

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Validazione dei codici per la misura della
funzione di correlazione a due punti per
la missione spaziale Euclid**

Relatore:
Prof. Federico Marulli

Presentata da:
Alessandro Benati

Anno Accademico 2020/2021

Abstract

Due tra le principali questioni aperte della cosmologia moderna sono rappresentate dall'energia oscura e dalla materia oscura. L'energia oscura costituisce circa il 69% dell'energia dell'Universo ed è responsabile dell'accelerazione cosmica, mentre la materia oscura costituisce circa l'84% della materia dell'Universo e non è visibile, in quanto interagisce soltanto gravitazionalmente. La missione spaziale Euclid dell'ESA, il cui lancio è previsto per l'estate del 2022, è fondamentale per indagare la loro natura fisica. In questo senso, uno degli osservabili cosmologici più importanti è la funzione di correlazione a due punti, definita come la deviazione della distribuzione di sorgenti, che possono essere galassie o ammassi di galassie, rispetto ad una distribuzione omogenea. Lo scopo di questo lavoro di Tesi è quello di effettuare la validazione dei codici di Euclid per la misura della funzione di correlazione a due punti.

Il capitolo 1 presenta un'introduzione alla cosmologia moderna, una descrizione sommaria sul modello Λ CDM, per poi arrivare ad una breve presentazione sulla materia oscura e sull'energia oscura.

Il capitolo 2 si concentra sugli strumenti e le strategie osservative utilizzati per vincolare i parametri cosmologici. Vi è poi una presentazione sulla funzione di correlazione a due punti e un resoconto sulla missione Euclid.

Il capitolo 3 offre una descrizione dei codici analizzati in questa Tesi: prima sono presentate le librerie di calcolo cosmologico CosmoBolognaLib (CBL) e poi i codici di Euclid.

Il capitolo 4, infine, è volto alla presentazione dei risultati ottenuti in questo lavoro di Tesi. Sono descritti gli errori individuati e poi corretti all'interno dei codici analizzati, in seguito sono discussi i vari test effettuati per la validazione, tra cui alcuni test interni ai codici di Euclid e il confronto con codici che fanno uso delle CBL.

Indice

1	Cenni di cosmologia	5
1.1	Introduzione	5
1.2	Fluido cosmico	7
1.3	Espansione dell'Universo	9
1.3.1	Redshift cosmologico	9
1.3.2	Legge di Hubble-Lemaître	10
1.4	Modello Λ CDM	11
1.4.1	Breve storia di Λ	11
1.4.2	Modello cosmologico standard	12
1.4.3	Inflazione	15
1.5	Materia oscura	17
1.5.1	Materia oscura nelle galassie	17
1.5.2	Materia oscura negli ammassi di galassie	19
1.5.3	Cos'è la materia oscura?	20
1.6	Energia oscura	21
1.6.1	Energia del vuoto	21
1.6.2	Campi scalari	22
1.6.3	Gravità modificata	23
1.6.4	Modelli di Universo non omogenei	23
1.6.5	Descrivere l'energia oscura	23
2	Osservare l'Universo	25
2.1	Alcune grandezze astronomiche	25
2.2	Supernovae	28
2.3	Ammassi di galassie	31
2.4	Oscillazioni acustiche barioniche	32
2.5	Lenti gravitazionali	34
2.6	Funzione di correlazione a due punti	35
2.6.1	Distorsioni nello spazio dei redshift	36
2.6.2	Distorsioni geometriche	39
2.7	Missione Euclid	39
3	Codici per la misura della funzione di correlazione a due punti	42
3.1	Le librerie CosmoBolognaLib	42
3.2	I codici di Euclid	43

4	Validazione	45
4.1	Codice di validazione	45
4.2	Risultati	46
4.2.1	Catalogo simulato	46
4.2.2	Errori nei codici Euclid e CBL	46
4.2.3	Test interno: confronto tra <i>linked list</i> e <i>k-d tree</i> per le 5 statistiche	46
4.2.4	Test interno: tempi in funzione del fattore di split	50
4.2.5	Confronto tra Euclid e CBL: le 5 statistiche	53
4.2.6	Confronto tra Euclid e CBL: tempi in funzione di $N_{threads}$	58
4.2.7	Confronto tra Euclid e CBL: tempi in funzione della separazione massima	59
4.2.8	Confronto tra Euclid e CBL: RAM in funzione di N_{obj}	63
5	Conclusioni	68
	Riferimenti bibliografici	70

Capitolo 1

Cenni di cosmologia

1.1 Introduzione

La cosmologia è lo studio dell'Universo, della sua origine e della sua evoluzione. L'osservazione cosmologica più semplice che si può effettuare è che il cielo di notte è buio, punteggiato da stelle distribuite in maniera discreta. A partire dal XVII secolo all'interno della comunità scientifica iniziò ad affermarsi l'idea che l'Universo fosse infinito, a causa delle tante evidenze sperimentali che spingevano in questo senso. Se però consideriamo un Universo infinitamente esteso e contenente una distribuzione omogenea di stelle, il cielo, anche di notte, dovrebbe essere uniformemente luminoso, dal momento che il nostro occhio dovrebbe incontrare una stella in ogni direzione guardasse. Questo problema è noto come *paradosso di Olbers*. La soluzione del paradosso sta nel fatto che l'intensità del campo radiativo intergalattico dovuto alle stelle presenti nelle galassie è piccola, principalmente a causa di due fattori: l'età finita delle galassie, che limita la quantità di luce prodotta, e l'espansione dell'Universo, che aumenta lo spazio che la luce, con velocità finita, deve percorrere per arrivare fino a noi e sposta le frequenze verso il rosso, fuori dalla banda ottica. [1]

La cosmologia moderna si basa su due principi:

Principio Copernicano. Non siamo osservatori privilegiati all'interno dell'Universo.

Principio Cosmologico. L'Universo è omogeneo e isotropo.

Ciò significa che qualsiasi osservatore nell'Universo, in qualsiasi posizione e verso qualsiasi direzione, osserverà a grandi scale le stesse proprietà fisiche delle strutture. Il Principio Cosmologico è una congettura basata sull'osservazione e ci permette di introdurre delle simmetrie che ci consentono di porci in condizioni tali da poter risolvere le equazioni di Einstein. L'omogeneità e l'isotropia dell'Universo infatti sono due simmetrie dello spaziotempo che implicano l'esistenza di vettori di Killing della metrica. In particolare, vi sono tre vettori di Killing di tipo spazio che generano le traslazioni spaziali, i quali rappresentano matematicamente l'omogeneità, e tre vettori di Killing di tipo spazio che generano le rotazioni, i quali rappresentano matematicamente l'isotropia. Si può mostrare che questi sei vettori di Killing

sono il numero massimo che si può avere in una varietà tridimensionale di tipo spazio, quindi siamo nel caso di massima simmetria. Se consideriamo lo spaziotempo quadridimensionale, l'esistenza dei sei vettori di Killing implica l'esistenza di ipersuperfici tridimensionali a tempo t costante Σ_t , o fogli, con cui possiamo ricoprire lo spaziotempo, tali per cui all'interno di un foglio l'Universo è omogeneo e isotropo.

In queste condizioni la metrica è quella di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), definita, ponendo $c = 1$, come:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right], \quad (1.1)$$

dove l'origine $r = 0$ è arbitraria, t è il tempo cosmico, cioè il tempo proprio misurato da un osservatore a (r, θ, ϕ) costanti, $a(t)$ è il fattore di scala, k è il parametro di curvatura e può assumere i valori $0, \pm 1$. Le coordinate $\{t, r, \theta, \phi\}$ sono dette coordinate comoventi e sono coordinate in un sistema di riferimento spaziale vincolato alla posizione media delle galassie, all'interno del quale l'espansione dell'Universo può essere riscalata con il fattore di scala $a(t)$.

Il parametro di curvatura k in realtà potrebbe assumere qualsiasi valore reale, tuttavia se $k \neq 0$ è sempre possibile riscalarare r e a come:

$$dr \rightarrow \sqrt{|k|} dr, \quad (1.2)$$

$$a^2(t) \rightarrow |k| a^2(t), \quad (1.3)$$

in modo tale da ottenere $k = \pm 1$.

La metrica di FLRW può essere riscritta come:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\sigma^2, \quad (1.4)$$

e a seconda del valore che assume k , l'elemento di linea $d\sigma^2$ risulta diverso:

- Per $k = 0$ si ha un **Universo piatto**: la coordinata r è molto simile alla coordinata radiale in \mathbb{R}^3 , dunque il suo dominio è $r > 0$. L'elemento di linea diventa:

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.5)$$

dove $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido e l'ipersuperficie Σ_t è piatta, poichè non c'è curvatura spaziale.

- per $k = +1$ si ha un **Universo chiuso**: il dominio della coordinata r è $0 < r < 1$, dato che si esclude il caso $r > 1$ in quanto ha segnatura non consistente $(-, -, +, +)$. Introducendo la variabile X definita come $r = \sin(X)$, l'elemento di linea è:

$$d\sigma^2 = dX^2 + \sin^2(X) d\Omega^2, \quad (1.6)$$

e Σ_t è una sfera tridimensionale.

- per $k = -1$ si ha un **Universo aperto**: come nel primo caso, non ci sono limitazioni per il dominio di r , che è appunto $r > 0$. Si può introdurre la variabile Ψ definita come $r = \sinh(\Psi)$, dunque l'elemento di linea si scrive come:

$$d\sigma^2 = d\Psi^2 + \sinh^2(\Psi) d\Omega^2, \quad (1.7)$$

Σ_t in questo caso è un iperboloide tridimensionale.

1.2 Fluido cosmico

Assumendo che l'Universo contenga un fluido perfetto di materia ed energia, possiamo scrivere l'equazione di continuit :

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0, \quad (1.8)$$

dove $T^{\mu\nu}$   il tensore energia-impulso, la cui definizione   la seguente:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu} + p (g^{\mu\nu} + u^{\mu} u^{\nu}), \quad (1.9)$$

dove ρ   la densit  di energia del fluido, u^{μ}   la sua quadrivelocit , p   la sua pressione e $g^{\mu\nu}$   la metrica. Dato che in un sistema di riferimento comovente al fluido si ha $T^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$, la componente 0 di questa equazione non   altro che la conservazione dell'energia:

$$-\nabla_{\mu} T^{\mu}_0 = \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (1.10)$$

dove:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.11)$$

  il parametro di Hubble e il punto indica una derivata rispetto al tempo. Possiamo poi scrivere l'equazione di stato per il fluido:

$$p = w \rho, \quad (1.12)$$

dove il parametro w   costante. Sostituendo la (1.12) nella (1.10) la conservazione dell'energia diventa:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.13)$$

Dunque si ottiene:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (1.14)$$

Possiamo distinguere le seguenti componenti del fluido cosmico:

- **Radiazione**, per cui si intende la materia relativistica, con massa nulla. Si ha $w_{rad} = \frac{1}{3}$ e dunque:

$$\rho_{rad} \propto a^{-4}; \quad (1.15)$$

- **Materia**, per cui si intende la materia non relativistica sia oscura che barionica con pressione nulla, in quanto non soggetta a forze oltre alla gravit . In questo caso si ha $w_{mat} = 0$ e quindi:

$$\rho_{mat} \propto a^{-3}; \quad (1.16)$$

- **Energia Oscura**, per cui si ha $w_{DE} = -1$, dato che:

$$\rho_{DE} = -p_{DE} = \frac{\Lambda}{8\pi G_N}, \quad (1.17)$$

dove Λ   la costante cosmologica (vedi sez.1.4) e G_N   la costante di gravitazione universale di Newton. Di conseguenza la densit  di energia in questo caso   costante.

Le equazioni di Einstein nella metrica di FLRW si riducono alle due equazioni di Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N \rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.18)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.19)$$

che governano l'evoluzione temporale del fattore di scala e quindi l'espansione dell'Universo.

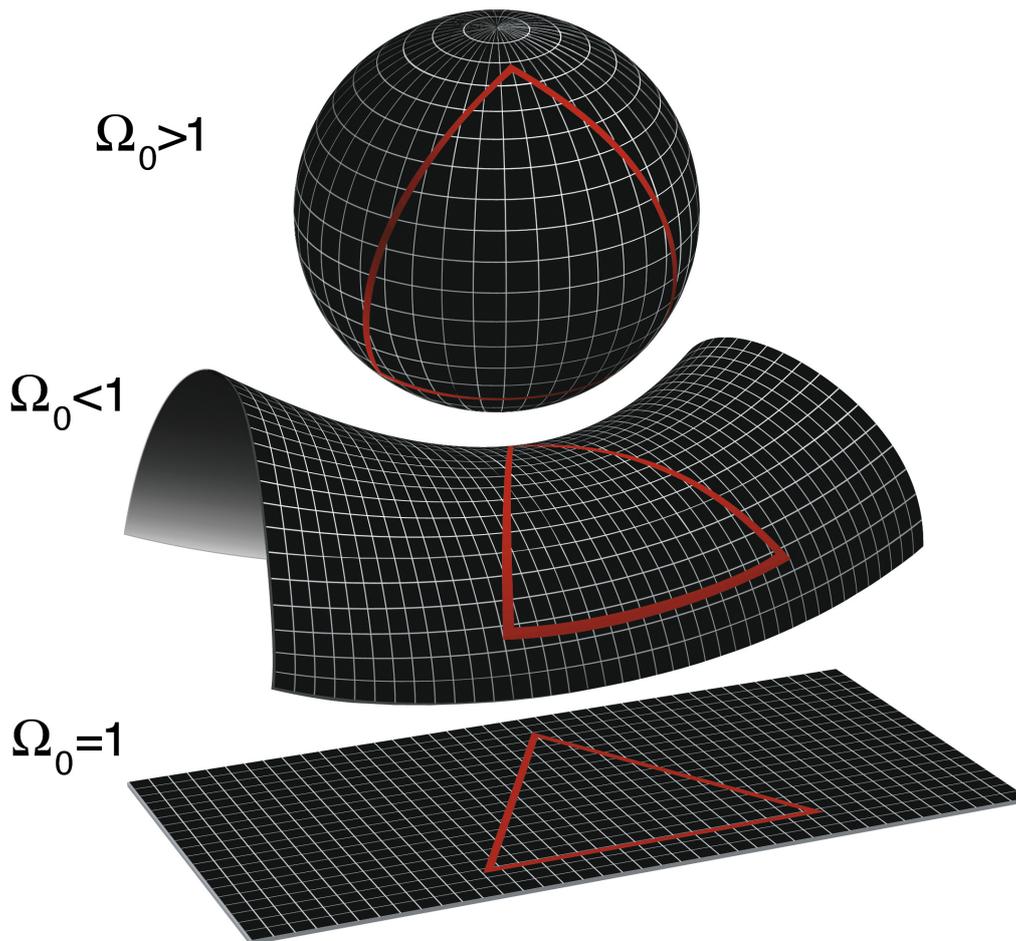


Figura 1.1: Universo spazialmente chiuso ($\Omega > 1$), aperto ($\Omega < 1$) e piatto ($\Omega = 1$). Immagine di [2].

Possiamo definire il parametro di decelerazione:

$$q = -\frac{a \ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (1.20)$$

e il parametro di densità:

$$\Omega = \frac{8\pi G_N}{3H^2} \rho = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (1.21)$$

dove la densità critica ρ_c è:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G_N}, \quad (1.22)$$

in cui $H_0 \equiv H(t_0)$ è il parametro di Hubble oggi. Sostituendo la (1.21) nella (1.18), si ottiene:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \quad (1.23)$$

Possiamo quindi giungere alle seguenti conclusioni:

- $\rho > \rho_c \Leftrightarrow \Omega > 1 \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow$ Universo chiuso
- $\rho < \rho_c \Leftrightarrow \Omega < 1 \Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow$ Universo aperto
- $\rho = \rho_c \Leftrightarrow \Omega = 1 \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow$ Universo piatto

La fig.1.1 mostra le differenze geometriche tra un Universo chiuso, con $\Omega > 1$ e quindi $k = 1$, un Universo aperto, con $\Omega < 1$ e quindi $k = -1$, e un Universo piatto, con $\Omega = 1$ e quindi $k = 0$. Le osservazioni hanno mostrato che oggi si ha $k \sim 0$ ([3]), per cui l'Universo risulta approssimativamente piatto.

1.3 Espansione dell'Universo

La metrica di FLRW esprime, attraverso il fattore di scala $a(t)$, l'espansione dell'Universo. Questa espansione intrinseca dello spazio implica che la distanza tra due oggetti aumenti con il passare del tempo. Infatti, se si considera la (1.4), la distanza propria tra due punti può essere scritta come:

$$l = a(t) \int_0^r d\sigma, \quad (1.24)$$

dove la dipendenza dal tempo è contenuta nel fattore di scala.

1.3.1 Redshift cosmologico

Consideriamo una sorgente di un segnale luminoso posta a $r = r_1$ e un ricevitore posto a $r = r_2$. La sorgente invia due segnali: il primo al tempo t_1 e il secondo al tempo $t_1 + \delta t_1$. Dopo aver percorso la stessa distanza, tali segnali saranno ricevuti, rispettivamente, ai tempi t_2 e $t_2 + \delta t_2$. Dato che per i fotoni vale $u^\mu u_\mu = 0$, le traiettorie di tipo luce percorse dai segnali, a θ e ϕ costanti, saranno caratterizzate da:

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}, \quad (1.25)$$

da cui segue:

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (1.26)$$

per cui si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.27)$$

da cui si ricava che:

$$\int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_2}^{t_2 + \delta t_2} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.28)$$

Assumendo che gli intervalli di tempo δt_1 e δt_2 siano sufficientemente piccoli da poter considerare $a(t)$ costante, la (1.27) si può riscrivere come:

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_2}{a(t_2)}. \quad (1.29)$$

Se $\nu(t)$ è la frequenza del fotone al tempo t , sappiamo che vale:

$$\frac{\nu(t_1)}{\nu(t_2)} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1}, \quad (1.30)$$

che implica che:

$$\frac{\nu(t_1)}{\nu(t_2)} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \equiv \frac{a_2}{a_1}. \quad (1.31)$$

Vediamo quindi che se il fattore di scala $a(t)$ aumenta, cioè se l'Universo si espande, le frequenze dei fotoni diminuiscono, cioè si spostano verso il rosso: questo è il fenomeno del redshift cosmologico. Solitamente questa variazione di frequenze si esprime attraverso il redshift, definito come:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{a_o}{a_s} - 1, \quad (1.32)$$

dove λ_o è la lunghezza d'onda osservata, λ_s è la lunghezza d'onda della sorgente, a_o è il fattore di scala osservato, cioè al tempo cosmico della ricezione, e a_s è il fattore di scala della sorgente, cioè al tempo cosmico dell'emissione.

Diversamente dall'effetto Doppler, questo spostamento delle frequenze non è dovuto ad un moto relativo tra sorgente ed osservatore, ma è causato dall'espansione dell'Universo.

1.3.2 Legge di Hubble-Lemaître

Nel 1929 Edwin Hubble, effettuando misure su alcune galassie vicine a noi, giunse alla conclusione che esistesse una relazione lineare tra il redshift delle galassie e la loro distanza dalla Terra ([4]), come mostra la fig.1.2. Tale relazione prende il nome di *legge di Hubble-Lemaître* e può essere scritta come:

$$z = H_0 r, \quad (1.33)$$

dove z è il redshift della galassia, $H_0 \equiv H(t_0)$ è il parametro di Hubble calcolato al tempo cosmico attuale t_0 , per cui si assume che $a(t_0) = 1$, e r è la distanza tra noi e la galassia. Sapendo che per $z \ll 1$ si ha $z \sim v$, la (1.31) implica che le galassie recedono da noi con una velocità direttamente proporzionale alla distanza: ciò non è altro che una conseguenza del fatto che l'Universo si sta espandendo. La costante di proporzionalità H_0 è un parametro cosmologico molto importante e il suo valore secondo [3] è pari a $H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Si potrebbe pensare che la legge di Hubble non sia in accordo con il Principio Copernicano, ma non è così: non vi è un centro dell'espansione, quindi in qualsiasi punto dell'Universo ci trovassimo, avremmo la percezione che le galassie si starebbero allontanando da noi, pertanto non siamo osservatori privilegiati.

La (1.31) vale soltanto per redshift z piccoli, poichè se si considerano galassie più lontane da noi la relazione tra redshift e distanza non è più lineare.

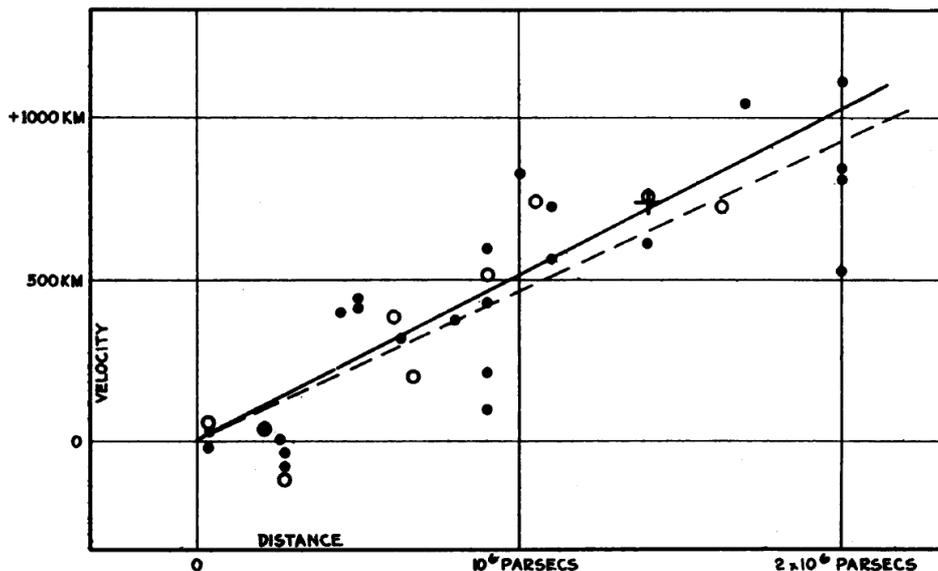


Figura 1.2: Grafico presentato da Hubble nel 1929 ([4]) che rappresenta la relazione tra la distanza, espressa in pc, sull'asse x e la velocità radiale (espressa erroneamente in km invece che in km/s) sull'asse y, per le galassie da lui studiate. I cerchi pieni e la linea continua rappresentano le galassie prese individualmente; i cerchi vuoti e la linea tratteggiata rappresentano gruppi in cui le galassie sono combinate; la croce rappresenta la velocità media corrispondente alla distanza media di 22 galassie la cui distanza non poteva essere stimata individualmente.

1.4 Modello Λ CDM

1.4.1 Breve storia di Λ

La costante cosmologica fu introdotta per la prima volta da Einstein con lo scopo di ottenere un modello di Universo finito e statico: Λ doveva, con un'azione repulsiva, bilanciare l'attrazione gravitazionale della materia. Questo modello aveva un problema principale: un Universo di questo tipo si troverebbe in una condizione di equilibrio instabile. Infatti, se immaginiamo di espandere di una quantità infinitesima un Universo di questo tipo, le cui componenti non trascurabili sono date dalla costante cosmologica e dalla materia, ovviamente la densità di energia di Λ rimane invariata, in quanto costante per definizione, mentre la densità di energia della materia diminuisce. Di conseguenza, la forza repulsiva rappresentata dalla costante cosmologica è maggiore della forza attrattiva rappresentata dalla materia, quindi l'Universo si espande ancora, causando un'ulteriore diminuzione della densità di energia della materia e quindi portando l'Universo ad espandersi sempre di più. Con la scoperta di Hubble dell'espansione dell'Universo, la soluzione statica di Einstein fu abbandonata, così come la costante cosmologica. Λ fu poi riproposta e nuovamente rifiutata più volte da parte dei cosmologi, fino alla formulazione del modello del big bang caldo, accettato dalla comunità scientifica dopo la scoperta della radiazione cosmica di fondo (CMB): a questo punto il problema della costante cosmologica iniziò ad essere ignorato da parte della maggior parte dei fisici. Secondo

il modello del big bang caldo, l'Universo si è formato a partire da una singolarità con una temperatura elevatissima e ha in seguito intrapreso un'espansione. Se tale modello risolveva alcuni problemi, ne faceva nascere altri, principalmente due: il problema dell'orizzonte e il problema della piattezza. Per risolvere tali questioni, fu proposto il modello dell'inflazione, che sostiene che l'Universo si sia espanso in maniera esponenziale, come illustrato nella sez.1.4.3.

1.4.2 Modello cosmologico standard

Alla fine del secolo scorso due diversi team di ricerca hanno mostrato in maniera indipendente, attraverso lo studio di Supernovae di tipo Ia, che l'espansione dell'Universo sta accelerando ([5] [6]). Ciò ha portato alla reintroduzione della costante cosmologica Λ , con lo scopo di spiegare tale accelerazione. Il modello Λ CDM, in cui Λ indica la costante cosmologica e CDM indica la cold dark matter, cioè la materia oscura fredda, è il modello cosmologico che meglio descrive l'Universo in cui viviamo. Tale modello si basa appunto sull'esistenza della costante cosmologica Λ , di cui si è parlato nella sez.1.4.1, e della materia oscura fredda, che non è altro che materia oscura che all'epoca del disaccoppiamento tra radiazione e materia era non relativistica. Come già anticipato, le osservazioni suggeriscono che oggi l'Universo sia spazialmente piatto, con $\Omega \simeq 1$. In particolare, vi sono tre contributi al parametro di densità [3]:

- **Materia ordinaria:** $\Omega_M \simeq 0.05$
- **Materia oscura:** $\Omega_{DM} \simeq 0.26$
- **Energia oscura:** $\Omega_{DE} \simeq 0.69$

Il contributo della radiazione non è riportato in quanto, essendo dell'ordine di 10^{-4} , risulta trascurabile rispetto agli altri. Possiamo riscrivere la (1.18) sostituendo $k = 0$ ed esplicitando i contributi di densità di energia di materia, radiazione ed energia oscura:

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} (\rho_{rad} + \rho_{mat} + \rho_{DE}). \quad (1.34)$$

Ricordando le (1.15), (1.16), (1.17) si vede che l'Universo, come rappresentato in Fig.1.3, ha attraversato tre diverse epoche: a redshift $z \gtrsim 3000$, cioè quando l'Universo era molto giovane, dominava il contributo della radiazione; poi, a redshift $0.5 \lesssim z \lesssim 3000$, ha iniziato a dominare il contributo della materia; infine, a redshift $z \lesssim 0.5$ i contributi di radiazione e materia sono diventati trascurabili rispetto al contributo costante di Λ , e ha iniziato a dominare l'energia oscura. Analizzando queste tre epoche più in dettaglio:

- **Epoca della radiazione:** sostituendo la (1.15) nella (1.34) si ottiene:

$$a(t) \sim t^{1/2}. \quad (1.35)$$

Da ciò segue che:

$$\ddot{a} < 0, \quad (1.36)$$

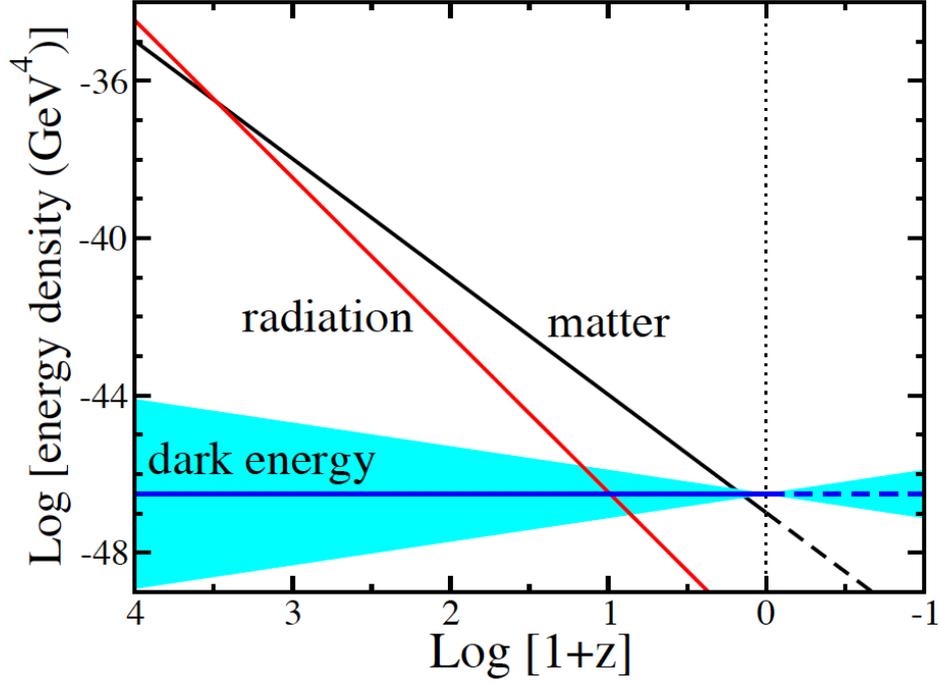


Figura 1.3: Evoluzione temporale delle densità di energia di radiazione, materia ed energia oscura in funzione del redshift. Per l'energia oscura la banda celeste rappresenta $w = -1 \pm 0.2$. Grafico di [7].

per cui l'espansione decelera e si ha $q > 0$. Inoltre notiamo che se $t \rightarrow \infty$ si ha $\dot{a} \rightarrow 0$, quindi per tempi grandi l'accelerazione diventa nulla. Per orizzonte di particella si intende lo spazio massimo che può essere percorso da una particella, con massa positiva o nulla, per arrivare fino a noi, partendo dalla nascita dell'Universo: non è altro che l'ampiezza di una regione causalmente connessa. Se consideriamo un fotone, per cui vale $u^\mu u_\mu = 0$, si ha:

$$ds^2 = 0, \quad (1.37)$$

per cui si ottiene:

$$dr = \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.38)$$

Dunque, se integriamo la (1.36) per ricavare r , cioè la distanza coordinata percorsa dal fotone dalla nascita dell'Universo fino al tempo t :

$$r = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.39)$$

La distanza fisica dal punto di emissione alla posizione del segnale al tempo t , che non è altro che l'orizzonte di particella, è:

$$l_H(t) = a(t)r. \quad (1.40)$$

Dato che vale la (1.33) si ottiene:

$$l_H(t) \sim t, \quad (1.41)$$

per cui è evidente che l'orizzonte di particella aumenta linearmente con il tempo.

- **Epoca della materia:** sostituendo la (1.16) nella (1.34) si ottiene:

$$a(t) \sim t^{2/3}, \quad (1.42)$$

e quindi si ha:

$$\ddot{a} < 0, \quad (1.43)$$

per cui anche in questa epoca l'espansione decelera e quindi $q > 0$. Notiamo che anche in questo caso se $t \rightarrow \infty$ si ha $\dot{a} \rightarrow 0$. Si può facilmente calcolare il redshift al quale la densità di energia della materia eguaglia quella della radiazione:

$$1 + z_{eq} = \frac{a_0}{a(t_{eq})} = \frac{\Omega_{mat}}{\Omega_{rad}}, \quad (1.44)$$

dove $z_{eq} \equiv z(t_{eq})$ è il redshift di equivalenza, t_{eq} è il tempo di equivalenza e $a_0 \equiv a(t_0)$ è il fattore di scala oggi. Il valore trovato da [3] è:

$$z_{eq} = 3387 \pm 21. \quad (1.45)$$

Attraverso calcoli analoghi a quelli effettuati in precedenza, si può ricavare la dipendenza temporale dell'orizzonte di particella in questo caso:

$$l_H(t) \sim t. \quad (1.46)$$

Una differenza con l'epoca della radiazione sta nel fatto che le disomogeneità nella densità di energia crescono rapidamente quando domina la materia, mentre lo fanno lentamente nell'epoca precedente: di conseguenza, l'epoca della materia è quella che vede la formazione delle strutture dell'Universo.

- **Epoca dell'energia oscura:** sostituendo la (1.17) nella (1.34) si ottiene:

$$a(t) \sim e^{H_0 t}. \quad (1.47)$$

A causa del termine $(\rho + 3p)$ nella (1.19), per $p < -\rho/3$, cioè $w < -1/3$, la gravità è repulsiva e può causare un'accelerazione positiva. È questo il caso dell'energia oscura, per cui vale $w = 0$ e quindi si ha:

$$\ddot{a} > 0. \quad (1.48)$$

L'espansione quindi accelera e vale $q < 0$. Si può notare che in questo caso se $t \rightarrow \infty$ allora $\dot{a} \rightarrow \infty$, per cui l'accelerazione, per tempi grandi, tende all'infinito. In questa epoca l'orizzonte di particella risulta costante, infatti sostituendo la (1.47) nella (1.40), si ottiene:

$$l_H(t) \sim H_0^{-1}. \quad (1.49)$$

1.4.3 Inflazione

Il modello dell'inflazione è nato come tentativo di spiegazione di due principali problemi riguardanti il modello del big bang caldo: il problema della piattezza e il problema dell'orizzonte.

Il problema della piattezza

Il problema della piattezza può essere compreso facendo le seguenti considerazioni. Sappiamo che nell'epoca della radiazione vale la (1.35), per cui si ha:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \sim t^{-1}. \quad (1.50)$$

Nell'epoca della materia vale la (1.42), per cui, analogamente, si ha:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \sim t^{-1}. \quad (1.51)$$

Di conseguenza avremo i seguenti risultati:

$$H^2 a^2 \sim t^{-1} \quad (\text{epoca della radiazione}), \quad (1.52)$$

$$H^2 a^2 \sim t^{-2/3} \quad (\text{epoca della materia}). \quad (1.53)$$

Aggiungendo un valore assoluto alla (1.23) si ottiene:

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{H^2 a^2}, \quad (1.54)$$

per cui valgono:

$$|\Omega - 1| \sim t \quad (\text{epoca della radiazione}), \quad (1.55)$$

$$|\Omega - 1| \sim t^{2/3} \quad (\text{epoca della materia}). \quad (1.56)$$

Dunque, in entrambi i casi la differenza tra Ω e 1 aumenta con il tempo. Ciò significa che la piattezza dell'Universo è una condizione di equilibrio instabile: una deviazione da essa causerebbe una curvatura sempre maggiore dell'Universo. Ciò implica che se oggi $\Omega - 1$ è abbastanza prossimo a 0, in epoche passate lo era ad una precisione molto maggiore. Le equazioni appena ricavate ovviamente valgono soltanto nell'epoca della radiazione e in quella della materia, ma possono essere utili per fornire un'idea quantitativa del problema. Ad esempio, assumiamo per semplicità che l'Universo contenga sempre soltanto radiazione, e quindi che valga sempre la (1.55). Se il tempo passato dalla nascita dell'Universo ad oggi è $t_0 \simeq 4 \times 10^{17}$ s, all'epoca dell'equivalenza tra radiazione e materia ($t \simeq 10^{12}$ s) si ha $|\Omega - 1| \leq 10^{-6}$, mentre all'epoca della nucleosintesi ($t \simeq 1$ s) si ha $|\Omega - 1| \leq 10^{-18}$. Interpretare un Ω così prossimo a 1 come una fortunata coincidenza sembra essere poco plausibile, in quanto si parla di una precisione mai incontrata prima in natura.

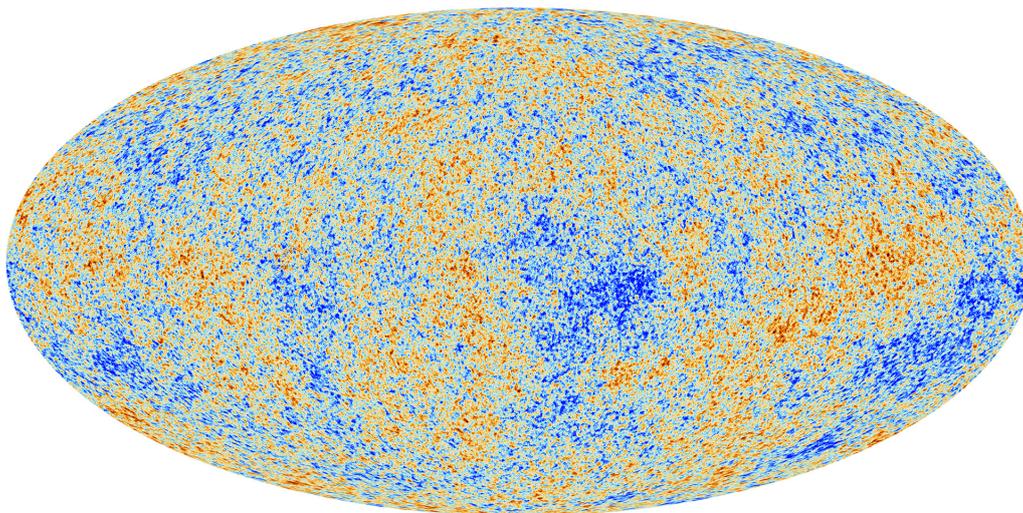


Figura 1.4: Radiazione cosmica di fondo vista dalla sonda Planck dell'ESA ([8]).

Il problema dell'orizzonte

L'altro grande problema del modello del big bang caldo, ovvero il problema dell'orizzonte, si basa sul fatto che l'Universo ha un'età finita. Per questo motivo, la luce può aver percorso soltanto una distanza finita dal momento della nascita dell'Universo. La CMB, mostrata in fig.1.4, ha la caratteristica di essere approssimativamente isotropa: la sua temperatura in ogni direzione dello spazio è sempre pari a 2.725 K, con deviazioni dell'ordine di 10^{-5} . Ciò porterebbe a pensare che, essendo tutto lo spazio alla stessa temperatura, sia stato raggiunto un equilibrio termico. Questo equilibrio, tuttavia, è presente anche tra regioni dell'Universo non causalmente connesse, cioè così distanti che la luce impiegherebbe un tempo maggiore dell'età dell'Universo per collegarle.

Universo inflazionario

Per risolvere tali questioni Alan Guth nel 1981 propose il modello dell'inflazione ([9]). Durante la fase dell'inflazione, l'Universo è sottoposto ad una espansione molto rapida, in quanto il fattore di scala subisce un'accelerazione positiva:

$$\ddot{a} > 0. \quad (1.57)$$

Ciò risolve il problema della piattezza poichè se vale la (1.57), allora si ha:

$$\frac{d}{dt}(\dot{a}) > 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(aH) > 0. \quad (1.58)$$

Da ciò segue che Ω non si sta allontanando da 1, come sembrava, ma si sta avvicinando a 1. Un'analogia efficace è quella di un palloncino che viene gonfiato molto rapidamente fino a raggiungere le dimensioni del Sole: a noi la sua superficie apparirebbe piatta. Considerando la (1.19), la (1.57) implica che:

$$\rho + 3p < 0, \quad (1.59)$$

e quindi che:

$$p < -\frac{\rho}{3}, \quad (1.60)$$

proprio come accade in un Universo dominato dall'energia oscura. Non è chiaro cosa possa causare questa espansione accelerata: non può essere radiazione o materia poichè queste non possono avere pressione negativa, ma non può nemmeno essere una costante cosmologica, dal momento che porterebbe ad un'espansione infinita nel tempo, mentre l'inflazione deve avere una fine. Si ipotizza quindi che l'inflazione sia dovuta ad un campo scalare, detto inflatone, che avrebbe causato un'espansione esponenziale dell'Universo, che si traduce in un fattore di scala che evolve come:

$$a(t) = a_f e^{H_{inf}(t-t_f)}, \quad (1.61)$$

dove t_f è il tempo alla fine dell'inflazione, $a_f \equiv a(t_f)$ è il fattore di scala calcolato al tempo t_f e H_{inf} è il parametro di Hubble durante l'inflazione, che è assunto come costante. Proprio come illustrato nella sez.1.4.2, quando il fattore di scala evolve esponenzialmente, l'orizzonte di particella risulta costante, come mostra la (1.49). Se dunque consideriamo una regione dell'Universo sufficientemente piccola da essere in grado di raggiungere l'equilibrio termico prima dell'inflazione, questa può espandersi esponenzialmente mantenendo un orizzonte di particella costante. Dunque anche il problema dell'orizzonte è risolto da questo modello, in quanto tutti i punti dell'Universo sono stati, prima dell'inflazione, abbastanza vicini da raggiungere l'equilibrio termico.

1.5 Materia oscura

La materia oscura è una tipologia di materia non barionica, che interagisce soltanto gravitazionalmente. L'appellativo *oscura* è dovuto al fatto che, non interagendo elettromagneticamente, essa non è visibile.

1.5.1 Materia oscura nelle galassie

La distribuzione di materia oscura all'interno di una galassia è misurata a partire dalle osservazioni delle velocità di rotazione di stelle lontane e nubi di gas attorno al centro della galassia stessa. Se consideriamo una galassia a spirale, come può essere la nostra Via Lattea o M31, le stelle che stanno dentro il disco centrale compiono orbite approssimativamente circolari attorno al centro. Consideriamo quindi una stella che compie orbite circolari con raggio r e velocità orbitale v attorno al centro della sua galassia. Possiamo scrivere l'espressione dell'accelerazione centripeta percepita dalla stella:

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (1.62)$$

Assumendo che la distribuzione di massa della galassia sia a simmetria sferica, se $M(r)$ è la massa contenuta in una sfera di raggio r , possiamo eguagliare l'espressione (1.62) a quella di un'accelerazione causata da una forza gravitazionale:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G_N M(r)}{r^2}, \quad (1.63)$$

da cui si ricava la velocità:

$$v = \sqrt{\frac{G_N M(r)}{r}}. \quad (1.64)$$

Dalla (1.64) si vede che ci aspettiamo che la velocità della stella sia inversamente proporzionale al suo raggio, in particolare:

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (1.65)$$

Le velocità delle galassie possono essere ricavate sperimentalmente misurando il

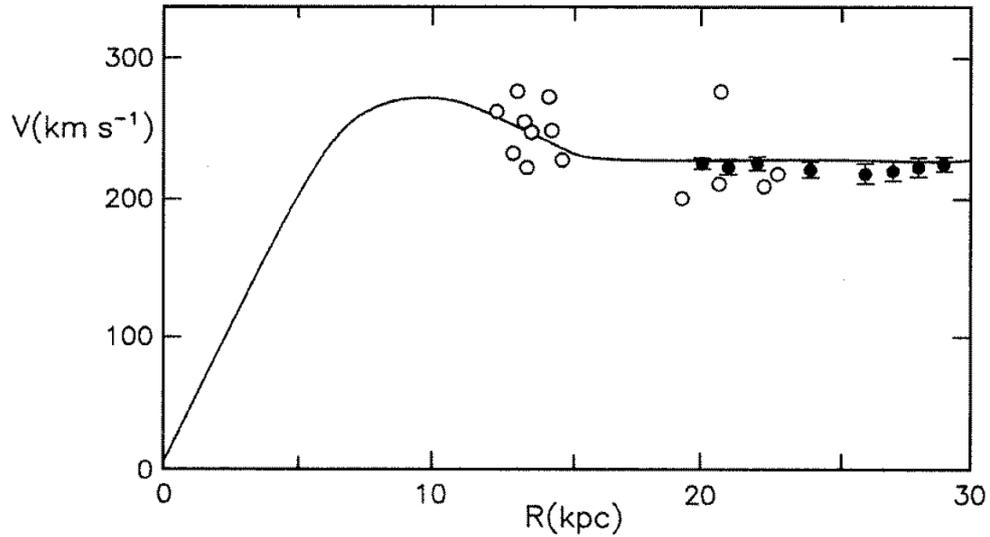


Figura 1.5: Grafico di [10] che mostra la velocità orbitale in funzione del raggio per la galassia M31. I cerchi vuoti mostrano i risultati di [11], mentre i cerchi pieni mostrano quelli di [12].

redshift z delle righe di assorbimento o emissione della luce proveniente dal disco della galassia. Le osservazioni tuttavia non confermano la caduta kepleriana che ci aspettiamo dalla (1.65), come mostrato da [11] e da [12]. Analizzando righe di emissione da regioni di gas ionizzato nella galassia M31, [11] misurò la velocità orbitale $v(r)$ fino a un raggio pari a $r = 24$ kpc. Ad un raggio maggiore, nel disco di M31 è presente idrogeno atomico che può essere rivelato tramite la riga di emissione a 21 cm. Misurando il redshift di questa riga di emissione, [12] scoprì che la velocità orbitale $v(r)$ era circa costante, con un valore di $v(r) \approx 230 \text{ km s}^{-1}$, fino a $r = 30$ kpc. Questi risultati sono mostrati in Fig.1.5. Dal momento che la velocità orbitale di stelle e gas è molto maggiore rispetto a quella che ci aspetteremmo se le uniche componenti della materia fossero quelle visibili, possiamo concludere che è presente un alone di materia oscura, la cui massa è la causa per cui non vi è una caduta kepleriana.

1.5.2 Materia oscura negli ammassi di galassie

Fritz Zwicky, astronomo svizzero, studiò la dispersione in velocità di 7 galassie nell'ammasso della Chioma ([13]) e trovò un risultato dell'ordine di 1000 km s^{-1} . Un ammasso di galassie richiede una forza gravitazionale sufficiente a rimanere gravitazionalmente in equilibrio. Dato che la materia visibile, cioè stelle e gas, non è sufficiente a garantire una tale forza, si ipotizzò che l'ammasso potesse contenere una determinata quantità di “dunkle materie”, tradotto come materia oscura. Consideriamo quindi un ammasso contenente N galassie, ognuna di esse approssimabile con un punto di massa m_i , situato in \vec{x}_i e con velocità $\dot{\vec{x}}_i$, con $i = 1, 2, \dots, N$. Dal momento che le galassie all'interno di un ammasso si muovono a velocità non relativistiche, possiamo effettuare una trattazione newtoniana. L'energia potenziale U del sistema è:

$$U = -\alpha \frac{G_N M^2}{r_H}, \quad (1.66)$$

dove α è un fattore adimensionale che dipende dal profilo di densità dell'ammasso (se l'ammasso fosse una sfera omogenea si avrebbe $\alpha = 3/5$), $M = \sum_i m_i$ è la massa totale dell'ammasso e r_H è il raggio di metà massa, cioè il raggio di una sfera centrata nel centro dell'ammasso contenente una massa pari a $M/2$.

L'energia cinetica T del sistema può essere scritta come:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle, \quad (1.67)$$

dove

$$\langle v^2 \rangle \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 \quad (1.68)$$

è la velocità quadratica media di tutte le galassie dell'ammasso.

Per il teorema del viriale vale:

$$U + 2T = 0. \quad (1.69)$$

Sostituendo la (1.66) e la (1.67) nella (1.69) si ottiene:

$$\frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle = \frac{\alpha}{2} \frac{G_N M^2}{r_H}, \quad (1.70)$$

da cui si ricava:

$$M = \frac{\langle v^2 \rangle r_H}{\alpha G_N}. \quad (1.71)$$

Dunque utilizzando questa espressione possiamo stimare la massa di un ammasso di galassie. Chiaramente per trovare $\langle v^2 \rangle$ e r_H è necessario eseguire alcune approssimazioni, in quanto non conosciamo con precisione tutti i parametri dell'ammasso. Se consideriamo l'ammasso della Chioma, si possono ricavare le stime seguenti ([10]):

$$\langle v^2 \rangle \simeq 2.32 \times 10^{12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}, \quad (1.72)$$

$$r_H \simeq 1.5 \text{ Mpc} \simeq 4.6 \times 10^{22} \text{ m}. \quad (1.73)$$

A questo punto possiamo ottenere una stima della massa dell'ammasso della Chioma:

$$M_{Chioma} \simeq 2 \times 10^{15} M_{\odot}. \quad (1.74)$$

Le stime per la massa delle stelle e per quella del gas intergalattico all'interno di questo ammasso sono note:

$$M_{stelle} \simeq 3 \times 10^{13} M_{\odot}, \quad (1.75)$$

$$M_{gas} \simeq 2 \times 10^{14} M_{\odot}. \quad (1.76)$$

Dunque, circa l'1.5% della massa totale dell'ammasso della Chioma è costituita da stelle, circa il 10% è costituita da gas, mentre il restante 88.5% è costituito da materia oscura.

1.5.3 Cos'è la materia oscura?

Come già accennato, circa il 16% della materia all'interno dell'Universo è costituita da materia ordinaria, mentre il restante 84% è costituito da materia oscura. All'interno della comunità scientifica sono state proposte numerose ipotesi riguardo la natura di questa materia non barionica. Una particella non barionica di cui conosciamo l'esistenza è il neutrino, che sente soltanto l'interazione debole e quella gravitazionale. In fisica delle particelle, all'interno del Modello Standard (MS), si assume che il neutrino abbia massa nulla, tuttavia esperimenti recenti hanno mostrato che in realtà non è così. È stata calcolata la densità di numero di ognuno dei tre tipi di neutrino ed è risultata essere circa 3/11 rispetto a quella dei fotoni della CMB:

$$n_{\nu} = 3 \cdot \frac{3}{11} n_{\gamma} \simeq 3.36 \times 10^8 \text{ m}^{-3}. \quad (1.77)$$

Di conseguenza, se tutta la materia non barionica dell'Universo fosse costituita da neutrini, la loro massa media dovrebbe essere:

$$m_{\nu} = \frac{\Omega_{DM} \rho_c}{n_{\nu}} \approx 4 \text{ eV}. \quad (1.78)$$

Negli ultimi anni molti esperimenti (KamLAND, MINOS, RENO) hanno studiato i neutrini attraverso il fenomeno dell'oscillazione del neutrino. Esistono infatti tre tipi di neutrino: il neutrino elettronico ν_e , il neutrino muonico ν_{μ} e il neutrino tauonico ν_{τ} . L'oscillazione del neutrino consiste nel fatto che un neutrino di un determinato tipo possa trasformarsi in un neutrino di un tipo diverso con il passare del tempo. Ciò si traduce nel fatto che vi siano state misure precise sulla differenza di massa al quadrato dei tipi di neutrino e rivela che almeno due dei tre tipi di neutrino sono massivi, con una massa minima di circa 0.05 eV ([14]). Tuttavia, gli esperimenti sull'oscillazione del neutrino forniscono informazioni soltanto sulla differenza di massa al quadrato, ma non riescono a misurare la massa assoluta del neutrino. Negli ultimi anni sono state ricavate delle stime sul limite superiore della somma delle masse dei tipi di neutrino $\sum m_{\nu}$: ad esempio secondo [15] si ha $\sum m_{\nu} < 0.111 \text{ eV}$, a un livello di confidenza del 95%, mentre secondo [3] si ha $\sum m_{\nu} < 0.12 \text{ eV}$, a un livello di confidenza del 95%. Questi valori sono troppo piccoli rispetto a quello

richiesto dalla (1.78). Ciò significa che i neutrini non sono abbastanza massivi per poter costituire tutta la materia oscura dell'Universo.

A causa di queste considerazioni è stato abbandonato il paradigma della hot dark matter, cioè materia oscura calda, per cui si intendono particelle di materia oscura relativistiche al disaccoppiamento, come i neutrini, mentre è stato abbracciato il modello della cold dark matter, ovvero la materia oscura fredda, con velocità non relativistiche al disaccoppiamento. Non si sa ancora cosa possa costituire questa materia oscura fredda, ma l'ipotesi più accreditata porta alle WIMPs (Weakly Interactive Massive Particles), che sono particelle puramente teoriche e mai osservate che interagirebbero soltanto debolmente e gravitazionalmente e che sarebbero dotate di grande massa.

Come alternativa a queste particelle teoriche, si ritiene che possa essere necessaria anche una modifica della teoria attuale della gravità.

1.6 Energia oscura

Capire quale sia la causa dell'accelerazione cosmica rappresenta uno dei problemi più importanti della fisica moderna. L'ipotesi più convincente sostiene che essa sia causata dall'energia oscura, definita come la componente dell'Universo con pressione negativa e gravità repulsiva, la cui natura fisica è oggetto di dibattito all'interno della comunità scientifica. Ipotesi alternative propongono invece che l'accelerazione cosmica non sia altro che la manifestazione del fatto che la teoria della gravità che conosciamo non sia sufficientemente accurata e che quindi vi sia nuova fisica gravitazionale.

1.6.1 Energia del vuoto

L'interpretazione più semplice e plausibile dell'energia oscura, escludendo quella che la vede come una mera costante, è rappresentata dall'energia del vuoto, che non è altro che un'energia che omogeneamente riempie tutto lo spazio, anche quando è privo di materia; questo tipo di energia è legato alle fluttuazioni quantistiche, che causano una continua creazione e annichilazione di coppie di particelle e antiparticelle. Il tensore energia-impulso del vuoto deve essere della forma:

$$T^{\mu\nu} = \rho_{vac} g^{\mu\nu}. \quad (1.79)$$

Dato che valgono $T^{\mu}_{\nu} = diag(-\rho, p, p, p)$ e $g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$, dove δ^{μ}_{ν} è il delta di Kronecker, si ha:

$$\rho_{vac} = -p_{vac}, \quad (1.80)$$

per cui l'energia del vuoto è matematicamente equivalente ad una costante cosmologica.

Come già visto oggi si ha $\Omega \simeq 1$ e quindi la densità di energia media dell'Universo è la densità critica: $\rho \simeq \rho_c \simeq 10^{-29} \text{ g/cm}^3 \simeq 10^{-47} \text{ GeV}^4$. Il problema è che secondo la teoria la densità di energia del vuoto dovrebbe essere molto maggiore rispetto a questa. Per fornire un'idea del problema è possibile effettuare una stima, ancorché molto approssimativa e qualitativa, della densità di energia attesa dal punto di vista

teorico. Sommando le energie di punto zero dei modi normali di campi quantistici di massa m fino a un numero d'onda di cut-off $k_{max} \gg m$, si ottiene una densità di energia (con $c = \hbar = 1$) pari a:

$$\rho_{vac} = \int_0^{k_{max}} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \simeq \frac{k_{max}^4}{16\pi^2}. \quad (1.81)$$

Se il cut-off è la scala di Planck, quindi $k_{max} \approx 10^{19} \text{GeV}$, dove ci aspettiamo che la relatività generale smetta di essere accurata, si ottiene una densità di energia di 120 ordini di grandezza superiore rispetto alla densità critica:

$$\rho_{vac} \approx 10^{73} \text{GeV}^4. \quad (1.82)$$

Questo problema è noto come il problema della costante cosmologica ([16]).

Un altro tentativo di stima della densità di energia del vuoto coinvolge la supersimmetria (SUSY), teoria che sostiene che ad ogni fermione e ad ogni bosone corrisponda un partner supersimmetrico costituito rispettivamente da un bosone e un fermione di uguale massa: in questo modo i contributi di punto zero di fermioni e bosoni alla ρ_{vac} si annullerebbero. Se assumiamo che la supersimmetria si rompa ad una scala di massa M , ci aspettiamo che si generi una densità di energia del vuoto, dovuta al fatto che non si cancellano tutti i termini, pari a $\rho_{vac} \sim M^4$. Le predizioni attuali portano ad una stima di $M \sim 1 \text{TeV}$ e quindi una discrepanza di circa 60 ordini di grandezza rispetto alle osservazioni (contro i 120 ordini di grandezza di differenza della prima stima effettuata). Tuttavia, almeno fino ad oggi, nessun partner supersimmetrico è mai stato osservato.

Un ultimo approccio si basa sull'ipotesi che l'ordine di grandezza dell'energia del vuoto possa variare casualmente all'interno di regioni diverse dell'Universo: noi osserviamo $\rho_{vac} = \rho_c$ poichè un valore più grande non permetterebbe la formazione delle galassie (assumendo che tutti gli altri parametri cosmologici siano fissi).

1.6.2 Campi scalari

Introducendo un nuovo grado di libertà, un campo scalare ϕ , l'energia del vuoto, che fino ad ora avevamo trattato come una costante, può diventare dinamica. Per un campo scalare ϕ , il tensore energia-impulso è quello di un fluido perfetto, con:

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (1.83)$$

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi), \quad (1.84)$$

dove si assume che ϕ sia spazialmente omogeneo, cioè $\phi(\vec{x}, t) = \phi(t)$, $\frac{\dot{\phi}^2}{2}$ è l'energia cinetica e $V(\phi)$ è l'energia potenziale. Dunque vale la (1.12) e possiamo scrivere:

$$w = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} = \frac{-1 + \frac{\dot{\phi}^2}{2V}}{1 + \frac{\dot{\phi}^2}{2V}}. \quad (1.85)$$

Vediamo che se il campo scalare evolve lentamente, cioè se $\frac{\dot{\phi}^2}{2V} \ll 1$, allora si ha

$$w \approx -1, \quad (1.86)$$

e il campo scalare si comporta come un'energia del vuoto che varia molto lentamente, con $\rho_{vac} \simeq V[\phi(t)]$. In generale, dalla (1.85), w può assumere qualsiasi valore compreso tra -1 (evolve molto lentamente) e 1 (evolve molto velocemente) e varia col tempo.

I modelli di campi scalari di energia oscura tuttavia non risolvono il problema della costante cosmologica: assumono semplicemente che il valore minimo di $V[\phi(t)]$ sia molto piccolo o pari a zero. L'accelerazione cosmica sarebbe quindi dovuta al fatto che l'Universo non ha ancora raggiunto il suo vero stato di vuoto, per ragioni dinamiche.

1.6.3 Gravità modificata

L'accelerazione cosmica potrebbe rappresentare una manifestazione di nuova fisica gravitazionale, che va oltre la relatività generale. Il cambiamento principale che si può applicare alla teoria attuale è quello di cercare una nuova versione delle equazioni di Friedmann che governano l'evoluzione di $a(t)$. Dato che la cosmologia standard funziona molto bene a grandi z (ci si riferisce alla nucleosintesi primordiale, all'anisotropia della CMB e alla formazione delle strutture) le nuove equazioni di Friedmann devono risultare uguali a quelle della relatività generale per $z \gg 1$. Vi sono numerosi modelli che propongono versioni rivisitate delle equazioni della relatività generale, come quello di [17].

1.6.4 Modelli di Universo non omogenei

Invece che modificare le equazioni di Einstein, un'ultima possibilità consiste nel lasciar cadere l'assunzione che l'Universo sia spazialmente omogeneo a grandi scale. È stato infatti mostrato ([18]) che gli effetti gravitazionali non lineari delle perturbazioni spaziali di densità, quando mediati su grandi scale, possono generare caratteristiche molto simili a quelle di un Universo omogeneo in espansione accelerata. Ciò implicherebbe che non vi sia più bisogno né dell'energia oscura, né della gravità modificata. Questi modelli di cosmologie non omogenee, descritti da Lemaître, Tolman e Bondi, prevedono, per essere consistenti con le osservazioni riguardanti le SNe e l'isotropia della CMB, che la Via Lattea sia vicina al centro di una regione approssimativamente sferica con una densità più bassa rispetto a quella media ([19]). La comunità scientifica rimane tuttavia piuttosto scettica su questo tipo di modelli.

1.6.5 Descrivere l'energia oscura

Il fatto che non vi sia un unico modello che spieghi l'accelerazione cosmica implica che la connessione tra la teoria e le osservazioni sia tutt'altro che semplice da trovare.

Il parametro w , essendo il rapporto tra la pressione e la densità di energia, rappresenta un'utile descrizione fenomenologica per quanto riguarda l'energia oscura. Tuttavia, dato che w non è una funzione del redshift z , se l'accelerazione cosmica

non è dovuta all'energia oscura, ma a nuova fisica gravitazionale, una descrizione in termini di w perde di senso. Tralasciando quest'ultimo caso, la parametrizzazione più semplice per l'energia oscura è data da $w = \text{cost}$. Ciò descrive l'energia del vuoto, per cui si ha $w = -1$, e insieme a Ω_{DE} rappresenta una descrizione a due parametri (si assume la piattezza dell'Universo) dell'energia oscura. Ciononostante, non è una buona descrizione per modelli di campi scalari e di gravità modificata.

È stata proposta più di una descrizione a due parametri di w : a basso z sono essenzialmente tutte equivalenti, mentre per alto z alcune prevedono comportamenti non consistenti, come $w \ll -1$ o $w \gg 1$. La parametrizzazione proposta da [20] evita questi problemi:

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a) = w_0 + \frac{w_a z}{1 + z}, \quad (1.87)$$

dove w_0 e w_a sono appunto i due parametri citati.

Le descrizioni a due parametri di $w(z)$ lineari nei parametri, come quella appena vista, implicano l'esistenza di un redshift di "pivot" z_p , in corrispondenza del quale le misure dei due parametri non sono correlate e l'errore Δw in $w_p \equiv w(z_p)$ raggiunge un minimo. In fig.1.6 si nota come, utilizzando determinati parametri cosmologici, si ottenga un redshift di "pivot" di $z_p \simeq 0.3$, in corrispondenza del quale Δw ha un minimo.

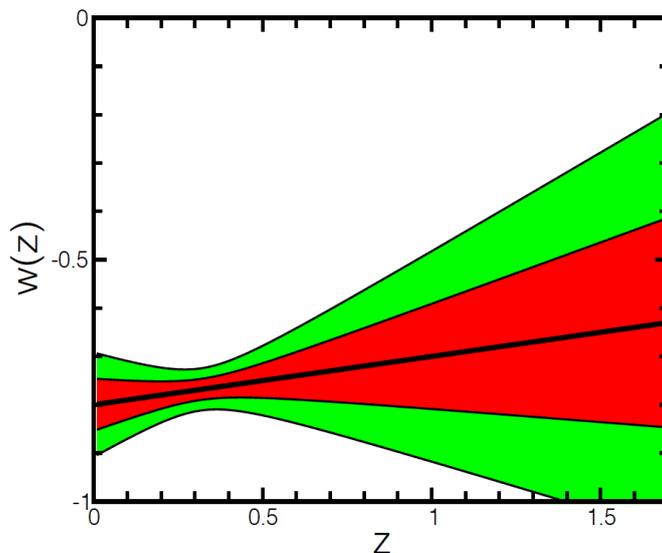


Figura 1.6: Grafico di [7] che mostra un esempio di vincoli previsti per $w(z)$, assumendo una parametrizzazione del tipo $w(z) = w_0 + w' z$. Il redshift di "pivot" è $z_p \simeq 0.3$.

Capitolo 2

Osservare l'Universo

Un modello cosmologico è una rappresentazione concettuale che, attraverso un opportuno formalismo matematico, permette di descrivere l'Universo. Nel contesto del modello Λ CDM hanno un ruolo essenziale determinati parametri, detti parametri cosmologici, i quali, per il momento, non possono essere predetti dal modello stesso e pertanto sono derivati dalle osservazioni. Di conseguenza misurare questi parametri cosmologici ad una precisione sempre maggiore risulta estremamente importante. Effettuare delle misure in ambito cosmologico non è mai semplice, in quanto si parla di oggetti a distanze e dimensioni enormemente diverse da quelle a cui siamo abituati sulla Terra. Tuttavia vi sono numerose strategie sperimentali che permettono di ricavare dei vincoli per i valori dei parametri cosmologici e quindi di aumentare la nostra conoscenza sull'Universo.

2.1 Alcune grandezze astronomiche

Prima di procedere ad illustrare le tecniche attraverso cui si possono vincolare i parametri cosmologici, è necessario introdurre alcuni concetti rilevanti per le osservazioni astronomiche. L'energia E emessa da un elemento di superficie dA di una sorgente astronomica nell'unità di tempo, nella banda di frequenze $d\nu$, all'interno dell'angolo solido $d\omega$ è definita come:

$$dE = I_\nu \cos(\theta) dA d\omega dt, \quad (2.1)$$

dove θ è l'angolo compreso tra il vettore \hat{n} normale all'elemento di superficie dA e la direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica, mentre I_ν è detta intensità monocromatica. Integrando l'intensità monocromatica su tutte le frequenze si ottiene l'intensità totale I :

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu. \quad (2.2)$$

È possibile definire il flusso monocromatico F_ν , integrando la I_ν su tutte le direzioni:

$$F_\nu = \int_{\Delta\omega} I_\nu \cos(\theta) d\omega. \quad (2.3)$$

Il flusso totale F si ottiene integrando F_ν su tutte le frequenze:

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu = \int_{\Delta\omega} I \cos(\theta) d\omega. \quad (2.4)$$

Se la radiazione emessa dalla sorgente è isotropa, cioè se I non dipende dall'angolo di emissione, si ha:

$$F = I \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi = 0, \quad (2.5)$$

dal momento che la radiazione entrante rispetto all'elemento di superficie dA è uguale a quella uscente. Se però consideriamo soltanto la radiazione uscente (quella con lo stesso segno di \hat{n}) si ha:

$$F = I \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi = \pi I. \quad (2.6)$$

La luminosità monocromatica L_ν è definita come l'integrale del flusso monocromatico su tutta la superficie della sorgente:

$$L_\nu = \int_A F_\nu dA. \quad (2.7)$$

La luminosità totale L nella banda di frequenze $\Delta\nu$ è data quindi da:

$$L = \int_{\Delta\nu} L_\nu d\nu, \quad (2.8)$$

ed è una quantità intrinseca della sorgente, indipendente dalla distanza o dall'angolo di vista. Per sorgenti sferiche e isotrope vale:

$$L = 4\pi r^2 F, \quad (2.9)$$

dove r è il raggio della sorgente sferica.

A partire dal flusso, si definisce la magnitudine apparente m di una sorgente luminosa:

$$m = -2.5 \log_{10} \frac{F}{F_0}, \quad (2.10)$$

dove F_0 è il flusso di un oggetto di riferimento per cui si impone $m = 0$: tipicamente si usa la stella Vega. A causa del segno negativo nella (2.10), il flusso è inversamente proporzionale alla sua magnitudine. Si definisce poi magnitudine assoluta M la magnitudine apparente che avrebbe un oggetto se osservato a una distanza di 10 pc:

$$M = -2.5 \log_{10} \frac{L}{L_0}, \quad (2.11)$$

dove $L_0 = 78.7 L_\odot$ è la luminosità di un oggetto che produce un flusso pari a F_0 se visto a una distanza di 10 pc. La differenza tra magnitudine apparente e assoluta definisce il modulo di distanza μ :

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right), \quad (2.12)$$

dove d_L è la distanza di luminosità della sorgente, espressa in pc. La distanza di luminosità può essere espressa come:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = (1+z)r(z), \quad (2.13)$$

dove $r(z)$ è la distanza comovente rispetto ad un oggetto a redshift z :

$$r(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.14)$$

Possiamo quindi sostituire la (2.13) nella (2.12):

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{(1+z)r(z)}{\text{pc}} \right) - 5. \quad (2.15)$$

Attraverso oggetti con magnitudine fissa, detti candele standard, è possibile ricavare dei vincoli per i parametri cosmologici; inoltre questa relazione tra magnitudini e redshift ci permette di ottenere informazioni riguardo alla storia dell'espansione dell'Universo.

Possiamo espandere il fattore di scala intorno al suo valore attuale, cioè $t = t_0$:

$$a(t) = 1 + H_0(t - t_0) - q_0 H_0^2 \frac{(t - t_0)^2}{2} + \dots \quad (2.16)$$

e di conseguenza si ottiene:

$$H_0 d_L = z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \quad (2.17)$$

Nonostante queste espansioni valgano soltanto per $z \ll 1$, la (2.17) mostra come il primo termine rappresenti l'espansione lineare di Hubble, mentre il secondo rappresenti un'eventuale accelerazione o decelerazione, in maniera dipendente dal segno di q_0 .

Un'altra misura di distanza utile in astronomia è la distanza di diametro angolare d_A . Supponendo di avere un righello standard, cioè un oggetto di cui è nota la lunghezza intrinseca l , se l'ampiezza angolare misurata è $\delta\theta$, la distanza di diametro angolare è definita come:

$$d_A \equiv \frac{l}{\delta\theta} = \frac{r(z)}{(1+z)}. \quad (2.18)$$

La relazione tra la distanza di luminosità e la distanza di diametro angolare è la seguente:

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (2.19)$$

Così come le candele standard, i righelli standard sono estremamente utili per la nostra conoscenza della storia dell'espansione dell'Universo.

2.2 Supernovae

Le supernovae (SNe) sono stelle in fase esplosiva, cioè agli stadi finali dell'evoluzione stellare. Queste esplosioni liberano una quantità enorme di energia, che può raggiungere i 10^{52} erg, e hanno una durata limitata, dell'ordine di settimane o mesi. Vi sono due diversi tipi di supernovae: le supernovae di tipo I (SNe I) e le supernovae di tipo II (SNe II). Dal punto di vista osservativo, la differenza tra le SNe I e le SNe II sta nel fatto che nello spettro delle prime manca la riga di assorbimento dell'idrogeno, mentre in quello delle seconde è presente.

Le SNe II si originano da stelle giovani molto massive, con $M \gtrsim 8 M_{\odot}$, il cui nucleo collassa generando una grande esplosione. L'energia irradiata da una stella infatti viene prodotta dalle reazioni termonucleari che avvengono al suo interno: inizialmente nel nucleo viene bruciato l'idrogeno, nella cosiddetta fase della sequenza principale, in seguito viene bruciato l'elio e, continuando così, ogni elemento successivo, fino ad arrivare alla formazione del ^{56}Fe , che rappresenta l'ultima reazione esoenergetica. Il ferro non può quindi essere bruciato, ma si ha la reazione di fotodisintegrazione:



dove γ indica un fotone con energia dell'ordine del MeV e n indica un neutrone. Dal momento che l'assorbimento dei fotoni è endotermico, si ha un'enorme caduta di pressione e quindi un collasso del nucleo della stella, che raggiunge densità altissime. Il collasso del nucleo, che può avvenire anche in altri modi, come per superamento della massa di Chandrasekhar o per cattura elettronica, causa l'esplosione e la conseguente formazione di una stella di neutroni o di un buco nero. Le curve di luce delle SNe II hanno un andamento piuttosto irregolare, in quanto circa un centinaio di giorni dopo il picco, la diminuzione di luminosità subisce un rallentamento.

Le SNe I nascono invece da stelle vecchie poco massive, con $M \lesssim 4 M_{\odot}$. Possono essere suddivise in SNe Ia, Ib e Ic: le ultime due tipologie sono molto simili alle SN II in quanto l'esplosione è causata dal collasso del nucleo, mentre per la prima l'esplosione è dovuta all'accrescimento di una nana bianca. Tralasciando le SNe Ib e Ic, infatti, le SNe Ia, che possono essere considerate candele standard, sono esplosioni che avvengono tipicamente in un sistema binario, formato da una stella compatta, una nana bianca, e da una stella che si trova in una fase avanzata della sua evoluzione, come può essere una gigante rossa. Dato che la nana bianca è una stella estremamente compatta, con un'altissima densità, attira gravitazionalmente massa dalla stella compagna e quindi accresce. Quando la nana bianca supera il limite di Chandrasekhar di $1.44 M_{\odot}$, oltre la quale la pressione degli elettroni degenerati non supporta più la gravità della stella, si ha un collasso che genera l'esplosione. Le SNe Ia sono quelle che raggiungono una luminosità maggiore e dopo il picco subiscono una caduta molto regolare. Le curve di luce delle SN Ia sono dovute ai decadimenti del ^{56}Ni inizialmente e del ^{56}Co in seguito. Il picco di luminosità è determinato dalla massa di ^{56}Ni prodotto nell'esplosione e ci si aspetta che, se la nana bianca è completamente bruciata, tale massa corrisponda a $M \sim 0.6 M_{\odot}$. Dato che, al loro picco, le SN Ia sono luminose circa quanto una tipica galassia, sono osservabili anche a grandi distanze: per questo motivo ricoprono un ruolo di estrema importanza per quanto riguarda le misure cosmologiche. In realtà le SN Ia non sono

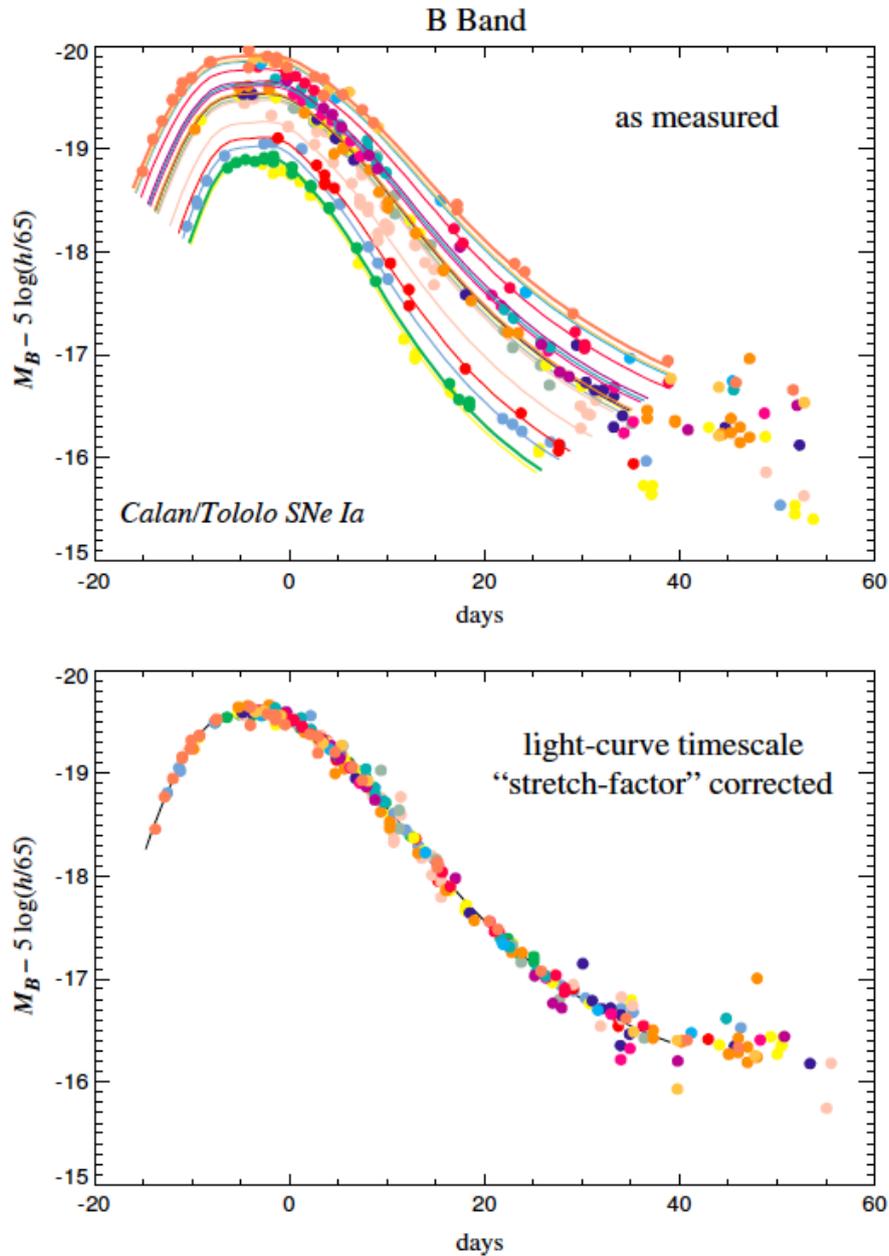


Figura 2.1: *In alto*: curve di luce nella banda B per SNe Ia studiate da [21]. Si nota una dispersione nella luminosità intrinseca del picco di ~ 0.3 mag. *In basso*: dopo la correzione di [22], si nota una dispersione nella luminosità intrinseca di ~ 0.15 mag. Grafici di [23].

intrinsecamente candele standard. Tuttavia, il lavoro di [22] ha mostrato che le SN Ia con luminosità intrinseca maggiore hanno un declino più lento: applicando questa correzione, come mostra la fig.2.1, le SN Ia diventano candele standard a tutti gli effetti, con una dispersione in luminosità molto piccola. Vincoli sui parametri cosmologici possono essere ricavati confrontando le distanze di SNe Ia a bassi e alti redshift. Le problematiche principali che si presentano in questo tipo di misure sono

legate all'estinzione nella galassia ospite e all'incertezza sui colori intrinseci delle SNe Ia.

Come già anticipato, la prima evidenza dell'accelerazione cosmica è proprio dovuta allo studio di SNe Ia da parte di [5] e [6], i cui risultati sono mostrati in fig.2.2. Questi due team di ricerca, in maniera indipendente, hanno misurato alcuni parametri riguardanti SN Ia a distanze mai raggiunte prima: entrambi hanno scoperto che le SNe a questi redshift sono ~ 0.25 mag più fioche di quanto ci si aspettasse in un Universo in decelerazione. Da ciò hanno dedotto che l'espansione dell'Universo, negli ultimi 5 Gyr, ha iniziato ad accelerare. Questi risultati, se analizzati assumendo un Universo contenente materia e costante cosmologica, mostrano che $\Omega_\Lambda > 0$ con un intervallo di confidenza maggiore del 99%.

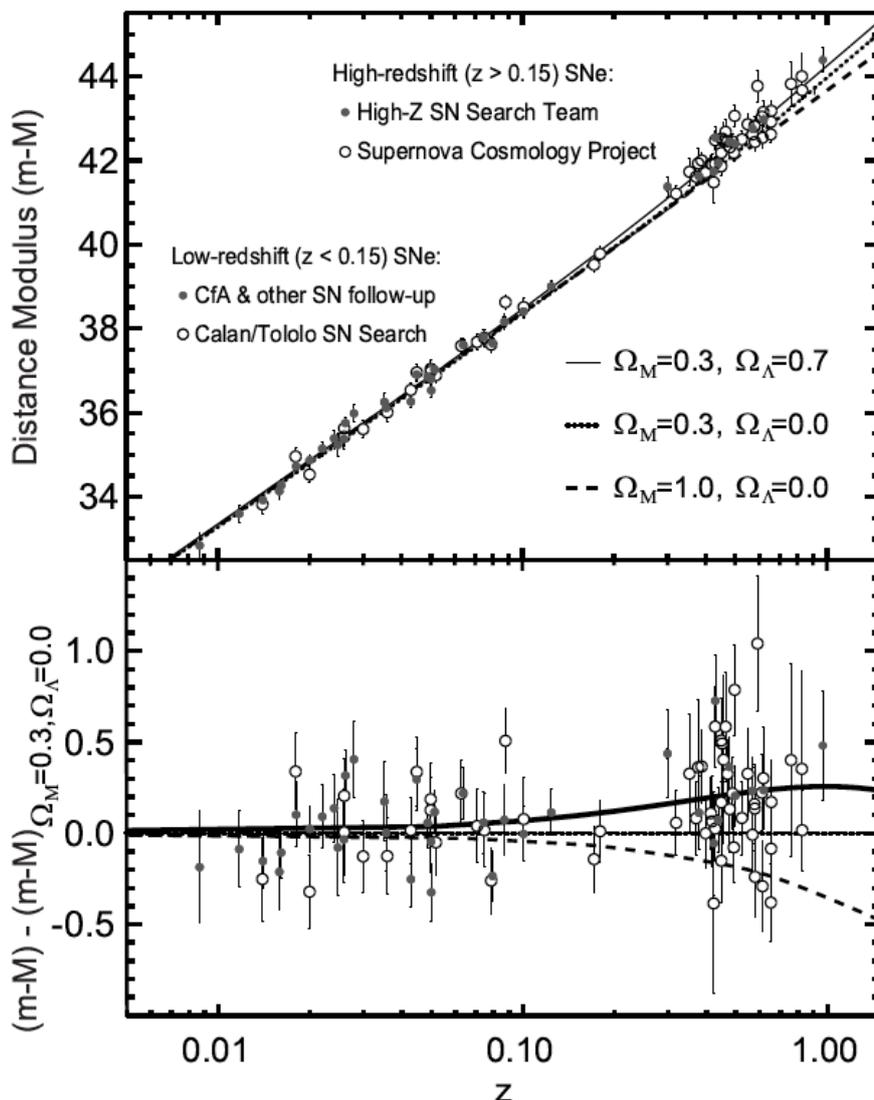


Figura 2.2: Modulo di distanza in funzione del redshift per SNe Ia lontane dall'High-Z SN Search Team ([5]) e dal Supernova Cosmology Project ([6]). Il pannello inferiore mostra la differenza tra i dati e i valori attesi per un Universo aperto con $\Omega_M = 0.3$. Immagine di [7].

2.3 Ammassi di galassie

Gli ammassi di galassie sono strutture che possono contenere da un centinaio a un migliaio di galassie e hanno una massa dell'ordine di $10^{14} - 10^{15} M_{\odot}$. Si possono distinguere gli ammassi irregolari, con una bassa densità e una struttura disordinata, e gli ammassi regolari, più compatti e addensati verso il centro. Le osservazioni mostrano che negli ammassi irregolari prevalgono le galassie a spirale, mentre in quelli regolari prevalgono le galassie ellittiche. Tra gli ammassi di galassie più vicini a noi vi sono l'ammasso della Vergine, un ammasso irregolare il cui centro dista circa 15 Mpc, mostrato in fig.2.3, e l'ammasso della Chioma, un ammasso regolare distante circa 90 Mpc, già citato nella sez.1.5 e mostrato in fig.2.4.



Figura 2.3: Ammasso della Vergine, immagine di [24].



Figura 2.4: Ammasso della Chioma, immagine di [25].

Gli ammassi di galassie sono sorgenti termiche di raggi X prodotti, attraverso processi di bremsstrahlung, dal gas intergalattico caldo. Tale gas negli ammassi irregolari ha temperature di circa 10^7 K, con un'emissione concentrata intorno alle singole galassie, mentre negli ammassi regolari raggiunge temperature di circa 10^8 K, e l'emissione è distribuita su tutta la struttura. Il fatto che negli ammassi regolari il gas sia più caldo è dovuto alla maggiore forza di gravità a cui è sottoposto: il gas è compresso, pertanto la sua temperatura aumenta.

Su grandi scale, la distribuzione degli ammassi di galassie è determinata dall'evoluzione degli aloni di materia oscura. Durante la formazione delle galassie, infatti, la temperatura della materia barionica non era sufficientemente bassa da permettere il collasso gravitazionale: il fatto che, nonostante ciò, le galassie si siano formate può essere spiegato assumendo che fossero già presenti degli aloni di materia oscura che, interagendo gravitazionalmente, hanno permesso tale collasso. La distribuzione degli aloni di materia oscura, così come la loro massa o densità, è studiata attraverso simulazioni a N corpi.

Nel contesto del modello Λ CDM, studiando, attraverso simulazioni numeriche, la distribuzione degli ammassi di galassie in funzione del redshift, è possibile ricavare dei vincoli per alcuni parametri cosmologici. Il numero medio N di ammassi con massa maggiore di una massa limite M_{min} a redshift $z \pm dz/2$ osservato in un angolo solido $d\Omega$ è dato da ([26]):

$$\frac{dN(z)}{dzd\Omega} = \frac{dV(z)}{dzd\Omega} \int_{M_{min}(z)}^{\infty} dM \frac{dn}{dM}, \quad (2.21)$$

dove $dV(z)/(dzd\Omega)$ è l'elemento di volume cosmologico e dn/dM è la densità di numero comovente di ammassi a redshift z con massa $M \pm dM/2$. Questa distribuzione di ammassi di galassie è misurabile e, dipendendo dai parametri cosmologici, permette di vincolarne i valori. Le incertezze sistematiche che si possono incontrare sono legate alla scelta della massa limite M_{min} e alla non altissima precisione con cui si conosce la distribuzione degli ammassi vicino a $z = 0$ (cioè vicino all'epoca attuale).

2.4 Oscillazioni acustiche barioniche

Le oscillazioni acustiche barioniche (BAO) sono oscillazioni in densità della materia barionica dell'Universo, causate da onde di densità acustiche generate da perturbazioni nel plasma primordiale. Consideriamo infatti il plasma primordiale, prima dell'epoca della ricombinazione, costituito da materia, sia oscura che barionica, e fotoni combinati in un unico fluido. A causa delle interazioni tra barioni e fotoni, che avvengono mediante scattering di Thomson, vi sono due forze che si contrappongono: la pressione che spinge verso l'esterno e la gravità che attrae verso l'interno. Queste causano delle oscillazioni e quindi l'emissione di onde acustiche sferiche, che consistono in fotoni e barioni che si allontanano con una velocità pari alla velocità del suono, mentre la materia oscura, che interagisce solo gravitazionalmente, resta ancorata alla regione da cui è stata emessa l'onda. In questa epoca primordiale, la

velocità del suono è:

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3 \left(1 + \frac{3\rho_B}{4\rho_R}\right)}}, \quad (2.22)$$

dove c è la velocità della luce (non si è assunto $c = 1$ per chiarezza), ρ_B è la densità di energia dei barioni e ρ_R è la densità di energia della radiazione. Si può notare dalla (2.22) che al disaccoppiamento tra radiazione e materia, cioè quando $\rho_B = \rho_R$, si ha:

$$c_s \simeq 0.44 c, \quad (2.23)$$

per cui la velocità del suono è quasi la metà rispetto alla velocità della luce. Quando si giunge all'epoca della ricombinazione, che secondo [3] è a $z = 1089.80 \pm 0.21$, l'Universo si è raffreddato fino a raggiungere temperature $T \sim 3000$ K, per cui i protoni possono legarsi agli elettroni per formare atomi di idrogeno neutro, che interagiscono molto debolmente con i fotoni: per questo motivo si parla di disaccoppiamento tra fotoni e materia, tra cui non vi è più interazione significativa, e di Universo trasparente. I fotoni, che non possono essere catturati dall'idrogeno neutro, possono percorrere lunghe distanze e arrivano fino a noi (CMB) a partire dal momento dell'ultima diffusione di fotoni da parte di elettroni. Quando i fotoni si disaccoppiano dalla materia viene rimossa pressione dal sistema. Noi siamo in grado di osservare le onde acustiche sferiche, ovvero oscillazioni tra regioni più dense e regioni meno dense, attraverso le anisotropie della CMB. Infatti analisi sulle fluttuazioni in temperatura della CMB mostrano serie armoniche di oscillazioni longitudinali. Possiamo scomporre ogni onda in una sovrapposizione di modi normali, ognuno dei quali con una determinata lunghezza d'onda λ . Ciò che viene osservato attraverso le anisotropie primarie è il modo fondamentale, cioè quello con λ maggiore. Dal punto di vista sperimentale, ciò che si osserva è la proiezione delle onde nel cielo, nel senso che la lunghezza d'onda λ di un particolare modo normale sottenderà un particolare angolo θ . L'orizzonte sonoro comovente r_* ([27]) è la distanza che le onde acustiche hanno percorso dal momento del big bang ($t = 0$) fino al disaccoppiamento ($t = t_{dec}$):

$$r_* = \int_0^{t_{dec}} (1+z) c_s dt. \quad (2.24)$$

Ciò che si osserva nel cielo è quindi l'angolo θ_* :

$$\theta_* = \frac{r_*}{(1+z) d_A}, \quad (2.25)$$

dove d_A è la distanza di diametro angolare.

Dato che queste anisotropie caratterizzano anche la densità di materia al momento della formazione delle galassie, ci aspettiamo di osservare un numero di coppie di galassie separate da una distanza pari a r_* molto maggiore rispetto al numero di coppie di galassie separate da lunghezze diverse. L'orizzonte sonoro è una scala di lunghezze molto importante in cosmologia, poichè è costante in coordinate comoventi. Secondo [3] vale:

$$r_* = (144.57 \pm 0.22) \text{ Mpc}. \quad (2.26)$$

Essendo un righello standard, r_* è fondamentale per ottenere vincoli sui parametri cosmologici.

2.5 Lenti gravitazionali

Il fenomeno della lente gravitazionale consiste nella deflessione della radiazione emessa da una sorgente luminosa a causa della presenza di una distribuzione di massa interposta tra sorgente e osservatore. La distribuzione di massa solitamente è una galassia o un ammasso di galassie e, incurvando lo spaziotempo, genera un effetto ottico simile a quello di una lente, distorto l'immagine della sorgente, come mostra la fig.2.5. Attraverso le perturbazioni dello spaziotempo, infatti, si ottengono informazioni sulla distribuzione di massa nell'Universo. Questo effetto gravitazionale era già noto ad Einstein ([28]) e fu proprio la sua rivelazione, effettuata nel 1919 da Eddington attraverso l'osservazione di un'eclissi solare, che portò la comunità scientifica ad accettare la teoria della relatività generale.

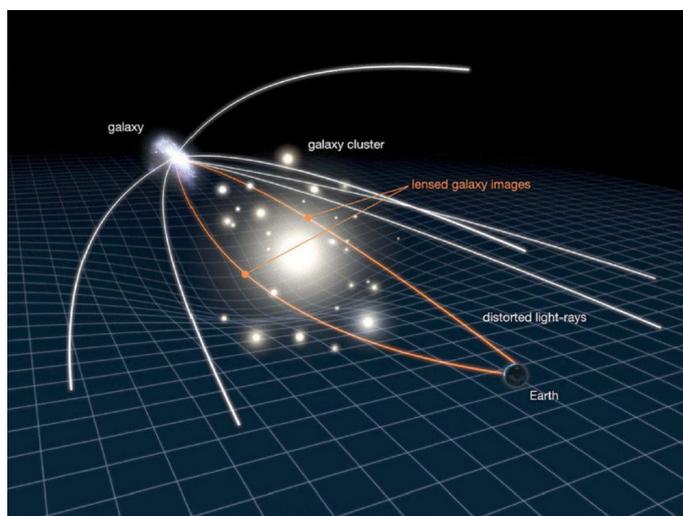


Figura 2.5: Schema di [29] sul fenomeno della lente gravitazionale. Si nota come il raggio di luce sia deflesso dalla presenza dell'ammasso di galassie.

Vi sono due tipi di lenti gravitazionali: quelle forti e quelle deboli. Le lenti gravitazionali forti si hanno quando la sorgente è fortemente modificata, come mostrato in fig.2.6. In questo caso la galassia e la lente sono poste sulla stessa linea di vista rispetto all'osservatore, per cui, assumendo una simmetria sferica per la galassia, si osservano degli archi, detti archi di Einstein, centrati nella posizione della lente. Le lenti gravitazionali deboli invece si verificano quando la distorsione dell'immagine della sorgente è piccola, tipicamente dell'ordine dell'1%.

Un esempio di utilizzo del fenomeno della lente gravitazionale è quello legato al ritardo nei tempi: due raggi di luce emessi dalla stessa sorgente allo stesso istante di tempo e poi distorti in direzioni diverse da una lente gravitazionale, tipicamente arrivano all'osservatore in tempi diversi. Questo ritardo, che può essere misurato se si ha una sorgente ad emissione variabile, dipende dal parametro di Hubble, quindi può rappresentare una strategia per la misura di H_0 .

In cosmologia l'effetto più utilizzato è quello delle lenti gravitazionali deboli, attraverso cui si può ad esempio misurare la massa di determinati ammassi di galassie, oltre che diverse statistiche. Un aspetto estremamente importante di questo



Figura 2.6: Immagine del telescopio spaziale Hubble ([30]) che mostra come l'ammasso di galassie MACSJ0138.0-2155 distorca la luce emessa dalla galassia MRG-M0138 che si trova a 10 miliardi di anni luce da noi.

fenomeno è che la funzione di distribuzione dei fotoni $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ è conservata:

$$\frac{df(\vec{x}, \vec{p}, t)}{dt} = 0, \quad (2.27)$$

dove \vec{x} è la posizione dei fotoni e \vec{p} è il loro impulso. L'intensità monocromatica I_ν vale (ponendo $\hbar = 1$):

$$I_\nu(\vec{x}, \vec{p}, t) = 4\pi\nu^3 f(\vec{x}, \vec{p}, t), \quad (2.28)$$

dove $\vec{p} = 2\pi\nu\hat{p}$ (\hat{p} è il versore che individua la direzione in cui i fotoni sono rivelati). Sapendo che $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ è conservata, segue che I_ν dipende esclusivamente dalla variazione di frequenza ν , dovuta a redshift sia gravitazionale che cosmologico o a effetto Doppler, tra l'emissione dei fotoni e la loro rivelazione. Dunque, l'intensità monocromatica I_ν osservata ad un angolo θ è uguale a quella che si osserverebbe nella posizione vera della sorgente, cioè ad un angolo θ_s , in assenza della lente:

$$I_{\text{obs}}(\theta) = I_{\text{true}}(\theta_s). \quad (2.29)$$

Le lenti gravitazionali deboli possono essere utilizzate per studiare gli effetti che hanno sui fotoni della CMB, che subiscono distorsioni nella temperatura, e sulla forma delle galassie.

2.6 Funzione di correlazione a due punti

Il fenomeno del *clustering* consiste nell'attrazione gravitazionale reciproca esercitata dalle perturbazioni di densità ed è strettamente legato alla formazione delle strut-

ture. Se $\rho(x)$ è un campo di densità continuo e $\bar{\rho}$ è una densità media, il contrasto di densità $\delta(x)$ è definito come:

$$\delta(x) \equiv \frac{\rho(x) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (2.30)$$

La funzione di correlazione a due punti $\xi(r)$ ricopre un ruolo fondamentale per studiare dal punto di vista statistico il *clustering*. La probabilità che vi sia una perturbazione di densità δ_1 entro un elemento di volume comovente dV_1 a una distanza comovente r da un'altra perturbazione di densità δ_2 entro un elemento di volume comovente dV_2 è:

$$dP_{12} = \bar{\rho}^2 [1 + \xi(r)] dV_1 dV_2, \quad (2.31)$$

dove $\xi(r)$ è la funzione di correlazione a due punti, che dipende solo dal modulo del vettore \vec{r} e non dalla sua direzione. Nel caso in cui vi fosse una distribuzione perfettamente omogenea di densità, si avrebbe:

$$dP_{12} = \bar{\rho}^2 dV_1 dV_2. \quad (2.32)$$

Di conseguenza, $\xi(r)$ rappresenta la deviazione della distribuzione di densità rispetto ad una distribuzione omogenea. Utilizzando il contrasto di densità $\delta(x)$, la funzione di correlazione a due punti è definita come:

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \frac{\langle \rho(x)\rho(x+r) \rangle - \bar{\rho}^2}{\bar{\rho}^2} \\ &= \frac{\langle [\rho(x) - \bar{\rho}] [\rho(x+r) - \bar{\rho}] \rangle}{\bar{\rho}^2} \\ &= \langle \delta(x)\delta(x+r) \rangle, \end{aligned} \quad (2.33)$$

dove le parentesi angolari indicano una media su tutti i punti x nel volume considerato.

La funzione di correlazione a due punti, dunque, fornisce informazioni sulla distribuzione di punti all'interno di un volume. In cosmologia, questi punti sono spesso delle galassie, ma possono essere anche altri oggetti astrofisici, come ammassi di galassie.

Un'altra grandezza importante per il *clustering* è lo spettro di potenza $P(k)$, il quale, per il teorema di Wiener-Khintchine, è la trasformata di Fourier della funzione di correlazione:

$$P(k) = \int \xi(r) e^{ikr} d^3r, \quad (2.34)$$

dove k è il numero d'onda del segnale.

2.6.1 Distorsioni nello spazio dei redshift

La funzione di correlazione $\xi(r)$ in realtà non dipende soltanto dal modulo del vettore \vec{r} , poichè vi sono una serie di distorsioni di carattere osservativo, dette distorsioni nello spazio dei redshift, che modificano la funzione di correlazione in maniera differente a seconda che si consideri la linea di vista o quella ad essa perpendicolare.

In cosmologia, per misurare le distanze, spesso si utilizza il redshift, da cui poi si ricava la distanza comovente attraverso la formula (2.14), che però vale se il redshift dipende soltanto dall'espansione dell'Universo, dunque se si tratta di redshift cosmologico. Il redshift osservato z_{obs} , invece, dipende anche dai moti propri delle galassie e dall'incertezza della misura ([31]):

$$z_{obs} = z_c + \frac{v_{||}}{c}(1 + z_c) + \frac{\sigma_v}{c}, \quad (2.35)$$

dove z_c è il redshift cosmologico, $v_{||}$ è la componente parallela alla linea di vista della velocità peculiare della galassia e σ_v/c è l'incertezza nella misura del redshift (è stata esplicitata la velocità della luce c per chiarezza). Il terzo termine, dovuto all'incertezza sulla misura del redshift, può essere trascurato se si dispone di cataloghi con misure di redshift molto precise. Il secondo termine, dovuto ai moti propri delle galassie, è quello che introduce le distorsioni dinamiche. Si possono distinguere lo *spazio dei redshift*, in cui il redshift cosmologico presenta il termine dovuto ai moti propri delle galassie e quindi la funzione di correlazione è distorta, e lo *spazio reale*, in cui il redshift cosmologico non è contaminato da altri termini e quindi vale la (2.14) per calcolare le distanze. In un Universo perfettamente omogeneo, la trasformazione da *spazio dei redshift* a *spazio reale* sarebbe un'identità. Tuttavia l'Universo in cui viviamo mostra delle disomogeneità che introducono delle distorsioni in questa corrispondenza.

È possibile scomporre la $\xi(r)$ lungo le direzioni parallela e perpendicolare rispetto alla linea di vista. Così facendo si ottiene la funzione di correlazione bidimensionale $\xi(r_p, \pi)$ in coordinate cartesiane, dove r_p è la separazione perpendicolare alla linea di vista e π è quella parallela. In coordinate polari, invece, la funzione di correlazione bidimensionale è $\xi(s, \mu)$, dove $s = \sqrt{r_p^2 + \pi^2}$ e $\mu = \cos(\theta)$, indicando con θ l'angolo tra il vettore \vec{s} e la linea di vista. Ci aspetteremmo, in assenza di distorsioni, delle curve di isocorrelazione circolari. Vi sono tuttavia le distorsioni dinamiche, che hanno effetti diversi a seconda della scala spaziale considerata per la separazione tra le galassie ([32]):

- a piccole scale ($r \lesssim 1 h^{-1}$ Mpc) in una struttura come un ammasso, le galassie hanno moti propri casuali, e le loro velocità causano un redshift per effetto Doppler che va a modificare il redshift cosmologico. Ciò si traduce nell'effetto detto *Fingers of God*, che consiste in una $\xi(r_p, \pi)$ allungata lungo la linea di vista;
- a grandi scale ($r \gtrsim 1 h^{-1}$ Mpc) i moti propri possono essere trascurati, mentre i moti ordinati delle galassie verso il centro dell'ammasso risultano dominanti. Ciò porta all'*effetto Kaiser*, per il quale la $\xi(r_p, \pi)$ risulta schiacciata lungo la linea di vista.

La funzione di correlazione proiettata lungo la linea di vista, $w(r_p)$, risulta indipendente dalle distorsioni dinamiche ([33]):

$$w(r_p) = 2 \int_0^{\pi_{max}} d\pi' \xi(r_p, \pi'), \quad (2.36)$$

dove l'integrale sarebbe fino all'infinito, ma si integra fino ad un valore massimo π_{max} poichè l'integrale è risolto numericamente. Se nello spazio reale la funzione di correlazione segue una legge di potenza del tipo:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}, \quad (2.37)$$

dove r_0 è un fattore di normalizzazione e γ è la pendenza, allora è possibile ottenere questi due parametri dalla relazione:

$$w(r_p) = r_p \left(\frac{r}{r_0}\right)^\gamma \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}, \quad (2.38)$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione Gamma di Eulero.

Nel regime lineare delle perturbazioni di densità, cioè quando il contrasto di densità è piccolo ($\delta(x) \ll 1$), il campo di velocità può essere determinato dal campo di densità, e l'ampiezza delle distorsioni dinamiche è proporzionale al parametro β , definito come ([34]):

$$\beta \equiv \frac{f(z)}{b(z)}, \quad (2.39)$$

dove $f(z)$ è il tasso di crescita lineare e $b(z)$ è il fattore di bias. $f(z)$ ha l'espressione:

$$f(z) = \Omega_{mat}(z)^\gamma, \quad (2.40)$$

dove $\gamma \simeq 0.545$ in relatività generale ([34]) e Ω_{mat} è il parametro di densità della materia (sia barionica che oscura). $b(z)$ è espresso come:

$$b(z) = \left\langle \sqrt{\frac{\xi(r; z)}{\xi_{DM}(r; z)}} \right\rangle, \quad (2.41)$$

dove il pedice DM indica la materia oscura e le parentesi angolari indicano una media a scale sufficientemente grandi tali per cui gli effetti non lineari possano essere trascurati. La funzione di correlazione quindi può essere espressa come:

$$\xi^{lin}(s, \mu) = \xi_0(s)P_0(\mu) + \xi_2(s)P_2(\mu) + \xi_4(s)P_4(\mu), \quad (2.42)$$

dove le funzioni $P_l(x)$ sono i polinomi di Legendre di ordine l . I multipoli della funzione di correlazione bidimensionale sono:

$$\xi_0(s) = \left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right) \xi(r), \quad (2.43)$$

$$\xi_2(s) = \left(\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2\right) [\xi(r) - \bar{\xi}(r)], \quad (2.44)$$

$$\xi_4(s) = \frac{8}{35}\beta^2 \left[\xi(r) + \frac{5}{2}\bar{\xi}(r) - \frac{7}{2}\bar{\bar{\xi}}(r)\right], \quad (2.45)$$

dove:

$$\bar{\xi}(r) = \frac{3}{r^3} \int_0^r dr' \xi(r') r'^2, \quad (2.46)$$

$$\bar{\bar{\xi}}(r) = \frac{5}{r^5} \int_0^r dr' \xi(r') r'^4. \quad (2.47)$$

2.6.2 Distorsioni geometriche

Una volta usciti dallo *spazio dei redshift* e tornati nello *spazio reale*, cioè una volta eliminate le distorsioni dinamiche, si potrebbe pensare di essere in grado di ottenere la funzione di correlazione attesa, quella con le curve di isocorrelazione circolari. Tuttavia non è così, in quanto noi non conosciamo i parametri cosmologici veri, ne abbiamo soltanto delle stime. Ciò causa le distorsioni geometriche, che modificano la funzione di correlazione. Si definisce la distanza:

$$D_V(z) = \left[(1+z)^2 d_A^2(z) \frac{z}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (2.48)$$

dove $d_A(z)$ è la distanza di diametro angolare definita in sez.2.1. [35] mostra che effettuando il cambio di variabile:

$$r \rightarrow y \equiv \frac{r}{D_V(z_m)}, \quad (2.49)$$

dove z_m è il redshift medio del catalogo, si ottiene una funzione di correlazione $\xi(y)$ che è approssimativamente indipendente dal modello cosmologico considerato. Di conseguenza, se si conoscesse la cosmologia, le distorsioni geometriche potrebbero essere eliminate dividendo ogni distanza per $D_V(z_m)$.

2.7 Missione Euclid

Euclid è una missione spaziale di classe media che fa parte del programma *Cosmic Vision* dell'ESA (European Space Agency). L'obiettivo principale della missione è quello di studiare come l'accelerazione cosmica modifichi la storia dell'espansione e la distribuzione di materia all'interno dell'Universo. Euclid infatti mapperà, coprendo un tempo cosmico superiore ai 10 miliardi di anni, milioni di galassie, studiandone la forma e il redshift attraverso i fenomeni delle lenti gravitazionali deboli e delle oscillazioni acustiche barioniche, ricavando le informazioni statistiche utilizzando il *clustering* delle galassie. L'ESA vuole infatti indagare la natura dell'accelerazione cosmica, raggiungendo un livello di conoscenza maggiore riguardo a temi importanti per la cosmologia, come l'energia oscura, la materia oscura, la gravità e le condizioni iniziali dell'Universo. Il telescopio spaziale di Euclid, mostrato in fig.2.7, verrà lanciato indicativamente a metà 2022 a bordo di un razzo Sojuz-ST o Ariane 62 partendo dal Centre spatial guyanais, situato a Kourou in Guinea francese, e sarà posizionato nel punto Lagrangiano L_2 del sistema Sole-Terra, dove resterà per 6 anni, durata prevista della missione ([36]).

Gli obiettivi scientifici primari della missione Euclid, entrando più nel dettaglio, consistono nella misura dei seguenti parametri ([38]):

- $w(z)$: assumendo la parametrizzazione rappresentata dalla (1.87) per il parametro di equazione di stato dell'energia oscura $w(z)$, si definisce Figura di Merito (*FoM*) dell'energia oscura la quantità:

$$FoM = \frac{1}{\Delta w_p \Delta w_a}, \quad (2.50)$$

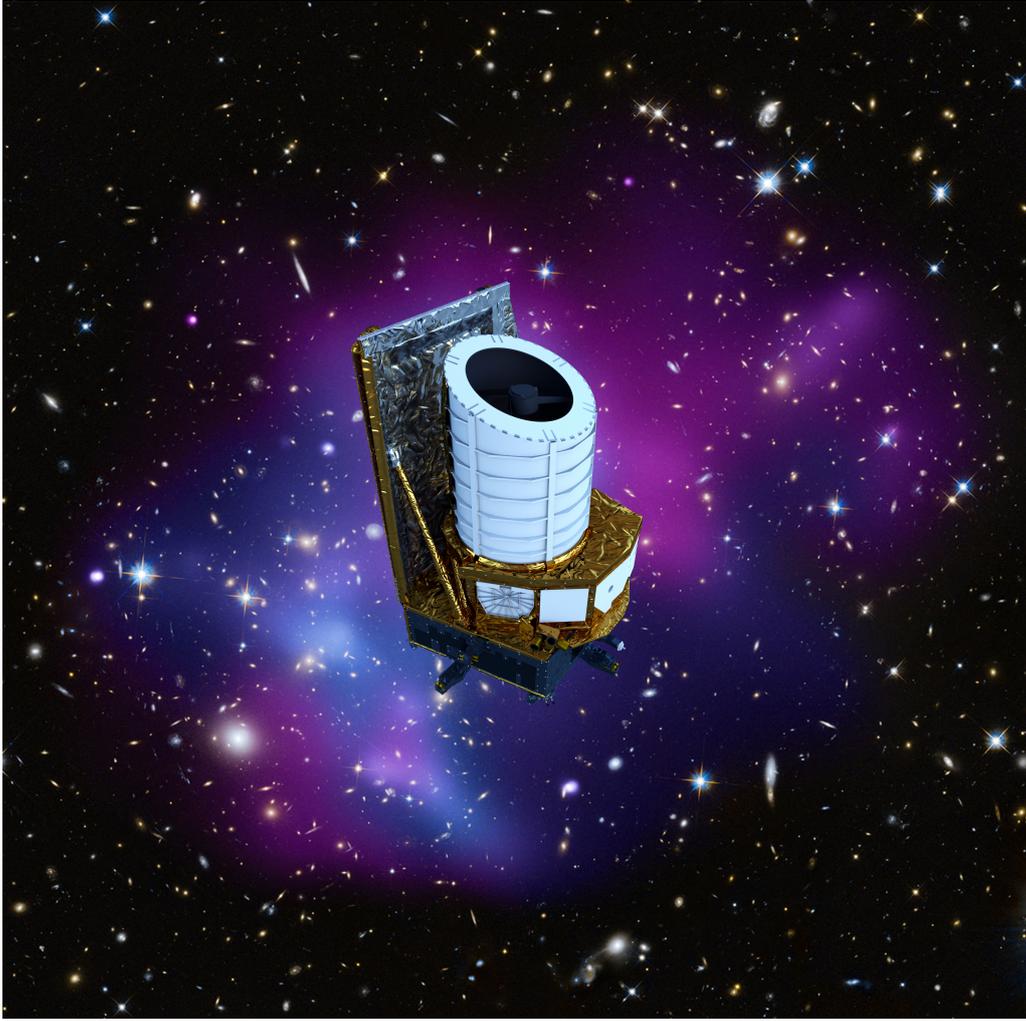


Figura 2.7: Immagine artistica del satellite di Euclid ([37]).

dove Δw_p è l'errore sul parametro di “pivot” w_p e Δw_a è l'errore sul parametro w_a . Dunque, una FoM maggiore indica una misura più precisa. [38] mostra che se i dati sono consistenti con l'interpretazione dell'energia oscura come una costante cosmologica, cioè se $w = -1$, e se si ha una $FoM \geq 400$, allora il modello di energia oscura come una costante cosmologica sarebbe favorito, rispetto ad un modello in cui w_p e w_a variano all'interno di un range, con una probabilità maggiore di 100:1. Una probabilità tale è considerata decisiva per la scelta, dal punto di vista statistico, del modello di energia oscura come una costante cosmologica, mentre una FoM minore, cioè una misura meno precisa, non consentirebbe di scegliere uno dei due modelli; r

- γ : una possibile spiegazione dell'accelerazione cosmica si basa sul fatto che la relatività generale non sia sufficientemente accurata su scale cosmologiche. Il tasso di crescita $f(z)$, definito dalla (2.41), misura l'efficienza con cui si formano le strutture nell'Universo in funzione del redshift. Il parametro γ può essere utilizzato per misurare la deviazione del modello utilizzato dalla relatività generale. Infatti, un $\gamma \neq 0.55$ sarebbe indice di un fallimento della

relatività generale. Euclid misurerà γ con un'incertezza di 0.02, testando la relatività generale ad un alto livello di precisione;

- $\sum m_\nu$: più i neutrini sono massivi, maggiore è lo smorzamento causato sulla crescita delle strutture su piccola scala: ciò lascia delle tracce nello spettro di potenza della materia. Studiando ciò, Euclid misurerà la somma delle masse dei tre tipi di neutrini, $\sum m_\nu$, ad una precisione tale da avere un errore minore di 0.03 eV. Inoltre, misurando profili di densità di aloni di materia oscura, verranno migliorati i vincoli attuali sulla sezione d'urto di autointerazione della materia oscura di una quantità pari a tre ordini di grandezza;
- f_{NL} : modelli di inflazione semplici prevedono uno spettro di potenza P_s del campo scalare delle perturbazioni iniziali che segue una legge del tipo:

$$P_s(k) \propto k^{n_s}, \quad (2.51)$$

dove k è il numero d'onda della perturbazione e n_s è detto indice spettrale. Secondo questi modelli, tale spettro di potenza è approssimativamente un invariante di scala, il che si traduce in un $n_s \simeq 1$, mentre per modelli più complicati n_s può anche dipendere dalla scala. Euclid misurerà l'indice spettrale n_s e la sua dipendenza dalla scala con una precisione simile a quella ottenuta dalla missione Planck. Combinando queste due misure indipendenti, si miglioreranno i vincoli sullo spettro di potenza delle perturbazioni iniziali di un fattore pari circa a 2 rispetto a quelli ottenuti da Planck. Il modello Λ CDM si basa sull'assunzione che il campo di perturbazioni iniziali, da cui poi si formano le strutture, sia approssimativamente gaussiano. Considerando un modello di non gaussianità primordiale (PNG), il potenziale è ([39]):

$$\Phi(x) = \phi(x) + f_{NL}[\phi(x)^2 - \langle \phi^2 \rangle], \quad (2.52)$$

dove $\phi(x)$ è un campo gaussiano, le parentesi angolari indicano il valore di aspettazione e f_{NL} è un parametro che misura l'ampiezza del termine quadratico e di conseguenza quantifica la deviazione del campo di perturbazioni iniziale da un campo gaussiano. Euclid misurerà questo parametro con una precisione tale per cui $\Delta f_{NL} \sim 2$.

Per misurare questi parametri, Euclid osserverà il cielo coprendo una superficie pari a circa 15000 deg^2 e potrà contare su un'osservazione mensile con ampiezza 20 deg^2 di due campi profondi, localizzati nei pressi del polo nord e del polo sud eclittico.

Capitolo 3

Codici per la misura della funzione di correlazione a due punti

Lo scopo di questo lavoro di Tesi è la validazione del codice per la misura della funzione di correlazione a due punti che verrà utilizzato dal team di Euclid una volta che il satellite avrà iniziato ad inviare informazioni sulla Terra. Per fare ciò sono stati effettuati, innanzitutto, dei test interni al programma. In seguito, è stato realizzato il confronto dei risultati di cinque diverse statistiche riguardanti il *clustering* delle galassie con quelli ottenuti da un programma che fa uso delle librerie CBL, descritte in sez.3.1. Sono poi stati confrontati anche i tempi di calcolo e la quantità di RAM utilizzata nei due casi.

3.1 Le librerie CosmoBolognaLib

Le librerie CBL sono librerie numeriche scritte in linguaggio C++ utili per effettuare analisi dati in ambito cosmologico. Il progetto delle CBL è nato qualche anno fa ed è in continuo aggiornamento. In questa Tesi è stata utilizzata soprattutto la classe `TwoPointCorrelation`, che permette di calcolare i vari tipi di funzione di correlazione a due punti descritti in sez.2.6.

La tecnica utilizzata per il calcolo della funzione di correlazione a due punti è la seguente. Supponiamo innanzitutto di disporre di un catalogo di N_{obj} galassie osservate. Supponiamo poi di avere un catalogo di N_{rdm} galassie distribuite omogeneamente, cioè in maniera random, tenendo conto delle varie selezioni osservative. La misura risulta tanto più precisa quanto più è grande il rapporto N_R , definito come:

$$N_R = \frac{N_{rdm}}{N_{obj}}. \quad (3.1)$$

Si definiscono $DD(r)$, le coppie di galassie appartenenti al catalogo osservato, $DR(r)$, le coppie miste, in cui una galassia appartiene al catalogo osservato e una al catalogo random, e $RR(r)$, le coppie di galassie appartenenti al catalogo random. Queste entrano poi nel calcolo della funzione di correlazione a due punti usando lo stimatore di Landy-Szalay ([40]):

$$\xi(r) = \frac{DD(r) + RR(r) - 2DR(r)}{RR(r)}. \quad (3.2)$$

Il vantaggio che offre questo stimatore è duplice: da una parte la discretezza dei cataloghi induce fluttuazioni solo al secondo ordine, dall'altra la sua varianza è quasi completamente poissoniana, quindi con un errore che dipende soltanto dalla radice del numero totale di coppie di galassie nel catalogo osservato $\sqrt{N_{DD}}$, dove $N_{DD} = N_D(N_D - 1)/2$ ([41]).

L'algoritmo utilizzato per il conteggio delle coppie è detto *chain-mesh*: invece che contare tutte le coppie di galassie, si definisce una griglia, di dimensione arbitraria, in cui ogni cella è a distanza Δr da quella adiacente. In ogni cella quindi sono memorizzati gli indici delle galassie che la occupano. Una volta definite una separazione massima r_{max} ed una separazione minima r_{min} , si contano poi soltanto le coppie di galassie con una separazione r tale per cui $r_{min} < r < r_{max}$. In questo modo si riducono significativamente i tempi di calcolo. Per una descrizione più dettagliata delle CBL si rimanda a [42].

In questa Tesi sono stati calcolati cinque diversi tipi di funzione di correlazione a due punti:

- la funzione di correlazione monodimensionale $\xi(r)$, calcolata con lo stimatore definito nella (3.2),
- la funzione di correlazione bidimensionale in coordinate cartesiane $\xi(r_p, \pi)$, che è possibile ricavare da quella monodimensionale, poichè $\xi(r_p, \pi) = \xi(\sqrt{r_p^2 + \pi^2})$,
- la funzione di correlazione proiettata $w_p(r_p)$, calcolata utilizzando la (2.36) con un $\pi_{max} = 50 h^{-1}$ Mpc,
- la funzione di correlazione bidimensionale in coordinate polari $\xi(s, \mu)$,
- i primi tre multipoli pari della funzione di correlazione $\xi_l(s)$, calcolati attraverso l'espressione:

$$\xi_l(s) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 \xi(s, \mu) P_l(\mu) d\mu, \quad (3.3)$$

dove $P_l(\mu)$ è il polinomio di Legendre di ordine l .

Gli integrali da calcolare nella (2.36) e nella (3.3) sono risolti numericamente con il metodo dei rettangoli. Tale metodo consiste nel dividere l'intervallo considerato in passi e poi nel sommare le aree di ogni rettangolo che ha come base la lunghezza di un passo e come altezza il valore della funzione nel punto medio del passo.

Le CBL sono in grado di calcolare tante altre statistiche, come la funzione di correlazione angolare o la funzione di correlazione filtrata, mentre i codici di Euclid calcolano solo le cinque appena presentate, per cui sono state considerate soltanto queste.

3.2 I codici di Euclid

Quando i dati raccolti dal satellite Euclid arriveranno sulla Terra, saranno processati nei *Science Data Centres* (SDCs), che sono centri di calcolo situati in vari siti

europei, tra cui Trieste, dotati di hardware in grado di eseguire i calcoli richiesti. Ognuno di questi SDCs dovrà poter utilizzare gli stessi codici all'interno dello stesso ambiente numerico: per questo è stato creato un ambiente chiamato EDEN (Euclid Development Environment), periodicamente aggiornato, il cui sistema operativo è CentOS7 e in cui sono installate diverse librerie scientifiche e numerosi strumenti di calcolo. Questo ambiente è implementato su una macchina virtuale, chiamata LODREEN (Local Development Environment), in modo che ogni sviluppatore possa accedere dal proprio pc ad EDEN e possa lavorare utilizzando i codici di Euclid. La piattaforma CODEEN (Common Development Environment), infine, permette agli sviluppatori di collaborare agli stessi progetti ed integrare i vari lavori svolti singolarmente.

I codici di Euclid sono organizzati in modo che vi sia un *parameter file*, in cui sono specificati i parametri del calcolo, come possono essere i cataloghi utilizzati, la statistica calcolata, r_{min} , r_{max} , e altri ancora. Vi è poi il codice, chiamato `LE3_GC_ComputeTwoPointCorrelation.cpp`, che legge i parametri dal *parameter file* ed effettivamente calcola la funzione di correlazione. Utilizzando questi codici è possibile scegliere tra tre diverse statistiche: `AUTO_1D`, che restituisce la funzione di correlazione monodimensionale $\xi(r)$, `AUTO_2DCART`, che restituisce la funzione di correlazione bidimensionale in coordinate cartesiane $\xi(r_p, \pi)$ e la funzione di correlazione proiettata $w_p(r_p)$, e `AUTO_2DPOL`, che restituisce la funzione di correlazione bidimensionale in coordinate polari $\xi(s, \mu)$ e i multipoli $\xi_l(s)$.

L'algoritmo per il conteggio delle coppie utilizzato dai codici di Euclid può essere scelto tra *linked list* e *k-d tree*. L'algoritmo *linked list* è basato su una sequenza di nodi, ognuno dei quali contiene un riferimento (*link*) al nodo successivo. Questa struttura dati consente di avere un'efficiente inserzione o rimozione degli elementi della lista da qualsiasi posizione. Alternativamente, vi è l'algoritmo *k-d tree*, che letteralmente significa albero k-dimensionale. Quest'ultimo è basato su una struttura dati per l'organizzazione di punti in uno spazio k-dimensionale che nasce dalla struttura gerarchica dell'albero binario, in cui ogni nodo ha al massimo due nodi figli ([43]).

Il calcolo delle coppie $RR(r)$ domina il costo computazionale in termini di tempo, ma il loro contributo all'errore, escludendo le scale piccole in cui le correlazioni sono maggiori, è trascurabile rispetto a quello di $DD(r)$ e $DR(r)$. Di conseguenza, contando le coppie $RR(r)$ in un sottoinsieme più piccolo rispetto all'insieme di partenza, si può ottenere un risparmio di tempo, senza subire una perdita significativa di precisione. Un modo di fare ciò è detto *split*: quando si contano le coppie $RR(r)$, si divide il catalogo random in tanti sottocataloghi contenenti lo stesso numero di oggetti del catalogo osservato e si escludono dal calcolo le coppie contenenti galassie appartenenti a sottocataloghi diversi. In questo modo, [44] ha mostrato che a scale grandi, cioè per $|\xi| < 1$, un fattore di split pari a 50 riduce i tempi di calcolo di un fattore maggiore di 10.

Capitolo 4

Validazione

Come già accennato, in questo lavoro di Tesi sono stati effettuati innanzitutto dei test interni ai codici di Euclid, mentre in seguito è stato eseguito il confronto con codici analoghi che fanno uso delle CBL. I test interni consistono nel confronto tra i due diversi algoritmi di conteggio delle coppie *linked list* e *k-d tree*, per cui è stato verificato che fornissero lo stesso risultato, e nel confronto dei tempi di calcolo variando il fattore di split. Dunque, sono state calcolate la funzione di correlazione monodimensionale $\xi(r)$, la funzione di correlazione bidimensionale in coordinate cartesiane $\xi(r_p, \pi)$, la funzione di correlazione proiettata $w_p(r_p)$, la funzione di correlazione bidimensionale in coordinate polari $\xi(s, \mu)$ e i primi tre multipoli pari della funzione di correlazione $\xi_l(s)$ sia con i codici di Euclid, che con codici che utilizzano le CBL. Successivamente, sono stati fatti girare i codici variando il numero di threads, $N_{threads}$, la separazione massima e il numero di oggetti, N_{obj} , per confrontare Euclid e CBL sia in termini di tempi di calcolo, che in termini di quantità di RAM utilizzata.

4.1 Codice di validazione

Per mettere in pratica quanto appena esposto, per questa Tesi sono state realizzate due classi in linguaggio C++: **Par** e **Func**. La prima offre un'ampia gamma di funzioni in grado di gestire il *parameter file* dei codici di Euclid. In questo modo, invece che aprire il *parameter file* ogni volta che si deve modificare un parametro, è sufficiente chiamare uno dei metodi della classe **Par** per farlo. La classe **Func**, poi, presenta una serie di funzioni utili per il lavoro svolto per questa Tesi. Una funzione di **Func**, ad esempio, permette di lanciare il codice di Euclid che calcola la funzione di correlazione, mentre un'altra consente di confrontare i file di testo contenenti gli output del calcolo della funzione di correlazione.

Il codice utilizzato per effettuare il confronto è strutturato come segue. Innanzitutto, viene creato un oggetto della classe **Par** e viene inizializzato con i parametri iniziali richiesti. Dunque viene creato un oggetto della classe **Func**, attraverso cui si lancia il codice di Euclid e si esegue il confronto tra l'output ottenuto e quello ottenuto utilizzando le CBL. In seguito, si modifica il *parameter file* e si lancia nuovamente il codice di Euclid, continuando così fino alla fine dei test da effettuare.

4.2 Risultati

4.2.1 Catalogo simulato

Il catalogo utilizzato per la validazione è un catalogo simulato contenente $N_{obj} = 1.1 \times 10^3$ aloni di materia oscura, di volume pari a circa $2.7 \times 10^8 (h^{-1} \text{ Mpc})^3$, ottenuto da una simulazione con una cosmologia Λ CDM. Gli aloni sono stati identificati attraverso l'algoritmo Friends-of-Friends (FoF). Per questa Tesi è stato fissato $N_R = 20$, con cui è stato creato il catalogo random.

4.2.2 Errori nei codici Euclid e CBL

Nel corso di questa Tesi sono stati individuati degli errori sia nei codici di Euclid che in quelli delle librerie CBL. Per quanto riguarda i codici di Euclid, sono stati trovati due errori nel file `TwoPointCorrelation.cpp`, all'interno della funzione `computeCorrelation()`, quando vengono calcolati gli integrali per la funzione di correlazione proiettata e per i multipoli. Nel codice che implementa la risoluzione degli integrali per rettangoli vi è un ciclo che calcola le varie aree e che si ferma quando la variabile nella seconda dimensione, che è π per la proiettata e μ per i multipoli, risulta minore o uguale rispetto ad un valore massimo. Questa variabile, cioè π in un caso e μ nell'altro, era errata, poichè non veniva sommata la separazione minima definita nel *parameter file*: in questo modo non vi era un errore se tale separazione minima era uguale a zero, ma vi era in tutti gli altri casi.

Per quanto riguarda le CBL, invece, l'errore è stato individuato nella funzione `Projected()` del file `TwoPointCorrelation_projected.cpp`, nel calcolo dell'integrale per rettangoli per ottenere la funzione di correlazione proiettata. Come visto in sez.2.6.1, vale la (2.36) e l'integrale è calcolato fino a π_{max} , che significa che il programma somma le aree dei rettangoli finchè non si raggiunge questo valore. Il ciclo che faceva ciò, tuttavia, sommava un termine in meno nel calcolo dell'integrale: il primo termine escluso presentava ancora un $\pi \leq \pi_{max}$.

4.2.3 Test interno: confronto tra *linked list* e *k-d tree* per le 5 statistiche

Sono riportati i grafici riguardanti il test interno sul confronto tra *linked list* e *k-d tree*. Per ognuna delle cinque statistiche calcolate è riportato un grafico in cui vi sono le curve della funzione di correlazione calcolata utilizzando *linked list* o *k-d tree* e un grafico in cui vi è la differenza percentuale di tali curve. È possibile notare che le curve in ogni grafico si sovrappongono quasi perfettamente, infatti i grafici con la differenza percentuale presentano curve con valori piccoli, dell'ordine di 10^{-2} o 10^{-3} (fig.4.2, fig.4.3). I grafici con la differenza percentuale per le statistiche $\xi(r)$, $w_p(r_p)$ e $\xi_l(s)$ non sono riportati in quanto presentano una curva costante ad un valore nullo.

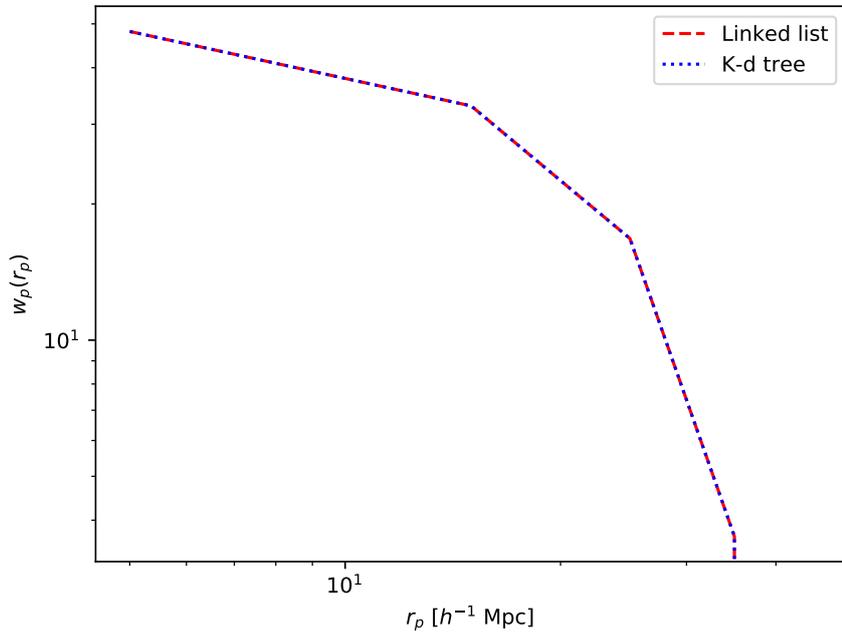
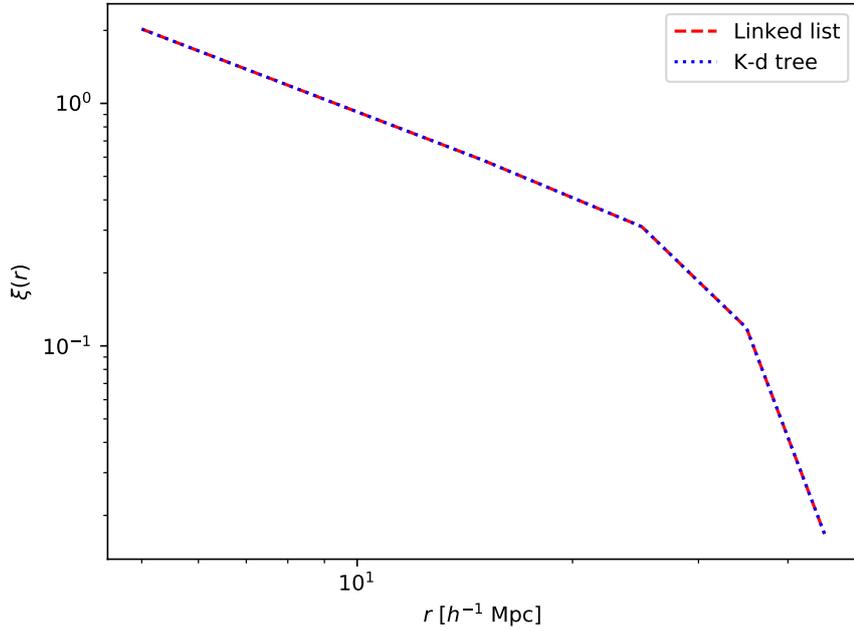


Figura 4.1: In alto: confronto tra *linked list* (linea rossa tratteggiata) e *k-d tree* (linea blu punteggiata) per la $\xi(r)$, per cui sono stati scelti $r_{min} = 0 h^{-1}\text{Mpc}$ e $r_{max} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$. In basso: confronto tra *linked list* (linea rossa tratteggiata) e *k-d tree* (linea blu punteggiata) per la $w_p(r_p)$, per cui sono stati scelti $r_{p,min} = 0 h^{-1}\text{Mpc}$, $r_{p,max} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$, $\pi_{min} = 0 h^{-1}\text{Mpc}$ e $\pi_{max} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$. Entrambi i grafici sono in scala doppio logaritmica.

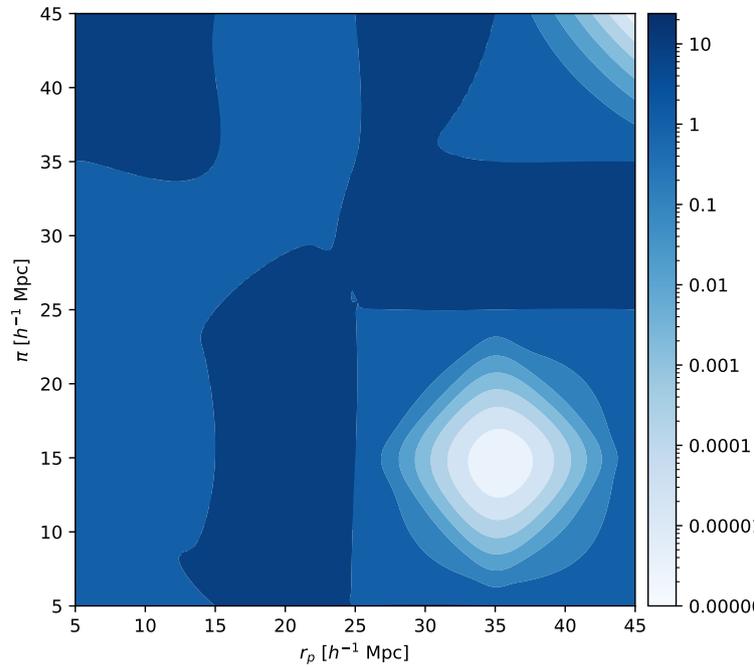
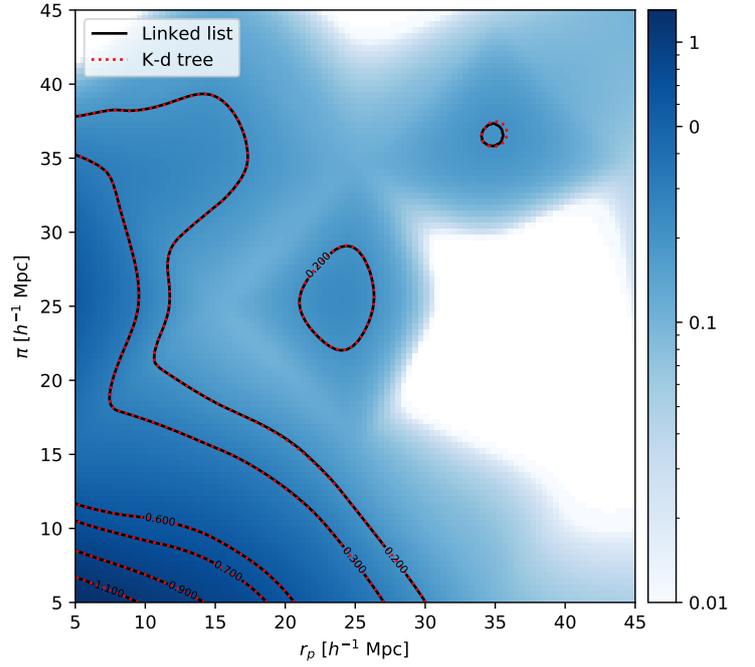


Figura 4.2: In alto: confronto tra *linked list* (linea nera continua) e *k-d tree* (linea rossa punteggiata) per la $\xi(r_p, \pi)$, per cui sono stati scelti $r_{p,min} = 0 h^{-1}\text{Mpc}$, $r_{p,max} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$, $\pi_{min} = 0 h^{-1}\text{Mpc}$ e $\pi_{max} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$. Sono riportate le curve di isocorrelazione per i livelli $\xi(r_p, \pi) = 0.2, 0.3, 0.6, 0.7, 0.9, 1.1$. In basso: differenza percentuale tra le due funzioni di correlazione.

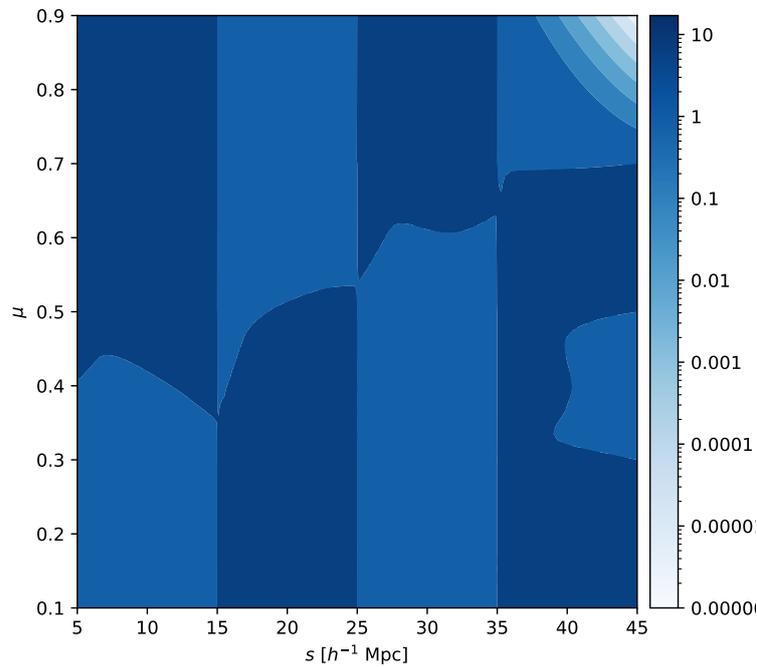
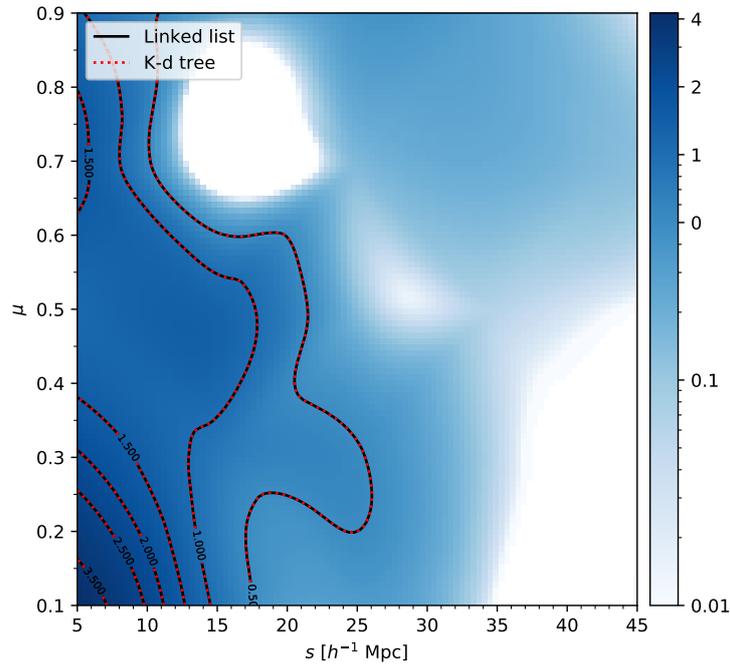


Figura 4.3: In alto: confronto tra *linked list* (linea nera continua) e *k-d tree* (linea rossa punteggiata) per la $\xi(s, \mu)$, per cui sono stati scelti $s_{min} = 0 h^{-1}\text{Mpc}$, $s_{max} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$, $\mu_{min} = 0$ e $\mu_{max} = 1$. Sono riportate le curve di isocorrelazione per i livelli $\xi(s, \mu) = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.5$. In basso: differenza percentuale tra le due funzioni di correlazione.

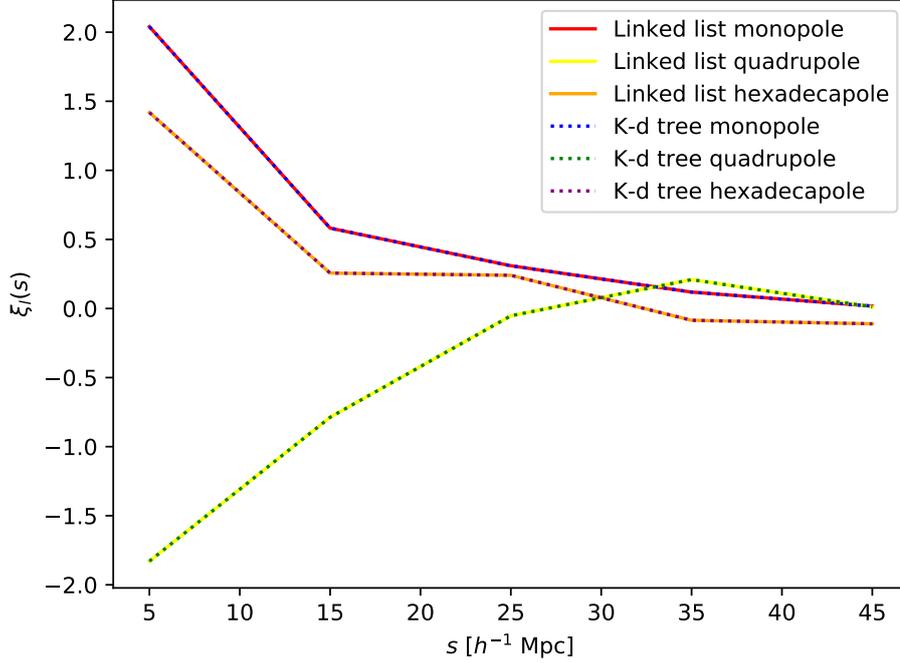


Figura 4.4: Confronto tra *linked list* (linee rossa, gialla, arancione continue) e *k-d tree* (linee blu, verde, viola punteggiate) per i multipoli $\xi_l(s)$, per cui sono stati scelti $s_{min} = 0 h^{-1}\text{Mpc}$, $s_{max} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$, $\mu_{min} = 0$ e $\mu_{max} = 1$.

4.2.4 Test interno: tempi in funzione del fattore di split

Sono riportate le tabelle e i grafici relativi al test interno riguardante i tempi di calcolo in funzione del fattore di split. I cataloghi utilizzati non sono quelli descritti in sez.4.2.1, poichè per questo test sono necessari cataloghi con più oggetti, in modo da avere tempi di calcolo maggiori e poter apprezzare meglio le differenze tra i vari casi. Partendo dal catalogo osservato presentato in sez.4.2.1, infatti, è stato creato un catalogo random con $N_{obj} = 10^5$. Questo catalogo è stato poi utilizzato come catalogo osservato (è consentito farlo poichè il parametro di interesse è il tempo di calcolo, non il valore della funzione di correlazione), con cui è stato creato un catalogo random fissando $N_R = 5$. Come affermato in sez.3.2, la tecnica dello split introduce delle correlazioni sistematiche a piccole scale. In maniera dipendente dal catalogo, poi, queste possono essere trascurate o meno se sono minori o maggiori degli errori statistici. Per evitare il secondo caso, si è scelto di considerare soltanto grandi scale, cioè quando si ha $|\xi| < 1$. Per questo sono stati scelti $r_{min} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$ e $r_{max} = 350 h^{-1}\text{Mpc}$ per la statistica **AUTO_1D**, $r_{p,min} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$, $r_{p,max} = 350 h^{-1}\text{Mpc}$, $\pi_{min} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$, $\pi_{max} = 350 h^{-1}\text{Mpc}$ per la statistica **AUTO_2DCART** e $s_{min} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$, $s_{max} = 350 h^{-1}\text{Mpc}$, $\mu_{min} = 0$, $\mu_{max} = 1$ per la statistica **AUTO_2DPOL**. Si nota come, aumentando il fattore di split, i tempi di calcolo diminuiscano, per tutte le statistiche considerate. Il metodo utilizzato per il conteggio delle coppie è l'algoritmo *linked list*.

Split	Tempo [min]
1	11.43
5	5.05
10	4.20
50	4.17

Tabella 4.1: Tempi di calcolo in funzione del fattore di split per la statistica `AUTO_1D` del codice di Euclid.

Split	Tempo [min]
1	36.98
5	15.67
10	13.53
50	12.05

Tabella 4.2: Tempi di calcolo in funzione del fattore di split per la statistica `AUTO_2DCART` del codice di Euclid.

Split	Tempo [min]
1	23.82
5	10.25
10	8.95
50	8.02

Tabella 4.3: Tempi di calcolo in funzione del fattore di split per la statistica `AUTO_2DPOL` del codice di Euclid.

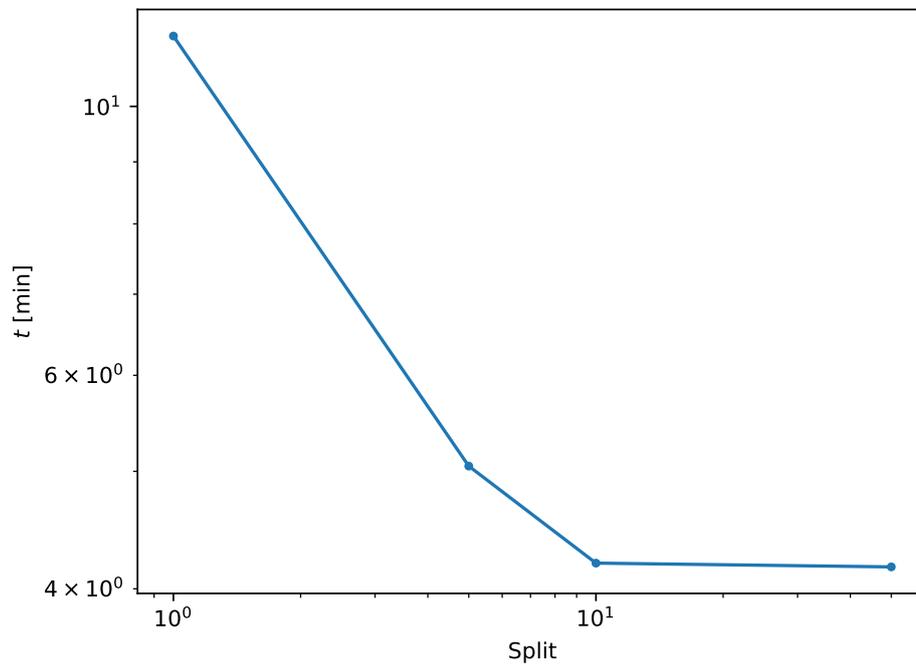


Figura 4.5: Tempi di calcolo del codice di Euclid per la statistica `AUTO_1D` in funzione del fattore di split. Grafico in scala doppia logaritmica.

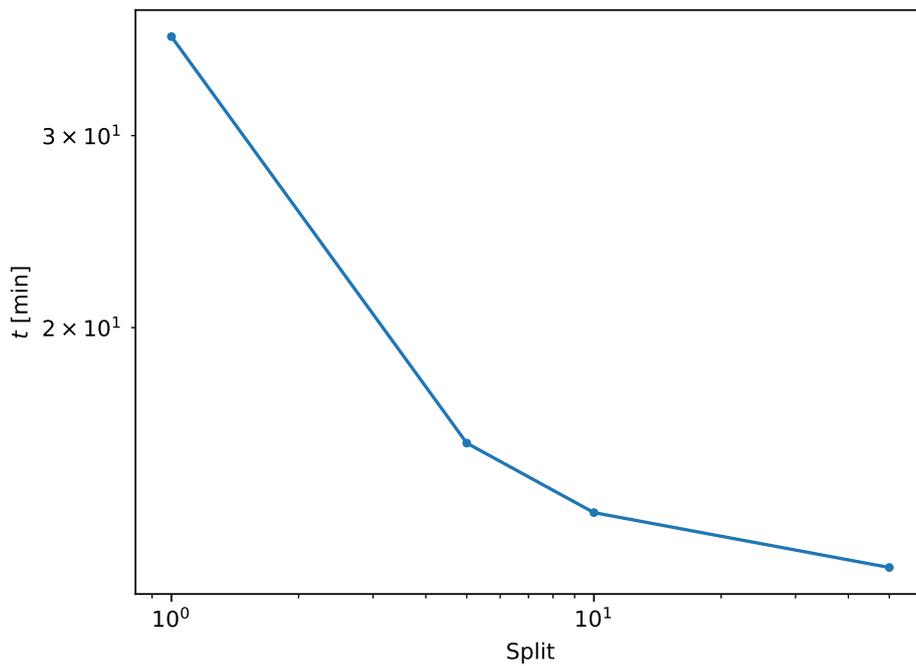


Figura 4.6: Tempi di calcolo del codice di Euclid per la statistica AUTO_2DCART in funzione del fattore di split. Grafico in scala doppio logaritmica.

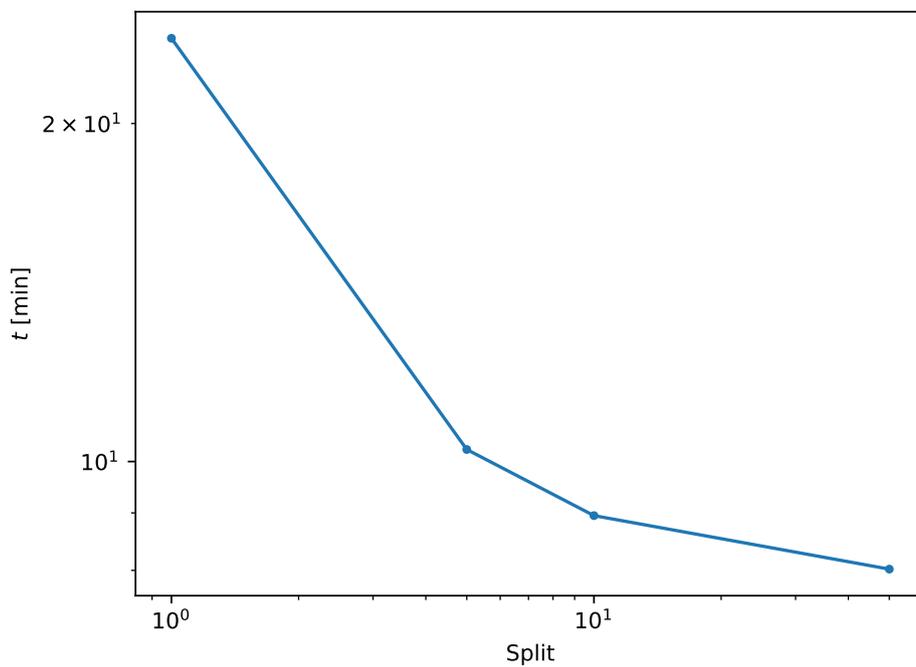


Figura 4.7: Tempi di calcolo del codice di Euclid per la statistica AUTO_2DPOL in funzione del fattore di split. Grafico in scala doppio logaritmica.

4.2.5 Confronto tra Euclid e CBL: le 5 statistiche

Sono riportati i grafici relativi al confronto tra le funzioni di correlazione calcolate con i codici di Euclid, con l'algoritmo *linked list* per il conteggio delle coppie, e con i codici che fanno uso delle CBL. I cataloghi utilizzati sono quelli presentati in sez.4.2.1. Analogamente a quanto presentato in sez.4.2.3, vi è un grafico con le due curve e uno con la loro differenza percentuale.

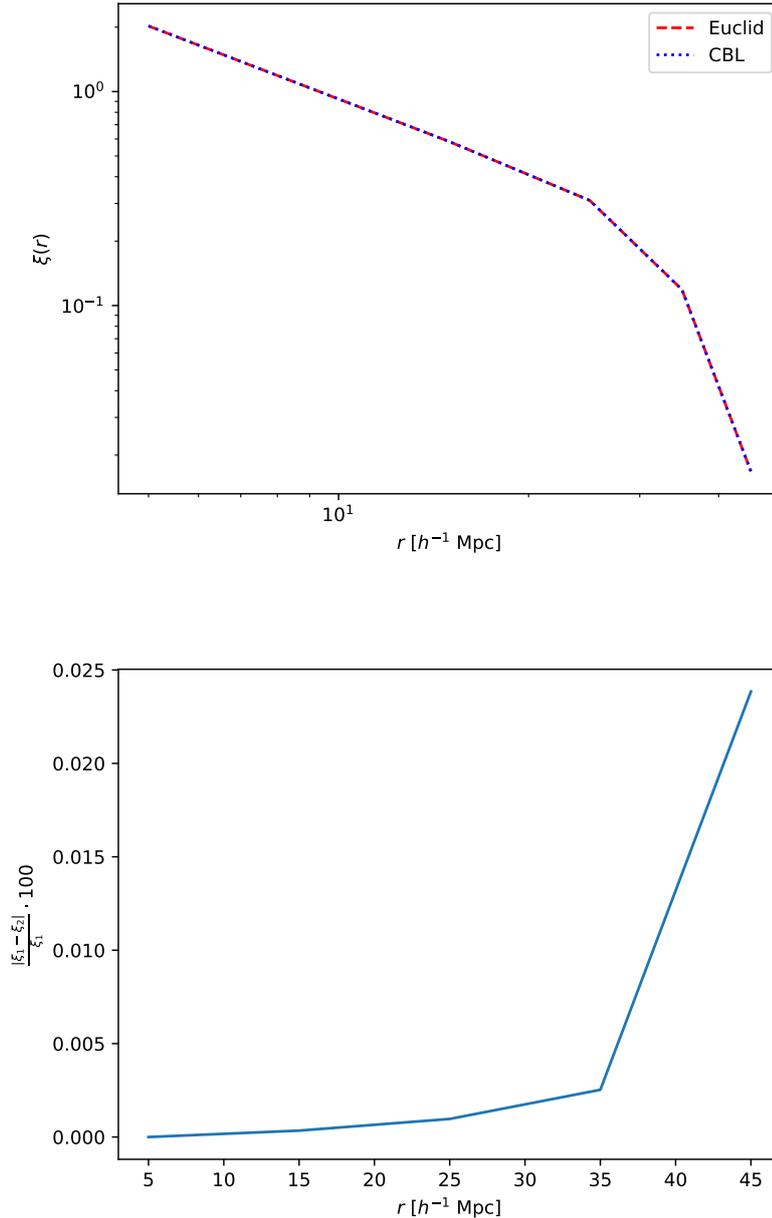


Figura 4.8: In alto: confronto tra Euclid (linea rossa tratteggiata) e CBL (linea blu punteggiata) per la $\xi(r)$, per cui sono stati scelti $r_{min} = 0 h^{-1}$ Mpc e $r_{max} = 50 h^{-1}$ Mpc. Grafico in scala doppio logaritmica. In basso: differenza percentuale tra le due funzioni di correlazione.

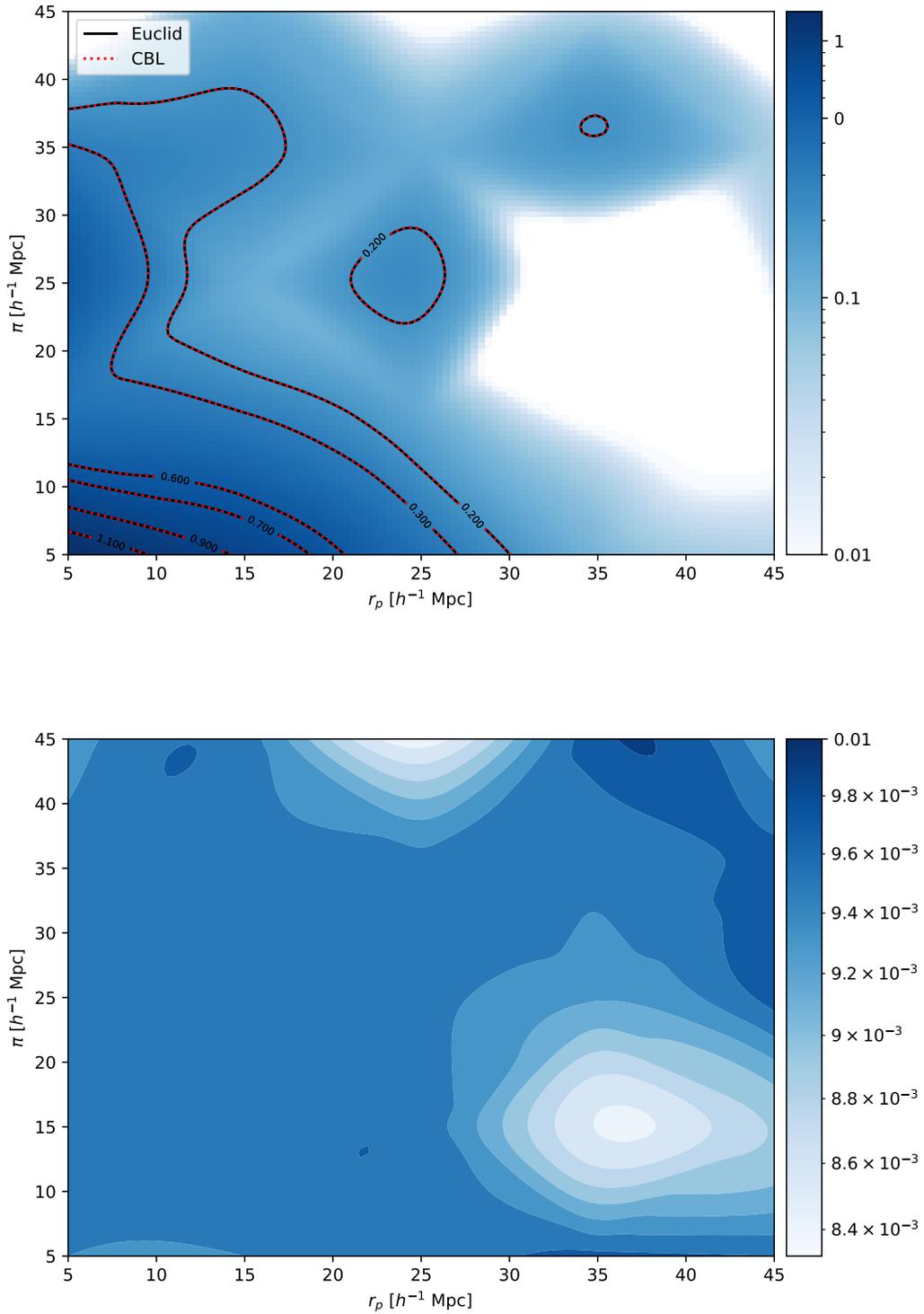


Figura 4.9: In alto: confronto tra Euclid (linea nera continua) e CBL (linea rossa punteggiata) per la $\xi(r_p, \pi)$, per cui sono stati scelti $r_{p,min} = 0 h^{-1} \text{ Mpc}$, $r_{p,max} = 50 h^{-1} \text{ Mpc}$, $\pi_{min} = 0 h^{-1} \text{ Mpc}$ e $\pi_{max} = 50 h^{-1} \text{ Mpc}$. Sono riportate le curve di isocorrelazione per i livelli $\xi(r_p, \pi) = 0.2, 0.3, 0.6, 0.7, 0.9, 1.1$. In basso: differenza percentuale tra le due funzioni di correlazione.

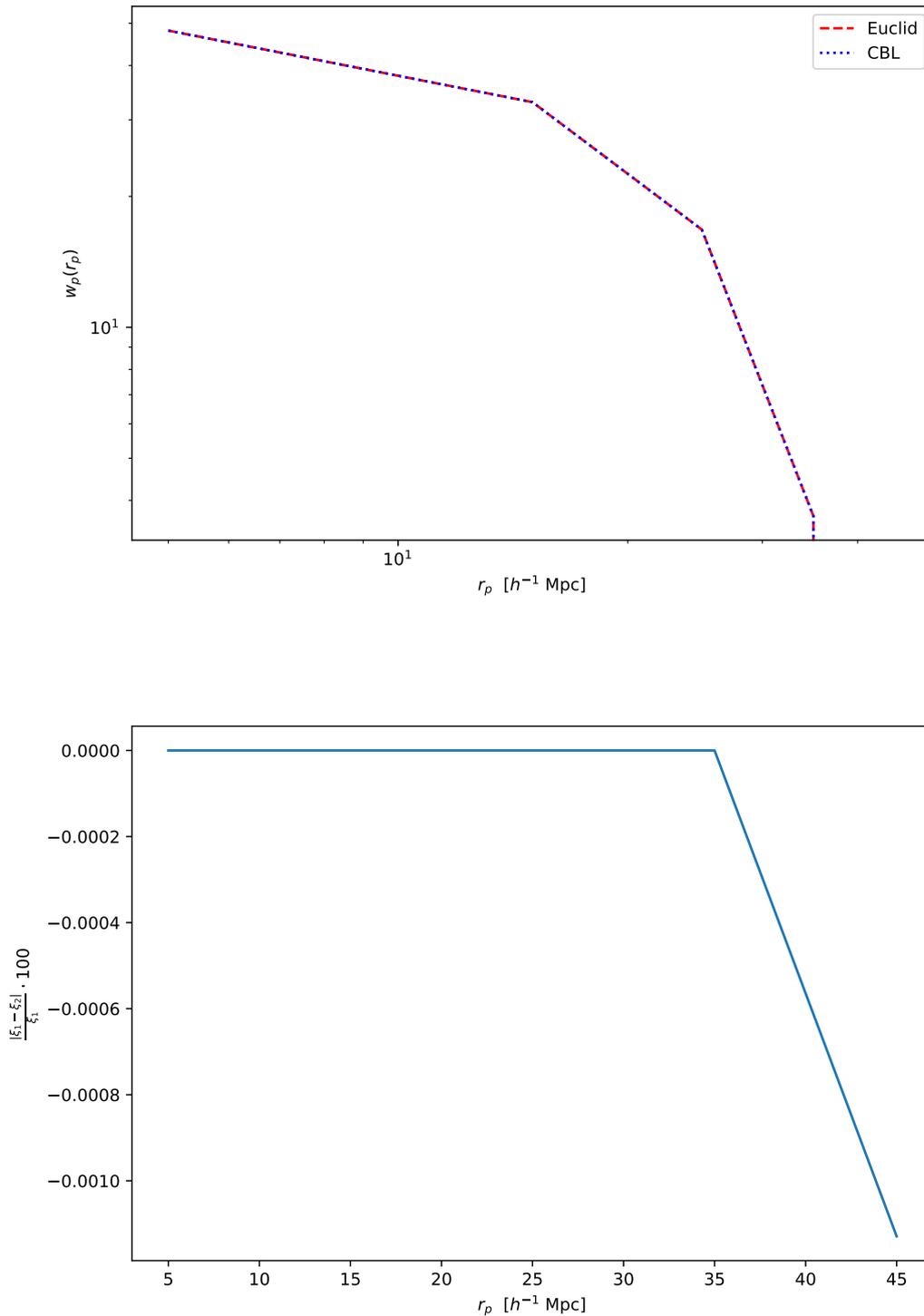


Figura 4.10: In alto: confronto tra Euclid (linea rossa tratteggiata) e CBL (linea blu punteggiata) per la $w_p(r_p)$, per cui sono stati scelti $r_{p,min} = 0 h^{-1}$ Mpc, $r_{p,max} = 50 h^{-1}$ Mpc, $\pi_{min} = 0 h^{-1}$ Mpc e $\pi_{max} = 50 h^{-1}$ Mpc. Grafico in scala doppio logaritmica. In basso: differenza percentuale tra le due funzioni di correlazione.

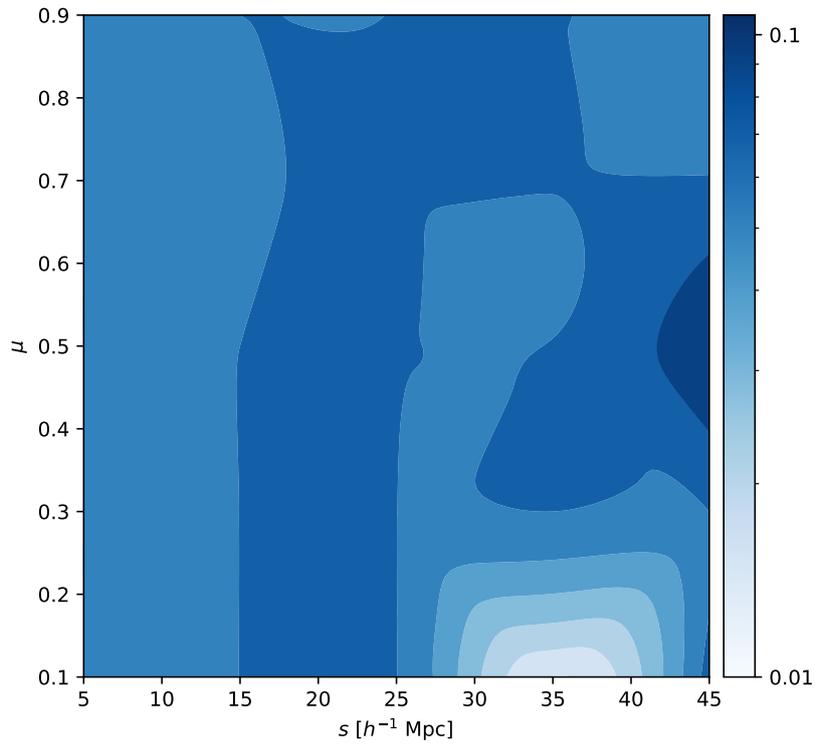
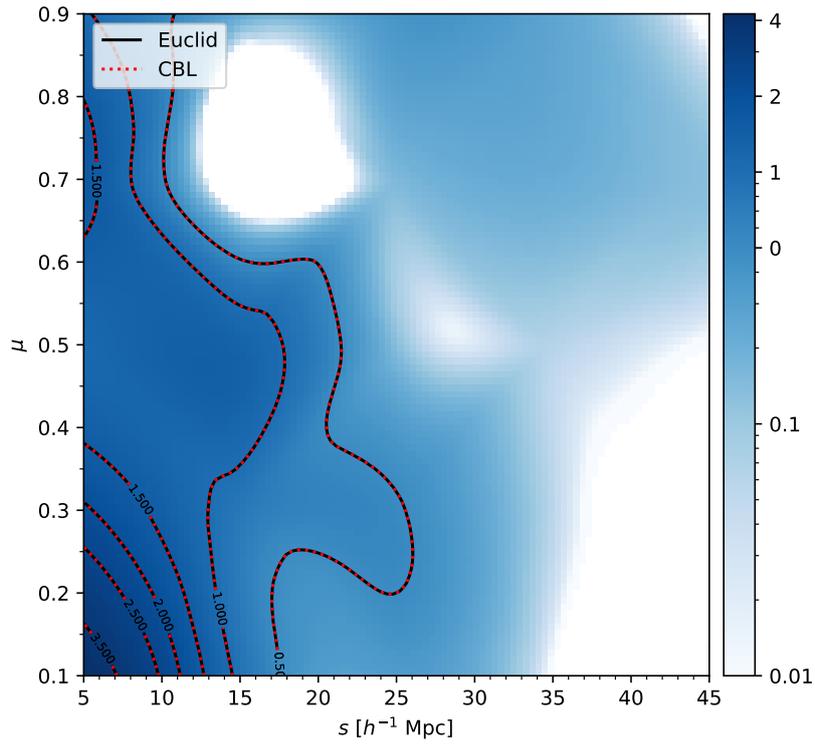


Figura 4.11: In alto: confronto tra Euclid (linea nera continua) e CBL (linea rossa punteggiata) per la $\xi(s, \mu)$, per cui sono stati scelti $s_{min} = 0 h^{-1}\text{Mpc}$, $s_{max} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$, $\mu_{min} = 0$ e $\mu_{max} = 1$. Sono riportate le curve di isocorrelazione per i livelli $\xi(s, \mu) = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.5$. In basso: differenza percentuale tra le due funzioni di correlazione.

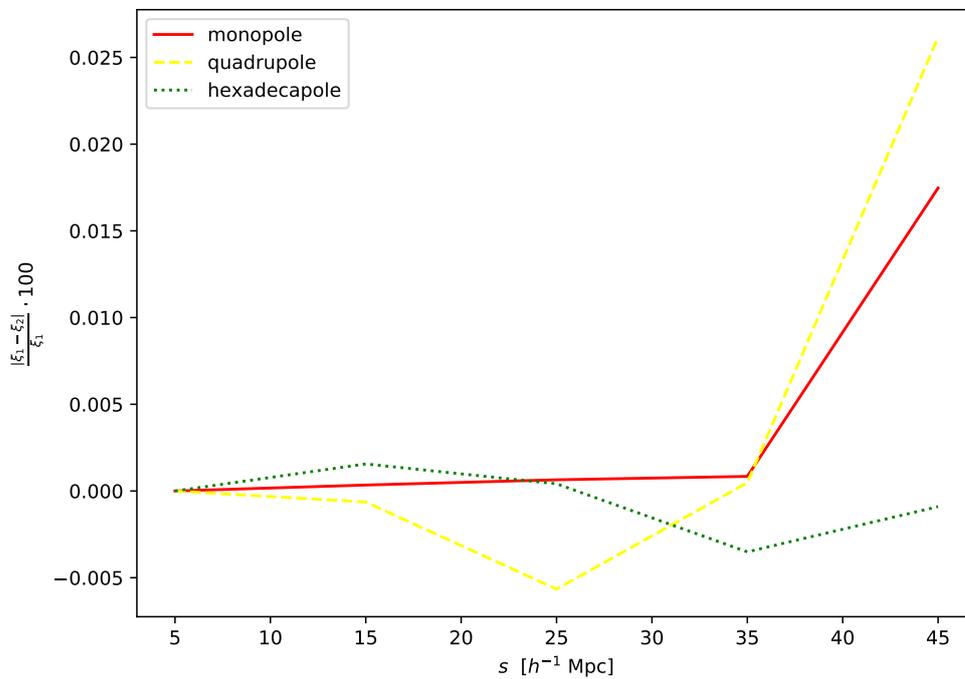
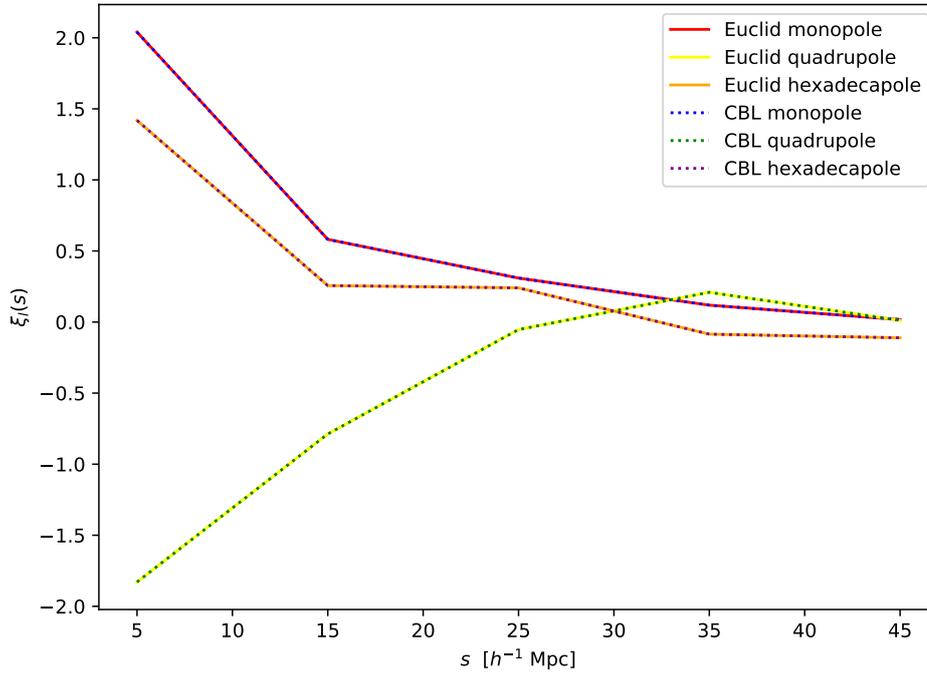


Figura 4.12: In alto: confronto tra Euclid (linee rossa, gialla, arancione continue) e CBL (linee blu, verde, viola punteggiate) per i multipoli $\xi_l(s)$, per cui sono stati scelti $s_{min} = 0 h^{-1}\text{Mpc}$, $s_{max} = 50 h^{-1}\text{Mpc}$, $\mu_{min} = 0$ e $\mu_{max} = 1$. In basso: differenza percentuale tra i multipoli delle due funzioni di correlazione.

È possibile notare come le curve relative a Euclid e CBL in ogni grafico siano consistenti, e i grafici con la differenza percentuale mostrano curve che raggiungono valori non superiori ad un ordine di grandezza di 10^{-1} (fig.4.8-4.12).

4.2.6 Confronto tra Euclid e CBL: tempi in funzione di $N_{threads}$

Sono riportate le tabelle per quanto riguarda il confronto tra i codici di Euclid, che usano l'algoritmo *linked list* per il conteggio delle coppie, e quelli che fanno uso delle CBL relativamente ai tempi di calcolo in funzione del numero dei threads, $N_{threads}$, per tutte e cinque le statistiche calcolate. Le separazioni minima e massima scelte per questo test sono le stesse utilizzate nel confronto tra Euclid e CBL per le 5 statistiche, cioè quelle esposte in sez.4.2.5. I cataloghi utilizzati sono quelli descritti in sez.4.2.4.

Si nota come, per tutte le statistiche, con $N_{threads} = 1$ i tempi di calcolo siano, come ci si aspetta, maggiori rispetto a quando si ha $N_{threads} = 2$, sia per i codici di Euclid, che per quelli che usano le CBL. Inoltre, i codici di Euclid presentano tempi di calcolo molto più brevi rispetto a quelli dei codici che fanno uso delle CBL.

$N_{threads}$	Tempo Euclid [min]	Tempo CBL [min]
1	0.25	5.03
2	0.17	3.27

Tabella 4.4: Tempi di calcolo dei codici di Euclid e di quelli che usano le CBL in funzione del numero di threads $N_{threads}$ per il calcolo della $\xi(r)$.

$N_{threads}$	Tempo Euclid [min]	Tempo CBL [min]
1	1.05	13.15
2	0.62	7.07

Tabella 4.5: Tempi di calcolo dei codici di Euclid e di quelli che usano le CBL in funzione del numero di threads $N_{threads}$ per il calcolo della $\xi(r_p, \pi)$.

$N_{threads}$	Tempo Euclid [min]	Tempo CBL [min]
1	1.05	12.67
2	0.62	7.67

Tabella 4.6: Tempi di calcolo dei codici di Euclid e di quelli che usano le CBL in funzione del numero di threads $N_{threads}$ per il calcolo della $w_p(r_p)$.

$N_{threads}$	Tempo Euclid [min]	Tempo CBL [min]
1	0.38	5.32
2	0.23	3.37

Tabella 4.7: Tempi di calcolo dei codici di Euclid e di quelli che usano le CBL in funzione del numero di threads $N_{threads}$ per il calcolo della $\xi(s, \mu)$.

$N_{threads}$	Tempo Euclid [min]	Tempo CBL [min]
1	0.38	5.42
2	0.23	3.52

Tabella 4.8: Tempi di calcolo dei codici di Euclid e di quelli che usano le CBL in funzione del numero di threads $N_{threads}$ per il calcolo dei multipoli $\xi_l(s)$.

4.2.7 Confronto tra Euclid e CBL: tempi in funzione della separazione massima

Sono riportate le tabelle e i grafici relativi al confronto tra i codici di Euclid, con l'algoritmo *linked list* per il conteggio delle coppie, e quelli che utilizzano le CBL per quanto concerne i tempi di calcolo in funzione della separazione massima, per tutte e cinque le statistiche calcolate. Le separazioni minime, nei vari casi, sono uguali a quelle presentate in sez.4.2.3. Per semplicità, nel calcolo di $\xi(r_p, \pi)$ e di $w_p(r_p)$ è stato variato soltanto $r_{p,max}$, mantenendo π_{max} fisso, mentre nel calcolo di $\xi(s, \mu)$ e di $\xi_l(s)$ è stato variato soltanto s_{max} , mantenendo μ_{max} fisso. I cataloghi utilizzati sono gli stessi che sono presentati in sez.4.2.4. Si nota come i tempi di calcolo aumentino, come ci si aspetterebbe, se aumenta la separazione massima. I codici di Euclid, poi, hanno tempi di calcolo molto minori rispetto a quelli dei codici che utilizzano le CBL.

r_{max} [h^{-1} Mpc]	Tempo Euclid [min]	Tempo CBL [min]
50	0.17	3.58
100	0.75	20.37
150	1.80	57.32

Tabella 4.9: Tempi di calcolo dei codici di Euclid e di quelli che usano le CBL in funzione della separazione massima r_{max} per il calcolo della $\xi(r)$.

$r_{p,max}$ [h^{-1} Mpc]	Tempo Euclid [min]	Tempo CBL [min]
50	0.62	7.42
100	1.68	48.27
150	3.30	119.70

Tabella 4.10: Tempi di calcolo dei codici di Euclid e di quelli che usano le CBL in funzione della separazione massima $r_{p,max}$ per il calcolo della $\xi(r_p, \pi)$.

$r_{p,max}$ [h^{-1} Mpc]	Tempo Euclid [min]	Tempo CBL [min]
50	0.62	7.40
100	1.68	46.07
150	3.30	123.50

Tabella 4.11: Tempi di calcolo dei codici di Euclid e di quelli che usano le CBL in funzione della separazione massima $r_{p,max}$ per il calcolo della $w_p(r_p)$.

s_{max} [h^{-1} Mpc]	Tempo Euclid [min]	Tempo CBL [min]
50	0.23	3.78
100	1.30	22.07
150	3.35	58.08

Tabella 4.12: Tempi di calcolo dei codici di Euclid e di quelli che usano le CBL in funzione della separazione massima s_{max} per il calcolo della $\xi(s, \mu)$.

s_{max} [h^{-1} Mpc]	Tempo Euclid [min]	Tempo CBL [min]
50	0.23	3.55
100	1.30	21.22
150	3.35	60.50

Tabella 4.13: Tempi di calcolo dei codici di Euclid e di quelli che usano le CBL in funzione della separazione massima s_{max} per il calcolo dei multipoli $\xi_l(s)$.

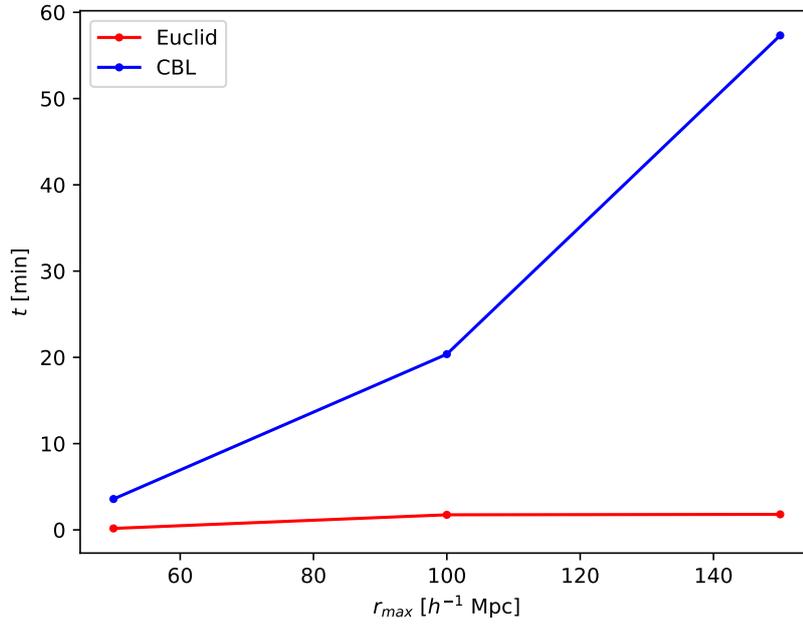


Figura 4.13: Confronto dei tempi di calcolo in funzione di r_{max} tra i codici di Euclid e quelli che usano le CBL, per il calcolo della $\xi(r)$.

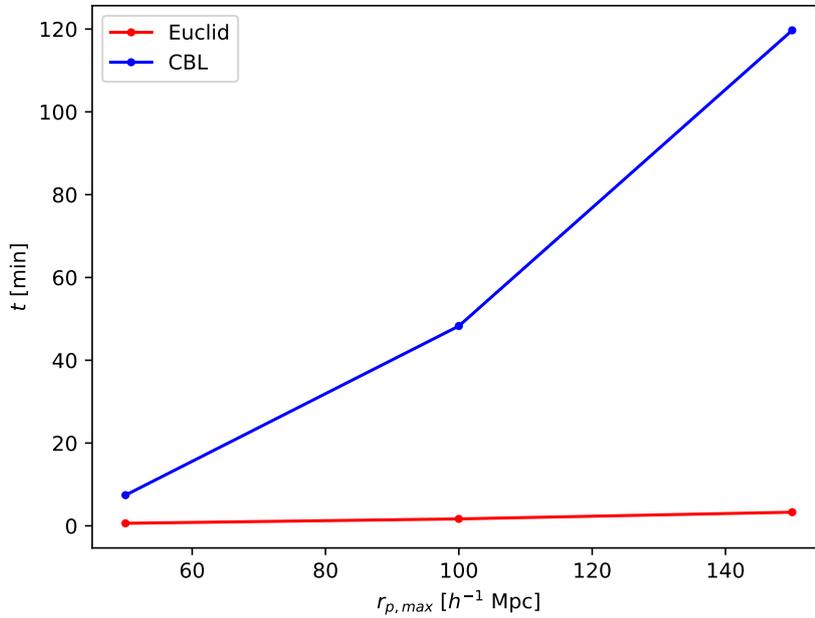


Figura 4.14: Confronto dei tempi di calcolo in funzione di $r_{p,max}$ tra i codici di Euclid e quelli che usano le CBL, per il calcolo della $\xi(r_p, \pi)$.

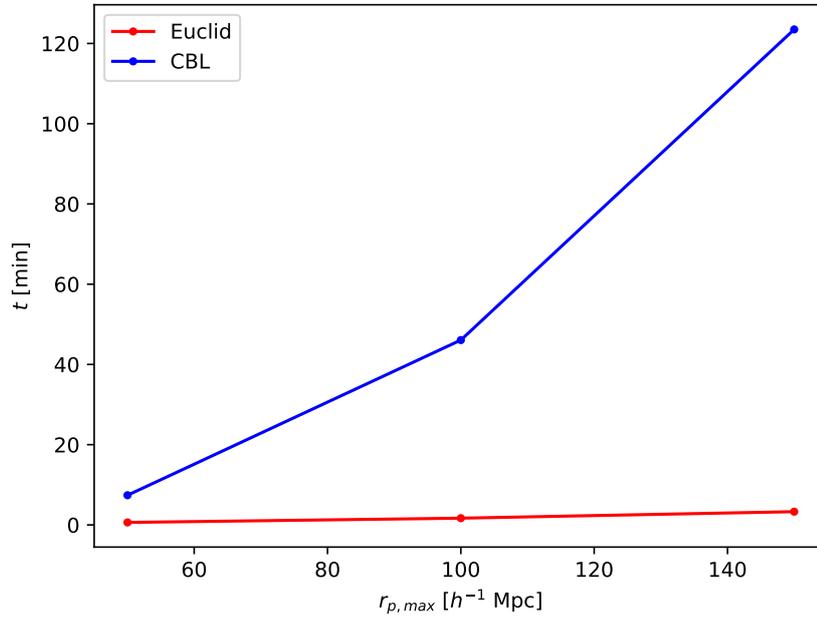


Figura 4.15: Confronto dei tempi di calcolo in funzione di $r_{p,max}$ tra i codici di Euclid e quelli che usano le CBL, per il calcolo della $w_p(r_p)$.

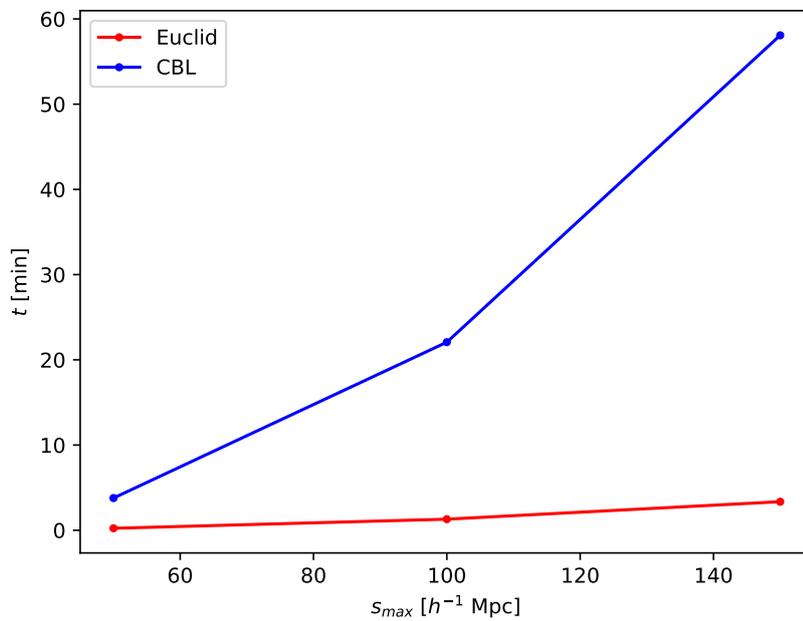


Figura 4.16: Confronto dei tempi di calcolo in funzione di s_{max} tra i codici di Euclid e quelli che usano le CBL, per il calcolo della $\xi(s, \mu)$.

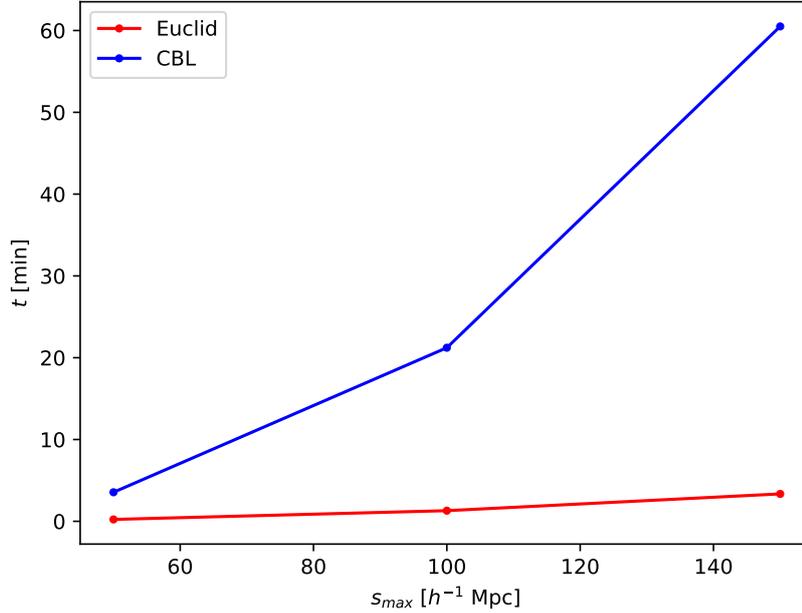


Figura 4.17: Confronto dei tempi di calcolo in funzione di s_{max} tra i codici di Euclid e quelli che usano le CBL, per il calcolo dei multipoli $\xi_l(s)$.

4.2.8 Confronto tra Euclid e CBL: RAM in funzione di N_{obj}

Sono riportate le tabelle e i grafici riguardo al confronto tra i codici di Euclid, in cui l'algoritmo selezionato per il conteggio delle coppie è *linked list*, e quelli che fanno uso delle CBL per quanto riguarda la quantità di RAM utilizzata in funzione del numero di oggetti nel catalogo N_{obj} . La quantità di RAM utilizzata dal codice infatti dipende soltanto dal numero di sorgenti contenute nel catalogo osservato e in quello random. Attraverso la procedura illustrata in sez.4.2.4, sono stati creati dei cataloghi random, utilizzati come cataloghi osservati, contenenti rispettivamente 10^4 , 3×10^4 , 6×10^4 e 10^5 oggetti. A partire da essi, poi, sono stati creati i rispettivi cataloghi random fissando $N_R = 5$.

N_{obj}	RAM Euclid [kbytes]	RAM CBL [kbytes]
10^4	25 652	139 816
3×10^4	45 688	183 952
6×10^4	59 472	250 828
10^5	96 532	332 456

Tabella 4.14: RAM utilizzata dai codici di Euclid e da quelli che usano le CBL in funzione del numero di oggetti N_{obj} per il calcolo della $\xi(r)$.

N_{obj}	RAM Euclid [kbytes]	RAM CBL [kbytes]
10^4	24 592	82 876
3×10^4	42 216	124 840
6×10^4	60 652	193 252
10^5	90 884	276 464

Tabella 4.15: RAM utilizzata dai codici di Euclid e da quelli che usano le CBL in funzione del numero di oggetti N_{obj} per il calcolo della $\xi(r_p, \pi)$.

N_{obj}	RAM Euclid [kbytes]	RAM CBL [kbytes]
10^4	24 592	82 628
3×10^4	42 216	127 344
6×10^4	60 652	193 756
10^5	90 884	281 196

Tabella 4.16: RAM utilizzata dai codici di Euclid e da quelli che usano le CBL in funzione del numero di oggetti N_{obj} per il calcolo della $w_p(r_p)$.

N_{obj}	RAM Euclid [kbytes]	RAM CBL [kbytes]
10^4	25 944	139 944
3×10^4	45 920	181 468
6×10^4	58 752	250 324
10^5	89 064	333 060

Tabella 4.17: RAM utilizzata dai codici di Euclid e da quelli che usano le CBL in funzione del numero di oggetti N_{obj} per il calcolo della $\xi(s, \mu)$.

N_{obj}	RAM Euclid [kbytes]	RAM CBL [kbytes]
10^4	25 944	139 396
3×10^4	45 920	181 156
6×10^4	58 752	249 948
10^5	89 064	332 828

Tabella 4.18: RAM utilizzata dai codici di Euclid e da quelli che usano le CBL in funzione del numero di oggetti N_{obj} per il calcolo dei multipoli $\xi_l(s)$.

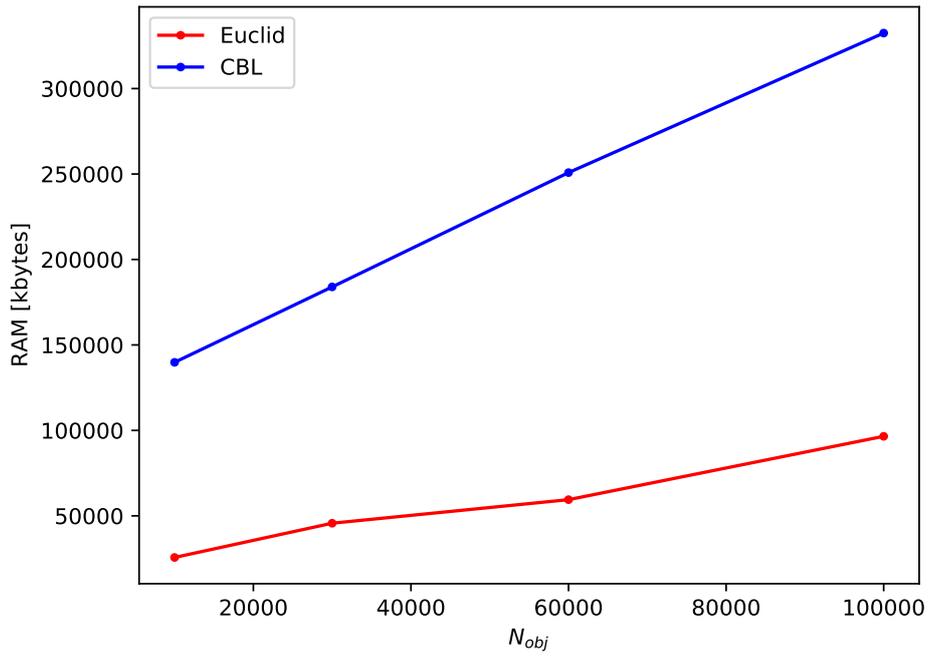


Figura 4.18: Confronto della quantità di RAM utilizzata in funzione di N_{obj} tra i codici di Euclid e quelli che usano le CBL, per il calcolo della $\xi(r)$.

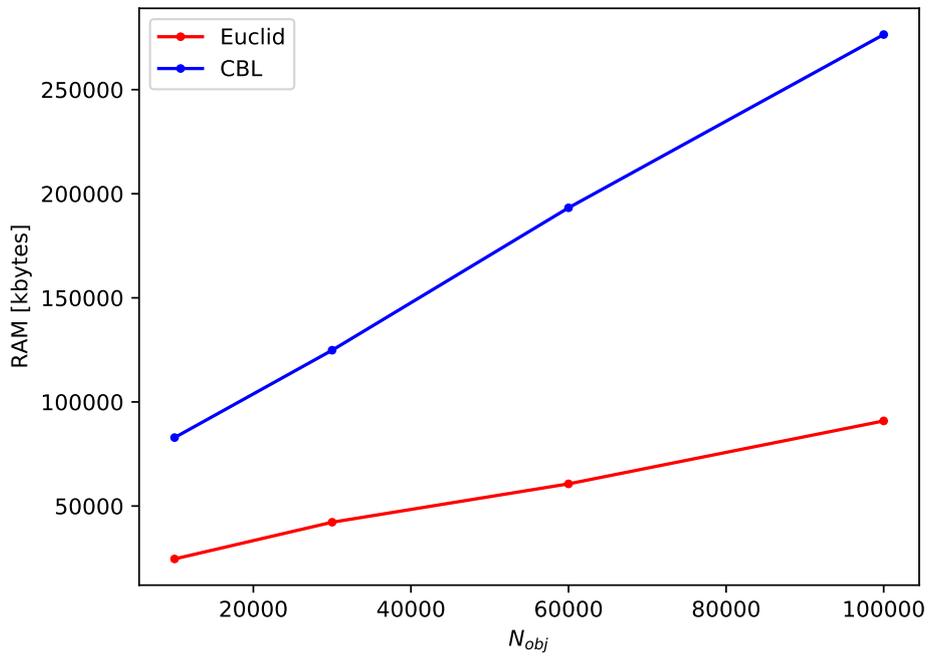


Figura 4.19: Confronto della quantità di RAM utilizzata in funzione di N_{obj} tra i codici di Euclid e quelli che usano le CBL, per il calcolo della $\xi(r_p, \pi)$.

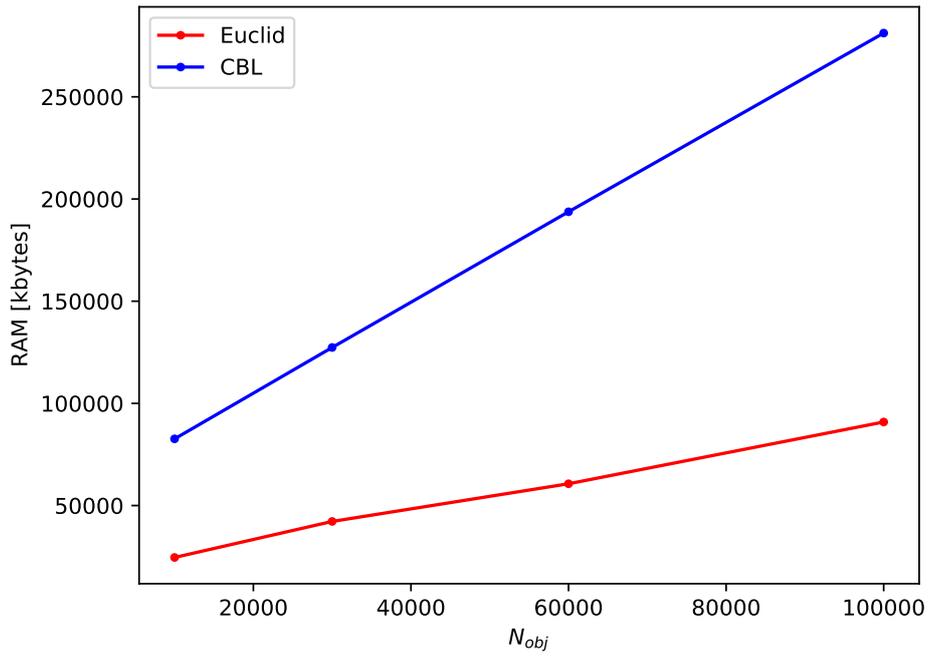


Figura 4.20: Confronto della quantità di RAM utilizzata in funzione di N_{obj} tra i codici di Euclid e quelli che usano le CBL, per il calcolo della $w_p(r_p)$.

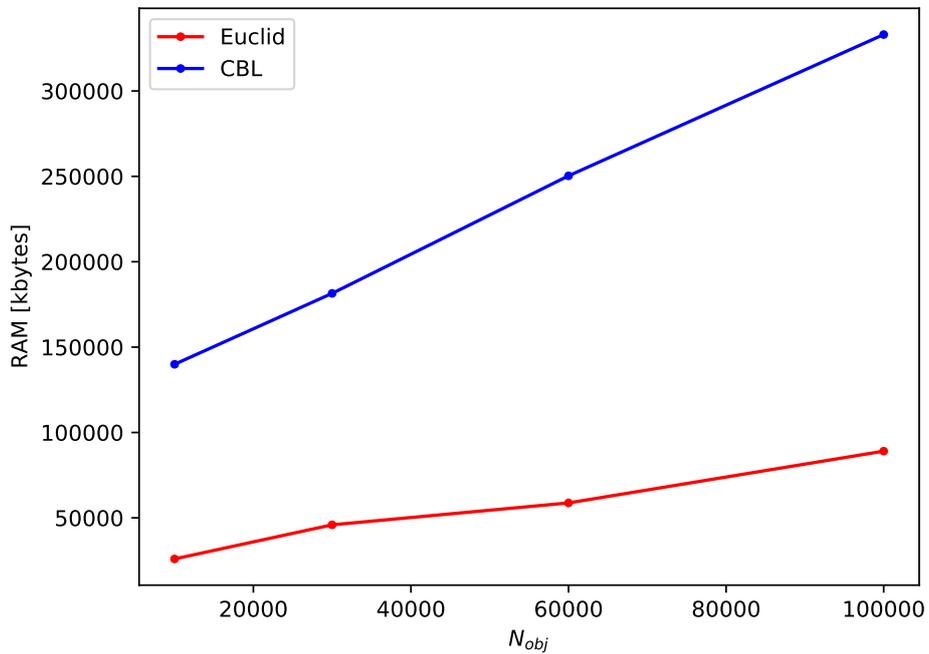


Figura 4.21: Confronto della quantità di RAM utilizzata in funzione di N_{obj} tra i codici di Euclid e quelli che usano le CBL, per il calcolo della $\xi(s, \mu)$.

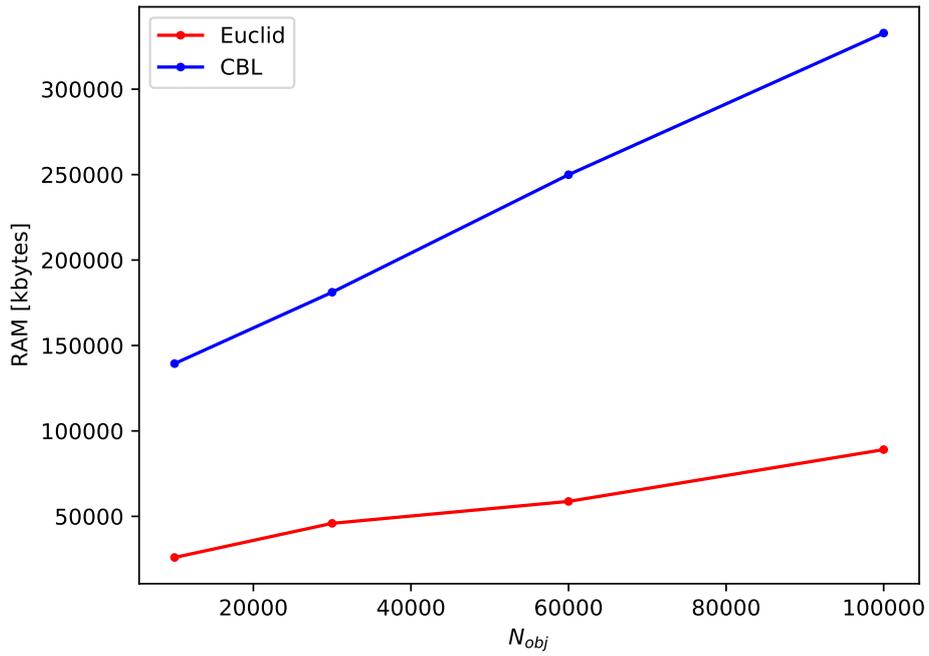


Figura 4.22: Confronto della quantità di RAM utilizzata in funzione di N_{obj} tra i codici di Euclid e quelli che usano le CBL, per il calcolo dei multipoli $\xi_l(s)$.

È possibile notare che, per ognuna delle cinque statistiche calcolate, la quantità di RAM utilizzata dai codici cresce linearmente all'aumentare del numero di oggetti nel catalogo. Inoltre, i codici di Euclid utilizzano una quantità di RAM minore rispetto ai codici che fanno uso delle CBL.

Capitolo 5

Conclusioni

Questo lavoro di Tesi si inserisce all'interno delle attività preparatorie della missione spaziale Euclid dell'ESA. Sono stati infatti validati i codici di Euclid per la misura della funzione di correlazione a due punti. In particolare, sono state considerate cinque statistiche diverse:

- la funzione di correlazione monodimensionale $\xi(r)$,
- la funzione di correlazione bidimensionale in coordinate cartesiane $\xi(r_p, \pi)$,
- la funzione di correlazione proiettata $w_p(r_p)$,
- la funzione di correlazione bidimensionale in coordinate polari $\xi(s, \mu)$,
- i primi tre multipoli pari della funzione di correlazione $\xi_l(s)$.

Innanzitutto, sono stati corretti due errori individuati all'interno della funzione `computeCorrelation()` del file `TwoPointCorrelation.cpp`, nel calcolo degli integrali riguardanti la funzione di correlazione proiettata e i multipoli. È stato poi corretto un errore trovato nelle librerie di calcolo cosmologico CBL, nella funzione `Projected()` del file `TwoPointCorrelation_projected.cpp`, nel calcolo dell'integrale per la funzione di correlazione proiettata.

In seguito, si è proceduto ai test interni ai codici di Euclid: il confronto tra i due algoritmi per il conteggio delle coppie *linked list* e *k-d tree*, per il calcolo delle cinque statistiche mostrate sopra, e il confronto dei tempi di calcolo in funzione del fattore di split. Si è trovato che i due algoritmi producono gli stessi risultati, come mostrato dai grafici in fig.4.1-4.4, e che, come previsto, i tempi di calcolo diminuiscono all'aumentare del fattore di split.

Successivamente, ci si è concentrati sul confronto tra i codici di Euclid, con l'algoritmo *linked list* per il conteggio delle coppie, e i codici che fanno uso delle CBL per quanto riguarda il calcolo delle cinque statistiche presentate in precedenza. Come mostrano i grafici in fig.4.8-4.12, i risultati prodotti sono consistenti, con discrepanze che non superano un ordine di grandezza di 10^{-2} . I tempi di calcolo aumentano all'aumentare sia del numero di threads, $N_{threads}$, che della separazione massima, per tutte e cinque le statistiche. La quantità di RAM utilizzata, poi, aumenta all'aumentare del numero di oggetti nel catalogo, N_{obj} , per tutte e cinque le statistiche. Si può inoltre notare che, in ognuno dei casi considerati, i codici di

Euclid spendono un tempo minore ad essere eseguiti e utilizzano una quantità di RAM inferiore nell'esecuzione rispetto ai codici che usano le CBL.

La missione spaziale Euclid fornirà un'enorme quantità di dati, la cui analisi permetterà di far luce su temi cosmologici importanti, rendendo il nostro Universo un po' meno oscuro.

Bibliografia

- [1] Paul S. Wesson et al. «The extragalactic background light and a definitive resolution of Olbers's paradox». In: *The Astrophysical Journal* 317:601-606 (1987).
- [2] NASA / WMAP Science Team. URL: https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/990006/990006_2048.jpg.
- [3] Lewis A. et al. «Planck Collaboration 2018, paper VI: Table 2, TT, TE, EE + lowE + lensing + BAO». In: arXiv:1807.06209 ().
- [4] Edwin Hubble. «A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 15:168-173 (1929).
- [5] Riess A.G. et al. «Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant». In: *The Astronomical Journal* 116:1009-1038 (1998).
- [6] Perlmutter S. et al. «Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae». In: *The Astrophysical Journal* 517:565-586 (1999).
- [7] Frieman J. et al. «Dark Energy and the Accelerating Universe». In: *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics* 46:385-432 (2008).
- [8] ESA e the Planck Collaboration. *Planck CMB*. URL: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2013/03/Planck_CMB#.YQwDWiZ8Ni5.link.
- [9] Guth A. «Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems». In: *Physical Review D* 23:347-356 (1981).
- [10] Ryden B. *Introduction to Cosmology*. 2006.
- [11] Rubin V. C. e Ford W. K. Jr. «Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions». In: *The Astrophysical Journal* 159:379-403 (1970).
- [12] Roberts M. S. e Whitehurst R. N. «The rotation curve and geometry of M31 at large galactocentric distances». In: *The Astrophysical Journal* 201:327-346 (1975).
- [13] Zwicky F. «Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln». In: *Helvetica Physica Acta* 6:110-127 (1933).
- [14] Robertson R. G. H. et al. «Direct Measurements of Neutrino Mass». In: *Physics Reports* 914:1-100 (2021).

- [15] Alam S. et al. «The Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Cosmological Implications from two Decades of Spectroscopic Surveys at the Apache Point observatory». In: *Physical Review D* 103:083533 (2020).
- [16] Weinberg S. «The cosmological constant problem». In: *Reviews of Modern Physics* 61:1-23 (1989).
- [17] Gabadadze G. et al. «4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space». In: *Physics Letters B* 485:208-214 (2000).
- [18] Kolb E.W. et al. «On cosmic acceleration without dark energy». In: *New Journal of Physics* 8:322 (2006).
- [19] Amarzguioui M. et al. «An inhomogeneous alternative to dark energy?». In: *Physical Review D* 73:083519 (2006).
- [20] Linder E.V. «Exploring the Expansion History of the Universe». In: *Physical Review Letters* 90:091301 (2003).
- [21] Hamuy M. et al. «The Absolute Luminosities of the Calan/Tololo Type IA Supernovae». In: *The Astronomical Journal* 112:2391-2397 (1996).
- [22] Phillips M. M. «The Absolute Magnitudes of Type IA Supernovae». In: *Astrophysical Journal Letters* 413:L105-L108 (1993).
- [23] Kim A. In: *LBNL Report* LBNL-56164 (2004).
- [24] Rogelio Bernal Andreo. URL: https://apod.nasa.gov/apod/image/1104/201103_VirgoGCM_andreo.jpg.
- [25] Bob Franke; Dan Zowada Memorial Observatory Russ Carroll Robert Gendler. URL: https://apod.nasa.gov/apod/image/1803/ComaCluster_Carroll_1024.jpg.
- [26] Haiman Z. et al. «Constraints on Cosmological Parameters from Future Galaxy Cluster Surveys». In: *The Astrophysical Journal* 553:545-561 (2001).
- [27] Eisenstein D. J. et al. «Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies». In: *The Astrophysical Journal* 633:560–574 (2005).
- [28] Renn J. et al. «The Origin of Gravitational Lensing: A Postscript to Einstein’s 1936 Science Paper». In: *Science* 275:184–186 (1997).
- [29] Schmidt F. Dodelson S. *Modern Cosmology*. 2003.
- [30] A. Newman M. Akhshik K. Whitaker ESA/Hubble & NASA. URL: <https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/potw2129a.jpg>.
- [31] Marulli F. et al. «Cosmology with clustering anisotropies: disentangling dynamic and geometric distortions in galaxy redshift surveys». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 426:2566–2580 (2012).
- [32] Kaiser N. «Clustering in real space and in redshift space». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 227:1–21 (1987).

- [33] Peebles P. J. E. Davis M. «A survey of galaxy redshifts. V. The two-point position and velocity correlations». In: *The Astrophysical Journal* 267:465-482 (1983).
- [34] Marulli F. et al. «Redshift-space distortions of galaxies, clusters, and AGN». In: *Astronomy & Astrophysics* 599:A106 (2017).
- [35] Peebles P. J. E. Davis M. «A survey of galaxy redshifts. V. The two-point position and velocity correlations». In: *The Astrophysical Journal* 267:465-482 (1983).
- [36] ESA. *Arianespace and ESA announce the Euclid satellite's launch contract for dark energy exploration*. URL: https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Arianespace_and_ESA_announce_the_Euclid_satellite_s_launch_contract_for_dark_energy_exploration.
- [37] CXC C. Ma H. Ebeling ESA/ATG medialab (spacecraft); NASA ESA, E. Barrett (University of Hawaii/IfA), STScI (background) et al. URL: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2019/09/Euclid_spacecraft#.YSTGw3KduIw.link.
- [38] Laureijs R. et al. «Definition Study Report». In: arXiv:1110.3193 (2011).
- [39] Dalal N. et al. «The imprints of primordial non-gaussianities on large-scale structure: scale dependent bias and abundance of virialized objects». In: *Physical Review D* 77:123514 (2008).
- [40] Landy S. D. et al. «Bias and Variance of Angular Correlation Functions». In: *The Astrophysical Journal* 412:64–71 (1993).
- [41] Labatie A. et al. «Uncertainty in 2-point correlation function estimators and BAO detection in SDSS DR7». In: arXiv:1009.1232 (2010).
- [42] Marulli F. et al. «CosmoBolognaLib: C++ libraries for cosmological calculations». In: *Astronomy and Computing* 14:35–42 (2016).
- [43] Modi C. Feng Y. «A fast algorithm for identifying Friends-of-Friends halos». In: *Astronomy and Computing* 20:44–51 (2017).
- [44] Keihänen E. et al. «Estimating the galaxy two-point correlation function using a split random catalog». In: *Astronomy & Astrophysics* 631:A73 (2019).