

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

DINAMICA DEI SISTEMI COLLISIONALI

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

Presentata da:
Gabriele Ottalevi

Anno Accademico 2020-2021

Sommario

Come ogni problema astrofisico, anche la dinamica stellare nasce con lo scopo di rispondere a ben precise domande poste dal mondo naturale agli astronomi. Tra queste possiamo citare interrogativi riguardo l'origine, l'evoluzione e la struttura delle galassie. In questo lavoro cercherò di presentare in maniera tecnica ma approssimata, alcune delle problematiche associate alla formazione, struttura, ed evoluzione delle galassie. In particolare mi limiterò al campo d'indagine della dinamica stellare. Tale scelta esclude da questa trattazione moltissimi altri aspetti fondamentali dell'astrofisica delle galassie, come ad esempio tutte le proprietà associate alla presenza di enormi quantitativi di gas, all'evoluzione stellare, a fenomeni estremi collegati alla presenza di buchi neri al centro delle galassie stesse.

Indice

Introduzione	1
1 Problema dei due corpi	3
1.1 Urto Geometrico	3
1.2 Effetto Fionda	4
1.3 Equazione differenziale dell'orbita relativa	6
2 Tempo di rilassamento a due corpi	9
2.1 Approssimazione impulsiva	9
2.2 Applicazioni Astrofisiche	13
3 Teorema del Viriale	15
3.1 Piano del Viriale o Piano Ciotti	16
A Evoluzione dei sistemi collisionali	17
B Core Collapse e Catastrofe Gravotermica	19

Introduzione

In astrofisica un sistema collisionale è un sistema nel quale le interazioni fra gli oggetti massivi che lo compongono, quali stelle, stelle binarie o buchi neri, hanno ridistribuito l'energia cancellando le condizioni iniziali del sistema. Per effettuare una prima analisi dei fenomeni dinamici che interessano sistemi di questo tipo, si potrebbe iniziare col trattare il problema degli N-corpi, chiedendoci come si muovono n masse m_i date le loro posizioni $x_i(0)$ e le loro velocità $v_i(0)$ iniziali, sotto l'azione della reciproca gravità. Per rispondere a questa domanda ci rifaremo innanzitutto alle equazioni di Newton:

$$\ddot{x}_i = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|x_i - x_j\|^3} (x_i - x_j)$$

Esprese in forma Hamiltoniana:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \text{ in cui } H = T + U = \sum_{i=1}^N \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} - \frac{G}{2} \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$$

$$q_i = x_i; p_i = m_i v_i$$

Ho due sistemi di $3N$ equazioni differenziali ordinarie non lineari del secondo ordine o $6N$ equazioni differenziali ordinarie non lineari del primo ordine per le quali vale il teorema di esistenza e unicità il quale afferma che, se le condizioni iniziali sono ottimali, esiste un intervallo di tempo $t_0 < t < t_0 + \delta$ nel quale il moto del sistema esiste ed è unico. Sfortunatamente un approccio totalmente deduttivo-formale non permette di andare molto lontano nelle applicazioni. Occorre quindi affrontare il problema sotto più aspetti (sfrutteremo i risultati della Meccanica Celeste, della Meccanica Statistica e della fluidodinamica). Il problema degli N-corpi è, in senso tecnico, banalmente non integrabile. Un sistema Hamiltoniano (meccanico) è non integrabile quando nel suo spazio delle fasi non ci sono abbastanza leggi di conservazione. Poincaré ha dimostrato che già per il problema dei tre corpi nello spazio delle fasi non ci sono abbastanza strutture geometriche che permettono di vedere la soluzione del problema come interazione di varietà. Al fine di trovare le informazioni cercate ridurremo il sistema a più problemi dei due corpi.

Capitolo 1

Problema dei due corpi

Per procedere con lo sviluppo dovremo considerare le stelle non come punti materiali, ma come strutture aventi un certo diametro. Se vogliamo che il sistema di equazioni differenziali sia applicabile dobbiamo capire quanto le interazioni dovute alla dimensione finita delle stelle siano importanti in sistemi reali. A tal proposito si dovranno introdurre inizialmente i concetti di urto geometrico e urto gravitazionale.

1.1 Urto Geometrico

Partiamo innanzitutto con il verificare approssimativamente qual'è la probabilità che due corpi, ad esempio due stelle, si urtino all'interno di una galassia. Prendiamo per il nostro esempio il modello di una galassia, supposta sferica, di raggio R e contenente un numero N di stelle di raggio $R_* = 7 \cdot 10^{10} \text{cm} = 2.3 \cdot 10^{-8} \text{pc}$. Per compiere questa analisi agiamo per approssimazioni considerando lo spazio percorso da una stella come una struttura cilindrica avente un'area di base pari a $\sigma = 4\pi R_*^2$ e lunghezza pari al libero cammino medio definito dalla variabile λ . Si può dire che un urto tra due stelle avviene nel momento in cui la distanza dei loro centri è minore della somma dei loro raggi, si incontreranno quindi quando le 'scie gravitazionali cilindriche' che si portano dietro durante il loro moto occuperanno tutta la galassia:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \lambda(2R_*)^2\pi N$$

Nella relazione notiamo che il termine di sinistra rappresenta il volume del modello di galassia fissato e quello di destra fa riferimento al volume del singolo cilindro che si porta dietro un corpo, moltiplicato per il numero N di corpi in questione. Possiamo ora ricavare la formula che esprime il libero cammino medio per una stella di raggio R_* in una galassia di raggio R contenente N corpi:

$$\frac{\lambda}{R} = \frac{R^2}{3NR_*^2} \quad (1.1)$$

L'Equazione 1.1 è un'equazione adimensionale: sia il termine di sinistra che quello di destra sono numeri puri, possiamo quindi dire che il risultato non dipenderà dalle unità di misura utilizzate. Dall'equazione ricaviamo inoltre tre informazioni fondamentali per il nostro studio: λ aumenta all'aumentare delle dimensioni della galassia; λ diminuisce all'aumentare del numero di stelle; λ va come R_*^2 . Confrontando il libero cammino medio con le dimensioni caratteristiche del sistema (per cui prenderemo $N = 10^{11} R = 50kpc$), avremo ad esempio che $\lambda = 10^{12} R$. Notiamo subito che il dato ottenuto sul libero cammino medio è "troppo grande" per poter dipendere dai dati trascurati durante i calcoli o dalla modellizzazione imposta. Ciò implica infatti che una stella, prima di interagire con un'altra, dovrebbe percorrere mille miliardi di raggi galattici. Prendendo come termine di paragone il Sole, questo dall'inizio dell'universo ad oggi ha compiuto approssimativamente 40 giri attorno al centro della nostra galassia. Questo dimostra che, seppur con rilevanti approssimazioni della realtà, la probabilità che due stelle si urtino all'interno di una galassia generica è nulla. La principale conseguenza di questo risultato è la possibilità di poter considerare una galassia come un sistema di N punti materiali e di fatto l'esempio più calzante di punto materiale in tutto l'universo è dato proprio dalle stelle in una galassia. Nonostante quindi una galassia sia un concetto così profondamente diverso da quello di gas di stelle, le equazioni che descrivono il moto di strutture stellari in queste, sono essenzialmente le stesse della fluidodinamica. La conclusione ovvia è che le stelle in una galassia non sono un gas, ma rispondono alle stesse equazioni.

1.2 Effetto Fionda

Per le interazioni che avvengono all'interno di questa modellizzazione bisognerà considerare che la forza di attrazione gravitazionale è una forza a lungo range, le orbite verranno quindi potenzialmente perturbate nel corso dell'avvicinamento dei corpi. Introduciamo a tal proposito il concetto di Urto Gravitazionale. Il motivo per cui ci interessiamo agli urti tra le stelle in una galassia sono gli scambi di energia che si verificano nel corso del fenomeno chiamato *Effetto Fionda*. Sapendo che la forza gravitazionale è conservativa, mi chiedo innanzitutto come possa esserci un trasferimento di energia durante l'interazione tra un corpo principale e uno minore (energia conservativa ma non invariante). Consideriamo due masse m_1 e m_2 in un sistema di riferimento *inerziale* S_0 , dichiarando r come la posizione relativa di \vec{x}_1 e \vec{x}_2

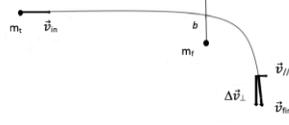


Figura 1.1: Orbita relativa nel problema dei 2-corpi [L. Ciotti, Astrofisica extragalattica, appunti lezione a.a. 2019/2020]

Condizione necessaria e sufficiente affinché si possa verificare l'effetto fionda è che le due masse interagiscano con una forza derivabile da un'energia di interazione che ha la proprietà di essere *non confinante*, ovvero $U(r)|U(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow +\infty$; $r = \|\vec{x}\|$, dove r è la norma della distanza relativa. Nel corso di questo elaborato faremo quindi riferimento a tipi di forze che, per una separazione tendente all'infinito dei corpi, non riesca a causare alcuna influenza su essi. Applico ora le leggi del moto di Newton alle due masse:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = -\nabla_1 U = \nabla_{x_1} U \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = \nabla_2 U = -\nabla_{x_2} U \end{cases} \quad (1.2)$$

Dove ∇U rappresenta il gradiente rispetto alla prima coordinata dell'energia potenziale gravitazionale U . Poichè sono in un sistema inerziale, l'accelerazione sarà prodotta da una forza $f(r) = \frac{dU}{dr}$. Analizzando il gradiente di U rispetto alle due coordinate $\nabla_1 U = \frac{\partial U}{\partial x_1} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$; $\nabla_2 U = \frac{\partial U}{\partial x_2} = -f(r) \frac{\vec{r}}{r}$, deduciamo subito che $\nabla_2 U = -\nabla_1 U$, per cui le equazioni del moto di Newton possono essere scritte come:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = -\nabla_1 U m_1 \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = -\nabla_2 U = +\nabla_1 U \end{cases} \quad (1.3)$$

di conseguenza avremo che:

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 + m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2) = 0 \quad (1.4)$$

dove $m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2$ è una costante. Abbiamo quindi dimostrato che le equazioni di Newton per un sistema inerziale portano alla *conservazione dell'impulso per il sistema*. Notiamo che facendo riferimento al centro di massa del sistema contenente i due corpi possiamo scrivere $m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 = MR_{CM}$, dove $M = m_1 + m_2$ è proprio il centro di massa di un sistema isolato (ovvero su cui non agiscono forze esterne) in cui le forze interne obbediscono a Newton. Questa massa si muoverà di moto rettilineo uniforme, infatti:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2) = \frac{d}{dt}(MR_{CM}) = 0 \quad (1.5)$$

Da cui $M\vec{R}_{CM} = cost \Rightarrow$ sostituendo $v_{CM} = \dot{R}_{CM}$ ho che $v_{CM} = cost$.

Nota: v_{CM} dipende dalle condizioni iniziali del sistema quindi, mantenendolo costante, si conserveranno tali condizioni: le due masse inizialmente lontane, risentiranno della mutua interazione fino ad allontanarsi, il tutto mantenendo una velocità del centro di massa costante. Mostriamo che, moltiplicando scalarmente le due equazioni del moto rispettivamente per \dot{x}_1 e \dot{x}_2 e considerando nuovamente la III legge di Newton, avrò che la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica del primo corpo sommata a quella del secondo e all'energia di interazione (potenziale) tra i due (anch'essa costante durante il moto) sarà:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1}{2} \|\vec{v}_1\|^2 + \frac{m_2}{2} \|\vec{v}_2\|^2 + U(r) \right) = 0 \quad (1.6)$$

Ho quindi ottenuto la *conservazione dell'energia meccanica*

$$\frac{m_1}{2} \|\vec{v}_1\|^2 + \frac{m_2}{2} \|\vec{v}_2\|^2 + U(r) = E_0 \quad (1.7)$$

1.3 Equazione differenziale dell'orbita relativa

Per quanto mostrato precedentemente possiamo prendere l'energia e l'impulso come quantità: *Conservate* (sono invarianti le equazioni di Newton) e *Non invarianti* (il loro valore dipende dal sistema di riferimento).

In un sistema di riferimento S' in moto con velocità v_{CM} rispetto al sistema S_0 , ho che:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + v_{CM} \\ \vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + v_{CM} \end{cases} \quad (1.8)$$

allora la velocità del centro di massa vista dal sistema che si muove con velocità del centro di massa stesso sarà $m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = 0$, quindi:

$$\frac{m_1}{2} \|\vec{v}'_1\|^2 + \frac{m_2}{2} \|\vec{v}'_2\|^2 + U(r) = E' \quad (1.9)$$

Nota: uso U e non U' perchè questa dipende dalla norma della distanza tra i due corpi, ovvero: $r = \|x_1 - x_2\|$; $r' = \|x'_1 + r_{CM} - x_2 - r_{CM}\| \Rightarrow r = r'$. La distanza relativa non cambia da S_0 a S' .

Si deduce che il sistema del C.M. è inerziale \Rightarrow l'energia meccanica si conserva. Quindi S_0 e S' sono entrambi sistemi inerziali con la differenza che in S_0 il corpo è in movimento, quindi avrò una certa energia cinetica per cui potrò compiere del lavoro, mentre in S' il corpo è fermo rispetto al sistema, quindi non si potrà compiere lavoro. Per risolvere il sistema di partenza contenente le equazioni di Newton effettuiamo il passaggio all'orbita relativa:

1.3. EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELL'ORBITA RELATIVA

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{\nabla_1 U}{m_1} = -\frac{f(r)\vec{r}}{m_1 r} \\ \ddot{x}_2 = -\frac{\nabla_2 U}{m_2} = \frac{f(r)\vec{r}}{m_2 r} \end{cases} \quad (1.10)$$

Otengo una prima forma per l'equazione differenziale per l'orbita relativa:

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)f(r)\frac{\vec{r}}{r} \quad (1.11)$$

In cui il termine di sinistra rappresenta l'accelerazione relativa e quello di destra tra parentesi rappresenta l'inverso della massa ridotta $\frac{1}{\mu}$. Abbiamo trovato dunque la relazione a cui obbedisce un corpo di massa μ che si muove in un campo di forze *fisso* che lo attira con intensità pari alla forza con cui si attirano i due corpi originari. Seppur simile alla II legge di Newton, l'equazione del moto dell'orbita relativa infatti non descrive la dinamica di un sistema inerziale, in quanto presuppone l'esistenza di un corpo fittizio di massa μ su cui però agisce una forza gravitazionale, $f(r)$, non proporzionale alla massa stessa. Riscrivo l'equazione differenziale dell'orbita relativa in un sistema di riferimento non inerziale come:

$$\mu\vec{r} = -f(r)\frac{\vec{r}}{r} \quad (1.12)$$

Dove \vec{r} rappresenta l'accelerazione relativa del corpo 1 rispetto al corpo 2, il segno meno indica che la forza è attrattiva e $\frac{\vec{r}}{r}$ rappresenta il versore diretto dal corpo 1 al corpo 2. Il problema a questo punto è che, risolvendo questa equazione, non saprò direttamente il comportamento dei due corpi ma solo della loro differenza. Uso quindi il sistema del C.M. per analizzare cosa fanno x'_1 e x'_2 e risolvere il problema dell'orbita relativa:

- mi metto nel sistema di riferimento del centro di massa e risolvo il problema relativo dell'orbita usando $m_1x'_1 + m_2x'_2$ (la posizione del centro di massa in un sistema solidale con esso è zero)
- trovo x'_1 e x'_2 nel sistema del centro di massa

Nel sistema di riferimento del C.M. ho:

$$\begin{cases} m_1\vec{x}'_1 + m_2\vec{x}'_2 = 0 \\ \vec{x}'_1 - \vec{x}'_2 = \vec{r} \end{cases} \Rightarrow \vec{x}'_1 = \frac{\mu}{m_1}\vec{r}; \vec{x}'_2 = -\frac{\mu}{m_2}\vec{r} \quad (1.13)$$

quindi i due corpi compiono attorno al centro di massa orbite della stessa famiglia dell'orbita relativa (Orbite omotetiche).

Facendo alle equazioni dell'orbita relativa ciò che abbiamo fatto alle equazioni di Newton quando abbiamo ottenuto la conservazione dell'energia, scopriamo che,

nonostante si tratti di un sistema non inerziale, questo è tale da mantenere delle importanti proprietà, come appunto la conservazione dell'energia meccanica dell'orbita relativa:

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\vec{v}_2 + U \quad (1.14)$$

I due termini del membro di destra rappresentano in ordine, l'energia cinetica della massa ridotta e l'energia potenziale dei due corpi materiali. In sostanza se si fanno scontrare due corpi enormemente lontani l'uno dall'altro (per cui $U = 0$), essi conservano l'energia; ovvero la conservazione dell'energia sull'orbita relativa fa' sì che $U(iniz) = 0 \Rightarrow \|\vec{v}\|_{iniz} = \|\vec{v}\|_{fin}$. Questo significa, ricordando la relazione tra la velocità relativa e la velocità dei corpi nel C.M. \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , che: $\|\vec{v}_1'\|_{iniz} = \|\vec{v}_1'\|_{fin}$ e $\|\vec{v}_2'\|_{iniz} = \|\vec{v}_2'\|_{fin}$, ovvero non c'è né perdita né guadagno di energia. Quindi se prendessi il caso di un corpo minore che viene sparato verso uno più massiccio, questo inizierà l'interazione con una certa velocità che, una volta conclusa, sarà la stessa con cui il corpo va all'infinito.

Sull'orbita relativa si conserva dunque la quantità E_r , che si può dimostrare essere l'energia meccanica vista dal sistema del C.M., ovvero $E_r = E'_{CM}$. Poiché il potenziale è una quantità *non confinante* ($U(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$) su un'orbita che parte da ∞ e ritorna a ∞ , la conservazione dell'energia totale può essere scritta come la conservazione dell'energia cinetica. Si può porre l'energia iniziale (quando il corpo in moto giunge dall'infinito) uguale a quella finale (quando il corpo torna all'infinito dopo l'interazione) e, tenuto conto che l'energia potenziale a distanza infinita è nulla ($U \propto 1/r$), si ottiene:

$$\begin{cases} E_{r,iniz} = \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{r}}_i\|^2 + U(\infty) = \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{r}}_i\|^2 \\ E_{r,fin} = \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{r}}_f\|^2 + U(\infty) = \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{r}}_f\|^2 \end{cases} \Rightarrow \|\dot{\vec{r}}_i\| = \|\dot{\vec{r}}_f\| \quad (1.15)$$

Dove vediamo che la legge di conservazione dell'energia totale dell'orbita relativa, si riduce alla conservazione della norma della velocità.

Capitolo 2

Tempo di rilassamento a due corpi

Una delle tecniche di indagine che ha mostrato maggiori risultati nell'ambito della dinamica delle galassie, è data dalla sostituzione di un approccio 'discreto' che caratterizza il problema degli N-corpi, con un approccio 'continuo'; come ci si aspetta, la trattazione continua del problema fa sì che in questo nuovo ambito di lavoro le equazioni differenziali che descrivono il sistema non siano più equazioni differenziali ordinarie, ma equazioni differenziali alle derivate parziali. Una delle basi di questo approccio è il loro tempo di rilassamento a due corpi. Da un punto di vista "generale" possiamo dire che la motivazione tecnica che spinge all'introduzione del concetto di tempo di rilassamento è il tentativo di capire sotto quali condizioni sia possibile sostituire allo studio delle equazioni del moto di N corpi nel potenziale da loro generato, lo studio del moto di una particella campione nel potenziale generato da un «fluido» materiale che rappresenta l'approssimazione continua del sistema di N corpi medesimo.

2.1 Approssimazione impulsiva

Il procedimento per determinare il tempo di rilassamento a due corpi (t_{2b}) si basa sull'esperimento di lancio di una massa di test (m_t) in un sistema costituito da un numero N di corpi di massa m_f detti 'corpi di campo'.

Definizione: Un sistema si definisce:

- In regime collisionale se $E t_a > t_{2b}$
- In regime non collisionale se $E t_a < t_{2b}$

N.B.: dire sistema collisionale o non collisionale non ha nulla a che vedere con gli urti geometrici; per collisioni intenderemo effetti gravitazionali *cumulativi* degli

incontri gravitazionali a grande distanza.

L'idea è quella di cercare di creare un analogo al *Moto Browniano* nello spazio delle fasi.

Per semplicità faremo due assunzioni fondamentali per svolgere il calcolo del tempo di rilassamento e per trovare una stima in approssimazione impulsiva nell'ambito della *teoria cinetica del coefficiente di diffusione dell'energia cinetica*:

1. Tutti gli incontri tra le particelle verranno trattati come *indipendenti*, ovvero l'effetto di ogni 'urto' è semplicemente sommato a quello dei successivi e dei precedenti
2. Tutti gli scontri tra corpi sono trattati come incontri *iperbolici a 2 corpi*

Prendiamo come modello un sistema stellare (galassia) che immagineremo come un alone di N masse che si muovono lungo un' orbita influenzata da tutte le altre stelle presenti, rendendo l'aspetto termodinamico del sistema gravitazionale più complesso che per un sistema gassoso; a tal proposito ricordiamo infatti che la forza gravitazionale agisce a lungo range e che è unidirezionale (attrattiva). Questo problema degli N-corpi risulterà per noi irrisolvibile. Furono Fermi, Neumann, Chandrasekhar e Landau a porre le condizioni che ci permettono di affrontare il problema:

- numeriamo tutti i corpi di campo da 1 a N
- valutiamo, per ogni $i=1,\dots,N$, l'interazione tra il corpo di test e l'i-esimo corpo di campo, cancellando gli N-1 restanti (Risulterà in N problemi a 2-corpi).

Dalle relazioni vettoriali ottenute nello sviluppo del problema dei due corpi, andando a considerare la variazione di velocità del corpo di prova δv_t , otteniamo la seguente *identità vettoriale*:

$$\delta v_t = \frac{\mu}{m_t} \delta v_{rel} \quad (2.1)$$

dove abbiamo già preso in considerazione che la velocità del centro di massa non cambia durante l'interazione, poichè il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, dunque $\delta v_{cm} = 0$. Si pone in particolare attenzione alla componente perpendicolare della velocità relativa iniziale del vettore variazione di velocità della particella di prova, che indicheremo con $(\delta v_t)_\perp$. Si ha dunque:

$$(\delta v_t)_\perp = \frac{\mu}{m_t} \delta v_{rel\perp} \quad (2.2)$$

Data la simmetria vale la seguente proprietà: per una stella di test immersa in un mezzo omogeneo e isotropo di stelle di campo, la somma vettoriale dei $(\delta v_t)_\perp$ su tutti gli urti è zero $(\delta v_t)_{cross} = 0$. Dove $()_{cross}$ significa "media su tutti gli

urti in un attraversamento". Il risultato si basa sulle assunzioni fatte riguardo le stelle di campo. A causa della distribuzione omogenea e isotropa, non si ha una concentrazione maggiore di stelle in una regione ed esse non hanno una direzione privilegiata di velocità. Si pone ora attenzione alla somma dei quadrati dei $(\delta v_t)_\perp$ per poter individuare l'energia cinetica perpendicolare alla velocità relativa iniziale, K_\perp , che la particella acquista nei vari urti, ovvero:

$$K_\perp = \frac{m_t}{2} \sum \|(\delta \vec{v}_t)_\perp\|^2 \quad (2.3)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli urti. Nel momento in cui questo valore sarà dell'ordine dell'energia cinetica iniziale che aveva la particella in S_0 , sarà passato un tempo di rilassamento a 2 corpi. Per calcolare questa quantità dovrò analizzare nello specifico la componente $\|(\delta \vec{v}_t)_\perp\|$. A tal fine ci chiederemo quanto vale questo vettore in ogni urto così che, una volta che saremo in grado di calcolarlo, sommerò tutti i contributi per poi eguagliarli all'energia cinetica iniziale per trovare il tempo di rilassamento. Dall'equazione 2.2 trovo che la norma del vettore è:

$$\|(\delta v_t)_\perp\| = \frac{\mu}{m_t} \|(\delta v)_\perp\| \quad (2.4)$$

Potremmo procedere effettuando il calcolo del membro di sinistra tramite la risoluzione del problema dei due corpi su orbita iperbolica ma risulterebbe in un calcolo dispendioso. A tal proposito useremo il *Metodo di approssimazione di Born*, che rappresenta il calcolo della deviazione perpendicolare dell'orbita senza risolvere il problema.

Assunzioni approssimazione impulsiva:

1. Modulo della forza \vec{F}_\perp costante durante l'orbita e corrispondente alla forza attrattiva tra le due stelle alla distanza b :

$$F = \frac{Gm_t m_f}{b^2} \quad (2.5)$$

2. prendere come tempo di interazione un tempo caratteristico pari al tempo necessario ad un segnale al fine di percorrere la distanza b avanti e indietro alla velocità relativa \vec{v}_{rel} :

$$\delta t = \frac{2b}{\|\vec{v}_{rel}\|} \quad (2.6)$$

3. Assumiamo che i corpi di campo abbiano una distribuzione del tipo:

$$f(\vec{x}_f, \vec{v}_f) = n_f g(\|\vec{v}_f\|) \quad (2.7)$$

Tra tutte le possibili funzioni di distribuzione ne scegliamo una *Omogenea* nello spazio e *Isotropa* nelle velocità. Sappiamo dalla seconda legge della dinamica che una forza F che agisce per un certo tempo δt provoca una variazione dell'impulso:

$$\delta \vec{p} = \vec{F}_\perp \delta t \Rightarrow (\delta \vec{p})_\perp = \mu (\delta \vec{v}_{rel})_\perp = \vec{F}_\perp \delta t \quad (2.8)$$

Questa relazione ci dice innanzitutto che l'impulso è dato dalla componente perpendicolare della forza, inoltre, quando avviene un urto, la variazione sull'orbita relativa della velocità \perp corrisponde all'impulso associato alla massa ridotta nella direzione \perp .

La componente perpendicolare dell'impulso è data quindi da:

$$\mu \|(\delta \vec{v})_\perp\| \sim \frac{2Gm_t m_f}{bv} + O\left(\frac{1}{b^2}\right) \text{ con } b \gg 1 \quad (2.9)$$

Otteniamo quindi per l'approssimazione impulsiva:

$$\|(\delta \vec{v}_t)_\perp\|^2 = \frac{1}{m_t^2} [\mu (\delta v)_\perp]^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 v^2} + O\left(\frac{1}{b}\right) \quad (2.10)$$

Tale risultato permette di calcolare la componente perpendicolare dell'energia cinetica. Rifacendoci alla terza assunzione dell'approssimazione impulsiva, vediamo che il corpo di test viaggia in una regione spazialmente sempre uguale quindi non ci sono differenze di velocità in base a come metto il riferimento.

Ci chiediamo ora quale sia il numero di incontri δn che il corpo compie in un intervallo di tempo δt . Per rispondere a questo problema facciamo tre assunzioni:

- 'etichettiamo' tutti i corpi con velocità vicina a \vec{v}_f
- inseriamo \vec{v}_f in f
- integriamo su $d^3 \vec{v}_f$

Allora il numero di corpi che si incontrano per unità di tempo sarà dato da:

$$2\pi b db \delta t \|\vec{v}_t - \vec{v}_f\| n_f g(\|\vec{v}_f\|) d^3 \vec{v}_f = N \quad (2.11)$$

L'equazione tra le altre cose descrive un cilindro orientato lungo la velocità relativa \vec{v} : $\delta t \|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|$ rappresenta proprio la lunghezza del cilindro in Figura 2.1. Tramite l'approssimazione impulsiva ottengo l'energia cinetica perpendicolare scambiata durante un urto; prendendo l'energia perpendicolare complessiva e integrandola quadridimensionalmente otteniamo:

$$\frac{(\delta K)_\perp}{\delta t} = \int_0^\infty \frac{4\pi G^2 m_t m_f^2}{b} n_f db \int_{R^3} \frac{g(\|\vec{v}_f\|) d^3 \vec{v}_f}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} \quad (2.12)$$

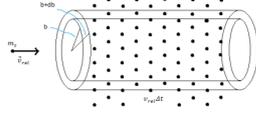


Figura 2.1: Guscio cilindrico descritto dal moto del corpo.

L'integrando rappresenta il potenziale di una distribuzione a simmetria sferica nel punto dello spazio delle velocità \vec{v}_f . Detto I l'integrale in questione e posto uguale a $\psi(\|\vec{v}_t\|)$ che, per $\|\vec{v}_t\| \rightarrow +\infty$ è asintotico a $\frac{1}{\|\vec{v}_t\|}$, troviamo che:

$$\frac{(\delta K)_\perp}{\delta t} = 4\pi G^2 m_t m_f^2 n_f \int_0^\infty \frac{\psi(\|\vec{v}_t\|) db}{b} \quad (2.13)$$

Questo integrale possiede due divergenze:

1. *Divergenza infrarossa* (limite per $b \rightarrow 0$): per risolverla sostituiamo $\frac{db}{b}$ con $\frac{bdb}{b^2+b_0^2}$; dove b_0 è il parametro di impatto corrispondente ad una deviazione di $\frac{\pi}{2}$ dall'orbita relativa
2. *Divergenza ultravioletta* (limite per $b \rightarrow +\infty$): dovuta all'approssimazione impulsiva

Alla fine, considerando il limite per tempi molto piccoli, si troverà:

$$\frac{(\delta K)_\perp}{\delta t} = 4\pi G^2 m_t m_f^2 n_f \psi(\|\vec{v}_t\|) \ln \Lambda \quad (2.14)$$

dove $\Lambda = \frac{R}{b_0}$ è il *Logaritmo di Coulomb*. Prendendo il limite per tempi $\delta t \rightarrow 0$ otteniamo quindi la rapidità con cui gli urti fanno variare la somma delle componenti dei quadrati delle velocità. Ricaverò da ciò il *Tempo di rilassamento a due corpi*:

$$t_2 b = \frac{\|\vec{v}_t\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda \psi} \quad (2.15)$$

Bisogna notare che la presenza del logaritmo di Coulomb è dovuta al fatto che la formula trovata per il tempo di rilassamento è il primo termine di espansione all'interno di una teoria più sofisticata.

2.2 Applicazioni Astrofisiche

Consideriamo una struttura, ad esempio una galassia, modellizzata sottoforma di sfera di raggio R , contenente N stelle di massa $m = m_t = m_f$ all'equilibrio. Per

un sistema *autogravitante*, di cui dichiaro essere σ la *dispersione di velocità viriale*, abbiamo che, misurando il tempo di rilassamento in unità di t_{cross} , ovvero del tempo caratteristico che impiega una stella ad attraversare la galassia in oggetto, detto *Tempo di attraversamento*, otteniamo:

$$t_{cross} = \frac{2R}{\sigma} \Rightarrow \frac{t_2 b}{t_{cross}} = \frac{\sigma^4 R^2}{12G^2 m^2 N \ln \Lambda} = \frac{N}{12 \ln \Lambda} \quad (2.16)$$

Infatti $mN = M$, $\sigma^2 = \frac{GM}{R}$ e $\frac{\sigma^4 R^2}{G^2 M^2}$ (*Osservazione*: Possiamo ricavare che $\Lambda = \frac{R}{b_0} \sim N$). Quindi per un sistema autogravitante avrò:

$$\frac{t_b}{t_{cross}} \simeq \frac{N}{12 \ln N} \simeq \frac{0.1N}{\ln N} \quad (2.17)$$

dove N conserva il suo significato di numero di elementi del sistema. Se proviamo a valutare questa espressione per alcuni sistemi astrofisici scopriamo che una tipica galassia ellittica, con $N \simeq 10^{11}$ e $t_{cross} \simeq 2 \cdot 10^8$ anni, risulta avere un tempo di rilassamento a due corpi dell'ordine di $10^{\frac{6}{7}}$ miliardi di anni: le galassie ellittiche sono considerabili sistemi non collisionali su tempi scala cosmologici. Per ammassi globulari dove $N \simeq 10^6$ e $t_{cross} \simeq 10^6$ anni, $t_2 b = 5 \cdot 10^9$ anni, ci si aspetta che gli effetti cumulativi degli urti siano significativi su tempi scala più brevi della loro età.

Capitolo 3

Teorema del Viriale

Il teorema del viriale è una serie di identità tensoriali ottenute con il seguente procedimento:

1. A partire dall'equazione di Boltzmann non collisionale (CBE), il cui scopo ricordiamo essere quello di determinare l'equazione differenziale in regime non collisionale per l'evoluzione della funzione di distribuzione f , posso affermare che in un sistema in regime non collisionale f evolve secondo la seguente relazione:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \vec{v}, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \rangle - \langle \nabla \phi_t, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \rangle = 0 \quad (CBE) \quad (3.1)$$

2. Per ottenere informazioni dalla CBE sono state sviluppate tecniche come *il metodo dei momenti*, la cui idea di base è di cercare equazioni differenziali più semplici dell'equazione non collisionale di Boltzmann. Considerando i momenti sullo spazio delle velocità, moltiplicando la prima equazione del sistema per le componenti v_j delle velocità e integrando su tutte le velocità, otterremo le cosiddette *equazioni di Jeans*:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} v_j d^3 \vec{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3 \vec{v} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \vec{v} = 0 \quad (3.2)$$

Se prendo queste equazioni, che rappresentano un insieme di identità, e le moltiplico per tutti i momenti possibili nello spazio delle configurazioni e integro su di esso, ottengo un numero infinito di identità tensoriali che rappresentano proprio il *Teorema del viriale in forma tensoriale*. Nel caso di un sistema all'*equilibrio, autogravitante, a distribuzione sferica e formato da componenti di egual massa*, possiamo ridurre un'identità tensoriale ad un'identità scalare ed estrarre quella che può essere vista come la 'punta dell'iceberg' del teorema del viriale: $2K = -U$

3.1 Piano del Viriale o Piano Ciotti

Per studiare l'identità ottenuta precedentemente ci rifaremo ad una rappresentazione grafica del teorema del viriale. Prendiamo un piano cartesiano le cui ascisse rappresentano l'energia potenziale U e le cui ordinate fanno riferimento all'energia cinetica K . La bisettrice sarà data dalla relazione $K = |U|$. Sappiamo che ogni

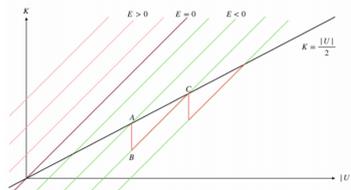


Figura 3.1: Piano Viriale o Piano di Ciotti [L. Ciotti, *Astrofisica extragalattica*, appunti lezione a.a. 2019/2020]

sistema isolato rispetta il principio di conservazione dell'energia $K - |U| = E$. Ciò implica che tale sistema, nel nostro piano, si verrà a trovare su rette parallele alla bisettrice. Come si può vedere dalla Figura 3.1, sistemi auto gravitanti con $E > 0$ non possono essere virializzati, infatti non intersecano la retta del viriale. Al crescere di U si hanno sistemi sempre più densi, mentre al crescere di K si hanno sistemi più 'caldi'. Si consideri un sistema viriale (all'equilibrio) che si trova sulla retta del viriale nel punto A. Se il sistema possiede una temperatura maggiore rispetto all'ambiente, si avrà una perdita di energia cinetica, che causerà uno spostamento verso il punto B, appartenente ad una retta di energia inferiore. A questo punto il sistema avrà una temperatura minore e non si troverà più in condizioni di equilibrio. Per ritornare alle condizioni di partenza (punto C) il sistema dovrà muoversi, essendone vincolato per la conservazione dell'energia, lungo la retta energetica in cui si trova. In questa nuova configurazione il sistema ha guadagnato energia cinetica e si troverà quindi nuovamente in una posizione di equilibrio, ma questo possiederà un'energia inferiore. Viceversa, nel caso in cui il sistema acquisti energia, per tornare all'equilibrio, si arriverebbe ad una situazione di energia maggiore. Stiamo ovviamente trattando sistemi il cui calore specifico è negativo, infatti, dopo un iniziale "aumento di temperatura", una volta raggiunto il nuovo stato di equilibrio, si avrà un'energia maggiore (ma non un'energia cinetica maggiore). Un'analisi riguardante l'evoluzione nel tempo di queste strutture è interessante sia per osservare i fenomeni che agiscono al loro interno sia per poterne studiare le possibili conseguenze e quindi effettuare, con l'ausilio delle osservazioni, delle predizioni sulla loro natura [vedi Appendice A].

Appendice A

Evoluzione dei sistemi collisionali

L'evoluzione dei sistemi autogravitanti è regolata principalmente da due fenomeni fisici:

1. Evaporazione: Alcune strutture stellari, come gli amassi globulari, hanno un tempo di rilassamento a due corpi minore della loro età; gli urti saranno dominanti e potrebbe verificarsi la cosiddetta *evaporazione gravitazionale*.
2. Collasso del nucleo

Per descrivere il primo processo prendiamo il caso di una stella all'interno di un ammasso. Se questa possiede una velocità maggiore della velocità di fuga dell'ammasso stesso, riuscirà ad abbandonare il sistema, sottraendo a quest'ultimo nell'unità di tempo una certa quantità di energia cinetica per unità di massa. Bisogna però notare che la diminuzione della massa è minore della diminuzione dell'energia cinetica, infatti solo le stelle più veloci riescono a scappare (corpi meno massicci più veloci). La perdita di un corpo per evaporazione comporterà quindi una perdita sia di energia cinetica e che di energia potenziale ma, sfuggendo principalmente le stelle più veloci, la perdita di energia cinetica sarà più rilevante della perdita di quella potenziale.

La funzione di distribuzione del sistema può essere approssimata ad una maxwelliana: come si vede in Figura A.1 alcune stelle potrebbero trovarsi ad avere una velocità maggiore della velocità di fuga del sistema (inizia a perdere corpi). I meccanismi attraverso cui una stella può aumentare la propria velocità fino a superare quella fuga sono due:

- Ejection (“espulsione”): si ha a seguito di un singolo urto gravitazionale a piccolo parametro d’impatto
- Evaporazione gravitazionale: si verifica a causa di una serie di interazioni con altri corpi per un alto parametro d’impatto. Ad ogni urto la stella guadagna

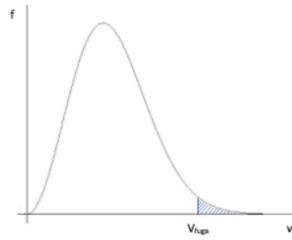


Figura A.1: Distribuzione di di Maxwell, coda ad alta velocità [L. Ciotti, Astrofisica extragalattica, appunti lezione a.a. 2019/2020]

un piccolo quantitativo di energia cinetica fino a superare quella potenziale gravitazionale

Se prendessimo un sistema composto da un nucleo centrale denso e da un alone esterno isoterma, questi fenomeni potrebbero risultare in interessanti conseguenze per il sistema stesso [vedi: Appendice B].

Appendice B

Core Collapse e Catastrofe Gravotermica

Assumiamo che il sistema preso sia composto da un nucleo centrale denso e da un alone approssimativamente isotermo. Assumo inoltre che il sistema sia al viriale, ovvero $U + 2K = 0$. La perdita di energia cinetica conseguente alla 'fuga' di un corpo dal sistema comporterà uno sbilanciamento dell'equilibrio a favore del potenziale. Poichè un sistema autogravitante ha calore specifico negativo, ovvero alla perdita di energia segue un aumento della temperatura, e poichè l'evaporazione delle stelle porta ad una perdita di energia cinetica maggiore rispetto a quella potenziale, si avrà un aumento del potenziale gravitazionale. Avremo quindi una contrazione e un conseguente riscaldamento del sistema. Il processo di evaporazione porta le stelle meno massicce (più veloci) verso l'esterno del sistema, aumentando di fatto la densità e la temperatura del nucleo e favorendo così gli urti e gli scambi di energia che, a loro volta, faciliteranno l'evaporazioni e l'inizio di una serie di eventi che porterebbe il sistema ad una densità centrale infinita. Questi risultati hanno come conseguenza una situazione di instabilità, detta *Catastrofe gravotermica*: quando una stella sfugge all'attrazione gravitazionale del sistema portandosi dietro una parte della sua energia cinetica, il nucleo si contrae; i corpi ancora all'interno dovranno muoversi con una velocità maggiore per compensare l'aumento dell'energia gravitazionale del nucleo e quindi aumenterà la probabilità che alcune di loro vadano a superare la velocità di fuga. Stiamo descrivendo quindi un processo a catena che risulterà sempre più rapido e che si ripercuoterà in un'accelerazione della contrazione del nucleo (*Core collapse*).

Bibliografia

- [1] G. Bertin, Dynamics of Galaxies, Cambridge University Press, 2014.
- [2] L. Ciotti, Astrofisica extragalattica, appunti lezione a.a. 2019/2020
- [3] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, Fundamental Astronomy, Springer, 2016.
- [4] J. Binney, S. Tremaine, Galactic Dynamics, Princeton University Press, 2008.
- [5] D.Merritt. Optimal Smoothing for N-Body Code. Department of Physics and Astronomy, Rutgers University, New Brunswick, NJ 08855