

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Teoria della diffusione con il metodo dell'espansione in onde parziali

Relatore:
Prof. Roberto Zucchini

Presentata da:
Leonardo Farolfi

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1	Introduzione	3
2	Diffusione elastica da potenziale centrale	5
3	Sfasamenti e onde parziali	8
4	Calcoli di sezioni d'urto con il metodo degli sfasamenti	17
5	Sfasamenti per un potenziale con raggio d'azione finito	21
6	Scattering non risonante nel regime di bassa energia da parte di un potenziale centrale con raggio d'azione finito	24
7	Scattering risonante ed anti-risonante da parte di un potenziale centrale con raggio d'azione finito	28
	Bibliografia	44

Sommario

In questa tesi viene illustrata in dettaglio la teoria della diffusione da potenziale centrale con il metodo degli sfasamenti e dell'espansione in onde parziali. Questo permette una trattazione particolarmente efficace della diffusione in regime di bassa energia ed in particolare uno studio analitico dei fenomeni di risonanza e anti-risonanza.

Capitolo 1

Introduzione

Gli esperimenti di scattering/diffusione costituiscono uno dei principali metodi per lo studio di strutture di sistemi quantistici. La loro importanza nei campi della fisica della materia condensata, degli atomi, dei nuclei e delle particelle elementari è dunque fondamentale.

Il modello elementare di un esperimento di scattering prevede la collisione tra due particelle: una particella proiettile ed una particella bersaglio. Il risultato della collisione può dare vita a diversi scenari, anche molto diversi tra loro. Se l'energia totale si conserva sempre, ciò non avviene necessariamente per l'energia cinetica. Possono inoltre formarsi altre particelle o verificarsi altri fenomeni quali l'eccitazione di una delle due particelle o l'assorbimento di una particella da parte dell'altra. La teoria della diffusione è dunque molto ampia e variegata. Nella nostra trattazione ci limiteremo ad analizzare fenomeni di *diffusione elastica*, nei quali l'energia cinetica viene conservata e le particelle prodotte risultano essere esattamente quelle di partenza. Infatti, la meccanica quantistica prevede la conservazione della probabilità associata alle particelle. Altri fenomeni di diffusione, nei quali ciò non avviene, possono essere spiegati correttamente solamente ricorrendo alla teoria dei campi quantistici.

Le grandezze fondamentali da calcolare in esperimenti di diffusione sono le *sezioni d'urto*, in particolare la *sezione d'urto differenziale* $\frac{d\sigma_{\mathbf{k}}}{d\Omega}$, che misura la probabilità che una particella venga diffusa all'interno dell'angolo solido $d\Omega$ lungo una data direzione e la *sezione d'urto totale* $\sigma_{\mathbf{k}}$, ottenuta integrando quella differenziale su tutto l'angolo solido. Tali quantità sono misurabili sperimentalmente e quindi confrontabili con i modelli teorici e le formule calcolabili tramite la teoria della diffusione. Per eseguire tali calcoli occorre innanzitutto conoscere la funzione d'onda associata alle particelle, quindi la loro autofunzione energetica. Tuttavia, ottenere tali espressioni può essere in molti casi estremamente difficile e ciò impedisce dunque il calcolo delle sezioni d'urto, a meno che non si utilizzino delle approssimazioni. Nel caso in cui l'interazione responsabile dello scattering, rappresentata da un potenziale U , costituisce una piccola perturbazione della dinamica libera delle particelle proiettile, ad esempio quando queste hanno un'alta

energia o quando il potenziale è molto debole, si può utilizzare una tecnica di calcolo nota con il nome di *approssimazione di Born*, che qui non approfondiremo.

Nel caso di uno scattering da potenziale centrale $U(r)$, quando le condizioni dell'approssimazione di Born non sono soddisfatte, si può infatti utilizzare il *metodo degli sfasamenti e delle onde parziali*, che verrà trattato in questa tesi. Tale metodo è particolarmente utile quando le particelle proiettile hanno una bassa energia (ossia in situazioni del tutto opposte a quelle in cui si utilizza l'approssimazione di Born) e consiste nell'espandere l'autofunzione energetica ϕ_k associata alle particelle in una serie infinita avente come indice il numero quantico orbitale l . Utilizzando quindi questo metodo, potremo poi calcolare le sezioni d'urto in vari esempi di problemi con potenziali centrali, alcuni dei quali saranno visti nel dettaglio.

Capitolo 2

Diffusione elastica da potenziale centrale

I calcoli teorici della sezione d'urto differenziale e di quella totale per un potenziale U richiedono la determinazione della funzione d'onda delle particelle $\psi_{\mathbf{k}}$. Tale funzione d'onda rappresenta l'evoluzione temporale di un'autofunzione dell'energia $\phi_{\mathbf{k}}$, appartenente all'autovalore energetico $w_{\mathbf{k}}$. Il nostro problema, dunque, consiste nella determinazione di $\phi_{\mathbf{k}}$.

Poiché ad infinito spaziale, ossia per $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, il potenziale U svanisce e si ha quindi una dinamica libera delle particelle, $\psi_{\mathbf{k}}$ deve avere una componente data da un'onda piana in ingresso, con vettore d'onda \mathbf{k}

$$\psi_{\mathbf{k}}^{\text{in}}(t, \mathbf{x}) = N_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - iw_{\mathbf{k}}t/\hbar) \quad (2.1)$$

ed una componente data da un'onda sferica, direzionalmente modulata, in uscita, con numero d'onda $|\mathbf{k}|$

$$\psi_{\mathbf{k}}^{\text{out}}(t, \mathbf{x}) = N_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_1) \frac{\exp(i|\mathbf{k}||\mathbf{x}| - iw_{\mathbf{k}}t/\hbar)}{|\mathbf{x}|}, \quad (2.2)$$

in cui $N_{\mathbf{k}}$ è una costante di normalizzazione e $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_1)$ è una funzione a valori complessi del versore \mathbf{x}_1 di \mathbf{x} , detta *ampiezza di diffusione*. Come vedremo ampiamente, tale funzione contiene tutte le informazioni riguardo al processo di diffusione.

Dunque, la funzione d'onda $\psi_{\mathbf{k}}$ è data da:

$$\psi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \exp(-iw_{\mathbf{k}}t/\hbar). \quad (2.3)$$

Per $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, quindi, $\phi_{\mathbf{k}}$ deve comprendere una componente data da un'onda piana

$$\phi_{\mathbf{k}}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = N_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (2.4)$$

ed una componente data da un'onda sferica direzionalmente modulata

$$\phi_{\mathbf{k}}^{\text{out}}(\mathbf{x}) = N_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_1) \frac{\exp(i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}. \quad (2.5)$$

La più semplice ipotesi che si possa fare per $\phi_{\mathbf{k}}$, con $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, è detta *condizione di radiazione di Sommerfeld*:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \simeq N_{\mathbf{k}} \left(\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_1) \frac{\exp(i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \right). \quad (2.6)$$

Si potrebbe infatti dimostrare (cosa che qui non verrà fatta) che tale autofunzione energetica $\phi_{\mathbf{k}}$ esiste sempre ed è unica e che da essa si ricavano i due importanti risultati:

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_1)}{d\Omega} = |f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_1)|^2 \quad (2.7)$$

per l'espressione della sezione d'urto differenziale e

$$\sigma_{\mathbf{k}} = \oint d\Omega |f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_1)|^2 \quad (2.8)$$

per la sezione d'urto totale.

Per un potenziale centrale $U(\mathbf{x})$ è naturale utilizzare nella trattazione le coordinate sferiche r, θ, φ orientando l'asse polare parallelamente alla direzione del raggio di particelle entranti. Poiché il sistema possiede una simmetria per rotazioni attorno a tale asse, tutte le quantità rilevanti calcolabili sono indipendenti dall'angolo azimutale φ . Inoltre, poiché $\cos \theta = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1$, l'angolo polare θ non è altro che l'*angolo di diffusione*, ossia la deviazione angolare subita dalla particella diffusa, che si propaga, dopo lo scattering, nella direzione \mathbf{x}_1 .

Per grandi valori di r , dunque, si può ricavare facilmente da (2.6) la seguente espressione per $\phi_{\mathbf{k}}$:

$$\phi_{\mathbf{k}}(r, \theta) \simeq \exp(ikr \cos \theta) + f_{\mathbf{k}}(\theta) \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (2.9)$$

L'espressione dell'ampiezza di diffusione $f_{\mathbf{k}}(\theta)$ dipende quindi solo dall'angolo θ . Ciò vale

dunque anche per le espressioni delle sezioni d'urto, le quali si possono ricavare altrettanto facilmente dalle espressioni più generali (2.7) e (2.8). Si ha dunque

$$\frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} = |f_k(\theta)|^2 \quad (2.10)$$

per l'espressione della sezione d'urto differenziale e

$$\sigma_k = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta |f_k(\theta)|^2 \quad (2.11)$$

per la sezione d'urto totale.

Tali ultime tre espressioni (2.9, 2.10 e 2.11) costituiscono le espressioni a partire dalle quali calcoleremo i prossimi risultati principali della nostra trattazione.

Capitolo 3

Sfasamenti e onde parziali

Per la diffusione da parte di un potenziale centrale, la teoria degli sfasamenti e delle onde parziali fornisce un'alternativa all'approssimazione di Born per il calcolo delle sezioni d'urto. Infatti, l'approssimazione di Born, che qui non approfondiremo, vale quando il potenziale è molto debole o l'energia delle particelle diffuse è così grande da far sì che l'effetto del potenziale sia solo una piccola perturbazione per la dinamica libera delle particelle. Queste condizioni spesso però non sono soddisfatte e di conseguenza serve trovare una teoria che sia valida più in generale.

Supponiamo ora che un potenziale centrale $U(r)$ vada a zero più velocemente di $const/r^2$ per $r \rightarrow \infty$. Per r sufficientemente grande allora, l'equazione di Schroedinger radiale si riduce a:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\chi \simeq 0. \quad (3.1)$$

Ora, per procedere, riportiamo qui le espressioni principali riguardanti le funzioni sferiche di Bessel, che utilizzeremo assai frequentemente nella nostra trattazione.

L'equazione (3.1) (con $=$ al posto di \simeq) tramite opportuni cambi di variabile, può essere infatti riscritta in una differente forma, detta *equazione sferica di Bessel*:

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d\rho}{dz} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{z^2}\right)\rho = 0. \quad (3.2)$$

Le soluzioni di (3.2) sono in classificate in base al loro comportamento per valori piccoli o grandi di z .

Le *funzioni sferiche di Bessel del primo tipo* soddisfano:

$$j_l(z) \simeq \frac{2^l l!}{(2l+1)!} z^l, \quad \text{per } |z| \ll \max(l^{1/2}, 1), \quad (3.3)$$

$$j_l(z) \simeq \frac{1}{z} \sin(z - l\pi/2), \quad \text{per } |z| \gg \max(l, 1). \quad (3.4)$$

Le *funzioni sferiche di Bessel del secondo tipo* soddisfano:

$$n_l(z) \simeq -\frac{(2l)!}{2^l l!} z^{-l-1}, \quad \text{per } |z| \ll \max(l^{1/2}, 1), \quad (3.5)$$

$$n_l(z) \simeq -\frac{1}{z} \cos(z - l\pi/2), \quad \text{per } |z| \gg \max(l, 1). \quad (3.6)$$

Le *funzioni sferiche di Bessel del terzo tipo* soddisfano:

$$h_l^\pm(z) \simeq \mp i \frac{(2l)!}{2^l l!} z^{-l-1}, \quad \text{per } |z| \ll \max(l^{1/2}, 1), \quad (3.7)$$

$$h_l^\pm(z) \simeq \frac{1}{z} \exp[\pm i(z - (l+1)\pi/2)], \quad \text{per } |z| \gg \max(l, 1). \quad (3.8)$$

Solo due di queste funzioni sono linearmente indipendenti. Infatti si hanno le seguenti relazioni:

$$h_l^\pm = j_l \pm i n_l, \quad (3.9)$$

$$j_l = \frac{1}{2}(h_l^+ + h_l^-), \quad n_l = \frac{1}{2}(h_l^+ - h_l^-). \quad (3.10)$$

Inoltre, tali funzioni possono essere calcolate esplicitamente utilizzando le *relazioni di Rayleigh*:

$$j_l(z) = (-z)^l \left(\frac{d}{z dz} \right)^l \frac{\sin z}{z}, \quad (3.11)$$

$$n_l(z) = -(-z)^l \left(\frac{d}{z dz} \right)^l \frac{\cos z}{z}, \quad (3.12)$$

$$h_l^\pm(z) = \mp i (-z)^l \left(\frac{d}{z dz} \right)^l \frac{\exp(\pm iz)}{z} \quad (3.13)$$

oppure espresse in serie di Laurent:

$$j_l(z) = \frac{2^l l!}{(2l+1)!} z^l \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^k \frac{1}{2j+2l+1} \right) \frac{(-1)^k}{2^k k!} z^{2k}, \quad (3.14)$$

$$n_l(z) = -\frac{(2l)!}{2^l l!} z^{-l-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^k \frac{1}{2j-2l-1} \right) \frac{(-1)^k}{2^k k!} z^{2k}, \quad (3.15)$$

$$h_l^{\pm}(z) = \frac{2^l l!}{(2l+1)!} z^l \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^k \frac{1}{2j+2l+1} \right) \frac{(-1)^k}{2^k k!} z^{2k} \mp i \frac{(2l)!}{2^l l!} z^{-l-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^k \frac{1}{2j-2l-1} \right) \frac{(-1)^k}{2^k k!} z^{2k}. \quad (3.16)$$

Tornando all'equazione (3.1), possiamo dunque affermare che una soluzione generale, ossia un'espressione dell'autofunzione radiale χ_{kl} , è data da:

$$\chi_{kl}(r) \simeq a_{kl} k r j_l(kr) + b_{kl} k r n_l(kr). \quad (3.17)$$

Dunque, utilizzando le espressioni asintotiche (3.4) e (3.6), possiamo scrivere:

$$\chi_{kl}(r) \simeq a_{kl} \sin(kr - l\pi/2) - b_{kl} \cos(kr - l\pi/2). \quad (3.18)$$

Ora, poiché χ_{kl} può essere sempre scelta reale a meno di una normalizzazione, possiamo assumere a_{kl} e b_{kl} reali. Convenzionalmente, possiamo normalizzare χ_{kl} in modo che:

$$a_{kl}^2 + b_{kl}^2 = 4 \quad (3.19)$$

e di conseguenza scrivere:

$$a_{kl} = 2 \cos \delta_{kl}, \quad b_{kl} = -2 \sin \delta_{kl}, \quad (3.20)$$

in cui δ_{kl} è un certo angolo chiamato *sfasamento*. Da (3.18) e (3.20), utilizzando le formule trigonometriche, si può dunque facilmente ricavare che, sempre nel limite di r grande, χ_{kl} è data da:

$$\chi_{kl}(r) \simeq 2 \sin(kr - l\pi/2 + \delta_{kl}). \quad (3.21)$$

Dunque, possiamo affermare che lo sfasamento δ_{kl} misura la deviazione dell'autofunzione radiale χ_{kl} da quella di una particella libera a grande distanza dal centro di forza. Infatti, poiché il potenziale centrale va a zero rapidamente ad infinito, χ_{kl} sente ancora la sua azione anche a grande distanza dall'origine tramite lo sfasamento δ_{kl} . Per questa ragione, tale grandezza ha un ruolo fondamentale nella teoria della diffusione che andremo a studiare.

Ora, vedremo che l'autofunzione energetica ϕ_k , che soddisfa l'equazione (2.9), può essere espansa in una serie di autofunzioni radiali χ_{kl} :

$$\phi_k(r, \theta) = \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \exp(i\delta_{kl}) \chi_{kl}(r) P_l(\cos \theta). \quad (3.22)$$

Per tale motivo, le χ_{kl} sono dette *onde parziali* e l'espressione (3.22) è chiamata *espansione in onde parziali*. Considerando la forma asintotica dell'espressione (3.22) per grandi r e confrontandola con la forma asintotica di base data dall'espressione (2.9), si può ottenere un'espansione dell'ampiezza di diffusione $f_k(\theta)$:

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp(i\delta_{kl}) \sin \delta_{kl} P_l(\cos \theta). \quad (3.23)$$

Dimostrazione. Le autofunzioni energetiche ϕ_{klm_l} , ϕ_{nlm_l} costituiscono una base ortogonale di funzioni d'onda. Dunque, possiamo scrivere:

$$\phi_k(r, \theta) = \int_0^{\infty} dk' \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m_l=-l}^l A_{k'lm_l} \phi_{k'lm_l}(r, \theta, \phi) + \sum_n \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m_l=-l}^l A_{nlm_l} \phi_{nlm_l}(r, \theta, \phi), \quad (3.24)$$

in cui A_{klm_l} , A_{nlm_l} sono costanti complesse. ϕ_k appartiene all'autovalore $w_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ di uno spettro continuo, dunque, in tale espressione appena scritta di ϕ_k , contribuiranno solo le funzioni $\phi_{k'lm_l}$, ϕ_{nlm_l} appartenenti a w_k . Perciò segue che: $A_{k'lm_l} = B_{klm_l} \delta(k' - k)$ e $A_{nlm_l} = 0$. Quindi segue:

$$\phi_k(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m_l=-l}^l B_{klm_l} \frac{\chi_{kl}(r)}{r} Y_{lm_l}(\theta, \varphi). \quad (3.25)$$

Ora, poiché ϕ_k non dipende da φ , sapendo che invece Y_{lm_l} dipende da φ per $m_l \neq 0$, dobbiamo avere un contributo non banale solamente per $m_l = 0$; dunque si ha $B_{klm_l} = 0$ per $m_l \neq 0$. Dunque, sapendo che $Y_{l0}(\theta, \varphi) \propto P_l(\cos \theta)$, con $P_l^0 = P_l$, si ha:

$$\phi_k(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) s_{kl} \frac{\chi_{kl}(r)}{2kr} P_l(\cos \theta), \quad (3.26)$$

in cui gli s_{kl} sono coefficienti dai quali si estrae $i^l (2l+1)/2k$ per convenienza nei calcoli successivi.

Partendo da (3.21), per grandi valori di r , si può scrivere:

$$\begin{aligned}
\chi_{kl}(r) &\simeq 2 \sin(kr - l\pi/2 + \delta_{kl}) = \\
&= i^{-1}[\exp(i(kr - l\pi/2 + \delta_{kl})) - \exp(-i(kr - l\pi/2 + \delta_{kl}))] = \\
&= i^{-l-1}[\exp(i\delta_{kl}) \exp(ikr) - (-1)^l \exp(-i\delta_{kl}) \exp(-ikr)].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Inserendo tale risultato (3.27) in (3.26) si ha:

$$\begin{aligned}
\phi_k(r, \theta) &\simeq \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{s_{kl}}{2ikr} [\exp(i\delta_{kl}) \exp(ikr) - (-1)^l \exp(-i\delta_{kl}) \exp(-ikr)] P_l(\cos \theta) = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) s_{kl} \exp(i\delta_{kl}) P_l(\cos \theta) \frac{\exp(ikr)}{2ikr} + \\
&\quad - \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) s_{kl} \exp(-i\delta_{kl}) (-1)^l P_l(\cos \theta) \frac{\exp(-ikr)}{2ikr},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

ossia una sovrapposizione, modulata direzionalmente, di due onde sferiche, una in ingresso ed una in uscita. Sappiamo, in generale, che in seguito ad uno scattering di un potenziale centrale, per r grande, vale l'espressione (2.9). Inoltre si può dimostrare che:

$$\phi_k^{\text{in}}(r, \theta) = \exp(ikr \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta). \tag{3.29}$$

In più, sempre per r grande, utilizzando (3.4) e riscrivendo il seno con le formule di Eulero, si ha:

$$\begin{aligned}
2kr j_l(kr) &\simeq 2 \sin(kr - l\pi/2) = \\
&= i^{-1}[\exp(i(kr - l\pi/2)) - \exp(-i(kr - l\pi/2))] = \\
&= i^{-l-1}[\exp(ikr) - (-1)^l \exp(-ikr)].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Dunque:

$$j_l(kr) \simeq \frac{i^{-l}}{2ikr} [\exp(ikr) - (-1)^l \exp(-ikr)]. \tag{3.31}$$

Ora inserendo (3.31) in (3.29), si ottiene:

$$\begin{aligned}
\phi_k^{\text{in}}(r, \theta) &\simeq \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{1}{2ikr} [\exp(ikr) - (-1)^l \exp(-ikr)] P_l(\cos \theta) = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \frac{\exp(ikr)}{2ikr} - \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-1)^l P_l(\cos \theta) \frac{\exp(-ikr)}{2ikr}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Anche in tal caso si ha una sovrapposizione, modulata direzionalmente, di due onde sferiche, una in ingresso ed una in uscita. Sappiamo che il secondo termine di (2.9) è proporzionale all'onda sferica uscente $\exp(ikr)/r$. Dunque, in (3.28), il termine corrispondente all'onda sferica entrante, proporzionale a $\exp(-ikr)/r$, può originarsi solo dal corrispondente termine in (3.32), sempre proporzionale a $\exp(-ikr)/r$. Dunque si ricava:

$$s_{kl} = \exp(i\delta_{kl}). \tag{3.33}$$

Sostituendo tale risultato nell'espressione (3.26) si ottiene finalmente l'espressione (3.22) che si voleva ricavare.

Ora, per ricavare l'espressione (3.23), calcoliamo esplicitamente $\phi_k^{\text{out}}(r, \theta)$. Utilizzando le espressioni (2.9), (3.28), (3.32) e (3.33), si ottiene:

$$\begin{aligned}
\phi_k^{\text{out}}(r, \theta) &\simeq f_k(\theta) \frac{\exp(ikr)}{r} = \phi_k(r, \theta) - \phi_k^{\text{in}}(r, \theta) \simeq \\
&\simeq \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp(2i\delta_{kl}) P_l(\cos \theta) \frac{\exp(ikr)}{2ikr} + \\
&\quad - \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-1)^l P_l(\cos \theta) \frac{\exp(-ikr)}{2ikr} + \\
&\quad - \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \frac{\exp(ikr)}{2ikr} + \\
&\quad + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-1)^l P_l(\cos \theta) \frac{\exp(-ikr)}{2ikr} = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp(2i\delta_{kl}) - 1] P_l(\cos \theta) \frac{\exp(ikr)}{2ikr} = \\
&= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp(i\delta_{kl}) \sin \delta_{kl} P_l(\cos \theta) \frac{\exp(ikr)}{r}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Dunque, dividendo l'espressione finale per $\exp(ikr)/r$, sapendo inoltre, proprio da (3.34), che $\phi_k^{\text{out}}(r, \theta) \simeq f_k(\theta) \exp(ikr)/r$, otteniamo immediatamente l'espressione (3.23). ■

Sostituendo l'espressione (3.23) in (2.10) otteniamo immediatamente un'espressione generale della sezione d'urto differenziale in funzione degli sfasamenti δ_{kl} :

$$\frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} = \left| \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp(i\delta_{kl}) \sin \delta_{kl} P_l(\cos \theta) \right|^2. \quad (3.35)$$

Da tale espressione quindi, utilizzando la formula (2.11), ricaviamo invece un'espressione generale della sezione d'urto totale, sempre in funzione degli sfasamenti δ_{kl} :

$$\sigma_k = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_{kl}. \quad (3.36)$$

Dimostrazione. Utilizzando appunto l'espressione (2.11) scriviamo:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |f_k(\theta)|^2 = \\ &= 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left| \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp(i\delta_{kl}) \sin \delta_{kl} P_l(\cos \theta) \right|^2 = \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) \exp(-i(\delta_{kl} - \delta_{kl'})) \sin \delta_{kl} \sin \delta_{kl'} \\ &\quad \times \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Tale integrale appena ottenuto può essere calcolato tramite un cambio di variabile, dato da $x = \cos \theta$, utilizzando poi l'ortogonalità dei polinomi di Legendre P_l :

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (3.38)$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) \exp(-i(\delta_{kl} - \delta_{kl'})) \sin \delta_{kl} \sin \delta_{kl'} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

■

La sezione d'urto totale può essere espressa anche in funzione della grandezza $f_k(0)$, detta *ampiezza di diffusione in avanti*, tramite una relazione detta *Teorema Ottico*:

$$\sigma_k = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f_k(0), \quad (3.40)$$

facilmente ricavabile confrontandola con l'espressione (3.36), sopra dimostrata, notando che, poiché $P_l(1) = 1$, si ha:

$$\begin{aligned} f_k(0) &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp(i\delta_{kl}) \sin \delta_{kl} P_l(1) = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp(i\delta_{kl}) \sin \delta_{kl}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

da cui segue:

$$\operatorname{Im} f_k(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_{kl}, \quad (3.42)$$

quindi il risultato (3.40).

Vale inoltre la pena notare che l'approssimazione di Born viola il Teorema Ottico poiché in tal caso si ottiene sempre un'espressione reale per l'ampiezza di diffusione, facendo sì che ogni sezione d'urto totale sia nulla, il che è ovviamente assurdo.

In molti casi, è più facile calcolare la grandezza $\cot \delta_{kl}$ rispetto agli sfasamenti stessi. Dunque, osservando che si può facilmente ricavare:

$$\exp(i\delta_{kl}) \sin \delta_{kl} = \frac{\sin \delta_{kl}}{\exp(-i\delta_{kl})} = \frac{\sin \delta_{kl}}{\cos \delta_{kl} - i \sin \delta_{kl}} = \frac{1}{\cot \delta_{kl} - i}, \quad (3.43)$$

quindi:

$$\sin^2 \delta_{kl} = \frac{1}{\cot^2 \delta_{kl} + 1}, \quad (3.44)$$

si possono riscrivere le espressioni (3.23), (3.35) e (3.36) in funzione di $\cot \delta_{kl}$:

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\cot \delta_{kl} - i} P_l(\cos \theta), \quad (3.45)$$

$$\frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} = \left| \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\cot \delta_{kl} - i} P_l(\cos \theta) \right|^2, \quad (3.46)$$

$$\sigma_k = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\cot^2 \delta_{kl} + 1}. \quad (3.47)$$

Le precedenti tre espressioni (3.45, 3.46 e 3.47) sono quelle che utilizzeremo anche in tutti i calcoli successivi.

Tuttavia, ora si pone il problema di dover calcolare tali serie, aventi come indice il numero quantico l . Infatti, in molti problemi fisici, il calcolo di tali serie è estremamente difficoltoso. Nonostante ciò, in molte situazioni, la serie è dominata dalle onde parziali con i valori più bassi di l e può essere accuratamente approssimata considerando soltanto la somma di tali primi termini. Le onde parziali con $l = 0, 1, 2, \dots$ sono spesso chiamate onde s, p, d, \dots utilizzando la terminologia della spettroscopia.

Capitolo 4

Calcoli di sezioni d'urto con il metodo degli sfasamenti

Per il calcolo di sezioni d'urto con il metodo degli sfasamenti occorre trovare un'espressione degli sfasamenti δ_{kl} in funzione di quantità presenti nell'espressione dell'autofunzione radiale χ_{kl} relativa al problema considerato.

Supponiamo sempre che il potenziale centrale $U(r)$ considerato vada a zero più velocemente di $const/r^2$ per $r \rightarrow \infty$. Per r sufficientemente grande allora, utilizzando le due relazioni di (3.20), possiamo immediatamente mostrare che:

$$\cot \delta_{kl} = -\frac{a_{kl}}{b_{kl}}. \quad (4.1)$$

Tale relazione è valida anche se le due quantità a_{kl} e b_{kl} non sono reali e/o normalizzate, poiché il rapporto a_{kl}/b_{kl} è indipendente dalla normalizzazione. Si ottengono dunque i seguenti risultati:

$$\frac{1}{\cot \delta_{kl} - i} = -\frac{1}{a_{kl}/b_{kl} + i} = \frac{-b_{kl}}{a_{kl} + ib_{kl}}, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\cot^2 \delta_{kl} + 1} = \frac{b_{kl}^2}{a_{kl}^2 + b_{kl}^2}. \quad (4.3)$$

Perciò, inserendo tali risultati (4.2) e (4.3) nelle espressioni (3.45), (3.46) e (3.47) si ottengono le seguenti espressioni:

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{-b_{kl}}{a_{kl} + ib_{kl}} P_l(\cos \theta), \quad (4.4)$$

$$\frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} = \left| \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{-b_{kl}}{a_{kl} + ib_{kl}} P_l(\cos \theta) \right|^2, \quad (4.5)$$

$$\sigma_k = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{b_{kl}^2}{a_{kl}^2 + b_{kl}^2}. \quad (4.6)$$

Ora, sapendo che:

$$\frac{b_{kl}^2}{a_{kl}^2 + b_{kl}^2} = \left[1 + \left(\frac{a_{kl}}{b_{kl}} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (4.7)$$

utilizziamo le tre espressioni (4.4), (4.5) e (4.6) per eseguire i calcoli per due esempi di potenziali centrali.

Barriera/buca di potenziale sferica:

Consideriamo una barriera/buca di potenziale sferica:

$$U(r) = \begin{cases} U_0 & \text{se } r < R \\ 0 & \text{se } r > R, \end{cases} \quad (4.8)$$

in cui $U_0 \neq 0$ è una scala energetica. Nel caso $r > R$, si potrebbe dimostrare che l'autofunzione radiale χ_{kl} è data da:

$$\chi_{kl}(r) = N_{kl} x_{k'} \left[(j_l(x_{k'}) x_k n_l'(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) n_l(x_k)) k r j_l(kr) + \right. \\ \left. - (j_l(x_{k'}) x_k j_l'(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) j_l(x_k)) k r n_l(kr) \right], \quad (4.9)$$

con $k' = (k^2 - u_0)^{1/2}$, $u_0 = 2mU_0/\hbar^2$, $x_k = kR$, $x_{k'} = k'R$ e N_{kl} costante di normalizzazione.

Confrontando (4.9) con (3.17) si ha quindi:

$$a_{kl} = N_{kl} x_{k'} (j_l(x_{k'}) x_k n_l'(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) n_l(x_k)), \quad (4.10)$$

$$b_{kl} = -N_{kl} x_{k'} (j_l(x_{k'}) x_k j_l'(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) j_l(x_k)). \quad (4.11)$$

Perciò, utilizzando anche la relazione (3.9), si ricava:

$$\frac{-b_{kl}}{a_{kl} + ib_{kl}} = (-i)^{-1} \frac{j_l(x_{k'}) x_k j_l'(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) j_l(x_k)}{j_l(x_{k'}) x_k h_l^{+'}(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) h_l^{+'}(x_k)}, \quad (4.12)$$

quindi, usando (4.5), ricaviamo:

$$\frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} = \left| \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{j_l(x_{k'})x_k j_l'(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) j_l(x_k)}{j_l(x_{k'})x_k h_l^{+'}(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) h_l^+(x_k)} P_l(\cos\theta) \right|^2. \quad (4.13)$$

Ora, usando (4.7), ricaviamo:

$$\frac{b_{kl}^2}{a_{kl}^2 + b_{kl}^2} = \left[1 + \left(\frac{j_l(x_{k'})x_k n_l'(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) n_l(x_k)}{j_l(x_{k'})x_k j_l'(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) j_l(x_k)} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (4.14)$$

da cui segue, usando (4.6):

$$\sigma_k = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[1 + \left(\frac{j_l(x_{k'})x_k n_l'(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) n_l(x_k)}{j_l(x_{k'})x_k j_l'(x_k) - x_{k'} j_l'(x_{k'}) j_l(x_k)} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (4.15)$$

Tali formule sono quindi esatte, ma di scarso utilizzo, poiché dipendono da serie difficilmente calcolabili.

Muro/pozzo di Dirac sferico:

Procediamo in maniera identica, considerando un muro/pozzo di Dirac sferico:

$$U(r) = \frac{\hbar^2 \Omega}{m} \delta(r - R) \quad (4.16)$$

in cui $\Omega \neq 0$ è una lunghezza di scala inversa. Nel caso $r > R$, si potrebbe dimostrare che l'autofunzione radiale χ_{kl} è data da:

$$\chi_{kl}(r) = N_{kl} \left[(1 - 2\Omega x_k^2 j_l(x_k) n_l(x_k)) k r j_l(kr) + 2\Omega x_k^2 j_l^2(x_k) k r n_l(kr) \right], \quad (4.17)$$

con $x_k = kR$ e N_{kl} costante di normalizzazione.

Confrontando (4.9) con (3.17) si ha quindi:

$$a_{kl} = N_{kl} (1 - 2\Omega x_k^2 j_l(x_k) n_l(x_k)), \quad (4.18)$$

$$b_{kl} = N_{kl} 2\Omega x_k^2 j_l^2(x_k). \quad (4.19)$$

Perciò, utilizzando anche la relazione (3.9), si ricava:

$$\frac{-b_{kl}}{a_{kl} + ib_{kl}} = \frac{-2\Omega x_k^2 j_l^2(x_k)}{1 + 2i\Omega x_k^2 j_l(x_k) h_l^+(x_k)}, \quad (4.20)$$

quindi, usando (4.5), ricaviamo:

$$\frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} = \left| \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{-2\Omega x_k^2 j_l^2(x_k)}{1 + 2i\Omega x_k^2 j_l(x_k) h_l^+(x_k)} P_l(\cos\theta) \right|^2. \quad (4.21)$$

Ora, usando (4.7), ricaviamo:

$$\frac{b_{kl}^2}{a_{kl}^2 + b_{kl}^2} = \left[1 + \left(\frac{1 - 2\Omega x_k^2 j_l(x_k) n_l(x_k)}{2\Omega x_k^2 j_l^2(x_k)} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (4.22)$$

da cui segue, usando (4.6):

$$\sigma_k = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[1 + \left(\frac{1 - 2\Omega x_k^2 j_l(x_k) n_l(x_k)}{2\Omega x_k^2 j_l^2(x_k)} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (4.23)$$

Anche in tal caso le formule sono esatte, ma di scarso utilizzo per la medesima ragione.

Capitolo 5

Sfasamenti per un potenziale con raggio d'azione finito

Un potenziale centrale $U(r)$ ha un *raggio d'azione finito* se:

$$U(r) = 0 \quad \text{per } r > R, \quad (5.1)$$

per un qualche raggio finito R . Ora considereremo lo scattering di una particella da parte di un potenziale con questa proprietà e otterremo un'espressione generale degli sfasamenti δ_{kl} associati. Introducendo la notazione:

$$L_{kl} = \frac{r}{\chi_{kl}(r)} \frac{d\chi_{kl}(r)}{dr} \Big|_{r=R-0}, \quad (5.2)$$

$$x_k = kR, \quad (5.3)$$

in cui l'espressione (5.2) rappresenta la derivata logaritmica di $\chi_{kl}(r)$ all'interno del raggio d'azione del potenziale, gli sfasamenti δ_{kl} possono essere espressi con:

$$\cot \delta_{kl} = \frac{(L_{kl} - 1)n_l(x_k) - x_k n'_l(x_k)}{(L_{kl} - 1)j_l(x_k) - x_k j'_l(x_k)}. \quad (5.4)$$

Dimostrazione. Nella regione con $r > R$, ossia all'esterno del raggio d'azione del potenziale, χ_{kl} soddisfa l'equazione di Schroedinger radiale per la particella libera (3.1), ma in maniera esatta:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi = 0. \quad (5.5)$$

Dunque, riprendendo (3.17), possiamo dire che χ_{kl} è data da:

$$\chi_{kl}(r) = a_{kl}krj_l(kr) + b_{kl}krn_l(kr). \quad (5.6)$$

Per $r \rightarrow \infty$ rimane valida l'espressione asintotica (3.18), quindi le due relazioni (3.20). Quindi, per la regione con $r > R$, si ottiene finalmente:

$$\chi_{kl}(r) = 2kr [\cos \delta_{kl}j_l(kr) - \sin \delta_{kl}n_l(kr)]. \quad (5.7)$$

Ora, da (5.7), calcoliamo:

$$\frac{r}{\chi_{kl}(r)} = \frac{1}{2k [\cos \delta_{kl}j_l(kr) - \sin \delta_{kl}n_l(kr)]} \quad (5.8)$$

e

$$\frac{d\chi_{kl}(r)}{dr} = 2k [\cos \delta_{kl}j_l(kr) - \sin \delta_{kl}n_l(kr) + kr (\cos \delta_{kl}j_l'(kr) - \sin \delta_{kl}n_l'(kr))]. \quad (5.9)$$

Dunque otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{r}{\chi_{kl}(r)} \frac{d\chi_{kl}(r)}{dr} &= 1 + kr \frac{\cos \delta_{kl}j_l'(kr) - \sin \delta_{kl}n_l'(kr)}{\cos \delta_{kl}j_l(kr) - \sin \delta_{kl}n_l(kr)} = \\ &= 1 + \frac{\cot \delta_{kl}krj_l'(kr) - krn_l'(kr)}{\cot \delta_{kl}j_l(kr) - n_l(kr)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ora, sapendo che in $r = R$ le due funzioni $\chi_{kl}(r)$ e $\frac{d\chi_{kl}(r)}{dr}$ sono continue, vale:

$$L_{kl} = \frac{r}{\chi_{kl}(r)} \frac{d\chi_{kl}(r)}{dr} \Big|_{r=R-0} = \frac{r}{\chi_{kl}(r)} \frac{d\chi_{kl}(r)}{dr} \Big|_{r=R+0} \quad (5.11)$$

Perciò:

$$L_{kl} = 1 + \frac{\cot \delta_{kl}x_kj_l'(x_k) - x_kn_l'(x_k)}{\cot \delta_{kl}j_l(x_k) - n_l(x_k)}. \quad (5.12)$$

Ora, risolvendo tale equazione per $\cot \delta_{kl}$, si ottiene il risultato (5.4) cercato. ■

Ora possiamo anche riesprimere le relazioni (3.45), (3.46), e (3.47), utilizzando la nuova notazione (5.3):

$$f_k(\theta) = \frac{R}{x_k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\cot \delta_{kl} - i} P_l(\cos \theta), \quad (5.13)$$

$$\frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} = R^2 \left| \frac{1}{x_k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\cot \delta_{kl} - i} P_l(\cos \theta) \right|^2, \quad (5.14)$$

$$\sigma_k = \frac{4\pi R^2}{x_k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\cot^2 \delta_{kl} + 1}. \quad (5.15)$$

Tali formule verranno utilizzate nei prossimi calcoli.

Capitolo 6

Scattering non risonante nel regime di bassa energia da parte di un potenziale centrale con raggio d'azione finito

Lo scattering nel *regime di bassa energia* per un potenziale con raggio d'azione finito è definito dall'importante condizione su $x_k = kR$:

$$x_k \ll 1. \quad (6.1)$$

Tale regime è chiamato in questo modo poiché l'energia delle particelle, data da $w_k = \hbar^2 x_k^2 / 2mR^2$, è molto piccola in unità naturali ($\hbar^2 / 2mR^2$). Inoltre, si può anche dire che in tal caso la lunghezza d'onda di De Broglie $\lambda_{dB} \sim 1/k$ delle particelle diffuse è molto maggiore del raggio d'azione R del potenziale. Tale regime dunque costituisce un'approssimazione opposta a quella di Born, nella quale invece l'energia delle particelle è molto grande, facendo sì che il potenziale costituisca una piccola perturbazione della loro dinamica libera. Ora utilizzeremo quindi questo nuovo regime per calcolare in maniera più agevole le sezioni d'urto.

Da (5.4), possiamo riesprimere $\cot \delta_{kl}$ con:

$$\cot \delta_{kl} = -\frac{1}{(2l+1)C_{kl}} \frac{n_l(x_k)}{j_l(x_k)}, \quad (6.2)$$

in cui l'espressione C_{kl} è data da:

$$C_{kl} = -\frac{1}{2l+1} \frac{L_{kl} - 1 - x_k j_l'(x_k)/j_l(x_k)}{L_{kl} - 1 - x_k n_l'(x_k)/n_l(x_k)}, \quad (6.3)$$

con L_{kl} dato da (5.2).

Nel regime di bassa energia (6.1), $\cot \delta_{kl}$ assume la seguente forma asintotica:

$$\cot \delta_{kl} \simeq \frac{2}{C_{kl}} \left(\frac{2l}{e} \right)^{2l} x_k^{-2l-1}, \quad (6.4)$$

che, per $l = 0$, è data da: $\cot \delta_{k0} \simeq 2/C_{k0}x_k$.

Dimostrazione. Dalle forme asintotiche (3.3) e (3.5) per piccoli valori di z si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{n_l(z)}{j_l(z)} &\simeq -\frac{(2l)!(2l+1)!}{(2^l l!)^2} z^{-2l-1} = \\ &= -\left(\frac{(2l)!}{(2^l l!)} \right)^2 (2l+1) z^{-2l-1}, \quad \text{per } |z| \ll \max(l^{1/2}, 1). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dunque, per la l -esima onda parziale nel regime di bassa energia, usando (6.2), si ha:

$$\cot \delta_{kl} \simeq \frac{1}{C_{kl}} \left(\frac{(2l)!}{(2^l l!)} \right)^2 x_k^{-2l-1}. \quad (6.6)$$

Ora, utilizzando la formula asintotica di Stirling $n! \simeq (2\pi n)^{1/2} (n/e)^n$, possiamo completare il conto, ottenendo il risultato:

$$\frac{(2l)!}{2^l l!} \simeq \frac{(4\pi l)^{1/2} (2l/e)^{2l}}{2^l (2\pi l)^{1/2} (l/e)^{2l}} = 2^{1/2} \left(\frac{2l}{e} \right)^l, \quad (6.7)$$

che, per $l = 0$, vale semplicemente $2^{1/2}$. Dunque, inserendo tale espressione in (6.6), si dimostra immediatamente il risultato (6.4). ■

Ora utilizziamo tale risultato per un calcolo pratico. Una diffusione di bassa energia è detta *non risonante nella l -esima onda parziale* se C_{kl} varia lentamente in k , approssimativamente con $C_{kl} \sim -1/(2l+1)$. In tale situazione, $\cot \delta_{kl} \sim -2(2l+1)(2l/e)^{2l} x_k^{-2l-1}$ e tale grandezza è grande nel regime di bassa energia, poiché $x_k \ll 1$. A questo punto, sapendo che l'ampiezza di diffusione $f_k(\theta)$ è data da (5.13), il contributo della l -esima onda parziale all'ampiezza di diffusione è dato approssimativamente da:

$$\frac{R}{x_k \cot \delta_{kl} - i} P_l(\cos \theta) \simeq R \frac{2l+1}{2} C_{kl} \left(\frac{ex_k}{2l} \right)^{2l} P_l(\cos \theta), \quad (6.8)$$

poiché $|\cot \delta_{kl}| \gg 1$ e quindi, usando (6.4):

$$\frac{1}{x_k \cot \delta_{kl} - i} \simeq \frac{1}{x_k \cot \delta_{kl}} \simeq \frac{C_{kl}}{2} \left(\frac{ex_k}{2l} \right)^{2l}, \quad (6.9)$$

si ottiene immediatamente il risultato cercato (6.8).

Ora, notando che in tale espressione, poiché $x_k \ll 1$, il contributo per $l > 0$ cala rapidamente all'aumentare di l dato che prevale il termine x_k^{2l} , si può dire che, se k varia in un range di valori tale per cui lo scattering è non risonante per tutte le onde parziali, il contributo maggiore all'ampiezza di diffusione $f_k(\theta)$ è dato dall'onda s , ossia quella con $l = 0$. Di conseguenza, trascuriamo il contributo di tutte le altre onde parziali.

Dunque avremo:

$$f_k(\theta) \simeq RC_{k0}, \quad (6.10)$$

con C_{k0} dato da (6.3), con $l = 0$. Seguono quindi i risultati:

$$\frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} = R^2 C_{k0}^2, \quad (6.11)$$

$$\sigma_k = 4\pi R^2 C_{k0}^2. \quad (6.12)$$

Dimostrazione. Usando la formula (5.13) per l'ampiezza di diffusione e trascurando i contributi dati dalle onde con $l > 0$, possiamo scrivere:

$$f_k(\theta) = \frac{R}{x_k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\cot \delta_{kl} - i} P_l(\cos \theta) \simeq \frac{R}{x_k} \frac{P_0(\cos \theta)}{\cot \delta_{k0} - i}. \quad (6.13)$$

Ora, usando (6.6) nel caso $l = 0$, possiamo dire che:

$$\frac{1}{\cot \delta_{k0}} \simeq x_k C_{k0}. \quad (6.14)$$

Infine, sapendo che $P_0(\cos \theta) = 1$ e $|\cot \delta_{kl}| \gg 1$, quindi $\cot \delta_{k0} - i \sim \cot \delta_{k0}$, si possono sostituire tali espressioni in (6.13) e dimostrare così (6.10). Per dimostrare (6.11) e (6.12) si usano invece le due formule (2.10) e (2.11), dalle quali seguono immediatamente i risultati. ■

Ora, si può notare che tali espressioni non dipendono in alcun modo dall'angolo di diffusione θ . Ciò indica che nel caso in cui lo scattering sia non risonante per ogni onda parziale la diffusione è isotropa. Ciò si può subito notare dalla distribuzione angolare dello scattering, mostrata di seguito in fig. 6.1.

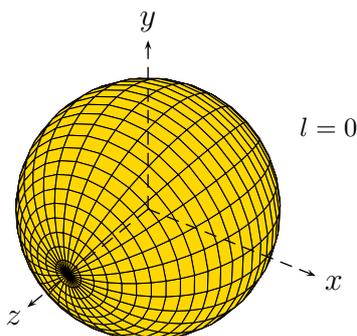


Figura 6.1: *Distribuzione angolare di uno scattering non risonante in regime di bassa energia: la diffusione è isotropa e uniforme in tutte le direzioni.*

Dunque, sperimentalmente, la diffusione non isotropa segnala la presenza di risonanze, poiché sono presenti contributi non trascurabili anche da parte di onde con $l > 0$. Vedremo cosa avviene in tal caso nel prossimo capitolo. Di seguito è mostrato in fig. 6.2 il tipico andamento di uno scattering non risonante. Si può immediatamente notare che la sezione d'urto totale dipende poco da k , rispetto a cui risulta decrescere assai lentamente.

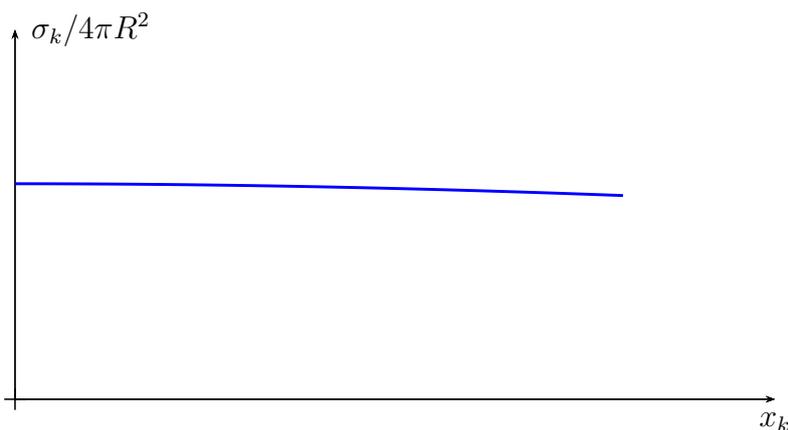


Figura 6.2: *Tipico andamento di uno scattering non risonante: la sezione d'urto totale dipende poco da k , rispetto a cui risulta decrescere molto lentamente.*

Capitolo 7

Scattering risonante ed anti-risonante da parte di un potenziale centrale con raggio d'azione finito

Nel capitolo precedente abbiamo visto lo scattering in assenza di risonanze per ogni onda parziale. In questo capitolo invece vedremo cosa avviene in presenza di risonanze o anti-risonanze, partendo dalla più importante e corposa trattazione delle risonanze. In entrambi i casi vedremo anche un'applicazione fenomenologica. Nel caso delle risonanze approfondiremo la formula di Breit-Wigner, mentre per le anti-risonanze, studieremo l'effetto Ramsauer-Townsend.

Una diffusione di bassa energia è detta *risonante nella l-esima onda parziale* se C_{kl} diverge per certi valori di k , indicati con k_r . Dall'espressione di C_{kl} , data da (6.3), si ricava che i valori di k_r sono soluzioni di:

$$L_{kl} - 1 - x_k \frac{n_l'(x_k)}{n_l(x_k)} = 0. \quad (7.1)$$

Si può poi dimostrare che, in regime di bassa energia ($x_k \ll 1$), tale equazione si riduce a:

$$L_{kl} + l - \frac{x_k^2}{2l - 1} \simeq 0, \quad (7.2)$$

in generale più semplice da risolvere.

Dimostrazione. Dall'espansione in serie di Laurent (3.15) di $n_l(z)$, fermandosi, nella sommatoria, a $k = 1$, si ha:

$$n_l(z) \simeq -\frac{(2l)!}{2^l l!} z^{-l-1} \left[1 + \frac{z^2}{2(2l-1)} \right], \quad \text{per } |z| \ll \max(l^{1/2}, 1). \quad (7.3)$$

Sapendo che:

$$\frac{n_l'(z)}{n_l(z)} = \frac{d}{dz} \log(n_l(z)) \quad (7.4)$$

$$\log(n_l(z)) \simeq \log \left[-\frac{(2l)!}{2^l l!} \right] + (-l-1) \log z + \log \left[1 + \frac{z^2}{2(2l-1)} \right] \quad (7.5)$$

si ha:

$$\frac{n_l'(z)}{n_l(z)} \simeq \frac{-l-1}{z} + \frac{\frac{z}{2l-1}}{1 + \frac{z^2}{2(2l-1)}} \simeq \frac{-l-1}{z} + \frac{z}{2l-1}, \quad (7.6)$$

poiché trascuriamo i termini al secondo grado, dato che $z \rightarrow 0$.

Quindi si ottiene:

$$x_k \frac{n_l'(x_k)}{n_l(x_k)} \simeq -l-1 + \frac{x_k^2}{2l-1}. \quad (7.7)$$

Inserendo tale risultato in (7.1) si ottiene dunque l'equazione (7.2). ■

Se k è vicino ad un valore di risonanza k_r per la l -esima onda parziale, si ha:

$$C_{kl} \simeq \frac{a_{k_r l}}{x_k^2 - x_{k_r}^2}, \quad (7.8)$$

con la costante $a_{k_r l}$ data da:

$$a_{k_r l} = \left[\frac{d}{dx_k^2} L_{kl} \Big|_{x_k=x_{k_r}} - \frac{1}{2l-1} \right]^{-1}. \quad (7.9)$$

Dimostrazione. Partendo dall'espressione asintotica (3.3) ed utilizzando come prima la derivata logaritmica:

$$\frac{j_l'(z)}{j_l(z)} = \frac{d}{dz} \log(j_l(z)) \quad (7.10)$$

$$\log(j_l(z)) \simeq \log \left[\frac{2^l l!}{(2l+1)!} \right] + l \log z \quad (7.11)$$

si ottiene:

$$\frac{j'_l(z)}{j_l(z)} \simeq \frac{l}{z}, \quad (7.12)$$

dunque:

$$x_k \frac{j'_l(x_k)}{j_l(x_k)} \simeq l. \quad (7.13)$$

Quindi, il numeratore in (6.3) è dato approssimativamente da:

$$\begin{aligned} L_{kl} - 1 - x_k \frac{j'_l(x_k)}{j_l(x_k)} &\simeq L_{k_r l} - 1 - x_{k_r} \frac{j'_l(x_{k_r})}{j_l(x_{k_r})} \simeq \\ &\simeq L_{k_r l} - 1 - l \simeq -(2l+1), \end{aligned} \quad (7.14)$$

utilizzando (7.2) e trascurando il termine con x_k^2 facendo si che $L_{k_r l} \simeq -l$.

Il denominatore in (6.3) è invece dato approssimativamente da:

$$\begin{aligned} L_{kl} - 1 - x_k \frac{n'_l(x_k)}{n_l(x_k)} &= L_{kl} - 1 - x_k \frac{n'_l(x_k)}{n_l(x_k)} - L_{k_r l} + 1 + x_{k_r} \frac{n'_l(x_{k_r})}{n_l(x_{k_r})} = \\ &= L_{kl} - L_{k_r l} - \left(x_k \frac{n'_l(x_k)}{n_l(x_k)} - x_{k_r} \frac{n'_l(x_{k_r})}{n_l(x_{k_r})} \right) \simeq \\ &\simeq \left[\frac{d}{dx_k^2} L_{kl} \Big|_{x_k=x_{k_r}} - \frac{1}{2l-1} \right] (x_k^2 - x_{k_r}^2), \end{aligned} \quad (7.15)$$

poiché

$$L_{k_r l} - 1 - x_{k_r} \frac{n'_l(x_{k_r})}{n_l(x_{k_r})} = 0 \quad (7.16)$$

per (7.1),

$$L_{kl} \simeq L_{k_r l} + \frac{d}{dx_k^2} L_{kl} \Big|_{x_k=x_{k_r}} (x_k^2 - x_{k_r}^2), \quad (7.17)$$

facendo lo sviluppo di Taylor ed usando il risultato (7.7). Ora che abbiamo sia il numeratore che il denominatore di C_{kl} , il risultato (7.8) è dimostrato usando la costante (7.9). ■

Ora, sapendo che $\cot \delta_{kl}$ è data da (6.6), sostituendo in tale espressione i risultati (7.8) e (7.9), si ricava immediatamente la seguente espressione per $\cot \delta_{kl}$:

$$\cot \delta_{kl} \simeq \frac{x_k^2 - x_{k_r}^2}{\gamma_{k_r l} x_k^{2l+1}}, \quad (7.18)$$

con la costante $\gamma_{k_r l}$ data da:

$$\gamma_{k_r l} = \left(\frac{2^l l!}{(2l)!} \right)^2 a_{k_r l}. \quad (7.19)$$

Quando si ha una risonanza nella l -esima onda parziale, il contributo all'ampiezza di diffusione $f_k(\theta)$ (5.13) per $k \sim k_r$ è dato approssimativamente da:

$$\frac{R}{x_k} \frac{2l+1}{\cot \delta_{kl} - i} P_l(\cos \theta) \simeq R \frac{(2l+1) \gamma_{k_r l} x_k^{2l}}{x_k^2 - x_{k_r}^2 - i \gamma_{k_r l} x_k^{2l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (7.20)$$

sostituendo l'espressione (7.18) al posto di $\cot \delta_{kl}$. In tal caso infatti non si ha la condizione $|\cot \delta_{kl}| \gg 1$, poiché, sia il denominatore, con x_k^{2l} , che il numeratore, per $k \sim k_r$, sono molto piccoli.

Ora calcoliamo delle espressioni per l'ampiezza di diffusione, per la sezione d'urto differenziale e per quella totale, prima nel caso in cui ci sia una risonanza per l'onda s (ossia con $l = 0$), poi nel caso in cui si abbia per onde con $l > 0$.

Se $l = 0$:

$$f_k(\theta) \simeq R \frac{\gamma_{k_r 0}}{x_k^2 - x_{k_r}^2 - i \gamma_{k_r 0} x_k}, \quad (7.21)$$

$$\frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} \simeq R^2 \frac{\gamma_{k_r 0}^2}{(x_k^2 - x_{k_r}^2)^2 + \gamma_{k_r 0}^2 x_k^2}, \quad (7.22)$$

$$\sigma_k \simeq 4\pi R^2 \frac{\gamma_{k_r 0}^2}{(x_k^2 - x_{k_r}^2)^2 + \gamma_{k_r 0}^2 x_k^2}. \quad (7.23)$$

Come si può notare, anche in tal caso la diffusione è isotropa, poiché non si ha dipendenza da θ . Tuttavia σ_k non è quasi costante, ma ha anzi un picco, come si vedrà in fig. 7.2.

Per $l > 0$ invece:

$$f_k(\theta) \simeq R \left[C_{k0} + \frac{(2l+1)\gamma_{k_r l} x_k^{2l}}{x_k^2 - x_{k_r}^2 - i\gamma_{k_r l} x_k^{2l+1}} P_l(\cos \theta) \right], \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} \simeq R^2 \left[C_{k0}^2 + 2C_{k0} \frac{(2l+1)\gamma_{k_r l} x_k^{2l} (x_k^2 - x_{k_r}^2)}{(x_k^2 - x_{k_r}^2)^2 + \gamma_{k_r l}^2 x_k^{4l+2}} P_l(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{(2l+1)^2 \gamma_{k_r l}^2 x_k^{4l}}{(x_k^2 - x_{k_r}^2)^2 + \gamma_{k_r l}^2 x_k^{4l+2}} P_l(\cos \theta)^2 \right], \quad (7.25) \end{aligned}$$

$$\sigma_k \simeq 4\pi R^2 \left[C_{k0}^2 + \frac{(2l+1)\gamma_{k_r l}^2 x_k^{4l}}{(x_k^2 - x_{k_r}^2)^2 + \gamma_{k_r l}^2 x_k^{4l+2}} \right]. \quad (7.26)$$

In tal caso la diffusione è invece anisotropa, poiché si ha una dipendenza esplicita da θ tramite i polinomi di Legendre. Sperimentalmente quindi, misurando la dipendenza angolare delle sezioni d'urto, si può ricavare $P_l(\cos \theta)$, dunque l , quindi l'onda parziale in cui si verifica il fenomeno della risonanza. Anche in tal caso poi l'andamento di σ_k mostra un picco, come mostrato in fig. 7.3. Inoltre, la grande sezione d'urto ottenuta è dovuta proprio al fatto che i coefficienti C_{kl} divergono. Le distribuzioni angolari degli scattering sono invece mostrate in fig. 7.1.

Dimostrazione. Per quanto riguarda il caso $l = 0$ si può utilizzare direttamente la formula (7.20) sostituendo il valore corrispondente di l , notando che $P_0(\cos \theta) = 1$ e trascurando tutti i contributi dati all'ampiezza di diffusione da parte di onde parziali con $l > 0$. In tal modo si ricava facilmente il risultato (7.21), da cui seguono subito i risultati (7.22) e (7.23) utilizzando le formule (2.10) e (2.11), notando che $|f_k(\theta)|^2 = f_k^*(\theta) f_k(\theta)$.

Per il caso $l > 0$ invece la situazione si complica. Infatti, per quanto riguarda l'ampiezza di diffusione dobbiamo considerare sia il contributo non trascurabile dell'onda s , nella quale non si ha la risonanza, come visto nel risultato (6.10), sia il contributo dell'onda l -esima in cui avviene la risonanza, utilizzando sempre l'espressione (7.20). La somma questi due contributi dà il risultato (7.24). Quindi, otteniamo (7.25) utilizzando (2.10) e notando sempre che $|f_k(\theta)|^2 = f_k^*(\theta) f_k(\theta)$. Per calcolare la sezione d'urto totale

invece dobbiamo utilizzare la formula (2.11). Ora sapendo che:

$$2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (7.27)$$

si hanno:

$$2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_0(\cos \theta) = 0, \quad (7.28)$$

poiché $P_0(\cos \theta) = 1$ e

$$2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta)^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1}, \quad (7.29)$$

dai quali segue (7.26). ■

Di seguito sono mostrate le distribuzioni angolari al variare di l (fig. 7.1).

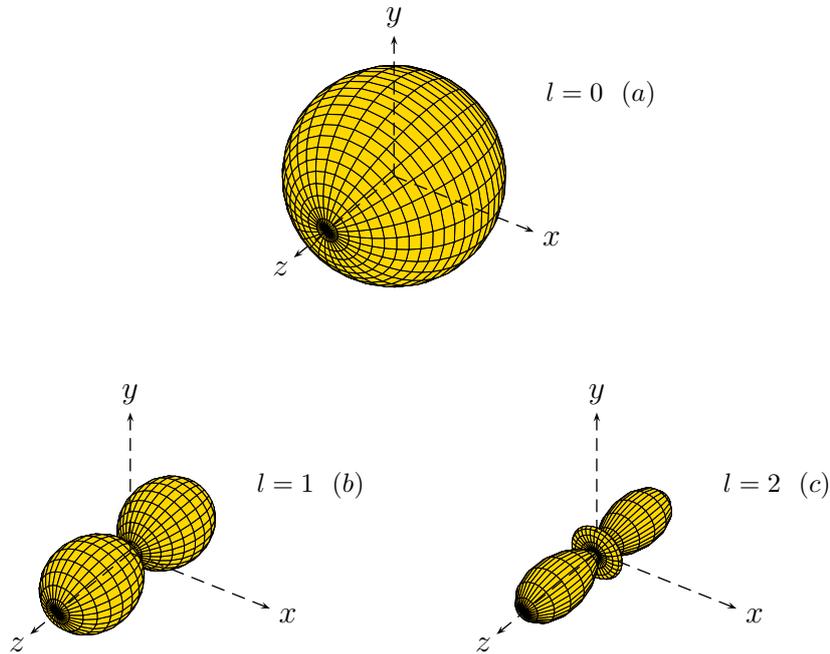


Figura 7.1: *Distribuzione angolare di uno scattering risonante in regime di bassa energia: la diffusione è isotropa se la risonanza avviene nell'onda s (a), mentre è anisotropa se avviene in onde con $l > 0$, in questo caso onde p (b) e d (c).*

Dalle figure 7.2 e 7.3, relative alle sezioni d'urto totali, si nota poi che in generale il valore di picco è inferiore al valore di risonanza x_{k_r} , poiché in entrambi i casi nelle espressioni (7.21) e (7.24) delle ampiezze di diffusione è presente un termine immaginario al denominatore che aggiunge quindi un contributo alle sezioni d'urto.

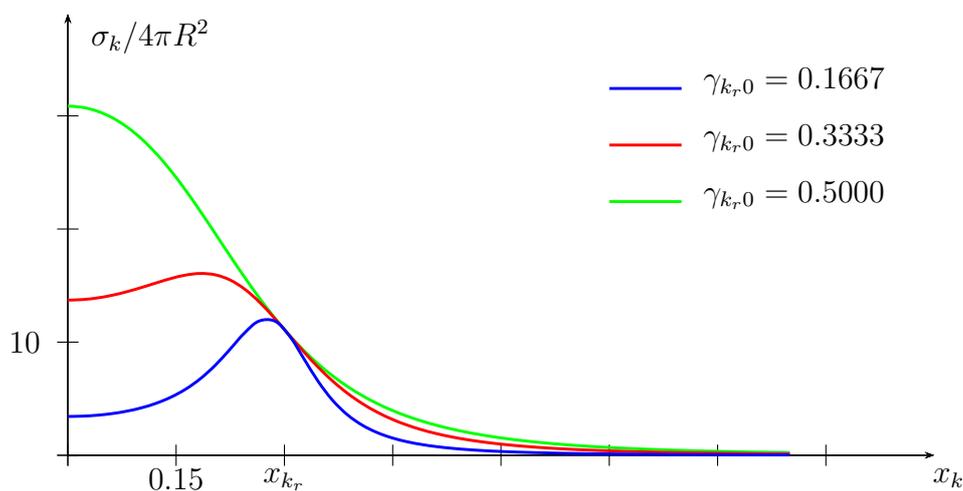


Figura 7.2: Andamento della sezione d'urto totale con $l = 0$ (onda s), per $x_{k_r} = 0.3000$ e $\gamma_{k_r,0} = 0.1667, 0.3333, 0.5000$ (blu, rosso, verde).

Ora vediamo un breve approfondimento sulla teoria di Breit-Wigner, utilizzata, soprattutto da un punto di vista sperimentale, per lo studio delle risonanze.

Poiché in caso di risonanza nell'onda l -esima la funzione C_{kl} diverge, osservando la formula (6.2), si può dire che il numero d'onda k_r soddisfa la seguente equazione:

$$\cot \delta_{k_r l} = 0. \quad (7.30)$$

Nella teoria di Breit-Wigner dello scattering risonante gli sfasamenti δ_{wl} sono visti come funzioni dell'energia w e non dei numeri d'onda k in virtù della relazione $k = (2mw)^{1/2}$. Dunque scriviamo:

$$\cot \delta_{w_r l} = 0, \quad (7.31)$$

in cui w_r è ora l'energia di risonanza per la l -esima onda parziale. Per $w \sim w_r$, possiamo fare uno sviluppo di Taylor di $\cot \delta_{wl}$, usando la relazione (7.31) e scrivendo:

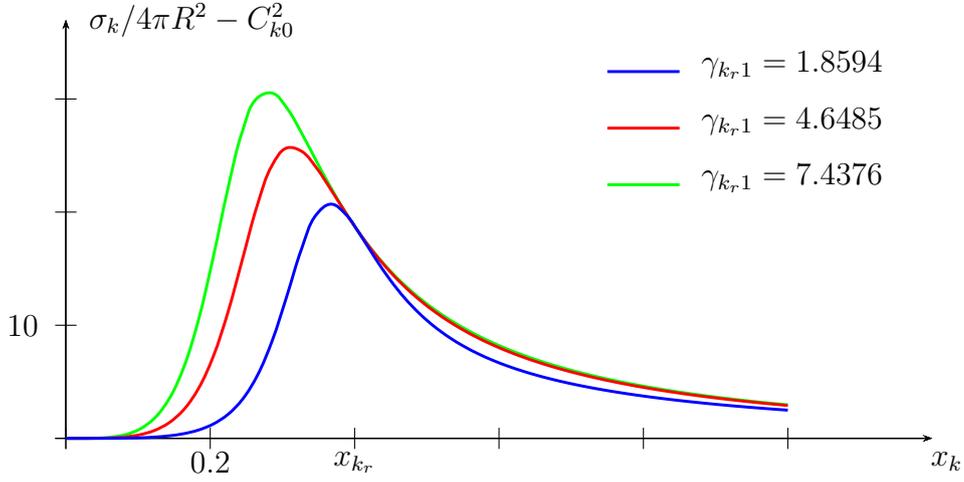


Figura 7.3: Andamento della sezione d'urto totale con $l = 1$ (onda p), per $x_{k_r} = 0.4000$ e $\gamma_{k,r1} = 1.8594, 4.6485, 7.4376$ (blu, rosso, verde). Il contributo dell'onda s viene eliminato con il termine $-C_{k0}^2$.

$$\begin{aligned} \cot \delta_{wl} &= \cot \delta_{w_r l} + \left. \frac{d \cot \delta_{wl}}{dw} \right|_{w=w_r} (w - w_r) + O((w - w_r)^2) \simeq \\ &\simeq -\frac{2}{\gamma_r} (w - w_r), \end{aligned} \quad (7.32)$$

in cui γ_r è una costante con le dimensioni di un'energia definita da:

$$\left. \frac{d \cot \delta_{wl}}{dw} \right|_{w=w_r} = -\frac{2}{\gamma_r}. \quad (7.33)$$

Dalla formula (3.47), utilizzando (7.32), sappiamo dunque che il contributo dato alla sezione d'urto totale dalla l -esima onda parziale è dato da:

$$\frac{4\pi}{k^2} \frac{2l+1}{\cot^2 \delta_{kl} + 1} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\gamma_r^2/4}{(w - w_r)^2 + \gamma_r^2/4}. \quad (7.34)$$

Questa è dunque la *formula di risonanza di Breit-Wigner*, in cui la scala energetica γ_r è detta *larghezza di risonanza di Breit-Wigner*. L'andamento della sezione d'urto totale $\sigma_{\text{Breit}}^{\text{res}}$ relativa all'onda parziale l -esima in funzione dell'energia della particella incidente w è mostrato in fig. 7.4.

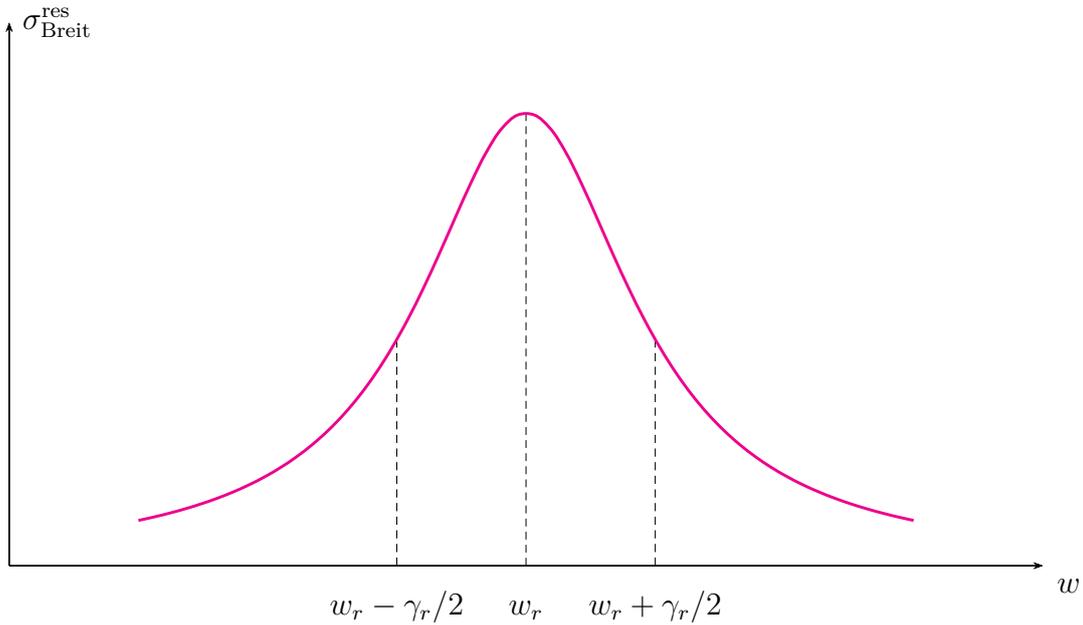


Figura 7.4: *Andamento della sezione d'urto totale per l'onda l -esima in caso di risonanza di Breit-Wigner.*

Come si può notare dal grafico, tale funzione ha un picco esattamente in corrispondenza del valore w_r di risonanza ed è perfettamente simmetrica rispetto a tale valore, per ogni possibile valore di l . Tutto ciò non avviene nelle figure 7.2 e 7.3. La formula di Breit-Wigner infatti costituisce un'approssimazione ed è puramente fenomenologica, poiché basata sulla distribuzione di Cauchy-Lorentz, la quale può essere utilizzata più efficacemente di una Gaussiana in quanto non a decrescenza rapida. In corrispondenza del picco, essa può dunque essere utilizzata per effettuare un fit dei dati sperimentali, specialmente se tale picco è molto pronunciato e presente solo in un piccolo intorno del valore di risonanza.

Possiamo anche interpretare tale formula come un modello che descrive l'assorbimento della particella incidente, la formazione di una particella virtuale, chiamata *risonanza*, in uno stato metastabile e la eventuale riemissione della particella incidente. Per comprendere tali fenomeni la meccanica quantistica non è più sufficiente, poiché l'equazione di Schroedinger implica la conservazione della probabilità associata alle particelle ed è necessario quindi utilizzare la relatività ristretta e la teoria dei campi quantistici. Dunque, ci limiteremo a dire che tale particella virtuale non si forma nel sistema del centro di massa, ossia quello in cui svolgiamo la nostra trattazione teorica, bensì nel sistema di riferimento del laboratorio, cioè quello in cui sono effettuate le osservazioni sperimentali. La risonanza decade subito e forma due particelle prodotte, che sono le particelle proiettile e bersaglio iniziali. L'energia necessaria per produrre la risonanza è quella della

massa a riposo della particella ed è ciò a generare la grande sezione d'urto osservabile ed il caratteristico picco. La condizione che imponiamo inizialmente infatti è proprio quella di avere un'energia della particella incidente prossima a quella di risonanza.

Ora passiamo alla trattazione dell'anti-risonanza, nella quale, nonostante il fenomeno fisico sia molto diverso, si hanno molte analogie dal punto di vista dello svolgimento dei calcoli. Infatti, una diffusione di bassa energia è detta *anti-risonante nella l-esima onda parziale* se C_{kl} si azzera per certi valori di k , indicati con k_a . Dall'espressione di C_{kl} , data da (6.3), si ricava che i valori di k_a sono soluzioni di:

$$L_{kl} - 1 - x_k \frac{j'_l(x_k)}{j_l(x_k)} = 0. \quad (7.35)$$

Si può poi dimostrare che, in regime di bassa energia ($x_k \ll 1$), tale equazione si riduce a:

$$L_{kl} - 1 - l + \frac{x_k^2}{2l+3} \simeq 0, \quad (7.36)$$

in generale più semplice da risolvere.

Dimostrazione. Dall'espansione in serie di Laurent (3.14) di $j_l(z)$, fermandosi, nella sommatoria, a $k = 1$, si ha:

$$j_l(z) \simeq \frac{2^l l!}{(2l+1)!} z^l \left[1 - \frac{z^2}{2(2l+3)} \right], \quad \text{per } |z| \ll \max(l^{1/2}, 1). \quad (7.37)$$

Sapendo che:

$$\frac{j'_l(z)}{j_l(z)} = \frac{d}{dz} \log(j_l(z)) \quad (7.38)$$

$$\log(j_l(z)) \simeq \log \left[-\frac{2^l l!}{(2l+1)!} \right] + l \log z + \log \left[1 - \frac{z^2}{2(2l+3)} \right] \quad (7.39)$$

si ha:

$$\frac{j'_l(z)}{j_l(z)} \simeq \frac{l}{z} + \frac{-\frac{z}{2l+3}}{1 - \frac{z^2}{2(2l+3)}} \simeq \frac{l}{z} + \frac{z}{2l+3}, \quad (7.40)$$

poiché trascuriamo i termini al secondo grado, dato che $z \rightarrow 0$.

Quindi si ottiene:

$$x_k \frac{j_l'(x_k)}{j_l(x_k)} \simeq l - \frac{x_k^2}{2l+3}. \quad (7.41)$$

Inserendo tale risultato in (7.35) si ottiene dunque l'equazione (7.36). ■

Se k è vicino ad un valore di anti-risonanza k_a per la l -esima onda parziale, si ha:

$$C_{kl} \simeq b_{k_a l} (x_k^2 - x_{k_a}^2), \quad (7.42)$$

con la costante $b_{k_a l}$ data da:

$$b_{k_a l} = -\frac{1}{(2l+1)^2} \left[\frac{d}{dx_k^2} L_{kl} \Big|_{x_k=x_{k_a}} + \frac{1}{2l+3} \right]^{-1}. \quad (7.43)$$

Dimostrazione. Partendo dall'espressione asintotica (3.5) ed utilizzando come prima la derivata logaritmica:

$$\frac{n_l'(z)}{n_l(z)} = \frac{d}{dz} \log(n_l(z)) \quad (7.44)$$

$$\log(n_l(z)) \simeq \log \left[-\frac{(2l)!}{2^l l!} \right] - (-l-1) \log z \quad (7.45)$$

si ottiene:

$$\frac{n_l'(z)}{n_l(z)} \simeq \frac{-l-1}{z}, \quad (7.46)$$

dunque:

$$x_k \frac{n_l'(x_k)}{n_l(x_k)} \simeq -l-1. \quad (7.47)$$

Quindi, il denominatore in (6.3) è dato approssimativamente da:

$$\begin{aligned} L_{kl} - 1 - x_k \frac{n_l'(x_k)}{n_l(x_k)} &\simeq L_{k_a l} - 1 - x_{k_a} \frac{n_l'(x_{k_a})}{n_l(x_{k_a})} \simeq \\ &\simeq L_{k_a l} - 1 + l + 1 \simeq 2l + 1, \end{aligned} \quad (7.48)$$

utilizzando (7.36) e trascurando il termine con x_k^2 facendo si che $L_{k_a l} \simeq l + 1$.

Il numeratore in (6.3) è invece dato approssimativamente da:

$$\begin{aligned}
L_{kl} - 1 - x_k \frac{j'_l(x_k)}{j_l(x_k)} &= L_{kl} - 1 - x_k \frac{j'_l(x_k)}{j_l(x_k)} - L_{k_a l} + 1 + x_{k_a} \frac{j'_l(x_{k_a})}{j_l(x_{k_a})} = \\
&= L_{kl} - L_{k_a l} - \left(x_k \frac{j'_l(x_k)}{j_l(x_k)} - x_{k_a} \frac{j'_l(x_{k_a})}{j_l(x_{k_a})} \right) \simeq \\
&\simeq \left[\frac{d}{dx_k^2} L_{kl} \Big|_{x_k=x_{k_a}} + \frac{1}{2l+3} \right] (x_k^2 - x_{k_a}^2),
\end{aligned} \tag{7.49}$$

poiché

$$L_{k_a l} - 1 - x_{k_a} \frac{j'_l(x_{k_a})}{j_l(x_{k_a})} = 0 \tag{7.50}$$

per (7.35),

$$L_{kl} \simeq L_{k_a l} + \frac{d}{dx_k^2} L_{kl} \Big|_{x_k=x_{k_a}} (x_k^2 - x_{k_a}^2), \tag{7.51}$$

facendo lo sviluppo di Taylor ed usando il risultato (7.41). Ora che abbiamo sia il numeratore che il denominatore di C_{kl} , il risultato (7.42) è dimostrato usando la costante (7.43). ■

Ora, sapendo che $\cot \delta_{kl}$ è data da (6.6), sostituendo in tale espressione i risultati (7.42) e (7.43), si ricava immediatamente la seguente espressione per $\cot \delta_{kl}$:

$$\cot \delta_{kl} \simeq \frac{1}{\beta_{k_a l} x_k^{2l+1} (x_k^2 - x_{k_a}^2)}, \tag{7.52}$$

con la costante $\beta_{k_a l}$ data da:

$$\beta_{k_a l} = \left(\frac{2^l l!}{(2l)!} \right)^2 b_{k_a l}. \tag{7.53}$$

Quando si ha una anti-risonanza nella l -esima onda parziale, il contributo all'ampiezza di diffusione $f_k(\theta)$ (5.13) per $k \sim k_a$ è dato approssimativamente da:

$$\frac{R}{x_k} \frac{2l+1}{\cot \delta_{kl} - i} P_l(\cos \theta) \simeq R(2l+1) \beta_{k_a l} x_k^{2l} (x_k^2 - x_{k_a}^2) P_l(\cos \theta), \tag{7.54}$$

sostituendo l'espressione (7.52) al posto di $\cot \delta_{kl}$. In tal caso si può utilizzare la condizione $|\cot \delta_{kl}| \gg 1$, quindi $\cot \delta_{kl} - i \sim \cot \delta_{kl}$, data la presenza nel denominatore del termine x_k^{2l+1} e utilizzando il fatto che $x_k \sim x_{k_a}$, che fanno sì che tale condizione sia valida.

Ora calcoliamo delle espressioni per l'ampiezza di diffusione, per la sezione d'urto differenziale e per quella totale, prima nel caso in cui ci sia una anti-risonanza per l'onda s (ossia con $l = 0$), poi nel caso in cui si abbia per onde con $l > 0$.

Se $l = 0$:

$$f_k(\theta) \simeq R [\beta_{k_a 0}(x_k^2 - x_{k_a}^2) + 3C_{k_1} x_k^2 \cos \theta], \quad (7.55)$$

$$\frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} \simeq R^2 [\beta_{k_a 0}^2(x_k^2 - x_{k_a}^2)^2 + 6C_{k_1}\beta_{k_a 0}(x_k^2 - x_{k_a}^2)x_k^2 \cos \theta + 9C_{k_1}^2 x_k^4 \cos^2 \theta], \quad (7.56)$$

$$\sigma_k \simeq 4\pi R^2 [\beta_{k_a 0}^2(x_k^2 - x_{k_a}^2)^2 + 3C_{k_1}^2 x_k^4]. \quad (7.57)$$

Come si può notare, in tal caso la diffusione non è isotropa, poiché si ha una dipendenza esplicita da θ . Inoltre, in σ_k , si azzera il termine $(x_k^2 - x_{k_a}^2)^2$ per $k = k_a$, come si vedrà in fig. 7.5.

Per $l > 0$ invece valgono le formule (6.10), (6.11) e (6.12). Le anti-risonanze dunque, pur potendosi verificare per ogni l , sono osservabili sperimentalmente solo per $l = 0$. Questo perché, se si ottengono risultati associabili alle formule (6.10), (6.11) e (6.12), si può verificare l'assenza di risonanze e/o anti-risonanze per l'onda s , ma non si può stabilire facilmente se sono eventualmente presenti anti-risonanze nelle onde successive, dato il loro scarso contributo alle sezioni d'urto.

Dimostrazione. Se $l = 0$, il contributo dell'onda p ($l = 1$), di ordine $O(x_k^2)$, è comparabile a quello dell'onda s ($l = 0$), che è di ordine $O(x_k^2 - x_{k_a}^2)$. I contributi di onde con $l > 1$, di ordine $O(x_k^{2l})$ rimangono invece trascurabili. Dunque, usando (7.54), possiamo dire che il contributo per $l = 0$ è dato da $R\beta_{k_a 0}(x_k^2 - x_{k_a}^2)$, mentre per $l = 1$, usando la più generale espressione (6.6), troviamo:

$$\cot \delta_{k_1} = \frac{1}{C_{k_1} x_k^3}, \quad (7.58)$$

quindi, utilizzando sempre (7.54), la condizione $\cot \delta_{kl} - i \sim \cot \delta_{kl}$ e $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ si

ha:

$$\frac{R}{x_k \cot \delta_{k1} - i} \cos \theta \simeq \frac{R}{x_k \cot \delta_{k1}} \cos \theta = 3RC_{k1}x_k^2 \cos \theta \quad (7.59)$$

e si ottiene (7.55) sommando i due contributi trovati. Dopodiché si ottiene (7.56) direttamente da (2.10), mentre (7.57) si ottiene a partire da (2.11), sapendo che:

$$2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (7.60)$$

$$2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{4}{3}\pi. \quad (7.61)$$

Per quanto riguarda $l > 0$ invece, le 3 grandezze cercate sono dominate dall'onda s . Di conseguenza, tutti i contributi per $l > 0$ vengono trascurati e da ciò seguono i tre risultati (6.10), (6.11) e (6.12) già dimostrati nel capitolo 6.

■

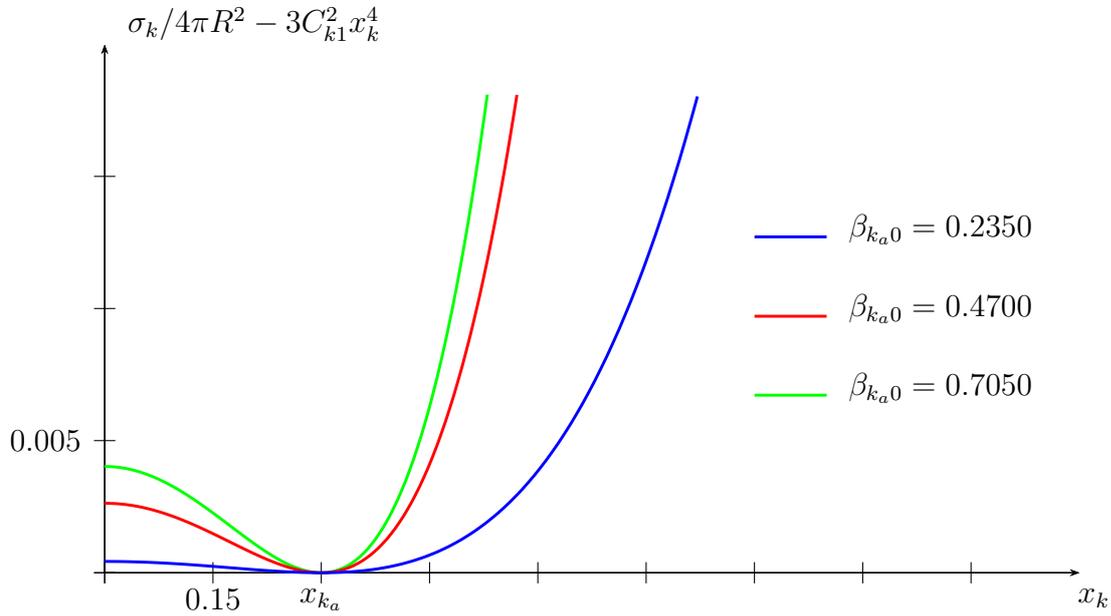


Figura 7.5: Andamento della sezione d'urto totale in caso di anti-risonanza nell'onda s , rimuovendo il contributo dell'onda p (vedi il termine $-3C_{k1}^2 x_k^4$), con $x_{ka} = 0.3000$ e $\beta_{ka0} = 0.2350, 0.4700, 0.7050$ (blu, rosso, verde).

Ora vediamo, da un punto di vista prettamente qualitativo, un fenomeno fisico di anti-risonanza, chiamato *effetto Ramsauer-Townsend*, che si può verificare in caso di diffusione di elettroni da parte di gas nobili monoatomici. La fig. 7.6 suggerisce che un potenziale attrattivo può essere abbastanza intenso da far sì che l'onda s possa essere sfasata di $\delta_{k0} = \pi$. Se ciò accade, il contributo dato dall'onda s all'ampiezza di diffusione (3.45) è trascurabile, poiché il termine $\cot \delta_{k0}$, presente al denominatore, diverge.

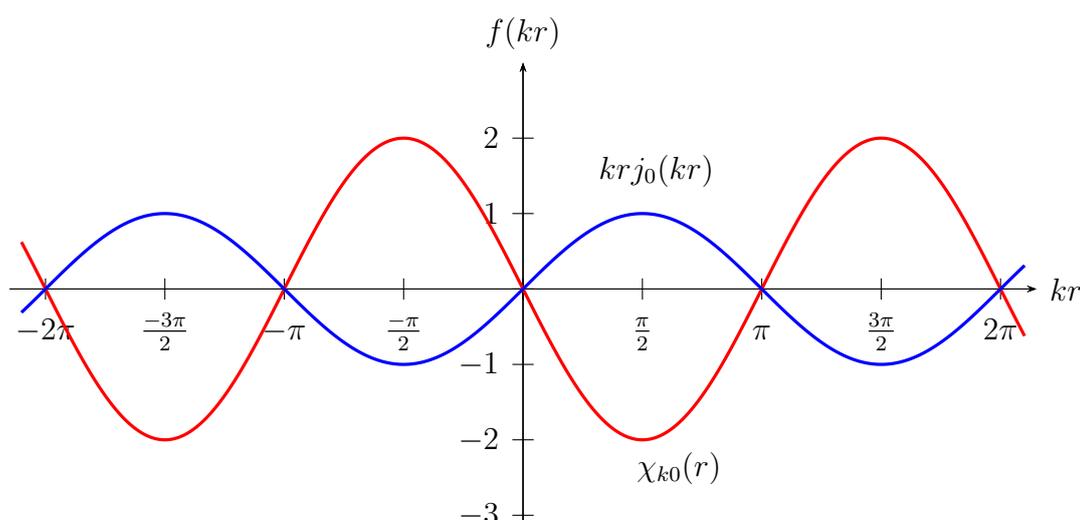


Figura 7.6: Grafico di $krj_0(kr)$ (linea blu) e $\chi_{k0}(r)$ (linea rossa), quando la buca di potenziale è abbastanza intensa da causare uno sfasamento pari a $\delta_{k0} = \pi$.

In tal caso dunque, non si ha alcuno scattering per ogni angolo θ . La fig. 7.6 dunque mostra il grafico di $krj_0(kr)$ e $\chi_{k0}(r)$, quando la buca di potenziale è abbastanza intensa da causare tale sfasamento. Un gas nobile monoatomico, costituito essenzialmente da atomi con tutte le shell elettroniche riempite al massimo, ad una definita energia di un elettrone proiettile, è dunque insensibile alla relativamente bassa energia con il quale viene bombardato, mentre gli sfasamenti dipendono altamente da tale grandezza. Fisicamente, l'effetto Ramsauer-Townsend può essere dunque pensato come una diffrazione di elettroni da parte del gas di atomi, nella quale la funzione d'onda dell'atomo è distorta in modo da adattarsi perfettamente alla funzione d'onda esterna, la quale non è distorta. Questo effetto è analogo al fenomeno dell'anti-risonanza che si verifica per particolari energie nel caso di collisioni unidimensionali (che qui non approfondiremo), quando il coefficiente di trasmissione assume il valore $T_k = 1$, per speciali valori di k . In tal caso, l'onda incidente viene totalmente trasmessa e non si ha una componente riflessa. In fig. 7.7 viene infatti mostrato l'andamento sperimentale del coefficiente di trasmissione T_k in funzione del numero d'onda k , nel caso di urti in un gas di atomi di Xenon. Sempre da

un punto di vista sperimentale, si può misurare il libero cammino medio degli elettroni proiettile, notando che tale grandezza ha un massimo quando la diffusione è minima a causa dell'anti-risonanza. In figura 7.8 viene mostrato l'andamento del libero cammino medio, sempre nel caso di atomi di Xenon, in funzione della tensione di catodo applicata alla valvola termoionica utilizzata per condurre l'esperimento (che qui non approfondiremo). Si nota appunto un massimo in corrispondenza del valore di tensione atteso, ovvero quello associato al valore di energia di anti-risonanza degli elettroni proiettile.

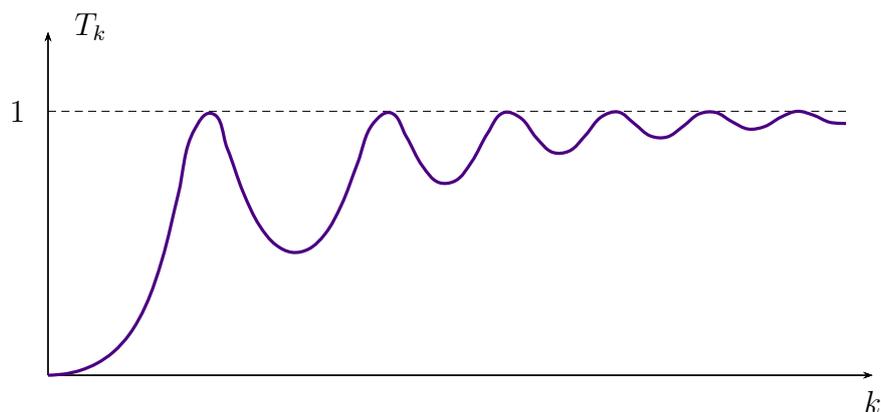


Figura 7.7: Andamento del coefficiente di trasmissione T_k in funzione del numero d'onda k , nel caso di urti in un gas di atomi di Xenon.

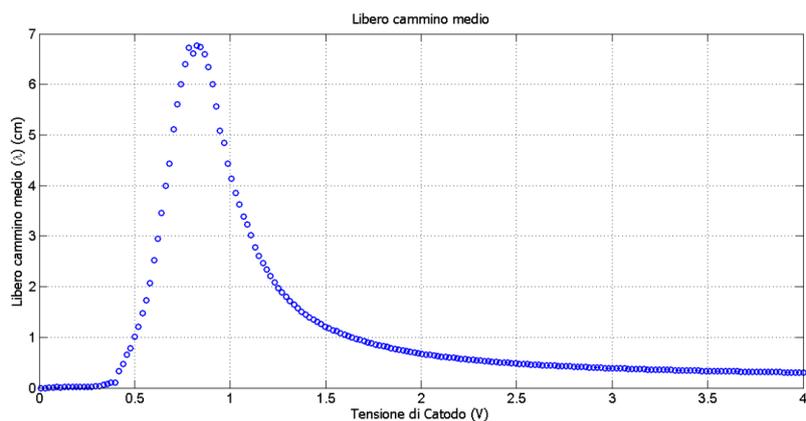


Figura 7.8: Andamento del libero cammino medio, nel caso di atomi di Xenon, in funzione della tensione di catodo.

Bibliografia

- [1] R. Zucchini *Quantum Mechanics: Lecture Notes*, Dipartimento di Fisica ed Astronomia, Bologna.
- [2] Leonard I. Schiff *Quantum Mechanics*, Third Edition, International Student Edition.
- [3] Marco Monaci, Salvatore Fusco *Effetto Ramsauer-Townsend in un Thyatron (Xenon)*, [FUSMON_ramsauer.pdf](#).
- [4] N. F. Mott, H. S. W. Massey *The Theory of Atomic Collisions*, Third Edition, Oxford at the Clarendon Press.
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz *Fisica teorica 3. Meccanica quantistica. Teoria non relativistica*, Seconda edizione, Editori Riuniti, Edizioni Mir.
- [6] N. Zettili *Quantum Mechanics. Concepts and Applications*, Second Edition, John Wiley & Sons, Ltd.
- [7] Richard W. Robinett *Quantum Mechanics*, Second Edition, Oxford University Press
- [8] David J. Griffiths *Introduction to Quantum Mechanics*, First Edition, Prentice Hall
- [9] J. J. Sakurai *Meccanica Quantistica Moderna*, Prima Edizione, Zanichelli