

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Dinamica dei sistemi collisionali

Tesi di laurea

Presentata da:
Luca Pizzuto

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Anno accademico 2020-2021

Sommario

La dinamica dei sistemi stellari è un campo di studio astrofisico di grande importanza e molto vasto, all'interno del quale rientrano concetti della termodinamica e dei fenomeni gravitazionali. Lo scopo di questo elaborato è fornire un quadro generale della dinamica dei sistemi collisionali, ossia lo studio del moto di quei sistemi stellari in cui le interazioni gravitazionali tra stelle permettono la redistribuzione dell'energia. Dopo una introduzione generale all'argomento, si presenteranno alcuni risultati del problema dei due corpi e dell'effetto fionda, al fine di fornire una formulazione matematica di tempo di rilassamento a due corpi, concetto chiave che verrà utilizzato per definire un sistema collisionale. Nella seconda parte dell'elaborato tali nozioni verranno applicate ai sistemi astrofisici, concentrando l'attenzione sugli ammassi globulari; si discuteranno, in particolare, i seguenti fenomeni: struttura core-halo, evaporazione gravitazionale ed ejection, catastrofe gravotermica e formazione di stelle binarie.

Indice

1	Introduzione	2
2	Definizione di sistema collisionale	2
2.1	Problema dei due corpi	3
2.2	Effetto fionda	4
2.3	Tempo di rilassamento a due corpi	6
3	Sistemi collisionali in astrofisica	10
3.1	Sistemi stellari autogravitanti all'equilibrio	10
3.2	Dinamica degli ammassi globulari	12
3.2.1	Struttura core-halo	12
3.2.2	Evaporazione gravitazionale ed ejection	13
3.2.3	Catastrofe gravotermica	14
3.2.4	Formazione di stelle binarie e blue stragglers	16
A	Teorema del viriale	18
	Riferimenti bibliografici	20

1 Introduzione

La dinamica di un sistema astrofisico è determinata da una branca della fisica classica che si applica sia su scala microscopica, come ad esempio nelle interazioni tra le particelle che formano un gas, sia su scala macroscopica, come nel caso dei sistemi stellari: la termodinamica.

Benchè sia nelle galassie sia negli ammassi, aperti e globulari, gli urti geometrici tra stelle siano eventi rarissimi, a causa delle enormi distanze interstellari, tali corpi celesti si influenzano reciprocamente tramite interazioni gravitazionali. Queste interazioni, che verranno trattate come degli effetti fionda, provocano la redistribuzione dell'energia del sistema, fino a raggiungerne l'equipartizione. In linea di principio, ogni stella risente del potenziale gravitazionale di tutte le altre stelle della configurazione, indipendentemente dalla loro distanza; cio' fa sì che il numero di interazioni sia elevatissimo e complica di molto i calcoli. Per questa ragione si semplificherà il problema, suddividendolo in un elevato numero di effetti fionda tra due stelle che verranno opportunamente combinati, portando ad un risultato corretto. Ogni tipo di sistema stellare, indipendentemente dalle dimensioni e dal numero di oggetti in esso contenuto, tende verso l'equilibrio termodinamico, ma lo fa con tempistiche differenti.

La prima parte dell'elaborato sarà dedicata alla derivazione del tempo di rilassamento di un sistema, ossia il tempo caratteristico richiesto per raggiungere l'equipartizione dell'energia. Questo risultato sarà utilizzato per fornire le definizioni di sistema collisionale e sistema non collisionale.

2 Definizione di sistema collisionale

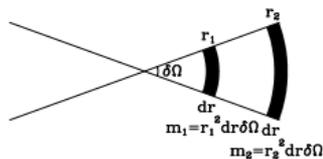


Figura 1: *Porzione di spazio in cui le stelle esercitano la stessa forza sulla stella al vertice*

In un sistema stellare l'evoluzione dell'orbita di ogni stella è il risultato delle complesse interazioni con tutte le altre N stelle del sistema. La forza gravitazionale è per natura attrattiva e di range infinito, ma la sua inten-

sità cala all'aumentare del quadrato della distanza r . Se si assume, facendo chiaramente una semplificazione, che la densità delle stelle sia uniforme, il numero di corpi celesti che attraggono una stella di riferimento aumenta come r^2 , come mostrato nella **Figura 1**. Tutte le stelle comprese nelle regioni scure contribuiscono equamente alla forza sentita dalla stella di riferimento, posta al vertice del cono, e perciò l'accelerazione di quest'ultima è determinata principalmente dalle stelle del sistema ad essa più lontane. Considereremo quindi la forza gravitazionale su di ogni stella come prodotta da una distribuzione di densità continua, piuttosto che da un insieme di punti di massa. Avendo suddiviso il problema degli N corpi in N problemi a due corpi, è opportuno iniziare fornendo alcuni dei risultati del suddetto problema di meccanica celeste. Nella notazione i vettori saranno indicati in grassetto.

2.1 Problema dei due corpi

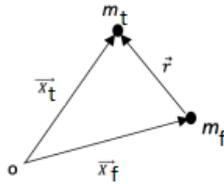


Figura 2: Sistema di riferimento S_0

Consideriamo il sistema di riferimento S_0 , in cui sono presenti la stella che prenderemo come riferimento, che chiameremo m_t , e una delle innumerevoli stelle di campo, che chiameremo m_f . Definiamo i vettori orbita relativa e velocità relativa rispettivamente come la differenza nella posizione delle due stelle e nelle loro velocità: $\mathbf{r} = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_f$, $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f$. In accordo con la seconda legge di Newton si ha:

$$\begin{cases} m_t \ddot{\mathbf{x}}_t = -\nabla_t U \\ m_f \ddot{\mathbf{x}}_f = -\nabla_f U = \nabla_t U \end{cases} \quad (1)$$

in cui con U si indica l'energia potenziale gravitazionale e si è sfruttata la terza legge di Newton $\nabla_t U = -\nabla_f U$. Dal sistema emerge subito la conservazione dell'impulso totale del sistema, da cui segue che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme con \mathbf{V}_{cm} costante, difatti:

$$\begin{cases} m_t \ddot{\mathbf{x}}_t = -\nabla_t U \\ m_f \ddot{\mathbf{x}}_f = \nabla_t U \end{cases} \rightarrow m_t \dot{\mathbf{x}}_t + m_f \dot{\mathbf{x}}_f = \text{cost} = M \mathbf{V}_{\text{cm}}$$

Riprendiamo ora le equazioni di Newton (1), dividiamo la prima per m_t , la seconda per m_f ed infine sottraiamo:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}}_t = -\frac{\nabla_t U}{m_t} \\ \ddot{\mathbf{x}}_f = \frac{\nabla_t U}{m_f} \end{cases} \rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{1}{m_t} + \frac{1}{m_f}\right) \nabla_t U$$

Nel caso gravitazionale, con $U(r) = -\frac{Gm_t m_f}{r}$, otteniamo l'equazione dell'orbita relativa:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_t m_f}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{con} \quad \mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f} \quad (2)$$

in cui si è introdotta la massa ridotta μ che contiene tutti i termini non inerziali. La (2) è l'equazione di un corpo fittizio di massa μ che si muove in un campo gravitazionale dovuto all'interazione tra le due stelle. Infine, moltiplicando scalarmente tale equazione per la \mathbf{v}_{rel} si ottiene la conservazione dell'energia meccanica sull'orbita relativa:

$$\frac{\mu \|\mathbf{v}_{\text{rel}}\|^2}{2} - \frac{Gm_t m_f}{r} = \text{cost} = E_0$$

Concludiamo con un'importante osservazione: se ci mettiamo in un sistema di riferimento solidale con la stella di campo e consideriamo la stella di test provenire da una distanza infinita e, dopo l'interazione, allontanarsi ad una distanza infinita, si ottiene il seguente importante risultato :

$$\begin{cases} E_{\text{iniziale}} = \frac{\mu \|\mathbf{v}_{\text{rel},i}\|^2}{2} - U(-\infty) = \frac{\mu \|\mathbf{v}_{\text{rel},i}\|^2}{2} \\ E_{\text{finale}} = \frac{\mu \|\mathbf{v}_{\text{rel},f}\|^2}{2} - U(\infty) = \frac{\mu \|\mathbf{v}_{\text{rel},f}\|^2}{2} \end{cases} \rightarrow \|\mathbf{v}_{\text{rel},i}\| = \|\mathbf{v}_{\text{rel},f}\| \quad (3)$$

2.2 Effetto fionda

Per trattare l'effetto fionda ci mettiamo nel sistema di riferimento dell'orbita relativa S_{rel} , mostrato nella **Figura 3** della pagina seguente. In esso l'orbita della nostra stella di test è una iperbole e b è il *parametro di impatto*, ossia il parametro che rappresenta la distanza minima tra i due oggetti se non ci fosse interazione e, dal punto di vista dinamico, è legato al momento angolare baricentrico della coppia: $\|\mathbf{J}_{\text{cm}}\| = \mu b \|\mathbf{v}_{\text{rel}}(-\infty)\|$. Questo accorgimento si rivela molto utile in luce della relazione:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{V}_{\text{cm}} + \frac{\mu}{m_t} \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

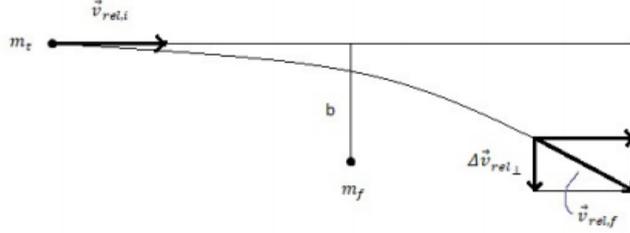


Figura 3: *Urto iperbolico nel sistema di riferimento dell'orbita relativa*

valida nel sistema S_0 . Se sappiamo risolvere il problema in orbita relativa, sappiamo risolverlo in tutti i sistemi inerziali. E' evidente che \mathbf{v}_t e \mathbf{v}_{rel} coincidono nel sistema S_{rel} , mentre sono oggetti molto diversi nel sistema di riferimento S_0 . Ad ogni modo, quello che ci interessa è la variazione della velocità della massa di test che, per via della conservazione di \mathbf{V}_{cm} , risulta essere strettamente legata alla variazione di \mathbf{v}_{rel} :

$$\Delta \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_t(\infty) - \mathbf{v}_t(-\infty) = \frac{\mu}{m_t} \Delta \mathbf{v}_{rel} \quad (4)$$

Facciamo ora una importante osservazione: i vettori $\mathbf{v}_{rel,i}$ e $\mathbf{v}_{rel,f}$ hanno la stessa lunghezza, per la (3), ma la loro direzione è diversa; questo implica che la stella di test inizialmente priva di velocità lungo la direzione y, ossia con una velocità completamente orizzontale, acquista velocità lungo tale direzione mentre perde velocità lungo la direzione x. La spiegazione risiede nella termodinamica, che agisce su una stella anisotropa, completamente calda in una direzione e fredda nell'altra, scaldandola lungo la direzione y e raffreddandola lungo x.

A questo punto consideriamo il cambiamento nell'energia cinetica della massa di test, dato semplicemente da:

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} (||\mathbf{v}_t(\infty)||^2 - ||\mathbf{v}_t(-\infty)||^2)$$

tenendo conto delle seguenti identità rigorose:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v}_t = (\Delta \mathbf{v}_t)_\perp + (\Delta \mathbf{v}_t)_\parallel \\ \mathbf{v}_t(\infty) = \mathbf{v}_t(-\infty) + \Delta \mathbf{v}_t \end{cases}$$

si ottiene la formula dell'effetto fionda:

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} [||(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp||^2 + ||(\Delta \mathbf{v}_t)_\parallel||^2 + 2 \langle \Delta \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_t(-\infty) \rangle] \quad (5)$$

I primi due termini sono termini positivi di riscaldamento mentre il terzo è un termine negativo di raffreddamento. All'equilibrio termodinamico i termini positivi e negativi si bilanciano perfettamente, mentre per un oggetto freddo dominano i termini di riscaldamento, e viceversa per un oggetto caldo. Il primo dei due termini di riscaldamento, molto maggiore del secondo, è quello che ci interessa per il calcolo del tempo di rilassamento, ed è perciò il punto di partenza del prossimo paragrafo.

2.3 Tempo di rilassamento a due corpi

Grazie alla (4) il problema del calcolo di $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$ si può risolvere nel sistema di riferimento dell'orbita relativa; il compito è quindi quello di trovare una espressione per $(\Delta \mathbf{v}_{\text{rel}})_\perp$. Per farlo, utilizzeremo la cosiddetta *approssimazione impulsiva*, un approccio sviluppato all'interno della teoria cinetica dovuto al fisico Max Born. Il punto di partenza è il teorema dell'impulso

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t$$

che nel nostro problema diventa

$$(\Delta \mathbf{p})_\perp = \mu (\Delta \mathbf{v}_{\text{rel}})_\perp = \mathbf{F}_\perp \Delta t$$

L'approssimazione consiste nel

- considerare il modulo della forza F_\perp costante e uguale alla forza attrattiva tra le due stelle alla distanza b

$$F = \frac{Gm_t m_f}{b^2}$$

- considerare come tempo caratteristico il tempo che occorre ad un segnale per percorrere avanti e indietro la distanza b alla velocità \mathbf{v}_{rel} , invece di considerare un tempo di interazione infinito

$$\Delta t = \frac{2b}{\|\mathbf{v}_{\text{rel}}\|}$$

La componente perpendicolare dell'impulso è data quindi da

$$\mu \|(\Delta \mathbf{v}_{\text{rel}})_\perp\| \sim \frac{2Gm_t m_f}{b \|\mathbf{v}_{\text{rel}}\|} \quad (6)$$

Va precisato che questo è solo il primo termine dell'espansione in serie asintotica della formula generale; l'approssimazione è tanto più accurata quanto

maggiore è il valore del parametro di impatto, ossia al crescere del momento angolare della coppia, essendo i termini successivi infinitesimi di ordine superiore di $\frac{1}{b}$.

A questo punto la (6) permette di ricavare $\|(\Delta\mathbf{v}_{\text{rel}})_{\perp}\|$, dal quale possiamo ottenere il termine di riscaldamento perpendicolare dell'energia cinetica che ci interessa, difatti:

$$\begin{cases} (\Delta\mathbf{v}_t)_{\perp} = \frac{\mu}{m_t}(\Delta\mathbf{v}_{\text{rel}})_{\perp} \\ \|(\Delta\mathbf{v}_{\text{rel}})_{\perp}\| \sim \frac{2Gm_t m_f}{\mu b \|\mathbf{v}_{\text{rel}}\|} \end{cases} \rightarrow \|(\Delta\mathbf{v}_t)_{\perp}\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|\mathbf{v}_{\text{rel}}\|^2}$$

e quindi per ogni singolo urto la variazione di energia cinetica perpendicolare della massa di test è data da:

$$\Delta E_{t,\perp} = \frac{m_t}{2} \|(\Delta\mathbf{v}_t)_{\perp}\|^2 \sim \frac{m_t}{2} \left(\frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|\mathbf{v}_{\text{rel}}\|^2} \right) \quad (7)$$

Adesso bisogna effettuare la somma degli effetti fionda tra la stella di test e tutte le altre stelle del sistema, essendo il riscaldamento dell'orbita vera pari alla somma dei riscaldamenti delle singole orbite. Per effettuare tale somma, calcoleremo il numero di interazioni N in cui la nostra stella di test è coinvolta in un intervallo di tempo Δt , aiutandoci con la **Figura 4**:

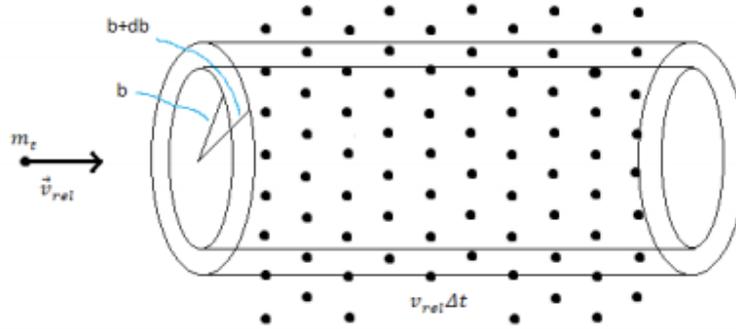


Figura 4: Rappresentazione delle stelle di campo con velocità \mathbf{v}_f con cui m_t interagisce in un intervallo di tempo Δt con parametro di impatto compreso tra b e $b+db$.

Innanzitutto, assumiamo una distribuzione nello spazio delle fasi delle stelle di campo che sia:

- *uniforme* nello spazio, con un numero di stelle di campo per unità di volume dato da n_f .
- *isotropa* nelle velocità, ossia dipendente semplicemente dalla norma di \mathbf{v}_f , essendo tutte le direzioni equiprobabili.

ossia: $f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f) = n_f g(\|\mathbf{v}_f\|)$. Utilizzando la funzione di distribuzione si può facilmente ricavare che il numero di stelle di campo con una certa velocità è $n = n_f g(\|\mathbf{v}_f\|) d^3 \mathbf{v}_f$. Considerando poi gli urti con parametro d'urto compreso tra b e $b + db$ e tenendo conto della distanza percorsa dalla stella di test, ossia $\|\mathbf{v}_{rel}\| \Delta t$, si ottiene che il numero di interazioni per intervallo di tempo è:

$$N = 2\pi b db \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| \Delta t f d^3 \mathbf{v}_f$$

Considerando poi l'energia guadagnata in ogni interazione (equazione 7), la variazione totale di energia cinetica della stella di test nella direzione perpendicolare si ottiene risolvendo il seguente integrale quadri-dimensionale:

$$\Delta E_{t,\perp} = \Delta t \int_0^\infty \frac{4\pi G^2 m_t m_f^2 n_f}{b} db \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g\|\mathbf{v}_f\| d^3 \mathbf{v}_f}{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|}$$

L'integrale nello spazio delle velocità dipende unicamente dalla norma di \mathbf{v}_t e se si identifica formalmente $\mathbf{v}_f = \mathbf{x}$, $\mathbf{v}_t = \mathbf{y}$, $\|\mathbf{x}\| = r$, $g(r) = \rho(r)$ rappresenta il potenziale di una distribuzione di materia a simmetria sferica nel punto \mathbf{y} ; essendo che "stesse equazioni hanno stesse soluzioni" (Richard Feynman), la soluzione di tale integrale è il cosiddetto *potenziale di Rosenbluth* $\Psi(\|\mathbf{v}_t\|)$, che per velocità enormi si comporta come il potenziale gravitazionale per distanze molto grandi, ossia è descritto dal termine di monopolo:

$$\Psi(\|\mathbf{v}_t\|) \sim \frac{1}{\|\mathbf{v}_t\|} \quad \text{per } \|\mathbf{v}_t\| \rightarrow \infty$$

L'integrale sul parametro d'urto diverge sia per $b \rightarrow 0$ che per $b \rightarrow \infty$, mettendo in luce i limiti dell'approssimazione impulsiva, che non può funzionare per piccoli momenti angolari/parametri di impatto, e del concetto erroneo di universo infinito ed omogeneo: un universo del genere non è compatibile con una forza dipendente dalla distanza come $\frac{1}{r^2}$, siccome le interazioni a distanza $r \rightarrow \infty$ trasmettono poca energia, ma sono in numero sempre più elevato. Cio' detto, è possibile risolvere le due divergenze:

- la *divergenza ultravioletta*, che si ha per $b \rightarrow 0$, si risolve sostituendo $\frac{db}{b}$ con l'integrando che si ottiene dal calcolo rigoroso:

$$\frac{b}{b^2 + b_{\min}^2} db \quad \text{con } b_{\min} = \frac{Gm_t m_f}{\|\mathbf{v}_{rel}(-\infty)\|}$$

- la *divergenza infrarossa*, che si ha per $b \rightarrow \infty$, si può risolvere, nell'ambito di una trattazione più sofisticata dovuta a Landau, sostituendo l'estremo superiore con b_{\max} , dimensione caratteristica del sistema

La risoluzione del suddetto integrale introduce il *logaritmo di Coulomb* $\ln \Lambda$, che tipicamente è compreso tra 10 e 20. In definitiva, otteniamo la formula conclusiva del riscaldamento perpendicolare:

$$\Delta E_{t,\perp} = 4\pi G^2 m_t m_f^2 n_f \ln \Lambda \Psi(\|\mathbf{v}_t\|) \Delta t$$

dalla quale possiamo definire il **tempo di rilassamento a due corpi** t_{2b} come l'intervallo di tempo Δt caratteristico del sistema stellare necessario affinché il guadagno di energia cinetica in direzione perpendicolare della stella di test sia pari all'energia cinetica posseduta inizialmente: $\Delta E_{t,\perp} = E_{t,\text{iniziale}} = \frac{m_t}{2} \|\mathbf{v}_t(-\infty)\|^2$. In termini matematici:

$$t_{2b} = \frac{\|\mathbf{v}_t(-\infty)\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda \Psi(\|\mathbf{v}_t\|)} \quad (8)$$

Ora che abbiamo tutti i concetti necessari, definiamo:

- **Sistemi collisionali** i sistemi il cui tempo di vita è più lungo del tempo di rilassamento a due corpi, $t_{\text{age}} > t_{2b}$. In tali sistemi la termodinamica riesce ad agire sulle orbite delle stelle, che diventano indipendenti dalle condizioni iniziali.
- **Sistemi non collisionali** i sistemi il cui tempo di vita è più breve del tempo di rilassamento a due corpi, $t_{\text{age}} < t_{2b}$. In tali sistemi la termodinamica non riesce a modificare l'energia delle orbite in modo significativo.

Ovviamente non vi è una netta separazione tra sistemi collisionali e non collisionali ed ogni sistema, se osservato abbastanza a lungo, può diventare collisionale.

3 Sistemi collisionali in astrofisica

In questa sezione applicheremo i concetti appena introdotti per definire quali tipi di sistemi stellari sono collisionali e quali no, e daremo anche una spiegazione della conclusione apparentemente controintuitiva alla quale giungeremo. In seguito ci concentreremo sulla dinamica degli ammassi globulari, descrivendo diversi fenomeni che li riguardano.

3.1 Sistemi stellari autogravitanti all'equilibrio

Mettiamoci nel caso di un sistema autogravitante all'equilibrio, come può essere un ammasso stellare o una galassia. Consideriamo, in modo assolutamente semplicistico, il sistema come una sfera di raggio R , di massa totale M data da N stelle tutte uguali $m_t = m_f = m$; inoltre, essendo esso all'equilibrio, soddisfa il *teorema del viriale* (**Appendice A**):

$$2T = -U \quad \text{con} \quad \begin{cases} T = \frac{M\sigma^2}{2} \\ U = -\frac{GM^2}{R} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \sigma^2 = \frac{GM}{R} \quad (9)$$

dove con σ si indica la dispersione di velocità viriale. Ipotizziamo inoltre che la stella di test si muova ad una velocità media $||\mathbf{v}_t|| = \sigma$. La formula del tempo di rilassamento diventa:

$$t_{2b} = \frac{\sigma^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln \Lambda}$$

Tale tempo caratteristico deve essere confrontato con il tempo di attraversamento $t_{\text{cross}} = \frac{2R}{\sigma}$, ossia il tempo impiegato da una stella con velocità σ per attraversare il diametro del sistema. Considerando una distribuzione di stelle omogenea, $n = \frac{3N}{4\pi R^3}$, e chiamando $M = Nm$ la massa totale del sistema, il rapporto che vogliamo stimare è il seguente:

$$\frac{t_{2b}}{t_{\text{cross}}} = \frac{\sigma^4 R^2}{12G^2 N m^2 \ln \Lambda} = \frac{N \sigma^4 R^2}{12G^2 M^2 \ln \Lambda}$$

Assumendo i parametri $b_{\text{min}} = \frac{2Gm}{\sigma^2} = \frac{2GM}{\sigma^2 N}$ e $b_{\text{max}} = 2R$, tenendo conto della relazione (9), il logaritmo di coulomb risulta essere

$$\ln \Lambda = \ln \frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}} = \ln \frac{2R}{2RN^{-1}} = \ln N$$

mentre il rapporto $\frac{t_{2b}}{t_{\text{cross}}}$ è semplicemente:

$$\frac{t_{2b}}{t_{\text{cross}}} = \frac{N}{12 \ln N} \simeq \frac{0.1N}{\ln N} \quad (10)$$

Consideriamo ora diversi sistemi stellari e classifichiamoli come collisionali o non collisionali utilizzando la relazione (10):

- *Galassia:*

$$\begin{cases} N \simeq 10^{11} \\ t_{\text{cross}} \simeq 250 \text{ Myr} \end{cases} \rightarrow \frac{t_{2b}}{t_{\text{cross}}} \simeq 10^9$$

Nelle galassie il tempo di rilassamento è quindi diversi ordini di grandezza maggiore rispetto all'età dell'universo; affinché il trasferimento di energia dovuto alle interazioni gravitazionali tra le stelle sia in grado di produrre un cambiamento nella loro orbita una stella dovrebbe attraversare la galassia un miliardo di volte. Le galassie sono quindi *sistemi non collisionali*.

- *Ammasso globulare:*

$$\begin{cases} N \simeq 10^6 \\ t_{\text{cross}} \simeq 1 \text{ Myr} \end{cases} \rightarrow \frac{t_{2b}}{t_{\text{cross}}} \simeq 10^4$$

Il tempo di rilassamento di un ammasso globulare è confrontabile con la sua età, ossia circa 10 miliardi di anni. Gli ammassi globulari sono quindi *sistemi debolmente collisionali*.

- *Ammasso aperto:*

$$\begin{cases} N \simeq 10^2 \\ t_{\text{cross}} \simeq 1 \text{ Myr} \end{cases} \rightarrow \frac{t_{2b}}{t_{\text{cross}}} \simeq 1$$

Gli ammassi aperti hanno un tempo di rilassamento di circa un milione di anni, minore della loro età. Si tratta quindi di *sistemi collisionali*.

Notiamo che tanto maggiore è il numero di stelle di un sistema, e quindi il numero di interazioni nell'unità di tempo, tanto più lungo è il suo tempo di rilassamento a due corpi. La soluzione di questa apparente contraddizione risiede nella formula (7) dell'energia trasferita in una singola interazione, che ha una dipendenza quadratica dalla massa della stella di campo, $\Delta E_t \propto m_t^2 = \frac{M^2}{N^2}$. Considerando quindi il prodotto tra il numero di interazioni e l'energia trasferita per interazione, si ottiene una dipendenza di proporzionalità inversa rispetto al numero di stelle del sistema: $N \cdot \Delta E_t \propto \frac{1}{N}$



Figura 5: *L'ammasso globulare NGC 6093, come osservato dal telescopio spaziale Hubble. Si noti la forma rotondeggiante ed il colore prevalentemente rossastro delle sue stelle.*

3.2 Dinamica degli ammassi globulari

In questa sezione tratteremo la dinamica degli ammassi globulari, in quanto sistemi collisionali. Essi sono sistemi molto antichi, formati da centinaia di migliaia di stelle di bassa metallicità, che orbitano attorno al centro galattico. Esamineremo la dinamica degli ammassi globulari perchè questi hanno diverse caratteristiche che semplificano la nostra analisi: sono sferoidali, privi di polvere e stelle giovani che renderebbero le osservazioni più complesse, e soprattutto la loro età avanzata li rende un'ottima realizzazione fisica del problema degli N-corpi. Molti dei risultati che troveremo si applicano anche agli ammassi aperti, con la differenza che in questi ultimi, a causa del minor tempo di rilassamento, i processi avvengono più rapidamente; un ammasso aperto può quindi contenere stelle giovani, ma essere al contempo dinamicamente vecchio.

3.2.1 Struttura core-halo

In un ammasso globulare la densità stellare non è omogenea, ma fortemente squilibrata a favore del centro del sistema, in analogia con l'andamento della densità in una stella, maggiore nel core e minore nell'atmosfera. Questa struttura dinamica viene chiamata **core-halo** ed è un risultato dell'*equipartizione dell'energia*: essendo un sistema collisionale, nell'ammasso le interazioni gravitazionali fanno sì che l'energia cinetica venga ripartita tra le stelle, portando

ad un risultato analogo a quello valido per un sistema gassoso:

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT \rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Le stelle più massive cedono quindi energia cinetica a quelle meno massive; le prime finiscono per cadere verso il fondo della buca di potenziale gravitazionale, ossia verso il centro dell'ammasso, mentre le orbite delle ultime si espandono, facendole diffondere nelle regioni esterne del sistema. Il core è quindi compatto e 'caldo', formato da stelle con dispersione di velocità σ elevata, mentre l'alone è rarefatto e 'freddo', formato da stelle con σ ridotta. Col procedere di questa situazione nel core si ritrova metà della massa dell'ammasso. A causa di questa differenza di densità, il core si considera come un sistema autogravitante, cioè si trascura l'apporto dell'alone all'autogravità del sistema. Inoltre, essendo il tempo di rilassamento inversamente proporzionale alla densità, la zona centrale dell'ammasso si rilassa prima, facendo sì che la funzione di distribuzione approssimi sempre più una distribuzione Maxwelliana, mentre nelle regioni esterne le interazioni hanno un effetto minore ed il tempo di rilassamento è più lungo.

3.2.2 Evaporazione gravitazionale ed ejection

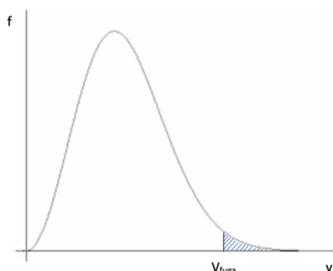


Figura 6: *Distribuzione Maxwelliana. Le stelle con velocità superiore alla velocità di fuga abbandonano l'ammasso globulare.*

Come si può vedere dalla **Figura 6**, mentre la distribuzione delle stelle nell'ammasso si modifica, alcune di queste raggiungono una velocità superiore alla velocità di fuga del sistema; la loro energia cinetica T diventa maggiore dell'energia potenziale gravitazionale U che le tiene legate all'ammasso, con il risultato che quest'ultimo perde stelle. I meccanismi che permettono ad una stella di raggiungere la coda della distribuzione a velocità maggiore sono due:

- **Evaporazione gravitazionale:** una serie di deboli interazioni ad alto parametro di impatto aumentano l'energia della stella, finchè essa raggiunge una energia totale ($E = T - |U|$) leggermente positiva e fugge. Il termine evaporazione evidenzia la natura graduale del fenomeno.
- **Ejection:** una singola interazione a basso parametro di impatto produce un cambiamento di velocità confrontabile con le velocità iniziali delle due stelle, lasciando perciò una delle due con una velocità superiore alla velocità di fuga locale.

Gli effetti delle interazioni gravitazionali sono significativi nel core, siccome il t_{2b} è minore che nell'alone, ed è per questo che le stelle che dominano il rate di evaporazione sono quelle le cui orbite attraversano la regione centrale, orbite cioè molto elongate il cui pericentro è all'interno del core, mentre l'apocentro si trova nell'alone. Ad ogni periodo radiale l'apocentro tende ad allontanarsi mentre il pericentro rimane nella regione del core: in questo modo, le orbite diventano sempre più elongate e il periodo diventa sempre più lungo, fino a quando la stella non ha sufficiente energia per sfuggire dall'ammasso. Inoltre, l'ammasso globulare tende a perdere stelle di piccola massa, essendo queste ultime dotate di una velocità maggiore, a parità di energia cinetica; l'effetto che si può osservare è un calo del rapporto massa-luminosità dell'ammasso, siccome nelle stelle meno massive tale rapporto $\frac{m}{L}$ è maggiore che nelle stelle di massa maggiore.

3.2.3 Catastrofe gravotermica

Collegato agli argomenti sopra esposti, è il fenomeno della **catastrofe gravotermica**, ossia il collasso del core verso densità centrali arbitrariamente alte. Il concetto chiave nell'interpretazione del fenomeno, dovuta a Linder-Bell e Wood, è quello di *calore specifico negativo*: un sistema con calore specifico negativo, contrariamente alle situazioni usuali, si raffredda se riceve energia e si scalda quando perde energia. Abbiamo già avuto modo di dire che in un ammasso globulare, a causa delle interazioni gravitazionali tra stelle, vi è un alto rapporto tra la densità al centro e quella al bordo, ed il core si può considerare come un sistema autogravitante all'equilibrio. Ciò significa che in un ammasso valgono i risultati del teorema del viriale (**Appendice A**), in particolare:

$$E = -K = -\frac{3}{2}NkT \rightarrow C_v = \frac{dE}{dT} = -\frac{3}{2}Nk$$

Dunque, il core dell'ammasso ha calore specifico C_v negativo, mentre l'alone, non essendo autogravitante, è più simile ad un comune gas con calore

specifico positivo. Abbiamo inoltre già visto che le stelle del core hanno una σ superiore rispetto alle stelle dell'alone, e sono perciò più calde di queste ultime; siccome si assume che il calore fluisca sempre dalla parte del sistema con temperatura più alta a quella con temperatura più bassa, è il core a cedere calore all'alone. A causa del calore specifico negativo della parte centrale dell'ammasso, a fronte di una perdita di energia quest'ultima si scalda ulteriormente, si contrae ed il flusso di calore aumenta, aumentando la differenza di temperatura tra stelle del core, le cui orbite si fanno sempre più ristrette, e stelle dell'alone, che tendono ad essere sempre meno legate. Il processo si ripete in modo sempre più veloce e ciò porta ad una contrazione del core sempre maggiore, fino a che esso collassa. Il processo di contrazione del core, chiamato **core collapse**, conduce ad una crescita drammatica della densità centrale che culminerebbe in una singolarità, se non fosse per via della formazione di stelle binarie, che impediscono la formazione di un singolo punto a densità infinita. Il profilo di brillantezza superficiale di un ammasso globulare che ha subito catastrofe gravotermica è caratterizzato da una rapida decrescita a partire dal centro, che non si nota negli ammassi non collassati, per i quali la decrescita è più graduale.

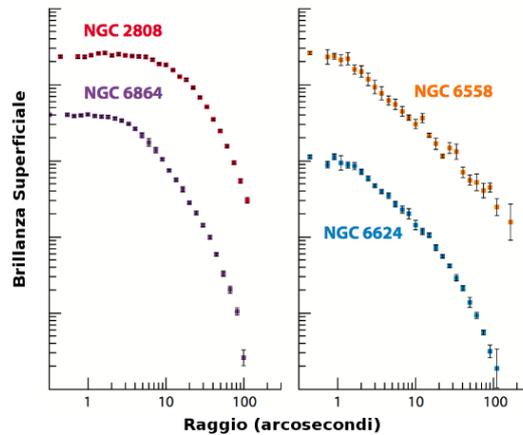


Figura 7: *Confronto tra profili di brillantezza superficiale per ammassi globulari non collassati (a sinistra) e ammassi collassati (destra).*

3.2.4 Formazione di stelle binarie e blue stragglers

L'alta densità che il core dell'ammasso raggiunge, a seguito dei processi descritti, facilita la formazione di sistemi binari. I meccanismi con i quali ciò avviene, basati entrambi sulla sottrazione di energia da un gruppo di stelle, sono essenzialmente due:

- **Three body capture:** da un sistema a 3 corpi con energia positiva viene espulsa la stella di massa minore, essendo essa la più veloce, e se la velocità di espulsione è sufficientemente elevata, si forma un sistema binario ad energia negativa.
- **Tidal capture:** a causa della forza mareale, sempre più intensa al calare della distanza ($F_{\text{marea}} \propto \frac{1}{r^3}$), due stelle vengono deformate. La loro energia cinetica viene spesa nei loro gradi di libertà interni, e perciò diminuisce, facendo sì che al termine dell'interazione le stelle si allontanino con una velocità minore di quella iniziale. Dopo vari incontri le orbite delle stelle diventano sempre più concentriche e strette, fino alla formazione del sistema binario.

Le binarie così sviluppatesi rappresentano una nuova sorgente di energia gravitazionale. e riescono a fermare la catastrofe gravotermica: quando una stella fredda interagisce con una binaria, l'energia viene sottratta all'intero sistema, facendo sì che le stelle diventino più strettamente legate. Alcune binarie, dette *hard binaries*, hanno energie di legame maggiori dell'energia media delle altre stelle dell'ammasso; tali binarie tendono quindi a raffreddarsi e, dunque, la loro energia di legame aumenta ogni volta che avviene un'interazione con altre stelle singole, arrivando anche in alcuni casi a raggiungere una energia di legame equiparabile a quella dell'intero ammasso. Ciò porta dunque alla stabilizzazione e all'arresto del collasso e il core tende ad espandersi. Se però una binaria diventa troppo 'dura' il suo comportamento durante una interazione è analogo a quello di una stella singola e la catastrofe gravotermica riparte. Si instaura dunque un ciclo di espansione e collasso del core (*oscillazioni gravotermiche*).

Questo meccanismo consente di spiegare l'esistenza delle **blue straggler stars**, un tipo di stella più calda e più blu delle altre stelle dell'ammasso che hanno la stessa luminosità. Difatti, si pensa che in un sistema binario molto compatto le due stelle possano arrivare a fondersi, mischiando il loro carburante nucleare e rifornendo la nuova stella di materiale proveniente da entrambe le stelle (si veda la **Figura 8** nella pagina seguente). A causa di questo meccanismo di formazione, le stelle blue straggler hanno in genere una massa doppia rispetto alle altre stelle dell'ammasso, e sono anche più giova-

ni. Si giustifica così la loro posizione nel diagramma HR, in cui rimangono nella sequenza principale anche dopo il punto di turn-off.

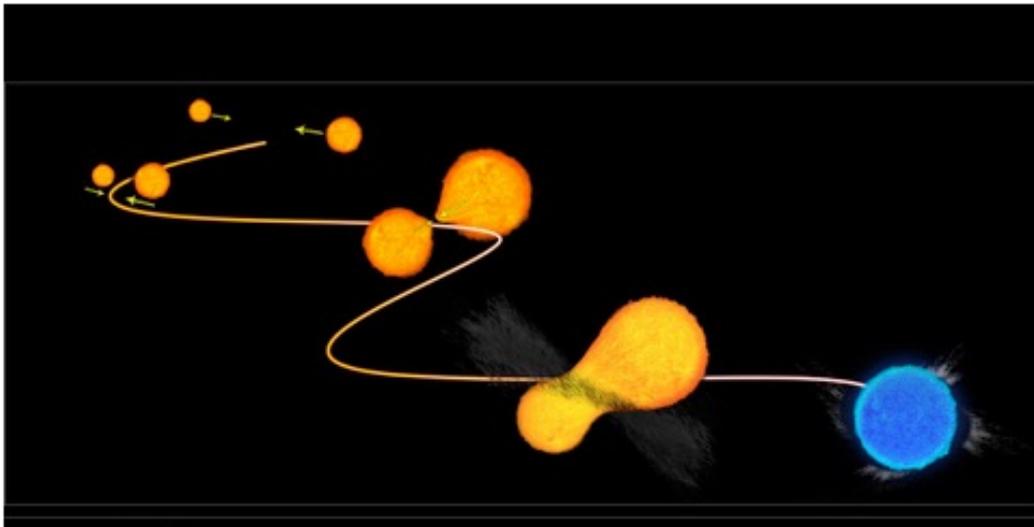


Figura 8: *Due stelle di piccola massa collidono testa a testa, combinando il loro carburante e la loro massa. Si forma una singola stella calda (quindi blu) massiva e giovane.*

A Teorema del viriale

Il teorema del viriale è un argomento molto vasto e ricco di applicazioni astrofisiche, la cui formulazione rigorosa è complessa; si tratta di fatti di un numero infinito di identità tensoriali, di qualunque ordine, ricavate dalle equazioni di Jeans, a loro volta ricavate dalle equazioni non collisionali di Boltzmann. Se di queste identità tensoriali prendiamo la traccia di quella del secondo ordine, e ci mettiamo nel sistema di riferimento del centro di massa, per un sistema autogravitante all'equilibrio in cui l'unica forza è la gravità, otteniamo il teorema del viriale in forma scalare:

$$2K = -U \quad (11)$$

ossia, il doppio dell'energia cinetica del sistema è uguale in modulo alla sua energia potenziale gravitazionale. Tenendo presente che l'energia gravitazionale è negativa, possiamo riscrivere la (11) come $2K = |U|$ e introdurre l'energia totale $E = K - |U|$. I sistemi sono considerati 'caldi' ('freddi') se hanno un valore di T elevato (ridotto) e compatti (dispersi) se hanno $|U|$ elevato (ridotto). Introduciamo a questo punto il piano viriale per un sistema autogravitante:

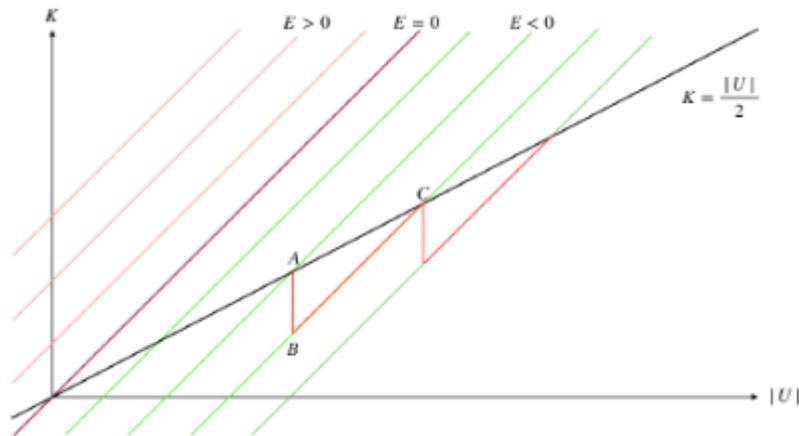


Figura 9: *Rappresentazione del piano viriale*

In tale piano possiamo posizionare ogni sistema autogravitante in base alla sua energia totale E ; i sistemi all'equilibrio sono i sistemi in cui vale il teorema del viriale, e perciò si trovano sulla retta viriale $K = \frac{|U|}{2}$. I sistemi con un contenuto di energia diverso da $E = -\frac{|U|}{2}$ non sono all'equilibrio, e di conseguenza si sposteranno lungo la retta $K = E + |U|$; come possiamo

notare, non essendoci intersezioni tra la retta viriale e le rette con $E > 0$, solo i sistemi con energia totale negativa possono raggiungere l'equilibrio. Inoltre il grafico permette di spiegare i fenomeni che caratterizzano un sistema con calore specifico negativo, come il core di un ammasso globulare: quando un sistema in equilibrio (punto A della **Figura 9**) perde energia cinetica, nel nostro caso a seguito di interazioni gravitazionali, esso si sposta su di una retta con minore energia totale (punto B); ora, essendo l'intersezione tra questa retta e la retta viriale situata in un punto del grafico con coordinate maggiori, il sistema tornerà all'equilibrio (punto C), ma avrà energia cinetica K ed energia potenziale $|U|$ maggiori rispetto a prima dell'interazione. Gli incontri successivi sposteranno il sistema sempre più in alto lungo la retta viriale, rendendolo sempre più caldo e compatto.

Riferimenti bibliografici

1. J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, 2008.
2. L. Ciotti, *Astrofisica extragalattica*, appunti lezione a.a. 2020/2021.
3. L. Ciotti, *Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana Serie 8 5-A (2002).
4. Djorgovski, S. G., *The Dynamic Lives of Globular Clusters*, Sky and Telescope Vol. 96,N. 4, p. 38 (1998).
5. F. Ferraro et al., *The stellar dynamical clock*, Cosmic Lab (2021).
6. H. Karttunen, P. Kroger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, Springer, 2016.