ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

COBORDISMO FRAMED E VARIETÀ DI PONTRYAGIN

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
LUCA MIGLIORINI

Presentata da:
MARCELLO LAMBERTINI

Anno Accademico 2020-2021

Indice

Introduzione

L'oggetto di questa tesi è lo studio, dovuto prevalentemente al matematico russo Lev Pontryagin, del concetto di cobordismo framed e la sua messa in relazione con l'omotopia differenziabile tramite le varietà di Pontryagin.
Trattando di argomenti di topologia differenziale, l'attenzione sarà posta su varietà differenziabili e mappe lisce tra esse. Tuttavia si vedrà che questa restrizone non limita la rilevanza dei risultati alle strutture differenziabili, che comunque compongono un estesissimo panorama.
Dopo un primo capitolo con alcune definizioni di base e risultati utili nelle dimostrazioni successive, saranno presentati in due capitoli separati rispettivamente una breve introduzione alla teoria del grado, con particolare riguardo all'invarianza per omotopia, e la costruzione di Pontryagin del cobordismo framed, che porta a una dimostrazione piuttosto elaborata del Teorema del grado di Hopf.
Nonostante l'obiettivo principale di questa tesi sia esporre chiaramente la relazione tra teoria del cobordismo e omotopia, gli elementi di teoria del grado esposti nel secondo capitolo sono necessari per poter comprendere e apprezzare appieno i concetti presenti nel terzo e ultimo capitolo.

Capitolo 1

Premesse sulle varietà differenziabili

In questo capitolo sono presentati alcune definizioni e teoremi di base relativi alla teoria delle varietà differenziabili, su cui si concentra questa tesi.

1.1 Definizioni di base

In questa prima sezione si ricordano alcune definizioni di base di geometria differenziale, con lo scopo non di esporre una teoria ma di fissare la notazione che verrà usata in tutta la tesi.
Si presume che il lettore abbia familiarità con i concetti riportati di seguito. Pertanto saranno omessi i risultati più noti relativi alla teoria delle varietà differenziabili, comunque fondamentali per la piena comprensione di questa tesi e per i quali si rimanda a [2].

Definizione 1.1.1 (Spazio localmente euclideo)**.** Uno spazio topologico M si dice localmente euclideo di dimensione m se per ogni punto $p \in M$ esistono un intorno aperto U di p, un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e un omeomorfismo $\varphi : U \to A$.
Le coppie (U, φ) si dicono carte, mentre le funzioni $\varphi^{-1} \circ \psi : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ (dove (U, φ) e (V, ψ) sono due carte) si dicono funzioni di transizione.
Si osservi che le funzioni di transizione sono omeomorfismi, dunque per il teorema di invarianza del dominio la dimensione di M è ben definita (se M è connesso).

Definizione 1.1.2 (Varietà topologica)**.** Uno spazio topologico di Hausdorff, II-numerabile e localmente euclideo si dice varietà topologica.

Definizione 1.1.3 (Varietà con bordo)**.** Sia $H^n \subset \mathbb{R}^n$ il semispazio
$H^n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \ x_1 \geq 0\}$.
Uno spazio topologico L di Hausdorff, II-numerabile e localmente omeomorfo a H^n (ovvero in cui ogni punto ammette un intorno omeomorfo a un aperto di H^n) si dice varietà topologica di dimensione n con bordo.
L'insieme dei punti di L che corrispondono ai punti dell'iperpiano $x_1 = 0$ si dice bordo di L e si indica ∂L.
Si osservi che, per il teorema di invarianza del bordo, il bordo di L è ben definito.

Definizione 1.1.4 (Varietà differenziabile)**.** Una varietà topologica le cui funzioni di transizione siano C^∞ si dice varietà differenziabile.
Si osservi in particolare che ogni aperto di $\mathbb{R}^m$ è una varietà differenziabile.

Definizione 1.1.5 (Mappa liscia o differenziabile)**.** Sia $f : M \to N$ una funzione continua tra varietà differenziabili.
Se per ogni $p \in M$ esistono (U, φ) e (V, ψ) carte in un intorno rispettivamente di p e di $f(p)$ tali che $f(U) \subseteq V$ e che la composizione $\varphi^{-1} \circ f \circ \psi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ è di classe C^∞, allora f si dice liscia o differenziabile.
L'insieme delle mappe lisce $f : M \to \mathbb{R}$ si indica con $C^\infty(M)$.

Definizione 1.1.6 (Sottovarietà)**.** Sia L una varietà differenziabile di dimensione n.
Un sottoinsieme $S \subset L$ dotato della topologia di sottospazio e di una struttura di varietà differenziabile rispetto alla quale l'immersione $i : S \hookrightarrow L$ sia liscia si dice sottovarietà embedded di L.
Nel proseguimento di questa tesi ci si riferirà alle sottovarietà embedded semplicemente come sottovarietà. Se S ha dimensione $m \leq n$, l'intero $n-m$ di dice codimensione di S.

Definizione 1.1.7 (Vettori tangenti e spazio tangente)**.** Siano M una varietà differenziabile e $x \in M$. Una mappa lineare $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tale che

$$v(f \cdot g) = f(x) \cdot v(g) + g(x) \cdot v(f) \text{ per ogni } f, g \in C^\infty(M)$$

si dice vettore tangente a M in x.
L'insieme $T(M)_x$ di tutti i vettori tangenti a M in x si dice spazio tangente di M in x.
Se M ha dimensione m allora $T(M)_x$ è uno spazio vettoriale di dimensione m.

Una definizione equivalente di vettore tangente a M in x è quella di classe di curve lisce in M passanti per x modulo la relazione di tangenza:
$\gamma_1, \gamma_2 :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ si dicono tangenti se $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ per ogni $f \in C^\infty(M)$.

Si osservi che se M è un aperto di $\mathbb{R}^m$ allora per ogni $x \in M$ lo spazio tangente $T(M)_x$ è identificato naturalmente con $\mathbb{R}^m$, associando a $v \in \mathbb{R}^m$ l'applicazione

$$\frac{\partial}{\partial v} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

Definizione 1.1.8 (Differenziale)**.** Sia $f : M \to N$ una mappa liscia tra varietà differenziabili, e sia $x \in M$.
Il differenziale di f in x è l'applicazione lineare $df_x : T(M)_x \to T(N)_{f(x)}$ tale che per ogni $v \in T(M)_x$

$$df_x(v)(g) = v(g \circ f) \text{ per ogni } g \in C^\infty(N)$$

Definizione 1.1.9 (Segno del differenziale)**.** Sia $f : M \to N$ una mappa liscia tra varietà differenziabili di dimensione n e sia $x \in M$.
Ricordando che df_x è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione n, scelta

un'orientazione per ciascuno dei due spazi, si dice segno del differenziale di f in $x \in M$ l'intero:

$$sgn(df_x) = sgn(det(df_x))$$

con la convenzione che $sgn(0) = 0$.

Definizione 1.1.10 (Diffeomorfismo)**.** Sia $f : M \to N$ una mappa liscia tra varietà differenziabili.
Si dice che f è un diffeomorfismo se è invertibile con inversa differenziabile.
Si dice che f è un diffeomorfismo locale se ogni $x \in M$ ha un intorno aperto U tale che $f|_U : U \to f(U)$ è un diffeomorfsimo.

Si osservi che, per il teorema di invertibilità locale, se f è un diffeomorfismo (globale o locale) allora M e N hanno la stessa dimensione e df_x è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Definizione 1.1.11 (Spazio normale)**.** Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e sia $N \subset M$ una sottovarietà di dimensione $n < m$.
Se $x \in N$, lo spazio tangente $T(N)_x$ è un sottospazio di $T(M)_x$ di dimensione n.
Lo spazio quoziente $T(M)_x/T(N)_x$ si indica con $T(N)_x^\perp$ e si dice spazio normale a N in x.
Tale spazio ha dimensione $m - n$.

Si osservi che se su $T(M)_x$ è definito un prodotto interno lo spazio normale $T(N)_x^\perp$ è identificabile con l'ortogonale di $T(N)_x$ in $T(M)_x$.
Un importante teorema, per il quale si rimanda a [2], assicura che ogni varietà differenziabile ammette una famiglia di prodotti interni sugli spazi tangenti con proprietà di differenziabilità. Una tale famiglia si dice metrica Riemanniana e permette di definire lunghezze di curve, distanze e geodetiche. Questo fatto sarà sfruttato solamente nella dimostrazione del Teorema 3.2.2, dove si assumerà che una tale metrica esista.

Definizione 1.1.12 (Varietà orientata)**.** Una varietà differenziabile connessa L di dimensione n si dice orientabile se per ogni $x \in L$ esiste una scelta differenziabile di orientazione per $T(L)_x$.
La differenziabilità è da intendersi come la seguente proprietà: per ogni $x \in L$ esiste una carta locale (U, φ) con U intorno aperto di x tale che $d\varphi_y : T(L)_y \to \mathbb{R}^n$ preserva l'orientazione per ogni $y \in U$ (ovvero manda basi positivamente orientate in basi positivamente orientate).
Per convenzione, un'orientazione di una varietà 0-dimensionale è l'assegnazione di ± 1 a ciascun punto della varietà.
Si noti che, come gli spazi euclidei, una varietà orientabile ha esattamente due scelte di orientazione (per una dimostrazione si rimanda a [4]).

Definizione 1.1.13 (Orientazione indotta sul bordo)**.** Se L è una varietà con bordo, l'orientazione di L induce un'orientazione sulla varietà $(n-1)$-dimensionale ∂L nel modo che segue.
Se $x \in \partial L$, lo spazio normale $T(\partial L)_x^{\perp}$ ha dimensione 1, perciò, data una carta locale (U, φ) con U intorno aperto di x, il differenziale $d\varphi_x : T(L)_x \to \mathbb{R}^n$ manda $T(\partial L)_x^{\perp}$ in una retta.
Un vettore $v_1 \in T(\partial L)_x^{\perp}$ non nullo si dice interno se la sua immagine tramite $d\varphi_x$ giace sulla semiretta contenuta nel semispazio H^n, mentre si dice esterno altrimenti.
L'orientazione indotta di ∂L sarà quella determinata da una base $(v_2, ..., v_n)$ di $T(\partial L)_x$ tale che, dato $v_1 \in T(\partial L)_x^{\perp}$ un vettore esterno, la base $(v_1, v_2, ..., v_n)$ di $T(L)_x$ ha l'orientazione determinata dall'orientazione di L.

Definizione 1.1.14 (Omotopia differenziabile)**.** Due mappe lisce tra varietà differenziabili $f, g : X \to Y$ si dicono differenziabilmente omotope se esiste un'omotopia
$F : X \times [0, 1] \to Y$ (quindi tale che $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$ per ogni $x \in X$) di classe C^{∞}.

Definizione 1.1.15 (Isotopia differenziabile)**.** Due diffeomorfismi tra varietà differenziabili $f, g : X \to Y$ si dicono differenziabilmente isotopi se esiste un'omotopia differenziabile $F : X \times [0,1] \to Y$ tra f e g tale che per ogni $t \in [0,1]$ la mappa $x \mapsto F(x,t)$ sia un diffeomorfismo tra X e Y.

Di seguito è riportato un risultato che garantisce l'esistenza di un diffeomorfismo isotopo all'identità che mandi un fissato punto di una varietà connessa in un altro punto di tale varietà. Questo fatto sarà usato in alcune dimostrazioni del Capitolo 2.

Proposizione 1.1.1. *Sia N una varietà differenziabile connessa e siano y e z punti dell'interno di N. Allora esiste un diffeomorfismo $h : N \to N$ differenziabilmente isotopo all'identità che manda y in z.*

Dimostrazione. Si consideri la relazione di equivalenza di isotopia nell'interno di N così definita: z_0 è isotopo a z_1 se eisiste un diffeomorfismo differenziabilmente isotopo all'identità che manda z_0 in z_1.
Chiaramente dimostrare il teorema è equivalente a mostrare che esiste una sola classe di equivalenza per questa relazione.
Poiché N - e quindi il suo interno - è connessa, sarà sufficiente mostrare che le classi di equivalenza sono aperte.

Sia $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione liscia tale che

$$\psi(x) > 0 \text{ per } \|x\| < 1$$

$$\psi(x) = 0 \text{ per } \|x\| \geq 1$$

Fissato un vettore unitario $c \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ si considerino le equazioni differenziali

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \psi(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ per } i = 1, 2, ..., n$$

Per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tali equazioni hanno un'unica soluzione $F_t(\bar{x}) = x(t)$ definita per $t \in \mathbb{R}$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = \bar{x}$.
Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ la mappa F_{t_0} è un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^n$ in se stesso. Infatti, si verifica facilmente che F_{t_0} è differenziabile e che $F_{t_0} \circ F_{-t_0} = F_0 = id_{\mathbb{R}^n}$.
Dunque al variare di t la funzione F_t è un'isotopia differenziabile tra l'identità F_0 e F_1 .

Inoltre, per ogni t, la funzione F_t lascia fissati tutti i punti di $\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$, mentre, scegliendo c in modo opportuno, F_1 porterà l'origine di $\mathbb{R}^n$ in un qualsiasi punto di $B(0,1)$.

Siano ora $z_0 \in int(N)$ e (U, φ) una carta locale per N, con $U \subset N$ un intorno aperto di z_0, tale che $B(0,1) \subset \varphi(U)$ e $\varphi(z_0) = 0$ (ciò è sempre possibile, perché $\varphi(U)$ contiene $B(\varphi(z_0), \epsilon)$ per qualche $\epsilon > 0$, e $B(\varphi(z_0), \epsilon)$ è diffeomorfa a $B(0,1)$).
Se $z_1 \in \varphi^{-1}(B(0,1))$, allora, scelto opportunamente $c \in S^{n-1}$, si consideri $h : N \to N$ la funzione così definita:

$$h(z) = \begin{cases} \varphi^{-1}(F_1(\varphi(z))) & \text{se } z \in U \\ z & \text{se } z \in N \setminus U \end{cases}$$

La scelta di c permette di definire h in modo che mandi z_0 in z_1. Inoltre, essendo composizione di diffeomorfismi, h è un diffeomorfismo.
Da come è stata definita F_t segue che la funzione $G : N \times [0,1] \to N$ definita da

$$G(z,t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(F_t(\varphi(z))) & \text{se } z \in U \\ z & \text{se } z \in N \setminus U \end{cases}$$

è un'isotopia differenziabile tra l'identità e h.

Pertanto, fissato $z_0 \in int(N)$, esiste un intorno di z_0, per esempio $\varphi^{-1}(B(0,1)))$, i cui punti sono tutti isotopi a z_0.
Equivalentemente, la classe di isotopia di z_0 è aperta, il che conclude la dimostrazione per quanto inizialmente osservato. $\square$

1.2 Valori regolari

In questa sezione vengono riportati alcuni risultati di geometria differenziale, relativi ai valori regolari di mappe lisce tra varietà differenziabili, che saranno utili successivamente.

Definizione 1.2.1 (Punti critici e punti regolari)**.** Siano M e N varietà di dimensione rispettivamente m e n, con $m \geq n$, e sia $f : M \to N$ una funzione differenziabile.
Gli $x \in M$ tali che df_x ha rango $< n$ si dicono punti critici di f.
Gli $x \in M$ tali che df_x ha rango n si dicono punti regolari.

Si osservi che, nel caso in cui $m = n$, un punto $x \in M$ è regolare se e solo se $sgn(df_x) \neq 0$.
In tal caso, se in aggiunta M e N sono varietà orientate, $sgn(df_x)$ è $+1$ se df_x preserva l'orientazione di $T(M)_x$, mentre è -1 se la inverte.
Si osservi anche che, per il teorema della funzione inversa, l'insieme dei punti regolari è un aperto e quindi l'insieme dei punti critici è un chiuso.

Definizione 1.2.2 (Valori critici e valori regolari)**.** Chiamato C l'insieme dei punti critici di f, gli elementi di $f(C)$ si dicono valori critici di f, mentre gli elementi del suo complementare in N si dicono valori regolari di f.
In altre parole, un elemento di $y \in N$ si dice valore critico se è immagine tramite f di almeno un punto critico, mentre si dice valore regolare in caso contrario.

Di seguito è riportato l'enunciato del Teorema di Sard e Brown. Per una dimostrazione di questo risultato di analisi si veda [1].
L'importanza del Teorema di Sard e Brown in questa tesi è dovuta a un suo corollario ottenuto applicando il teorema alla geometria differenziale.

Teorema 1.2.1 (di Sard e Brown)**.** *Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ di classe C^∞. Se $A := \{x \in U |\ df_x \text{ ha rango} < m\}$, allora $\mu_{Leb}(f(A)) = 0$*

Corollario 1.2.2. *Siano M e N varietà differenziabili. L'insieme dei valori regolari di una mappa liscia $f : M \to N$ è denso in N.*
Inoltre, se $g : M \to N$ è un'altra mappa liscia, allora esiste $y \in N$ valore regolare sia di

f che di g.

La seguente proposizione mostra come sotto opportune ipotesi $|f^{-1}(y)|$ sia una funzione localmente costante del valore regolare y. Questo risultato sarà fondamentale per definire il grado di Brouwer nel Capitolo 2.

Proposizione 1.2.3. *Siano M e N varietà, con M compatta, $f : M \to N$ una mappa liscia e y un valore regolare di f.*
Allora $f^{-1}(y)$ ha cardinalità finita ed esiste un intorno aperto $V \subset N$ di y tale che $|f^{-1}(z)| = |f^{-1}(y)|$ per ogni $z \in V$.

Dimostrazione. Poiché y è un valore regolare di f, per ogni $x \in f^{-1}(y)$ esiste un intorno U_x di x su cui f è un diffeomorfismo, quindi $f^{-1}(y)$ è un insieme discreto.
Inoltre, essendo un chiuso di M (che è compatta), $f^{-1}(y)$ è un compatto.
Pertanto $f^{-1}(y)$ è un insieme finito.

Sia ora $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_k\}$ e siano $U_1, ..., U_k$ intorni aperti dei punti di $f^{-1}(y)$ a due a due disgiunti e diffeomorfi a $V_1, ..., V_k$ intorni aperti di y. Si consideri l'insieme

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_k \setminus f(M - \bigcup_{j=1}^{n} U_k).$$

V è differenza tra un'intersezione finita di aperti e l'immagine di un compatto tramite una funzione continua (che è compatta e quindi chiusa poiché N è uno spazio di Hausdorff), pertanto è un aperto contenente y.
Se z è un elemento di V, la preimmagine di z è costituita esattamente da un punto per ogni U_i e ha pertanto cardinalità $k = |f^{-1}(y)|$. □

Si riporta di seguito il teorema delle funzioni implicite che mostra come, data una mappa liscia tra varietà differenziabili, la preimmagine di un valore regolare sia una sottovarietà del dominio.
A questo risultato si appoggerà la definizione delle varietà di Pontryagin nel Capitolo 3.

Teorema 1.2.4 (delle funzioni implicite)**.** *Siano M e N varietà differenziabili di dimensione rispettivamente m e n, con $m \geq n$ e sia $f : M \to N$ una mappa liscia. Se $y \in N$ è un valore regolare di f, allora l'inisieme $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m - n$.*

Dimostrazione. Sia $x \in f^{-1}(y)$ e siano (U, φ) una carta locale per M con U intorno aperto di x e (V, ψ) una carta locale per N con V intorno aperto di y.
Sia $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(U)$ la mappa compostae e siano $\tilde{y} = \psi(y)$ e $\tilde{x} = \varphi(x)$.
Poiché φ e ψ sono diffeomorfismi, $\tilde{y}$ è un valore regolare di F. Pertanto $dF_{\tilde{x}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha rango n.
Si ha quindi che $Ker(dF_{\tilde{x}})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ di dimensione $m - n$.
Sia $L : \mathbb{R}^m :\to \mathbb{R}^{m-n}$ un'applicazione lineare che sia iniettiva su $Ker(dF_{\tilde{x}})$, e si definisca $G : \varphi(U) \to V \times \mathbb{R}^{m-n}$ come:

$$G(z) := (F(z), L(z))$$

Poiché L è lineare, si ha che $dG_{\tilde{x}} = (dF_{\tilde{x}}, L) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è non singolare. Quindi G è un diffeomorfismo locale, ovvero esiste un intorno aperto $\widetilde{U} \subset \varphi(U)$ di $\tilde{x}$ diffeomorfo a un intorno aperto $\widetilde{V}$ di $(\tilde{y}, L(\tilde{x}))$.
In particolare, G è biiettiva su $\widetilde{U}$, quindi l'immagine di $F^{-1}(\tilde{y}) \cap \widetilde{U}$ tramite G è tutto $(\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap \widetilde{V}$.
Dunque $F^{-1}(\tilde{y}) \cap \widetilde{U}$ è diffeomorfo a $(\{\tilde{y}\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap \widetilde{V}$, che è ovviamente diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$.
In conclusione, ricordando che φ e ψ sono diffeomorfismi, anche ogni $x \in f^{-1}(y) = \varphi(F^{-1}(\tilde{y}))$ ha un intorno aperto $\varphi^{-1}(\widetilde{U})$ diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$. Quindi $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m - n$.

□

La proposizione seguente, anch'essa utile per la definizione delle varietà di Pontryagin nel Capitolo 3, mostra come il differenziale di una mappa liscia agisce sugli spazi tangente e normale alla preimmagine di un valore regolare.

Proposizione 1.2.5. *Siano M e N varietà differenziabili di dimensione rispettivamente m e n, con $m \geq n$, e sia $f : M \to N$ una mappa liscia.*

Siano $y \in N$ un valore regolare di f, $X = f^{-1}(y)$ e $x \in X$.
Allora esiste un isomorfismo naturale tra $T(X)_x$, ovvero lo spazio tangente alla preimmagine di y, e $Ker(df_x)$, ovvero il nucleo dell'applicazione $df_x : T(M)_x \to T(N)_y$.

Dimostrazione. Siano $i : X \hookrightarrow M$ e $j : \{y\} \hookrightarrow N$ le inclusioni e sia $F : X \to \{y\}$ la restrizione di f a X.
Si ha che $f \circ i = j \circ f|_X$, da cui segue che $df_x \circ di_x = dj_y \circ dF_x$. Pertanto $di_x(T(X)_x) \subseteq Ker(df_x)$.
Poiché df_x ha rango n e di_x è iniettiva, necessariamente $dim(Ker(df_x)) = m - n = dim(T(X)_x) = dim(di_x(T(X)_x))$.
Pertanto $di_x(T(X)_x) = Ker(df_x)$ e di_x è l'isomorfismo cercato.

Si osservi che ciò implica in particolare che df_x manda $T(X)_x^{\perp}$ isomorficamente in $T(N)_y$.
□

La proposizione seguente è necessaria alla dimostrazione della Proposizione 1.2.7, la quale raffina quanto dimostrato nella Proposizione 1.2.4 prendendo come dominio una varietà con bordo e mostrando che la preimmagine di un valore regolare è a sua volta una varietà con bordo e che tale bordo giace sul bordo del dominio.
Questo risultato permetterà, nel Capitolo 3, di estendere la costruzione della relazione tra varietà di Pontryagin e omotopia alle varietà con bordo.

Proposizione 1.2.6. *Siano M una varietà differenziabile senza bordo di dimensione m e $f : M \to \mathbb{R}$ una mappa liscia. Se $y \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f, allora l'inisieme $A = \{x \in M \mid f(x) \geq y\}$ è una varietà differenziabile di dimensione m con bordo $f^{-1}(y)$.*

Dimostrazione. Sia $x \in A$ e siano (U, φ) una carta locale per M con $U \subset \mathbb{R}^m$ un intorno aperto di x e $\tilde{x} = \varphi(x)$.

Si consideri inizialmente il caso in cui $f(x) > y$.
Per continuità di $f \circ \varphi$, esiste un intorno aperto $\widetilde{U} \subset \varphi(U)$ di $\tilde{x}$ tale che per ogni $z \in \widetilde{U}$ valga $f \circ \varphi(z) > y$.
Pertanto x ha un intorno aperto $\varphi(\widetilde{U}) \subset A$ diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^m$.

Se invece $f(x) = y$, si può ragionare come nella Proposizione 1.2.4.
Sia F la composizione $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$.
Poiché φ è un diffeomorfismo, y è un valore regolare di F, quindi $Ker(dF_{\tilde{x}})$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ dimensione 1.
Sia quindi $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ un'applicazione lineare iniettiva su $Ker(dF_{\tilde{x}})$ e si definisca $G : \varphi(U) \to \mathbb{R}^m$ come:

$$G(z) := (F(z), L(z))$$

Poiché L è lineare si ha che $dG_{\tilde{x}} = (dF_{\tilde{x}}, L) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è non singolare. Quindi G è un diffeomorfismo locale, ovvero esiste un intorno aperto $\widetilde{U} \subset \varphi(U)$ di $\tilde{x}$ diffeomorfo a un intorno aperto V di $(y, L(\tilde{x}))$.
In particolare, G è biiettiva su $\widetilde{U}$. Quindi l'immagine di $F^{-1}(y) \cap \widetilde{U}$ tramite G è tutto $(\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$.
Inoltre l'immagine di $\varphi(A) \cap \widetilde{U}$ tramite G è $([y, +\infty[\times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V$, che è chiaramente diffeomorfo a un aperto del semispazio H^m.
In conclusione, ricordando che φ è un diffeomorfismo, anche ogni $x \in A \cap f^{-1}(y)$ ha un intorno aperto $\varphi^{-1}(\widetilde{U}) \cap A$ diffeomorfo a un aperto di H^m. Quindi A è una varietà differenziabile di dimensione m con bordo $f^{-1}(y)$.

□

Proposizione 1.2.7. *Siano M una varietà differenziabile con bordo di dimensione m e N una varietà differenziabile di dimensione $n < m$ e sia $f : M \to N$ una mappa liscia. Se $y \in N$ è un valore regolare di f e di $f|_{\partial M}$, allora l'inisieme $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m - n$ con bordo $f^{-1}(y) \cap \partial M$.*

Dimostrazione. Siano $x \in f^{-1}(y)$, (U, φ) una carta locale per M con U intorno aperto di x e (V, ψ) una carta locale per N con V intorno aperto di y.
Sia inoltre $F = \varphi^{-1} \circ f \circ \psi$ e siano $\tilde{x} = \varphi(x) \in \varphi(U)$ e $\tilde{y} = \psi(y) \in \psi(V)$.
Se $\tilde{x}$ è un punto dell'interno di H^m, allora per la Proposizione 1.2.4 intorno a $\tilde{x}$ l'insieme $F^{-1}(\tilde{y})$ è una varietà differenziabile, e pertanto lo è anche $f^{-1}(y) = \varphi^{-1}(F^{-1}(\tilde{y}))$ intorno a x.

Se invece $\tilde{x} \in \partial H^m$ sia $\widetilde{U} \subset \varphi(U)$ un suo intorno aperto in $\mathbb{R}^m$ tale che F non ha punti critici in $\widetilde{U} \cap H^m$, e sia $G : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ una mappa liscia che estende F senza punti critici.
Poiché G non ha punti critici sull'aperto $\widetilde{U}$, l'insieme $G^{-1}(\tilde{y})$ è una varietà differenziabile di dimensione $m - n$ per la Proposizione 1.2.4.
Se $\pi : G^{-1}(\tilde{y}) \to \mathbb{R}$ è la proiezione della coordinata x_1, allora 0 è un valore regolare di π.
Infatti, preso $z \in G^{-1}(\tilde{y})$, il differenziale $d\pi_z : T(G^{-1}(\tilde{y})) \to \mathbb{R}$ ha rango 0 se e solo se $d\pi_z$ è la funzione identicamente nulla, il che accade se e solo se π è costante in un intorno di z.
Tuttavia, se $z \in \pi^{-1}(0)$ e π è identicamente nulla intorno a z, allora $T(G^{-1}(\tilde{y}))_z$ è contenuto in $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$.
Ciò contraddice l'ipotesi che z sia un punto regolare di $F|_{\partial H^m}$ (dovuta all'ipotesi che y sia un valore regolare di $f|_{\partial M}$), perché:

$$T(G^{-1}(\tilde{y}))_z = \text{ (per la Proposizione 1.2.5) } Ker(dG_z) = Ker(dF_z) \nsubseteq T(\partial H^m)_z = \{0\}\times\mathbb{R}^{m-1}.$$

Pertanto, per la Proposizione 1.2.6, l'insieme $G^{-1}(\tilde{y}) \cap H^m = F^{-1}(\tilde{y}) \cap \widetilde{U} = \{z \in G^{-1}(\tilde{y}) \mid \pi(z) \geq 0\}$ ha una struttura di $(m-n)$-varietà differenziabile con bordo $\pi^{-1}(0) = F^{-1}(\tilde{y}) \cap \partial H^m$.
In conclusione, anche $U \cap f^{-1}(y) = \varphi(F^{-1}(\tilde{y})) \cap \widetilde{U}$ è un intorno di x in $f^{-1}(y)$ diffeomorfo a una $(m-n)$-varietà differenziabile con bordo ed è pertanto una $m-n$ varietà differenziabile con bordo $U \cap f^{-1}(y) \cap \partial M$. $\square$

Capitolo 2

Cenni di Teoria del Grado

In questo capitolo verranno definiti, tramite strumenti di geometria differenziale, il grado di Brouwer e il grado modulo 2 di mappe lisce tra varietà differenziabili. Inoltre si dimostrerà che entrambi sono invarianti per omotopia differenziabile, ognuno dei due sotto determinate ipotesi di orientabilità del dominio.
È importante tenere a mente che in generale nessuno dei due è un invariante completo, ovvero che due funzioni con lo stesso grado (di Brouwer o modulo 2) non sono necessariamente omotope.

Il grado di Brouwer ha un ruolo centrale nel teorema di Hopf (Capitolo 3, Sezione 3), il risultato più avanzato presentato in questa tesi, dove verrà mostrato che, per mappe lisce da varietà di dimensione p connesse, senza bordo e orientabili a valori in S^p, tale invariante è invece completo, ovvero due mappe con stesso grado sono differenziabilmente omotope.

Il grado modulo 2 risulterà essere un buon sostituto del grado di Brouwer nello studio di mappe che hanno come dominio varietà connesse, senza bordo e non orientabili.
Infatti, alla fine del Capitolo 3, in un teorema analogo al teorema di Hopf si dimostrerà che il grado modulo 2 è un invariante completo per omotopia differenziabile se si considerano funzioni da varietà di dimensione p non orientabili a valori in S^p.

2.1 Grado di Brouwer

In questa sezione sono presentati alcuni risultati che permettono di definire il grado di Brouwer di una funzione, oltre a mostrarne l'invarianza per omotopia differenziabile. Per semplificare la notazione, prima di mostrare che la definizione del grado non dipende dal valore regolare considerato, definiamo il grado di Brouwer relativo a un valore regolare fissato.

Definizione 2.1.1 (Grado di Brouwer relativo a un valore regolare)**.** Siano M e N varietà senza bordo n-dimensionali orientate, con M compatta e N connessa. Sia $f : M \to N$ una mappa liscia e sia y un valore regolare di f.
Si chiama grado di Brouwer di f relativo a y l'intero

$$deg(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn(df_x)$$

Questa definizione, come evidenziato dalla notazione, dipende chiaramente dalla scelta del valore regolare y. Lo scopo dei prossimi risultati sarà proprio eliminare questa dipendenza.
In particolare, il Teorema 2.1.3 mostra che, prendendo valori regolari diversi y e z, gli interi $deg(f, y)$ e $deg(f, z)$ risultano uguali e permette pertanto di definire univocamente l'intero $deg(f)$: il grado di Brouwer di f.
Alla dimostrazione di questo fatto è necessario premettere due risultati: la proposizione seguente e il Teorema 2.1.2, che sarà anche il principale strumento utilizzato nella dimostrazione dell'invarianza per omotopia differenziabile del grado di Brouwer.

Proposizione 2.1.1. *Siano M e N varietà senza bordo n-dimensionali orientate, con M compatta e N connessa e sia $f, g : M \to N$ una mappa liscia.*
Si supponga che M sia il bordo di una varietà compatta orientata X tale che l'orientazione di M sia quella di ∂X.
Se f può essere estesa a una mappa liscia $F : X \to N$, allora $deg(f, y) = 0$ per ogni valore regolare y di f.

Dimostrazione. Si consideri inizialmente il caso in cui y è un valore regolare anche di F.
Dalla Proposizione 1.2.2 segue che $F^{-1}(y)$ è una varietà 1-dimensionale compatta.
Pertanto $F^{-1}(y)$ ha un numero finito di componenti connesse, che sono diffeomorfe ad archi e circonferenze, con solo gli estremi degli archi appartenenti a $M = \partial X$.
Se $\gamma \subseteq F^{-1}(y)$ è un tale arco con $\partial\gamma = \{a\} \sqcup \{b\}$, allora $sgn(df_a) + sgn(df_b) = 0$.
Per mostrare ciò, si definisca un'orientazione di γ nel seguente modo: per ogni $z \in \gamma$ sia $v_1(z) \in T_x(\gamma)$ di norma unitaria il primo vettore di una base positivamente orientata $v = (v_1(z), v_2(z), ..., v_n(z), v_{n+1}(z))$ di $T(X)_z$.
Se la funzione dF_z manda $(v_2(z), ..., v_{n+1}(z))$ in una base positivamente orientata di $T(N)_y$, allora l'orientazione cercata di γ è quella data da $v_1(z)$, altrimenti si considera l'orientazione opposta.
Poiché $v_1(z)$ è una funzione continua, si può assumere senza perdita di generalità che $v_1(a)$ appartenga al semispazio esterno di $T(X)_a$ e che $v_1(b)$ appartenga al semispazio interno di $T(X)_b$.
In conclusione, siccome $(v_2(a), ..., v_{n+1}(a))$ è una base positivamente orientata per $T(M)_a$ che viene mandata tramite df_a in una base positivamente orientata di $T(N)_y$, si ha che $sgn(df_a) = +1$.
Analogamente si ha che $sgn(df_b) = -1$.
Sommando sugli estremi degli archi che compongono $F^{-1}(y) \cap M = f^{-1}(y)$ si ottiene che $deg(f, y) = 0$.

Se invece y è un valore critico di F, per la Proposizione 1.2.3 esiste $U \subset N$ intorno aperto di y tale che $deg(f, y) = deg(f, z)$ per ogni $z \in U$.
Per il Corollario 1.2.2 l'insieme dei valori regolari di F è denso in N, quindi esiste $z_0 \in U$ valore regolare di F.
Dalla prima parte della dimostrazione segue che $deg(f, y) = deg(f, z_0) = 0$. □

Il seguente teorema, qui inserito perché necessario per la dimostrazione del Teorema 2.1.2, sarà in realtà fondamentale nella Sezione 3.3, perché mostra che due funzioni differenziabilmente omotope hanno stesso grado di Brouwer relativo a un valore regolare comune.
Questo risultato sarà poi facilmente generalizzato al grado di Brouwer propriamente detto una volta assicurata la sua buona definizione (si veda il Teorema 2.1.4).

Teorema 2.1.2. *Siano M e N varietà senza bordo n-dimensionali orientate, con M compatta e N connessa e siano $f, g : M \to N$ mappe lisce differenziabilmente omotope. Allora, se y è un valore regolare sia di f che di g, si ha che $deg(f, y) = deg(g, y)$.*

Dimostrazione. Sia $F : M \times [0, 1] \to N$ un'omotopia differenziabile tra f e g.
La varietà differenziabile orientata $M \times [0, 1]$ ha come bordo $(M \times \{0\}) \sqcup (M \times \{1\})$.
Considerando su entrambe le copie di M l'orientazione indotta, si ottiene in un caso la stessa orientazione di M e nell'altro l'orientazione opposta.
Si assuma, senza perdita di generalità, che $M \times \{0\}$ abbia la stessa orientazione di M, mentre $M \times \{1\}$ quella opposta.
Chiaramente la funzione F estende la funzione $F|_{\partial(M\times[0,1])}$, che soddisfa le ipotesi della Proposizione 2.1.1. Quindi, indicando con G la funzione $F|_{\partial(M\times[0,1])}$, si ha che

$$0 = deg(G, y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} sgn(dG_{x\times\{0\}}) \ + \sum_{z\in g^{-1}(y)} sgn(dG_{z\times\{1\}}) = deg(f, y) - deg(g, y),$$

da cui segue che $deg(f, y) = deg(g, y)$. □

Si può ora dimostrare l'indipendenza di $deg(f, y)$ dalla scelta del valore regolare y.

Teorema 2.1.3. *Siano M e N varietà senza bordo n-dimensionali orientate, con M compatta e N connessa. Sia $f : M \to N$ una mappa liscia e siano y e z valori regolari di f. Allora $deg(f, y) = deg(f, z)$.*

Dimostrazione. Sia $h : N \to N$ un diffeomorfismo differenziabilmente isotopo all'identità tale che $h(y) = z$ (la cui esistenza è garantita dalla Proposizione 1.1.1).
Poiché h preserva l'orientazione di N ed è iniettivo, si ha che

$$deg(f, y) = deg(h \circ f, h(y)) = deg(h \circ f, z).$$

Essendo f differenziabilmente omotopa a $h \circ f$, per il Teorema 2.1.1

$$deg(f, y) = deg(h \circ f, z) = deg(f, z).$$

□

Si definisce dunque il grado di Brouwer di una funzione f come il grado di f relativo a un suo qualsiasi valore regolare.
Tale intero sarà indicato con $deg(f)$.

Senza troppo sforzo si può a questo punto dimostrare il seguente risultato di invarianza per omotopia differenziabile, che è valido per generiche varietà della stessa dimensione.

Teorema 2.1.4. *Siano M e N varietà senza bordo n-dimensionali orientate, con M compatta e N connessa e siano $f, g : M \to N$ mappe lisce differenziabilmente omotope. Allora $deg(f) = deg(g)$.*

Dimostrazione. Per il Corollario 1.2.2 esiste $z \in N$ valore regolare sia di f che di g.
Per il Teorema 2.1.2, ricordando che $deg(f) = deg(f, y)$ con y valore regolare qualsiasi, si ha che:

$$deg(f) = deg(f, z) = deg(g, z) = deg(g).$$

□

Col Teorema di Hopf (Capitolo 3) si vedrà che, quando il codominio è la sfera S^n, vale anche l'implicazione inversa.

2.2 Grado modulo 2

In questa sezione sono presentati alcuni risultati che permettono di definire il grado modulo 2 ed è dimostrata la sua invarianza per omotopia differenziabile.

Il grado modulo 2 di una funzione non è altro che la classe di resto modulo 2 della cardinalità della preimmagine di un qualsiasi valore regolare della funzione stessa. Esso descrive quindi la parità del numero di punti del dominio che vengono mandati in un qualsiasi valore regolare.
Analogamente al grado di Brouwer, per definire formalmente il grado modulo 2 è necessario dimostrare che tale parità non dipende dalla scelta del valore regolare. Ciò sarà fatto nel Teorema 2.2.2, per la cui dimostrazione è necessaria la seguente proposizione:

Proposizione 2.2.1. *Siano M e N varietà di dimensione m, con M compatta e senza bordo e N connessa. Siano $f, g : M \to N$ funzioni differenziabilmente omotope. Se $y \in N$ è un valore regolare sia di f che di g, allora $|f^{-1}(y)| \equiv |g^{-1}(y)|$ mod 2.*

Dimostrazione. Sia $F : M \times [0,1] \to N$ un'omotopia differenziabile tra f e g.
Si consideri inizialmente il caso in cui y è un valore regolare anche di F.
Dalla Proposizione 1.2.4 segue che $F^{-1}(y)$ è una 1-varietà differenziabile, con bordo costituito da

$$F^{-1}(y) \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) = (f^{-1}(y) \times \{0\}) \cup (g^{-1}(y) \times \{1\}), \text{ e quindi}$$

$$|\partial(F^{-1}(y))| = |f^{-1}(y)| + |g^{-1}(y)|.$$

Essendo $F^{-1}(y)$ un chiuso di M, che è compatta, $F^{-1}(y)$ è compatta, ed è pertanto unione disgiunta di un numero finito di archi e circonferenze.
Segue che il numero di punti del suo bordo deve essere pari, ovvero:

$$|\partial(F^{-1}(y))| \equiv_2 0 \iff |f^{-1}(y)| \equiv_2 |g^{-1}(y)|.$$

Se invece y è un valore critico di F, per la Proposizione 1.2.3 esistono $U_1, U_2 \subset N$ intorni aperti di y tali che:

$$|f^{-1}(y)| = |f^{-1}(y')| \text{ per ogni } y' \in U_1$$

$$|g^{-1}(y)| = |g^{-1}(y'')| \text{ per ogni } y'' \in U_2$$

Scelto un valore regolare z di F in $U_1 \cap U_2$ (che esiste perché l'insieme dei valori regolari di F è denso in N per il Corollario 1.2.2) si ha che:

$$|f^{-1}(y)| = |f^{-1}(z)| \equiv |g^{-1}(z)| = |g^{-1}(y)| \text{ mod } 2.$$

$\square$

Teorema 2.2.2. *Siano M, N varietà differenziabili di dimensione m con M compatta senza bordo e N connessa e sia $f : M \to N$ una mappa liscia. Se $y, z \in N$ sono valori regolari di f, allora $|f^{-1}(y)| \equiv |f^{-1}(z)|$ mod 2.*

Dimostrazione. Sia $h : N \to N$ un diffeomorfismo differenziabilmente isotopo all'identità che manda y in z. Allora chiaramente z è un valore regolare di $h \circ f$.
Dato che h è omotopo all'identità - e quindi $h \circ f$ è omotopo a f - per la Proposizione 2.2.1 si ha che

$$|(h \circ f)^{-1}(z)| \equiv |f^{-1}(z)| \text{ mod } 2.$$

È semplice verificare che

$$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(y).$$

Quindi

$$|f^{-1}(z)| \equiv |f^{-1}(y)| \text{ mod } 2.$$

$\square$

Si può pertanto definire univocamente il grado modulo 2 di una funzione f come la classe di resto modulo 2 di un qualsiasi valore regolare di f.
Il grado modulo 2 di f si indica con $deg_2(f)$.

A questo punto si può con poco sforzo dimostrare che due mappe differenziabilmente omotope hanno stesso grado modulo 2.
Nel Capitolo 3 si vedrà come, analogamente al grado di Brouwer per le varietà orientabili, se il codominio è una sfera e il dominio è non orientabile vale anche il viceversa.

Teorema 2.2.3. *Siano M, N varietà differenziabili di dimensione m con M compatta senza bordo e N connessa e siano $f, g : M \to N$ mappe lisce differenziabilmente omotope. Allora $deg_2(f) = deg_2(g)$.*

Dimostrazione. Per il Corollario 1.2.2 esiste $y \in N$ valore regolare sia di f che di g. Dalla Proposizione 2.2.1 segue che

$$deg_2(f) \equiv_2 |f^{-1}(y)| \equiv_2 |g^{-1}(y)| \equiv_2 deg_2(g).$$

$\square$

Capitolo 3

Cobordismo framed

In questo capitolo vengono introdotti strumenti ad hoc - il cobordismo framed e le varietà di Pontryagin - per dimostrare il teorema di Hopf nel caso differenziabile.
Nonostante tali strumenti si basino su un approccio differenziale, con un interesse più ristretto rispetto a metodi algebrici, i risultati relativi alle varietà di Pontryagin permettono non solo di utilizzare informazioni riguardanti le varietà nella teoria dell'omotopia, ma anche il viceversa.

3.1 Cobordismo e framing

In questa sezione verranno introdotti i concetti di cobordismo e di cobordismo framed, che risultano essere relazioni di equivalenza tra sottovarietà della stessa dimensione di una data varietà.
Il cobordismo è intuitivamente la proprietà di due sottovarietà di essere il bordo di una varietà di una dimensione superiore.
Nella sezione successiva tale concetto verrà applicato alle varietà di Pontryagin, ovvero le preimmagini di valori regolari tramite funzioni da una varietà a una sfera, e si vedrà che la classe di omotopia differenziabile di una tale funzione è univocamente determinata dalla classe di cobordismo framed della sua varietà di Pontryagin.

Definizione 3.1.1 (Cobordismo)**.** Sia L una varietà compatta di dimensione d. Siano M e N due sottovarietà compatte di dimensione n con $\partial M \neq \emptyset$ e $\partial N \neq \emptyset$. Se esiste $\epsilon > 0$ tale che l'insieme

$$M \times [0, \epsilon[\cup N \times]1 - \epsilon, 1]$$

può essere esteso a una varietà compatta $X \subset L \times [0, 1]$ con bordo

$$\partial X = (M \times \{0\}) \cup (N \times \{1\}) = X \cap (L \times \{0\} \cup L \times \{1\}),$$

allora M e N si dicono cobordanti, mentre X si dice cobordismo.

Definizione 3.1.2 (Framing)**.** Un framing della sottovarietà $N \subset L$ è una funzione liscia $v(x) = (v_1(x), ..., v_{d-n}(x))$ che associa a $x \in N$ una base di $T(N)_x^{\perp}$. La coppia (N, v) si dice sottovarietà framed di L.

Definizione 3.1.3 (Cobordismo framed)**.** Siano (N, v) e (M, w) due sottovarietà framed di L. Un cobordismo framed tra esse è la coppia (X, u) dove $X \subset L \times [0, 1]$ è un cobordismo tra N e M e u è un framing di X tale che

$$u(x, t) = (v(x), 0) \text{ per } (x, t) \in N \times [0, \epsilon[$$

$$u(x, t) = (w(x), 0) \text{ per } (x, t) \in M \times]1 - \epsilon, 1]$$

Si può quindi definire una relazione tra sottovarietà framed della stessa dimensione di una varietà L nel seguente modo: due sottovarietà framed (N, v) e (M, w) sono in relazione se esiste un cobordismo framed (X, u) tra esse.

Proposizione 3.1.1. *La relazione di cobordismo framed è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. È una semplice verifica delle seguenti proprietà.

Proprietà riflessiva: data una varietà framed (N, v), il cobordismo $N \times [0, 1]$ con il framing $u(x, t) = (v(x), 0)$ è un cobordismo framed.

Proprietà simmetrica: se (X, u) è un cobordismo framed tra (N, v) e (M, w), allora $X' = \{(x,t) \in L \times [0,1] | (x, 1-t) \in X\}$ con il framing $u'(x,t) = u(x, 1-t)$ è un cobordismo framed tra (M, w) e (N, v).

Proprietà transitiva: se (X, u) e (X', u') sono due cobordismi framed, allora $Y = \{(y,t) \in L \times [0,1] | (y, 2t) \in X\} \cup \{(y,t) \in L \times [0,1] | (y, 2t-1) \in X'\}$ con il framing

$$p(y,t) = \begin{cases} u(y, 2t) & \text{se } t \in [0\frac{1}{2}] \\ u(y, 2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è ancora un cobordismo framed.
Si noti che le condizioni su intorni del bordo di X e di X' assicurano che p sia una funzione ben definita e liscia anche in $t = \frac{1}{2}$. $\square$

3.2 Varietà di Pontryagin

L'obiettivo di questa sezione è studiare, data una varietà compatta L, l'insieme delle mappe lisce $f : L \to S^p$, utilizzando il concetto di varietà di Pontryagin associata a una tale funzione, ovvero di preimmagine di un valore regolare dotata di framing.
In particolare, si mostrerà l'esistenza di una biiezione tra classi di equivalenza di funzioni omotope e classi di equivalenza di sottovarietà framed di L.
In virtù della Proposizione 1.2.7, la costruzione seguente vale, opportunamente modificata, anche se L è una varietà con bordo: in tal caso si considerano mappe lisce $f : (L, \partial L) \to (S^p, s_0)$ che mandano il bordo di L in un punto fissato s_0 di S^p e si mettono in relazione con le classi di cobordismo sottovarietà framed contenute nella parte interna di L.
Non comportando modifiche sostanziali né nelle definizioni né nelle dimostrazioni, questa estensione non verrà trattata nella tesi.
Si ricorda che, in tutta questa sezione, si assumerà che la varietà L sia compatta.

Definizione 3.2.1 (Varietà di Pontryagin)**.** Sia $f : L \to S^n$ una mappa liscia e sia $y \in S^p$ un suo valore regolare.
La funzione f induce un framing della sottovarietà $M := f^{-1}(y)$ nel seguente modo: scelta una base positivamente orientata $v = (v^1, v^2, ..., v^p)$ per $T(S^p)_y$ si ha che per ogni $i \in \{1, 2, ..., p\}$ esiste un unico vettore $w^i(x) \in T_x(M)^\perp$ tale che $df_x(w^i(x)) = v^i$.
Infatti, per la Proposizione 1.2.5, per ogni $x \in M$ la mappa $df_x : T(L)_x \to T(S^n)_y$ manda $T(f^{-1}(y))^\perp_x$ isomorficamente in $T(S^n)_y$.
Indicato con f^*v il framing risultante di M, dato da $f^*v(x) := (w^1(x), w^2(x), ..., w^p(x))$, la varietà framed (M, f^*v) si dice varietà di Pontryagin associata a f.

Questa definizione dipende chiaramente dalle scelte del valore regolare y e della base v. Tuttavia, il teorema seguente mostra che tutte le varietà di Pontryagin di una funzione f appartengono alla stessa classe di cobordismo framed.

Teorema 3.2.1. *Siano, $f : L \to S^n$ una mappa lsicia, y, z valori regolari di f, v, w basi positivamente orientate rispettivamente di $T(S^p)_y)$ e di $T(S^p)_z$. Se $M := f^{-1}(y)$ e $N := f^{-1}(z)$, allora le varietà di Pontryagin (M, f^*v) e (N, f^*w) appartengono alla stessa classe di cobordismo framed.*

La dimostrazione richiede tre lemmi: il primo mostra che la scelta della base v non influenza la classe di cobordismo framed della varietà di Pontryagin, il secondo mostra il teorema per valori y e z sufficientemente vicini e permette di dimostrare il terzo lemma, il quale mostra che varietà di Pontryagin associate a mappe differenziabilmente omotope appartengono alla stessa classe di cobordismo framed. Quest'ultimo risultato permetterà di dimostrare la tesi scegliendo come mappe omotope f e la composizione di f con una rotazione che porti y in z.

Lemma 1. Se v e v' sono due basi positivamente orientate di $T(S^p)_y$, allora le varietà di Pontryagin (M, f^*v) e (M, f^*v') appartengono alla stessa classe di cobordismo framed.

Dimostrazione. Lo spazio delle basi positivamente orientate di $T(S^p)_y$ è isomorfo a $GL_p^+(\mathbb{R})$ che è connesso per archi. Pertanto, esiste un cammino in tale spazio che ha come estremi v e v'.
Tale cammino è un framing del cobordismo $M \times [0, 1]$.
Ciò permette, con un piccolo abuso di notazione, di omettere la scelta di base e di parlare semplicemente della varietà di Pontryagin $M = f^{-1}(y)$. □

Lemma 2. Se z è sufficientemente vicino a y, allora M e N appartengono alla stessa classe di cobordismo framed.

Dimostrazione. L'insieme C dei punti critici di f, essendo un chiuso del compatto L, è compatto. Quindi 'insieme $f(C)$ dei valori critici di f è compatto. In particolare, essendo S^n uno spazio di Hausdorff, $f(C)$ è chiuso.
Si può quindi scegliere $\delta > 0$ tale che $B(y, \delta) \cap f(C) = \emptyset$.

Scelto z tale che $|| - z|| < \delta$, si può scegliere una famiglia di rotazioni $\{r_t\}_{t\in[0,1]}$ con $r_t : S^p \to S^p$ e tali che:

1. $r_1(y) = z$,
2. r_t è l'identità per $t \in [0, \epsilon[$,
3. $r_t = r_1$ per $t \in]1 - \epsilon, 1]$,
4. $r_t^{-1}(z)$ giace sul cerchio massimo passante per y e z per ogni $t \in [0, 1]$

In questo modo $||y - r_t^{-1}(z)|| \leq ||y - z|| < \delta$ e quindi $r_t^{-1}(z)$ è un valore regolare di f. Di conseguenza z è un valore regolare di $r_t \circ f$ per ogni t.
Definita l'omotopia $F : L \times [0, 1] \to S^p$ come $F(x, t) := r_t(f(x))$, z è in particolare un valore regolare di F. Quindi $F^{-1}(z) \subset L \times [0, 1]$ è un cobordismo framed tra M e $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = N$. □

Lemma 3. Se f e g sono mappe differenziabilmente omotope e y è un valore regolare di entrambe, allora $f^{-1}(y)$ e $g^{-1}(y)$ appartengono alla stessa classe di cobordismo framed.

Dimostrazione. Scegliendo un'omotopia F tale che

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{per } t \in [0, \epsilon[\\ g(x) & \text{per } t \in]1-\epsilon, 1] \end{cases}$$

e scegliendo z valore regolare di F sufficientemente vicino a y, si ha che $f^{-1}(y)$ e $g^{-1}(y)$ appartengono alle stesse classi di cobordismo framed rispettivamente di $f^{-1}(z)$ e di $g^{-1}(z)$. Inoltre $F^{-1}(z)$ è un cobordismo framed tra $f^{-1}(z)$ e $g^{-1}(z)$. Pertanto, per proprietà transitiva della relazione di cobordismo framed, $f^{-1}(y)$ e $g^{-1}(y)$ appartengono alla stessa classe di cobordismo framed. □

Dimostrazione del Teorema 3.2.1. Si scelga una famiglia di rotazioni $r_t : S^p \to S^p$ tali che r_0 sia l'identità e $r_1(y) = z$.
Poiché f e $r_1 \circ f$ sono omotope tramite l'omotopia $(x,t) \mapsto r_t(f(x))$, le varietà di Pontryagin $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y) = M$ e $f^{-1}(z) = N$ appartengono alla stessa classe di cobordismo framed. □

Si può dunque parlare della varietà di Pontryagin associata a una funzione per indicare l'intera classe di cobordismo framed. In particolare, ciò permette di definire una corrispondenza tra mappe lisce $L \xrightarrow{f} S^p$ e classi di cobordismo framed delle sottovarietà di codimensione p di L, associando a ogni funzione la sua varietà di Pontryagin.
In seguito sarà dimostrato che tale corrispondenza è biunivoca se si considerano classi di omotopia differenziabile di funzioni.

Si riporta ora un caso particolare del teorema dell'intorno tubolare, che permette di rappresentare un intorno aperto di una sottovarietà di codimensione p come il prodotto cartesiano tra tale sottovarietà e $\mathbb{R}^p$, tramite un diffeomorfismo con utili proprietà che saranno fondamentali nelle dimostrazioni dei teoremi successivi.
Il teorema dell'intorno tubolare in generale afferma che una sottovarietà M di codimensione p di una varietà differenziabile ha un intorno aperto diffeomorfo a un aperto del fibrato normale di M, che è definito come $NM = \{(x, v) \mid x \in M,\ v \in T(M)_x^{\perp}\}$.
Il fibrato normale, se M è una sottovarietà framed, può essere naturalmente identificato con $M \times \mathbb{R}^p$ mandando i vettori del framing nella base canonica di $\mathbb{R}^p$, ed è proprio questo il caso che viene dimostrato di seguito.

Teorema 3.2.2 (dell'intorno tubolare)**.** *Sia L una varietà senza bordo di dimensione n e sia $M \subset L$ una sottovarietà compatta senza bordo di codimensione p con framing v. Allora esistono un aperto U di L contenente M e un diffeomorfismo $f : U \to M \times \mathbb{R}^p$. Inoltre, tale diffeomorfismo può essere scelto in modo che per ogni $x \in M$ si abbia $f(x) = (x, 0)$ e df_x mandi $v(x)$ nella base canonica di $\mathbb{R}^p$.*

Dimostrazione. Si consideri inizialmente il caso in cui $L = \mathbb{R}^{n+p}$.
Sia $g : M \times \mathbb{R}^p \to L$ la funzione definita come

$$g(x, t_1, ...t_p) := x + t_1 v^1(x) + ... + t_p v^p(x).$$

Poiché $dg_{(x,0,...0)}$ è non singolare, g è un diffeomorfismo in un intorno aperto di $(x, 0, ..., 0)$.
Per mostrare ora che g è un diffeomordfismo in un intorno aperto di M, si consideri l'intorno $M \times W$ di $M \times \{0\}$, dove $W = B(0, \epsilon)$ in $\mathbb{R}^p$ per un ϵ arbitrario.
Si supponga per assurdo che per ogni $\epsilon > 0$ g non sia biiettiva in $M \times W$, ovvero che esistano $(x, w) \neq (x', w') \in M \times \mathbb{R}^p$ con $\|w\|, \|w'\| < \epsilon$ tali che $g(x, w) = g(x', w')$.
Per compattezza di M allora esisterebbero due successioni $(x_n, w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x'_n, w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con:

$$(x_n, w_n) \to (x_0, 0) \text{ per } n \to \infty$$

$$(x'_n, w'_n) \to (x'_0, 0) \text{ per } n \to \infty$$

Ma dalla definizione di g seguirebbe che $x_0 = x'_0$, il che è assurdo, poiché in tal caso g non sarebbe iniettiva su nessun intorno di $(x_0, 0..., 0)$, contraddicendo l'osservazione precedente che g è un diffeomorfismo su un opportuno intorno.
Quindi g è un diffeomorfismo tra $M \times W$ e un aperto di $\mathbb{R}^{n+p}$, ma poiché W è diffeomorfo a $\mathbb{R}^p$ tramite $w \mapsto w/(1 - ||w||^2/\epsilon^2)$ si vede facilmente che la f cercata è l'inversa della funzione $(x, w/(1 - ||w||^2/\epsilon^2)) \mapsto g(x, w)$ e che $f(x) = (x, 0)$.
Inoltre $dg_{(x,0)}$ manda $\{e_1, ..., e_p\}$ in $\{v^1, ..., v^p\}$

Nel caso generale in cui $L \neq \mathbb{R}^{n+p}$, si considera L dotata di una metrica Riemanniana e si definisce $g(x, t_1, ..., t_p)$ come il secondo estremo del segmento di lunghezza $\|t_1 v^1 + ... + t_p v^p\|$ della geodetica che parte da x con direzione iniziale $t_1 v^1 + ... + t_p v^p$.
Si procede poi analogamente al caso precedente. $\square$

I prossimi due teoremi mostrano che la funzione che associa a ogni classe di omotopia differenziabile di funzioni la corrispondente classe di cobordismo framed delle varietà di Pontryagin di tali funzioni è ben definita, ovvero funzioni differenziabilmente omotope hanno varietà di Pontryagin appartenenti alla stessa classe di cobordismo framed, ed è in realtà una biiezione.
In particolare la suriettività è dimostrata nel primo teorema, mentre la buona definizione di tale corrispondenza e la sua iniettività sono dimostrate nel secondo.

Teorema 3.2.3. *Sia (M, v) una sottovarietà framed di L di codimensione p, compatta e senza bordo. Allora esiste una mappa liscia $f : L \to S^p$ tale che (M, v) è la varietà di Pontryagin associata a f.*

Dimostrazione. Sia $g : M \times \mathbb{R}^p \to U$, con $U \subset L$ aperto, il diffeomorfismo la cui esistenza è garantita dal Teorema 3.2.3.
Definiamo $\pi : U \to \mathbb{R}^p$ la funzione tale che $\pi(g(x, y)) = y$. Dalle proprietà di g segue che 0 è un valore regolare di π e che $\pi^{-1}(M)$ è esattamente la varietà framed (M, v).
Si consideri una mappa liscia $\phi : \mathbb{R}^p \to S^p$ che mandi $\{x \mid ||x|| \geq 1\}$ in $s_0 \in S^p$ e tale che $\phi|_{B(0,1)} : B(0, 1) \to S^p \setminus \{s_0\}$ sia un diffeomorfismo.
Sia $f : L \to S^p$ così definita:

$$f(x) := \begin{cases} \phi(\pi(x)) & \text{per } x \in U \\ s_0 & \text{per } x \notin U \end{cases}$$

Si ha allora che f è liscia e $\phi(0)$ è un valore regolare di f, a cui corrisponde la varietà di Pontryagin $f^{-1}(\phi(0)) = \pi^{-1}(0) = M$.

□

Teorema 3.2.4. *Due mappe $f, g : L \to S^p$ sono differenziabilmente omotope se e solo se le rispettive varietà di Pontryagin appartengono alla stessa classe di cobordismo framed.*

Dimostrazione. Se f e g sono differenziabilmente omotope, si consideri un valore regolare y di entrambe, la cui esistenza è garantita dal Corollario 1.2.2.
Per quanto dimostrato nell'ultima parte della dimostrazione del Teorema 3.2.1, le rispettive varietà di Pontryagin relative a y appartengono alla stessa classe di cobordismo

framed.

Viceversa sia y un valore regolare di f e di g e siano $M = f^{-1}(y)$ e $N = g^{-1}(y)$ appartenenti alla stessa classe di cobordismo framed.
Si consideri innanzitutto il caso in cui, fissata v una base positivamente orientata di $T(S^p)_y$, le varietà di Pontryagin (M, f^*v) e (N, g^*v) coincidano, il che implica $df_x = dg_x$ per ogni $x \in M = N$.

Se f e g coincidono in un intorno aperto $V \subset L$ di M, si costruisce un'omotopia tra f e g nel seguente modo:
sia $h : S^p \setminus \{y\} \to \mathbb{R}^p$ la proiezione stereografica e sia $F : L \times [0, 1] \to S^p$ definita come

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in V \\ h^{-1}(t \cdot h(f(x)) + (1-t) \cdot h(g(x))) & \text{per } x \in L \setminus V \end{cases}$$

Si verifica facilmente che F è un'omotopia differenziabile tra f e g.

Se invece f e g non coincidono su un intorno aperto di M, si mostrerà che è possibile deformare f in modo che coincida con g su un intorno di N senza aggiungere punti alla preimmagine di y, in modo da poter poi applicare quanto appena dimostrato.
Il Teorema 3.2.2 garantisce l'esistenza di un intorno aperto $V \subset L$ di M diffeomorfo a $M \times \mathbb{R}^p$. Si prenda V sufficientemente piccolo tale che $f(V)$ e $g(V)$ non contengano $-y$, l'antipodale di y.
Identificando $S^p \setminus \{y\}$ con $\mathbb{R}^p$ e V con $M \times \mathbb{R}^p$, rispettivamente tramite la proiezione stereografica h e tramite un diffeomorfismo ϕ, si possono considerare le mappe lisce $\widetilde{f}, \widetilde{g} : M \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ al posto di f e di g.
Si ricorda che il Teorema 3.2.2 assicura una scelta di ϕ tale che $\widetilde{f}^{-1}(0) = \widetilde{g}^{-1}(0) = M \times \{0\}$ e tale che $d\widetilde{f}_{(x,0)} = d\widetilde{g}_{(x,0)}$ sia la proiezione su $\mathbb{R}^p$ per ogni $x \in M$.
Mostriamo ora che esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni $x \in M$ e per ogni $u \in \mathbb{R}^p$ con $\|u\| \in]0, c[$ si ha che $\widetilde{f}(x, u) \cdot u > 0$ e $\widetilde{g}(x, u) \cdot u > 0$.
In questo modo l'omotopia $(x, u, t) \mapsto (1 - t)\widetilde{f}(x, u) + t\widetilde{g}(x, u)$ tra $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ non aggiunge punti alla preimmagine di 0 per u sufficientemente piccolo in norma, visto che $\widetilde{f}(x, u)$ e

$\widetilde{g}(x,u)$ appartengono allo stesso semispazio di $\mathbb{R}^p$.
Per il teorema di Taylor esiste una costante $c_1 > 0$ tale che

$$\|\widetilde{f}(x,u) - u\| \leq c_1\|u\|^2 \text{ per } \|u\| < 1,$$

da cui $|(\widetilde{f}(x,u) - u) \cdot u| \leq c_1\|u\|^3$ e quindi

$$\widetilde{f}(x,u) \cdot u \geq \|u\|^2 - c_1\|u\|^3 > 0 \text{ per } \|u\| \in]0, min\{\frac{1}{c_1}, 1\}[.$$

Si costruisce pertanto un'omotopia H_t tra $\widetilde{f} = H_0$ e H_1 così definita:

$$H_t(x,u) := (1 - \lambda(u)t)F(x,u) + \lambda(u)t\widetilde{g}(x,u)$$

dove $\lambda : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, introdotta per evitare di aggiungere punti "lontani da M" alla preimmagine di y, è una funzione liscia tale che:

$$\lambda(u) = \begin{cases} 1 & \text{per } \|u\| \leq \frac{c}{2} \\ 0 & \text{per } \|u\| \geq c \end{cases}$$

La funzione H_1 così ottenuta, omotopa a $\widetilde{f}$, coincide con $\widetilde{f}$ per $\|u\| \geq c$ e coincide con $\widetilde{g}$ per $\|u\| < c/2$.
Ricordando che $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ sono la composizione di f e di g con la proiezione stereografica h e con il diffeomorfismo ϕ, si può analogamente deformare f in modo che coincida con g su un intorno aperto di M.
Si può quindi applicare quanto dimostrato nel caso precedente.

Nel caso generale, sia (X, w) il cobordismo framed tra le varietà di Pontryagin di f e di g.
X è una sottovarietà di $L \times [0,1]$ di codimensione p, pertanto per il Teorema 3.2.3 esiste una mappa liscia $G : L \times [0,1] \to S^p$ che ha come varietà di Pontryagin proprio (X, w). Chiaramente G è un'omotopia tra $G(\cdot, 0)$ e $G(\cdot, 1)$. D'altronde le varietà di Pontryagin di f e di $G(\cdot, 0)$ coincidono, così come coincidono le varietà di Pontryagin di g e di $G(\cdot, 1)$. Perciò, per quanto già mostrato, $f \sim G(\cdot, 0) \sim G(\cdot, 1) \sim g$.

$\square$

3.3 Teorema di Hopf

Nell'ultima sezione di questa tesi è presentata una delle applicazioni più importanti della teoria delle varietà di Pontryagin e del cobordismo framed: la classificazione delle classi di omotopia differenziabile di funzioni tramite il grado.
In particolare, la connessione tra varietà di Pontryagin e classi di omotopia di funzioni viene sfruttata per ottenere risultati riguardanti l'omotopia studiando classi di cobordismo di sottovarietà, approccio che in questo caso si rivela estremamente più semplice dello studio delle classi di omotopia.

Teorema 3.3.1 (Teorema di Hopf). *Sia L una varietà differenziabile connessa, compatta, senza bordo e orientata di dimensione p. Due mappe lisce $f, g : L \to S^p$ sono differenziabilmente omotope se e solo se hanno lo stesso grado di Brouwer.*

Dimostrazione. Se f e g sono differenziabilmente omotope, allora il Teorema 2.1.4 assicura che $deg(f) = deg(g)$.

Viceversa, se f e g hanno lo stesso grado, siano M e N le varietà di Pontryagin associate a f e a g.
M e N sono sottovarietà framed di L di codimensione p, ovvero insiemi finiti di punti $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ e $\{z_1, z_2, ..., z_l\}$ con la scelta di una base di $T(L)_{x_i}$ per ogni x_i e di una base di $T(L)_{z_j}$ per ogni z_i.
Per ogni $x_i \in M$ si ha che $sgn(df_{x_i})$ è $+1$ se la scelta di base di $T(L)_{x_i}$ del framing ha la stessa orientazione data dall'orientazione di L, mentre è -1 se ha l'orientazione opposta.
Se $\sum_{x_i \in M} sgn(df_{x_i}) = \sum_{z_j \in N} sgn(dg_{z_j})$, si costruisce un cobordismo framed tra M e N, ricordando che L è connessa, nel seguente modo:
1. si "collegano" tra loro tramite archi in $L \times [0, 1]$ gli $\{x_i 1\} \times \{0\}$ con segno del differenziale opposto e analogamente si "collegano" tra loro gli $\}z_j\} \times \{1\}$ con segno del differenziale opposto;
2. ogni $\{x_i\} \times \{0\}$ rimasto spaiato si "collega" con un arco con $\{z_j\} \times \{1\}$ rimasto spaiato.
Questo procedimento funziona poiché gli x_i rimasti spaiati dopo il passo 1, così come gli z_j rimasti, sono in numero $deg(f) = deg(g)$ e hanno tutti stesso segno del differenziale.

$\square$

Teorema 3.3.2. *Sia L una varietà differenziabile connessa e non orientabile. Due mappe lisce $f, g : L \to S^n$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado modulo 2.*

Dimostrazione. Se f e g sono differenziabilmente omotope, allora il Teorema 2.2.3 assicura che $deg_2(f) = deg_2(g)$.

Viceversa, se f e g hanno stesso grado modulo 2, siano M e N le varietà di Pontryagin rispettivamente di f e di g.
M e N sono sottovarietà framed di L di codimensione p, ovvero insiemi finiti di punti $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ e $\{z_1, z_2, ..., z_l\}$ con la scelta di una base di $T(L)_{x_i}$ per ogni x_i e di una base di $T(L)_{z_j}$ per ogni z_i.
Poiché L è non orientabile per ogni x_i esiste chiaramente un arco in $L \times [0, 1]$ che sia un cobordismo framed tra x_i e x_i stesso ma con scelta di base per $T(L)_{x_i}$ con l'orientazione opposta.
Pertanto la scelta di framing non influisce nella costruzione del cobordismo. Si conclude quindi con un argomento puramente combinatorico: per costruire un cobordismo framed tra M e N si può "collegare" ogni punto di $M \times \{0\}$ a un altro punto di $M \times \{0\}$ con un arco in $L \times [0, 1]$, e analogamente per gli z_j.
Se $deg_2(f) = deg_2(g) = 1$ rimangono un x_i e uno z_j spaiati, che si possono collegare con un arco da $\{x_i\} \times \{0\}$ a $\{z_j\} \times \{1\}$, mentre se $deg_2(f) = deg_2(g) = 0$ non rimarranno punti spaiati. $\square$

Il Teorema di Hopf fornisce quindi una classificazione di funzioni differenziabili a meno di omotopia. L'importanza di tale risultato è evidente se si considera che, per il Teorema di Approssimazione di Whitney, ogni funzione continua tra varietà differenziabili è omotopa a una funzione differenziabile (per una dimostrazione si veda [2]).

Ad esempio, una conseguenza immediata, considerando le mappe lisce da S^n in stessa, è che $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$, dove l'isomorfismo è proprio la mappa $[f] \mapsto deg(f)$.

Una conseguenza meno immediata è una generalizzazione del cosiddetto teorema della palla pelosa, che dice che una varietà connessa, compatta e orientata ammette un campo vettoriale tangente non nullo se e solo se ha caratteristica di Eulero nulla.

Bibliografia

[1] John W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.

[2] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2000.

[3] Loring W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer, 2011.

[4] V. Guillemin e A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

Ringraziamenti

In queste poche righe vorrei ringraziare le persone che, direttamente o indirettamente, mi hanno aiutato nella stesura di questa tesi.

Ringrazio i professori dell'Unibo per gli insegnamenti ricevuti in questi tre anni, e in particolare il professor Luca Migliorini per avermi proposto un argomento di tesi così interessante.

Ringrazio la mia famiglia per il sostegno e la sincerità dimostrati anche quando abbiamo avuto opinioni divergenti.

Ringrazio i miei amici per le risate che mi hanno aiutato ad affrontare gli studi con più leggerezza.

Ringrazio Francesca, perché mi ha spronato e fatto rigare dritto in tutti questi anni.