  $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_B$  ( $\mathcal{H}_B$  è lo spazio di Hilbert dei ket di stato di  $B$ ).

*Dimostrazione.*

Dobbiamo provare che:

I la definizione di  $\rho^A$  tramite la formula (2.8) soddisfa la relazione (2.7)

II esiste una unica mappa che associa un operatore densità  $\rho^{AB}$  ad un operatore densità  $\rho^A$  e che verifichi tale proprietà

Per provare I è sufficiente una verifica diretta. Supponendo che valga  $\rho^A = Tr_B(\rho^{AB})$ , si ha:

$$\begin{aligned} Tr[M\rho^A] &\equiv Tr_A[M\rho^A] = Tr_A[MTr_B(\rho^{AB})] = \\ &= Tr_A[Tr_B[(M \otimes I_B)\rho^{AB}]] = Tr[(M \otimes I_B)\rho^{AB}] \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che  $Tr_B(\cdot)$  agisce soltanto sullo spazio  $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_B$  relativo al sistema  $B$ , e quindi  $MTr_B(\rho^{AB}) = Tr_B[(M \otimes I_B)\rho^{AB}]$ .

Per provare II bisogna invece avvalersi del fatto che, essendo l'operatore densità limitato e tale che  $Tr[\rho^\dagger\rho] = Tr[\rho^2] < \infty$ , allora appartiene alla classe degli *operatori di Hilbert-Schmidt*<sup>2</sup> definiti sullo spazio di Hilbert dei ket di stato. Gli operatori di Hilbert-Schmidt formano uno spazio vettoriale, su cui è possibile definire il prodotto interno (detto di Hilbert-Schmidt)  $\langle A, B \rangle \equiv Tr(A^\dagger B)$ , e si può provare che lo spazio risulta completo rispetto alla distanza indotta da questo prodotto interno.

Supponiamo ora che esistano due possibili modi  $\rho_1^A = f_1(\rho^{AB})$  e  $\rho_2^A = f_2(\rho^{AB})$  di associare un operatore densità al sistema  $A$  a partire dall'operatore densità del sistema  $AB$ , che rispettino entrambi la relazione (2.7). Espandendo uno dei due operatori densità del sistema  $A$  in una qualsiasi base ortonormale di operatori autoaggiunti  $M_i$  dello spazio di Hilbert-Schmidt a cui appartiene, si trova:

$$\rho_1^A = \sum_i M_i Tr(M_i \rho_1^A) = \sum_i M_i Tr[(M_i \otimes I_B)\rho^{AB}] = \sum_i M_i Tr(M_i \rho_2^A) = \rho_2^A$$

ovvero  $\rho_1^A = \rho_2^A$ . Si nota dunque che la formula (2.7) determina in modo univoco l'operatore densità del sottosistema  $A$  in quanto fissa i suoi coefficienti di espansione rispetto ad una base ortonormale qualsiasi di operatori nello spazio di Hilbert-Schmidt.

□

In definitiva, possiamo affermare di aver raggiunto il nostro obiettivo: la formula (2.8) descrive l'unica corretta prescrizione per ricavare l'operatore densità ridotto di  $A$  a partire dall'operatore densità del sistema complessivo  $AB$ , in quanto è la sola operazione che permette di ottenere la corretta descrizione degli osservabili del sottosistema.

<sup>2</sup>Dato uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , un operatore lineare e limitato  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  è detto di Hilbert-Schmidt se, presa una qualsiasi base ortonormale  $\{e_k\}$  di  $\mathcal{H}$ , vale  $\sum_{k=1}^{\infty} \|Ae_k\|^2 < \infty$ . Si può provare inoltre che questa condizione è equivalente alla richiesta  $Tr[A^\dagger A] < \infty$ .

## 2.1.4 La decomposizione di Schmidt

Un risultato fondamentale per poter definire in modo rigoroso ma immediato cosa si intende per stato entangled è quello della decomposizione di Schmidt.

### Teo. - Decomposizione di Schmidt.

Dato uno stato puro  $|\psi_{AB}\rangle$  di un sistema composto  $AB$ , allora esistono sempre degli stati ortonormali  $|i_A\rangle$  per  $A$  e degli stati ortonormali  $|i_B\rangle$  per  $B$  tali che

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle \quad (2.9)$$

dove  $\sqrt{p_i}$  sono numeri reali non negativi che soddisfano  $\sum_i p_i = 1$ , detti **coefficienti di Schmidt**.

È importante rimarcare che gli stati  $|i_A\rangle$  e  $|i_B\rangle$  sono in generale diversi tra loro, e non possono essere scelti in modo arbitrario. Il teorema assicura soltanto l'esistenza di questi stati particolari, senza garantire ulteriori loro proprietà.

*Dimostrazione.*<sup>3</sup>

Uno stato puro del sistema  $AB$  può essere sempre espresso come

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} \psi_{ij} |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$$

essendo  $|i_A\rangle$  e  $|j_B\rangle$  delle basi ortonormali qualsiasi rispettivamente per  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ .

Se poniamo poi

$$|\tilde{i}_B\rangle \equiv \sum_j \psi_{ij} |j_B\rangle$$

l'espressione precedente può essere riscritta come

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_i |i_A\rangle \otimes |\tilde{i}_B\rangle$$

dove è importante sottolineare che i ket  $|\tilde{i}_B\rangle$ , a differenza dei ket  $|i_A\rangle$  e  $|i_B\rangle$ , non sono necessariamente ortogonali né normalizzati.

Supponiamo ora di aver scelto i ket  $|i_A\rangle$  in modo che corrispondano agli autoket di  $\rho^A$  (è sempre possibile farlo dato che  $\rho^A$  è autoaggiunto). Vale quindi

$$\rho^A = \sum_i p_i |i_A\rangle \langle i_A|$$

---

<sup>3</sup>Questa dimostrazione è tratta da [25].

Possiamo però calcolare  $\rho^A$  anche direttamente da  $\rho^{AB}$  secondo la prescrizione data dalla (2.8)

$$\begin{aligned}\rho^A &= Tr_B(\rho^{AB}) = Tr_B(|\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|) = Tr_B\left(\sum_{i,j} |i_A\rangle \langle j_A| \otimes |\tilde{i}_B\rangle \langle \tilde{j}_B|\right) = \\ &= \sum_{i,j} |i_A\rangle \langle j_A| \otimes Tr(|\tilde{i}_B\rangle \langle \tilde{j}_B|) = \sum_{i,j} \langle \tilde{j}_B | \tilde{i}_B \rangle (|i_A\rangle \langle j_A|)\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il risultato

$$Tr_B(|\tilde{i}_B\rangle \langle \tilde{j}_B|) = \sum_k \langle k_B | \tilde{i}_B \rangle \langle \tilde{j}_B | k_B \rangle = \sum_k \langle \tilde{j}_B | k_B \rangle \langle k_B | \tilde{i}_B \rangle = \langle \tilde{j}_B | \tilde{i}_B \rangle$$

essendo  $|k_B\rangle$  una qualsiasi base ortonormale di ket di  $\mathcal{H}_B$ . Confrontando le due espressioni ottenute per  $\rho^A$  deduciamo che

$$\langle \tilde{j}_B | \tilde{i}_B \rangle = p_i \delta_{ij}$$

trovando che effettivamente anche i ket  $|\tilde{i}_B\rangle$  sono ortogonali tra loro.

Li normalizziamo, ottenendo i ket

$$|i'_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}} |\tilde{i}_B\rangle$$

(possiamo assumere  $p_i \neq 0$ , dato che nella formula (2.9) sono rilevanti solo i termini con coefficiente  $p_i$  non nullo), e finalmente possiamo riscrivere l'espansione di  $|\psi_{AB}\rangle$  come

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i_A\rangle \otimes |i'_B\rangle$$

che è esattamente la decomposizione di Schmidt di  $|\psi_{AB}\rangle$ .

□

Per capire l'importanza di questo teorema, è utile confrontare l'espressione (2.9) con l'espansione di  $|\psi_{AB}\rangle$  in una generica base ortonormale del sistema composto  $AB$ :

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} \psi_{ij} |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle \quad (2.10)$$

Si nota immediatamente che in questo caso, all'interno della sommatoria, ciascun ket  $|i_A\rangle$  del sistema  $A$  è possibilmente accoppiato con più di un ket  $|j_B\rangle$  del sistema  $B$  (e

viceversa). Nella decomposizione di Schmidt al contrario, ad ogni ket  $|i_A\rangle$  corrisponde un solo ket  $|i_B\rangle$  e viceversa (si usa infatti lo stesso indice  $i$  per identificarli), e ciascuno dei ket  $|i_A\rangle$  e  $|i_B\rangle$  compare in un termine soltanto della sommatoria. La potenza della decomposizione di Schmidt risiede tutta in questa sua proprietà.

Dalla formula (2.9) segue anche che per uno stato puro  $|\psi_{AB}\rangle$  di  $AB$  esistono due basi ortonormali per gli stati di  $A$  e  $B$  tali che

$$\rho^A = \sum_i p_i |i_A\rangle \langle i_A| \quad \rho^B = \sum_i p_i |i_B\rangle \langle i_B| \quad (2.11)$$

e quindi  $\rho^A$  e  $\rho^B$  hanno lo stesso numero di autovalori non nulli (il numero dei rimanenti autovalori nulli può essere differente se gli spazi di Hilbert degli stati di  $A$  e  $B$  hanno dimensione diversa).

Il numero di autovalori non nulli di  $\rho^A$  e  $\rho^B$ , che coincide con il numero dei termini non nulli nell'espansione di Schmidt di  $|\psi_{AB}\rangle$ , è detto **numero di Schmidt**.

## 2.2 Stati entangled e loro proprietà

Dopo aver introdotto nella sezione precedente gli strumenti ed i risultati matematici essenziali per descrivere i sistemi composti, li utilizziamo ora per studiare il fenomeno dell'entanglement quantistico.

### 2.2.1 Definizione di stati entangled

**Def. - Stato entangled.**

Uno stato puro  $|\psi_{AB}\rangle$  di un sistema bipartito  $AB$  è detto **entangled** (o non separabile) se il suo numero di Schmidt è più grande di uno. Altrimenti il sistema è detto **non entangled** (o separabile).

Uno stato separabile di un sistema bipartito è quindi rappresentato da un ket che può essere scritto come il prodotto diretto di un ket di  $A$  ed un ket di  $B$

$$|\psi_{AB}\rangle = |\varphi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle \quad (2.12)$$

e i sottosistemi  $A$  e  $B$  si trovano entrambi in uno stato puro, con matrici densità ridotte esprimibili nella forma semplice (2.3):

$$\rho^A = |\varphi_A\rangle \langle \varphi_A| \quad \rho^B = |\chi_B\rangle \langle \chi_B| \quad (2.13)$$

Uno stato entangled del sistema complessivo  $AB$  ha invece una espansione di Schmidt contenente più di un termine nella somma, e di conseguenza gli stati dei sottosistemi  $A$  e  $B$  sono misti (con matrici densità ridotte della forma generale (2.1)).

**N.B. - STATI MISTI ENTANGLED**

In questo paragrafo si è data una definizione di stato entangled per sistemi bipartiti che si trovano in uno stato puro. Questo è il caso più semplice, frequentemente in uso nella letteratura. Il concetto di entanglement può essere tuttavia esteso anche a sistemi che si trovano in uno stato misto, per i quali non si può però sfruttare la decomposizione di Schmidt. In generale, un sistema bipartito è detto separabile se la sua matrice densità può essere scritta nella forma

$$\rho^{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (2.14)$$

e si nota che per sistemi bipartiti che si trovano in uno stato puro, questa definizione è equivalente a quella presentata nella trattazione sopra.

In analogia al caso di sistemi puri, si definisce poi l'entanglement per negazione, affermando che uno stato è entangled quando non è separabile.

## 2.2.2 Misure di stati entangled

Una delle differenze più importanti tra stati entangled e separabili di un sistema bipartito emerge quando si studiano i sottosistemi di cui il sistema più grande è composto, in particolare quando si analizzano le proprietà di uno dei due sottosistemi in relazione a quelle dell'altro sottosistema.

Considerata una coppia di osservabili qualsiasi  $P_A$  e  $P_B$ , il primo relativo al sistema  $A$  e il secondo relativo al sistema  $B$ , e indicati con  $|\phi_i^A\rangle$  e  $|\phi_j^B\rangle$  gli autoket rispettivamente di  $P_A$  e  $P_B$ , cerchiamo di capire se è possibile ottenere informazioni sul valore di  $P_B$  nel sistema  $B$  facendo misure soltanto dell'osservabile  $P_A$  sul sistema  $A$ . Per semplicità, ipotizziamo che il sistema  $AB$  si trovi in uno stato puro (ma il ragionamento è valido anche per stati misti).

- **Per uno stato separabile**, una misura fatta su  $A$  non cambia mai la nostra conoscenza su  $B$ . Con questa affermazione si intende che la probabilità a noi nota di misurare un determinato valore per  $P_B$  non varia dopo aver misurato l'osservabile

$P_A$ . Possiamo scrivere infatti

$$|\psi_{AB}\rangle = |\varphi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle = \sum_i a_i |\phi_i^A\rangle \otimes \sum_j b_j |\phi_j^B\rangle \quad (2.15)$$

e si nota come sia prima che dopo l'aver osservato il sistema  $A$  in uno dei ket  $|\phi_i^A\rangle$ , la probabilità di trovare il sistema in uno dei ket  $|\phi_j^B\rangle$  rimanga sempre pari a  $b_j$ .

- **Per uno stato non separabile**, una misura fatta su  $A$  può variare la nostra conoscenza su  $B$ . La probabilità a noi nota di misurare un determinato valore per  $P_B$  può infatti cambiare dopo aver misurato l'osservabile  $P_A$ . Questa proprietà diventa estremamente evidente quando gli stati  $|i_A\rangle \otimes |i_B\rangle$  della decomposizione di Schmidt di  $|\psi_{AB}\rangle$  sono degli autostati di  $P_{AB}$ :

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_i^B\rangle \quad (2.16)$$

In questo caso una misura di  $P_A$  su  $A$  determina totalmente il valore dell'osservabile  $P_B$  per  $B$ , dato che osservare il sistema  $A$  in un autostato  $|\phi_k^A\rangle$  di  $P_A$  implica necessariamente che il sistema  $B$  si trovi nell'autostato corrispondente  $|\phi_k^B\rangle$  dell'operatore  $P_B$ .

### 2.2.3 Come determinare se uno stato è entangled

Considerato un sistema bipartito  $AB$  che si trova in uno stato qualsiasi (puro o anche misto), ci chiediamo se è possibile stabilire qualora lo stato del sistema sia entangled o meno noto soltanto l'operatore densità  $\rho^{AB}$  associato al sistema. Un risultato che ci viene in aiuto è il criterio di Peres-Horodecki (spesso indicato anche come criterio PPT, dall'inglese 'Partial Positive Transpose'), che viene presentato e dimostrato di seguito.

#### Lemma - Criterio di Peres-Horodecki.

*Una condizione necessaria affinché lo stato di un sistema bipartito  $AB$  sia separabile è che il trasposto parziale del suo operatore densità rispetto ad uno dei due sottosistemi  $A$  o  $B$  sia un operatore positivo.*

*Dimostrazione.*

Se lo stato del sistema bipartito è separabile, per definizione può essere scritto come

$$\rho^{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$$

In questo caso, l'operatore trasposto parziale di  $\rho^{AB}$  rispetto al sistema  $B$  è dato semplicemente da

$$(\rho^{AB})^{T_B} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes (\rho_i^B)^T$$

Dato che l'operazione di trasposizione di una matrice lascia invariati i suoi autovalori, lo spettro di  $(\rho_i^B)^T$  è lo stesso di  $\rho_i^B$ , e dunque  $(\rho_i^B)^T$  è un operatore positivo.

Di conseguenza, anche  $(\rho^{AB})^{T_B}$  è positivo.

Lo stesso ragionamento può essere poi ripetuto considerando l'operazione di trasposizione parziale rispetto al sistema  $A$ .

□

N.B. - TRASPOSTO PARZIALE DI UN OPERATORE DENSITÀ

L'operazione di trasposizione parziale, analogamente a quella di traccia parziale, consiste nella usuale operazione di trasposizione di un operatore, ma ristretta allo spazio degli operatori di uno soltanto dei due sottosistemi. Nello specifico, considerato un operatore densità qualsiasi

$$\rho^{AB} = \sum_{ijkl} p_{kl}^{ij} |i\rangle \langle j| \otimes |k\rangle \langle l|$$

con  $|i\rangle, |j\rangle \in \mathcal{H}_A$  e  $|k\rangle, |l\rangle \in \mathcal{H}_B$ , il suo trasposto parziale rispetto al sistema  $B$  è dato da

$$(\rho^{AB})^{T_B} = \sum_{ijkl} p_{kl}^{ij} |i\rangle \langle j| \otimes (|k\rangle \langle l|)^T = \sum_{ijkl} p_{kl}^{ij} |i\rangle \langle j| \otimes |l\rangle \langle k|$$

Questo criterio stabilisce in generale soltanto una proprietà che uno stato separabile di un sistema bipartito deve necessariamente soddisfare, ma non fornisce una condizione sufficiente per stabilire se uno stato è separabile. Tuttavia, se nel calcolare il trasposto parziale dell'operatore densità di un sistema in esame si ottenesse un operatore non positivo, il criterio di Peres-Horodecki permetterebbe di escludere la possibilità che lo stato considerato sia separabile, implicando quindi direttamente che lo stato considerato sia entangled.

La famiglia Horodecki ha dimostrato poi [26] che il criterio PPT diventa anche sufficiente per operatori densità in  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ , dove i pedici indicano la dimensione degli spazi di Hilbert dei ket di stato dei due sottosistemi ( $A$  o  $B$  indistintamente).

Oltre al criterio di Peres-Horodecki, sono stati ideati numerosi altri metodi, di validità più o meno generale, per stabilire se un determinato stato di un sistema bipartito è entangled oppure no. Uno tra questi, di grande utilità negli esperimenti, è quello che sfrutta le cosiddette 'entanglement witnesses', ovvero degli osservabili  $W$  che rispettino

le condizioni (i) di avere almeno un autovalore negativo e (ii) di avere un valore medio non negativo negli stati puri di  $AB$  che sono il prodotto di un ket di  $A$  e un ket di  $B$ . Questi particolari osservabili possono essere utilizzati come discriminante per la presenza di entanglement in quanto, come segue direttamente dalle loro proprietà (i) e (ii), hanno valor medio negativo su uno stato del sistema complessivo  $AB$  se e soltanto se questo è uno stato entangled.

In formule,

$$\text{Tr}[W\rho^{AB}] < 0 \iff \rho^{AB} \text{ è uno stato entangled}$$

Per una rassegna completa sulle tecniche che permettono di riconoscere gli stati entangled si rimanda all'articolo [27], il quale fornisce anche un quadro generale sul fenomeno dell'entanglement molto più dettagliato di quello presentato in questo testo.

## Capitolo 3

# Sondare il campo gravitazionale tramite sistemi entangled

Torniamo ora a focalizzare la nostra attenzione sull'argomento centrale di questa tesi, ossia la ricerca di una tecnica sperimentale adatta a sondare la natura quantistica della gravità, e, sfruttando l'impianto teorico esposto nel capitolo precedente, analizziamo come il fenomeno dell'entanglement possa essere utilizzato per questo scopo, secondo quanto proposto negli articoli di Marletto-Vedral [5] e Bose et al. [6].

### 3.1 Principio di funzionamento

L'obiettivo è analogo a quello già proposto da Feynman nel suo esperimento mentale presentato a Chapel Hill (si veda il Capitolo 1), ovvero studiare il campo gravitazionale generato da una massa posta in uno stato di sovrapposizione quantistica tra due diverse posizioni, anche se il metodo per testare lo stato del campo è concettualmente diverso: invece di misurare direttamente il valore del campo usando una massa di prova, si lascia interagire la prima massa con una seconda, anch'essa posta in uno stato di sovrapposizione spaziale, e si deducono le proprietà del campo in modo indiretto, misurando l'effetto che questo produce sulle due masse.

In particolare, ciò che gli scienziati mirano a verificare è se le due masse, poste in sovrapposizione quantistica e inizialmente isolate tra loro, possano diventare entangled attraverso la sola mediazione del campo gravitazionale da esse prodotto. Secondo gli autori dei due articoli infatti, misurare l'entanglement implicherebbe che il campo gravitazionale possieda delle caratteristiche quantistiche, o meglio, non classiche, come la

possibilità di esistere contemporaneamente in una sovrapposizione di più stati.

Questa tesi, attorno alla quale sia l'esperimento di Marletto-Vedral che quello di Bose et al. sono stati progettati, e su cui fondano tutta la loro credibilità, è stata dimostrata in modo diverso negli articoli pubblicati dai due gruppi, partendo da alcune assunzioni comuni ma sfruttando tecniche profondamente differenti: Bose et al. hanno utilizzato il formalismo e i risultati della teoria dell'informazione quantistica, mentre Marletto e Vedral hanno costruito tutta la loro argomentazione adoperando il linguaggio della nuova 'constructor theory', con l'obiettivo di presentare una prova che fosse il più generale possibile (per alcune informazioni generali sulla constructor theory si veda il box di approfondimento a fine paragrafo).

Oltre a differenze nella procedura di dimostrazione, l'utilizzo di due approcci di tipo diverso ha comportato anche delle leggere differenze nell'interpretazione data dagli autori alla tesi stessa; entrambi i gruppi garantiscono che a seguito dell'osservazione dell'entanglement indotto dal campo gravitazionale si potrebbe escludere l'ipotesi che la gravità sia un campo di tipo classico, ma la descrizione esatta di che cosa gli autori intendano per campo classico (e quindi quali proprietà della gravità possano essere effettivamente escluse tramite questo tipo di esperimenti) è formalmente diversa nei due articoli. È opportuno comunque precisare che, guardando oltre alle differenze dovute alla scelta di un formalismo diverso, numerose sono le analogie tra le conclusioni che seguono dalle due dimostrazioni, ed in particolare c'è un accordo generale sulle teorie di gravità quantistica che possono essere falsificate tramite gli esperimenti proposti.

Dopo la pubblicazione di una prima versione sintetica delle dimostrazioni da parte dei due gruppi, contenuta all'interno degli articoli di presentazione degli esperimenti [5, 6]), dall'interno della comunità scientifica sono stati sollevati alcuni dubbi e critiche sulla solidità degli argomenti portati avanti dagli autori per dimostrare la loro tesi (si vedano ad esempio [28–30]). Diverse delle obiezioni più comuni sono state raccolte da Marletto e Vedral in un unico articolo [31], accompagnate ciascuna da una breve replica chiarificatrice; per le critiche tecnicamente più complesse invece, i due scienziati hanno scelto di pubblicare articoli di risposta dedicati (si riporta come esempio l'articolo [32], scritto in risposta a [28]).

Per mettere a tacere poi altri eventuali dubbi, entrambi i gruppi di ricerca hanno in seguito presentato anche una versione rivista ed estesa della propria dimostrazione [33, 34], completa di una spiegazione dettagliata delle assunzioni fatte e delle proprietà verificate.

In questo lavoro riportiamo in modo esteso soltanto la versione della dimostrazione fatta dal gruppo di Bose et al., in quanto sfrutta un formalismo e dei metodi di ragionamento più simili a quelli comunemente utilizzati in meccanica quantistica. Nel descrivere la dimostrazione verrà prima messo in chiaro l'esatto significato della affermazione da

provare, spiegando in modo accurato tutte le assunzioni su cui si basa e il significato dei termini che compaiono in essa, secondo quanto riportato in [34].

Per concludere questa analisi, verranno confrontati in modo qualitativo l'approccio al problema portato avanti dal gruppo di Bose e quello utilizzato da Marletto e Vedral, evidenziando analogie e differenze tra i risultati teorici dimostrati dai due gruppi. Così facendo, si otterrà un quadro completo sulle implicazioni deducibili attraverso gli esperimenti proposti riguardo alla natura del campo gravitazionale, in base al pensiero di uno e dell'altro gruppo di autori.

#### N.B. - CONSTRUCTOR THEORY

La constructor theory è un programma che mira a riformulare le leggi fondamentali della fisica in modo tale che queste siano completamente esprimibili soltanto tramite affermazioni su ciò che un sistema fisico può o non può fare.

A proporre questo nuovo approccio è stato per primo il fisico britannico David Deutsch [35], sentendo la necessità di abbandonare il metodo tradizionale con cui la fisica analizza e spiega i fenomeni naturali, in quanto ad oggi incapace di descrivere appieno alcune entità del mondo naturale come l'informazione, il calore o gli esseri viventi.

Chiara Marletto, assieme ad altri fisici appartenenti a centri di ricerca collocati in diverse città del mondo, tra cui Oxford, Torino e Singapore, hanno accolto con interesse l'idea presentata da Deutsch e hanno contribuito al suo sviluppo, applicandola inoltre in numerosi settori di interesse. Recentemente, Marletto e Vedral hanno ad esempio utilizzato la constructor theory, nella sua branca specializzata a trattare problemi di teoria dell'informazione, per dare una definizione formale di sistema 'non-classico' e dimostrare poi che un mediatore di informazione capace di portare due sistemi fisici in uno stato entangled deve essere necessariamente non-classico.

### 3.1.1 Spiegazione dettagliata della tesi e dimostrazione

Come già specificato, la trattazione seguente è tratta dai lavori del gruppo di Bose e collaboratori, e principalmente dal loro articolo più recente [34].

#### **Teo. - Impossibilità di generare entanglement attraverso un mediatore classico.**

*Assumendo la località delle interazioni fisiche, e in assenza di curve spaziotemporali chiuse di tipo tempo, un mediatore classico non può generare entanglement tra due sistemi fisici quantistici che inizialmente si trovano in uno stato separabile.*

Un lettore che ha familiarità con il campo della teoria dell'informazione quantistica riconoscerà questa tesi come diretta conseguenza del noto principio secondo cui è

impossibile creare entanglement in due sistemi separabili soltanto tramite LOCC (Local Operations and Classical Communication). Proviamo qui a verificare la tesi senza invocare in modo diretto tale principio.

Prima di procedere con la dimostrazione, ci soffermiamo a descrivere nel dettaglio il significato dei vari termini presenti nell'enunciato del teorema:

1. **Località delle interazioni fisiche:** in modo non formale, con questa affermazione si intende che due sistemi fisici possono interagire soltanto se si trovano nello stesso punto spaziotemporale. Utilizzando il linguaggio della teoria dei campi classica, questo concetto può essere espresso imponendo che nella Lagrangiana non ci siano termini che accoppiano il valore di un certo campo  $\phi_1(\vec{x}, t)$  con quello di un altro campo  $\phi_2(\vec{y}, t)$ , se  $\vec{y} \neq \vec{x}$ .
2. **Curva spaziotemporale chiusa di tipo tempo:** una curva spaziotemporale chiusa di tipo tempo (spesso indicata come CTC) è una linea di universo chiusa nello spazio-tempo. Riuscendo a percorrere completamente questo tipo di linea di universo, un oggetto, pur continuando a viaggiare nel futuro, tornerebbe ad un certo punto nel suo passato. Sono state trovate soluzioni delle equazioni di campo di Einstein che permettono l'esistenza di linee di universo di questo tipo (si veda ad esempio [36]), anche se è stato ipotizzato che incorporando anche le leggi della meccanica quantistica nella descrizione del problema potrebbe diventare impossibile per un sistema fisico percorrere tali traiettorie nello spazio-tempo.
3. **Mediatore classico:** con mediatore classico Bose e collaboratori intendono un campo che ha per ogni punto dello spazio-tempo un set di valori possibili ben definiti, indicizzabili tramite un indice  $j$ , ciascuno con una probabilità  $p_j$  di realizzarsi, che non possono però coesistere in una sovrapposizione tra di loro.

L'esigenza di definire il campo in un punto non tramite un singolo valore, ma con un set di valori possibili, permette di includere una descrizione statistica del campo, utile ad esempio nel caso in cui non sia noto con esattezza il valore del campo in un punto. È importante tuttavia enfatizzare che questa descrizione statistica del campo non lo rende un oggetto quantistico. La trattazione statistica di un sistema classico permette che il sistema abbia più di una configurazione possibile, ma ognuna di queste configurazioni evolve sempre in modo indipendente dalle altre in quanto le alternative non sono realizzate davvero contemporaneamente nel sistema fisico in esame (si pensi al concetto di ensemble statistico); in un sistema quantistico invece, è possibile che più configurazioni siano presenti contemporaneamente prima di un processo di misura, tanto che è possibile farle interferire tra loro.

Per precisare la definizione data di campo classico, si impone anche esplicitamente che non sia possibile costruire uno spazio di Hilbert degli stati del campo, escludendo anche stati comuni del campo assieme ad un altro sistema fisico (ovvero

stati del tipo  $\sum_j \sqrt{p_j} |j\rangle h_{\mu\nu}^j$ , dove  $h_{\mu\nu}^j$  sono i possibili valori del campo, preso come oggetto tensoriale solo per fare un esempio, e  $|j\rangle$  sono gli stati dell'altro sistema fisico considerato).

*Dimostrazione.*

In questa dimostrazione, per mettere in evidenza, ove presenti, gli operatori che agiscono nello spazio di Hilbert dei ket di stato quantistici, li indicheremo con l'usuale simbolo  $\hat{\cdot}$ .

Consideriamo due sistemi fisici quantistici  $A$  e  $B$ , che inizialmente si trovano in un generico stato separabile  $|\psi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$  e non interagiscono tra loro. Seguendo la prescrizione data dalla teoria dell'informazione quantistica (si veda ad esempio [37]), rappresentiamo l'insieme delle operazioni quantistiche<sup>1</sup> fatte singolarmente su ciascuno dei due sistemi isolati tramite un cosiddetto 'superoperatore', o equivalentemente tramite un insieme di operatori  $\hat{S}_i$  che rispettino appropriate condizioni<sup>2</sup>. Indichiamo in particolare con  $\hat{A}_i$  le operazioni fatte sul sistema  $A$  e con  $\hat{B}_j$  quelle fatte sul sistema  $B$ .

Se ammettiamo poi la presenza di un mediatore classico tramite cui  $A$  e  $B$  possono interagire, l'esistenza di questo canale porta ad uno scambio di informazione tra i due sistemi, che causa una correlazione nelle operazioni fatte su  $A$  e su  $B$ . Per tenere conto della correlazione, aggiungiamo un ulteriore indice  $k$  comune agli operatori che agiscono su  $A$  e  $B$ . Nel complesso, lo stato dei due sistemi  $A$  e  $B$  (rappresentato tramite l'operatore densità) evolve come:

$$\rho^{AB}(t) = \sum_{ijk} p(i) p(j) p(k) \hat{A}_{i,k}(t) |\psi_A\rangle \langle \psi_A| \hat{A}_{i,k}^\dagger(t) \otimes \hat{B}_{j,k}(t) |\phi_B\rangle \langle \phi_B| \hat{B}_{j,k}^\dagger(t)$$

dove  $p(i)$  e  $p(j)$  rappresentano le probabilità degli operatori di agire sui sistemi  $A$  e  $B$ , mentre  $p(k)$  descrive la probabilità che il campo di interazione tra  $A$  e  $B$  si trovi in una determinata configurazione. Definendo

$$\rho_k^A(t) \equiv \sum_i p(i) \hat{A}_{i,k}(t) |\psi_A\rangle \langle \psi_A| \hat{A}_{i,k}^\dagger(t)$$

$$\rho_k^B(t) \equiv \sum_j p(j) \hat{B}_{j,k}(t) |\phi_B\rangle \langle \phi_B| \hat{B}_{j,k}^\dagger(t)$$

---

<sup>1</sup>Con il termine operazione quantistica si intende un qualsiasi processo di misura fatto su  $A$  e  $B$ , oltre anche alla semplice evoluzione dei due sistemi in assenza di un osservatore esterno.

<sup>2</sup>Se un superoperatore descrive un insieme di processi di misura, il set di operatori  $\hat{S}_i$  che lo rappresenta deve verificare la condizione  $0 \leq \sum_i \hat{S}_i^\dagger \hat{S}_i < 1$ , mentre nel caso in cui il superoperatore specifichi l'evoluzione temporale del sistema in assenza di alcuna operazione di misura, deve valere  $\sum_i \hat{S}_i^\dagger \hat{S}_i = 1$ .

è immediato mostrare che lo stato descritto dalla matrice densità  $\rho^{AB}(t)$  appena trovata è uno stato separabile (della forma generale (2.14)):

$$\rho^{AB}(t) = \sum_k p(k) \rho_k^A(t) \otimes \rho_k^B(t)$$

Dunque, due sistemi quantistici  $A$  e  $B$  che interagiscono soltanto attraverso un mediatore classico non possono diventare entangled.

□

Per trasportare la dimostrazione appena proposta al caso di interesse in cui i sistemi  $A$  e  $B$  sono due masse che interagiscono soltanto gravitazionalmente, si può immaginare che l'informazione classica scambiata tra  $A$  e  $B$  sia contenuta nelle perturbazioni del campo gravitazionale dovute ad una variazione della distribuzione spaziale delle masse. Nel caso dei modelli di gravità semiclassica, queste perturbazioni sarebbero calcolabili come una qualche funzione del valore di aspettazione del tensore energia-impulso, oppure semplicemente come funzione della variazione nella posizione delle masse nel caso in cui si ipotizzi un collasso spontaneo dei due sistemi quantistici  $A$  e  $B$ , come previsto da alcuni modelli [38].

In base alla definizione data di mediatore classico e alla procedura di dimostrazione utilizzata, osservare un fenomeno di entanglement tra due masse in laboratorio indotto soltanto dal campo gravitazionale permetterebbe quindi di escludere tutti questi modelli di gravità semiclassica, inclusi quelli in cui la materia subisce fenomeni di collasso e genera un campo gravitazionale classico e stocastico.

### *Confronto con la trattazione fatta da Marletto e Vedral*

Nel lavoro [33] di Marletto e Vedral, la tesi che viene dimostrata è formalmente analoga a quella presentata in questo capitolo. Ciò che cambia radicalmente è il modo in cui viene definito cosa si intende per sistema classico e per il concetto di località, in quanto si utilizza la terminologia propria della constructor theory, fondata su concetti come quello di 'task' o di 'costruttore'. Gli autori hanno scelto di adottare questo approccio, rispetto ad uno più convenzionale come quello scelto da Bose e collaboratori, con la convinzione che per poter trarre conclusioni fondate sulla natura del campo gravitazionale non ci si debba affidare ad un formalismo profondamente radicato in una specifica teoria fisica (come ad esempio quello della meccanica quantistica) per descrivere l'evoluzione del sistema in esame.

Volendo riportare i risultati ottenuti da Marletto e Vedral nel linguaggio della meccanica quantistica, così da poter fare un confronto con le conclusioni dimostrate da Bose et al.,

*pagando però il prezzo di perdere la loro generalità*, possiamo affermare che l'osservazione dell'entanglement tra le due masse indotto dal campo gravitazionale implicherebbe che la gravità possieda almeno due osservabili il cui valore non può essere contemporaneamente misurato con arbitraria precisione, rappresentabili nel formalismo quantistico tramite operatori non commutanti.

Questa conclusione è strettamente correlata con quella trovata dal gruppo di Bose, anche se non esattamente coincidente con essa. Come per il risultato trovato da Bose et al., anche quello provato da Marletto e Vedral permetterebbe certamente di falsificare le teorie di gravità semiclassica. In ogni caso tuttavia, verificare che è possibile generare entanglement tra due masse soltanto attraverso la loro interazione gravitazionale non sarebbe una condizione sufficiente per poter discriminare tra le varie teorie di gravità quantistiche esistenti, come la gravità quantistica a loop o la teoria delle stringhe.

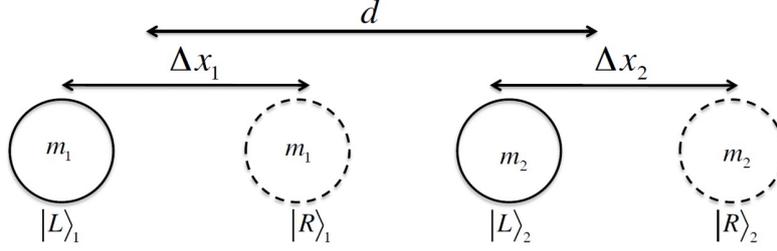
### 3.1.2 Come la gravità quantistica genera entanglement

A complemento della dimostrazione riportata nel precedente paragrafo sull'impossibilità di generare entanglement attraverso un mediatore classico, in questa sezione viene presentato un modello schematico che descrive come, al contrario, un campo gravitazionale quantistico *sia* in grado di portare due masse in uno stato entangled.

Nello specifico, consideriamo due masse che inizialmente si trovano in uno stato separabile e che vengono entrambe mantenute per un tempo  $\tau$  in uno stato di sovrapposizione tra due configurazioni spazialmente distinte  $|L\rangle$  e  $|R\rangle$ , e studiamo come queste possano diventare entangled tramite la sola mediazione del campo gravitazionale da esse prodotto, nel caso in cui tale campo sia trattabile come un campo quantistico (o meglio, non-classico, secondo la definizione di campo classico data in precedenza). Per ciascuna delle due masse, approssimate come puntiformi, immaginiamo che gli stati  $|L\rangle$  e  $|R\rangle$  corrispondano a due pacchetti d'onda gaussiani localizzati, con ampiezza molto minore della separazione spaziale  $\Delta x$  tra i loro centri, così da poter assumere con buona approssimazione che  $\langle L|R\rangle = 0$ . Ipotizziamo inoltre che la distanza  $d$  tra le posizioni medie occupate dalle due masse sia tale che, anche nella configurazione in cui si trovano alla distanza minima possibile ( $d - \Delta x$ ), la forza a corto range di Casimir-Polder presente tra di esse sia trascurabile. Si veda la Figura 3.1 per una rappresentazione grafica del sistema fisico considerato.

Etichettando le due masse tramite gli indici 1 e 2, lo stato iniziale del sistema complessivo è dato da:

$$|\Psi(t=0)\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle_1 + |R\rangle_1) \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle_2 + |R\rangle_2) \quad (3.1)$$



**Figura 3.1:** Rappresentazione schematica delle due masse interagenti in stato di sovrapposizione spaziale. La figura è presa da [6].

Per via della differente distanza tra i centri dei pacchetti d'onda, l'intensità dell'interazione gravitazionale tra le due masse  $m_1$  ed  $m_2$  è diversa se queste si trovano entrambe nello stesso tipo di stato ( $|L\rangle$  oppure  $|R\rangle$ ) rispetto ai due casi in cui una massa si trova nello stato  $|L\rangle$  e l'altra nello stato  $|R\rangle$ ; di conseguenza l'evoluzione del sistema è diversa a seconda della configurazione relativa delle due masse. Per questo motivo, se il campo gravitazionale è non classico, e quindi in grado di esistere in uno stato di sovrapposizione di più valori, le diverse componenti che sono presenti in sovrapposizione quantistica nel ket iniziale  $|\Psi(t=0)\rangle_{12}$  evolvono accumulando una fase differente, e il ket di stato del sistema al tempo  $\tau$  diventa

$$|\Psi(t=\tau)\rangle_{12} = \frac{1}{2}(e^{i\phi_{LL}} |L\rangle_1 |L\rangle_2 + e^{i\phi_{LR}} |L\rangle_1 |R\rangle_2 + e^{i\phi_{RL}} |R\rangle_1 |L\rangle_2 + e^{i\phi_{RR}} |R\rangle_1 |R\rangle_2) \quad (3.2)$$

dove, usando l'approssimazione Newtoniana della gravità, le fasi sono date da<sup>3</sup>

$$\phi_{LL} = \phi_{RR} \equiv \phi = \frac{Gm_1m_2\tau}{\hbar d} \quad \phi_{LR} = \frac{Gm_1m_2\tau}{\hbar(d+\Delta x)} \quad \phi_{RL} = \frac{Gm_1m_2\tau}{\hbar(d-\Delta x)} \quad (3.3)$$

Provando a separare i ket di stato della massa 1 da quelli della massa 2, riscriviamo l'espressione per  $|\Psi(t=\tau)\rangle_{12}$  come

$$|\Psi(t=\tau)\rangle_{12} = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \left\{ |L\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle_2 + e^{i\Delta\phi_{LR}} |R\rangle_2) + |R\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\Delta\phi_{RL}} |L\rangle_2 + |R\rangle_2) \right\} \quad (3.4)$$

avendo messo in evidenza le fasi relative

$$\Delta\phi_{LR} \equiv \phi_{LR} - \phi \quad \Delta\phi_{RL} \equiv \phi_{RL} - \phi$$

<sup>3</sup>Per calcolare lo sfasamento si può utilizzare in questo caso l'approssimazione  $\phi = \frac{E\tau}{\hbar}$ , con E pari all'energia potenziale gravitazionale di interazione tra le due masse scritta in forma Newtoniana.

A meno che i due ket di stato (relativi alla massa 2)

$$|\alpha\rangle_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle_2 + e^{i\Delta\phi_{LR}} |R\rangle_2)$$

$$|\beta\rangle_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\Delta\phi_{RL}} |L\rangle_2 + |R\rangle_2)$$

non siano uguali tra loro (il che accade soltanto nei casi particolari per cui  $\Delta\phi_{LR} + \Delta\phi_{RL} = 2n\pi$ , con  $n$  intero non negativo), allora è facile osservare che il sistema complessivo si trova in uno stato entangled

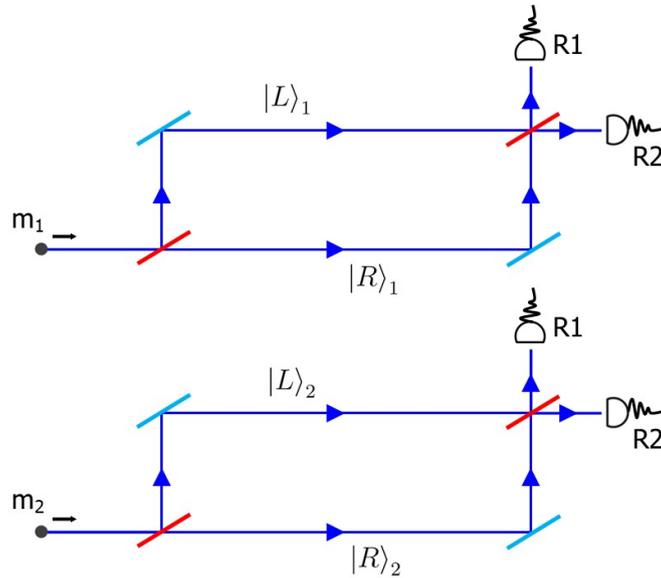
$$|\Psi(t = \tau)\rangle_{12} = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}\{|L\rangle_1 |\alpha\rangle_2 + |R\rangle_1 |\beta\rangle_2\} \quad (3.5)$$

Considerando come valore per le masse il più grande per cui si riesca ancora a mantenerle in una sovrapposizione di stati spazialmente separati, dell'ordine di  $10^{-14}$  kg secondo le attuali realistiche proposte sperimentali [39], la minima distanza a cui le masse possono avvicinarsi perché la forza di Casimir-Polder<sup>4</sup> rimanga di un ordine di grandezza inferiore rispetto all'intensità dell'interazione gravitazionale è pari a  $d - \Delta x \approx 200 \mu\text{m}$  (avendo assunto, per poter fare una stima, che le masse siano microsfele di diamante con costante dielettrica  $\epsilon \sim 5.7$  e raggio  $R \sim 1 \mu\text{m}$ ). In queste condizioni sperimentali, si riesce ad ottenere uno sfasamento  $\phi_{RL}$  di ordine circa uno se si riescono a mantenere le due masse in uno stato di sovrapposizione per un tempo  $\tau \sim 2$  s. Uno sfasamento di questa portata genera una differenza tra i ket  $|\alpha\rangle_2$  e  $|\beta\rangle_2$  non trascurabile, e quindi un 'grado' significativo di entanglement tra le masse.

## 3.2 Implementazione sperimentale

Dopo aver compreso il principio adottato da Marletto-Vedral e Bose et al. per riuscire a determinare se la gravità sia un campo classico o meno, studiamo ora come questo risultato sia stato adoperato nelle proposte di esperimenti fatte dai due gruppi. Nel primo paragrafo viene illustrato sinteticamente lo schema di funzionamento dell'apparato sperimentale come pensato da uno e dall'altro gruppo di autori, mentre nella parte successiva si analizza più nel dettaglio la proposta fatta da Bose e collaboratori, discutendo in modo specifico le tecniche coinvolte nelle varie fasi dell'esperimento.

<sup>4</sup>Secondo quanto riportato nell'articolo [6], l'intensità della forza di Casimir-Polder tra le due masse nella loro configurazione a distanza minima può essere approssimata come  $\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{23\hbar c R^6}{4\pi(d-\Delta x)^7} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2$



**Figura 3.2:** Diagramma dell'esperimento proposto da Marletto e Vedral per sondare la natura del campo gravitazionale, in cui si possono riconoscere i due interferometri di Mach-Zender previsti nella prova. I componenti in azzurro rappresentano gli specchi degli interferometri, mentre quelli in rosso sono i beam splitter. I rivelatori sono indicati come R1 ed R2.

### 3.2.1 Due possibili schemi di funzionamento

#### La proposta di Marletto e Vedral

Nell'esperimento proposto da Marletto e Vedral, due masse inizialmente localizzate nello spazio vengono inviate ciascuna in un interferometro di Mach-Zender, nel quale la loro funzione d'onda viene separata spazialmente nei due percorsi possibili e viene poi fatta ricombinare. I due interferometri sono posti uno a fianco all'altro, come mostrato in Figura 3.2, in modo tale che le masse si trovino sempre soggette allo stesso potenziale gravitazionale terrestre, e quindi tale potenziale non contribuisca allo sfasamento relativo delle loro funzioni d'onda (per realizzare questa condizione possiamo immaginare ad esempio di disporre i due interferometri su un piano parallelo alla superficie terrestre).

Per tutto il tempo in cui le due masse si trovano a viaggiare parallelamente l'una rispetto all'altra all'interno dei due interferometri, la situazione sperimentale è completamente analoga a quella descritta nel modello semplificato del paragrafo 3.1.2: le due masse si trovano ciascuna in uno stato di sovrapposizione tra due diverse configurazioni spazialmente separate, che corrispondono ai due percorsi dell'interferometro, e l'interazione gravitazionale tra le masse è diversa a seconda del percorso considerato.

Indicando infatti, per ciascuna massa, con  $|L\rangle$  il ket di stato che rappresenta il caso in cui la massa viene deviata dal beam splitter iniziale, mentre con  $|R\rangle$  il ket dello stato che descrive la situazione in cui la massa passa nell'altro percorso possibile (si veda la Figura 3.2), allora lo stato complessivo delle due masse prima che queste entrino nell'ultimo beam splitter è dato esattamente dalla formula (3.4).

La probabilità di rivelare una delle due masse a valle del secondo beam splitter può essere calcolata semplicemente facendo la somma con pesi uguali delle probabilità che si avrebbero nei due casi in cui l'altra massa percorra in modo definito uno dei due bracci del proprio interferometro<sup>5</sup>. Facendo ancora riferimento alla Figura 3.2, le probabilità di osservazione di ciascuna massa sui due rivelatori sono date da

$$p_1 = \frac{1}{2} \left( \sin^2 \frac{\Delta\phi_{LR}}{2} + \sin^2 \frac{\Delta\phi_{RL}}{2} \right) \quad p_2 = \frac{1}{2} \left( \cos^2 \frac{\Delta\phi_{LR}}{2} + \cos^2 \frac{\Delta\phi_{RL}}{2} \right) \quad (3.6)$$

dove  $p_1$  è la probabilità di osservazione sul rivelatore 1 e  $p_2$  è la probabilità di osservazione sul rivelatore 2. Queste probabilità possono essere facilmente modulate variando la distanza tra gli interferometri o la lunghezza dei loro bracci. Nel caso in cui il campo gravitazionale sia classico, e quindi non capace di generare entanglement, si avrebbe  $\Delta\phi_{RL} = \Delta\phi_{LR} = 0$  e le masse andrebbero incontro ad un ordinario esperimento di interferenza, venendo osservate sempre e soltanto dal rivelatore 2.

## La proposta di Bose e collaboratori

L'esperimento pensato dal gruppo di Bose è simile a quello di Marletto e Vedral, in quanto prevede anch'esso l'utilizzo di due interferometri disposti uno a fianco all'altro, ma differisce da questo per il tipo di interferometri adoperati. Invece di realizzare due interferometri di tipo Mach-Zender, che richiedono specchi e beam splitter, Bose e collaboratori hanno ritenuto più conveniente avvalersi di due apparati di Stern-Gerlach completi, aggiungendo uno spin alle masse e agendo su di esso tramite campi magnetici per poter separare e ricombinare le masse.

Un apparato di Stern-Gerlach completo prevede una parte iniziale identica a quella di un apparato di Stern-Gerlach tradizionale, in cui si sfrutta un gradiente di campo magnetico per separare particelle aventi vettore di spin uguale in modulo ma con terza componente opposta, ma invece di osservare le particelle tramite uno schermo come previsto nello schema usuale, a valle di questa prima regione si inverte il gradiente del campo magnetico

---

<sup>5</sup>Si ricorda che nel caso di un interferometro di Mach-Zender in cui il ramo superiore risulta sfasato rispetto all'altro di una quantità  $\Delta\phi$ , le probabilità di conteggio sui due rivelatori sono  $p_1 = \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}$  e  $p_2 = \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2}$ .

per frenare il moto divergente dei due fasci di particelle e farli ricombinare. Nel dettaglio, l'interferometro previsto nell'esperimento del gruppo di Bose comprende tre fasi:

1. Dopo aver preparato una massa localizzata spazialmente nello stato  $|C\rangle$  e con spin up o down con uguale probabilità, la sua funzione d'onda viene separata agendo sul suo spin tramite un gradiente omogeneo di campo magnetico. In questa prima fase la funzione d'onda della massa evolve come:

$$|C\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|L, \uparrow\rangle + |R, \downarrow\rangle) \quad (3.7)$$

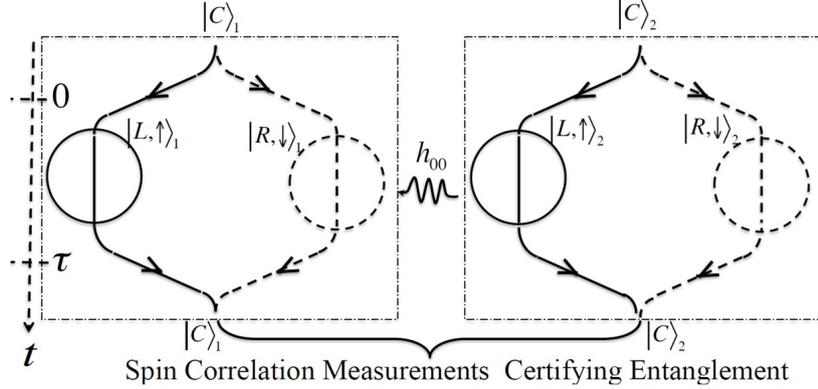
dove  $|L\rangle$  e  $|R\rangle$  rappresentano gli stati spazialmente separati in cui la funzione d'onda viene divisa.

2. Si mantiene la sovrapposizione coerente creata al punto precedente, frenando le due componenti della funzione d'onda (ad esempio invertendo momentaneamente il gradiente del campo magnetico), che tenderebbero a divergere, e lasciandole poi evolvere in assenza dell'azione di campi esterni per un tempo  $\tau$ .
3. Si utilizza di nuovo il campo magnetico per far riavvicinare le due componenti in sovrapposizione della funzione d'onda così da far riunire i due percorsi possibili. I due ket di stato in sovrapposizione subiscono quindi le seguenti trasformazioni unitarie:

$$|L, \uparrow\rangle \rightarrow |C, \uparrow\rangle, \quad |R, \downarrow\rangle \rightarrow |C, \downarrow\rangle \quad (3.8)$$

Posizionando due di questi interferometri uno a fianco all'altro in modo che le masse cadano verticalmente dentro di essi, e collocandoli sufficientemente vicini tra loro così che l'interazione gravitazionale tra le due masse sia non trascurabile (prestando attenzione a non avvicinarli troppo per evitare che la forza di Casimir-Polder diventi dominante), una volta terminata la fase 1 la funzione d'onda delle due masse si viene a trovare nel medesimo stato iniziale in cui sono le due masse dell'esempio semplificato riportato nel paragrafo 3.1.2, a patto di sostituire gli stati puramente spaziali  $|L\rangle$  ed  $|R\rangle$  dell'esempio con gli stati spaziali e di spin  $|L, \uparrow\rangle$  e  $|R, \downarrow\rangle$ . Si veda la Figura 3.3 per una rappresentazione grafica. Durante la fase 2, le due componenti della funzione d'onda di ciascuna delle due masse accumulano poi uno sfasamento differente per via della mutua interazione gravitazionale tra le masse, che è più o meno intensa a seconda della distanza relativa tra i bracci dei due interferometri su cui le componenti considerate delle funzioni d'onda stanno viaggiando. In questo stadio, il sistema evolve esattamente come presentato nell'esempio semplificato.

Supponendo quindi che il tempo  $\tau$  in cui le masse evolvono senza essere influenzate da campi esterni sia molto più grande di quello necessario per separare e ricombinare le



**Figura 3.3:** Schema dell'apparato sperimentale previsto nell'esperimento di Bose et al., in cui due interferometri completi di Stern-Gerlach sono disposti uno a fianco all'altro. L'evoluzione delle due masse all'interno degli interferometri, soggette alla loro mutua interazione gravitazionale, le porta in uno stato entangled. Il campo gravitazionale quantistico che genera l'entanglement è indicato in figura come  $h_{00}$ , dove  $h_{\mu\nu}$  sono deboli perturbazioni della metrica di Minkowski. La figura è presa da [6].

componenti delle funzioni d'onda delle due masse, al termine dello step 2 il ket di stato del sistema complessivo è uguale a quello dell'equazione (3.4) (a parte l'aggiunta degli spin). Con la fase 3 le componenti spaziali della funzione d'onda di ciascuna particella vengono ricombinate nello stato localizzato  $|C\rangle$ , ma la sovrapposizione di stati di spin rimane, portando allo stato finale

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t = t_{End})\rangle_{12} = & \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \left\{ |\uparrow\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_2 + e^{i\Delta\phi_{LR}} |\downarrow\rangle_2) \right. \\
 & \left. + |\downarrow\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\Delta\phi_{RL}} |\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2) \right\} |C\rangle_1 |C\rangle_2
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

È evidente come questo sia uno stato entangled nello spazio degli stati di spin delle due masse. Per verificare sperimentalmente la presenza dell'entanglement, gli autori hanno proposto di realizzare una serie di misure di correlazione sugli spin delle masse a valle dell'interferometro, al fine di determinare il valore dell'osservabile

$$\mathcal{W} = |\langle \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \rangle + \langle \sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \rangle|$$

In modo analogo al metodo di utilizzo delle 'entanglement witnesses', discusso nel paragrafo 2.2.3, se si trova sperimentalmente che  $\mathcal{W}$  supera l'unità, allora lo stato finale delle due masse è necessariamente entangled, e si prova di conseguenza che il campo gravitazionale non è un campo classico. Nel caso invece in cui l'esito delle misure porti ad avere  $\mathcal{W} \leq 1$ , gli autori precisano che non è possibile concludere se lo stato sia entangled o meno.

### 3.2.2 Studio approfondito della proposta di Bose

Dei due apparati sperimentali appena descritti, analizziamo più nel dettaglio quello proposto dal gruppo di Bose, per verificarne poi la fattibilità in base alle più recenti tecnologie sperimentali sviluppate nell'ambito degli interferometri di Stern-Gerlach.

Si è deciso in questo elaborato di approfondire solo uno dei due schemi di funzionamento in quanto questi risultano molto simili tra loro, e si è selezionata la proposta di Bose et al. rispetto a quella avanzata da Marletto e Vedral poiché presenta alcuni aspetti che la rendono nella pratica più conveniente dell'altra da implementare; tra questi, Bose e collaboratori citano (da [6, 40]):

- non è richiesto l'uso di una tecnica di imaging ad alta risoluzione
- per osservare gli spin non è necessario far evolvere la funzione d'onda delle masse a valle dell'interferometro, al contrario di quanto accade in un interferometro di tipo Mach-Zender. Ridurre il tempo necessario per portare a compimento ciascuna misura è un fattore molto importante quando si opera con oggetti macroscopici in stato di sovrapposizione quantistica, dati i loro elevati tassi di decoerenza.
- l'accumulazione dello sfasamento tra i due rami dell'interferometro può essere molto rapida, con un andamento proporzionale a  $T^3$

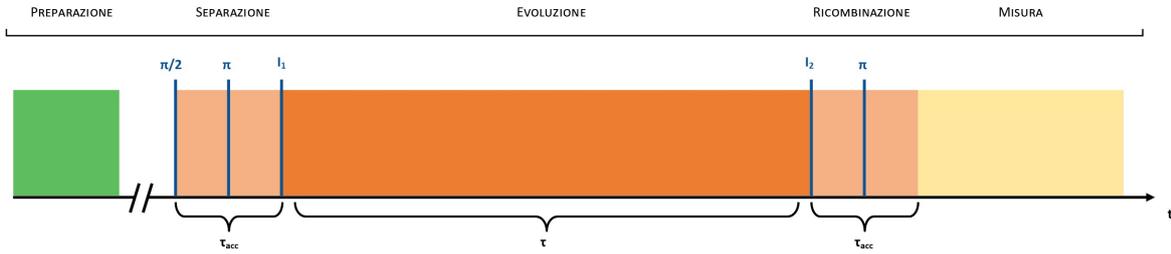
Nell'articolo [40] gli autori commentano brevemente anche sui vantaggi che un interferometro di Stern-Gerlach completo può portare rispetto ad un'ulteriore classe di interferometri ad onde di materia molto diffusi, ovvero quelli che utilizzano dei fasci laser impulsati per separare e ricombinare le masse. Al contrario di questi, un interferometro di Stern-Gerlach (i) non pone condizioni stringenti sulla struttura dei livelli energetici degli oggetti che vengono fatti interferire, in quanto è sufficiente soltanto che questi abbiano un momento magnetico e (ii) non sfrutta lo scattering di fotoni sulle masse per far separare le loro funzioni d'onda, limitando la produzione di calore e di conseguenza l'insorgere della decoerenza delle masse<sup>6</sup>.

Passiamo dunque a descrivere la proposta di Bose et al. in modo più dettagliato<sup>7</sup>, presentando passo per passo le operazioni da compiere sulle masse (per una comprensione più immediata si può fare riferimento al diagramma di Figura 3.4):

---

<sup>6</sup>Nonostante l'esperimento proposto da Bose et al. preveda l'utilizzo di alcuni laser, è possibile [40] realizzare interferometri completi di Stern-Gerlach anche limitandone quasi totalmente l'uso.

<sup>7</sup>La seguente trattazione si basa primariamente sulle due descrizioni dell'esperimento pubblicate da Bose e collaboratori, una in [6] e l'altra in [40]. Sono stati presi in considerazione le idee e i risultati da entrambe le fonti per garantire una descrizione che sia completa degli elementi fondamentali ma rimanga allo stesso tempo contenuta. Si rimanda ai due articoli per eventuali approfondimenti.



**Figura 3.4:** Diagramma che descrive in modo schematico le varie fasi dell'esperimento di Bose e collaboratori. Sono stati messi in evidenza gli impulsi laser utilizzati all'interno dell'interferometro, mentre non sono specificati i dettagli delle operazioni realizzate negli stadi di preparazione e misura. Gli impulsi indicati come  $I_1$  e  $I_2$  sono quelli che fanno transire le masse da uno stato di spin elettronico a uno di spin nucleare.

1. Operiamo con masse elettricamente neutre a bassa temperatura e pressione, per aumentare il loro tempo di coerenza (per una stima dei valori richiesti di pressione e temperatura si veda l'approfondimento sulla fattibilità dell'esperimento riportato più avanti nella trattazione). In ciascuna massa viene inserito uno spin elettronico per poterla controllare tramite campi magnetici esterni (si possono ad esempio utilizzare micro-diamanti contenenti nel loro reticolo una lacuna adiacente ad un atomo di azoto sostituzionale, i quali possono essere intrappolati in delle trappole magnetiche e raffreddati a temperature inferiori ad 1 K [41]). Supponiamo di lasciar cadere le due masse verticalmente dalle trappole in cui sono state raffreddate, separate da una distanza  $d \sim 450 \mu\text{m}$ , e utilizzando un impulso laser  $\pi/2$  prepariamo ciascuna massa in uno stato di sovrapposizione tra gli stati di spin up e down (ipotizziamo ad esempio che i due stati abbiano numero quantico magnetico di spin pari a  $m_S = \pm 1$ ).
2. Dal momento in cui una massa entra nell'interferometro, le due parti della sua funzione d'onda aventi spin opposto vengono accelerate in direzioni divergenti per via dell'interazione del proprio spin con il gradiente di campo magnetico presente. La sovrapposizione di stati di spin si trasforma quindi in una sovrapposizione anche spaziale.
3. A metà del tempo totale  $\tau_{acc}$  che le masse trascorrono in questa fase interagendo con il gradiente di campo magnetico, si utilizza un impulso  $\pi$  per indurre una inversione dello spin delle due componenti della loro funzione d'onda. Così facendo, lo stesso campo magnetico che prima accelerava le due parti dell'onda di materia, ora le fa decelerare, fino a frenare del tutto la loro divergenza all'istante  $t = \tau_{acc}$  (in alternativa, si può evitare di realizzare l'inversione di spin e cambiare il segno del gradiente del campo magnetico). La separazione spaziale raggiunta a questo punto

tra i due stati in sovrapposizione (della stessa massa) può essere stimata<sup>8</sup> come:

$$\Delta x = |x_R - x_L| \sim \frac{1}{2} a \tau_{acc}^2 = \frac{1}{2} \frac{g \mu_B \partial_x B}{m} \tau_{acc}^2 \quad (3.10)$$

dove  $a$  è il modulo dell'accelerazione subita dalle componenti delle funzioni d'onda delle masse per via del gradiente del campo magnetico,  $\mu_B$  è il magnetone di Bohr,  $g \sim 2$  il fattore-g dell'elettrone e  $\partial_x B$  il gradiente di campo magnetico nella direzione orizzontale  $x$ . Supponendo  $m \sim 10^{-14}$  kg,  $\partial_x B \sim 10^6$  T/m e  $\tau_{acc} \sim 500$  ms, si trova una separazione pari a  $\Delta x \sim 250 \mu\text{m}$ .

4. A questo punto, si utilizza un impulso laser a microonde per far transire le masse da uno stato di spin elettronico ad uno stato di spin nucleare, così che non siano più influenzate in modo significativo dalla presenza del campo magnetico. Per un tempo  $\tau$ , si lascia che le masse cadano in parallelo una a fianco all'altra interagendo gravitazionalmente tra loro senza essere soggette all'azione di alcun campo esterno. La mutua interazione gravitazionale tra le masse modifica le loro traiettorie in modo trascurabile, ma induce uno sfasamento sulle varie componenti delle loro funzioni d'onda che è invece misurabile. Supponendo un tempo pari a  $\tau \sim 2.5$  s trascorso in questa fase, si ha infatti  $\Delta\phi_{LR} \sim 0.2$  e  $\Delta\phi_{LR} \sim 0.7$ .

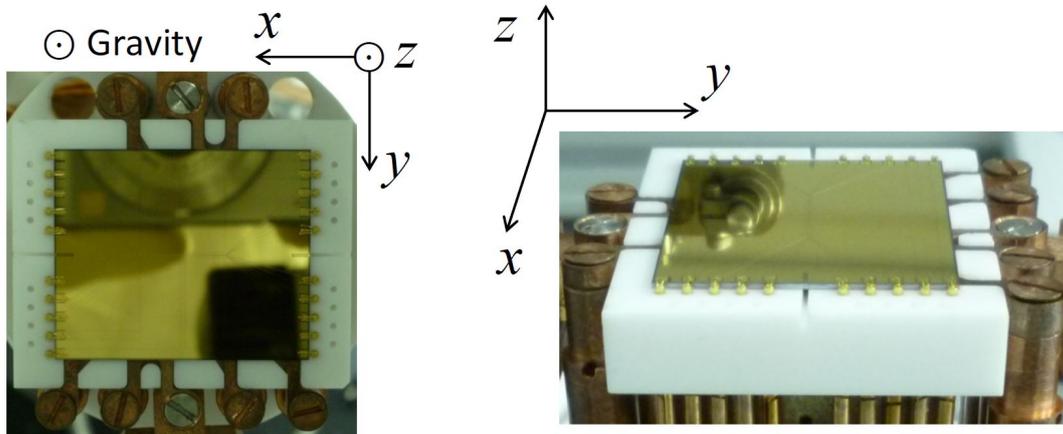
5. Terminato lo stadio di evoluzione 'libera' del sistema descritto al punto precedente, si ripetono nella sequenza inversa le operazioni compiute per separare le due componenti di ciascuna funzione d'onda, in modo da farle ricombinare. Nell'ordine quindi: (i) si applica un impulso a microonde per far tornare le masse nello stato di spin elettronico, così che interagiscano nuovamente con il gradiente del campo magnetico esterno e le due componenti della loro funzione d'onda vengano fatte riavvicinare, e (ii) si usa poi un impulso  $\pi$  per generare uno spin flip nei pacchetti d'onda convergenti e frenare il loro moto orizzontale fino a farli sovrapporre.

A questo punto, le masse (che si trovano ciascuna approssimativamente nello stato descritto dalla formula (3.9)) escono dagli interferometri, e subito viene misurato il loro spin per ottenere una stima di  $\mathcal{W}$ .

Supponendo che la fase di riavvicinamento delle componenti delle funzioni d'onda sia esattamente l'inverso di quella della loro separazione, e considerando per gli sfasamenti  $\Delta\phi_{LR}$  e  $\Delta\phi_{LR}$  solo il contributo dovuto alla mutua interazione gravitazionale tra le masse nel tempo  $\tau$  in cui cadono in parallelo, si ottiene un valore previsto per  $\mathcal{W}$  di circa 1.16. Nella pratica, il valore misurato di  $\mathcal{W}$  sarà probabilmente più alto in quanto le due masse interagiscono gravitazionalmente anche durante le fasi di separazione e ricombinazione delle componenti delle loro funzioni d'onda.

---

<sup>8</sup>La stima viene da elementari calcoli di cinematica, supponendo per semplicità che l'accelerazione orizzontale delle masse sia data dalla sola interazione del momento magnetico elettronico di spin delle masse con il gradiente del campo magnetico esterno.

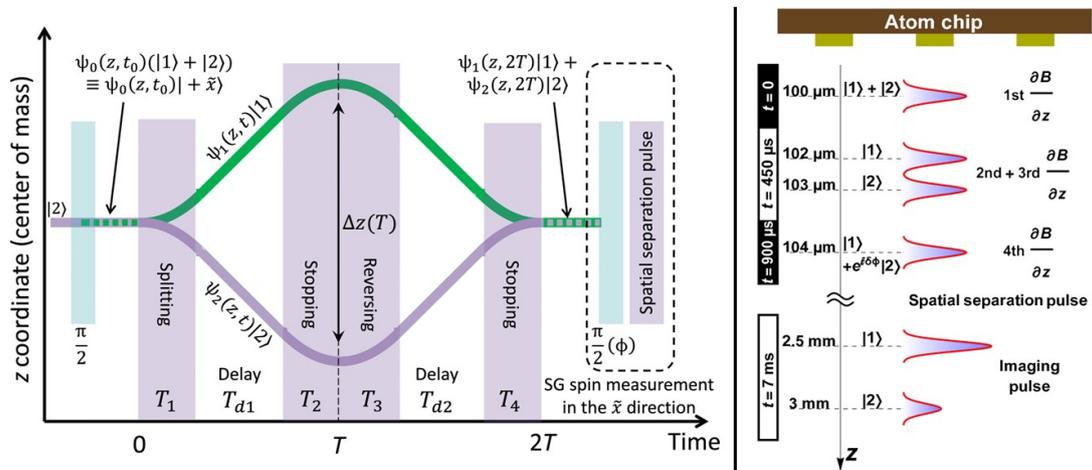


**Figura 3.5:** Immagini del chip atomico utilizzato per la realizzazione del primo interferometro di Stern-Gerlach completo. Come specificato nella foto di sinistra dal vettore che indica l'azione della gravità, durante l'esperimento il chip era posizionato con i circuiti rivolti verso il basso. Le immagini sono prese da [42].

### Fattibilità dell'esperimento - difficoltà tecniche e sfide sperimentali

Le difficoltà tecniche da superare per poter realizzare nella pratica l'esperimento proposto dal gruppo di Bose (così come quello di Marletto e Vedral) sono numerose, e per riuscire in questo intento è richiesto un notevole miglioramento delle attuali tecniche sperimentali.

Nel 2018, è stato per la prima volta [42] realizzato un interferometro di Stern-Gerlach completo, capace di separare e far ricombinare con alta visibilità gli atomi di Rubidio provenienti da un condensato di Bose-Einstein. Per mettere in atto tutte le operazioni richieste nell'esperimento di interferometria è stato utilizzato un cosiddetto 'chip atomico' (atom chip, in inglese), ovvero un insieme di circuiti disposti sulla superficie di un substrato solido, capaci di generare al di sopra di essi campi magnetici con gradienti molto elevati (in Figura 3.5 sono state inserite alcune immagini del chip atomico adoperato per l'interferometro). Nell'esperimento del 2018, condotto da Margalit, Zhou, Dobkowski et al., il chip atomico era disposto con i circuiti rivolti verso il basso, come mostrato nella parte destra della Figura 3.6; gli atomi di Rubidio, rilasciati da una trappola magnetica appena sotto il chip, si allontanavano da questo sotto l'effetto della gravità. Dopo essere stati messi in uno stato di sovrapposizione tra spin up e spin down tramite un impulso  $\pi/2$ , erano investiti da quattro impulsi magnetici consecutivi, generati da correnti fatte scorrere sul chip stesso, che causavano prima la separazione e poi la ricombinazione delle due componenti di spin della loro funzione d'onda. Un diagramma più dettagliato del-



**Figura 3.6:** Sulla sinistra, schema delle operazioni coinvolte nell'interferometro di Stern-Gerlach completo realizzato dal gruppo di Margalit, raffigurate nel sistema del centro di massa degli atomi usati nell'interferometro. In viola sono rappresentati gli impulsi di gradiente del campo magnetico, mentre in azzurro gli impulsi laser.

Sulla destra, le stesse operazioni sono rappresentate nel sistema di riferimento del laboratorio, mettendo in evidenza la posizione e l'orientamento del chip atomico. L'asse  $z$  in figura è orientato verso il suolo. Entrambe le immagini sono prese da [40].

l'evoluzione degli atomi all'interno dell'interferometro è presentato nella sezione sinistra della Figura 3.6.

A parte la scelta di cambiare il segno del gradiente del campo magnetico invece di far invertire lo spin delle masse, e tralasciando per un momento l'assenza di una fase di evoluzione delle masse senza l'influenza di campi elettromagnetici esterni tra gli stadi di separazione e ricombinazione della loro funzione d'onda, l'interferometro realizzato da Margalit e collaboratori è analogo a quello richiesto per l'esperimento proposto dal gruppo di Bose. C'è tuttavia una differenza fondamentale che impedisce di sfruttare già da subito questo interferometro per testare le previsioni fatte da Bose e colleghi: la massa degli oggetti da utilizzare nell'esperimento di interferometria. Attualmente, l'interferometro opera separando e ricombinando le funzioni d'onda di singoli atomi di Rubidio, mentre nella proposta di Bose si richiede l'uso di oggetti molto più massivi (composti da circa  $10^7 - 10^{10}$  atomi).

La sfida di portare in sovrapposizione oggetti mesoscopici<sup>9</sup> all'interno dell'interferometro è stata raccolta dal gruppo di Margalit, che ha iniziato una collaborazione assieme a Bose

<sup>9</sup>Il gruppo sta focalizzando le proprie ricerche in particolare sull'uso di micro-cristalli contenenti nel loro reticolo una lacuna adiacente ad un atomo di azoto sostituzionale (si era già accennato a questa possibilità nella trattazione dell'esperimento proposto da Bose e collaboratori).

e ad altri colleghi interessati all’iniziativa per realizzare una serie di studi preliminari finalizzati ad una sua futura realizzazione (un articolo frutto di questa collaborazione è il già citato [40]). Ron Folman, supervisore del progetto, riconosce la portata delle difficoltà da superare, ma si dice fiducioso nella possibilità di raggiungere la precisione sperimentale richiesta (per ascoltare direttamente le sue dichiarazioni si veda il suo intervento al workshop ‘Challenges for witnessing quantum aspects of gravity in a lab’, tenutosi online dal 7 all’11 Giugno del 2021, reperibile seguendo link riportato in [43]).

Elenchiamo di seguito due delle principali criticità da affrontare per riuscire ad utilizzare l’interferometro di Stern-Gerlach completo con oggetti mesoscopici (la discussione che segue ha uno scopo puramente illustrativo, e non vuole essere in alcun modo esaustiva, in quanto il campo di analisi è molto vasto e ricco di sottigliezze tecniche; alcuni dettagli possono essere reperiti negli articoli citati):

- **Preservare la coerenza delle masse per tutta la durata dell’esperimento**

Affinché l’esperimento di interferometria vada a buon fine, è necessario che sia i gradi di libertà spaziali che quelli di spin delle masse rimangano coerenti fino al momento della misura. Per ottenere questo risultato, come già precisato nel descrivere della proposta di Bose et al., bisogna mantenere le masse a temperature e pressioni molto basse.

Nell’articolo [6] di presentazione del loro esperimento, Bose e collaboratori mettono in evidenza come il tempo di coerenza degli stati di spin elettronici non sia un problema, se si attua il passaggio agli spin nucleari durante la fase di caduta parallela delle due masse. Utilizzando questo espediente sarebbe infatti necessario mantenere coerenti gli stati di spin elettronici solo per il tempo impiegato per separare e ricombinare le componenti delle funzioni d’onda, e questo può essere reso molto piccolo utilizzando forti gradienti di campo magnetico o rinunciando ad una grande separazione tra i rami dell’interferometro.

È più problematico invece limitare la decoerenza termica e collisionale dovuta all’interazione con l’ambiente esterno. Gli autori stimano che, alla temperatura di 0.15 K e con pressioni dell’ordine di  $10^{-15}$  Pa, il tempo di decoerenza delle masse per una sovrapposizione di due stati spazialmente separati di circa  $\Delta x \sim 250 \mu\text{m}$  è dello stesso ordine di grandezza ( $\sim 3.5$  s) del tempo totale  $\tau + 2\tau_{acc}$  trascorso dalle masse nell’interferometro (scegliendo come valori per i parametri sperimentali quelli usati nella descrizione del paragrafo 3.2.2). Per avere una probabilità più alta di preservare la coerenza durante la durata dell’esperimento, è quindi opportuno spingersi oltre questi valori, a temperature e pressioni più basse. Una analisi più dettagliata sugli effetti di decoerenza, contenente stime dei tempi di coerenza delle masse per diversi valori di temperature e pressioni, è contenuta in [44].

- **Migliorare la ricombinazione delle componenti della funzione d'onda**

Un parametro fondamentale dell'interferometro di Stern-Gerlach completo è il contrasto  $C$  (anche detto coerenza), il quale descrive la probabilità per una massa che entra nell'interferometro che la sua funzione d'onda venga separata e ricombinata spazialmente con successo, ricostruendo con buona approssimazione il suo stato iniziale. Due sono i fattori che limitano il contrasto dell'interferometro:

- (i) l'imprecisione strumentale nel ricombinare le due parti della funzione d'onda, sia in posizione che in momento
- (ii) le incertezze iniziali  $\sigma_z$  e  $\sigma_p$  sulla posizione e il momento della massa prima che entri nell'interferometro. Queste incertezze non possono essere rese piccole a piacere, in quanto rispettano la nota relazione di indeterminazione  $\sigma_z\sigma_p \geq \hbar/2$

In particolare, è stato mostrato negli anni ottanta in una serie di articoli [45–47] di Schwinger, Scully ed Englert che è molto complicato ottenere delle condizioni sperimentali di lavoro che assicurino un contrasto elevato. Questo effetto di perdita di contrasto è stato chiamato dai tre scienziati 'effetto Humpty-Dumpty', dal nome del personaggio protagonista di una celebre filastrocca inglese (si veda il breve approfondimento alla fine di questo paragrafo per il testo della filastrocca). Inviando nell'interferometro un pacchetto d'onda gaussiano con incertezza minima possibile ed un tasso di espansione trascurabile, la perdita di contrasto può essere approssimata al primo ordine come:

$$C = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta z(t_{fin})}{l_z} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta p(t_{fin})}{l_p} \right)^2 \right] \quad (3.11)$$

essendo  $\Delta z(t_{fin})$  e  $\Delta p(t_{fin})$  le separazioni rispettivamente in posizione e momento tra i centri delle due componenti della funzione d'onda della massa alla fine dell'interferometro, ed avendo introdotto la *lunghezza spaziale di coerenza*  $l_z$  e la *larghezza di coerenza nello spazio dei momenti*  $l_p$ , definite come:

$$l_z = \frac{\hbar}{\sigma_p} \quad l_p = \frac{\hbar}{\sigma_z}$$

Dalla formula (3.11) è evidente come, per mantenere elevato il contrasto, sia importante ottenere  $l_z \gg \Delta z(t_{fin})$ , il che può essere ottenuto o aumentando la lunghezza di coerenza (cioè diminuendo l'incertezza iniziale sul momento delle masse, ad esempio raffreddandole il più possibile), oppure riducendo l'imprecisione nella ricombinazione della posizione delle due componenti della funzioni d'onda. Allo stato attuale, l'interferometro di Stern-Gerlach del gruppo di Margalit è riuscito ad ottenere un valore minimo di  $\Delta z(t_{fin})$  pari a 100 nm, ma per fare interferometria con oggetti mesoscopici è necessario ridurre questo valore di almeno tre ordini di

grandezza, dato che questi hanno lunghezze di coerenza dell'ordine di 0.1 nm. Sebbene questa richiesta possa sembrare complicata da mettere in pratica, nell'articolo [40] gli autori affermano di poter raggiungere facilmente questi livelli di precisione migliorando le sorgenti di corrente utilizzate per generare i campi magnetici.

N.B. - HUMPTY DUMPTY

Humpty Dumpty è il protagonista di una celebre filastrocca in lingua inglese, probabilmente una delle più famose nel mondo anglofono. Il personaggio è stato ripreso in diversi testi, tra cui il libro “Trough the Looking-Glass” di Lewis Carroll del 1871, un sequel di “Alice in Wonderland”, realizzato sei anni prima. La versione più comune della filastrocca recita:

*Humpty Dumpty sat on a wall,  
Humpty Dumpty had a great fall.  
All the king's horses and all the king's men  
Couldn't put Humpty together again.*

Il testo non dà informazioni precise sull'identità del suo protagonista, ma è diffusa l'idea che la filastrocca fosse almeno in origine un indovinello e Humpty Dumpty rappresenti in realtà la personificazione di un uovo. Per questo motivo, in molte sue raffigurazioni, Humpty Dumpty è presentato come un uovo con aspetti antropomorfi.

Alla fine degli anni ottanta, i fisici Schwinger, Scully ed Englert, studiando la possibilità di separare e ricombinare in un apparato di Stern-Gerlach completo le due componenti di una funzione d'onda aventi diverso spin, hanno notato come il processo di separazione spaziale dell'onda di materia renda molto difficile ricomporre poi il suo stato iniziale, generando inequivocabilmente una perdita di contrasto alla fine dell'interferometro; sfruttando l'analogia con la celebre filastrocca di Humpty Dumpty, nella quale il protagonista, una volta separato, non può essere più riassembleto, hanno chiamato questo fenomeno l'effetto Humpty Dumpty, spesso abbreviato con HD.

### 3.3 Ulteriori analisi e speculazioni

Concludiamo questa trattazione sugli esperimenti proposti dal gruppo di Bose e da Marletto e Vedral descrivendo in modo sintetico le idee esposte da Christodoulou e Rovelli in due loro articoli di approfondimento sull'argomento ([48, 49]). In questi articoli, gli autori hanno studiato con maggiore dettaglio il principio su cui si basano i due esperimenti<sup>10</sup>

<sup>10</sup>Il fenomeno è stato descritto in questo testo al paragrafo 3.1.2.

(detto ‘effetto BMV’ dalle iniziali di Bose, Marletto e Vedral), fornendo una sua interpretazione nel linguaggio della relatività generale e portando avanti alcune speculazioni sulla possibilità di osservare grazie ad esso la discretizzazione del tempo in laboratorio.

### 3.3.1 L’effetto BMV nel contesto della relatività generale

È stato già discusso in questo testo come, secondo quanto dimostrato dal gruppo di Bose, osservare l’entanglement indotto dalla gravità tra due masse poste in uno stato di sovrapposizione spaziale sia indice del fatto che anche il campo gravitazionale possa esistere in uno stato di sovrapposizione. Nel loro articolo [48], Christodoulou e Rovelli hanno sviluppato ulteriormente questa idea, mostrando che, se si studia tale fenomeno di sovrapposizione del campo gravitazionale nell’ambito della teoria della relatività generale, questo può essere interpretato in realtà come il realizzarsi di una coesistenza di più geometrie spaziotemporali in sovrapposizione quantistica tra di loro.

È importante mettere in chiaro da subito che una trattazione del fenomeno BMV che utilizzi la relatività generale piuttosto che la sua approssimazione Newtoniana (con cui è stata portata avanti la descrizione presentata nella sezione 3.1.2 di questo testo) non è strettamente necessaria, in quanto la presenza delle masse porta soltanto una piccola perturbazione alla metrica di Minkowski, e descrivendo tale perturbazione tramite modelli di gravità quantistica si può ricondurre il suo effetto alla presenza di un semplice potenziale analogo a quello Newtoniano (si veda ad esempio [34], alla sezione III). Tuttavia, l’uso della relatività generale permette di chiarificare il significato fisico del fenomeno, mostrando come questo riveli la possibilità di generare la sovrapposizione di più tempi propri lungo la linea di universo di una particella.

Supponendo che la relatività generale continui a valere anche per particelle con masse dell’ordine di  $10^{-14}$  kg, seguiamo dunque il ragionamento di Christodoulou e Rovelli per mostrare come l’effetto BMV preveda la presenza della sovrapposizione di più geometrie spaziotemporali. Dividiamo l’analisi in due passi successivi; in una prima parte studiamo la metrica generata dalle due masse presenti nell’effetto BMV senza considerarle in sovrapposizione spaziale, mentre nella seconda parte esaminiamo cosa accade quando la sovrapposizione entra in gioco.

#### I. Analisi classica

Consideriamo due corpi sferici (e.g. due particelle), per semplicità uguali tra loro, di massa  $m$  e raggio  $R$ , posti ad una distanza  $d$  tra loro. Assumiamo che il raggio delle

masse sia molto più piccolo della distanza che le separa, ma molto più grande del loro raggio di Schwarzschild  $r_m = 2Gm/c^2$ . In regime di campo debole, l'elemento di linea corrispondente alla metrica generata da questa configurazione di sorgenti può essere approssimato come

$$ds^2 = (1 + 2\phi(\vec{x})/c^2)dt^2 - d\vec{x}^2 \quad (3.12)$$

dove  $\phi(\vec{x})$  è il potenziale dato dalla somma dei potenziali Newtoniani  $\phi_i(\vec{x})$  delle due masse. Per ciascuna particella, al di fuori del suo volume,  $\phi_i(\vec{x})$  è una funzione della sola distanza  $r_i$  dal suo centro

$$\phi_i(r_i) = -\frac{Gm}{r_i}, \quad r > R \quad (3.13)$$

mentre all'interno della particella lo approssimiamo costante per semplicità e pari a

$$\phi_i(r_i) = -\frac{Gm}{R}, \quad r < R \quad (3.14)$$

Di conseguenza, all'interno di ciascuna delle due masse la metrica si può scrivere come

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{Rc^2} - \frac{2Gm}{dc^2}\right)dt^2 - d\vec{x}^2 \quad (3.15)$$

avendo approssimato la distanza tra un punto qualsiasi all'interno di una particella e l'altra particella come  $d$ , in quanto  $R \ll d$ .

Un osservatore che si trova all'interno di una delle due particelle ed è solidale con essa, misura, trascorso un periodo  $t$  della coordinata temporale, il tempo proprio

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{2Gm}{Rc^2} - \frac{2Gm}{dc^2}} dt = \\ &= \sqrt{1 - \frac{2Gm}{Rc^2} - \frac{2Gm}{dc^2}} t \sim \left(1 - \frac{Gm}{Rc^2} - \frac{Gm}{dc^2}\right) t \end{aligned} \quad (3.16)$$

avendo usato l'approssimazione  $\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{x}{2}$ , in quanto il potenziale gravitazionale generato dalle due masse è molto debole.

In questa espressione, l'ultimo termine è quello che tiene conto della presenza della seconda massa. Il suo contributo al tempo proprio è

$$\delta s = -\frac{Gmt}{dc^2} \quad (3.17)$$

Sebbene questa sia una quantità molto piccola (dato che  $r_m = 2Gm/c^2 \ll d$ ), si mostrerà poi più avanti nella trattazione che porta un contributo misurabile allo sfasamento della funzione d'onda della particella, a patto che  $t$  sia sufficientemente grande.

## II. Sovrapporre metriche diverse

Passiamo ora ad una analisi che tenga conto delle proprietà quantistiche del sistema. Immaginiamo che inizialmente le due masse si trovino in dei generici stati puri  $|\phi\rangle_1$  e  $|\chi\rangle_2$ , localizzati spazialmente, e che il campo gravitazionale si trovi nella configurazione statica da esse generata. Scriviamo dunque il ket di stato del sistema come

$$|\Psi_0\rangle = |\phi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 \otimes |g\rangle \quad (3.18)$$

dove  $|g\rangle$  indica il ket di stato del campo gravitazionale. Per la nostra trattazione è sufficiente assumere che lo spazio di Hilbert a cui appartiene  $|g\rangle$  contenga degli stati semiclassici che approssimano geometrie classiche  $g$  e le loro combinazioni lineari.

Per riprodurre ciò che avviene nell'effetto BMV, immaginiamo che ciascuna delle due particelle in esame venga portata in uno stato di sovrapposizione tra due configurazioni spaziali distinte  $|L\rangle$  ed  $|R\rangle$ . Se, per semplicità, facciamo l'assunzione non realistica che questo avvenga istantaneamente, lo stato del sistema complessivo diventa

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle_1 + |R\rangle_1) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle_2 + |R\rangle_2) \otimes |g\rangle = \\ &= \frac{1}{2}(|LL\rangle + |RR\rangle + |LR\rangle + |RL\rangle) \otimes |g\rangle \end{aligned} \quad (3.19)$$

dove si è usata la notazione semplificata  $|LL\rangle \equiv |L\rangle_1 \otimes |L\rangle_2$ .

In un tempo dell'ordine di  $d/c$ , la separazione delle funzioni d'onda porta ad una modifica nel campo gravitazionale, ovvero della metrica  $g$ . Dato che l'interazione gravitazionale tra le due masse dipende dalla loro distanza relativa, non appena la metrica sarà tornata in una configurazione statica si troverà anch'essa in una sovrapposizione di valori diversi, uno per ogni possibile configurazione spaziale delle funzioni d'onda delle due masse. Indicando con  $g_d$  la metrica prodotta da due particelle che si trovano a distanza  $d$ , possiamo scrivere in forma compatta che il sistema si trova nello stato

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|LLg_{d_{LL}}\rangle + |RRg_{d_{RR}}\rangle + |LRg_{d_{LR}}\rangle + |RLg_{d_{RL}}\rangle) \quad (3.20)$$

Facciamo ora una ulteriore semplificazione, in modo tale da lasciarci alle spalle ogni complicazione non necessaria: ipotizziamo che la separazione tra le componenti  $|L\rangle$  ed  $|R\rangle$  di ciascuna funzione d'onda sia tale che la distanza  $d$  tra le due masse sia molto piccola rispetto a  $Gm/c^2$  per tutte le configurazioni spaziali possibili delle masse eccetto quella rappresentata dal ket  $|RL\rangle$ . Con questa affermazione supponiamo quindi che solo nella configurazione  $|RL\rangle$  una delle due masse risenta in modo significativo della presenza dell'altra massa. In particolare, secondo quanto espresso dalla formula (3.16),

solo quando il sistema si trova nello stato  $|RL\rangle$  un osservatore solidale con una delle due masse misura un tempo proprio diverso, e la differenza in tempo proprio rispetto agli altri casi è data dalla (3.17).

Poiché il ket di stato di una particella di massa  $m$  evolve accumulando una fase

$$\phi = -\frac{mc^2s}{\hbar} \quad (3.21)$$

che dipende dal tempo proprio  $s$  della particella, la configurazione  $|RL\rangle$  del sistema accumula uno sfasamento rispetto alle altre, calcolabile come

$$\delta\phi = -\frac{mc^2\delta s}{\hbar} = \frac{Gm^2t}{\hbar d_{RL}} \quad (3.22)$$

Si noti che questo risultato è lo stesso trovato nel paragrafo 3.1.2, il quale era stato ricavato utilizzando però l'approssimazione Newtoniana della gravità e non la più completa teoria della relatività generale<sup>11</sup>. In modo analogo a quanto già visto in tale paragrafo, è immediato osservare che questo sfasamento porta il sistema dopo un tempo  $t$  nello stato entangled

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{2}(|LLg_{d_{LL}}\rangle + |RRg_{d_{RR}}\rangle + |LRg_{d_{LR}}\rangle + e^{i\frac{Gm^2t}{\hbar d_{RL}}} |RLg_{d_{RL}}\rangle) \quad (3.23)$$

ed è possibile rilevare sperimentalmente l'entanglement generato ad esempio riunendo le due componenti della funzione d'onda di ciascuna delle due particelle e facendole interferire tra loro.

Ciò che è importante notare è che, nonostante la variazione di tempo proprio  $\delta s$  tra le varie configurazioni del sistema in sovrapposizione quantistica sia molto piccola rispetto al tempo  $t$ , in quanto (dalla (3.17))

$$\frac{\delta s}{t} = \frac{r_m}{2d} \ll 1 \quad (3.24)$$

questa differenza induce uno sfasamento tra le varie componenti della funzione d'onda del sistema complessivo che è invece misurabile, poiché i ket del sistema evolvono con un fattore di fase

$$e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}s} \quad (3.25)$$

oscillante ad una frequenza  $\nu = \frac{mc^2}{2\pi\hbar}$  molto elevata, e quindi una minima variazione di  $s$  porta ad uno sfasamento notevole.

---

<sup>11</sup>Nel paragrafo citato non era stata fatta l'approssimazione di considerare l'interazione gravitazionale tra le due masse non trascurabile soltanto per uno degli stati possibili del sistema, ma andando oltre questa differenza la formula ottenuta è la medesima.

In chiusura di paragrafo, riassumiamo il risultato principale trovato con questa analisi:

*se l'effetto BMV implica in una trattazione non relativistica che il campo gravitazionale possa esistere in una sovrapposizione di più valori, nel linguaggio della relatività generale questo fenomeno viene spiegato come la realizzazione di una sovrapposizione di geometrie spaziotemporali non equivalenti.*

Adottando questo approccio è immediato dedurre che una particella possa trovarsi ad avere più tempi propri associati alla propria traiettoria nello spazio-tempo.

### 3.3.2 Possibilità di osservare in laboratorio la discretizzazione del tempo

Studiamo ancora l'effetto BMV, e proviamo a spingere le sue potenzialità al limite. Il punto di partenza del seguente ragionamento è la riscrittura in termini delle unità di Planck dello sfasamento relativo  $\delta\phi$  indotto tra due diversi stati del sistema complessivo (formato dalle due masse e dal campo gravitazionale) a causa della interazione gravitazionale tra le masse. Dalla (3.21) si ha

$$\delta\phi = -\frac{mc^2\delta s}{\hbar} = -\frac{m}{m_P} \frac{\delta s}{t_P} \quad (3.26)$$

dove  $\delta s$  è la differenza in tempo proprio tra i due stati, ed  $m_P$  e  $t_P$  sono rispettivamente la massa ed il tempo di Planck, già incontrati nell'introduzione di questo lavoro di tesi e definiti come:

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.391 \times 10^{-44} \text{ s} \quad m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

Una prima considerazione che possiamo fare a partire da questa espressione per  $\delta\phi$  è che, se si riuscisse a realizzare con successo l'esperimento proposto da Bose e collaboratori, misurando un grado di entanglement notevole (generato ad esempio da uno sfasamento  $\delta\phi \sim 1$ ) tra due masse dell'ordine di  $10^{-14}$  kg (ovvero  $\sim 10^{-6}$  masse di Planck), si starebbero osservando corrispondenti variazioni di tempo proprio pari a un milione di volte il tempo di Planck, ovvero  $\sim 10^{-38}$  s. Come fanno notare Christodoulou e Rovelli in [49], questo grado di sensibilità è circa di venti ordini di grandezza migliore delle misure dirette di tempo realizzabili oggi giorno tramite gli orologi atomici.

Portando poi questo ragionamento all'estremo, se si fosse in grado di spingere la massa delle particelle usate nell'esperimento fino a valori confrontabili con quello della massa

di Planck  $\sim \mu g$  (cosa impensabile con le attuali tecnologie sperimentali, ma forse realizzabile in futuro), si otterrebbe un apparato capace di discriminare variazioni temporali dell'ordine del tempo di Planck. Arrivare a scale così piccole vorrebbe dire investigare la trama stessa dello spazio tempo.

In particolare, questa possibilità risulta molto interessante se si considera la previsione fatta da diversi modelli di gravità quantistica che esista una quantizzazione del tempo alla scala di Planck. L'idea di un tempo minimo emerge spesso in questi modelli dalla necessità di avere una unità fondamentale per le lunghezze (si vedano p.e. [1, 2]); questa quantità spaziale viene trasformata poi in modo naturale in una scala temporale attraverso la velocità della luce, costante fondamentale nella teoria della relatività (e di conseguenza anche in ogni teoria di gravità quantistica che provi ad incorporarla).

Assumendo la quantizzazione del tempo, la possibilità più semplice è che valga, per un tempo proprio  $s$ ,

$$\delta s = nt_P \quad (3.27)$$

dove  $n$  è un numero intero non negativo. Inserendo questo ansatz nella (3.26), e ponendo  $m = \alpha m_P$ , con  $\alpha$  parametro positivo reale adimensionale, si trova

$$\delta\phi = \alpha n \quad (3.28)$$

A seguito della quantizzazione del tempo dunque, anche la fase indotta varia discretamente, con una separazione tra due valori successivi data da  $\alpha$ .

Nell'esperimento di Bose et al. o quello di Marletto-Vedral, lo sfasamento indotto dall'interazione gravitazionale tra le diverse configurazioni spaziali delle masse è del tipo (possiamo assumere per semplicità, come fatto nella sezione precedente, che solo una configurazione delle masse accumuli sfasamento rispetto alle altre; in tal caso  $d$  è la distanza tra le masse in tale configurazione)

$$\delta\phi = \frac{Gm^2}{\hbar d} t \quad (3.29)$$

e questo sfasamento può essere variato cambiando ad esempio il tempo  $t$  per cui si lasciano interagire gravitazionalmente le masse poste una a fianco a l'altra, entrambe in stato di sovrapposizione spaziale.

Se si utilizzano nell'esperimento masse che sono alcuni ordini di grandezza inferiori alla massa di Planck, ad esempio  $10^{-14} \text{ kg} \sim 10^{-6} m_P$ , dalla (3.28) si vede come lo sfasamento indotto  $\delta\phi$  possa assumere quasi ogni valore reale positivo con continuità (poiché  $\alpha \ll 1$ ), e la quantizzazione della fase, dovuta in ultima analisi alla quantizzazione del tempo, non sarebbe apprezzabile in laboratorio in quanto variazioni della fase da un valore possibile al successivo (ossia da  $\alpha n$  a  $\alpha(n+1)$ ) sarebbero troppo piccoli per produrre un aumento dell'entanglement che sia osservabile.

Tuttavia, se si riuscissero ad adoperare negli interferometri masse dell'ordine della massa di Planck, allora lo sfasamento potrebbe assumere soltanto valori più grandi, all'incirca coincidenti con i numeri interi non negativi, e il suo spettro discreto di valori sarebbe osservabile tramite misure di entanglement in quanto incrementi unitari (in unità di  $\alpha$ ) della fase produrrebbero una differenza notevole nel grado di entanglement tra le masse. In questo caso, per poter osservare l'entanglement tra le masse aumentare in modo quantizzato (cioè 'a gradini') al crescere del tempo  $t$  di interazione tra le masse all'interno degli interferometri, bisognerebbe riuscire a controllare  $t$  con una sensibilità<sup>12</sup> dell'ordine di  $\frac{d\hbar}{Gm^2} \sim 10^{-9}$  s, assumendo per  $d$  un valore di circa  $10^2 \mu\text{m}$ .

Seguendo le linee del ragionamento appena descritto, se si riuscisse in futuro ad utilizzare masse dell'ordine della massa di Planck per verificare l'effetto BMV, sarebbe forse possibile osservare per la prima volta gli effetti della natura discreta del tempo. Tuttavia, come precisano anche Christodoulou e Rovelli nell'articolo [49] da cui è tratta l'analisi presentata in questo paragrafo, nulla ci assicura né che il tempo sia discreto, né che lo sia in modo semplice come supposto nella nostra trattazione. Gli argomenti portati avanti in questa sezione sono molto speculativi, e rimangono più simili ad uno studio degli ordini di grandezza delle quantità in gioco nel fenomeno BMV piuttosto che ad un modello accurato delle sue caratteristiche nel regime di masse confrontabili con la massa di Planck.

---

<sup>12</sup>Questa stima viene dalla equazione (3.29), trovando il tempo  $t$  per cui lo sfasamento è dell'ordine dell'unità.

# Conclusioni e prospettive future

In chiusura di trattazione, ripercorriamo in modo sintetico il percorso fatto e riassumiamo i principali risultati ottenuti.

L'analisi portata avanti in questa tesi è stata tutta costruita attorno alla affascinante possibilità di verificare sperimentalmente se anche la gravità, come le altre interazioni fondamentali note della fisica moderna, abbia caratteristiche quantistiche. In particolare, l'obiettivo del presente elaborato era quello di spiegare come, secondo le idee pubblicate nel 2017 da due diversi gruppi di ricerca, uno formato da Chiara Marletto e Vlatko Vedral, e l'altro composto da Sougato Bose ed altri collaboratori, il fenomeno quantistico dell'entanglement possa essere utilizzato per questo scopo.

La descrizione delle proposte avanzate da questi autori per sondare la natura del campo gravitazionale è stata discussa nel Capitolo 3, che costituisce la parte centrale di questa tesi. I primi due capitoli sono stati inseriti come introduzione all'argomento.

Nella parte iniziale del primo capitolo sono stati ripercorsi i primi passi mossi dalla comunità scientifica nel campo della gravità quantistica. Lo scopo di questo approfondimento era quello di risalire alle origini del dibattito sulla quantizzazione del campo gravitazionale, per osservare come già dopo pochi anni dalla sua genesi gli scienziati del tempo esprimessero la necessità di riuscire a realizzare degli esperimenti per poter risolvere le numerose questioni aperte in tale ambito.

Continuando poi con la parentesi storica, è stato presentato brevemente un esperimento mentale pensato da Feynman, che è servito da esempio come una delle prime proposte avanzate per sondare il campo gravitazionale (le cui idee hanno poi influenzato anche i lavori più recenti), mentre si è approfondito con maggiore dettaglio l'esperimento COW, in qualità di studio pionieristico nel campo della ricerca sperimentale sulla gravità quantistica. Si è visto come questo esperimento abbia per la prima volta mostrato che è possibile rilevare dei genuini effetti quantistici indotti dal campo gravitazionale, oltre ad aver permesso una verifica dei principi di equivalenza debole e forte anche in ambito quantistico. La descrizione dell'esperimento COW è stata utile anche per mettere in evidenza come non sia sufficiente studiare fenomeni in cui sia la gravità che la meccani-

ca quantistica entrano in gioco in modo determinante per poter trarre conclusioni sulla natura quantistica del campo gravitazionale; per riuscire in questo intento è necessario realizzare esperimenti pensati su misura allo scopo, come quelli proposti da Bose e collaboratori.

Il principio su cui si basano le prove sperimentali descritte al Capitolo 3 si fonda su una proprietà caratteristica dei sistemi quantistici: l'entanglement. Dato che questa tesi ha un carattere non altamente specialistico, ed è possibile che chi si avvicini a questo elaborato non abbia una conoscenza approfondita sull'esatta definizione e le proprietà degli stati entangled, il Capitolo 2 è stato inserito per presentare tali nozioni, così da compensare a questa mancanza. Il lettore che ha approfondito il secondo capitolo ha potuto apprendere i tratti fondamentali del formalismo della matrice densità, utilizzato in meccanica quantistica per descrivere i sistemi compositi, oltre a vedere come questo possa essere applicato nel definire gli stati entangled.

Con il terzo capitolo ci si è finalmente dedicati all'analisi delle proposte di esperimenti fatte da Marletto-Vedral ed il gruppo di Bose.

In apertura di capitolo, è stato esposto il risultato teorico su cui tali esperimenti si basano, che riportiamo anche di seguito.

**Teo. - Impossibilità di generare entanglement attraverso un mediatore classico.**

*Assumendo la località delle interazioni fisiche, e in assenza di curve spaziotemporali chiuse di tipo tempo, un mediatore classico non può generare entanglement tra due sistemi fisici quantistici che inizialmente si trovano in uno stato separabile.*

Questo teorema riveste l'entanglement di un ruolo molto importante, in quanto può permettere di discriminare se un campo di interazione abbia caratteristiche classiche o meno. Per il settore della ricerca sperimentale sulla gravità quantistica, il teorema implica che l'osservare l'entanglement indotto dal campo gravitazionale tra due oggetti massivi sarebbe la tanto attesa pistola fumante che riveli la natura quantistica del campo gravitazionale.

Nella presente trattazione il teorema appena visto è stato analizzato nel dettaglio, spiegando parola per parola il suo significato e fornendo poi una sua dimostrazione. In questo contesto, si è visto come i due diversi gruppi di ricerca, quello di Bose e quello formato da Marletto e Vedral, abbiano approcciato il problema utilizzando strategie diverse e fornendone anche una interpretazione leggermente differente (ad esempio, con mediatore classico Bose e collaboratori intendono un campo che non è in grado di esistere in uno stato di sovrapposizione quantistica di più valori, mentre Marletto e Vedral definiscono il concetto di sistema classico imponendo che questo non ammetta due osservabili

rappresentabili tramite operatori non commutanti). La dimostrazione che si è scelto qui di presentare è stata quella del gruppo di Bose, in quanto sfrutta un linguaggio più simile a quello tradizionale della meccanica quantistica.

A complemento della dimostrazione, è stato poi descritto un semplice modello che mostra come la gravità quantistica, al contrario della sua controparte classica, *sia* in grado di generare entanglement tra due masse poste ciascuna in uno stato di sovrapposizione spaziale e inizialmente non entangled (questo fenomeno è stato chiamato *effetto BMV*).

Nella seconda parte del capitolo, si sono discusse le tecniche sperimentali proposte da Bose et al. e da Marletto e Vedral nei due articoli [5, 6] per poter generare e poi rivelare l'entanglement indotto dalla gravità, in modo da dimostrare (grazie al teorema appena visto) che il campo gravitazionale è non-classico.

Dei due possibili schemi di funzionamento, quello proposto dal gruppo di Bose, che sfrutta una versione avanzata dell'interferometro di Stern-Gerlach, è stato analizzato con maggiore dettaglio. Dopo aver elencato le varie fasi dell'esperimento, è stato presentato un breve studio della sua fattibilità. Nonostante l'esperimento richieda tecniche sperimentali molto complesse, si è visto come la recente realizzazione [40] di un interferometro di Stern-Gerlach completo che utilizza atomi di Rubidio, sviluppato da un gruppo israeliano di cui Ron Folman è il supervisore, abbia posto le fondamenta per una futura messa in atto del progetto. La sfida più ambiziosa per poter realizzare l'esperimento pensato da Bose e collaboratori tramite l'interferometro di Stern-Gerlach completo attualmente a disposizione è quella di riuscire a portare tale apparato ad operare non con singoli atomi ma con oggetti mesoscopici. Per ottenere questo risultato è fondamentale lavorare a temperature e pressioni molto basse, così da evitare che le masse subiscano effetti di decoerenza, ed è inoltre importante riuscire a separare e ricombinare le funzioni d'onda con precisioni nanometriche.

Per concludere la trattazione, sono state presentate due ulteriori analisi riguardanti l'effetto BMV, tratte dalle idee contenute nei recenti articoli [48, 49] di Marios Christodoulou e Carlo Rovelli. Innanzitutto, dato che lo studio dell'effetto BMV descritto fino ad ora era stato fatto adoperando l'approssimazione Newtoniana della gravità, si è ritenuto interessante provare a ripetere l'analisi nel contesto più ampio della teoria della relatività generale. Così facendo, si è potuto reinterpretare la possibilità, prevista dalla trattazione non relativistica del fenomeno, dell'esistenza di più configurazioni del campo gravitazionale in sovrapposizione tra loro, come invero la realizzazione di una sovrapposizione di geometrie spaziotemporali non equivalenti. Una conseguenza affascinante che si può trarre da questo risultato è che ad un osservatore nello spazio tempo può essere associato non uno, ma più tempi propri.

La seconda indagine realizzata sull'effetto BMV, molto più speculativa, ha suggerito poi che sarebbe forse possibile osservare in laboratorio una evidenza indiretta sulla quantizzazione del tempo alla scala di Planck (cosa prevista da diverse teorie di gravità

quantistica), se si riuscissero ad adoperare negli esperimenti di interferometria proposti da Bose e collaboratori masse dell'ordine della massa di Planck ( $\sim \mu\text{g}$ ).

*In estrema sintesi*, con questo elaborato si è dunque fornita una analisi approfondita di come l'entanglement possa essere utilizzato per sondare la natura quantistica della gravità, descrivendo alcune recenti proposte sperimentali ed i risultati teorici su cui queste sono fondate. Come complemento alla trattazione, sono state inoltre inserite sia una introduzione storica allo studio sperimentale della gravità quantistica che un approfondimento sul fenomeno dell'entanglement.

È doveroso sottolineare che il settore della ricerca teorica dedicato allo studio di una possibile verifica sperimentale della gravità quantistica procede parallelamente su molti fronti (per un testo di rassegna si veda [50]), e anche restringendo l'ambito soltanto agli esperimenti realizzabili in laboratorio, quelli ideati da Marletto e Vedral e Bose et al., di cui si è discusso nel presente elaborato, non sono certamente gli unici, né presentano idee del tutto originali.

Riportiamo, solo a titolo di esempio: [51] in cui si studiano gli effetti che verrebbero prodotti su una sonda classica o una quantistica dal campo gravitazionale generato da un oggetto in stato di sovrapposizione spaziale, [52] in cui si propone di osservare gli effetti della quantizzazione del campo gravitazionale tramite le differenze prodotte nei modi di oscillazione di due masse identiche, [30] nel quale si suggerisce di sfruttare come segno della natura quantistica della gravità la possibilità di generare stati non Gaussiani in un condensato di Bose-Einstein, [53] dove si descrive come poter utilizzare una variante dell'interferometro di Sagnac per testare se il campo gravitazionale sia classico o meno.

Tuttavia, tra le proposte avanzate negli ultimi anni, certamente gli esperimenti di interferometria presentati dal gruppo di Bose e da Marletto e Vedral nei loro articoli [5, 6] hanno spiccato per la notevole risonanza ottenuta all'interno della comunità scientifica<sup>13</sup>. Quello che le rende particolarmente meritevoli di attenzione è che sembrano, a differenza di molte altre alternative, prossime ad una effettiva realizzazione sperimentale.

In particolare, grazie alla felice collaborazione recentemente formata tra Bose ed altri colleghi teorici con il gruppo di Ron Folman, che opera con la tecnologia del chip atomico, l'esperimento di interferometria ideato da Bose et al. per testare la natura del campo gravitazionale è passato dall'essere una semplice proposta ad un progetto concreto su cui diverse menti stanno lavorando.

Forse, dopo più di cento anni di attesa, presto la gravità quantistica sarà finalmente messa alla prova.

---

<sup>13</sup>Un indice dell'elevata popolarità che hanno raccolto è il cospicuo numero di analisi e chiarificazioni che hanno seguito la loro pubblicazione; alcune di queste sono state citate anche in questa tesi, all'inizio della sezione 3.1.

# Bibliografia

- [1] Luis J. Garay. «Quantum gravity and minimum length». In: *International Journal of Modern Physics A* 10.02 (1995), pp. 145–165. DOI: 10.1142/S0217751X95000085. eprint: <https://doi.org/10.1142/S0217751X95000085>. URL: <https://doi.org/10.1142/S0217751X95000085>.
- [2] Ronald J. Adler. «Six easy roads to the Planck scale». In: *American Journal of Physics* 78.9 (2010), pp. 925–932. DOI: 10.1119/1.3439650. eprint: <https://doi.org/10.1119/1.3439650>. URL: <https://doi.org/10.1119/1.3439650>.
- [3] Eugenio Bianchi, Lucas Hackl e N. Yokomizo. «Entanglement time in the primordial universe». In: *International Journal of Modern Physics D* 24.12 (2015), p. 1544006. DOI: 10.1142/S021827181544006X. eprint: <https://doi.org/10.1142/S021827181544006X>. URL: <https://doi.org/10.1142/S021827181544006X>.
- [4] Jahed Abedi, Hannah Dykaar e Niayesh Afshordi. «Echoes from the Abyss: Evidence for Planck-scale structure at black hole horizons». In: *Physical Review D* 96 (dic. 2016). DOI: 10.1103/PhysRevD.96.082004.
- [5] C. Marletto e V. Vedral. «Gravitationally Induced Entanglement between Two Massive Particles is Sufficient Evidence of Quantum Effects in Gravity». In: *Phys. Rev. Lett.* 119 (24 dic. 2017), p. 240402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.240402. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.240402>.
- [6] Sougato Bose et al. «Spin Entanglement Witness for Quantum Gravity». In: *Phys. Rev. Lett.* 119 (24 dic. 2017), p. 240401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.240401. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.240401>.
- [7] Carlo Rovelli. «Notes for a Brief History of Quantum Gravity». In: *The Ninth Marcel Grossmann Meeting*. A cura di Vahe G. Gurzadyan, Robert T. Jantzen e Remo Ruffini. Dic. 2002, pp. 742–768. DOI: 10.1142/9789812777386\_0059.
- [8] John Stachel. «The Early History of Quantum Gravity (1916–1940)». In: *Black Holes, Gravitational Radiation and the Universe: Essays in Honor of C.V. Vishveshwara*. A cura di Bala R. Iyer e Biplab Bhawal. Springer Netherlands, 1999, pp. 525–534. ISBN: 978-94-017-0934-7. DOI: 10.1007/978-94-017-0934-7\_31.

- [9] Albert Einstein. «Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation». In: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (gen. 1916), pp. 688–696.
- [10] O Klein. «Zur fünfdimensionalen Darstellung der Relativitätstheorie». In: *Zeitschrift für Physik* 46.3 (mar. 1928), pp. 188–208.
- [11] Werner Heisenberg e Wolfgang Pauli. «Zur Quantendynamik der Wellenfelder». In: *Zeitschrift für Physik* 56 (1929), pp. 1–61.
- [12] DI Blokhintsev FM Gal’perin. In: *Pod Znamenem Marxisma* 6 (1934), p. 147.
- [13] W. Pauli e M. Fierz. «On Relativistic Field Equations of Particles With Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field». In: *Helv. Phys. Acta* 12 (1939), pp. 297–300.
- [14] Cécile Morette Dewitt e Dean Rickles. *The role of gravitation in physics : report from the 1957 Chapel Hill Conference*. 2011.
- [15] Pippa Storey e Claude Cohen-Tannoudji. «The Feynman path integral approach to atomic interferometry: A tutorial». In: *J. Phys. II* 4.11 (1994), pp. 1999–2027. DOI: 10.1051/jp2:1994103.
- [16] R. Colella, A. W. Overhauser e S. A. Werner. «Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference». In: *Phys. Rev. Lett.* 34 (23 giu. 1975), pp. 1472–1474. DOI: 10.1103/PhysRevLett.34.1472. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.34.1472>.
- [17] Helmut Rauch e Samuel A. Werner. *Lessons in Experimental Quantum Mechanics, Wave-Particle Duality, and Entanglement, 2nd edn*. Oxford, 2015. ISBN: 9780198712510.
- [18] Ulrich Bonse e Thomas Wroblewski. «Measurement of Neutron Quantum Interference in Noninertial Frames». In: *Phys. Rev. Lett.* 51 (16 ott. 1983), pp. 1401–1404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.1401. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1401>.
- [19] Susannah M. Dickerson et al. «Multiaxis Inertial Sensing with Long-Time Point Source Atom Interferometry». In: *Phys. Rev. Lett.* 111 (8 ago. 2013), p. 083001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.083001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.083001>.
- [20] N Yu et al. «Development of an atom-interferometer gravity gradiometer for gravity measurement from space». In: *Applied Physics B* 84.4 (set. 2006), pp. 647–652.
- [21] B. Canuel et al. «Exploring gravity with the MIGA large scale atom interferometer». In: *Scientific Reports* 8.1 (set. 2018), p. 14064. ISSN: 2045-2322. DOI: 10.1038/s41598-018-32165-z. URL: <https://doi.org/10.1038/s41598-018-32165-z>.

- [22] Jonathon Coleman. «MAGIS-100 at Fermilab». In: *PoS ICHEP2018* (2019), p. 021. DOI: 10.22323/1.340.0021.
- [23] Daniel A. Steck. *Quantum and Atom Optics*. revision 0.13.9, 22 July 2021. available online at <http://steck.us/teaching>.
- [24] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010. DOI: 10.1017/CB09780511976667.
- [25] John Preskill. *Lecture Notes on Quantum Information and Computation*. available online at <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph219>.
- [26] Michał Horodecki, Paweł Horodecki e Ryszard Horodecki. «Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions». In: *Physics Letters A* 223.1 (1996), pp. 1–8. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960196007062>.
- [27] Ryszard Horodecki et al. «Quantum entanglement». In: *Rev. Mod. Phys.* 81 (2 giu. 2009), pp. 865–942. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.865. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>.
- [28] Michael Hall e Marcel Reginatto. «On two recent proposals for witnessing non-classical gravity». In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 51 (lug. 2017). DOI: 10.1088/1751-8121/aaa734.
- [29] Charis Anastopoulos, Michalis Lagouvardos e Konstantina Savvidou. «Gravitational effects in macroscopic quantum systems: a first-principles analysis». In: 38.15 (lug. 2021), p. 155012. DOI: 10.1088/1361-6382/ac0bf9. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac0bf9>.
- [30] Richard Howl et al. «Non-Gaussianity as a Signature of a Quantum Theory of Gravity». In: *PRX Quantum* 2 (1 feb. 2021), p. 010325. DOI: 10.1103/PRXQuantum.2.010325. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.2.010325>.
- [31] Chiara Marletto e Vlatko Vedral. *Answers to a few questions regarding the BMV experiment*. 2019. arXiv: 1907.08994 [quant-ph].
- [32] Emanuele Marconato e Chiara Marletto. «Vindication of entanglement-based witnesses of non-classicality in hybrid systems». In: 54.37 (ago. 2021), p. 375301. DOI: 10.1088/1751-8121/ac1b78. URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac1b78>.
- [33] Chiara Marletto e Vlatko Vedral. «Witnessing nonclassicality beyond quantum theory». In: *Phys. Rev. D* 102 (8 ott. 2020), p. 086012. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.086012. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.086012>.

- [34] Ryan J. Marshman, Anupam Mazumdar e Sougato Bose. «Locality and entanglement in table-top testing of the quantum nature of linearized gravity». In: *Phys. Rev. A* 101 (5 mag. 2020), p. 052110. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.052110. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.101.052110>.
- [35] David Deutsch. «Constructor theory». In: *Synthese* 190.18 (dic. 2013), pp. 4331–4359. ISSN: 1573-0964. DOI: 10.1007/s11229-013-0279-z. URL: <https://doi.org/10.1007/s11229-013-0279-z>.
- [36] Kurt Gödel. «An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation». In: *Rev. Mod. Phys.* 21 (3 lug. 1949), pp. 447–450. DOI: 10.1103/RevModPhys.21.447. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.447>.
- [37] Charles H. Bennett et al. «Quantum nonlocality without entanglement». In: *Phys. Rev. A* 59 (2 feb. 1999), pp. 1070–1091. DOI: 10.1103/PhysRevA.59.1070. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.59.1070>.
- [38] Antoine Tilloy e Lajos Diósi. «Sourcing semiclassical gravity from spontaneously localized quantum matter». In: *Phys. Rev. D* 93 (2 gen. 2016), p. 024026. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.024026. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.024026>.
- [39] H Pino et al. «On-chip quantum interference of a superconducting microsphere». In: 3.2 (gen. 2018), p. 025001. DOI: 10.1088/2058-9565/aa9d15. URL: <https://doi.org/10.1088/2058-9565/aa9d15>.
- [40] Yair Margalit et al. «Realization of a complete Stern-Gerlach interferometer: Toward a test of quantum gravity». In: *Science Advances* 7.22 (2021), eabg2879. DOI: 10.1126/sciadv.abg2879. eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/sciadv.abg2879>. URL: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/sciadv.abg2879>.
- [41] Jen-Feng Hsu et al. «Cooling the Motion of Diamond Nanocrystals in a Magneto-Gravitational Trap in High Vacuum». In: *Scientific Reports* 6.1 (lug. 2016), p. 30125. ISSN: 2045-2322. DOI: 10.1038/srep30125. URL: <https://doi.org/10.1038/srep30125>.
- [42] Yair Margalit et al. *Realization of a complete Stern-Gerlach interferometer*. 2018. arXiv: 1801.02708 [quant-ph].
- [43] ICTP-SAIFR. *Challenges for witnessing quantum aspects of gravity in a lab*. 2021. URL: <https://www.ictp-saifr.org/qgem2021/> (visitato il 12/11/2021).
- [44] Simone Rijavec et al. «Decoherence effects in non-classicality tests of gravity». In: 23.4 (apr. 2021), p. 043040. DOI: 10.1088/1367-2630/abf3eb. URL: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/abf3eb>.

- [45] Berthold-Georg Englert, Julian Schwinger e Marlan O. Scully. «Is spin coherence like Humpty-Dumpty? I. Simplified treatment». In: *Foundations of Physics* 18.10 (ott. 1988), pp. 1045–1056. ISSN: 1572-9516. DOI: 10.1007/BF01909939. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01909939>.
- [46] J. Schwinger, M. O. Scully e B.-G. Englert. «Is spin coherence like Humpty-Dumpty?» In: *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters* 10.2 (giu. 1988), pp. 135–144. ISSN: 1431-5866. DOI: 10.1007/BF01384847. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01384847>.
- [47] Marlan O. Scully, Berthold-Georg Englert e Julian Schwinger. «Spin coherence and Humpty-Dumpty. III. The effects of observation». In: *Phys. Rev. A* 40 (4 ago. 1989), pp. 1775–1784. DOI: 10.1103/PhysRevA.40.1775. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.40.1775>.
- [48] Marios Christodoulou e Carlo Rovelli. «On the possibility of laboratory evidence for quantum superposition of geometries». In: *Physics Letters B* 792 (2019), pp. 64–68. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.015>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269319301698>.
- [49] Marios Christodoulou e Carlo Rovelli. «On the Possibility of Experimental Detection of the Discreteness of Time». In: *Frontiers in Physics* 8 (2020), p. 207. ISSN: 2296-424X. DOI: 10.3389/fphy.2020.00207. URL: <https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fphy.2020.00207>.
- [50] Sabine Hossenfelder. *Experimental Search for Quantum Gravity*. FIAS Interdisciplinary Science Series. Springer, Cham, 2018. ISBN: 9783319645360.
- [51] C Anastopoulos e B L Hu. «Probing a gravitational cat state». In: *Classical and Quantum Gravity* 32.16 (lug. 2015), p. 165022. ISSN: 1361-6382. DOI: 10.1088/0264-9381/32/16/165022. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/16/165022>.
- [52] Animesh Datta e Haixing Miao. «Signatures of the quantum nature of gravity in the differential motion of two masses». In: *Quantum Science and Technology* 6.4 (ago. 2021), p. 045014. ISSN: 2058-9565. DOI: 10.1088/2058-9565/ac1adf. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/2058-9565/ac1adf>.
- [53] Chiara Marletto e Vlatko Vedral. «Sagnac interferometer and the quantum nature of gravity». In: 5.5 (mag. 2021), p. 051001. DOI: 10.1088/2399-6528/abfd43. URL: <https://doi.org/10.1088/2399-6528/abfd43>.