

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**L'ATOMO DI IDROGENO:
RIGHE, SERIE
E SUA IMPORTANZA IN ASTROFISICA**

Tesi di laurea

Presentata da:
Jenny Frediani

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Anno Accademico **2020-2021**

SOMMARIO

L'idrogeno (**H**) è l'elemento chimico più semplice e più abbondante esistente in natura: è composto da un nucleo con un singolo protone (*numero atomico* $Z = 1$) e un solo elettrone; costituisce il 90% del gas dell'*Inter-Stellar Medium* (ISM), la materia diffusa nelle galassie; compone attualmente $\approx 74\%$ di tutta la materia visibile dell'Universo. A seconda del numero di neutroni che si vanno a sommare ai protoni nel nucleo, specificato dal *numero di massa* A , si distinguono tre *isotopi* dell'**H**: *prozio* (${}^1\mathbf{H}$), *deuterio* (${}^2\mathbf{H}$) e *trizio* (${}^3\mathbf{H}$). In particolare, il prozio, privo di neutroni nel nucleo ($A = 1$), rappresenta l'isotopo più comune (99.985%) e stabile in natura; segue il deuterio (0.015%), caratterizzato invece dalla presenza di un neutrone nel nucleo ($A = 2$). L'elaborato che qui si presenta inizia con un primo capitolo riguardante la scoperta delle serie di righe spettrali dell'idrogeno in spettroscopia, conducendo così alla descrizione del modello atomico di Bohr, capace di giustificare le osservazioni sullo spettro dell'idrogeno tramite ipotesi di quantizzazione ad hoc. Quest'ultime risultano però spiegabili solo nell'ambito della teoria della Meccanica Quantistica (MQ), di cui si accennano le nozioni utili per la trattazione esatta dell'atomo di idrogeno in termini di autofunzioni, livelli energetici e numeri quantici associati. Segue, nel secondo capitolo, la spiegazione del processo di formazione delle righe spettrali per un atomo singolo, che coinvolge i noti *coefficienti di Einstein*, la distinzione fra i principali tipi di transizioni elettroniche dell'atomo di idrogeno e, collegato a ciò, la definizione della riga proibita a 21 cm, utilissimo strumento investigativo dell'idrogeno nell'Universo. Nel terzo e ultimo capitolo vengono infine illustrati diversi fenomeni astrofisici legati alla presenza d'idrogeno, sia esso in forma atomica, ionizzata o molecolare, in alcuni dei quali interviene la riga a 21 cm. Lo scopo ultimo di questi esempi è di testimoniare l'importanza dell'idrogeno in astrofisica. Considerata la vastità dell'argomento e la necessaria brevità dell'elaborato, si è scelto di incentrare il discorso sul ruolo svolto dall'idrogeno in alcune fasi dell'ISM, nelle *galassie a spirale* e in relazione alla *nucleosintesi stellare*.

Indice

Glossario	III
1 LE SERIE DELLO SPETTRO DELL'IDROGENO	1
1.1 Formula di Rydberg	1
1.2 Modello atomico di Bohr	1
1.3 Trattazione quantistica dell'atomo di idrogeno	3
2 LE RIGHE SPETTRALI	5
2.1 Coefficienti di Einstein	5
2.2 Transizioni elettroniche nell'atomo di idrogeno	6
2.3 Riga proibita a 21 cm dell'idrogeno neutro	8
3 IL RUOLO DELL'IDROGENO IN ASTROFISICA	9
3.1 Nucleo dell'idrogeno: nucleosintesi stellare	9
3.2 Idrogeno atomico e galassie a spirale	11
3.2.1 Curva di rotazione	11
3.2.2 Legge empirica di Tully-Fisher	13
3.3 Idrogeno molecolare: nubi molecolari giganti	13
3.4 Idrogeno ionizzato: regioni HII	14
Bibliografia	16

Glossario

B

Bremsstrahlung Radiazione elettromagnetica prodotta dal frenamento di una particella carica, tipicamente un elettrone, deviata da un'altra particella carica, tipicamente un nucleo atomico, a causa del campo elettrico presente attorno al nucleo atomico.

D

Distribuzione delle velocità di Maxwell $N(v)dv = \frac{N}{\pi^{3/2}} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{4\pi v^2 dv}{\alpha^3}$ con T temperatura, $k = 1.380649 \times 10^{-23} JK^{-1}$ costante di Boltzmann, $\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, m massa delle particelle, N numero di particelle e v vettore velocità.

F

Fotoionizzazione Processo fisico in cui un fotone di energia $h\nu$, collidendo con un atomo di energia di ionizzazione E_{ion} ne estrae uno o più elettroni, sotto la condizione $h\nu > E_{ion}$.

Funzione d'onda Funzione complessa di variabili quali le coordinate spaziali x, y, z , e il tempo t che rappresenta lo stato di un sistema quantistico.

L

Legge di Boltzmann Legge che regola il popolamento dei livelli energetici eccitati: $\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} \exp\left(-\frac{E_b - E_a}{kT}\right)$. Riferito ad un certo livello energetico, N è il numero di particelle, g il peso statistico, E l'energia, T la temperatura e $k = 1.380649 \times 10^{-23} JK^{-1}$ la costante di Boltzmann.

M

Materia oscura Categoria di materia attualmente postulata e non osservata direttamente che sembra interagire con la materia visibile solo attraverso la gravità e che costituirebbe circa l'86% della massa dell'Universo e il 27% della sua energia.

Modello di atomo planetario Modello atomico introdotto nel 1912 dal chimico-fisico neozelandese E. Rutherford in cui gli atomi, governati dalle leggi dell'elettrostatica coulombiana, sono costituiti da un nucleo centrale delle dimensioni $\sim 10^{-13}$ cm circondato da elettroni che gli ruotano attorno in orbita circolare come in un sistema planetario.

N

Notazione spettroscopica Notazione utilizzata in spettroscopia secondo cui ogni livello energetico è designato con $n^{2S+1}L_J$, dove n è il numero quantico principale, L il numero quantico orbitale totale, S il numero quantico di spin totale e J numero quantico tale che $J = L + S$.

P

Polvere interstellare Agglomerato di particelle solide che compongono $\approx 1\%$ della massa totale del mezzo interstellare, a temperature $T : 30 - 100$ K. Si tratta principalmente di grafite, silicati e olivine, con dimensioni dell'ordine dei μm .

S

Sequenza di Hubble Classificazione morfologica delle galassie in: ellittiche, lenticolari, a spirale e a spirale barrata, irregolari. Sviluppata dall'astronomo americano E. Hubble nel 1926.

Sequenza principale Banda di stelle disposta circa diagonalmente nel diagramma Hertzsprung-Russell, che mette in relazione luminosità (ordinata) - temperatura efficace (ascissa) delle stelle, in cui la luminosità è una funzione della massa. Rappresenta la fase di vita più lunga e stabile di una stella.

Struttura fine Insieme degli effetti che comportano uno sdoppiamento delle righe spettrali degli atomi, quali correzioni relativistiche, interazione spin-orbita, Lamb-shift e struttura iperfina.

T

Transizioni roto-vibrazionali Transizioni indotte dai moti vibrazionali e rotazionali, entrambi quantizzati, rispettivamente attorno a punti di equilibrio e a certi assi delle molecole. Assieme alle transizioni elettroniche compongono uno spettro a bande, caratteristico delle molecole.

1 LE SERIE DELLO SPETTRO DELL'IDROGENO

Gli studi di spettroscopia¹ avevano messo in evidenza il presentarsi non di una radiazione continua, coerentemente con le aspettative della fisica classica, bensì di radiazioni a ben precise frequenze caratterizzanti di ogni materiale.

1.1 Formula di Rydberg

Esaminando lo spettro di emissione di un gas di idrogeno opportunamente scaldato, nel 1885 il matematico svizzero *Johann J. Balmer* scoprì che alcune righe spettrali osservate nella banda ottica avevano frequenze date dalla serie:

$$\nu_n = cR \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots, \quad (1.1)$$

dove R , detta *costante di Rydberg*, vale empiricamente $R = 109677.576 \text{ cm}^{-1}$. In maniera analoga, furono poi scoperte altre serie di righe:

Tabella 1.1

Nome	frequenza ν_n	indice n	banda
Serie di Lyman	$cR \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$	2, 3, 4, ...	UV (ultravioletto)
Serie di Paschen	$cR \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2} \right)$	4, 5, 6, ...	IR (infrarosso)
Serie di Brackett	$cR \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{n^2} \right)$	5, 6, 7, ...	IR
Serie di Pfund	$cR \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{n^2} \right)$	6, 7, 8, ...	FIR (lontano infrarosso)
Serie di Humphreys	$cR \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{n^2} \right)$	7, 8, 9, ...	FIR

Nel 1888, i fisici *J. Rydberg*, svedese, e *W. Ritz*, svizzero, riassunsero tutti questi risultati in un'unica formula empirica, detta *formula di Rydberg*:

$$\nu_{m,n} = cR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = m + 1, m + 2, \dots \quad (1.2)$$

1.2 Modello atomico di Bohr

Dato che la meccanica classica era incapace di fornire una interpretazione fisica di tali osservazioni, nel 1913 il fisico danese *N. Bohr* propose come soluzione per l'atomo di idro-

¹Studio dello spettro elettromagnetico, sviluppatosi nella prima metà del XIX secolo a partire dal lavoro scrupoloso del fisico e astronomo tedesco *J. von Fraunhofer* sullo spettro astronomico del Sole.

geno un nuovo *modello atomico planetario* in cui giustificò la stabilità atomica, altrimenti compromessa dalla meccanica classica², tramite una serie di ipotesi ad hoc:

1. Un atomo possiede un insieme discreto di stati stazionari con energia E_1, E_2, \dots
2. Un elettrone in uno stato stazionario descrive un'orbita circolare governata dalle leggi della meccanica classica, le quali però non sono valide in una transizione da uno stato stazionario all'altro.
3. L'emissione e l'assorbimento di radiazione per un atomo avvengono in modo discreto, non in accordo con l'elettrodinamica classica, e solo quando l'elettrone passa da un'orbita stazionaria ad un'altra.
4. Nel passaggio da un'orbita stazionaria E_m a un'altra E_n , l'elettrone emette o assorbe un fotone, pacchetto *discreto* di energia $h\nu = |E_m - E_n|$.
5. Le orbite stazionarie sono determinate dalla condizione che il modulo del momento angolare orbitale $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ dell'elettrone sia *quantizzato*, ovvero sia un multiplo intero di \hbar :

$$|\mathbf{l}| = n\hbar. \quad (1.3)$$

Ogni orbita stazionaria sarà dunque caratterizzata da un preciso valore del momento angolare orbitale e può essere etichettata dall'indice $n = 1, 2, 3, \dots$. Lavorando sull'equazione del moto dell'elettrone, di accelerazione puramente centripeta per ipotesi, e rileggendo la quantizzazione del momento angolare orbitale in funzione della velocità nell' n -esima orbita v_n (ricordando che l'impulso è $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$), risulta che:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2; \quad v_n = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{n}. \quad (1.4)$$

I raggi delle orbite stazionarie sono dunque quantizzati proporzionalmente a n^2 , e la dimensione "tipica" dell'atomo di idrogeno può essere stimata dal raggio dell'orbita fondamentale, $r_1 \approx 0.53 \times 10^{-8} \text{ cm} \approx 0.53 \text{ \AA}$. Le velocità, invece, decrescono come $1/n$ e la velocità nell'orbita fondamentale è $v_1 \approx 2.2 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$, pari a più di 1/100 della velocità della luce. L'approssimazione non-relativistica dell'elettrodinamica è dunque qui valida. Inserendo i risultati della (1.4) nella formula per l'energia di un elettrone nell' n -esima orbita (E_n), data dalla somma di energia cinetica e potenziale coulombiano tra le due cariche $+e$ del protone ed e dell'elettrone, si ottengono i livelli energetici delle varie orbite:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (1.5)$$

²Per le leggi di Maxwell, un elettrone in orbita circolare irradierebbe energia fino a collassare sul nucleo in un tempo $\approx 10^{-8} \text{ s}$.

Grazie a quest'ultima equazione è ora possibile giustificare la formula di Rydberg, definita alla (1.2). Le frequenze osservate nello spettro di emissione dell'idrogeno, rappresentate (anche in assorbimento) in **Figura 1.1**, sono tutte e sole le frequenze corrispondenti ai salti dell'elettrone da un'orbita n-esima a un'orbita m-esima. La differenza di energia viene emessa con un fotone di frequenza:

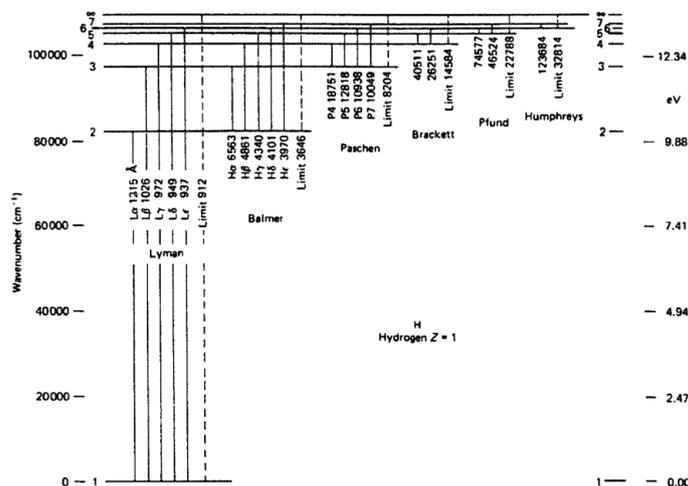
$$\nu_{m,n} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{\pi m_e e^4}{\hbar^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (1.6)$$

prevedendo in questo modo sia la correttezza della formula, sia il giusto valore della costante di Rydberg. Ponendo il livello zero di energia pari all'energia di fuga dell'elettrone dall'atomo (E_∞), le energie degli stati legati, in cui l'elettrone è in orbita attorno al nucleo, sono tutte negative, mentre energie positive andranno a rappresentare elettroni che passano in prossimità di un protone e che non ne vengono catturati, ma solo deviati lungo orbite iperboliche non quantizzate. L'energia per ionizzare un atomo di idrogeno (E_{ion}), cioè strappare l'elettrone all'attrazione del protone, è pari alla differenza tra l'energia di fuga e quella dell'orbita fondamentale $E_1 = -13.59 \text{ eV}$, vale a dire:

$$E_{ion} = E_\infty - E_1 = 13.59 \text{ eV}, \quad (1.7)$$

in perfetto accordo con i dati sperimentali.

Figura 1.1: Livelli energetici e serie spettrali dell'atomo di idrogeno.



Fonte: J. Tennyson, *Astronomical Spectroscopy* (Imperial College Press, 2005).

1.3 Trattazione quantistica dell'atomo di idrogeno

Il modello di Bohr venne presto complicato di altri dettagli e generalizzato per atomi più complessi dell'idrogeno, ma crebbe la necessità di conciliare le osservazioni con il

problema teorico dell'arbitrarietà delle regole di quantizzazione e quello della dualità onda-corpuscolo della luce, qui non trattato. Fu così che nel corso della prima metà del XX secolo prese forma la teoria della meccanica quantistica, che, al contrario della meccanica classica, descrive la materia e la radiazione sia come fenomeni particellari sia come fenomeni ondulatori. Il legame tra questi due fenomeni venne formalizzato nel cosiddetto *principio di indeterminazione di Heisenberg*: enunciato nel 1927 dal fisico tedesco *Werner K. Heisenberg*, esso stabilisce, nella sua forma più nota, che non è possibile misurare simultaneamente la posizione e la quantità di moto di una particella con incertezza piccola a piacere. Di fatto venne messo in crisi il concetto classico di traiettoria, basato proprio sulla conoscibilità sincronica di posizione e impulso. Nel caso dell'orbita percorsa da un elettrone attorno al nucleo, vi si sostituì il concetto di *orbitale*, ossia la regione di spazio intorno al nucleo in cui è massima la probabilità di trovare l'elettrone. La soluzione *esatta* dell'atomo di idrogeno rappresenta uno dei primi trionfi della MQ. Si tratta di un problema a due corpi (elettrone-protone) soggetti a mutua interazione e riducibile al moto centrale dei due corpi rispetto al loro centro di massa. Il potenziale sentito dall'elettrone è un potenziale centrale di tipo coulombiano:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}, \quad (1.8)$$

quindi il problema è a simmetria sferica ed è trattabile agevolmente in *coordinate polari* ($r = |\mathbf{x}|$, $\vartheta = \arccos \frac{x_3}{r}$, $\phi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$), scegliendo il centro da cui si propaga il potenziale come origine delle coordinate. Le autofunzioni $\psi(r, \vartheta, \phi)$ dell'equazione agli autovalori dell'Hamiltoniana (H) dell'atomo di idrogeno, $H\psi = E\psi$, possono essere determinate con una procedura di separazione delle variabili:

$$\psi(r, \vartheta, \phi) = R(r)Y(\vartheta, \phi), \quad (1.9)$$

fattorizzandole, cioè, in una funzione radiale $R(r)$ e in una funzione angolare $Y(\vartheta, \phi)$. Allora la suddetta equazione agli autovalori si esplicherà, sostituendovi l'Hamiltoniana del sistema, come:

$$-\frac{\hbar^2 r^2}{R(r)} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) + 2mr^2[V(r) - E] = -\frac{1}{Y(\vartheta, \phi)} L^2 Y(\vartheta, \phi), \quad (1.10)$$

in cui il primo membro dipende solo da r e il secondo solo da ϑ e ϕ . I due membri possono essere uguali $\forall r, (\vartheta, \phi)$ solo se sono separatamente uguali ad una certa costante. La parte angolare ha come soluzione le ben note *armoniche sferiche* $Y_l^m(\vartheta, \phi)$; la parte radiale si risolve invece in una funzione della forma $R_{n,l}(\rho_n)$, dove $\rho_n = \frac{r}{n}$ (ρ variabile adimensionale sostitutiva di r , n indice naturale). La *funzione d'onda* di uno stato atomico dell'idrogeno sarà dunque del tipo $\psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \phi)$, in cui:

- $n \in \mathbb{N}$ è detto *numero quantico principale* e fissa il livello energetico E_n con una formula coincidente con quella trovata da Bohr, qui esposta alla (1.5), con il suo modello precedente alla meccanica quantistica;

- $l \in \mathbb{N}$, $0 \leq l \leq n-1$, è il *numero quantico orbitale* e stabilisce la forma dell'orbitale;
- $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leq l$, è il *numero quantico magnetico*, da cui si possono ricavare le possibili orientazioni nello spazio dell'orbitale.

Le condizioni sugli indici appena elencati derivano dagli spettri di autovalori degli operatori in gioco: l'operatore momento angolare al quadrato L^2 e la terza componente del momento angolare L_3 . Per ogni livello energetico ci sono n^2 stati degeneri, della medesima energia, distinti in $2l + 1$ stati per ciascun valore di m . In realtà, con l'esperimento di *Stern-Gerlach* del 1922, si scoprì che tutte le particelle, compresi gli elettroni, possiedono anche un momento angolare intrinseco, indipendente dalle proprietà orbitali e anch'esso quantizzato, a cui si diede il nome di *spin*. Nel caso dell'elettrone, il *numero quantico di spin* (s) vale $1/2$ mentre il cosiddetto *numero quantico magnetico di spin* (m_s), che caratterizza una componente del momento angolare di spin, solitamente quella orientata lungo l'asse z , può valere $1/2$ o $-1/2$. Ciò comporta l'aggiunta di m_s come buon numero quantico per descrivere le funzioni d'onda atomiche e un'ulteriore degenerazione nei livelli energetici, che sale a $2n^2$, per via del fatto che vi sono due possibili stati di spin dell'elettrone, anche detti stati di *spin up* ($m_s = 1/2$) e *spin down* ($m_s = -1/2$).

2 LE RIGHE SPETTRALI

Le righe spettrali sono da interpretarsi come l'emissione (assorbimento) di radiazione elettromagnetica sotto forma di fotoni dovuta alle *transizioni elettroniche* tra uno stato atomico nel livello di energia E_n a un altro nel livello di energia E_m , con $n > m$ ($n < m$), da parte di cariche elettriche in moto accelerato, quali gli elettroni negli orbitali atomici.

2.1 Coefficienti di Einstein

Albert Einstein trattò approfonditamente l'interazione tra radiazione e materia alla base delle transizioni elettroniche che avvengono tra stati legati, ergo transizioni *bound-bound*, le quali vengono distinte in tre tipi fondamentali:

1. *Emissione spontanea*. Transizione spontanea da uno stato atomico eccitato a uno stato di minor energia, con emissione di un fotone;
2. *Emissione stimolata*. Transizione da uno stato atomico eccitato ad uno stato di minor energia stimolata dal passaggio ravvicinato di un fotone, il quale non interagisce in altro modo con l'elettrone, con emissione di un fotone con la stessa energia del fotone di passaggio;
3. *Assorbimento*. Transizione a uno stato atomico eccitato di maggior energia per assorbimento di un fotone.

Considerando una cavità contenente atomi di una data specie e radiazione in equilibrio termico e due livelli atomici non degeneri, n ed m ($E_m > E_n$), Einstein ricavò i coefficienti di Einstein per mettere in relazione l'emissione stimolata con l'emissione spontanea:

1. $A_{m,n}[s^{-1}]$. Probabilità di transizione per unità di tempo per l'emissione spontanea. Il suo inverso è il *tempo di vita medio* dello stato eccitato: $\tau = \frac{1}{A_{m,n}}$ s;
2. $B_{m,n}\bar{J}[s^{-1}]$. Probabilità di transizione per unità di tempo e unità di densità media di fotoni presenti per l'emissione stimolata;
3. $B_{n,m}\bar{J}[s^{-1}]$. Probabilità di transizione per unità di tempo e unità di densità media di fotoni presenti per l'assorbimento.

Si osservi che i coefficienti di Einstein $B_{m,n}$ e $B_{n,m}$ di per sé non sono probabilità di transizione per unità di tempo, infatti $[B_{m,n}] = [B_{n,m}] = s^{-1} cm^3 eV^{-1}$. $\bar{J}[eVcm^{-3}]$ rappresenta la densità media di fotoni alla frequenza $\nu_{m,n}/\nu_{n,m}$ di modo che la differenza di energia in una transizione per emissione stimolata/assorbimento sia $\Delta E = h\nu_{m,n}/h\nu_{n,m}$. Dato che ΔE non è mai infinitamente piccola, \bar{J} non è un insieme di fotoni monocromatico e dunque la probabilità che un fotone effettui una transizione in realtà è descritta da una *Line Profile Function* (LPF) $\Phi(\nu)$, cosicché:

$$\int_0^\infty \Phi(\nu) d\nu = 1 \Rightarrow \bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \Phi(\nu) d\nu. \quad (2.1)$$

2.2 Transizioni elettroniche nell'atomo di idrogeno

L'intensità di emissione di radiazione di lunghezza d'onda λ e numero d'onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ da parte di una carica elettrica e accelerata, vincolata a muoversi in una regione di spazio di dimensioni dell'ordine di $a \approx 10^{-8} cm$, è data dalla *formula di Larmor*:

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right)^2 + \sigma((ka)^4) \quad (ka \ll 1), \quad (2.2)$$

qui espansa in *approssimazione di dipolo elettrico* (E1), che è valida a meno di una parte su mille per tipiche situazioni atomiche in cui $ka \approx 10^{-3}$. Si può dimostrare che la potenza media emessa in una transizione di dipolo elettrico è uguale a $A_{m,n}$ moltiplicato per l'energia persa dall'elettrone nella transizione secondo l'equazione:

$$A_{m,n} = \frac{64\pi^4 \nu^3}{3hc^3} |P_{m,n}|^2, \quad (2.3)$$

dove $P_{m,n}$ indica la probabilità di transizione da m a n ($m > n$). In MQ, dalla formula di Larmor si può ricavare una misura dell'intensità di radiazione E1 tramite la probabilità

di transizione tra due livelli atomici $(n, l, m \rightarrow n', l', m')$, fornita dagli elementi di matrice dell'operatore $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ sugli autostati dell'atomo d'idrogeno:

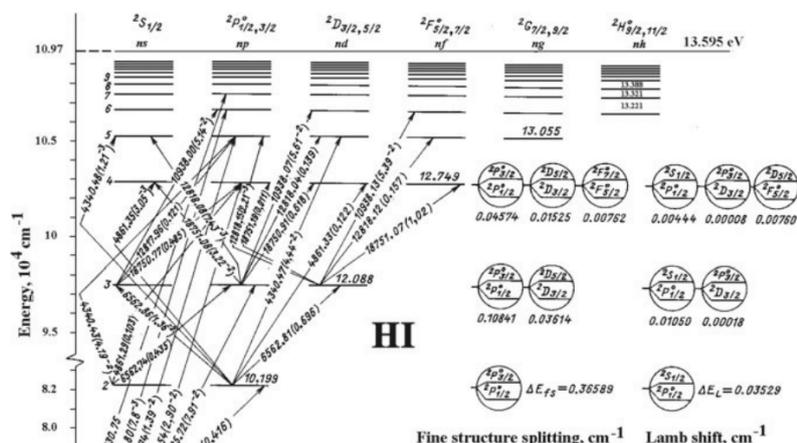
$$I_{nlm,n'l'm'} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left| \frac{d^2}{dt^2} \langle n', l', m', (t) | \mathbf{x} | n, l, m, (t) \rangle \right|^2. \quad (2.4)$$

Da quest'ultima equazione si può vedere che le transizioni *permesse* E1 (vedi **Figura 2.1**), che sono le più probabili e producono righe molto intense ($A_{m,n} > 10^6 s^{-1}$, $\tau_{E1} \approx 10^{-8} s$), sono quelle per cui risulta non nulla almeno una componente del 3-vettore di elementi di matrice $\mathbf{X} = \langle n', l', m' | \mathbf{x} | n, l, m \rangle$ dell'operatore posizione \mathbf{x} sugli autostati dell'atomo d'idrogeno. Valutando tali componenti si scopre che l'unica parte degli autostati a portare restrizioni sulle possibili transizioni è la parte angolare, che induce le seguenti *regole di selezione* fondamentali:

Tabella 2.1

Dipolo elettrico
Δn qualsiasi (purché $\neq 0$)
$\Delta l = \pm 1$
$\Delta m = 0, \pm 1$
$\Delta m_s = 0$ (tenendo conto anche dello spin)

Figura 2.1: Transizioni permesse per l'atomo di idrogeno (diagramma di Grotrian).



Fonte: B. M. Smirnov, *Atomic Particles and Atom Systems* (Springer International Publishing AG, 2018).

Si noti che gli effetti relativistici legati alla *struttura fine* degli atomi possono mescolare

stati con spin diverso, in particolare per atomi con alto Z , e si possono perciò osservare deboli transizioni E1 che cambiano lo spin, ovvero righe *di intercombinazione*, dette anche righe *semiproibite*. Sviluppando la (2.2) al primo ordine compaiono i contributi di *quadrupolo elettrico* (E2) e *dipolo magnetico* (M1), che inducono transizioni, le più importanti assieme a quelle di dipolo elettrico, definite *proibite* perché possono avvenire solo se vengono violate alcune regole di selezione E1 (rispettando a loro volta altre regole di selezione) e producono righe spettrali molto più deboli, anche delle righe semiproibite. Difatti risulta che $\tau_{E2} \approx 1s$ e $\tau_{M1} \approx 10^{-3}s$. Si osservi inoltre che anche per questi tipi di transizione è possibile definire una relazione di proporzionalità tra potenza media emessa e coefficiente $A_{m,n}$ associato e che gli effetti di struttura fine comportano l'aggiunta di svariate regole di selezione e transizioni possibili E1 (come si evince dalle transizioni cerchiare in **Figura 2.1**), E2 ed M1.

2.3 Riga proibita a 21 cm dell'idrogeno neutro

Finora si è parlato di transizioni *radiative*. In realtà, esiste un'altra tipologia fondamentale di processi termici capaci di cambiare l'energia di un elettrone: le transizioni *collisionali*. Quest'ultime sono causate da urti meccanici tra atomi o molecole che possono eccitare o diseccitare (in assenza di fotoni) gli elettroni legati, in dipendenza da fattori come il potenziale elettrostatico presente, la velocità relativa delle particelle in collisione e la densità dei partner collisionali. In funzione di tali fattori si può definire il *rate di eccitazione/diseccitazione collisionale* $Q_{m,n}[cm^3s^{-1}]$ e una *densità critica di partner collisionali*:

$$N_p^{cr} = \frac{A_{m,n}}{Q_{m,n}} \propto T^{1/2} \quad (2.5)$$

definita come la densità per la quale i due tipi di transizioni, radiativa e collisionale, si bilanciano, da intendersi però in una ben precisa transizione atomica e a condizioni fisiche fissate. In questo modo si può confrontare $Q_{m,n}$ con $A_{m,n}$ e dedurre quale dei due processi prevale. Un esempio di applicazione della (2.5) di fondamentale importanza in astrofisica riguarda la riga proibita a 21 cm dell'idrogeno neutro (HI): il ground-state $1S_{1/2}$ (in notazione spettroscopica) si splitta, a causa dell'accoppiamento tra spin dell'elettrone e spin del protone, in due livelli iperfini etichettati dal numero quantico F , relativo al *momento angolare totale* di nucleo più elettrone. In particolare si ha:

- Per $F = 0$, il livello di energia più bassa (spin antiparalleli);
- Per $F = 1$, il livello di energia più alta (spin paralleli).

Si osservi che i *pesi statistici* dei due livelli, definiti da $g = 2F + 1$, sono in proporzione $g_2 : g_1 \approx 3 : 1$ per il livello superiore, che è tre volte degenero. Dalla *legge di Boltzmann*, tenendo conto anche dei pesi statistici, si ottiene $\frac{N_2}{N_1} \approx 3$, quindi il 75% circa degli atomi di HI nel mezzo interstellare sono nello stato eccitato. La transizione di *spin-flip*

$F = 1 \rightarrow 0$ è una transizione M1 di frequenza nelle microonde $\nu = 1420.40575$ MHz corrispondente a una lunghezza d'onda $\lambda = 21.1049$ cm.

In questo caso, $A_{2,1} = 2.87 \times 10^{-15} s^{-1} \Rightarrow \tau_{rad} = 1.1 \times 10^7$ yr, il che si traduce in una transizione radiativa molto improbabile e debole. Invece, il rate di diseccitazione collisionale tra atomi di idrogeno (a $T \approx 10^3$ K) vale $Q_{2,1} = 10^{-10} cm^3 s^{-1}$ e il tempo di vita medio $\tau_{coll} \approx 300$ yr, quindi viene favorito il decadimento collisionale. Sostituendo questi valori di $A_{2,1}$ e $Q_{2,1}$ nella (2.5) si ricava:

$$N_p^{cr} = \frac{A_{2,1}}{Q_{2,1}} \approx 10^{-5} cm^{-3}. \quad (2.6)$$

La densità critica così ottenuta è confrontabile con la densità $\approx 1 - 10 cm^{-3}$ delle regioni dell'ISM contenenti HI, come il disco delle galassie a spirale. Ciò implica che il numero di diseccitazioni radiative, sebbene rimanga inferiore al numero di diseccitazioni collisionali, è significativo e la riga proibita in questione nell'effettivo non è improbabile da osservare.

3 IL RUOLO DELL'IDROGENO IN ASTROFISICA

Nel contesto astrofisico l'idrogeno, in virtù della sua abbondanza (vedi **SOMMARIO**), si localizza in tutte le fasi dell'ISM e nell'*Inter-Galactic Medium* (IGM), qui non trattato, in forma di:

- Idrogeno neutro HI. Con una massa nel mezzo interstellare stimata $\sim 4.8 \times 10^9 M_\odot$, si rintraccia nelle sue fasi più fredde: il *Cold Neutral Medium* (CNM), pari al 2–4% dell'ISM, e il *Warm Neutral Medium* (WNM), qui non trattato;
- Idrogeno molecolare H_2 . Stimato, in modo incerto, equivalere dal $\sim 25\%$ fino al $\approx 100\%$ della massa di HI, è localizzato principalmente nelle nubi molecolari del CNM;
- Idrogeno ionizzato HII. Componente dell'IGM, e delle altre due fasi, quelle più calde, del mezzo interstellare: l'*Hot Ionized Medium* (HIM), qui non trattato, e il *Warm Ionized Medium* (WIM), che costituisce l'1 – 2% del mezzo interstellare.

Nella suddetta schematizzazione non trova propriamente posto il *nucleo* dell'atomo di idrogeno, cionondimeno importante in astrofisica in quanto combustibile delle stelle in *sequenza principale* per mezzo delle reazioni *termonucleari di fusione* dell'idrogeno nel nucleo di tali stelle.

3.1 Nucleo dell'idrogeno: nucleosintesi stellare

In generale, le reazioni termonucleari di fusione sono processi nei quali i nuclei di due o più atomi leggeri, sottoposti a temperature e pressioni elevatissime, fondono per formare nuclei di elementi chimici più pesanti producendo una gran quantità di energia. Classicamente, la fusione avviene se l'energia termica dei nuclei coinvolti è tale da farli avvicinare

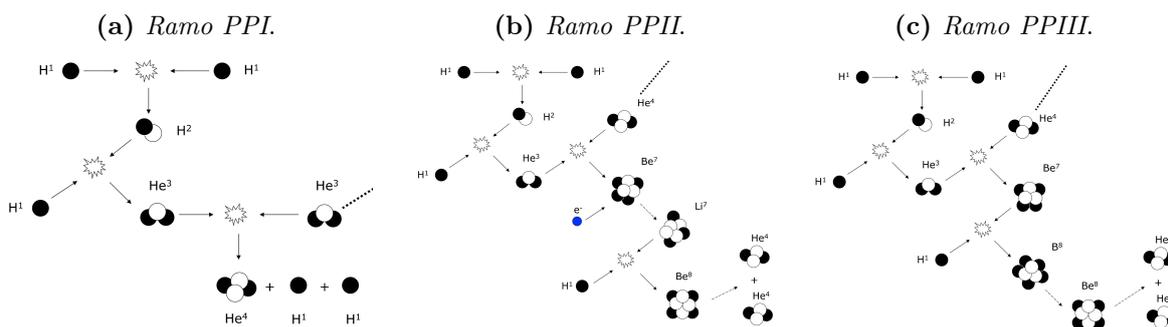
a una distanza minore di $r_0 \sim 10^{-13}$ cm, che è il raggio d'azione dell'*interazione forte*, responsabile della formazione di nuclei stabili, superando così la *repulsione elettrostatica* ($\propto r^2$) tra i nuclei. A temperature tipiche degli interni stellari ($T \approx 10^7$ K), però, l'innesco delle reazioni di fusione è spiegabile solo considerando le code della *distribuzione delle velocità di Maxwell*, in cui si collocano alcune particelle con energia superiore alla media, e soprattutto l'*effetto Tunnel quantistico*, che suggerisce che le interazioni possono avvenire anche ad energie minori della barriera di potenziale tra i due nuclei. Nelle stelle, l'idrogeno viene bruciato mediante i seguenti canali, accomunati dal fatto che fondono quattro nuclei di idrogeno ${}^1\mathbf{H}$ per formare un nucleo di elio ${}^4\mathbf{He}$ convertendo (ad ogni ciclo) la differenza in massa $\Delta m = m_{He} - 4m_H$ in energia secondo la *legge di equivalenza massa-energia* $E = \Delta mc^2 \approx 4.5 \times 10^{-5}$ erg.

1. *Catena Protone-Protone (PP)*. Suddivisa nei rami *PPI*, *PPII* e *PPIII*, schematizzati in **Figura 3.1**. Il fattore in comune ai tre rami della catena è la difficoltà di innesco della prima reazione ($t = 1.4 \times 10^9$ yr), che è sempre la stessa (decadimento β^+)¹:



resa più efficiente fornendo energia termica extra al protone, come accade nel nucleo stellare a $T \sim 6 \times 10^6$ K. Essa è anche la temperatura di attivazione del ramo PPI, il più probabile (inizialmente) e con la produzione maggiore di energia, 26.2 MeV per nucleo di ${}^4\mathbf{He}$ prodotto. Man mano che la temperatura e l'abbondanza di elio nel nucleo aumentano si aprono i canali PPII e PPIII ma l'energia sprigionata per ciclo diminuisce, scendendo rispettivamente a 25.67 MeV e 19.3 MeV, perché vengono prodotti sempre più neutrini, i quali, non interagendo con la materia, schizzano via dal nucleo, raffreddandolo.

Figura 3.1: Schema reazioni catena Protone-Protone.



Fonte: F. R. Ferraro, *Dispense del corso di Astrofisica stellare* (2020).

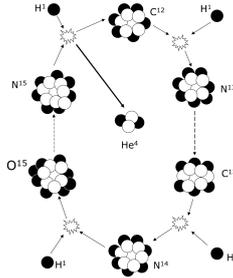
¹Decadimento radioattivo di un protone in un neutrone, un *positrone* e^+ e un *neutrino* ν di carattere endoergonico, poiché un protone è meno massiccio di un neutrone di una quantità $\approx 2 \times 10^{-27}$ g.

2. *Ciclo CNO*. Si attiva a temperature $\sim 15 \times 10^6 K$ e in presenza di elementi pesanti come carbonio **C**, azoto **N** e ossigeno **O**, che agiscono da catalizzatori per la combustione dell'idrogeno, producendo 25 MeV per ciclo. La reazione più lenta ($t = 3.2 \times 10^8 yr$) in questo caso è:



perciò si definisce *ramo veloce* la parte del ciclo che comprende tutte le reazioni fino alla (3.2) e *ramo lento* il resto del ciclo (vedi **Figura 3.2**). Dato che le abbondanze relative di CNO vengono alterate a causa dei tempi scala di ciascuna reazione, a regime si osserva un "accumulo" di **N** e una diminuzione di **C** e **O**, ovvero un'anticorrelazione nelle abbondanze chimiche di **C-O-N**. A temperature via via crescenti possono attivarsi vari cicli secondari che introducono delle *signatures* importanti nel gas interstellare. L'osservazione di una specifica anticorrelazione nelle atmosfere stellari segnala infatti che il gas da cui la stella si è formata sia stato processato da un ciclo di *cattura protonica*² ad una specifica temperatura.

Figura 3.2: Schema reazioni ciclo CNO.



Fonte: F. R. Ferraro, *Dispense del corso di Astrofisica stellare* (2020).

3.2 Idrogeno atomico e galassie a spirale

Le galassie a spirale sono un tipo di galassie della *sequenza di Hubble*. Grazie alla scoperta della riga a 21 cm, negli anni '50 si riuscì a mappare la distribuzione di idrogeno neutro della nostra galassia, la *Milky Way* (MW), rivelandone per la prima volta la struttura a spirale, e a determinare le prime *curve di rotazione* delle galassie a spirale, compresa la MW, poiché l'ISM è totalmente trasparente alla radiazione a 21 cm.

3.2.1 Curva di rotazione

Una curva di rotazione rappresenta la velocità di rotazione $v_c(r)$ lungo orbite circolari in funzione della distanza r dal centro di un oggetto; è una proprietà intrinseca del campo gravitazionale dell'oggetto e per calcolarla è necessario conoscerne il potenziale

²Processo (p, γ) in cui un protone interagisce con un nucleo atomico (Z, A) generando un nucleo atomico ($Z+1, A+1$) di un nuovo elemento ed energia.

gravitazionale. Dalla seconda legge della dinamica, per un oggetto a simmetria sferica si ha che:

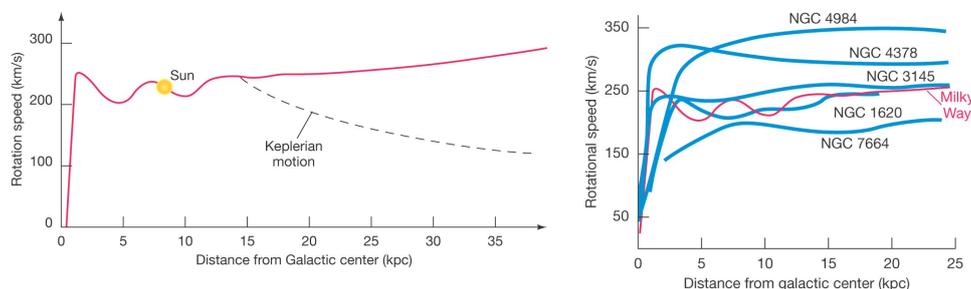
$$v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r} \quad (3.3)$$

con $M(r)$ massa dell'oggetto contenuta entro il raggio r . Utilizzando quindi un modello semplificato di galassia a spirale (*bulge - disco sottile - alone*) in modo da prevedere la sua curva di rotazione, si possono ricavare tre andamenti distinti della velocità di rotazione in una galassia a spirale:

1. $v_c(r) \propto r$ per modello sferico a densità omogenea del bulge, il rigonfiamento centrale della galassia;
2. $v_c(r) \sim \text{costante}$ per modello a sfera isoterma del disco sottile galattico, piatto e in rotazione differenziale;
3. $v_c(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$, regime di caduta kepleriana nell'alone galattico, che si estende a grandi distanze dal centro galattico.

Figura 3.3: Curve di rotazione delle galassie a spirale.

(a) *Curva di rotazione prevista (in grigio) e osservata (in rosso) della Via Lattea.* (b) *Esempi di curva di rotazione delle galassie a spirale.*



Fonte: <https://pages.uoregon.edu/jimbrou/astr123-2011/Notes.html>

La curva di rotazione complessiva così ottenuta può essere confrontata con quella costruita empiricamente sfruttando l'effetto Doppler non relativistico sulla riga a 21 cm dell'HI contenuto nella galassia. A seconda di quando la riga risulta redshiftata (regione del disco in allontanamento) o blueshiftata (regione del disco in avvicinamento) rispetto alla L.O.S, si può ricavare la $v_c(r)$ della nube di HI in funzione della distanza del punto osservato dal centro galattico:

$$\frac{v_c(r)}{c} = \frac{\Delta\nu_{HI}}{\nu_{HI}}. \quad (3.4)$$

A grandi distanze dal disco galattico, però, la curva di rotazione continua a rimanere più o meno costante anziché seguire la curva kepleriana (vedi **Figura 3.3.a**), cosa che

invece ci si aspetterebbe perché il potenziale gravitazionale $\phi(r)$ a grandi distanze è ben descritto da un termine di dipolo $\phi(r) \sim -\frac{GM}{r}$. Ciò implica che deve esserci della *materia oscura* che "aggiunge" campo di gravità, facendo sì che la curva di rotazione ricavata dall'idrogeno neutro rimane piatta anche laddove la galassia a spirale apparentemente è finita.

3.2.2 Legge empirica di Tully-Fisher

La velocità radiale di spostamento delle nubi di HI $v_c(r)$ nelle galassie a spirale è anche alla base della legge empirica di *Tully-Fisher* (TF) del 1977, che, nella sua forma originale, mette in correlazione la *luminosità assoluta* di una galassia a spirale L (in luminosità solari) con la $v_c(r)$ (misurata in km/s) secondo la relazione:

$$L \propto v_c^4(r). \quad (3.5)$$

Confrontando la luminosità assoluta che si ottiene dalla TF con la *luminosità apparente* l , ergo il flusso integrato su tutte le frequenze, si può ricavare la *distanza di luminosità* d_L della galassia:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}. \quad (3.6)$$

La TF rappresenta ad oggi uno dei metodi di calcolo più potenti delle distanze astronomiche, in particolare degli ammassi di galassie per distanze $\sim 10^{10}$ ly dalla Terra.

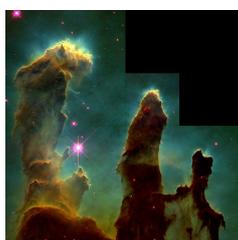
3.3 Idrogeno molecolare: nubi molecolari giganti

L'idrogeno molecolare, osservabile a $T \lesssim 100$ K, irradia debolmente nell'UV per transizioni elettroniche, non osservabili da Terra, e nell'IR per transizioni *roto-vibrazionali*. Ma l' H_2 non è osservabile nel radio, perciò si utilizza come tracciante la molecola più diffusa dopo l' H_2 , il *monossido di carbonio* CO (circa 100 volte più abbondante di qualsiasi altra molecola), con cui è normalmente in rapporto di 10000 : 1. Il CO ha tre righe nell'intervallo $\sim 1 \div 3$ mm e la principale sorgente di eccitazione è data proprio dalle collisioni con l' H_2 , in quanto più abbondante. Assieme alla *polvere interstellare*, CO e H_2 si rintracciano nelle cosiddette *Giant Molecular Clouds* (GMCs): grosse (diametri > 100 ly) nubi autogravitanti di massa $\gtrsim 10^7 M_\odot$, formate principalmente da CNM ($T : 10 - 100$ K, $n \approx 1 - 10^3$ cm^{-3}). Le GMCs, di cui un esempio riportato in **Figura 3.4**, sono i principali luoghi di *Star-Formation* (SF), il processo di formazione stellare, catalizzato dal *collasso gravitazionale* della nube, o di parte di essa. Il collasso avviene quando si manifesta l'*instabilità di Jeans*, un'instabilità di tipo gravitazionale causata dalla rottura dell'equilibrio idrostatico tra energia potenziale gravitazionale (che tende a comprimere la nube) e l'energia cinetica del gas della nube (che esercita una pressione verso l'esterno) a vantaggio della gravità. Definita la *lunghezza d'onda di Jeans* come:

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{\rho G}} \quad (3.7)$$

dove c_s è velocità di propagazione del suono nella nube, ρ la densità della nube e G la costante di gravitazione universale, se una perturbazione in un sistema autogravitante si propaga con lunghezza d'onda $\lambda > \lambda_J$, allora si ha instabilità. Dato che il tempo impiegato dall'onda sonora per percorrere lo spazio è maggiore del tempo che impiega la gravità a far collassare la regione, prima che il suono riesca a ridistribuire la pressione all'interno della nube si innesca il collasso gravitazionale, che è tanto più probabile quanto più che è grande la massa della nube e più piccole sono le sue dimensioni e la sua temperatura.

Figura 3.4: Complesso molecolare della Nebulosa Aquila: i Pilastrini della Creazione.



Colonne di gas di H_2 e polvere interstellare, immerse nel campo di radiazione UV di neo-stelle massicce. Scatto dell'Hubble Space Telescope Wide Field and Planetary Camera 2, 1995. Immagine composta da tre immagini separate prese tramite emissione di [SII] (rosso), [H α] (verde) e [OIII] (blu). *Fonte: NASA, ESA, STScI, J. Hester & P. Scowen (Arizona State University).*

3.4 Idrogeno ionizzato: regioni HII

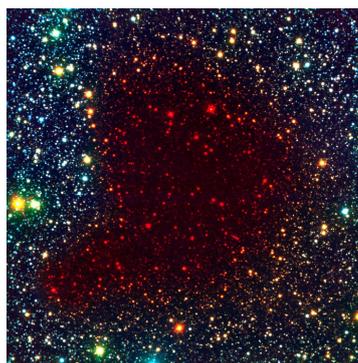
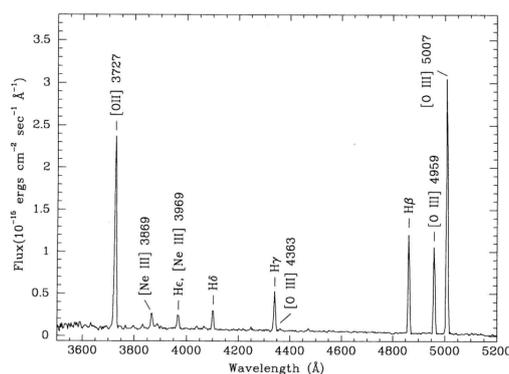
Dalla (1.7) si deduce che l'HII si può osservare in quelle regioni con $T \geq 10^4 K$, come il WIM ($T \approx 10^4 K$, $n \approx 1 cm^{-3}$), fase del mezzo interstellare riscaldata dalla presenza di campi di radiazione UV molto forti ($\lambda < 916 \text{ \AA}$) in cui l'idrogeno è sempre ionizzato, costituendo per questo le *regioni HII*. Quando un fotone UV ionizza un atomo di idrogeno, libera una coppia elettrone-protone che perde energia principalmente per irraggiamento di *bremstrahlung* degli elettroni, producendo uno spettro continuo (nel radio, IR, submm), e per ricombinazione, ovvero formando un atomo eccitato che poi decade emettendo fotoni meno energetici ad una precisa frequenza, aggiungendo così uno spettro di righe. Le righe di ricombinazione osservate sono righe della serie di Balmer e righe proibite, tra cui quelle di [OII], [OIII], [NII]. Altre righe di ricombinazione appartengono alla serie di Lyman, non osservabili da Terra per via dell'opacità atmosferica, e alla banda radio, osservabili però solo per $n > 60$, con n numero quantico principale. Esempio di spettro in **Figura 3.5.a**. Un tipo di regione HII³ sono i bracci delle galassie a spirale, in cui l'HII fa da tracciatore delle *Star-Forming Regions* (SFRs), le regioni di formazione stellare (vedi **Figura 3.5.c**), che ivi si originano dall'incontro tra WIM, che si distribuisce solo nel disco, e il CNM. WIM e CNM si osservano formare anche i

³Non vengono qui trattati, per ragioni di spazio, altri tipi di regioni HII, altrettanto interessanti, quali nebulose planetarie e sfere di Strömgen.

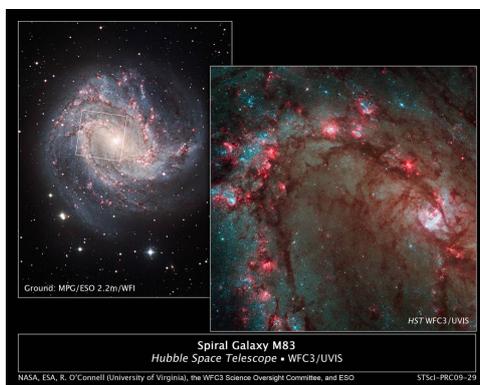
globuli di Bok (vedi **Figura 3.5.b**), ovvero nubi molecolari piccole (diametro ≈ 1 ly), dense e scure (rispetto al resto della nube ionizzata) in cui sta avvenendo la SF in genere di stelle doppie o multiple.

Figura 3.5: Dettagli delle regioni HII.

- (a) Spettro di una regione HII nella galassia a spirale NGC 2541. (b) Globulo di Bok nella nube molecolare Barnard B68.



- (c) Bracci a spirale della galassia M83, regione di formazione stellare.



(a) Flusso di riga in ordinata, lunghezza d'onda in ascissa. *Fonte: D. Zaritsky, R.C. Kennicutt Jr, J.P. Huchra, HII Regions and the Abundance Properties of Spiral Galaxies (Astrophysical Journal, 1994).* (b) Immagine composita a falsi colori basata su un'immagine nel visibile (blu), in vicino IR (verde) e in IR (rosso). Le stelle dietro il globulo appaiono rosse perché la loro luce di background è visibile solo alle maggiori lunghezze d'onda, nell'IR. *Fonte: ESO (2001).* (c) A destra, primo piano di una regione di formazione stellare nei bracci della galassia, raffigurata a sinistra. Immagini da Wide Field Camera 3 (WFC3) con range di banda dall'UV al vicino IR. *Fonte: NASA, ESA, R. O'Connell (University of Virginia), B. Whitmore (Space Telescope Science Institute), M. Dopita (Australian National University), WFC3 Science Oversight Committee.*

Bibliografia

- [1] A. Ferrari. *Stelle, galassie e universo. Fondamenti di astrofisica*. Springer-Verlag Italia, 2011.
- [2] C. Fanti, R. Fanti. *Una finestra sull'Universo "invisibile". Lezioni di radioastronomia di Carla & Roberto Fanti*. Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2012.
- [3] D. Dallacasa. *Dispense del corso di Processi di radiazione & MHD*. Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2020.
- [4] F. Ravanini. *Dispense del corso di Istituzioni di Fisica Teorica*. Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2020.
- [5] F. R. Ferraro. *Dispense del corso di Astrofisica stellare*. Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2020.
- [6] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K.J. Donner (Eds.). *Fundamental Astronomy*. 5° edizione, Springer-Verlag, Berlino, Heidelberg, 2007.
- [7] J. Tennyson. *ASTRONOMICAL SPECTROSCOPY. An Introduction to the Atomic and Molecular Physics of Astronomical Spectra*. Imperial College Press, Londra, 2005.
- [8] L. Ciotti. *Dispense del corso di Astrofisica Extragalattica*. Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2021.