

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

L'equazione d'onda non omogenea in elettromagnetismo e in Relatività Generale

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Federico Alessandrini

Anno Accademico 2020/2021

Abstract

In questo lavoro di tesi proponiamo di analizzare il legame tra le equazioni dell'elettromagnetismo di Maxwell e le equazioni di campo di Einstein, verificando come in opportune condizioni le seconde presentano una forma analoga alle prime.

Verranno ricapitolate alcune nozioni chiave dell'elettromagnetismo e della Relatività Ristretta, fondamentali per giungere alla formulazione covariante delle equazioni di Maxwell. In particolare, si analizzeranno le relazioni tra il campo elettrico e magnetico ed i potenziali vettore e scalare, necessari per costruire il tensore del campo elettromagnetico ed il quadripotenziale.

Partendo poi da una breve introduzione delle equazioni di campo di Einstein, vedremo come, lavorando in condizioni di campo gravitazionale debole, sia possibile ottenere una forma linearizzata di queste ultime e di come essa presenti una struttura analoga all'equazione delle onde, o di d'Alembert.

Infine, presenteremo una soluzione analitica per questo tipo di equazioni differenziali. Utilizzando come caso applicativo l'equazione di Maxwell in forma tensoriale, introdurremo brevemente il concetto di funzione di Green e di come applicarlo al caso dell'equazione di d'Alembert. Ne ricaveremo una forma esplicita, osservando come la richiesta di validità del principio di causalità imporrà un vincolo sulla scelta della soluzione, e di come questa porti poi alla definizione del potenziale ritardato.

Indice

Introduzione	7
Notazioni, unità e convenzioni	9
1 Forma covariante delle equazioni di Maxwell	11
1.1 Equazioni di Maxwell e conservazione della carica elettrica	11
1.2 Potenziali elettromagnetici e gauge di Lorentz	13
1.3 Spazio di Minkowski	16
1.4 Tensore del campo elettromagnetico e quadridensità di corrente	19
1.5 Equazioni di Maxwell in forma covariante	21
2 L'equazione d'onda per la radiazione gravitazionale	23
2.1 Equazioni di campo di Einstein	23
2.2 Approssimazione di campo debole	25
2.2.1 Trasformazioni di Lorentz	25
2.2.2 Trasformazioni di gauge	26
2.3 Equazioni di Einstein per un campo gravitazionale debole	27
2.3.1 Tensori di Riemann e di Einstein per un campo gravitazionale debole	27
2.3.2 Equazioni di Einstein in forma linearizzata	28
3 Risoluzione dell'equazione di d'Alembert non omogenea mediante funzione di Green	31
3.1 Funzione di Green per l'operatore dalembertiano	31
3.1.1 Funzione di Green ritardata ed avanzata	32
3.2 Soluzione per l'equazione non omogenea	35
A Linearizzazione delle equazioni di Einstein	39
A.1 Tensore di Einstein linearizzato	39
A.2 Condizione di gauge armonica	41
B Funzione di Green ritardata	43
Bibliografia	45

Introduzione

La *Relatività Ristretta* o *Speciale* è stata introdotta da Einstein nel 1905, con il suo famoso articolo "*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*" ("Sull' elettrodinamica dei corpi in movimento"), con lo scopo di risolvere la pesante incompatibilità tra la fisica Newtoniana dell'epoca e l'elettromagnetismo di Maxwell. La soluzione che egli propose si fondava su una nuova concezione dello spazio e del tempo, ed era in grado di eliminare quelle asimmetrie formali che comparivano nel momento in cui due osservatori, in due sistemi differenti, analizzavano lo stesso fenomeno elettromagnetico. In particolare, questo era dovuto all'inconciliabilità delle equazioni di Maxwell con le trasformazioni galileiane della meccanica.

Tuttavia, pur risolvendo da un lato queste incongruenze, tale teoria non era ancora completa: infatti essa permette di trattare in maniera compiuta solo una classe di sistemi di riferimento, quelli inerziali; inoltre, non è possibile descrivere i fenomeni gravitazionali, ancora fondati sulla formulazione di Newton, internamente non relativistica. Einstein impiegò più di dieci anni, dal 1905 al 1916, per portare a compimento una teoria in grado di soddisfare questi due punti, la *teoria della Relatività Generale*.

Uno dei suoi punti di partenza è la relazione tra massa inerziale e gravitazionale, in particolare la loro uguaglianza. Nella fisica di Newton questa uguaglianza, confermata da numerosi esperimenti di grande precisione, compare come un dato di fatto, senza alcuna giustificazione; la Relatività Generale si propone invece di unificare i concetti di inerzia e gravitazione e di spiegarne l'equivalenza.

L'altro elemento fondamentale che viene introdotto nella teoria è una nuova concezione geometrica della fisica. Secondo Einstein era impensabile che l'azione dello spazio sui corpi non avesse una controparte, ovvero un'azione dei corpi sullo spazio. Quest'idea può essere riassunta parafrasando leggermente le parole di John Wheeler [2]: "Lo spazio-tempo informa la materia su come muoversi, mentre questa informa lo spazio-tempo su come curvarsi". Lo spazio-tempo deve avere allora una dinamica, descritta da un campo che interagisce con le distribuzioni di materia e di energia; la gravità si manifesterà allora geometricamente come curvatura dello spazio-tempo.

In questo lavoro di tesi tratteremo un aspetto particolare della teoria generale della gravità. Lo scopo è quello di verificare che in una regione sufficientemente lontana dalle sorgenti del campo gravitazionale, in modo che lo spazio-tempo possa essere approssimato come piatto, ed ignorando le interazioni esterne ed effetti non lineari dell'interazione gravitazionale, piccole perturbazioni gravitazionali si propagano come onde, seguendo la nota equazione di d'Alembert. Globalmente questo tipo di approccio non può essere applicato: la curvatura dello spazio-tempo a larga scala, dovuta alla presenza di galassie e stelle stazionarie, determina il fenomeno del red-shift gravitazionale e deforma i fronti d'onda, inoltre a complicare il fenomeno è presente anche l'energia trasportata dall'onda stessa. Nella trattazione non saranno presenti solo elementi di relatività generale ma ci si focalizzerà anche sul problema analogo della propagazione dell'interazione elettromagnetica, dettata dalle equazioni di Maxwell, cercando di trovare un punto in comune tra le due teorie.

Nel Capitolo 1, ci soffermeremo nel caso dell'elettromagnetismo ed illustreremo come ricavare le equazioni di Maxwell in forma covariante e come queste riportino la forma di un'equazione

d'onda, utile per formulare un analogia al caso gravitazionale. Verranno ripresi aspetti dell'elettrodinamica quali il tensore del campo elettromagnetico, il quadrivettore potenziale e la quadricorrente.

Nel Capitolo 2, studieremo principalmente il caso gravitazionale. Senza seguire un approccio rigoroso e dimostrativo, presenteremo le equazioni di campo di Einstein, dopo una breve introduzione sulla forma del tensore energia-impulso. Sfruttando le approssimazioni di campo debole e la condizione di gauge armonica, ricaveremo una forma linearizzata delle equazioni di Einstein che, non a caso, è riconducibile ad un'equazione d'onda.

Nel Capitolo 3, presenteremo un metodo matematico per risolvere equazioni differenziali del tipo d'Alambert. In particolare, applicheremo il metodo della funzione di Green per risolvere le equazioni di Maxwell in forma covariante. Mostriamo quali sono i requisiti necessari per ottenere una soluzione compatibile con richieste di natura fisica e, definendo il potenziale ritardato, mostreremo la forma di tale soluzione ed alcune sue proprietà.

Notazioni, unità e convenzioni

Nel corso della seguente verranno utilizzate alcune convenzioni per quanto riguarda la notazione e la presentazione delle formule.

- Per indicare vettori o operatori vettoriali essi si rappresenteranno con lettere in grassetto: per esempio i campi elettrico e magnetico verranno indicati con **E** e **B**.
- Considereremo la presenza di un tensore metrico generico $g_{\mu\nu}$, con segnatura compatibile con quella del tensore metrico di Minkowski $\eta_{\nu\mu}$: $(+, -, -, -)$. Per tanto intervalli *timelike* avranno norma positiva, mentre quelli *spacelike* negativa.
- Gli indici tensoriali indicati con lettere greche indicano componenti quadridimensionali ($\mu = 0, 1, 2, 3$), mentre quelli indicati con lettere latine indicano componenti spaziali ($i = 1, 2, 3$).
- Utilizzeremo la convenzione sulla somma di Einstein, per cui per indici in alto ed in basso ripetuti si assume la somma rispetto ad essi: $A^\mu B_\mu = \sum_{\alpha=0}^3 A^\alpha B_\alpha$.
- In genere, denoteremo l'operazione di derivazione parziale rispetto ad una coordinata x^β utilizzando la notazione con la virgola: $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta} = A^\mu_{,\beta}$; mentre per l'operazione di derivata covariante utilizzeremo il punto e virgola: $\nabla_\beta W^\mu = W^\mu_{;\beta} = W^\mu_{,\beta} + \Gamma_{\nu\beta}^\mu W^\nu$.
- Considereremo che la connessione sia metrica, ovvero che il trasporto parallelo conserva sempre le lunghezze e gli angoli: $\nabla_\beta g_{\mu\nu} = 0, \forall \beta$. Definito un sistema di coordinate specifico questa condizione corrisponde alla relazione:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\nu\rho,\sigma} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\sigma,\rho}).$$

- Utilizzeremo due convenzioni diverse per le unità di misura durante la trattazione. Per quanto riguarda il Capitolo 1, indicheremo le formule non tramite il Sistema Internazionale ma attraverso il sistema CGS; mentre nel Capitolo 2 utilizzeremo le così dette *unità geometriche*, considerando $c = G = 1$, dove c è la velocità della luce nel vuoto mentre G è la costante di gravitazione universale.

Capitolo 1

Forma covariante delle equazioni di Maxwell

Come già accennato brevemente nella parte introduttiva, uno dei motivi principali che stimolarono l'origine della teoria della Relatività Ristretta, fu la richiesta di un metodo descrittivo dei fenomeni elettromagnetici che non presentasse "asimmetrie". Queste comparirono a causa dell'incompatibilità della meccanica newtoniana e l'elettrodinamica, che godono di proprietà di invarianza differenti. Ma a dover essere rivista in funzione di questa teoria fu la meccanica, mentre la teoria elettromagnetica rimase immutata.

In questo capitolo, partendo da alcune nozioni chiave dell'elettromagnetismo classico, giungeremo alla formulazione covariante delle equazioni di Maxwell, ovvero ad una forma invariante per sistemi di riferimento inerziali. La fonte principalmente utilizzata per questa trattazione è stato il testo di Barone [1].

1.1 Equazioni di Maxwell e conservazione della carica elettrica

Le equazioni di Maxwell sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari e accoppiate, due vettoriali e due scalari, che assieme alla forza di Lorentz determinano in maniera completa l'interazione elettromagnetica classica. Esse descrivono la dinamica del *campo elettrico* \mathbf{E} e del *campo magnetico* \mathbf{B} in funzione delle sorgenti, quali la *densità di carica* ρ e la *densità di corrente* \mathbf{j} . Esse sono notoriamente scritte secondo il formalismo tridimensionale come:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t) \quad (\text{Gauss}), \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday-Neumann-Lenz}), \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{Ampère-Maxwell}). \quad (1.4)$$

Sottolineiamo alcune distinzioni tra queste: le equazioni 1.2 e 1.3 sono *omogenee*, mentre 1.1 e 1.4 sono *non omogenee*; inoltre le equazioni 1.3, 1.4 possono essere considerate come vere e proprie equazioni del moto, in quanto contengono le derivate temporali dei campi, mentre le equazioni 1.1 e 1.2 possono invece essere identificate come dei vincoli.

Il fatto che il campo elettromagnetico debba soddisfare vincoli di questa natura permette di ridurre il numero di gradi di libertà quando si cerca di studiarne la dinamica. In genere,

la procedura che permette di eliminare variabili non genuinamente dinamiche non è covariante e per tanto porta a privilegiare un particolare sistema di riferimento. A seconda del tipo di problema da risolvere può risultare utile seguire anche questo approccio ma nel nostro caso ci focalizzeremo in una descrizione del sistema indipendente dall'osservatore.

Analizziamo ora in maniera più approfondita la forma e le proprietà delle sorgenti dei campi. La densità di carica ρ e quella di corrente \mathbf{j} sono definite implicitamente a partire da quantità infinitesime: la carica elettrica dq contenuta nel volume infinitesimo $d^3\mathbf{x}$ è

$$dq = \rho(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}, \quad (1.5)$$

mentre la corrente elettrica dI che scorre attraverso una superficie $d\boldsymbol{\sigma}$ è data da

$$dI = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (1.6)$$

dove $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} d\sigma$ è il vettore normale alla superficie con modulo pari a $d\sigma$.

Possiamo definire il valore della carica totale Q contenuta in un volume V in un certo istante t come:

$$Q(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}, \quad (1.7)$$

ed in maniera analoga, il valore della corrente totale I che fluisce attraverso una superficie S nell'istante t come:

$$I(t) = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (1.8)$$

Esiste un'importante relazione tra ρ e \mathbf{j} che esprime in forma matematica la *legge di conservazione della carica elettrica*. Essa è una relazione naturale fondata su osservazioni sperimentali e stabilisce che: se la carica Q contenuta all'interno di un volume V subisce una variazione nel tempo, essa deve essere esprimibile come un flusso di corrente attraverso i bordi di tale superficie. Il modo immediato per rappresentarla in forma matematica è proprio

$$I = -\frac{dQ}{dt}. \quad (1.9)$$

Da questa si può notare come un flusso positivo di corrente, uscente dal volume, determina nel tempo una diminuzione della carica contenuta nel volume ($dQ/dt < 0$); mentre un flusso negativo determina una corrente entrante e dunque un aumento di carica ($dQ/dt > 0$).

A questo risultato, di carattere macroscopico, si può giungere considerando una relazione a livello infinitesimo tra ρ e \mathbf{j} , che prende il nome di *equazione di continuità*:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (1.10)$$

In particolare, integriamo ambo i membri di 1.10 sul volume considerato V :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}, \quad (1.11)$$

dove l'operatore di derivata temporale, scritta come derivata totale, è stato portato fuori dall'integrale in quanto il volume considerato è fissato e non dipende dal tempo. Si può far uso del teorema di Gauss a primo membro per trasformare l'integrale di volume su V in un integrale sulla superficie chiusa S che lo delimita ai bordi

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}. \quad (1.12)$$

Dalle definizioni di carica Q e corrente I , 1.7 e 1.8, si riottiene l'equazione di conservazione della carica 1.9, come volevamo dimostrare.

Possiamo formulare una dimostrazione della validità della *legge di continuità* anche a partire dalle equazioni di Maxwell. Infatti, se assumiamo che la legge di Gauss stabilisca una relazione tra campo elettrico \mathbf{E} e densità di carica ρ valida *istante per istante*, possiamo derivare rispetto al tempo i due membri dell'equazione 1.1 ed ottenere

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.13)$$

D'altra parte si può applicare l'operatore divergenza alla 1.4 ed utilizzare il fatto che la divergenza di un rotore è sempre nulla ($\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$), si trova

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (1.14)$$

Combinando questi due risultati si riottiene come annunciato la relazione 1.10. Se considerassimo invece che la legge di Gauss abbia validità solo in un certo istante fissato t_0 , l'equazione di continuità non potrebbe essere derivata dalle equazioni di Maxwell ed è dunque cruciale verificare che invece sia valida sperimentalmente, e che assuma il ruolo di legge distinta.

1.2 Potenziali elettromagnetici e gauge di Lorentz

Le equazioni omogenee di Maxwell 1.2 e 1.3 permettono di introdurre una funzione vettoriale \mathbf{A} ed una scalare φ tramite le quali riesprimere il campo elettrico \mathbf{E} e quello magnetico \mathbf{B} . Queste funzioni prendono il nome di *potenziali elettromagnetici* e non hanno un reale significato fisico; lo scopo per cui sono stati concepiti è quello di semplificare matematicamente la struttura delle equazioni. Mentre le intensità dei campi sono grandezze che possono essere direttamente misurate, i potenziali non lo sono.

Il modo in cui si procede per definirli consiste nel trovare delle grandezze matematiche che risolvano le equazioni di Maxwell omogenee; sostituendole poi in quelle non omogenee se ne può studiare l'evoluzione dinamica. Partendo dall'equazione 1.2, osserviamo che la divergenza del campo magnetico è sempre nulla. Possiamo dire allora che, essendo il campo magnetico un campo vettoriale *solenoidale*, esiste una funzione generica $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, detta *potenziale vettore*, tale che:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.15)$$

Sostituendo ora questa equazione nella 1.3, essa diventa

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0, \quad (1.16)$$

cioè

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.17)$$

In questo modo abbiamo definito un campo vettoriale *irrotazionale* $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, per il quale, secondo i teoremi del calcolo vettoriale, esisterà una funzione scalare $\varphi(\mathbf{x}, t)$, detta in questo contesto *potenziale scalare* (o *potenziale elettrico*), tale che:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi. \quad (1.18)$$

In questo modo abbiamo una definizione differente sia per il campo magnetico, equazione 1.15, ma anche per il campo elettrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.19)$$

che nel caso di campo statico si riduce a: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

Una volta definiti questi potenziali possiamo passare ora a studiarne le equazioni del moto. Sostituiamo al campo elettrico \mathbf{E} ed al campo magnetico \mathbf{B} le definizioni dei potenziali nelle equazioni 1.1 e 1.4 . In questo modo otteniamo delle equazioni differenziali analoghe a quelle di Maxwell non omogenee:

$$\nabla^2\varphi + \frac{1}{c}\nabla \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -4\pi\rho, \quad (1.20)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (1.21)$$

Quest'ultima relazione può essere leggermente modificata utilizzando l'identità

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}, \quad (1.22)$$

di modo che:

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (1.23)$$

Le equazioni che abbiamo ottenuto a prima vista non sembrano essere più semplici da trattare da un punto di vista matematico, anzi, ora ci sono termini con derivazione mista che in genere rendono più complicati e dispendiosi gli algoritmi risolutivi. L'importanza dell'aver introdotto i potenziali risiede però nel fatto che le relazioni 1.15 e 1.18 non definiscono univocamente i potenziali φ e \mathbf{A} . Detto in maniera più esplicita, dati due campi \mathbf{E} e \mathbf{B} è possibile scegliere infiniti potenziali, o più propriamente una famiglia di potenziali, φ e \mathbf{A} tali per cui le relazioni 1.15 e 1.18 sono sempre valide. Consideriamo infatti una trasformazione del potenziale vettore:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla\chi(\mathbf{x}, t), \quad (1.24)$$

dove $\chi(\mathbf{x}, t)$ è una funzione scalare generica. Naturalmente dalle proprietà dell'operatore rotore discende che $\nabla \times \nabla\chi = 0$ e si ha quindi che il campo magnetico non subisce variazioni:

$$\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\chi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (1.25)$$

In seguito alla stessa trasformazione il campo elettrico \mathbf{E} si trasforma come:

$$\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}' = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\chi}{\partial t} = \mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\chi}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Per ottenere un'invarianza simile a quella del caso del campo magnetico possiamo introdurre una trasformazione anche del potenziale scalare:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \varphi'(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (1.27)$$

In questo modo la relazione 1.26 diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}' &= -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\chi}{\partial t} = \\ &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

dove abbiamo invertito l'ordine di derivazione rispetto a χ . Il fatto che le trasformazioni 1.24 e 1.27, dette *trasformazioni di gauge*, non inducono variazioni nei campi, e dunque nelle equazioni di Maxwell stesse, è una nozione cruciale in quanto rappresenta una simmetria o un'invarianza dell'elettrodinamica, che a sua volta prende il nome di *invarianza di gauge*. Tali trasformazioni

ci permettono di scegliere i potenziali nella maniera più conveniente per studiare un particolare problema. Possiamo cioè imporre su φ e \mathbf{A} delle condizioni arbitrarie che, se scelte in maniera opportuna, semplificano di molto la descrizione del sistema.

Tali trasformazioni inoltre non sono naturalmente definite a meno di introdurre i potenziali elettromagnetici; per tanto, l'invarianza di gauge non ha un vero significato fisico, è una proprietà matematica, ma deve essere comunque soddisfatta per tutti gli osservabili, di modo che l'arbitraria scelta dei potenziali non influenzi sull'intensità dei campi, che costituiscono la "vera fisica". Ci sono diversi tipi di condizioni di gauge solitamente convenienti in questi contesti, definite imponendo delle restrizioni sulle trasformazioni di gauge. Tra queste quella che ora si descriverà è una delle più utilizzate: il *gauge di Lorentz*.

La condizione di gauge di Lorentz prende esplicitamente forma come:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.29)$$

Sotto questa condizione le equazione del moto per i potenziali (1.20 e 1.23) assumono ora una forma molto più immediata:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1.30)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho; \quad (1.31)$$

queste non sono altro che equazioni di D'Alembert non omogenee. In assenza di sorgenti queste assumono la forma di *equazioni delle onde*:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.32)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.33)$$

descrivendo come tali potenziali si propagano nello spazio e nel tempo come un'onda con velocità pari a quella della luce.

Il principale vantaggio del gauge di Lorentz è la sua *covarianza relativistica*. Infatti il primo membro dell'equazione 1.29 è un invariante di Lorentz, e dunque se posta in un sistema inerziale essa sarà valida in qualunque altro sistema dello stesso tipo. È importante notare che la condizione di gauge 1.29 non fissa univocamente i potenziali. Rimane ancora una certa libertà di gauge, anche se ristretta. È ancora possibile definire una famiglia di potenziali che soddisfi tale relazione ed affinché ciò sia possibile, la funzione χ che genera la trasformazione di gauge e che caratterizza tale famiglia, deve soddisfare l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.34)$$

Ciò può essere direttamente dimostrato considerando due coppie di potenziali (\mathbf{A}, φ) e (\mathbf{A}', φ') , legate dalle relazioni 1.24 e 1.27, e tali per cui la prima soddisfa 1.29. Per tanto si ha:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \chi) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

1.3 Spazio di Minkowski

La teoria della Relatività Ristretta di Einstein si fonda su due postulati fondamentali:

1. *Le leggi fisiche hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali (principio di relatività).*
2. *La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali (postulato della costanza della velocità della luce).*

Per essere in grado di costruire un'interpretazione dei fenomeni fisici in linea con questa formulazione, sono necessari strumenti e formalismi che si distaccano dall'esperienza della meccanica classica e che di seguito andiamo brevemente ad affrontare.

La fisica di Newton analizza fenomeni fisici che si svolgono nello *spazio euclideo tridimensionale* \mathbf{R}^3 e sono parametrizzati da un tempo assoluto. Ogni punto di \mathbf{R}^3 è individuato da una terna di coordinate (x_1, x_2, x_3) , come quelle cartesiane (x, y, z) e lo strumento con cui identificare le grandezze fisiche e rappresentare le relazioni è il calcolo vettoriale. Nel caso invece della Relatività Ristretta, si considera che l'universo ambiente, in cui avvengono i fenomeni fisici, è un continuo quadridimensionale, o meglio (3+1)-dimensionale, con tre dimensioni spaziali ed una temporale, detto *spazio-tempo* o *spazio di Minkowski* \mathbf{M} . Le coordinate generalmente utilizzate sono $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, indicate complessivamente come x^μ . Tale spazio, come quello euclideo, gode di una *metrica*, fondamentale per definire la distanza tra due punti (ct, x, y, z) e $(c(t + dt), x + dx, y + dy, z + dz)$:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.36)$$

dove $dx^\mu = (c dt, dx, dy, dz)$ e $\eta_{\mu\nu}$ è il così detto *tensore metrico di Minkowski*, con forma $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{+1, -1, -1, -1\}$. Tramite questo tensore è possibile introdurre le coordinate *covarianti* x_μ , definite come:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu. \quad (1.37)$$

Esplicitamente si ha $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$, $x_2 = -x^2$ e $x_3 = -x^3$. Sostanzialmente una delle funzioni del tensore metrico è quella di abbassare gli indici, ottenendo coordinate covarianti a partire da quelle controvarianti. È possibile però definirne un analogo $\eta^{\mu\nu}$, che permette di alzarli, tale per cui:

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu. \quad (1.38)$$

Avendo introdotto una struttura metrica nello spazio \mathbf{M} , possiamo definire in maniera più generale delle trasformazioni che ci permettono di passare tra due sistemi di riferimento inerziali, chiamate le *trasformazioni di Lorentz*. Dunque, una *trasformazione di Lorentz* è, per definizione, una trasformazione lineare ed omogenea delle coordinate,

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad (1.39)$$

che lascia invariato l'intervallo $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. In particolare le dx^μ si trasformano come:

$$dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu, \quad (1.40)$$

e considerando che:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (1.41)$$

si ha:

$$\Lambda_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (1.42)$$

Per rappresentare la trasformazione, possiamo allora usare anche la notazione più compatta:

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \equiv \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu}, \quad (1.43)$$

che ci sarà utile in seguito.

Nel caso in cui volessimo effettuare una trasformazione delle coordinate covarianti x_{μ} , partendo dalle relazioni 1.37 e 1.39, si ottiene:

$$x'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho} x^{\rho} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho} \eta^{\rho\sigma} x_{\sigma} = \Lambda_{\mu}^{\sigma} x_{\sigma}, \quad (1.44)$$

dove si è considerato $\Lambda_{\mu}^{\sigma} \equiv \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho} \eta^{\rho\sigma}$. Seguendo [1], possiamo dimostrare che $\Lambda_{\mu}^{\sigma} = (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\mu}$, e dunque che le componenti covarianti, in un cambio di sistema, si trasformano secondo la matrice inversa $(\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\mu}$:

$$dx'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\mu} dx_{\sigma} = \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} dx_{\sigma}. \quad (1.45)$$

Poiché le trasformazioni di Lorentz devono conservare la metrica dello spazio di Minkowski, imponendo l'invarianza della relazione 1.36 nei due sistemi di coordinate si verifica che:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} &= \eta_{\rho\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} \\ \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} &= \eta_{\rho\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} \\ \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} &= \eta_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

dove l'ultima relazione è la condizione generale a cui devono sottostare tali trasformazioni.

Ad un esame più approfondito si verifica che le trasformazioni di Lorentz comprendono non solo le *rotazioni* degli assi spaziali, che conservano la metrica euclidea e non influenzano la coordinata temporale, ma anche i *boost* o *trasformazioni di velocità*, che legano due osservatori in moto relativo rettilineo uniforme. Considerando di trovarci in un sistema di riferimento inerziale S con coordinate (t, x, y, z) ed effettuiamo una trasformazione che permette di passare ad un altro sistema di riferimento inerziale S' , con (t', x', y', z') , che si muove con velocità v rispetto al primo lungo la direzione positiva dell'asse x . Le coordinate del nuovo sistema si possono ottenere mediante la trasformazione Λ secondo la relazione:

$$(t', x', y', z')^T = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (t, x, y, z)^T, \quad (1.47)$$

dove $\beta = v/c$ e $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Questa trasformazione ammette naturalmente un'inversa associata, che corrisponde ad un boost di Lorentz con velocità v nella direzione negativa dell'asse x , che può essere scritta come:

$$(t, x, y, z)^T = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (t', x', y', z')^T. \quad (1.48)$$

L'ultimo elemento necessario per costruire una teoria covariante dell'elettromagnetismo è definire relazioni e quantità che risultano invarianti rispetto alle trasformazioni dei sistemi di coordinate, in particolare a quelle di Lorentz. Tali enti matematici prendono il nome di *quadrivettori* e *quadrivalentori*.

Un *quadrivettori controvariante* A^μ è un insieme di quattro quantità A^0, A^1, A^2, A^3 che, per una trasformazione di Lorentz $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, si trasformano come:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu, \quad (1.49)$$

cioè nello stesso modo delle componenti di dx^μ . Scriveremo i quadrivettori controvarianti nella forma

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A}). \quad (1.50)$$

Un *quadrivettore covariante* A_μ è un insieme di quattro quantità A_0, A_1, A_2, A_3 che, per una trasformazione di Lorentz, si trasformano come le componenti dx_μ , ovvero attraverso la matrice inversa:

$$A'_\mu = \Lambda_\mu^\nu A_\nu. \quad (1.51)$$

Un quadrivettore covariante si può ottenere anche moltiplicando il corrispettivo quadrivettore controvariante A^μ per il tensore metrico $\eta_{\mu\nu}$: $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$.

Un esempio di quadrivettore si può ricavare dalla formulazione covariante della dinamica. Immaginiamo di descrivere il moto di una particella attraverso la sua linea di universo $x^\mu(s)$, ovvero tramite la sua posizione nello spazio di Minkowski parametrizzata dallo scalare s . Possiamo definire la *quadrivelocità* u^μ come la derivata di x^μ rispetto ad s , cioè:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (1.52)$$

Poiché dx^μ è un quadrivettore e ds è un invariante, u^μ risulta essere per costruzione un quadrivettore. Ricordando la relazione $ds = c dt (1 - v^2/c^2)^{1/2} = c dt/\gamma$, possiamo riscrivere tale quadrivettore in termini controvarianti come:

$$u^\mu = \left(\gamma, \frac{\gamma}{c} \mathbf{v} \right), \quad (1.53)$$

dove \mathbf{v} è il vettore velocità della particella.

Generalizzando le precedenti definizioni di quadrivettore, un *quadrifensore* di rango n è un insieme di 4^n grandezze $T_{\nu_1, \dots, \nu_q}^{\mu_1, \dots, \mu_p}$, con $p + q = n$, che per una trasformazione di Lorentz si trasformano come:

$$T'^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\alpha_p} \Lambda_{\nu_1}^{\beta_1} \dots \Lambda_{\nu_q}^{\beta_q} T^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_q}. \quad (1.54)$$

Il quadrifensore $T_{\nu_1, \dots, \nu_q}^{\mu_1, \dots, \mu_p}$ è un tensore misto, p volte controvariante e q volte covariante e per questo detto di tipo (p, q) . Limitandoci solo a mostrare le definizioni di questi elementi, per una trattazione completa ed approfondita si rimanda al capitolo 5 del testo di Barone [1].

Secondo il principio di relatività ogni legge fisica deve essere *covariante* rispetto alle trasformazioni di Lorentz, e ciò che deve avere una delle due forme equivalenti:

$$R_{\nu_1, \dots, \nu_q}^{\mu_1, \dots, \mu_p} = T_{\nu_1, \dots, \nu_q}^{\mu_1, \dots, \mu_p}, \quad (1.55)$$

$$S_{\nu_1, \dots, \nu_q}^{\mu_1, \dots, \mu_p} = 0. \quad (1.56)$$

Infatti, per definizione, le quantità tensoriali che compaiono al primo ed al secondo membro di 1.55 si trasformano nello stesso modo rispetto a una trasformazione di Lorentz: quindi, se l'uguaglianza è vera in un certo sistema di riferimento inerziale, lo sarà per tutti. Analogamente, se il quadrifensore al primo membro di 1.56 è nullo in un certo sistema di riferimento inerziale, esso sarà nullo in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

1.4 Tensore del campo elettromagnetico e quadridensità di corrente

Nelle precedenti sezioni abbiamo affrontato il problema di studiare le equazioni di Maxwell mantenendo il formalismo tridimensionale classico. Quelli che invece ora seguiranno saranno i passaggi matematici per riscrivere queste relazioni in maniera compatibile al formalismo covariante mostrato nella precedente sezione.

Per descrivere i potenziali ed i campi si introducono allora due enti: il quadripotenziale elettromagnetico A^μ ed il tensore di campo $F^{\mu\nu}$. Essi sono definiti rispettivamente come:

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}), \quad (1.57)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (1.58)$$

Con la notazione ∂^μ intendiamo identificare l'operatore quadrigradiente nelle sue componenti contravarianti:

$$\partial^\mu \varphi \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\nabla \varphi \right).$$

Osserviamo che il quadrivettore A^μ ha come componenti proprio il potenziale scalare ed il potenziale vettore, mentre il tensore del campo elettromagnetico è un tensore di tipo (2,0) e costruttivamente antisimmetrico. Di conseguenza, $F^{\mu\nu}$ possiede solo sei componenti indipendenti, pari ai gradi di libertà del campo elettrico e del campo magnetico. Questo è chiaro se si esplicita la forma del tensore, sfruttando le relazioni 1.15 e 1.19. In particolare per le componenti F^{i0} abbiamo:

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} = E^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.59)$$

Mentre per le componenti con indici spaziali, $\mu, \nu = 1, 2, 3$, $F^{\mu\nu}$ assume la forma:

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z, \quad (1.60)$$

$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = -\partial_y A_z + \partial_z A_y = -B_x, \quad (1.61)$$

$$F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\partial_x A_z + \partial_z A_x = B_y. \quad (1.62)$$

Scrivendo allora il tensore di campo in forma matriciale otteniamo:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

Un'ulteriore proprietà importante del tensore del campo elettromagnetico è il fatto di essere invariante per trasformazioni di gauge, come si poteva dedurre dalla diretta dipendenza rispetto alle componenti dei campi. Si può infatti dimostrare tale asserzione osservando che le relazioni 1.24 e 1.27 si possono riscrivere complessivamente come $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \longrightarrow F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \chi) = \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \chi + \partial^\nu \partial^\mu \chi = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Come vedremo successivamente, è conveniente introdurre anche il *tensore duale* del campo elettromagnetico $\tilde{F}^{\mu\nu}$, definito come:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (1.65)$$

dove $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è simbolo di Levi-Civita 4 dimensionale. Anche $\tilde{F}^{\mu\nu}$ è antisimmetrico e può scritto in maniera esplicita come:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

Per completare la discussione, è necessario studiare anche il modo in cui rappresentare le sorgenti dei campi dal punto di visto del formalismo covariante. In particolare, lo scopo è quello di definire un quadrivettore opportuno che contenga la densità di carica ρ e la densità di corrente \mathbf{j} . Possiamo considerare per semplicità lo studio di una sorgente puntiforme, cioè una particella di carica e , per la quale le rispettive densità possono scriversi come:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)), \quad (1.67)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = e\frac{d\mathbf{z}}{dt}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}, \quad (1.68)$$

dove $\mathbf{z}(t)$ è la posizione della particella e $\mathbf{v} = d\mathbf{z}/dt$ è la sua velocità, mentre $\delta^3(\mathbf{x})$ è la delta di Dirac tridimensionale. Possiamo definire allora definire la *quadridensità di corrente* o *quadricorrente* J^μ come:

$$J^\mu(x) = (\rho c, \rho\mathbf{v}) = e\frac{dz^\mu}{dt}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)) = \rho\frac{dz^\mu}{dt}, \quad (1.69)$$

Per ricavare una forma covariante di J^μ consideriamo la seguente espressione:

$$J^\mu(x) = e\frac{dz^\mu}{dt}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)) = e\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{dz^\mu}{dt'} \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t')) = \quad (1.70)$$

$$= ec\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{dz^\mu}{dt'} \delta^4(x - z(t')). \quad (1.71)$$

Con un cambiamento di variabili di integrazione passiamo da t' all'invariante s , definito dalla relazione 1.36, cosicché otteniamo:

$$J^\mu(x) = ec\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{dz^\mu}{ds} \delta^4(x - z(s)), \quad (1.72)$$

che è la forma covariante della quadridensità di corrente di una particella avente come linea di universo $z^\mu = (z^0(s), \mathbf{z}(s))$.

In generale, anche nel caso di distribuzioni di carica continue, la densità di carica ρ è, a meno di un fattore c , la componente temporale della quadricorrente, mentre la densità di carica \mathbf{j} rappresenta le sue componenti spaziali:

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{J}) = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (1.73)$$

Sfruttando questo tipo di notazione, possiamo riscrivere anche l'equazione di continuità:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \quad (1.74)$$

Essa è naturalmente un'equazione covariante, dato che la conservazione della carica elettrica deve essere valida in tutti i sistemi di riferimento.

1.5 Equazioni di Maxwell in forma covariante

Siamo ora in grado di esprimere le equazioni di Maxwell in forma covariante; le equazioni non omogenee possono scriversi come:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \quad (1.75)$$

mentre quelle omogenee presentano due espressioni analoghe:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.76)$$

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0. \quad (1.77)$$

Una verifica diretta può aiutarci a capire che effettivamente l'affermazione risulta corretta.

1. Se consideriamo $\nu = 0$ nell'equazione 1.75, otteniamo l'equazione di Gauss:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= \frac{4\pi}{c} J^0 \\ \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} &= \partial_i E^i = \frac{4\pi}{c} c\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned} \quad (1.78)$$

2. Ponendo invece $\nu = i$ in 1.75 otteniamo l'equazione di Ampère-Maxwell:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu i} &= \partial_0 F^{0i} + \partial_l F^{li} = \frac{4\pi}{c} J^i \\ &- \partial_0 E^i + \epsilon^{ilk} \partial_l B^k = \frac{4\pi}{c} j^i \\ (\nabla \times \mathbf{B})^i - \frac{1}{c} \frac{\partial E^i}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} j^i, \end{aligned} \quad (1.79)$$

che riscritta in forma vettoriale è proprio 1.4.

3. Partiamo ora da 1.76 e consideriamo $\nu = 0$. Da qui otteniamo:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} &= \partial_0 \tilde{F}^{00} + \partial_i \tilde{F}^{i0} = 0 \\ \partial_i B^i &= 0. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Cioè che il campo magnetico \mathbf{B} è solenoidale, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

4. Infine sostituiamo $\nu = i$ nel tensore del campo elettromagnetico duale in 1.75. Facendo così, ricaviamo l'espressione:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu i} &= \partial_0 \tilde{F}^{0i} + \partial_j \tilde{F}^{ji} = 0 \\ -\partial_0 B^i - \epsilon^{ijk} \partial_j E^k &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B^i}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{E})^i = 0, \end{aligned} \quad (1.81)$$

che riscritta in forma vettoriale è proprio l'equazione di Faraday-Neumann-Lenz, 1.3.

Verificata la corretta derivazione delle equazioni di Maxwell compiamo un ultimo passo algebrico. Come abbiamo sottolineato in precedenza, lo studio dell'elettromagnetismo utilizzando il potenziale scalare e vettore, dunque il quadripotenziale, permette di porre delle condizioni ulteriori che semplificano di molto le espressioni. Sostituendo infatti nell'equazione 1.75 l'espressione esplicita del tensore del campo $F^{\mu\nu}$, 1.58, otteniamo:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \quad (1.82)$$

dove il simbolo \square è usato per indicare l'operatore dalembertiano quadridimensionale, $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right)$. Se ora imponiamo il gauge di Lorentz sul quadripotenziale A^μ , ovvero $\partial_\mu A^\mu = 0$, l'equazione si semplifica, ottenendo la nota equazione di D'Alembert non omogenea:

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (1.83)$$

Con questo risultato si conclude la prima parte della trattazione. Riprenderemo poi nel terzo capitolo questa specifica equazione differenziale, con lo scopo di individuarne una soluzione analitica.

Capitolo 2

L'equazione d'onda per la radiazione gravitazionale

Nel seguente capitolo, studieremo principalmente le equazioni di campo di Einstein, senza entrare nei dettagli delle stesse. Verrà infatti presentata solo una breve introduzione per richiamare i concetti basilari necessari per poterle manipolare. Le informazioni che verranno riportate sono tratte principalmente dalle lezioni di Hendry [2], seguendo anche i capitoli 8 e 9 di [6] e 18 di [3].

2.1 Equazioni di campo di Einstein

In numerose applicazioni della teoria di gravitazione Newtoniana, ci si trova a studiare sistemi dove il numero di "corpi" o "particelle" è estremamente numeroso e non è possibile studiare singolarmente ogni traiettoria per ottenere informazioni su di essi. In genere, si tratta allora il sistema come costituito da un *fluido* continuo, e se ne analizzano le proprietà locali in termini di variabili medie, come la densità o la pressione, per ogni elemento di fluido. Con questa terminologia intendiamo una piccola regione del fluido che assumiamo sufficientemente omogenea.

Questa descrizione può essere estesa sia alla Relatività Speciale che a quella Generale, stando attenti a definire i concetti di densità e velocità, che dipendono dal sistema di riferimento. Per ottenere una descrizione covariante del fluido e dunque delle sorgenti gravitazionali è necessario introdurre un tensore, e generalmente quello scelto a svolgere tale compito è il tensore energia-impulso T . Assunto un sistema di coordinate $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ generico, per ogni elemento di fluido, $T^{\alpha\beta}$ rappresenta il flusso della componente α del quadrimomento di tutte le cariche gravitazionali che attraversano una superficie a coordinata x^β costante.

Per studiare la forma di questo tensore è conveniente introdurre, considerando uno spazio-tempo piatto, il sistema di riferimento istantaneamente solidale con una porzione del fluido che si muove con quadrivelocità u^α , denominato "SRMC". Tramite questo, possiamo definire un elemento di fluido "perfetto" come un elemento di fluido, che se osservato rispetto al SRMC, non presenta conduzione di calore o viscosità. Per questo tipo di fluido, la componente T^{00} , cioè il flusso di energia attraverso una superficie a $t = \text{costante}$, coincide con la densità di energia ρ . Non essendoci nè un moto uniforme di particelle, dunque nessun flusso di momento, nè conduzione di calore, flusso di energia attraverso una superficie, avremo $T^{i0} = T^{0i} = 0$ per $i = 1, 2, 3$. Infine, abbiamo $T^{ij} = 0$, per $i \neq j$, dato che rappresentano forze viscosse parallele alle superfici, nulle per definizione di fluido perfetto. Per tanto T^{ij} è una matrice diagonale, che deve rimanere tale anche per altri sistemi di riferimento SRMC ottenuti tramite rotazioni. L'unica matrice con questa proprietà è un multiplo della matrice identità; per tanto, avremo che $T^{11} = T^{22} = T^{33} = P$, dove P è la pressione del fluido. Questa analisi porta alla conclusione

che il tensore energia impulso in SRMC può essere scritto solo come:

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Considerando invece un sistema di riferimento inerziale generico, l'espressione è leggermente differente. Se u^α è la quadrivelocità di un elemento di fluido, il tensore $T^{\alpha\beta}$ in tale sistema di riferimento assume la forma:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + P)u^\alpha u^\beta - P\eta^{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

dove $\eta^{\alpha\beta}$ è il tensore metrico di Minkowski nella sua forma contravariante.

In funzione del tensore $T^{\alpha\beta}$ possiamo riscrivere anche l'equazione di conservazione dell'energia e dei momenti:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad (2.3)$$

dove si ha che la divergenza del tensore è nulla.

Il passaggio successivo è quello di osservare come rappresentare questo tensore nel caso della Relatività Generale. Riportiamo il *Principio di equivalenza* di Einstein [6]:

Qualsiasi esperimento fisico locale, che non coinvolga la gravità, riporterà gli stessi risultati sia se condotto in un sistema di riferimento in caduta libera sia in una regione dello spazio-tempo piatta.

Da questo enunciato possiamo ottenere un immediato corollario (*Principio di Covarianza*):

Qualsiasi legge fisica che può essere espressa in forma tensoriale secondo la Relatività Ristretta possiede la stessa forma in un sistema di riferimento locale e inerziale di uno spazio-tempo curvo. In particolare, le derivate rispetto a coordinate x^μ dovranno essere sostituite da derivate covarianti, ed il tensore di Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ con il più generico tensore metrico $g_{\alpha\beta}$.

Per tanto, il tensore energia-impulso per un fluido perfetto in uno spazio-tempo curvo assume la forma:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + P)u^\alpha u^\beta - Pg^{\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

dove $g^{\alpha\beta}$ rappresenta la forma contravariante del tensore metrico. Possiamo estendere in questo senso anche l'equazione 2.3, per la conservazione dell'energia e dei momenti. Dunque, per un elemento di fluido nello spazio-tempo curvo vale la relazione:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \quad (2.5)$$

Se ciò non fosse vero, cioè se esistesse un punto P in cui $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \neq 0$, possiamo costruire un sistema di riferimento inerziale in P , dove le derivate covarianti si riducono a quelle parziali. Ciò porterebbe a $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \neq 0$ che contraddice l'equazione 2.3.

Senza avere alcuna pretesa di presentare una trattazione rigorosa, introduciamo le equazioni di Einstein. Esse determinano una relazione tra la geometria dello spazio-tempo, in particolare della sua curvatura, e la distribuzione di energia e momento locale. Esse si scrivono come:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, R è la sua traccia e prende il nome di scalare di curvatura. Il tensore di Ricci è definito a sua volta a partire dal più generale tensore di Riemann $\mathcal{R}^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}$, di cui vedremo a breve una forma esplicita utile per i calcoli.

In genere, il primo membro dell'equazione generalmente prende anche il nome di *tensori di Einstein* ed è scritto come:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Risolvere tali equazioni si rivela essere un compito certamente non banale. Se si considera noto il tensore metrico $g_{\mu\nu}$, si può procedere con il determinare i simboli di Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}$ ed il tensore di Einstein ed usare questi per determinare le geodesiche di particelle e fotoni. Inoltre, si possono ricavare anche le componenti del tensore energia-impulso e determinare le dipendenze temporali e spaziali di variabili fisiche come la pressione o la densità del sistema. Il problema fisico, tuttavia, è molto più difficile da affrontare. Anche se conosciuto il tensore energia-impulso, e dunque il tensore di Einstein, ricavare il tensore metrico è generalmente una richiesta nella pratica raramente trattabile. Nel corso degli anni sono state presentate alcune soluzioni analitiche, come quella di Schwarzschild, Kerr e Robertson-Walker, applicate ad una serie di fenomeni astrofisici e cosmologici differenti. Per poterlo fare riguardo al problema della propagazione delle onde gravitazionali è necessario spostare il campo di lavoro in un'area più ristretta.

2.2 Approssimazione di campo debole

Per studiare l'equazione di propagazione di onde gravitazionali, supponiamo di trovarci in una regione dello spazio-tempo in cui il campo gravitazionale è debole e di conseguenza lo spazio-tempo può essere definito "quasi" piatto. Ciò che si intende con questa affermazione è che possiamo trovare un sistema di coordinate in cui il tensore metrico $g_{\alpha\beta}$ ha forma:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.8)$$

dove $h_{\alpha\beta}$ può essere considerata una piccola perturbazione della metrica di Minkowski, cioè $|h_{\alpha\beta}| \ll 1, \forall \alpha, \beta$. Il sistema di coordinate scelto prende il nome di sistema di coordinate *quasi Lorentziano*. Sottolineiamo il fatto che la scelta di tali coordinate non è arbitraria ma ne abbiamo assunto l'esistenza, in modo da studiare il problema nelle condizioni più favorevoli possibile.

In generale, se ammettiamo l'esistenza di un sistema quasi Lorentziano, potremmo trovare trasformazioni di coordinate che rendono invariata la forma della metrica e che ci permetterebbero dunque di passare tra un sistema ad un altro. Come vedremo di seguito, esistono almeno due trasformazioni che consentono questo passaggio: le *trasformazioni di Lorentz* e le *trasformazioni di gauge*.

2.2.1 Trasformazioni di Lorentz

Supponiamo ora di trovarci in una regione dello spazio-tempo "quasi" piatta, nella quale abbiamo identificato le coordinate quasi Lorentziane (t, x, y, z) . Cerchiamo ora di passare ad un nuovo sistema di coordinate (t', x', y', z') utilizzando le trasformazioni di Lorentz, con forma identica a quella presentata in equazione 1.47 e dove gli elementi della matrice sono costanti ovunque. Per queste nuove coordinate le componenti del tensore subiscono una trasformazione compatibile a quella tipica dei tensori di tipo $(0, 2)$. Dunque abbiamo:

$$g'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Sostituendo $g_{\mu\nu}$ con l'equazione 2.8 otteniamo:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \eta_{\mu\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} h_{\mu\nu} = \eta'_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} h_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}, \quad (2.10)$$

dove l'ultima relazione è dovuta al fatto che le componenti del tensore di Minkowski sono indipendenti dal sistema di riferimento Lorentziano assunto. Considerando $v \ll 1$, da $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, $\forall \mu, \nu$, otteniamo che $|h'_{\alpha\beta}| \ll 1$. Per tanto, una regione di spazio-tempo che appare "quasi" piatta ad un osservatore è tale anche per un altro osservatore in moto rettilineo uniforme rispetto al primo.

Il risultato complessivo che otteniamo è il fatto che le componenti di $h_{\mu\nu}$ si trasformano come se appartenessero ad un tensore di rango (0,2). Naturalmente, $h_{\mu\nu}$ non è un tensore vero e proprio, in quanto è definito come solo una parte del tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Questo tipo di impostazione ci permette di trattare lo spazio, che in realtà è curvo, come se fosse sostanzialmente piatto. O meglio, si può pensare che in esso vi sia definito un tensore $h_{\mu\nu}$ con il quale poter riscrivere tutte le altre grandezze di interesse, come ad esempio il tensore di Riemann. Sottolineiamo che la validità di questo approccio risiede interamente nell'aver considerato come unico tipo di trasformazione di coordinate valido, quello di Lorentz.

2.2.2 Trasformazioni di gauge

Osserviamo l'altro tipo di trasformazione che mantiene costante la forma della metrica. Ammettiamo di compiere una variazione infinitesima delle coordinate di partenza $(x^0, x^1 \dots)$:

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta}), \quad (2.11)$$

dove le componenti ξ^{α} sono funzione delle coordinate $\{x^{\beta}\}$. Da ciò segue naturalmente che:

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \xi^{\alpha}_{,\beta}. \quad (2.12)$$

Le trasformazioni inverse possono essere ricavate partendo da

$$x^{\alpha} = x'^{\alpha} - \xi^{\alpha}(x^{\beta}), \quad (2.13)$$

ed assumendo che i "vettori" ξ^{α} sono piccoli, nel senso che $|\xi^{\alpha}_{,\beta}| \ll 1$, $\forall \alpha, \beta$. Derivando a destra e sinistra l'equazione per x'^{γ} otteniamo, per la regola della catena:

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}} = \delta_{\gamma}^{\alpha} - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\gamma}^{\alpha} - \left(\delta_{\gamma}^{\beta} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\rho}} \right) \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\gamma}^{\alpha} - \xi^{\alpha}_{,\beta} + \omega(|\xi^{\alpha}_{,\beta}|^2), \quad (2.14)$$

dove con $\omega(|\xi^{\alpha}_{,\beta}|^2)$ si intende un infinitesimo di secondo ordine rispetto a $\xi^{\alpha}_{,\beta}$. Consideriamo l'approssimazione solo al primo ordine e verifichiamo come si trasforma il tensore metrico 2.8 secondo questa trasformazione:

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu} = \\ &= \left(\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \xi^{\mu}_{,\alpha} \delta_{\beta}^{\nu} - \xi^{\nu}_{,\beta} \delta_{\alpha}^{\mu} \right) \eta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} h_{\mu\nu} = \\ &= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nel calcolo abbiamo considerato che le derivate parziali di $\eta_{\alpha\beta}$ fossero nulle e abbiamo definito $\xi_{\alpha} = \eta_{\alpha\nu} \xi^{\nu}$. In pratica, abbiamo utilizzato la metrica di Minkowski, piuttosto che la metrica completa $g_{\alpha\nu}$, per abbassare gli indici delle componenti dei vettori. Ciò è permesso solo perché stiamo lavorando con un'approssimazione al primo ordine dove sia le componenti $h_{\alpha\nu}$ e ξ^{ν} si possono considerare "piccole" e trascurabili per ordini elevati. Possiamo osservare che se $|\xi^{\mu}_{,\alpha}| \ll 1$, ciò vale anche per $\xi_{\alpha,\beta}$ e quindi per $h'_{\alpha,\beta}$. Per tanto, il nostro nuovo sistema di coordinate è ancora quasi Lorentziano, assumendo che:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}. \quad (2.16)$$

Il risultato dell'equazione 2.15 ci dice che, una volta individuato un sistema di riferimento quasi Lorentziano, possiamo aggiungere un vettore ξ^α arbitrario alle coordinate x^α senza alterare la validità che il nostro spazio-tempo sia "quasi" piatto. Una scelta opportuna del vettore ci permetterebbe allora di riscrivere le equazioni di campo di Einstein in una forma molto più semplice. Sfruttare un'invarianza del sistema per semplificare le equazioni che lo controllano è il processo che abbiamo sfruttato in sezione 1.2 e non a caso tali trasformazioni presentano lo stesso nome.

2.3 Equazioni di Einstein per un campo gravitazionale debole

Ricaveremo ora il risultato centrale della trattazione; lavorando in un sistema di coordinate quasi Lorentziano per uno spazio-tempo "quasi" piatto, possiamo semplificare di molto le equazioni di Einstein e questo ci permette di vedere come la perturbazione delle metrica di Minkowski, il termine $h_{\alpha\beta}$, obbedisca all'equazioni delle onde e che quindi la sua dinamica può essere descritta come la propagazione di un'onda. Prima di giungere a questo risultato sono necessarie alcune precisazioni di carattere algebrico. Infatti, riformuleremo i tensori che compaiono in equazione 2.6 in funzione della perturbazione al primo ordine perturbativo (in questo senso parleremo di aver ottenuto una forma *linearizzata* di questi).

2.3.1 Tensori di Riemann e di Einstein per un campo gravitazionale debole

Seguendo [2], la forma più generale del tensore di Riemann $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ è data da

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} \mathcal{R}^\mu_{\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} \left[\Gamma^\sigma_{\beta\delta} \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \Gamma^\mu_{\sigma\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\delta, \gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma, \delta} \right]. \quad (2.17)$$

Ricordando che consideriamo solo trasformazioni in sistemi quasi Lorentz, le perturbazioni della metrica $h_{\alpha\beta}$ si trasformano come se fossero componenti di un tensore di rango (0,2) definito in uno spazio-tempo piatto. In questo caso le prime due coppie di simboli di Christoffel, contenute nella definizione del tensore di Riemann, si annullano. Esso può allora essere riscritto, sfruttando la richiesta di una connessione metrica, secondo la forma:

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\delta, \beta\gamma} + h_{\beta\gamma, \alpha\delta} - h_{\alpha\gamma, \beta\delta} - h_{\beta\delta, \alpha\gamma}), \quad (2.18)$$

dove sono stati trattenuti solo i termini al primo ordine in $h_{\mu\nu}$. Questa forma è molto comoda, in quanto è invariante per trasformazioni di gauge: dall'equazione 2.16, le variazioni introdotte sono al secondo ordine rispetto $|\xi^\alpha|$ e sono dunque trascurabili. Per tanto, la scelta di una particolare trasformazione di gauge non cambia in maniera sostanziale la curvatura del nostro spazio-tempo.

Possiamo contrarre il tensore di Riemann appena ricavato per ottenere l'espressione del tensore di Ricci in forma linearizzata. Come dimostrato in Appendice A.1 esso assume la forma:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\mu, \nu\alpha}^\alpha + h_{\nu, \mu\alpha}^\alpha - h_{\mu\nu, \alpha}^\alpha - h_{, \mu\nu}). \quad (2.19)$$

Nell'ultima equazione abbiamo definito con $h \equiv h^\alpha_\alpha = \eta^\alpha_\beta h_{\alpha\beta}$ la traccia di $h_{\alpha\beta}$ ed abbiamo inoltre esteso l'operazione di scambio delle posizione degli indici anche nel caso delle derivate parziali, in particolare: $h_{\mu\nu, \alpha}^\alpha = \eta^{\alpha\sigma} (h_{\mu\nu, \alpha})_{, \sigma} = \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\nu, \alpha\sigma}$. Riprendendo la definizione del tensore di Einstein 2.7 esso può essere scritto in una nuova forma:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[h_{\mu\alpha, \nu}^\alpha + h_{\nu\alpha, \mu}^\alpha - h_{\mu\nu, \alpha}^\alpha - h_{, \mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (h_{\alpha\beta}{}^{, \alpha\beta} - h_{, \beta}{}^{, \beta}) \right]. \quad (2.20)$$

Come si può osservare, essa è piuttosto complicata, ma può essere semplificata leggermente, Appendice A.1, introducendo una forma modificata della perturbazione della metrica $h_{\alpha\beta}$:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (2.21)$$

Questa scrittura permette di ridurre il numero di termini che compaiono nell'equazione (Appendice A.1):

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha}\right]. \quad (2.22)$$

Questa è la forma del tensore di Einstein a cui volevamo giungere e che conclude tutte le operazioni di natura algebrica richieste. Nella prossima sezione si analizzerà più a fondo come si comportano le equazioni di Einstein sulla base della nostra impostazione.

2.3.2 Equazioni di Einstein in forma linearizzata

Nonostante le semplificazioni introdotte nella metrica, considerando un campo gravitazionale debole, l'espressione delle equazioni di Einstein risulta ancora involuta, come si può notare sostituendo 2.22 in 2.6:

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} + \bar{\eta}_{\mu\nu}h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Ricordiamo però, come abbiamo visto anche nel caso dell'elettromagnetismo, che è possibile introdurre anche delle trasformazioni di gauge per semplificare il calcolo; in particolare, ciò su cui ci focalizzeremo, è eliminare gli ultimi tre termini del membro di sinistra. Un modo per farlo è introdurre una condizione che per molti aspetti è simile a quella mostrata in equazione 1.29, e che porta il nome di *gauge armonico*. Ciò è equivalente a trovare una trasformazione di coordinate per cui si trova:

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0. \quad (2.24)$$

Dimostriamo, seguendo quanto mostrato in [6], che è sempre possibile trovare un gauge di questo tipo.

Supponiamo di trovarci in un sistema di coordinate iniziale per cui la componente del tensore metrico $h_{\mu\nu}^{(old)}$ non soddisfa 2.24, e che quindi $\bar{h}^{(old)\mu\nu}{}_{,\nu} \neq 0$. Introduciamo ora una trasformazione di gauge indotta dal vettore ξ^α ; per 2.16 si ottiene che:

$$h_{\mu\nu}^{(HG)} = h_{\mu\nu}^{(old)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}, \quad (2.25)$$

dove usiamo l'apice (HG) per indicare che la nuova componente soddisferà la condizione di gauge armonica. Passando alla notazione con termini barrati otteniamo:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}^{(HG)} &= h_{\mu\nu}^{(HG)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}^{(HG)} \\ &= h_{\mu\nu}^{(old)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left[\eta^{\alpha\beta}\left(h_{\alpha\beta}^{(old)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}\right)\right] \\ &= h_{\mu\nu}^{(old)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(old)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\xi_{\alpha,\beta} \\ &= \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\beta}{}_{,\beta}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Facendo la divergenza delle sue componenti contravarianti ricaviamo:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{(HG)\mu\nu}{}_{,\nu} &= \bar{h}^{(old)\mu\nu}{}_{,\nu} - \eta^{\nu\beta}\xi^{\mu}{}_{,\beta\nu} - \eta^{\mu\alpha}\xi^{\nu}{}_{,\nu\alpha} + \eta^{\mu\nu}\xi^{\beta}{}_{,\beta\nu} \\ &= \bar{h}^{(old)\mu\nu}{}_{,\nu} - \eta^{\nu\beta}\xi^{\mu}{}_{,\beta\nu} \\ &= \bar{h}^{(old)\mu\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Se vogliamo garantire che valga 2.24 per $\bar{h}^{(HG)\mu\nu}$, allora ξ^μ sarà determinata dall'equazione:

$$\xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = \square \xi^\mu = \bar{h}^{(old)\mu\nu}{}_{,\nu}, \quad (2.28)$$

Questo tipo di equazione differenziale, per opportune condizioni di regolarità delle funzioni, ammette sempre una soluzione; dunque esiste un vettore ξ^μ utilizzabile per applicare questo gauge alla componente della metrica. Inoltre esso non è unico, infatti se sommiamo qualsiasi vettore χ^μ , che risolve l'equazione omogenea associata $\square \chi^\mu = 0$, otteniamo nuovamente la stessa condizione:

$$\square(\xi^\mu + \chi^\mu) = \bar{h}^{(old)\mu\nu}{}_{,\nu}, \quad (2.29)$$

ed in maniera simile al caso dell'elettromagnetismo troviamo un'intera famiglia di trasformazioni di gauge compatibile con le nostre condizioni.

Ciò che possiamo fare ora, trovato un opportuno vettore di gauge, è vedere che forma assumono le equazioni di Einstein. Rimandando la dimostrazione nuovamente in Appendice A.2, gli ultimi tre termini del membro di sinistra della relazione 2.23 si annullano, portando a

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} = \square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

dove è stato eliminato l'apice "(HG)".

Mettendo a confronto le equazioni 1.83 e 2.30, è chiaro come le due possiedano la medesima forma, anche se i tensori che ve ne prendono parte sono di tipo differente. In particolare, si vuole sottolineare come l'equazione che descrive le due interazioni ammette come soluzione la dinamica di un'onda che si propaga con velocità pari a quella della luce. Per vedere meglio questo fatto consideriamo il caso particolare più semplice, ovvero quello in cui ci poniamo nello spazio vuoto, privo di sorgenti. Consideriamo allora che il tensore di energia-impulso è identicamente nullo e l'equazione 2.30 prende la forma esplicita:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.31)$$

Ricordando che per scelta delle unità di misura abbiamo posto $c = 1$, ritorniamo alle unità del Sistema Internazionale per ottenere $\eta^{00} = \frac{1}{c^2}$. L'equazione 2.30 si scrive allora come:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.32)$$

che, come già anticipato più volte, descrive matematicamente la propagazione delle perturbazioni o "pieghe" dello spazio-tempo come quella di un'onda che si muove nello spazio vuoto, con velocità pari a quella della luce.

Capitolo 3

Risoluzione dell'equazione di d'Alembert non omogenea mediante funzione di Green

In quest'ultimo capitolo vogliamo presentare un metodo risolutivo per l'equazione di d'Alembert non omogenea, che come abbiamo visto è tipica nel caso della propagazione dell'interazione elettromagnetica, ma può essere ricondotta anche al caso dell'interazione gravitazionale, con le opportune approssimazioni. Il procedimento scelto prende il nome di metodo delle funzioni di Green e lo applicheremo seguendo la trattazione mostrata in [1] e [4]. Analizzeremo nel particolare la risoluzione delle equazioni di Maxwell ricavando una soluzione analitica. Per i procedimenti matematici relativi all'analisi complessa rimandiamo al testo [5].

3.1 Funzione di Green per l'operatore dalembertiano

Le equazioni che cercheremo di risolvere saranno dunque quelle di Maxwell per il quadripotenziale A^μ nel gauge di Lorentz:

$$\square A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} J^\mu. \quad (3.1)$$

Essa è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico ed il problema di Cauchy associato consiste nel determinare $A^\mu(x)$ in funzione della quadricorrente J^μ e delle condizioni al contorno; in particolare il valore di $A^\mu(x)$ e della sua derivata normale $n_\nu \partial^\nu A^\mu$ su una superficie di tipo spazio che si estende fino all'infinito. È inoltre necessario, in teoria relativistica, che tali condizioni siano di tipo *asintotico*, cioè assegnate per superfici a $t = \pm\infty$. Per un maggiore approfondimento, si rimanda a [4].

Il metodo che adotteremo richiede l'esistenza di una funzione $G(x' - x)$ tale che:

$$\square G(x' - x) = \delta^4(x' - x), \quad (3.2)$$

e soddisfacente le stesse condizioni al contorno di 3.1. La funzione $G(x' - x)$ è detta *funzione di Green* del dalembertiano \square e rappresenta il potenziale generato in x da una carica puntiforme posta in x' . Osserviamo come per l'omogeneità dello spazio-tempo G è invariante per traslazioni e dipende solo dalla differenza $x' - x$. L'importanza di questa funzione consiste nel permetterci di scrivere una soluzione dell'equazione 3.1 come:

$$A^\mu = A_0^\mu + \frac{4\pi}{c} \int d^4x' G(x' - x) J^\mu(x'), \quad (3.3)$$

dove A_0^μ soddisfa $\square A_0^\mu = 0$, ed è dunque soluzione dell'equazione omogenea associata. È immediato verificare applicando l'operatore \square alla 3.3, in virtù della relazione 3.2, si riottiene la 3.1.

Per calcolare esplicitamente la funzione di Green introduciamo la sua trasformata Fourier quadridimensionale $\tilde{G}(k)$:

$$G(x' - x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-x')} \tilde{G}(k). \quad (3.4)$$

Ricordando la rappresentazione integrale della delta di Dirac:

$$\delta^4(x' - x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-x')}, \quad (3.5)$$

e sostituendo le due rappresentazioni integrali in 3.1, considerando che l'operatore d'Alembertiano è riferito solo alle coordinate x e può dunque entrare nell'integrale, otteniamo:

$$-\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-x')} k^2 \tilde{G}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-x')}. \quad (3.6)$$

Affinché ciò sia possibile è necessario richiedere:

$$k^2 \tilde{G}(k) = -1. \quad (3.7)$$

La soluzione generale dell'equazione, tratta da una relazione integrale, si può esplicitare come:

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{k^2} + C(k)\delta(k^2), \quad (3.8)$$

dove $C(k)$ è una funzione regolare di k^μ . Dato che $k^2\delta(k^2) = 0$ il secondo termine della soluzione può essere ignorato ed assorbito insieme alla soluzione di d'Alembert omogenea A_0^μ . L'espressione di G , separando l'integrazione su k^0 da quella su \mathbf{k} assume la forma:

$$\begin{aligned} G(x' - x) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{k^2} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Per valutare il valore dell'integrale su k^0 utilizzeremo i metodi di integrazione nel campo complesso. Osserviamo che l'argomento dell'integrale possiede come uniche singolarità due poli semplici sull'asse reale, $k^0 = \pm|\mathbf{k}| \equiv \pm\kappa$. Però esse si trovano lungo il cammino di integrazione e non è dunque possibile definirlo in maniera diretta. È necessario modificare il cammino di integrazione sfruttando le proprietà di regolarità dell'integrando. In Figura 3.1 vediamo tre possibili cammini, i quali definiscono tre alternative funzioni di Green, differenti per una soluzione dell'equazione omogenea.

3.1.1 Funzione di Green ritardata ed avanzata

La possibilità di poter definire più funzioni di Green, valide per lo stesso problema non implica che tutte siano fisicamente valide allo stesso modo. Come vedremo infatti, la scelta del cammino di integrazione si rivela cruciale nel ricavare una soluzione che rispetti anche il *principio di causalità*.

Anche se il concetto di "casualità" sfugge, in un certo senso, ad una definizione rigorosa, in ambito fisico ci si può riferire ad essa come la richiesta che: un fenomeno fisico deve sempre

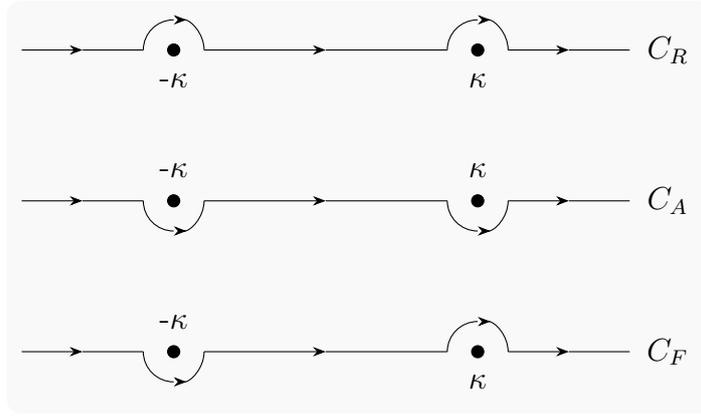


Figura 3.1: Esempi di cammini di integrazione che aggirano i due poli in $\pm\kappa$; il raggio dei semicerchi viene poi fatto tendere a zero.

essere preceduto dalla propria causa. Se decliniamo questa richiesta nell'ambito della Relatività Ristretta, richiediamo che, affinché ci sia un legame causale tra due eventi, essi, nel piano di Minkowski, devono essere gli estremi di un vettore di tipo *tempo* o *luce*. Alternativamente, si può richiedere che la causa sia all'interno del cono luce passato dell'effetto. Questo deve risultare vero in tutti i sistemi di riferimento fisici inerziali, quindi non è una relazione dipendente dall'osservatore.

Nel caso dell'elettromagnetismo, possiamo considerare una corrente dovuta da una carica che segue una particolare linea di universo rappresentata nello spazio di Minkowski, Figura 3.2. Ad ogni punto Q di questa linea verranno prodotti campi elettromagnetici che si muoveranno con la velocità della luce, e dunque lungo il cono di luce verso la direzione "futura". Come conseguenza, il campo elettromagnetico ad un punto P è dovuto al moto della carica al punto Q , senza considerare la presenza di eventuali campi esterni. Questo campo in P prende il nome di *campo ritardato*, in quanto determinato da una sorgente ad un tempo precedente. In maniera inversa si possono individuare il punto o i punti ritardati per un certo evento P disegnando il cono riferito al tempo passato con vertice in P . Questo cono intersecherà le linee di universo delle cariche in un solo punto Q , dato che essa ha come vettori tangenti solo vettori di tipo tempo.

Affinché sia valida la condizione fisica di causalità, ovvero di come il campo al tempo t deve dipendere dallo stato delle sorgenti ad un istante precedente $t' < t$, è necessario porre una richiesta sulla funzione di Green, che nomineremo G_R . In particolare, essa deve soddisfare la relazione:

$$G_R(x - x') = 0 \quad \text{per} \quad x^0 - x'^0 < 0; \quad (3.10)$$

se inserito in equazione 3.3 vediamo come il potenziale dipenderà dalla sorgente solo nel caso in cui $x^0 > x'^0$. Affinché ciò sia possibile mostriamo che la scelta del cammino di integrazione in 3.9 ricade su quello che aggira i due poli dall'alto, C_R . Calcoliamo allora l'integrale rispetto alla variabile k_0 :

$$I \equiv \int_{C_R} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0 - x'^0)}}{(k^0)^2 - \kappa^2}. \quad (3.11)$$

Se $x^0 - x'^0 < 0$, per il lemma di Jordan possiamo chiudere il cammino C_R nel semipiano superiore e, come si vede in Figura 3.3, entrambi i poli si trovano all'esterno e per tanto I risulta essere nullo:

$$I = 0 \quad \text{per} \quad x^0 - x'^0 < 0. \quad (3.12)$$

Se consideriamo invece $x^0 - x'^0 > 0$, chiudendo C_R ora nel semipiano inferiore, entrambi i due poli vengono ora a trovarsi all'interno. Applicando il teorema dei residui nel caso di poli

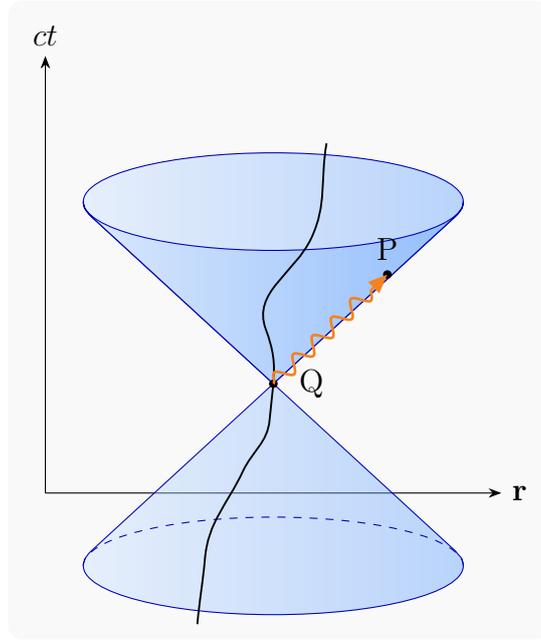


Figura 3.2: Coni di luce passati e futuri associati ad un punto Q su una linea di universo di una particella carica. Si sottolinea il propagarsi dell'interazione lungo il cono di luce fino ad un evento futuro P .

semplici troviamo:

$$\begin{aligned}
 I &= -2\pi i \left[\lim_{k^0 \rightarrow \kappa} (k^0 - \kappa) \frac{e^{-ik^0(x^0 - x'^0)}}{(k^0)^2 - \kappa^2} + \lim_{k^0 \rightarrow -\kappa} (k^0 + \kappa) \frac{e^{-ik^0(x^0 - x'^0)}}{(k^0)^2 - \kappa^2} \right] = \\
 &= -2\pi i \frac{1}{2\kappa} \left[e^{-i\kappa(x^0 - x'^0)} - e^{i\kappa(x^0 - x'^0)} \right] \quad \text{per } x^0 - x'^0 > 0.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

La forma generale del risultato di questo integrale può essere ottenuta mediante la funzione a gradino di Heaviside $\theta(z)$ definita come:

$$\theta(z) = \begin{cases} 0 & z < 0, \\ 1 & z \geq 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Per tanto la forma generale dell'integrale I rispetto a $x^0 - x'^0$ diventa

$$I = -\frac{\pi i}{\kappa} \left[e^{-i\kappa(x^0 - x'^0)} - e^{i\kappa(x^0 - x'^0)} \right] \theta(x^0 - x'^0). \tag{3.15}$$

Ottenuto questa espressione, per ricavare la forma conclusiva della funzione di Green ritardata G_R è sufficiente inserirla in equazione 3.9. Posticipando i calcoli ad una trattazione più approfondita in Appendice B, il risultato finale per la funzione di Green ritardata è dato da

$$G_R(x - x') = \frac{\delta(x^0 - x'^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \tag{3.16}$$

Osserviamo che tale funzione di Green soddisfa quanto ricercato: essa ha supporto nullo solo per punti il cui intervallo è di tipo luce e vale la relazione:

$$t = t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \tag{3.17}$$

ovvero descrive un potenziale che in \mathbf{x} all'istante t è determinato dalla sorgente nel punto \mathbf{x}' solo all'istante precedente t' ; inoltre il tempo di propagazione è dato da $\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$.

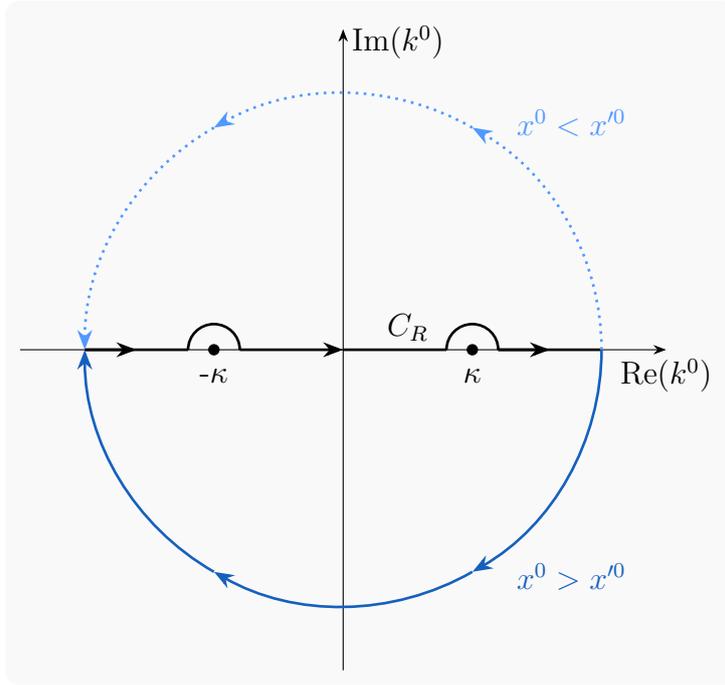


Figura 3.3: Cammino di integrazione nel piano complesso di k^0 per la funzione di Green ritardata.

Per completezza descrittiva consideriamo un caso differente. Proviamo a trovare una funzione di Green che si annulli per $x^0 - x'^0 > 0$ e indichiamola come G_A . Essa ci permette di costruire un potenziale, che in un certo istante t , dipende dalla configurazione delle sorgenti in un istante successivo; un potenziale di questo tipo è detto *avanzato* e per questo G_A è detta a sua volta *funzione di Green avanzata*.

Il cammino di integrazione che fornisce G_A è quello che aggira i due poli dal basso, il cammino C_A in Figura 3.1, e i calcoli matematici necessari per risolvere l'integrale sono analoghi al caso precedente. Il risultato che si ottiene è

$$G_A(x - x') = \frac{\delta(x^0 - x'^0 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}; \quad (3.18)$$

dove in questo caso i due eventi sono legati da

$$t = t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}. \quad (3.19)$$

3.2 Soluzione per l'equazione non omogenea

Determinata la funzione di Green, per giungere alla soluzione dell'equazione è necessario risolvere anche la parte omogenea $\square A_0^\mu = 0$, con le opportune condizioni al contorno. Lasciando al lettore il riferimento ai testi [1] e [4] per una dimostrazione completa, riassumiamo qui i punti principali del procedimento.

Per ricavare una soluzione omogenea si costruisce una funzione ausiliaria $D(x)$, nota come *funzione di Jordan-Pauli* tale che:

$$\square D(x) = 0, \quad (3.20)$$

$$D(x) = 0 \quad \text{per} \quad x_\mu x^\mu < 0, \quad (3.21)$$

$$\partial^\mu D(x) \Big|_{n_\nu x^\nu = 0} = n^\mu \delta_\sigma(x), \quad (3.22)$$

dove n^μ è un vettore unitario di tipo tempo ortogonale ad una superficie di tipo spazio σ , e la funzione delta su σ è definita implicitamente da

$$\int_{\sigma} f(x) \delta_{\sigma}(x - x') n^{\mu} d\sigma_{\mu}(x) = f(x'), \quad x' \in \sigma. \quad (3.23)$$

La forma finale che si ricava della funzione D è generalmente:

$$D(x - x') = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} e^{-ik \cdot (x - x')} \delta(k^2) \epsilon(k), \quad (3.24)$$

dove $\epsilon(k)$ è una funzione definita come: $\epsilon(k) = \frac{k \cdot n}{|k \cdot n|}$ ed è una generalizzazione della funzione segno. Appliciamo il teorema di Green quadrimensionale alle funzioni $A_0^\mu(x)$ e $D(x)$:

$$\begin{aligned} \int_V d^4 x' \left[A_0^\mu(x') \square D(x - x') - D(x - x') \square A_0^\mu(x') \right] = \\ \int_{\sigma} d\sigma_{\nu}(x') \left[A_0^\mu(x') \partial^{\nu} D(x' - x) - D(x' - x) \partial^{\nu} A_0^\mu(x') \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

dove si è considerato $\partial'_\mu \equiv \partial/\partial x'^\mu$ ed abbiamo assunto che σ è la superficie che circonda il volume V e che consideriamo essere costituita dall'unione di due superfici di tipo spazio σ_0 e σ_1 e di una superficie di tipo tempo σ_∞ collocata all'infinito spaziale. Sfruttando il fatto che il dalembertiano di queste è nullo, si ottiene che la soluzione dell'equazione omogenea associata a 3.1 può essere scritta come:

$$A_0^\mu(x) = \int_{\sigma_0} d\sigma_{\nu}(x') \left[A_0^\mu(x') \partial^{\nu} D(x' - x) - D(x' - x) \partial^{\nu} A_0^\mu(x') \right]. \quad (3.26)$$

Come abbiamo già detto, tali condizioni sono assegnate su superfici corrispondenti a $t = -\infty$ (passato infinito) oppure $t = +\infty$ (futuro infinito). In questo caso, le soluzioni dell'equazione omogenea, presentate in equazione 3.26 sono dette, rispettivamente, *potenziale entrante* A_{in}^μ ed *potenziale uscente* A_{out}^μ , a seconda della scelta.

Con tutte le informazioni in nostro possesso siamo ora in grado di costruire una soluzione per l'equazione d'Alembert 3.1, che rispetti la condizione di causalità:

$$A^\mu = A_{in}^\mu + \frac{4\pi}{c} \int d^4 x' G_R(x - x') J^\mu(x'). \quad (3.27)$$

Osserviamo come nell'equazione compaiono il potenziale entrante, con condizione iniziale ad un tempo infinitamente precedente, e la funzione di Green ritardata. In particolare, il secondo termine della somma può essere riscritto come:

$$A_{rit}^\mu = \frac{4\pi}{c} \int d^4 x' G_R(x - x') J^\mu(x) = \frac{1}{c} \int d^4 x' \frac{\delta(x^0 - x'^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} J^\mu(x'), \quad (3.28)$$

che prende il nome di *potenziale ritardato*.

Mostriamo ora alcune proprietà di tale potenziale. Innanzitutto, riscriviamolo in maniera esplicita ricavando il potenziale scalare $\varphi_{rit}(\mathbf{x}, t)$ ed il potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ ritardati. Per il potenziale scalare otteniamo:

$$\varphi_{rit}(\mathbf{x}, t) = \int dx'^0 \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\delta(x^0 - x'^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}', t'); \quad (3.29)$$

integrando su x'^0 abbiamo per mezzo della funzione delta di Dirac:

$$\varphi_{rit}(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.30)$$

Lo stesso si ottiene nel caso del potenziale vettore ritardato:

$$\mathbf{A}_{rit}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \quad (3.31)$$

Ricordiamo che l'equazione 3.1 per A^μ vale solo nel gauge di Lorentz, per cui $\partial_\mu A^\mu = 0$. Un'importante proprietà che si può ricavare dal potenziale ritardato è che esso rispetta sempre la condizione di gauge, $\partial_\mu A_{rit}^\mu = 0$. Per tanto affinché ciò valga anche per la soluzione generica bisogna verificare che solo il potenziale entrante lo rispetti.

Dimostriamo dunque questa affermazione. Calcoliamo $\partial_\mu A_{rit}^\mu$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_{rit}^\mu &= \frac{4\pi}{c} \int d^4x' \partial_\mu G_R(x-x') J^\mu(x') = -\frac{4\pi}{c} \int d^4x' \partial'_\mu G_R(x-x') J^\mu(x') d^4x' = \\ &= -\frac{4\pi}{c} \int d^4x' \partial'_\mu [G_R(x-x') J^\mu(x')] + \frac{4\pi}{c} \int d^4x' G_R(x-x') \partial'_\mu J^\mu(x'). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Considerando che $\partial_\mu G_R(x-x') = -\partial'_\mu G_R(x-x')$, abbiamo proceduto poi integrando per parti. Notiamo che il secondo termine in 3.32 è nullo per la conservazione della carica ($\partial'_\mu J^\mu(x') = 0$). Applichiamo il teorema di Gauss al termine rimanente, trasformando il calcolo nell'integrale di superficie:

$$\partial_\mu A_{rit}^\mu = -\frac{4\pi}{c} \int_{\sigma^+} d^4x' G_R(x-x') J^\mu(x') + \frac{4\pi}{c} \int_{\sigma^-} d^4x' G_R(x-x') J^\mu(x'), \quad (3.33)$$

dove σ^+ e σ^- sono ipersuperfici infinite di tipo spazio collocate, rispettivamente, a $t = +\infty$ e a $t = -\infty$. Abbiamo supposto che l'integrando vada a zero all'infinito spaziale, infatti la quadricorrente è nulla in tale regione, in quanto assumiamo che le sorgenti siano comunque localizzate nello spazio (dunque abbiamo omissso il termine di superficie corrispondente). Poiché la funzione di Green $G_R(x-x')$ ha supporto non nullo solo per punti con intervallo di tipo luce, dalla 3.33 segue $\partial_\mu A_{rit}^\mu = 0$, come volevamo dimostrare.

Appendice A

Linearizzazione delle equazioni di Einstein

Questa appendice è inserita per completezza descrittiva al fine di mostrare in maniera precisa i passaggi algebrici che consentono di ottenere le equazioni di campo di Einstein in forma linearizzata. In particolare seguiranno i calcoli necessari per ottenere l'espressione del tensore di Einstein rispetto alla perturbazione $h_{\mu\nu}$ ed alla sua forma barrata, $\bar{h}_{\mu\nu}$; rispettivamente le equazioni 2.20 e 2.22. Per farlo sarà necessario mostrare alcune proprietà del tensore di Riemann e del tensore di Ricci.

Verrà inoltre mostrato come tramite la condizione di gauge 2.24 si giunge all'equazione di Einstein linearizzata 2.30; in particolare si vedrà come gli ultimi tre termini del membro di sinistra in 2.23 diventino nulli una volta soddisfatta la condizione di gauge armonica.

I passaggi sono ripresi dalle lezioni presentate in [2].

A.1 Tensore di Einstein linearizzato

Riprendendo la forma covariante generalizzata del tensore di Riemann-Christoffel presentata in equazione 2.17, dobbiamo considerare di lavorare in spazio-tempo principalmente di Minkowski; in questa circostanza i simboli di Christoffel si annullano e la sua espressione diventa:

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu}\mathcal{R}^{\mu}_{\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta,\gamma} - g_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma,\delta}. \quad (\text{A.1})$$

Sostituendo ora la forma canonica dei simboli di Christoffel, dipendente dalla metrica e dalle sue derivate parziali:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left(g_{li,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}\right), \quad (\text{A.2})$$

ricaviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= g_{\alpha\mu}\frac{g^{\mu\sigma}}{2}\left(g_{\sigma\beta,\delta\gamma} + g_{\sigma\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\sigma\gamma}\right) - g_{\alpha\mu}\frac{g^{\mu\sigma}}{2}\left(g_{\sigma\beta,\gamma\delta} + g_{\sigma\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\gamma,\sigma\delta}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\delta,\beta\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\delta,\beta\gamma} + h_{\beta\gamma,\alpha\delta} - h_{\alpha\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\delta,\alpha\gamma}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

dove nell'ultima equivalenza abbiamo considerato la condizione 2.8. In questo modo abbiamo dimostrato la forma che assume il tensore in equazione 2.18. Possiamo passare ora a verificare la forma del tensore di Ricci in forma linearizzata, essenziale per ottenere il tensore di Einstein. Dall'equazione precedente, trattenendo solamente i termini al primo ordine in $h_{\mu\nu}$ verifichiamo

che:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\alpha} \left(h_{\alpha\nu,\mu\sigma} + h_{\mu\sigma,\alpha\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\sigma} - h_{\alpha\sigma,\mu\nu} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\eta^{\sigma\alpha} h_{\alpha\nu} \right)_{,\mu\sigma} + \left(\eta^{\sigma\alpha} h_{\mu\sigma} \right)_{,\alpha\nu} - \left(\eta^{\sigma\alpha} h_{\mu\nu} \right)_{,\alpha\sigma} - \left(\eta^{\sigma\alpha} h_{\alpha\sigma} \right)_{,\mu\nu} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(h_\nu^\sigma \right)_{,\mu\sigma} + \left(h_\mu^\alpha \right)_{,\alpha\nu} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h_{,\mu\nu} \right].
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Per tanto lo scalare di curvatura R equivale a

$$R = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \left[\left(h_\beta^\sigma \right)_{,\alpha\sigma} + \left(h_\alpha^\sigma \right)_{,\beta\sigma} - h_{\alpha\beta,\sigma}{}^\sigma - h_{,\alpha\beta} \right] \tag{A.5}$$

Trovato il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura possiamo scrivere il tensore di Einstein secondo la definizione 2.7:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \frac{1}{2} \left[\left(h_\nu^\sigma \right)_{,\mu\sigma} + \left(h_\mu^\alpha \right)_{,\alpha\nu} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h_{,\mu\nu} \right] \\
&\quad - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \left[\left(h_\beta^\sigma \right)_{,\alpha\sigma} + \left(h_\alpha^\sigma \right)_{,\beta\sigma} - h_{\alpha\beta,\sigma}{}^\sigma - h_{,\alpha\beta} \right].
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Partendo ora dalla relazione 2.20 vediamo come termine a termine essa coincide con A.6:

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{2} \left[h_{\mu\alpha,\nu}{}^\alpha + h_{\nu\alpha,\mu}{}^\alpha - h_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \left(h_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\alpha,\nu\sigma} + \eta^{\alpha\sigma} h_{\nu\alpha,\mu\sigma} - \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\nu,\alpha\sigma} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} h_{\alpha\beta,\gamma\sigma} + \eta_{\mu\nu} \eta^{\beta\alpha} h_{,\alpha\beta} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\alpha} \right)_{,\nu\sigma} + \left(\eta^{\alpha\sigma} h_{\nu\alpha} \right)_{,\mu\sigma} - h_{\mu\nu,\sigma}{}^\sigma - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \left(\eta^{\beta\sigma} h_{\alpha\beta} \right)_{,\gamma\sigma} + \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} h_{,\alpha\beta} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(h_\nu^\sigma \right)_{,\mu\sigma} + \left(h_\mu^\sigma \right)_{,\nu\sigma} - h_{\mu\nu,\sigma}{}^\sigma - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \left(h_\alpha^\sigma \right)_{,\gamma\sigma} + \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} h_{,\alpha\beta} \right].
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Notiamo dunque che i primi quattro termini coincidono con la prima parentesi quadra in A.6. Passiamo dunque agli ultimi quattro. Sfruttando la simmetria del tensore di Minkowski $\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\alpha}$ abbiamo

$$-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\gamma} \left(h_\alpha^\sigma \right)_{,\gamma\sigma} = -\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \frac{\eta^{\alpha\gamma} + \eta^{\gamma\alpha}}{2} \left(h_\alpha^\sigma \right)_{,\gamma\sigma} = -\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\gamma} \left[\left(h_\gamma^\sigma \right)_{,\alpha\sigma} + \left(h_\alpha^\sigma \right)_{,\gamma\sigma} \right], \tag{A.8}$$

ed anche che:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \left[h_{\alpha\beta,\sigma}{}^\sigma - h_{,\alpha\beta} \right] &= \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \left[\eta^{\sigma\gamma} h_{\alpha\beta,\sigma\gamma} + h_{\alpha\beta} \right] = \\
&= \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\gamma} \left(\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \right)_{,\sigma\gamma} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\gamma} = \\
&= \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} h_{,\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Per tanto, eccetto qualche permutazione di indici ripetuti, otteniamo gli stessi termini del tensore di Einstein, stabilendo che l'equazione 2.20 è effettivamente la forma corretta.

Possiamo passare ora all'ultima verifica, che riguarda il tensore di Einstein in forma barrata. Proseguiremo allo stesso modo del caso precedente, partendo dai termini in equazione 2.22

vediamo come possono essere riformulati per riottenere l'espressione del tensore secondo A.6. Partiamo riscrivendo i vari termini barrati presenti nella prima equazione:

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = \eta^{\alpha\sigma} \bar{h}_{\mu\nu,\alpha\sigma} = \eta^{\alpha\sigma} \left[h_{\mu\nu,\alpha\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h_{\alpha\sigma} \right]. \quad (\text{A.10})$$

$$\eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} \bar{h}_{\alpha\beta,\gamma\sigma} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} \left[h_{\alpha\beta,\gamma\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h_{\gamma\sigma} \right]. \quad (\text{A.11})$$

I termini rimanenti, $\bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha}$ e $\bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha}$, si scrivono allo stesso modo di $\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha}$, solo con una diversa permutazione degli indici. Sulla base di queste relazione, utilizzando 2.22, possiamo scrivere il tensore di Einstein come:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\nu,\alpha\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\sigma} \eta_{\mu\nu} h_{,\alpha\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} h_{\alpha\beta,\gamma\sigma} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} \eta_{\alpha\beta} h_{,\gamma\sigma} \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\alpha,\nu\sigma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\sigma} \eta_{\mu\alpha} h_{,\nu\sigma} \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\nu\alpha,\mu\sigma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\sigma} \eta_{\nu\alpha} h_{,\mu\sigma} = \\ &= +\frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\alpha,\nu\sigma} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\nu\alpha,\mu\sigma} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\nu,\alpha\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{2} h_{,\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} h_{\alpha\beta,\gamma\sigma} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} \eta_{\mu\nu} h_{,\alpha\sigma} = \\ &= +\frac{1}{2} h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + \frac{1}{2} h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{2} h_{,\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h_{,\alpha}{}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Osserviamo che l'ultima relazione coincide termine a termine con A.6, dimostrando che l'espressione scelta di $G_{\mu\nu}$ in 2.22 è corretta.

A.2 Condizione di gauge armonica

Seguiranno ora tre brevi calcoli algebrici per dimostrare come la condizione di gauge di Lorentz $\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ permetta di semplificare le equazioni di Einstein 2.23 andando ad annullare i termini $\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta}$, $\bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha}$ e $\bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} &= \left(\eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\sigma} \bar{h}^{\gamma\sigma} \right)_{,\alpha\beta} = \\ &= \left(\eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\sigma} \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\tau} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\rho\tau} \right) = \\ &= \left(\delta_{\gamma}^{\rho} \delta_{\sigma}^{\tau} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\rho\tau} \right) = \\ &= \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\gamma\sigma} = \left(\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma} \right)_{,\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} &= \eta_{\mu\gamma} \eta_{\alpha\sigma} \left(\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu} \right)_{,\alpha} = \\ &= \eta_{\mu\gamma} \eta_{\alpha\sigma} \eta^{\alpha\rho} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu\rho} = \\ &= \eta_{\mu\gamma} \delta_{\sigma}^{\rho} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu\rho} = \\ &= \eta_{\mu\gamma} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu\sigma} = \eta_{\mu\gamma} \left(\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma} \right)_{,\nu} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{;\alpha} &= \eta_{\mu\gamma} \eta_{\alpha\sigma} (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu}){}^{;\alpha} = \\
&= \eta_{\nu\gamma} \eta_{\alpha\sigma} \eta^{\alpha\rho} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\rho} = \\
&= \eta_{\nu\gamma} \delta_{\sigma}^{\rho} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\rho} = \\
&= \eta_{\nu\gamma} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\sigma} = \eta_{\mu\gamma} (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma}){}_{,\mu} = 0.
\end{aligned}
\tag{A.15}$$

Appendice B

Funzione di Green ritardata

Mostreremo di seguito i calcoli espliciti che consentono di ottenere l'espressione finale della funzione di Green ritardata G_R in 3.16 partendo dall'equazione 3.9 e considerando il risultato ottenuto in 3.15. In maniera esplicita ciò che vogliamo risolvere è

$$G_R(x - x') = i \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\kappa} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \left[e^{-i\kappa(x^0 - x'^0)} - e^{i\kappa(x^0 - x'^0)} \right] \theta(x^0 - x'^0). \quad (\text{B.1})$$

Ricordando che $\kappa = |\mathbf{k}|$, riscriviamo $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \kappa |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \vartheta$, dove ϑ è l'angolo compreso tra \mathbf{k} e $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$; orientando gli assi del sistema in modo tale che $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ sia diretto lungo l'asse z e ϑ diventi così l'angolo azimutale del vettore \mathbf{k} , abbiamo ($d^3 \mathbf{k} = \kappa^2 d\kappa d\phi d\cos \vartheta$)

$$G_R(x - x') = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \frac{d\kappa}{\kappa} \kappa^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos \vartheta e^{i\kappa R \cos \vartheta} \left[e^{-i\kappa(x^0 - x'^0)} - e^{i\kappa(x^0 - x'^0)} \right] \theta(x^0 - x'^0), \quad (\text{B.2})$$

dove $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. L'integrale su ϕ dà come risultato 2π , mentre da quello su $\cos \vartheta$ si ricava

$$\int_{-1}^{+1} d\cos \vartheta e^{i\kappa R \cos \vartheta} = \frac{1}{i\kappa R} (e^{i\kappa R} - e^{-i\kappa R}). \quad (\text{B.3})$$

Per tanto l'equazione B.2 diventa

$$\begin{aligned} G_R(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{R} \int_0^{+\infty} d\kappa \left[e^{-i\kappa(x^0 - x'^0)} - e^{i\kappa(x^0 - x'^0)} \right] (e^{i\kappa R} - e^{-i\kappa R}) \theta(x^0 - x'^0) = \\ &= \frac{1}{8\pi^2 R} \int_0^{+\infty} d\kappa \left[e^{-i\kappa(x^0 - x'^0 - R)} - e^{-i\kappa(x^0 - x'^0 + R)} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\kappa(x^0 - x'^0 + R)} + e^{i\kappa(x^0 - x'^0 - R)} \right] \theta(x^0 - x'^0). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Effettuando un cambiamento di variabile $\kappa \rightarrow -\kappa$ negli ultimi due termini, la precedente equazione può essere riscritta come

$$G_R(x - x') = \frac{1}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \left[e^{-i\kappa(x^0 - x'^0 - R)} - e^{-i\kappa(x^0 - x'^0 + R)} \right] \theta(x^0 - x'^0). \quad (\text{B.5})$$

Utilizzando ora una delle rappresentazioni integrali della delta di Dirac:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa e^{-i\kappa x},$$

otteniamo

$$G_R(x - x') = \frac{1}{4\pi R} \left[\delta(x^0 - x'^0 - R) - \delta(x^0 - x'^0 + R) \right] \theta(x^0 - x'^0). \quad (\text{B.6})$$

Le due delta sono non nulle rispettivamente solo per $x^0 - x'^0 = R$ e $x^0 - x'^0 = -R$. La funzione θ , invece, è diversa da zero solo per $x^0 - x'^0 > 0$, per tanto solo la prima parte dell'equazione contribuisce. In conclusione si ha

$$G_R(x - x') = \frac{\delta(x^0 - x'^0 - R)}{4\pi R}, \quad (\text{B.7})$$

dimostrando la validità dell'equazione [3.16](#).

Bibliografia

- [1] Vincenzo Barone. *Relatività. Principi e applicazioni*. Bollati Boringhieri, 2004.
- [2] Martin Hendry, cur. *An Introduction to General Relativity, Gravitational Waves and Detection Principles*. 2007.
- [3] Charles W. Misner, Kip S. Thorne e John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [4] Fritz Rohrlich. *Classical Charged Particles*. 3^a ed. World Scientific, 2007.
- [5] Cesare Rossetti. *Metodi matematici della fisica*. 2^a ed. Libreria editrice universitaria Levrotto & Bella, 2000.
- [6] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. 2^a ed. Cambridge University Press, 2009.