

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Astronomia
Dipartimento di Fisica e Astronomia

TEOREMA DEL VIRIALE E APPLICAZIONI ASTROFISICHE

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

Presentata da:
Francesco Fancello

Sessione II
Anno Accademico 2020-2021

Sommario

Il Teorema del Viriale è una relazione che permette di analizzare le variazioni dell'energia potenziale e cinetica all'interno di un sistema ad N corpi. Nel momento in cui la relazione in oggetto viene soddisfatta, il sistema è definito in equilibrio. Perciò, partendo dal problema degli N corpi e introducendo i concetti di tempo di rilassamento a due corpi e l'equazione non collisionale di Boltzmann, si analizzerà, inizialmente, la forma tensoriale del Teorema, per poi derivare quella scalare. Ciò è dovuto al fatto che la prima forma rappresenta il caso più generale, mentre la seconda viene estratta come caso particolare. In secondo luogo ci si occuperà di alcune applicazioni astrofisiche. Tra queste sono presenti il piano fondamentale del teorema del viriale, il limite di Jeans e la determinazione della massa per gli ammassi di galassie. In queste trattazioni è possibile notare come il teorema in esame sia necessario tutt'oggi per poter studiare al meglio i sistemi che osserviamo nell'Universo. Inoltre, il teorema del viriale si presenta alla base dello studio delle scale di tempo stellare e della materia oscura, argomenti che vengono trattati come applicazioni astrofisiche.

Indice

1	Teorema del Viriale	1
1.1	Il problema degli N corpi	1
1.2	Tempo di rilassamento	2
1.3	Equazione non collisionale di Boltzmann	3
1.4	Teorema del Viriale	5
2	Applicazioni astrofisiche	7
2.1	Piano fondamentale del Teorema del Viriale	7
2.2	Limite di Jeans	8
2.3	Scale di tempo stellare	10
2.4	Determinazione della massa per gli ammassi di galassie	11
2.5	Scoperta della materia oscura	12
	Bibliografia	14

Capitolo 1

Teorema del Viriale

1.1 Il problema degli N corpi

Il problema degli N corpi emerge dallo studio del moto di un sistema di N punti materiali P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N rispettivamente, soggetti alle mutue interazioni gravitazionali descritte dalla fisica Newtoniana. La sua importanza consiste nel fatto che i suoi metodi risolutivi vengono spesso usati per studiare l'evoluzione di sistemi, come galassie, che contengono un numero estremamente alto di particelle.

Si vogliono stabilire le equazioni differenziali alle derivate parziali che governano il moto di un mezzo continuo soggetto a gravità. Si può applicare in Meccanica Classica il principio di azione e reazione e ricondurre lo studio del moto di molti N -corpi, soggetti alla gravitazione reciproca, al moto dei loro centri di gravità: da cui le equazioni differenziali ordinarie del problema degli N -corpi. Il caso più semplice, $N = 2$, è stato non solo proposto, ma, sostanzialmente, risolto da Newton stesso.

Per $N > 2$, l'integrazione ha successo molto raramente, ed è pertanto necessario far ricorso a dei metodi di approssimazione, permeanti tutta l'Astronomia. Infatti una descrizione completa del problema comporterebbe la conoscenza di $6N$ variabili nello spazio delle fasi, ma per $N \geq 3$ non è possibile trovare una soluzione analitica, in quanto non si riescono a formulare $6N - 1$ integrali del moto. Dunque per poter semplificare significativamente il problema si sostituisce la distribuzione di densità discontinua, la quale caratterizza il sistema in esame (chiamato "sistema vero"), con una omogenea $\rho(x; t)$. Eseguendo questo procedimento si è creato un nuovo sistema (chiamato "sistema smooth") identico a quello precedente eccetto per la densità. A questo punto viene presa in esame una singola particella. Di essa è possibile trovare il potenziale *liscio* (presente nel sistema ideale), conoscendo l'equazione di Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$:

$$\Phi_{liscio}(x; t) = -G \int \frac{\rho(\xi, t) d^3\xi}{\|x - \xi\|} \quad (1.1)$$

Nel "sistema vero", però, la particella, durante il suo moto, risente di un potenziale diverso, cioè discreto, che è dato da:

$$\Phi_{true}(x; t) = -G \sum_{i=1, j \neq 1}^N \frac{m_j}{\|x_i(t) - x_j(t)\|} \quad (1.2)$$

Osservando le due relazione appena definite, la domanda che sorge è: che cosa rappresenta la differenza tra i due potenziali ($\Phi_{true} - \Phi_{liscio}$)? Essa indica di quanto essi si discostano l'uno dall'altro, dato necessario da conoscere per poter definire un oggetto collisionale o meno. Per semplificare il concetto si può definire non collisionale un sistema se esso è più giovane del tempo di rilassamento a due corpi associato al sistema stesso.

1.2 Tempo di rilassamento

Il tempo di rilassamento a due corpi (t_{2b}) è il tempo caratteristico oltre al quale l'orbita compiuta dal moto della particella nel "sistema vero", presa in esame precedentemente, si discosta significativamente da quella prodotta nel sistema ideale. Esse, infatti, inizialmente sono uguali, ma nel sistema vero lo spostamento viene influenzato dagli "urti lontani"¹ con le altre particelle, le quali, invece, non sono presenti nel secondo sistema, allora con il passare del tempo inizieranno a diversificarsi. Si considera questo tipo di urto poiché nei sistemi gravitazionali studiati nell'ambiente astrofisico, come una galassia, le probabilità che avvengano degli urti geometrici sono tendenti a zero, a causa delle enormi distanze presenti tra le stelle. Chiaramente, sistemi reali di N corpi, quando osservati per tempi sufficientemente lunghi, sono sempre, strettamente parlando, collisionali. Nondimeno, i modelli di galassie basati sull'ipotesi di perfetta non collisionalità sono infinitamente importanti nella comprensione di sistemi reali come le galassie. Di conseguenza è possibile determinare il tempo di rilassamento attraverso combinazioni di numerosi effetti fionda.

Si può definire t_{2b} come l'intervallo di tempo oltre il quale la variazione di energia cinetica della particella di test è uguale alla sua energia cinetica iniziale. Perciò, uno dei metodi per trovare la relazione che esprima il tempo di rilassamento consiste, inizialmente, nel calcolare la variazione di energia cinetica ($|\Delta E|$) che si genera in ciascun urto lontano. Successivamente si calcola la sommatoria di esse e la si moltiplica per il numero di urti:

$$n_{urti} \sum |\Delta E| = 8\pi \Delta t n_f m_f^2 \int_{R^3} \int_0^\infty \frac{db}{b} \frac{g(\|\vec{v}_f\|)}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} d^3 \vec{v}_f \quad (1.3)$$

Dove \vec{v}_t è la velocità con la quale si muove l'oggetto che stiamo considerando, mentre \vec{v}_f è quella associata ai corpi con i quali avvengono le interazioni.

Ciò deriva dal fatto che quando ci si muove all'interno di una galassia in ogni punto \vec{x} si incontrano stelle che si muovono in ciascuna direzione e con \vec{v}_f diverse ed è proprio quest'ultima che ne identifica i vari gruppi. Percò in un tempo Δt avvengono un numero di interazioni pari a:

$$\Delta n_{urti}(v_f) = 2\pi b db \|\vec{v}_t - \vec{v}_f\| \Delta t f d^3 \vec{v}_f$$

In aggiunta per trovare la relazione 1.3 viene eseguita l'approssimazione impulsiva, la quale è tanto più vera, quanto più è grande b . Di conseguenza, però, non si può pretendere che essa valga anche con piccole sezioni d'urto. Infatti l'integrale $\int_0^\infty \frac{db}{b}$ deve

¹Con "urti lontani" si intende la deviazione della traiettoria compiuta da un corpo dovuta all'interazione gravitazionale che nasce nel momento in cui ci si avvicina ad un altro oggetto.

essere svolto al di fuori di questa approssimazione. Eseguendo questo procedimento si trova:

$$\ln \frac{db}{b} = \ln \Lambda$$

Dove $\ln \Lambda$ viene definito come *Logaritmo di Coulomb*.

Invece, l'integrale $\int_0^\infty \frac{g(\|\vec{v}_f\|)}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} d^3\vec{v}_f$ è pari al potenziale di una distribuzione di materia a simmetria sferica nel punto \vec{y} (dato che si pone $\vec{v}_f = \vec{x}$, $\vec{v}_t = \vec{y}$, $\|\vec{x}\| = r$ e $g(r) = \rho(r)$). Esso prende il nome di *Potenziale di Rosenbluth* ($\Psi(\|\vec{v}_t\|)$) e si comporta per $v_f \rightarrow \infty$ come il potenziale gravitazionale per distanze molto grandi.

In conclusione, quindi, si arriva a definire:

$$t_{2b} = \frac{\|\vec{v}_t(-\infty)\|^2}{8\pi G^2 n_f m_f \ln \Lambda \Psi} \quad (1.4)$$

Questo risultato possiede una significativa importanza. Infatti ottenendo il rapporto tra il dato appena ricavato e il tempo di attraversamento del sistema (t_{cross}) si è in grado di determinare il numero di attraversamenti (n_{2b}) necessari affinché la particella di test inizi a sentire l'effetto di granulazione². Si vede che questo numero cresce all'aumentare della quantità di corpi presenti nel sistema, difatti:

$$\frac{t_{2b}}{t_{cross}} = \frac{0,1N}{\ln N} \quad (1.5)$$

Ciò è dovuto al fatto che la variazione di energia cinetica è indirettamente proporzionale al numero di particelle.

A questo punto si è in grado di definire se le galassie e gli ammassi globulari sono collisionali o meno. Per i primi tipi di sistemi si possiedono i valori generalmente approssimati $N_* \simeq 10^{12}$ e $t_{cross} \simeq 2 \times 10^8$ anni. Dunque il tempo di rilassamento a due corpi in tale caso risulta essere dell'ordine di $10^{15 \div 16}$ anni, ovvero, milioni di volte più grande dell'età dell'universo ($\simeq 10^{10}$). Questo porta ad affermare che le galassie sono *non collisionali*. Nel caso di ammassi globulari, partendo dai dati $N_* = 10^6$ e $t_{cross} \simeq 2 \times 10^6$ anni, si ottiene $t_{2b} = 10^9$ anni. Quest'ultimo è un valore più piccolo rispetto all'età dell'universo, di conseguenza tali sistemi sono collisionali, definizione confermata sia dalle simulazioni numeriche che dalle osservazioni.

1.3 Equazione non collisionale di Boltzmann

L'interazione gravitazionale è uno dei più importanti processi nella dinamica e la formazione di oggetti astrofisici, come gli ammassi stellari, le galassie, e la struttura a scala più ampia dell'universo. Stelle e materia oscura in questi sistemi autogravitanti sono essenzialmente senza collisioni, tranne che per alcuni casi, come ammassi globulari e stelle intorno a buchi neri supermassicci. Ciò si spiega riprendendo in esame l'equazione 1.5, grazie alla quale è possibile affermare che l'approssimazione non collisionale

²Con effetto di granulazione si intende la deviazione della traiettoria della particella di test dovuta alle interazioni gravitazionali con le altre particelle presenti nel sistema. Esse vengono definiti *granelli* poiché la loro massa è concentrata in punti molto piccoli se comparati alle dimensioni del sistema (come può essere per le stelle all'interno di una galassia).

è realizzata con migliore approssimazione su tempi scala sempre più lunghi. Di conseguenza nel limite ideale $N \rightarrow \infty$ ci si aspetta che l'approssimazione non collisionale sia verificata per ogni tempo.

La dinamica dei sistemi senza collisione è descritta dall'equazione non collisionale di Boltzmann (CBE). Con questo metodo le masse puntiformi rappresentano punti campionati della funzione di distribuzione nello spazio delle fasi. Quest'ultima è una funzione non negativa $f : R^6 \times R \rightarrow R^+ \cup \{0\}$ che soddisfa la seguente proprietà:

$$N(\gamma) = \int_{\gamma} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3 \vec{x} d^3 \vec{v}$$

Dove $N(\gamma)$ indica il numero di oggetti presenti ad un dato tempo t nel volume 6-dimensionale $\Delta x \Delta v$ presente nello spazio delle configurazioni. Dalla funzione di distribuzione si possono ricavare alcune informazioni, tra cui:

$$\rho(\vec{x}, t) = \int_{R^3} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3 \vec{v}$$

$\rho(\vec{x}, t)$ è la densità che viene considerata per trovare il potenziale liscio descritto nella relazione 1.1.

Come introdotto precedentemente, per un sistema non collisionale autogravitante ($\Phi_{ext}=0$), la funzione di distribuzione di materia obbedisce alla CBE:

$$\frac{\delta f}{\delta t} + v \frac{\delta f}{\delta x} - \frac{\delta \Phi_{tot}}{\delta x} \frac{\delta f}{\delta v} = 0 \quad (1.6)$$

Dove x e v son le coordinate spaziali e di velocità, e Φ_{tot} , che coincide con Φ_{int} , siccome si parla di un sistema autogravitante, è il potenziale gravitazionale che soddisfa l'equazione di Poisson.

Come si può notare la CBE è un'equazione alle derivate parziali del primo ordine di tipo quasi-lineare. Per questo motivo si è in grado di trovare una soluzione con il *metodo delle caratteristiche*. Quest'ultimo produce un'enorme semplificazione del problema originario, dato che la dimensionalità dello spazio in cui si devono svolgere i calcoli è ridotta a 6 dimensioni spaziali ed una temporale. Sfortunatamente, però, questo metodo ha dei limiti puramente matematici. Di conseguenza viene utilizzato un altro strumento chiamato *metodo dei momenti*. Esso consiste nel costruire equazioni differenziali più semplici rispetto alla 1.6. Queste equazioni vengono chiamate *equazioni di Jeans* e descrivono le dipendenze che sussistono tra funzioni, chiamate *momenti*, della funzione di distribuzione nello spazio delle velocità:

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} + \rho \frac{\delta v_i}{\delta x_i} = \frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta \rho v_i}{\delta x_i} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\Delta v_j}{\Delta t} = \frac{\delta v_j}{\delta t} + v_j \frac{\delta v_i}{\delta x_i} = - \frac{\delta \Phi_{tot}}{\delta x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho \sigma_{ij}^2}{\delta x_i} \quad (1.8)$$

Esse valgono $\forall i = 1, 2, 3$.

Per definire queste equazioni sono state utilizzate le seguenti quantità, che derivano a loro volta dalla funzione di distribuzione:

$$\vec{v}_i(X; t) = \frac{1}{\rho(X; t)} \int_{R^3} v_i f d^3 v$$

$$\overline{v_i v_j}(X; t) = \frac{1}{\rho(X; t)} \int_{R^3} v_i v_j f d^3 v$$

$$\sigma_{ij}^2(X; t) = \frac{1}{\rho(X; t)} \int_{R^3} (v_i - \overline{v}_i)(v_j - \overline{v}_j) f d^3 v$$

In questo caso \overline{v}_i sono le componenti delle velocità medie ³ e σ_{ij}^2 è chiamato *velocity dispersion*. Quest'ultimo è un tensore simmetrico e isotropo, ciò significa che in ogni punto viene associato un campo tensoriale, che può essere rappresentato da un ellissoide, definito dalla forma quadratica dello stesso tensore. Essi sono nominati come *ellissoide di dispersione di velocità*. Semplificando, forniscono l'informazione legata alla misura di oscillazione delle stelle in un punto (quando si analizza, per esempio, una galassia).

1.4 Teorema del Viriale

Il teorema del Viriale può essere descritto o in termini tensoriali o scalari. Il primo caso è una forma più generale che recupera le informazioni che si perdono nella trattazione scalare, tenendo traccia di certi aspetti del sistema associato con le sue simmetrie spaziali. Per questo motivo si tratterà inizialmente la forma tensoriale e successivamente quella scalare.

Si definiscono i momenti delle equazioni di Jeans, considerando i momenti dell'equazione non collisionale di Boltzmann sullo spazio delle velocità:

$$\frac{\delta \rho v_j}{\delta t} + \frac{\delta \rho v_i v_j}{\delta x_i} + \rho \frac{\delta \Phi}{\delta t} + \frac{\delta \rho}{\delta x_j} = 0$$

Successivamente si moltiplica ciascun termine per x_k e integrando su tutto lo spazio si ottiene:

$$\frac{\delta}{\delta t} \int \rho x_k v_j d^3 x = - \int x_k \frac{\delta(\rho v_i v_j)}{\delta x_i} d^3 x - \int x_k \rho \frac{\delta \Phi}{\delta x_j} d^3 x$$

Usufruento dell'integrazione per parti si ha che:

$$\int x_k \frac{\delta(\rho v_i v_j)}{\delta x_i} d^3 x = -2K_{jk}$$

Dove K_{jk} è chiamato *tensore di energia cinetica*. Quest'ultima si può dividere in due componenti, una indica il contributo dei moti ordinati, mentre l'altra quello dei moti casuali:

$$K_{jk} \equiv T_{jk} + \frac{1}{2} \Pi_{jk}$$

$$T_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho v_j v_k d^3 x$$

$$\Pi_{jk} \equiv \int \rho \sigma_{jk}^2 d^3 x$$

³Le velocità medie sono chiaramente da intendersi in senso "locale": quando si afferma che le stelle di una galassia possiedono una velocità media in una data posizione all'interno della galassia stessa si intende che tutte le funzioni medie sopra definite sono funzioni della posizione e del tempo.

Successivamente si introduce un'altra quantità necessaria: il *tensore di energia potenziale*

$$W_{jk} \equiv - \int \rho x_j \frac{\delta \Phi}{\delta x_k} d^3x$$

Di conseguenza, combinando le grandezze W_{jk} con K_{jk} , si è in grado di definire la seguente relazione:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta t} \int \rho [x_k v_j + x_j v_k] = 2K_{jk} + W_{jk}$$

In tale caso K e W sono stati considerati simmetrici. Infine viene introdotto il *tensore del momento di inerzia*:

$$I_{jk} \equiv \int \rho x_j x_k d^3x$$

A questo punto si conoscono tutte le quantità per poter definire la relazione cercata. Infatti svolgendo la derivata seconda di I_{jk} rispetto al tempo e utilizzando l'equazione di continuità, si ottiene il *teorema del viriale tensoriale*:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta^2 I_{jk}}{\delta t^2} = 2K_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (1.9)$$

Se il sistema è allo stato stazionario allora il tensore del momento di inerzia è costante. Ciò porta ad affermare che il teorema del viriale tensoriale si riduce a:

$$2K_{jk} + W_{jk} = 0 \quad (1.10)$$

Per poter, invece, definire il teorema nella sua forma scalare si devono prendere in considerazione le tracce delle quantità K_{jk} e W_{jk} :

$$tr(K_{jk}) = K(t)$$

$$tr(W_{jk}) = W(t)$$

Dove $K(t)$ e $W(t)$ sono rispettivamente l'*energia cinetica totale* e l'*energia potenziale totale*. Dunque si ottiene come risultato:

$$2K + W = 0 \quad (1.11)$$

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche

2.1 Piano fondamentale del Teorema del Viriale

Si costruisca un piano cartesiano nel quale si pone sull'asse delle ascisse l'energia totale potenziale, mentre su quella delle ordinate l'energia cinetica totale. Come è possibile

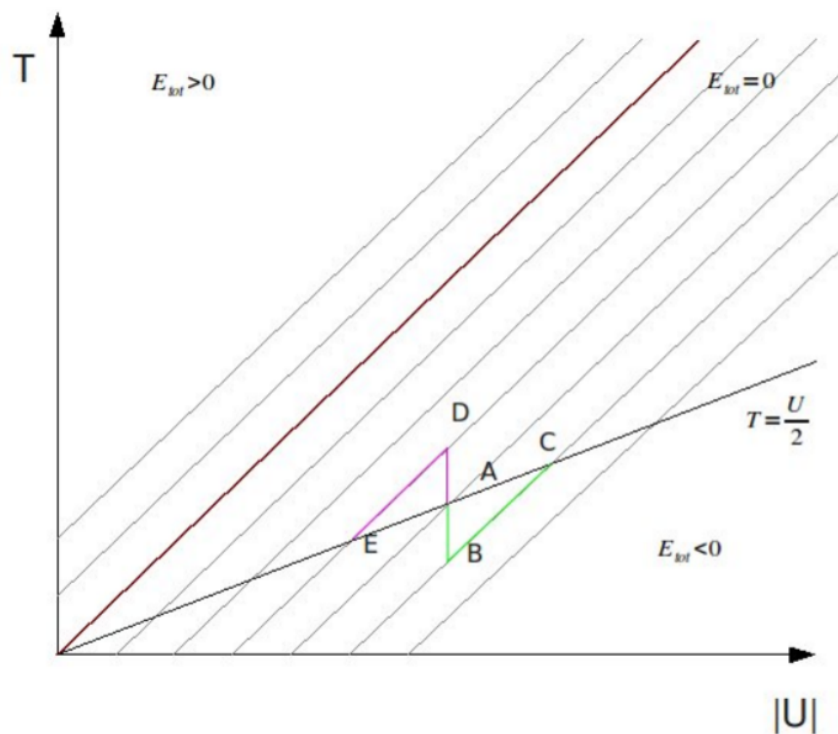


Figura 2.1: Piano fondamentale del teorema del viriale. Viene rappresentato lo spostamento di un corpo sul piano del viriale, in base alla perdita o all'acquisto di energia. In questo grafico l'energia cinetica totale viene rappresentata con la lettera T , mentre quella potenziale U , a differenza di come è stato fatto nella trattazione precedente.

notare dalla figura 2.1, in tale grafico vengono rappresentate varie rette, tra cui quella associata ad $E_{tot} = 0$ e quella relativa a $K = \frac{1}{2}|W|$. Quest'ultima prende il nome di

retta del teorema del viriale. Su di essa vengono posti i sistemi (stelle, ammassi...) che si trovano all'equilibrio. Di conseguenza quelli che possiedono $E_{tot} > 0$ non potranno trovarsi mai in condizioni di stabilità. Ciò è dovuto al fatto che questa condizione implicherebbe un'energia potenziale positiva e un'energia cinetica negativa, che sono condizioni di forte instabilità. Poiché i sistemi devono conservare sempre l'energia totale, durante le loro variazioni si spostano lungo le rette su cui si trovano, le quali non intersecano mai la retta del teorema del viriale.

Si consideri ora un sistema inizialmente all'equilibrio. Esso viene perturbato aumentando l'energia cinetica totale. Ciò comporta uno spostamento su una retta soprastante. Successivamente l'energia fornita viene impiegata per compiere il lavoro necessario ad espandere il sistema che, di conseguenza, si raffredda, al fine di tornare all'equilibrio. È importante notare che nel momento in cui il sistema viene scaldato, quando torna sulla retta del teorema del viriale si trova in un punto più freddo rispetto alla sua posizione iniziale. Questo fenomeno è dovuto alla conservazione dell'energia totale.

In termini matematici si ha:

$$\Delta E_{tot} = \Delta K - \Delta|W| \quad (2.1)$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta|W| \quad (2.2)$$

Queste relazioni portano a:

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\Delta|W| \quad (2.3)$$

Perciò, se partendo da uno stato di stabilità, il sistema si contrae, come si nota dalle espressioni 2.2 e 2.3, metà della variazione di energia potenziale viene spesa per aumentare l'energia cinetica interna (e quindi la temperatura), mentre l'altra metà viene spesa in irraggiamento.

2.2 Limite di Jeans

La fase iniziale di una stella o di una galassia è, a grosso modo, una nube di gas che inizia a collapsare a causa della sua stessa gravità, come rappresentato in figura 2.2 nel caso della nebulosa di Orione. Difatti, nel momento in cui la sua massa possiede un valore sufficientemente elevato la sua energia potenziale eccede su quella cinetica, portandola al collasso. Ciò porta alla formazione di un criterio per la massa critica, chiamata *massa di Jeans* necessaria al collasso della nube. Quest'ultima può essere ricavata partendo proprio dal teorema del viriale.

Si consideri una nube sferica di gas che collassa sotto l'effetto della sua stessa gravità, con una massa totale pari al volume iniziale moltiplicato per la densità media:

$$M = \frac{4\pi}{3}R_0^3\rho_0 \quad (2.4)$$

Sapendo che la sua energia potenziale gravitazionale e l'energia cinetica delle particelle sono rispettivamente:

$$W = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \quad (2.5)$$

$$K = -\frac{3}{2}NK_bT \quad (2.6)$$

Dove k_b è la costante di Boltzmann, mentre N è il numero di particelle che viene fornito dal rapporto tra la massa totale e la massa della singola particella:

$$N = \frac{M}{m} \quad (2.7)$$

Affinché avvenga il collasso è necessario che l'energia potenziale gravitazionale sia maggiore dell'energia cinetica della nube. Quindi andando a sostituire nell'identità del teorema del viriale le espressioni 2.5 e 2.6 e servendosi della 2.7 si ottiene:

$$\frac{k_bT}{m} < \frac{1}{5} \frac{GM}{R}$$

Si definisce *lunghezza di Jeans* (R_J) il limite della disequazione appena trovata:

$$R_J = c_s \sqrt{\frac{9}{4\pi} \frac{1}{G\rho}} \quad (2.8)$$

Dove c_s è la velocità del suono.

Infine, sostituendo R_J nella 2.4 si ottiene la massa di Jeans:

$$M_J = \left(\frac{-5k_bT}{Gm} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$



Figura 2.2: Formazione stellare in Orione osservata nell'infrarosso

Utilizzando i valori del plasma interstellare della nostra Galassia, l'instabilità gravitazionale si ha per:

$$\begin{aligned}
T &\simeq 10 \div 100K \\
\rho &\simeq 10^{-22} \div 10^{-24} g \cdot cm^{-3} \\
R_J &\simeq 10 \div 100Pc \\
M_J &\simeq 10^3 \div 10^5 M_\odot
\end{aligned}$$

Da cui si ricava che le nuvole instabili debbono essere inizialmente di grande massa, corrispondenti agli ammassi stellari più che alle singole stelle.

2.3 Scale di tempo stellare

La storia evolutiva di una struttura stellare è data dalla progressiva contrazione di una sfera di gas autogravitante a cui corrisponde un relativo innalzamento della temperatura centrale.

Si consideri una nube con massa dell'ordine della M_J e per la quale comincia, dunque, il processo di contrazione che è regolato da *tempi scala dinamici*⁴:

$$t_d = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}} \quad (2.10)$$

Infatti, si è in presenza di un sistema non statico e per il quale vale la relazione 1.9. Mano a mano che la contrazione della struttura gassosa procede aumentano anche densità e temperatura. L'aumento della pressione porta il primo "cambio" di regime dei tempi di contrazione del sistema: si passa dai tempi scala dinamici a quelli *termodinamici*⁵. Il crescere della temperatura attiva il processo di ionizzazione della materia e produce un aumento dell'opacità. Di conseguenza la radiazione rimane "intrappolata" nella struttura. La contrazione del gas supplisce alla perdita di energia e all'aumento di temperatura interna, poiché vale la relazione 2.2. Quindi il sistema diviene quasi statico e controllato dal teorema del viriale. Da questo momento è possibile parlare di una struttura che emette energia in un tempo la cui durata massima, cioè quando tutta l'energia viene irradiata, è definita tempo di Kelvin-Helmoltz:

$$t_k = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{LR} \quad (2.11)$$

Nel momento in cui si raggiungono le temperature di combustione avviene la seconda transizione nelle scale temporali: si passa ai tempi scala *termonucleari*⁶. Difatti le reazioni termonucleari costituiscono una sorgente di energia autonoma all'interno della stella e rallentano ulteriormente la contrazione. In altre parole queste tipo di reazioni

⁴Il tempo scala dinamico è il tempo necessario affinché la stella collassi se la pressione che bilancia la forza di gravità improvvisamente si annulla. Può essere stimato come il tempo necessario perché una particella sulla superficie della stella cada in caduta libera fino al centro.

⁵Il tempo scala termodinamico è il tempo necessario affinché la stella si raffreddi.

⁶Questa scala dei tempi è costruita in base alle reazioni termonucleari. Più esattamente è possibile calcolare il tempo necessario perché tutto l'idrogeno si trasformi in elio (anche se sulla base di considerazioni teoriche e modelli numerici si stima che solo il 10% dell'idrogeno totale in una stella si può trasformare in elio).

diminuiscono il numero di particelle libere nel nucleo, diminuendo la pressione, e dunque la struttura nucleare continua a contrarsi ma su tempi scala enormemente più lunghi di quelli termodinamici.

Al termine della combustione (nel momento in cui finisce l'idrogeno per la ppI ⁷) la contrazione ricomincia, portando il nucleo alla temperatura di innesco della reazione termonucleare successiva (dalla ppI alla ppII ⁸). In conclusione la vita di una stella è una continua contrazione di volta in volta arrestata dall'innesco delle reazioni termonucleari con una continua alternanza di tempi scala.

2.4 Determinazione della massa per gli ammassi di galassie

Un'importante applicazione astrofisica del teorema del viriale consiste nella determinazione della massa per gli ammassi globulari, come per esempio quella di M80, rappresentata in figura 2.3. Si consideri l'ammasso globulare con le seguenti condizioni:

- deve essere gravitazionalmente legato, il che comporta il fatto che le velocità e le distanze devono essere limitate.
- deve essere in uno stato stazionario.

A questo punto si può esplicitare la relazione 1.11 e dividerla per il quadrato della massa totale:

$$\frac{\langle \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \rangle}{M_{tot}^2} - \frac{G}{2M_{tot}^2} \langle \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i=1}^N \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|} \rangle = 0 \quad (2.12)$$

Se si suppone virializzato l'ammasso di galassie, ovvero valga la seconda condizione, il teorema del viriale può essere espresso come:

$$\frac{\langle v^2 \rangle_{t,m}}{M_{tot}} - \frac{G}{\langle R_{grav} \rangle_t} = 0 \quad (2.13)$$

Da questo risultato è possibile ricavare il valore della massa totale:

$$M_{tot} = \frac{\langle v^2 \rangle_m R_{grav}}{G} = \frac{3\sigma_{linea\ di\ vista}^2 R_{grav}}{G} = 7.0 \cdot 10^{14} M \left(\frac{\sigma_{linea\ di\ vista}}{1000\ km/s} \right)^2 \left(\frac{R_{grav}}{1\ Mpc} \right) \quad (2.14)$$

Dove la media temporale è stata sostituita con il valore in condizioni stazionarie. Mentre, la media delle velocità pesate con le masse è stata approssimata con la media normale delle velocità, che a sua volta è stata sostituita a 3 volte la dispersione di velocità. Quest'ultima viene misurata con l'effetto Doppler lungo la linea di vista, ipotizzando l'isotropia nella distribuzione di velocità. Questo tipo di misure stimano un rapporto di massa/luminosità intorno alle 300 volte quello del sole.

⁷ $4H \rightarrow 1He^4$

⁸La ppII produce, come la ppI, He^4 , ma in questo caso durante il processo si genera Be^8 che decade in due He^4



Figura 2.3: L'ammasso globulare M80; la sua distanza è stimata in circa 28000 anni luce dal Sole e contiene centinaia di migliaia di stelle. Crediti: Nasa, The Hubble Heritage Team, Stsci, AURA

Alcuni errori su questa stima possono nascere dalle particolari condizioni in cui viene applicato il teorema del viriale. Infatti bisognerebbe conoscere il numero delle stelle presenti nell'ammasso, e la somma delle loro masse dovrebbe coincidere con la massa totale dell'ammasso. Si sa che quest'ultima condizione non è verificata infatti all'interno di un ammasso di galassie è presente gas il quale incide anch'esso sulla massa totale.

2.5 Scoperta della materia oscura

Nei primi anni '30 del secolo scorso l'astronomo svizzero Fritz Zwicky intraprese uno studio sull'ammasso della Chioma (figura 2.4), un aggregato di migliaia di galassie. Egli effettuò due tipi di misure: stimò la massa totale dell'ammasso dal numero delle galassie che era in grado di vedere e dalla sua luminosità totale; invece, dalla misura dello spostamento Doppler della luce emessa determinò le velocità radiali delle galassie. Con questi dati a disposizione, Zwicky fu in grado di stimare i valori delle energie totali

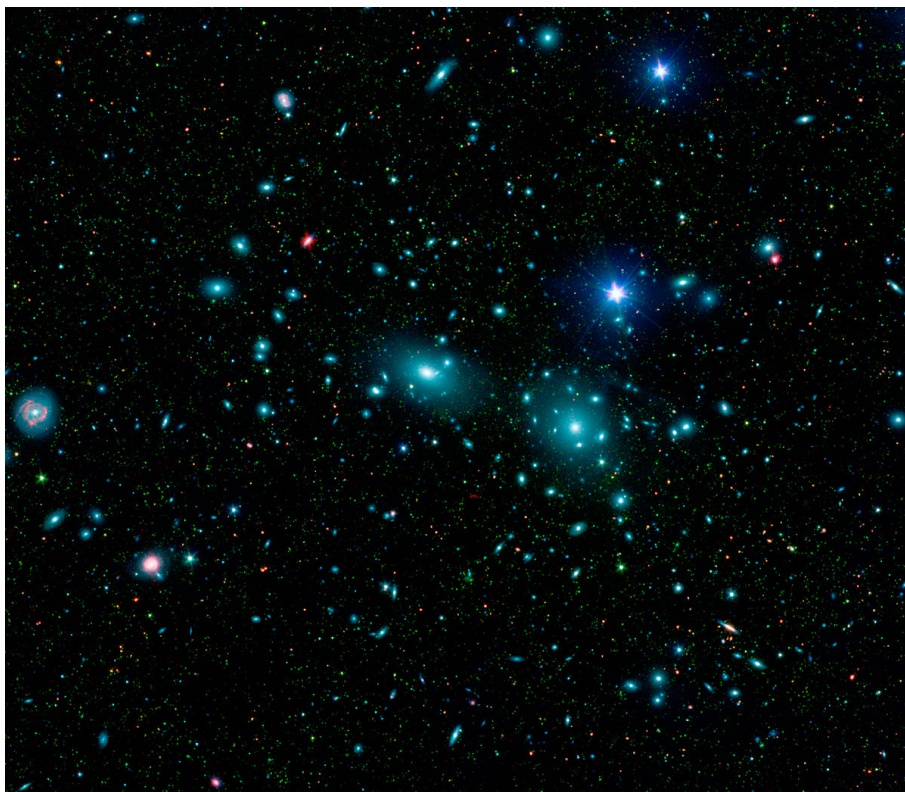


Figura 2.4: Ammasso della Chioma.

cinetiche e gravitazionali contenute nel sistema analizzato. Egli notò che i risultati ottenuti non rispettavano il teorema del viriale: secondo le sue misure, le singole galassie si muovevano troppo velocemente affinché l'ammasso rimanesse compatto. Alla ricerca di una spiegazione di tale problema, l'astronomo svizzero avanzò l'idea che l'ammasso possedesse anche massa invisibile, ovvero materia che esercita un'attrazione gravitazionale ma che non emette luce, e che chiamò *materia oscura*.

Successivamente, negli anni 70, Vera Rubin, insieme al suo collaboratore Kent Ford, iniziò a studiare le cosiddette *curve di rotazione* delle galassie a spirale. Esse rappresentano l'andamento di velocità all'interno di un sistema in funzione della distanza dal centro del sistema stesso. Rubin si aspettava di trovare l'andamento predetto dalla legge di gravità di Newton, per la quale la velocità di rotazione attorno al centro del sistema decresce con la radice quadrata della distanza da esso, come rappresentato dalla curva blu in figura 2.5. Invece scoprì che nelle galassie a spirale la velocità di rotazione rimane costante a grandi distanze, tanto da estendersi ben oltre alla regione delle stelle più esterne (rappresentato dalla curva rossa nella stessa figura). In questa regione la velocità di rotazione è quella delle nubi di idrogeno ionizzato che ruotano intorno al centro della galassia. Queste nubi emettono radiazione con una lunghezza d'onda pari a $\lambda = 21\text{cm}$, conosciuta come *linea $H\alpha$* , facile da rilevare. È dallo spostamento Doppler di questa linea che Rubin fu in grado di determinare la velocità orbitale delle nubi periferiche.

Nell'ambito della meccanica Newtoniana la curva di rotazione osservata può essere compresa soltanto se la distribuzione di massa si estende ben oltre quella della luce

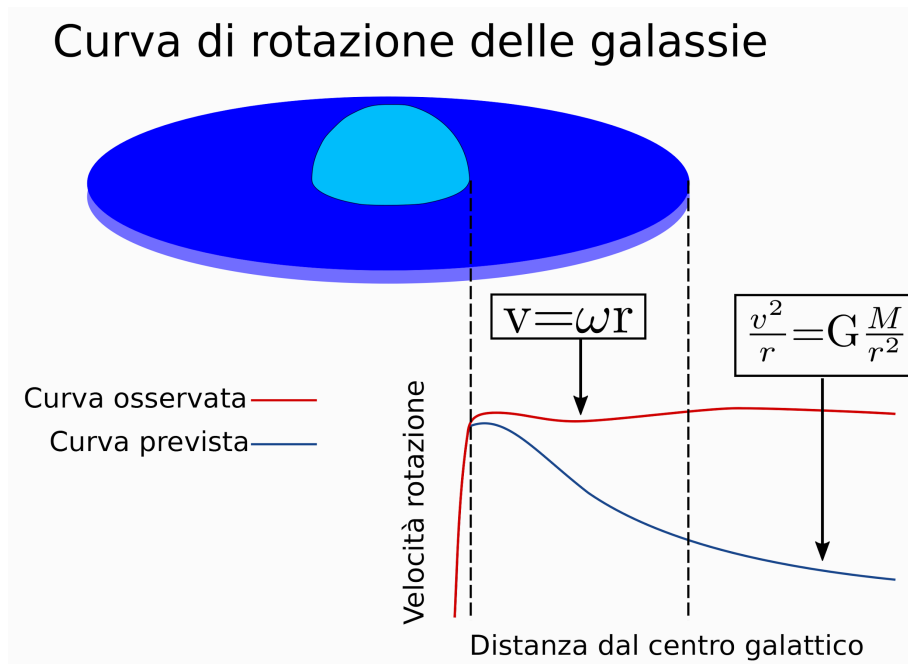


Figura 2.5: Curva di rotazione di una galassia a spirale. In blu viene rappresentata la curva prevista dai calcoli in assenza di materia oscura, mentre in rosso viene definita la curva osservata.

stellare visibile. In altre parole la materia nelle regioni esterne delle galassie è oscura. Ciò implica che ogni galassia, siccome il fenomeno è generale, è immersa in un alone all'interno del quale questa materia possiede una distribuzione ben precisa: la sua densità deve decrescere con il quadrato della distanza dal centro galattico.

Per poter comprendere la natura di questa materia si è postulato che l'alone che circonda la galassia sia composto da particelle elementari, elettricamente neutre, stabili e massive sin qui non ancora osservate. Il fatto che esse siano neutre spiega la ragione per cui risultino invisibili, non potendo emettere radiazione elettromagnetica di nessun tipo. La prova più concreta a favore della natura particellare della materia oscura è di carattere cosmologico. Infatti, se al momento della formazione del fondo cosmico a microonde (CMB) nell'universo fossero stati presenti solo fotoni e materia ordinaria, l'entità attuale delle fluttuazioni nella distribuzione di temperatura del CMB sarebbero state molto più grandi di quelle che osserviamo ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$). La presenza di materia oscura può trovare soluzione a tale problema dal momento in cui essa non si accoppia direttamente con i fotoni. Per di più la misurazione dettagliata delle fluttuazioni nella temperatura della CMB consente di stabilire che il contributo della materia oscura alla densità di energia dell'Universo è circa del 25%.

Bibliografia

- [1] Giuseppe Bertin. *Corso di introduzione all'Astrofisica*. 2009-2010.
- [2] Cesare Chiosi. *Struttura ed evoluzione delle stelle*. Università degli studi di Padova.
- [3] Luca Ciotti. *Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare*. 2002.
- [4] Luca Ciotti. *Appunti di Astrofisica Extragalattica*. 2020-2021.
- [5] D. Babusci, F. Bossi. *Il problema della materia oscura*. Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, 2018. <http://w3.lnf.infn.it/problema-della-materia-oscura/>.
- [6] Attilo Ferrari. *Stelle, galassie e universo*. Springer-Verlag Mailand, 2011.
- [7] Francesco Rosario Ferraro. *Appunti di Astrofisica Stellare*. 2020-2021.
- [8] Christopher Lovell. *Deriving the Jean's Mass*, 2016. <https://www.christopherlovell.co.uk/blog/2016/04/26/jeans-mass.html>.
- [9] Kohji Yoshikawa, Naoki Yoshida, and Masayuki Umemura. Direct integration of the collisionless boltzmann equation in six-dimensional phase space: Self-gravitating systems. *The Astrophysical Journal*, 762(2):116, 2012.