

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

PROCESSI RADIATIVI IN ORIONE

Relatore:
Prof. Daniele Dallacasa

Presentata da:
Giulia Brunelli

Anno Accademico 2020/2021

Sommario

Lo scopo del presente lavoro è mostrare come lo studio dei processi radiativi con spettro continuo sia cruciale, in ambito astrofisico, per ricavare alcuni parametri fisici relativi alle strutture cosmiche. In particolare viene esposto l'esempio della Nebulosa di Orione, per cui è stato possibile ricostruire la morfologia interna grazie all'analisi dello spettro radio continuo e il confronto con gli spettri in riga ottenuti in altre bande di frequenza.

Nell'introduzione contenuta nel *Capitolo 1* sono esposti la teoria del trasporto radiativo, la radiazione termica di corpo nero e la radiazione da parte di particelle cariche accelerate. Nel *Capitolo 2* viene esaminato il processo di bremsstrahlung, o radiazione di frenamento, prodotto dall'interazione tra un elettrone e uno ione liberi. Il *Capitolo 3* è dedicato alla radiazione di sincrotrone, caratteristica di particelle cariche ultrarelativistiche immerse in un campo magnetico. Il terzo processo che produce uno spettro continuo, lo scattering Compton inverso, è esaminato nel *Capitolo 4*. Infine, nel *Capitolo 5* è presentato lo studio condotto sulla struttura della Nebulosa di Orione.

Indice

1	Introduzione ai processi radiativi	2
1.1	Teoria del trasporto radiativo	3
1.2	Radiazione di corpo nero	6
1.3	Radiazione da particelle accelerate	8
2	Bremsstrahlung	11
2.1	Bremsstrahlung non relativistica	11
2.2	Bremsstrahlung termica	14
2.3	Assorbimento per bremsstrahlung	15
3	Radiazione di sincrotrone	17
3.1	Emissione da un singolo elettrone	17
3.2	Emissione da un insieme di elettroni relativistici	22
3.3	Polarizzazione della radiazione	24
4	Scattering elettrone-fotone	25
4.1	Diffusione Thomson	25
4.2	Diffusione Compton	27
4.3	Diffusione Compton inversa	28
5	Applicazione astrofisica: la Nebulosa di Orione	34
5.1	Regioni HII	36
5.2	Modello della struttura della Nebulosa di Orione	38
	Conclusioni	42
	Bibliografia	44

Capitolo 1

Introduzione ai processi radiativi

In ambito astrofisico non è possibile condurre esperimenti di laboratorio, né effettuare misure dirette delle grandezze fisiche in esame. Il principale veicolo di studio dei corpi celesti risulta essere la radiazione elettromagnetica che essi emettono o assorbono, misurata sulla Terra oppure al di fuori della sua atmosfera.

Lo studio della radiazione elettromagnetica può essere condotto attraverso due diverse tecniche: l'imaging, il cui obiettivo è creare un'immagine dell'oggetto in esame, e la spettroscopia, attraverso cui si analizza la distribuzione della radiazione emessa dal corpo in funzione della frequenza. Quest'ultima tecnica permette di studiare in maniera più approfondita caratteristiche fisiche del corpo celeste, quali la temperatura e la composizione chimica.

Gli spettri sono classificati in tre grandi famiglie:

- *spettri continui*: sono tipici di sorgenti che emettono radiazione secondo una funzione priva di evidenti discontinuità;
- *spettri di emissione a righe*: sono caratteristici di gas caldi e rarefatti che emettono attorno a frequenze specifiche in base alle leggi della meccanica quantistica;
- *spettri di assorbimento*: vengono rilevati, ad esempio, quando un gas a bassa temperatura e densità relativamente elevata si interpone tra l'osservatore e una sorgente che emette radiazione con spettro continuo; ciò che si osserva è uno spettro continuo intervallato da righe discrete in corrispondenza delle lunghezze d'onda assorbite dal gas¹.

Gli spettri sono strettamente legati ai processi alla base dell'emissione della radiazione e dal loro studio è possibile risalire al meccanismo fisico che li ha generati.

¹Un altro processo che genera questo tipo di spettro è l'assorbimento free-free degli elettroni liberi; esso è rilevato nella bremsstrahlung auto-assorbita, ma può agire su una qualsiasi radiazione.

1.1 Teoria del trasporto radiativo

La sola spettroscopia non è sufficiente a ricavare informazioni complete sul corpo celeste indagato; è necessario sviluppare alcuni modelli fisici in grado di interpretare i risultati sperimentali ottenuti dagli spettri. Primo tra questi è la teoria del trasporto radiativo, fondamentale per la comprensione dei meccanismi di emissione ed assorbimento della radiazione quando si propaga attraverso un mezzo interstellare.

Alla base della teoria vi è la seguente approssimazione: se la scala caratteristica del sistema in esame è molto maggiore della lunghezza d'onda della radiazione misurata, è possibile supporre che tale radiazione viaggi in linea retta, lungo dei *raggi*, attraverso un mezzo omogeneo o nello spazio libero [1].

Un raggio, singolarmente, trasporta una quantità di energia trascurabile, tuttavia è possibile definire una grandezza che quantifichi l'energia trasportata da un insieme di raggi che differiscono per una quantità infinitesima da un raggio di riferimento. Tale grandezza è l'*intensità specifica* (o *brillanza*) I_ν , da cui si definisce l'energia che fluisce attraverso il generico elemento di area dA , nel tempo dt , nell'intervallo di frequenza $d\nu$ come:

$$dE = I_\nu dA dt d\Omega$$

dove l'angolo solido $d\Omega$ è relativo all'insieme di raggi considerato. Una visualizzazione grafica è riportata in *Figura 1.1*.

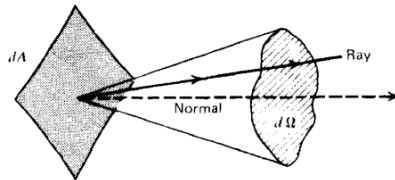


Figura 1.1: Rappresentazione geometrica dell'insieme di raggi che definiscono la brillantezza I_ν e incidenti perpendicolarmente (figura tratta da [1]).

I_ν ha dimensioni² $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{ster}^{-1}$ e rappresenta un flusso di energia per intervallo di frequenza e unità di angolo solido. Essendo in funzione dell'angolo solido, I_ν dipende dalla direzione da cui provengono i raggi, ma non dalla distanza a cui si trova l'oggetto e ciò la rende una grandezza intrinseca della sorgente.

Il problema relativo allo studio della brillantezza I_ν è che si tratta di una grandezza non misurabile con gli apparati sperimentali. Ciò che gli strumenti sono in grado di misurare è il flusso energetico proveniente dalla sorgente, dipendente dalla distanza dell'oggetto. È utile impiegare il flusso associato ad un piccolo intervallo di frequenze $d\nu$, definito

²La trattazione del presente lavoro utilizza il sistema CGS.

flusso monocromatico F_ν e misurato in $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$ ³, poiché può essere messo in relazione con la brillantezza. Considerato un elemento di area dA orientato secondo l'arbitrario versore \hat{n} e fissato l'angolo solido infinitesimo $d\Omega$, il flusso monocromatico differenziale si definisce come:

$$dF_\nu = I_\nu \cos \theta d\Omega \quad (1.1)$$

dove θ è l'angolo di inclinazione dell'angolo solido rispetto il versore \hat{n} normale a dA . Per ottenere F_ν si integra la relazione (1.1) su tutti gli angoli solidi.

Esiste una particolare categoria di sorgenti, dette *isotrope*, che emettono la stessa quantità di energia in ogni direzione. Tipicamente, le stelle possono essere considerate come sorgenti isotrope a simmetria sferica.

Grazie al principio di conservazione dell'energia, è facilmente dimostrabile che in assenza di un mezzo, cioè quando la radiazione si propaga nel vuoto, l'intensità specifica si conserva lungo la lunghezza del raggio:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \quad (1.2)$$

dove ds è l'elemento di lunghezza.

Quando la radiazione attraversa un mezzo, la relazione (1.2) perde la sua validità perché il mezzo è in grado di assorbire⁴ la radiazione che lo attraversa o emetterne di propria. Per descrivere i fenomeni a livello macroscopico si utilizzano due coefficienti:

- coefficiente di emissione j_ν , con dimensioni $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{ster}^{-1} \text{Hz}^{-1}$;
- coefficiente di assorbimento α_ν , con dimensione cm^{-1} , per convenzione assunto positivo quando dell'energia viene sottratta dal raggio.

Con l'introduzione dei precedenti coefficienti è possibile esprimere la variazione dell'intensità specifica lungo la lunghezza di un raggio attraverso l'*equazione del trasporto radiativo*:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad (1.3)$$

dove ds è l'elemento di lunghezza. Questa equazione non comprende gli effetti di scattering che il mezzo può provocare, ma esiste una soluzione all'equazione integro-differenziale che risulta dall'analisi completa dei fenomeni, illustrata in [1].

Per esprimere la soluzione generale dell'equazione (1.3) vengono introdotte due grandezze largamente più impiegate nella trattazione dei meccanismi di radiazione. La prima è la *funzione sorgente* S_ν e rappresenta il rapporto tra i coefficienti di emissione e

³Un'unità di misura del flusso più diffusa è il Jansky (Jy), dove $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$. È maggiormente impiegata a livello pratico a causa dei piccoli valori dei flussi misurati dagli strumenti, specialmente in campo radioastronomico [2].

⁴Con assorbimento si intende l'insieme di due fenomeni: l'assorbimento e l'emissione stimolata, che viene considerata come un "assorbimento negativo" [1].

assorbimento:

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \quad (1.4)$$

La seconda è la *profondità ottica* τ_ν , definita come l'integrale lungo la linea di vista del coefficiente di assorbimento:

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \alpha_\nu ds' \quad (1.5)$$

dove s_0 è un punto arbitrario dello spazio e può essere posto a zero per semplicità. La profondità ottica è fondamentale per distinguere due categorie di corpi: se $\tau_\nu < 1$ allora il mezzo si definisce otticamente sottile o trasparente, cioè permette alla radiazione di attraversarlo senza che vi sia assorbimento di fotoni, mentre se $\tau_\nu > 1$ il mezzo è definito come otticamente spesso o opaco e tutti o larga parte dei fotoni verranno assorbiti durante l'attraversamento.

In questo modo, l'equazione del trasporto radiativo può essere riscritta come

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (1.6)$$

la cui soluzione formale è:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (1.7)$$

La soluzione è una somma di due termini: l'intensità specifica iniziale $I_\nu(0)$ che viene attenuata durante il passaggio nel mezzo la cui profondità ottica è τ_ν e la funzione sorgente del mezzo S_ν , attenuata dal mezzo stesso. Ciò significa che il mezzo, oltre ad assorbire parte della radiazione incidente, può emettere a sua volta della radiazione che può auto-assorbire.

Un limite notevole della soluzione è ottenuto se si suppone di avere una funzione sorgente costante. Sotto quest'ipotesi, l'equazione (1.7) diventa:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$$

Ipotizzando, inoltre, che $\tau_\nu \gg 1$ si ha che $I_\nu \rightarrow S_\nu$, cioè i processi di emissione e assorbimento nel mezzo si bilanciano [3].

Spesso, per studiare gli spettri di emissione, sono rilevanti due grandezze: l'*emissività specifica* J_ν e la *densità di energia specifica* u_ν .

La prima rappresenta la potenza emessa per unità di volume e frequenza e viene misurata in $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$; la seconda definisce l'energia totale per unità di volume e intervallo di frequenza e ha dimensioni $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3}$. u_ν può essere ottenuta attraverso l'integrale su tutti gli angoli solidi della densità di energia specifica per unità di angolo solido $u_\nu(\Omega)$, correlata all'intensità specifica tramite la relazione:

$$u_\nu(\Omega) = \frac{I_\nu}{c} \quad (1.8)$$

La legge (1.8) si ricava eguagliando due diverse espressioni del differenziale di energia dE quando si considera un volume cilindrico $dV = cdt dA$ costruito attorno a un raggio di lunghezza ct e sezione dA . Una delle due espressioni è legata alla densità specifica e permette di scrivere:

$$dE = u_\nu(\Omega)dV d\nu d\Omega = u_\nu(\Omega)c dtdA d\nu d\Omega$$

L'altra, invece, è legata all'intensità specifica e comporta che: $dE = I_\nu d\Omega dt d\nu$.

1.2 Radiazione di corpo nero

La prima categoria di processi radiativi che viene presa in esame sono i processi di origine termica, generati all'interno di corpi in equilibrio termico con l'ambiente circostante. La radiazione di corpo nero è il caposaldo di suddetti processi.

Il corpo nero è un ente ideale dal quale non fuoriesce o entra radiazione, che si trova in equilibrio termico e per cui la radiazione al suo interno segue una funzione ben definita, cioè la funzione di Planck.

Per questa categoria di corpi vale il *teorema di Kirchhoff* che mette in relazione i coefficienti di assorbimento ed emissione di un corpo ad una generica temperatura T posto a contatto con un corpo nero alla stessa temperatura:

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T) \quad (1.9)$$

I corpi neri si distinguono anche per una proprietà fondamentale della loro intensità specifica, che risulta essere una funzione della sola temperatura; per convenzione si indica $I_\nu = B_\nu(T)$ dove $B_\nu(T)$ rappresenta la funzione di Planck.

Una derivazione della legge di Planck è trattata in [1] e si articola in due parti: inizialmente, viene derivata la densità di stati dei fotoni all'interno di un corpo nero, descritto idealmente come una cavità con pareti perfettamente riflettenti; successivamente, viene eseguita una media dell'energia dei fotoni in un certo stato per ottenere la densità di energia specifica in funzione dell'angolo solido. L'espressione ottenuta è:

$$u_\nu(\Omega) = \frac{2h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (1.10)$$

da cui, attraverso la relazione (1.8), si arriva alla *funzione di Planck*:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (1.11)$$

dove h è la costante di Planck e k_B la costante di Boltzmann. L'andamento di $B_\nu(T)$ è riportato in *Figura 1.2*.

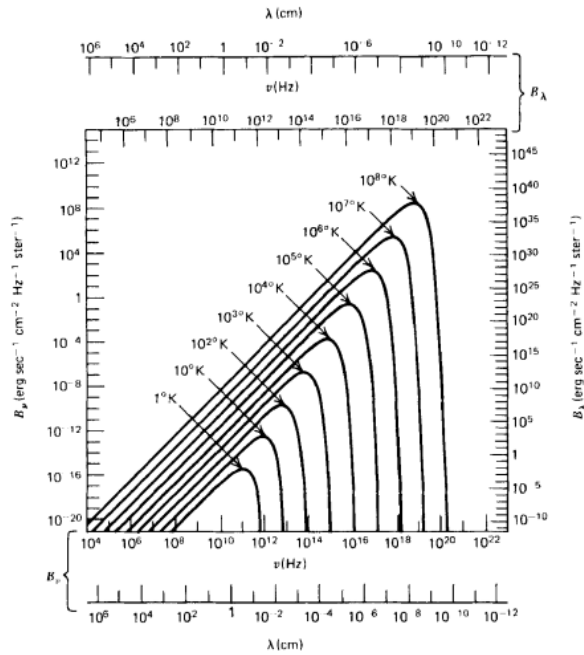


Figura 1.2: Spettro di corpo nero a diverse temperature ($1 K \leq T \leq 10^8 K$); la figura è tratta da [1].

Figura 1.2 evidenzia come la funzione di Planck presenti un picco in corrispondenza di una certa frequenza. Ricordando la relazione $c = \lambda\nu$ si ottiene la planckiana in funzione della lunghezza d'onda e, di conseguenza, il massimo della funzione sarà determinato dalla *legge di spostamento di Wien*:

$$\lambda_{max}T = b \quad (1.12)$$

dove $b = 0.290 \text{ cm K}$ è la *costante di spostamento di Wien*. In base alla posizione del picco, la radiazione emessa sarà rilevata in una banda dello spettro piuttosto che in un'altra. Ad una certa temperatura è univocamente associata una certa frequenza e, se T aumenta, la frequenza della radiazione emessa aumenterà e, di conseguenza, la lunghezza d'onda sarà accorciata.

La legge di Planck assume due forme notevoli nei limiti:

- $h\nu \gg k_B T$ (limite delle alte frequenze): in questo caso si può trascurare il fattore unitario al denominatore e si ottiene la *legge esponenziale di Wien*

$$B_\nu^W(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \quad (1.13)$$

- $h\nu \ll k_B T$ (limite delle basse frequenze): in questo regime si può espandere in serie di Taylor l'esponenziale e ottenere la *legge di Rayleigh-Jeans*

$$B_\nu^{RJ}(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} k_B T \quad (1.14)$$

Storicamente, la legge di Rayleigh-Jeans fu ricavata per prima e presentava il problema della catastrofe ultravioletta, cioè una divergenza per frequenze tendenti a infinito. La risoluzione di tale divergenza portò allo sviluppo della legge di Planck e ad un primo avvicinamento della fisica alla teoria quantistica.

Il modello del corpo nero è fondamentale in astrofisica per lo studio delle stelle. In prima approssimazione esse vengono descritte come degli enti costituiti da una successione di corpi neri concentrici a diverse temperature in quanto gli strati interni, assunti essere idealmente a temperature progressivamente crescenti, sono perfettamente opachi. Suddetta modellizzazione è consistente con le osservazioni sperimentali e permette di effettuare una stima della temperatura superficiale⁵ della stella grazie al colore apparente osservato. Ciò corrisponde allo strato in cui si ha la transizione da stella otticamente spessa a stella otticamente sottile.

Il procedimento descritto è importante in radioastronomia, dove è solitamente possibile applicare l'approssimazione di Rayleigh-Jeans a causa delle basse frequenze, e la temperatura che viene così determinata viene denominata *temperatura di brillantezza* T_b e rappresenta la temperatura che un corpo dovrebbe avere per produrre una certa brillantezza I_ν osservata.

Lo spettro di corpo nero, infine, è importante anche in ambito cosmologico perché la radiazione cosmica di fondo (CMBR), il residuo fossile del Big Bang scoperto attorno agli anni '60, emette radiazione in banda radio con spettro di corpo nero, il cui picco determina la temperatura di $T \sim 3$ K. Dalla presenza di uno spettro di corpo nero si evince che la CMBR fu emessa quando materia e radiazione erano in equilibrio termico e si aveva continuo scambio di energia, cioè l'Universo era in regime otticamente spesso. Nel momento in cui l'Universo si è espanso a sufficienza da diminuire la densità, radiazione e materia hanno smesso di interagire e l'Universo è diventato trasparente, portando con sé la distribuzione della radiazione al momento del disaccoppiamento.

1.3 Radiazione da particelle accelerate

Un metodo semplice per produrre radiazione elettromagnetica è accelerare particelle dotate di carica elettrica.

⁵Si parla di temperatura superficiale perché la radiazione osservata proviene dalla fotosfera della stella e non dagli strati più interni.

Dall'elettromagnetismo è noto che i campi elettrico e magnetico sono esprimibili in termini un potenziale vettoriale⁶ $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e un potenziale scalare $\phi(\mathbf{r}, t)$, in quanto componenti di un unico quadrivettore [4]. I potenziali \mathbf{A} e ϕ non sono univocamente determinati dal momento che vale l'invarianza di gauge: \mathbf{A} è noto a meno di un gradiente di una funzione scalare generica, mentre ϕ rimane invariante se ad esso è sommata la derivata nel tempo della stessa funzione scalare. L'ambiguità viene risolta imponendo delle condizioni che vincolino i due potenziali e, tipicamente, la scelta che viene fatta è imporre la *condizione di Lorentz*:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.15)$$

Manipolando le equazioni di Maxwell in forma locale per il campo elettromagnetico e considerando la condizione (1.15), si giunge ad un'espressione generale per $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $\phi(\mathbf{r}, t)$ in funzione della densità di carica ρ e della densità di corrente \mathbf{j} . I due potenziali sono conosciuti come *potenziali ritardati* per via della valutazione di ρ e \mathbf{j} ad un tempo antecedente a t . Il calcolo ad un tempo ritardato è ciò che permette la propagazione della radiazione da parte della particella: la luce viaggia a velocità c e impiega un certo tempo non nullo per raggiungere il punto \mathbf{r} partendo da un certo punto \mathbf{r}' , dove si ha generazione dell'informazione.

In ambito di una trattazione non quantistica, la radiazione emessa da una carica puntiforme q in moto velocità \mathbf{u} è descritta dai *potenziali di Liénard-Wiechert*, ottenuti mediante sostituzione degli andamenti di ρ e \mathbf{j} all'interno delle espressioni generali di $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\phi = \left[\frac{q}{\kappa R} \right] \quad \mathbf{A} = \left[\frac{q\mathbf{u}}{c\kappa R} \right] \quad (1.16)$$

dove le parentesi quadre indicano il calcolo al tempo ritardato, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ e $\kappa = 1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{n}}{c}$ dove \hat{n} è il versore della direzione di movimento della particella rispetto all'osservatore. κ è un fattore importante quando le velocità sono prossime a c , infatti è correlato all'effetto beaming relativistico che comporta un'emissione concentrata in un cono di semi-apertura dell'ordine di γ^{-1} . Dato che $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ si avrà una collimazione della radiazione emessa tanto più fine quanto maggiore è la velocità \mathbf{u} della particella .

Ricavando il campo elettrico \mathbf{E} dai potenziali ritardati si ottiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \left[\frac{(\hat{n} - \beta)(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left\{ \frac{\hat{n}}{k^3 R} \times [(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}] \right\}$$

dove $\beta = \mathbf{u}/c$ e $\kappa = 1 - \hat{n} \cdot \beta$. L'andamento del campo elettrico è la somma di un termine che si comporta come r^{-2} e di un termine con andamento r^{-1} . Il primo è la generalizzazione della legge di Coulomb classica, mentre il secondo è il campo che permette la

⁶Nel presente lavoro è impiegata la notazione per cui i vettori sono indicati in grassetto.

propagazione della radiazione a distanza infinita ed è perpendicolare al versore \hat{n} . Quest'ultimo termine ha modulo più piccolo rispetto al primo, tuttavia è l'unico significativo a grande distanza.

Una grandezza utile a quantificare la radiazione emessa nel caso di particelle accelerate è la potenza, dato che si tratta di un invariante relativistico ed è possibile determinarla nel sistema di riferimento che rende più semplice il calcolo.

Considerando una particella di carica q che si muove a velocità non relativistica ($\mathbf{u} \ll c$, cioè $\gamma \ll 1$), la potenza emessa è determinata grazie alla media del vettore di Poynting \mathbf{S} , che per definizione rappresenta la potenza irradiata per unità di angolo solido:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_{rad}|^2 = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{q\dot{\mathbf{u}}}{Rc^2} \sin\theta \right)^2 \quad (1.17)$$

dove viene sostituito il modulo del campo di radiazione \mathbf{E}_{rad} calcolato in un certo punto dello spazio. Integrando su tutti i possibili angoli solidi, risulta un fattore $8\pi/3$ dovuto al seno al quadrato; sostituendo si ottiene la *formula di Larmor*:

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\mathbf{u}}^2 \quad (1.18)$$

L'equazione di Larmor mostra il comportamento della potenza irradiata dalla carica quando subisce un'accelerazione, che compare nella legge al quadrato. L'andamento ottenuto è paragonabile a ciò che si ottiene nel trattare un dipolo elettrico: la radiazione non viene emessa lungo la direzione dell'accelerazione e si ha un massimo di emissione nella direzione perpendicolare ad essa.

Capitolo 2

Bremsstrahlung

La bremsstrahlung, conosciuta anche come radiazione di frenamento, è uno dei processi di radiazione fondamentali dell'astrofisica ed è causata dall'accelerazione di particelle cariche, tipicamente elettroni, da parte di un campo coulombiano prodotto da uno ione. Durante l'interazione, gli elettroni deviano dalla loro traiettoria, la loro velocità diminuisce e, per rispettare la conservazione dell'energia, si ha emissione di radiazione.

Si tratta di una transizione definita free-free, in cui le particelle coinvolte sono libere e non vincolate a degli stati legati, sia prima che dopo l'interazione.

L'emissione per bremsstrahlung può essere dovuta a processi termici o meno, in base ai parametri fisici della sorgente. Il più delle volte, tuttavia, viene osservata l'emissione termica.

2.1 Bremsstrahlung non relativistica

In generale, la radiazione di frenamento può essere relativistica o non relativistica, in base alla distribuzione delle velocità delle particelle coinvolte nel processo. Nel caso di un plasma termico le velocità sono descritte dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann, mentre per un plasma relativistico dalla distribuzione a legge di potenza. Le relazioni non relativistiche sono adeguate per la maggior parte dei casi e possono essere utilizzate come punto di partenza per ottenere quelle relativistiche, effettuando opportune correzioni. In questa sezione il processo è illustrato a livello semi-classico, in cui l'analisi classica, già adeguata per descrivere la radiazione in alcuni regimi, viene corretta con dei termini quantistici definiti dal fattore di Gaunt.

Il meccanismo classico considerato è quello di una collisione tra un elettrone di carica e e uno ione di carica Ze , supposto a riposo, con un parametro di impatto dell'interazione pari a b (si veda *Figura 2.1*).

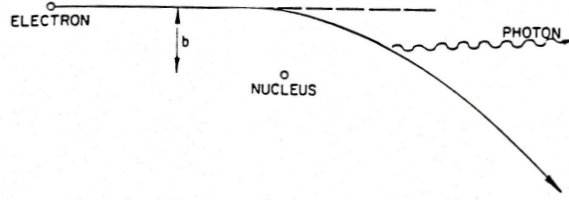


Figura 2.1: Scattering elettrone-ione con parametro di impatto b (figura tratta da [5]).

Per la formula di Larmor (1.18) e tenendo conto che il campo di forze in cui è immerso l'elettrone è di tipo coulombiano, la potenza emessa in funzione del tempo è definita da:

$$P(t) = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{Z^2 e^4}{m^2 x^4(t)} \quad (2.1)$$

dove m è la massa dell'elettrone e $x(t)$ è la distanza tra ione ed elettrone in funzione del tempo. La potenza emessa è rilevante solo se la distanza x è dell'ordine del parametro di impatto, vista la dipendenza da x^{-4} , nonché per particelle con massa piccola, dato l'andamento m^{-2} .

Quindi, la durata Δt della collisione può essere considerata finita e proporzionale ad una breve porzione di traiettoria di lunghezza $2b$:

$$\Delta t \sim 2 \frac{b}{v} \quad (2.2)$$

dove v è la velocità della particella. Grazie alla relazione (2.2) si evince che la potenza totale è emessa sotto forma di impulsi di durata Δt , e che l'energia irradiata durante la collisione, se si suppone $x \sim b$, è dell'ordine di:

$$P\Delta t \sim \frac{2e^2}{3c^3} \frac{Z^2 e^4}{m^2 b^4} 2 \frac{b}{v} \sim \frac{4}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3} \frac{1}{b^3 v} \quad (2.3)$$

Tramite l'analisi di Fourier viene delineato l'andamento dello spettro di frequenza della potenza, che risulta costante fino ad una frequenza massima oltre cui la radiazione crolla seguendo una legge esponenziale. Tale frequenza è determinata da:

$$\nu_{max} \sim \frac{1}{2\Delta t} \sim \frac{v}{4b} \quad (2.4)$$

Dalla relazione (2.3) e approssimando lo spettro di frequenza della potenza ad uno spettro rettangolare con larghezza pari a ν_{max} , viene stimata l'energia irradiata da un singolo elettrone per unità di frequenza:

$$\frac{P\Delta t}{\Delta\nu} \sim \frac{P\Delta t}{\nu_{max}} \sim \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3} \frac{1}{b^2 v^2} \quad (2.5)$$

La trattazione analizzata fino ad ora permette di descrivere in maniera accurata l'emissione della singola interazione. Tuttavia, il singolo evento di collisione è poco energetico e non particolarmente interessante, perciò si passa ad analizzare il caso in cui sono presenti molte cariche, sia positive che negative.

Si supponga di avere un gas ionizzato con densità di ioni n_i e densità di elettroni liberi n_e e si ipotizzi che la velocità di quest'ultimi sia v , non relativistica. Il numero di urti per unità di tempo con parametro d'impatto compreso tra b e $b + db$ è dato da $N_u = 2\pi b db n_e n_i v$, perciò l'emissività risulta essere pari a:

$$J(v, \nu) = \frac{dW}{d\nu dV dt} = 2\pi v n_i n_e \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{P \Delta t}{\Delta \nu} b db = \frac{32\pi}{3} \frac{e^6}{m^2 c^3 v} Z^2 n_i n_e \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \quad (2.6)$$

Il limite superiore dell'integrale dovrebbe essere $+\infty$, ma risulta impossibile avere dei valori per l'energia irradiata per unità di frequenza in un così vasto intervallo del parametro di impatto; l'integrale, perciò, viene ristretto ad un dominio finito.

L'estremo superiore b_{max} è il parametro di impatto oltre cui l'integrale in (2.6) diventa trascurabile. Il suo valore esatto è indeterminato, tuttavia una buona approssimazione è ottenuta imponendo:

$$b_{max} = \frac{v}{4\nu} \quad (2.7)$$

La ragione per cui si sceglie il precedente valore è che se il parametro d'impatto è attorno a b_{max} , l'energia $h\nu$ emessa tende a zero.

L'estremo inferiore b_{min} , invece, non può essere al di sotto di un certo valore altrimenti il fotone emesso avrebbe energia maggiore dell'elettrone prima dell'interazione. b_{min} può essere determinato in due diversi modi, in base all'approccio che si intende seguire:

- se si sceglie una trattazione classica, per cui la variazione nella velocità dell'elettrone deve essere minore del valore della velocità stessa ($\Delta v \leq v$), allora:

$$b_{min}^C = \frac{2Ze^2}{mv^2} \quad (2.8)$$

- se si vuole trattare da un punto di vista quantistico, considerando così gli effetti del principio di indeterminazione di Heisenberg $\Delta p \Delta x \geq \hbar$, allora:

$$b_{min}^Q = \frac{\hbar}{mv} \quad (2.9)$$

In base alle condizioni fisiche del sistema, si sceglierà come limite inferiore uno dei due possibili. In generale, vale la relazione:

$$\frac{b_{min}^Q}{b_{min}^C} \sim \frac{\hbar c}{2e^2} \frac{v}{c} \frac{1}{Z} \sim \frac{137}{Z} \frac{v}{c} \quad (2.10)$$

dove $e^2/\hbar c = 137^{-1}$ è la costante di struttura fine. L'estremo inferiore quantistico diventa dominante su quello classico se $v/c \gtrsim 0.01$ [5]. Un esempio di applicazione del b_{min}^Q è l'emissione per bremsstrahlung del gas presente nei cluster di galassie, che si trova ad una temperatura dell'ordine di $10^7 - 10^8$ K e ha quindi un'emissione in banda X.

In entrambi i casi, si definisce la funzione *fattore di Gaunt* $g_{ff}(v, \nu)$:

$$g_{ff}(v, \nu) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \quad (2.11)$$

Il fattore di Gaunt è una funzione dell'energia dell'elettrone e della frequenza di emissione, il cui valore esatto è calcolato per particolari intervalli dei parametri grazie a delle formule approssimate. I risultati tipici si attestano attorno all'unità per tutti i regimi eccetto quello radio, dove i valori sono prossimi alla decina.

2.2 Bremsstrahlung termica

Quando un plasma, cioè gas caldo e ionizzato, si trova all'equilibrio termico e le velocità dei suoi elettroni e ioni seguono la distribuzione di Maxwell-Boltzmann, allora ci si trova in presenza di bremsstrahlung termica. Si tratta del processo caratteristico alla base dell'emissione dei plasmi e viene osservata nelle regioni HII, zone ad alta concentrazione di idrogeno ionizzato nelle vicinanze di stelle di grande massa e recente formazione (scale di alcuni parsec), dove le temperature sono dell'ordine di 10^4 K. Un altro contesto in cui è presente il processo sono i cluster di galassie (scale di alcuni milioni di parsec), dove, come già visto, la temperatura si attesta attorno ai 10^8 K. Nelle regioni HII, l'emissione viene osservata in banda radio e uno studio più approfondito è esposto nel *Capitolo 5* del presente lavoro.

Si prenda in considerazione un plasma costituito da elettroni e ioni liberi. Le velocità di una popolazione di elettroni ad una certa temperatura T seguono la distribuzione di Maxwell-Boltzmann $f(v)dv$, da cui si ricava la distribuzione del numero di elettroni $n_e(v)$ ¹:

$$n_e(v) = n_e f(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{mv^2}{2k_B T} \right) v^2 dv \quad (2.12)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann e m la massa della particella. La distribuzione della densità elettronica deve essere sostituita nella formula (2.6) per ottenere un'espressione dell'emissività nel caso di bremsstrahlung termica.

Per avere emissione è indispensabile che l'energia cinetica degli elettroni ($\frac{1}{2}mv^2$) sia superiore all'energia dei fotoni emessi ($h\nu$) e tale condizione definisce un limite inferiore per la velocità della popolazione di elettroni.

¹Il range di velocità considerato è $d^3v = 4\pi v^2 dv$, supponendo di avere una distribuzione isotropa.

Sostituendo (2.12) in (2.6) si ricava l'emissività:

$$J_{TH}(T, \nu) = \int_{\nu_{min}}^{\infty} J(\nu, \nu) f(\nu) d\nu = 6.8 \cdot 10^{-38} Z^2 n_e n_i T^{-1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \bar{g}_{ff} \quad (2.13)$$

J_{TH} è misurato in $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$; \bar{g}_{ff} è il fattore di Gaunt mediato sulle velocità, i cui valori sono tabulati. L'andamento dello spettro è rappresentato in *Figura 2.2*.

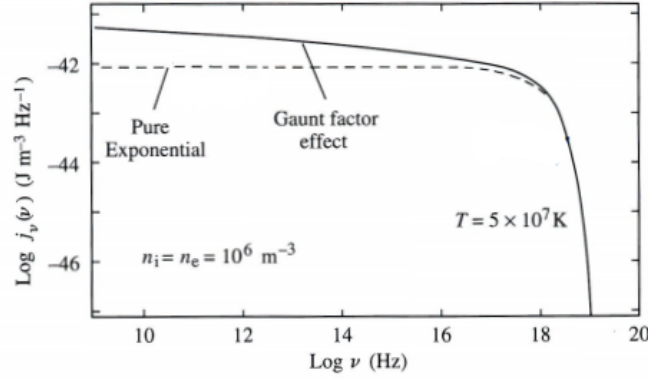


Figura 2.2: Spettro di emissione per bremsstrahlung termica in scala doppio-logaritmica (figura tratta da [6]).

Il fattore esponenziale evidenzia come lo spettro di emissione presenti un taglio in corrispondenza di una certa frequenza, denominata *frequenza di cut-off*:

$$\nu_{cut} = \frac{k_B T}{h} \quad (2.14)$$

Il valore di ν_{cut} dipende solo dalla temperatura a cui si trova la popolazione di elettroni e questa corrispondenza risulta fondamentale per effettuare una stima della temperatura del plasma, una volta nota la frequenza di cut-off dallo spettro.

La radiazione emessa risulta non polarizzata, dato che gli elettroni si muovono in maniera non ordinata e, di conseguenza, anche i vettori del campo elettromagnetico ad essi associati non avranno una direzione privilegiata.

2.3 Assorbimento per bremsstrahlung

Per trattare lo spettro di emissione di bremsstrahlung sono stati ignorati, per semplicità, i possibili effetti di assorbimento della radiazione emessa da parte del plasma. Supponendo di trovarsi nel caso di bremsstrahlung termica, attraverso la legge di Kirchhoff (1.9) si ricava il coefficiente di assorbimento dovuto ai processi free-free:

$$j_{\nu}^{FF} = \alpha_{\nu}^{FF} B_{\nu}(T)$$

Supponendo di avere una sorgente isotropa, il coefficiente di emissione j_ν^{FF} è dato dall'emissività J_{TH} moltiplicata per 4π , cioè l'intero angolo solido. $B_\nu(T)$, invece, è data da (1.11). Procedendo col rapporto tra le due quantità si ottiene:

$$\begin{aligned}\alpha_\nu^{FF} &= \frac{4e^6}{3mhc} \left(\frac{2\pi}{3k_B m} \right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 n_i n_e \nu^{-3} \left[1 - \exp \left(- \frac{h\nu}{k_B T} \right) \right] \bar{g}_{ff} = \\ &= 3.7 \cdot 10^8 T^{-1/2} Z^2 n_e n_i \nu^{-3} \left[1 - \exp \left(- \frac{h\nu}{k_B T} \right) \right] \bar{g}_{ff}\end{aligned}\quad (2.15)$$

dove α_ν^{FF} è espresso in cm^{-1} .

Si distinguono due regimi notevoli:

- $h\nu \gg k_B T$: l'esponenziale diventa trascurabile e si ha l'andamento $\alpha_\nu^{FF} \propto \nu^{-3}$
- $h\nu \ll k_B T$: corrisponde al regime di Rayleigh-Jeans della funzione di Planck e si ha l'andamento $\alpha_\nu^{FF} \propto \nu^{-2} T^{-3/2}$

Studiare l'andamento del coefficiente di assorbimento è una maniera utile per studiare la profondità ottica del plasma che emette per bremsstrahlung.

Capitolo 3

Radiazione di sincrotrone

Il secondo processo di emissione nel continuo che viene esaminato è la radiazione di sincrotrone, originata da particelle che si muovono con velocità ultra-relativistiche e accelerate da un campo magnetico. In questo caso, non è possibile associare alle particelle una certa temperatura e, perciò, non si tratta di un processo con natura termica.

Un contesto importante in cui la radiazione di sincrotrone è osservata sono i resti di supernove: dal collasso del core della stella, gli strati più esterni della stella vengono espulsi violentemente. Il tutto genera onde d'urto capaci di accelerare cariche elettriche a energie ultra-relativistiche.

3.1 Emissione da un singolo elettrone

Per iniziare, si ricorda l'equazione che descrive il moto di una particella relativistica di carica q e massa m all'interno di un campo magnetico uniforme¹ \mathbf{B} :

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.1)$$

dove $\gamma = \frac{\gamma}{c}$ è il fattore di Lorentz associato alla velocità \mathbf{v} particella.

Risolvendo l'equazione (3.1) si ricavano le due componenti della velocità della particella: la componente parallela v_{\parallel} risulta costante nel tempo, mentre si ha $|v_{\perp}| = 0$ per la componente perpendicolare. Il risultato dedotto è un moto elicoidale, composizione di un moto circolare uniforme e di un moto traslazionale lungo la direzione di movimento della particella. La frequenza di rotazione della particella, denominata *girofrequenza* è:

$$\omega_B = \frac{q\mathbf{B}}{\gamma mc} \quad (3.2)$$

¹È sufficiente che sia uniforme su dimensioni molto più grandi del raggio di Larmor [5], dove il raggio di Larmor rappresenta il raggio della traiettoria risultante dall'interazione con il campo magnetico.

Per calcolare la potenza emessa occorre manipolare la formula di Larmor (1.18), idonea ad un contesto classico, per adattarla ad un ambito relativistico.

Inizialmente, si esprime il quadrato dell'accelerazione come il prodotto scalare del vettore $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a}$ con sé stesso. In seguito, l'accelerazione viene scomposta nella componente parallela $\dot{u}_{\parallel} = a_{\parallel}$ e perpendicolare $\dot{u}_{\perp} = a_{\perp}$ e viene eseguita una trasformazione ad un sistema di riferimento a riposo, dove le componenti sono determinate come $a'_{\parallel} = a_{\parallel}\gamma^3$ e $a'_{\perp} = a_{\perp}\gamma^2$. Infine, si sostituiscono le componenti nella formula di Larmor e si giunge a:

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4(a_{\perp}^2 + \gamma^2 a_{\parallel}^2) \quad (3.3)$$

Dato che la componente parallela della velocità è costante, l'accelerazione avrà solamente componente perpendicolare data da $a = \omega_B v_{\perp}$. Quindi, sostituendo in (3.3), la potenza emessa totale è:

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4 \frac{q^2 B^2}{\gamma^2 m^2 c^2} v_{\perp}^2 = \frac{2q^4}{3c^3 m^2} \gamma^2 B^2 \beta_{\perp}^2 \quad (3.4)$$

dove $\beta_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{c}$ e, indicando con α l'angolo di pitch, cioè l'angolo tra il vettore velocità e il vettore campo magnetico, allora $v_{\perp} = v \sin \alpha$.

Presa in esame una distribuzione isotropa delle velocità, sarà necessario effettuare una media di (3.4) su tutti gli angoli di pitch [1]. La potenza in (3.4) ha una dipendenza dalla massa del tipo m^{-2} , perciò si può prendere in esame solo il caso di elettroni e positroni, dotati di una massa sufficientemente piccola da generare una potenza non trascurabile. In questo modo si ottiene l'espressione finale per la potenza irradiata totale:

$$P_S = \frac{4}{3}\sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B \quad (3.5)$$

dove $\sigma_T = \frac{8\pi r_0^2}{3}$ è la sezione d'urto di Thomson (si veda *Capitolo 4.1*), $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ è il raggio classico dell'elettrone e $U_B = \frac{B^2}{8\pi}$ è la densità di energia magnetica. Se la particella è ultra-relativistica, cioè se $\beta \simeq 1$, allora la potenza emessa può essere espressa in funzione delle costanti [5]:

$$P_S = 1.6 \cdot 10^{-15} \gamma^2 B^2 \quad \text{erg s}^{-1}$$

La radiazione di sincrotrone ha l'importante peculiarità di essere connessa all'effetto beaming relativistico. Dal momento che le velocità degli elettroni hanno un fattore di Lorentz di molto superiore all'unità, per passare dal sistema di riferimento in cui la particella è a riposo al sistema di riferimento dell'osservatore in quiete valgono le trasformazioni di Lorentz. Le velocità calcolate nei due sistemi sono legate dalla formula dell'aberrazione della luce:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \alpha' + \beta}$$

con α angolo di pitch misurato nel sistema di riferimento dell'osservatore e α' lo stesso angolo misurato nel sistema di riferimento dell'elettrone. Ipotizzando, per semplicità, che $|\alpha'| = \frac{\pi}{2}$ e ricordando che $\beta \approx 1$ risulta:

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{1}{\gamma}$$

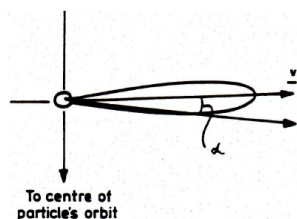


Figura 3.1: Distribuzione angolare della radiazione di sincrotrone (figura tratta da [5]).

Come mostrato in *Figura 3.1*, metà della radiazione totale emessa dall'elettrone è concentrata in un cono lungo la direzione della velocità dell'elettrone e con semiampiezza pari al reciproco del fattore di Lorentz. Di conseguenza, un osservatore fisso misurerà la radiazione solo quando il cono di emissione sarà rivolto nella sua direzione e solo se la linea di vista che lo unisce con la sorgente è compresa nella semi-apertura di tale cono.

Quindi, la radiazione rilevata ha un comportamento impulsivo e risulta massima quando il vettore velocità dell'elettrone giace sulla linea di vista. Inoltre, come già visto in (3.5), la potenza irradiata dipende da un fattore γ^2 e, di conseguenza, è di molto amplificata all'interno del cono di emissione.

È utile effettuare una stima della durata dell'impulso di radiazione. Uno schema geometrico del cono di emissione è rappresentato in *Figura 3.2*, dove $\Delta\theta = \frac{2}{\gamma}$ è l'apertura totale del cono e a è il raggio di curvatura della traiettoria dell'elettrone.

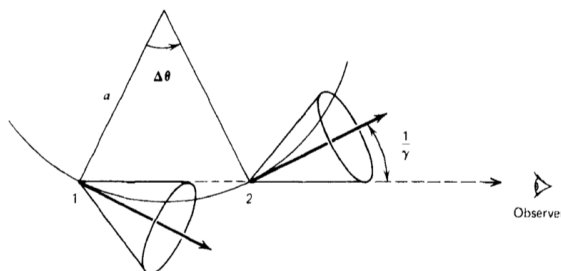


Figura 3.2: Coni di emissione per la radiazione di sincrotrone (figura tratta da [1]). Nel punto 1 inizia la visibilità dell'impulso che viaggia in linea retta verso l'osservatore. L'elettrone prosegue lungo la traiettoria a velocità prossima a c e, una volta raggiunto il punto 2 (punto in cui cessa la visibilità dell'impulso iniziale), la distanza da 1 sarà molto piccola. Di conseguenza, la durata dell'impulso sarà breve.

La distanza Δs tra i punti 1 e 2 indicati in *Figura 3.2* è ricavata attraverso considerazioni geometriche tramite la curvatura $a = v/\omega_B$:

$$\Delta s = \frac{2a}{\gamma} = \frac{2v}{\gamma\omega_B}$$

dove ω_B è data da (3.2). Si noti che viene trascurato per semplicità il contributo dell'angolo di pitch α , che contribuirebbe tramite una moltiplicazione per $\sin \alpha$.

Da Δs discende l'intervallo di tempo che trascorre tra l'emissione nel punto 2 e l'emissione nel punto 1:

$$t_2 - t_1 = \frac{\Delta s}{v} = \frac{2}{\gamma\omega_B} \quad (3.6)$$

I tempi che l'osservatore misurerà nel suo sistema di riferimento saranno diversi da t_1 e t_2 a causa del fatto che la radiazione impiega un tempo non nullo per percorrere Δs . L'intervallo di tempo (3.6) è modificato dall'effetto Doppler ed è pari a:

$$t_2^O - t_1^O = \frac{2}{\gamma\omega_B} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad (3.7)$$

L'elettrone che emette per sincrotrone si muove a velocità ultra-relativistica, perciò il fattore tra parentesi nella precedente equazione, già evidenziato nei potenziali di Liénard-Wiechert e correlato all'effetto beaming (si veda il *Capitolo 1.3*), può essere approssimato a $(2\gamma^2)^{-1}$, da cui:

$$\tau = t_2^O - t_1^O \approx (\gamma^3\omega_B)^{-1} \quad (3.8)$$

Tale differenza di tempi definisce la durata dell'impulso emesso da un singolo elettrone misurata dall'osservatore in quiete. Essa risulta più piccola di un fattore γ^{-3} rispetto al periodo di girazione dato da $\frac{2\pi}{\omega_B}$, perciò lo spettro in frequenza della radiazione avrà una certa larghezza e tenderà ad essere trascurabile al di sopra di una certa frequenza. Di conseguenza, si definisce una *frequenza critica* come:

$$\nu_C = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\tau} = \frac{3}{4\pi} \gamma^3 \omega_B \quad (3.9)$$

Qualitativamente è possibile vedere che, al di sopra di ν_C , l'andamento dello spettro è un esponenziale decrescente e perciò tende ad essere trascurabile. Per basse frequenze, invece, l'andamento della potenza emessa è del tipo $(\nu/\nu_C)^{1/3}$.

Ricordando l'espressione (3.2) per ω_B e sostituendo i valori numerici delle costanti si ottiene la frequenza critica espressa in GHz:

$$\nu_C \simeq 4.2 \cdot 10^{-9} \gamma^2 B$$

dove il campo magnetico B è espresso in μG . Per valori che sovente si riscontrano in ambienti astrofisici, cioè campi magnetici dell'ordine dei $10 \mu\text{G}$ e di fattori di Lorentz

$\gamma \sim 10^4$, si ottengono frequenze dell'ordine di 4 GHz e perciò la radiazione di sincrotrone è tipicamente visibile nella banda delle frequenze radio [5].

Per capire come si presenta lo spettro della radiazione emessa da un singolo elettrone per sincrotrone si sfruttano le proprietà dell'analisi di Fourier eseguita sul campo elettrico associato al campo magnetico che genera la radiazione.

A causa dell'effetto beaming, il campo elettrico può essere ottenuto come una funzione di $\gamma\theta$, dove θ è l'angolo polare rispetto alla direzione di moto della particella; quindi si ha $E(t) \propto F(\gamma\theta)$ dove t è il tempo misurato nel sistema di riferimento dell'osservatore e F è una funzione generica. Ponendo lo zero sia del tempo che della lunghezza s del cammino nel punto dove l'impulso è centrato sull'osservatore e facendo riferimento alla *Figura 3.1*, si calcolano $\theta \approx s/a$ e $t \approx s/v(1 - v/c)$, nonché la relazione tra i due:

$$\gamma\theta \approx 2\gamma(\gamma^2\omega_B) \propto 2\pi\nu_C t = \omega_C t$$

dove $\omega_C = 2\pi\nu_C$ è la pulsazione corrispondente alla frequenza critica.

Il campo elettrico, perciò, sarà determinato da una certa funzione $g(\omega_C t)$ e la sua trasformata di Fourier è definita come:

$$\hat{E}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega_C t) e^{i\omega t} dt$$

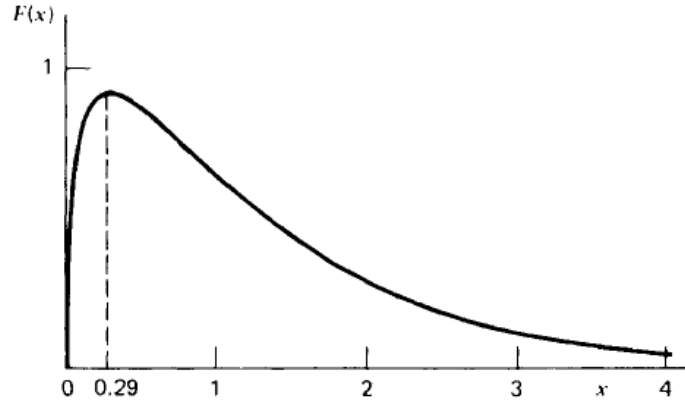
Per le proprietà delle trasformate di Fourier, lo spettro di potenza è proporzionale al modulo al quadrato della trasformata di Fourier del campo elettrico e, integrando su tutti i possibili angoli solidi $d\Omega$ e dividendo per il periodo orbitale, si ottiene un'espressione generale per la potenza emessa per unità di frequenza:

$$P(\omega) = C_1 F\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

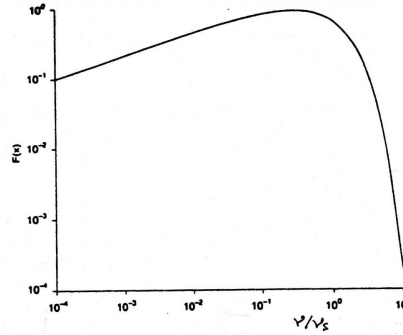
con F una generica funzione adimensionale e C_1 una costante, che può essere stimata integrando $P(\omega)$ in $d\omega$ ed effettuando un confronto con la relazione (3.4). Si ottiene così un'espressione formale per lo spettro di emissione di un singolo elettrone di carica e in funzione di ω :

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3} e^3 B}{2\pi mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right) \quad (3.10)$$

Procedendo con uno studio più dettagliato, come illustrato in [1] o in [4], si può determinare un'espressione esplicita di $F(\omega/\omega_C)$ dipendente dalla funzione di Bessel modificata di ordine $5/3$. L'andamento finale di (3.10) è rappresentato in *Figura 3.3* in scala lineare e doppio-logaritmica.



(a) Spettro di potenza in scala lineare. La grandezza x che compare sull'asse delle ascisse è $x = \omega/\omega_C$ (figura tratta da [1]).



(b) Spettro di potenza in scala doppio-logaritmica (figura tratta da [5]).

Figura 3.3: Spettro di potenza della radiazione di sincrotrone emessa da un singolo elettrone in scala lineare (a) e doppio-logaritmica (b).

La funzione di Bessel modificata ha due limiti notevoli: per basse frequenze ($\omega \ll \omega_C$) ha un andamento del tipo $(\omega/\omega_C)^{1/3}$, mentre per alte frequenze ($\omega \gg \omega_C$) ha un andamento $\exp(-\omega/\omega_C)$. Quest'ultimo conferma ciò che era stato osservato precedentemente: lo spettro di radiazione emessa per sincrotrone da un singolo elettrone possiede una frequenza, ν_C , al di sopra di cui diventa prossimo a zero. Inoltre, lo spettro raggiunge il suo massimo per un valore pari a circa un terzo della frequenza critica.

3.2 Emissione da un insieme di elettroni relativistici

Fino ad ora è stata trattata l'emissione di sincrotrone per un singolo elettrone. In natura ci si trova in presenza di una sorgente costituita da un insieme di elettroni relativistici indipendenti l'uno dall'altro e si può supporre che non siano presenti fenomeni legati

all'assorbimento, in modo tale che lo spettro totale possa essere calcolato come somma dei contributi di tutti gli elettroni.

Il numero di elettroni per unità di volume dotati di energie comprese nell'intervallo $[E, E + dE]$ è definito come $N(E)dE$ e viene approssimato ad una distribuzione a legge di potenza:

$$N(E)dE = N_0 E^{-\delta} dE$$

dove N_0 , δ sono delle costanti e $E_1 < E < E_2$. La modellizzazione scelta è giustificata dal fatto che la legge di potenza descrive la distribuzione energetica degli elettroni nei raggi cosmici e fornisce delle previsioni in accordo con le osservazioni sperimentali [5].

La potenza emessa per unità di volume, cioè l'emissività integrata in frequenza, è data da:

$$J(\nu) = \int_{E_1}^{E_2} P(\nu/\nu_C) N(E) dE = N_0 \int_{E_1}^{E_2} P(\nu/\nu_C) E^{-\delta} dE$$

dove $P(\nu/\nu_C)$ è lo spettro calcolato in (3.10) in funzione della frequenza e non della pulsazione ω . Esprimendo gli estremi² in funzione della frequenza e non dell'energia, effettuando il cambio di variabile $x \equiv \nu/\nu_C$ e ricavando da (3.9)³ l'andamento $\nu_C \propto E^2$ si giunge a:

$$J(\nu) \propto \nu^{-\frac{\delta-1}{2}} \int_{x_1}^{x_2} P(x) x^{\frac{\delta-3}{2}} dx \propto \nu^{-\frac{\delta-1}{2}} = \nu^{-\alpha} \quad (3.11)$$

Si definisce *indice spettrale* l'esponente

$$\alpha = \frac{\delta - 1}{2}$$

ed è un parametro importante nello studio delle sorgenti radio.

Lo spettro totale dell'insieme di elettroni, visto il risultato di (3.11), ha un andamento del tipo legge di potenza. La dipendenza è fornita dall'esponente δ di $N(E)$ che descrive come sono distribuite le particelle all'interno dell'insieme.

Se viene eseguita l'ulteriore approssimazione secondo cui tutti gli elettroni di energia E irradiano alla frequenza critica, è possibile interpretare lo spettro complessivo come una sovrapposizione degli spettri di emissione dei singoli elettroni. In questo modo, la curva con andamento a legge di potenza è delineata dall'andamento dei massimi delle curve di emissione degli elettroni che compongono l'insieme.

²Tali estremi dovrebbero essere 0 e ∞ , tuttavia, se l'intervallo energetico è sufficientemente ampio, l'integrale converge e dà come risultato un valore in accordo con i dati sperimentali. Tipicamente si impiegano le frequenze 100 MHz per x_1 e 100 GHz per x_2 .

³Si ottiene ricordando che $E = \gamma mc^2$ e sostituendo quindi γ nell'equazione.

3.3 Polarizzazione della radiazione

Una peculiarità che contraddistingue la radiazione di sincrotrone rispetto agli altri meccanismi di emissione è la sua polarizzazione.

La radiazione emessa da un singolo elettrone risulta avere una polarizzazione ellittica, in quanto la componente della radiazione parallela al campo magnetico ha una dipendenza temporale diversa ad ogni impulso rispetto a quella perpendicolare. Questo comporta che gli spettri delle due componenti non siano perfettamente coincidenti [4].

Quando invece si considera un insieme di elettroni con una certa distribuzione degli angoli di pitch, le componenti ellittiche degli elettroni si eliminano a vicenda visto che si ha lo stesso contributo da entrambe le metà del cono di emissione. La polarizzazione risultante è di tipo parzialmente lineare, con un indice di polarizzazione, definito come il rapporto tra l'intensità della parte dell'onda polarizzata e l'intensità della parte non polarizzata, che può raggiungere anche il 75%.

La presenza di una forte polarizzazione lineare della radiazione è il segno distintivo della radiazione di sincrotrone.

Capitolo 4

Scattering elettrone-fotone

L'ultima categoria di processi che viene presa in esame è lo scattering, o diffusione.

Il processo fisico elementare all'origine di tali meccanismi di radiazione è l'urto meccanico tra un elettrone in quiete e un fotone, che viene assunto come una vera e propria particella e va di conseguenza analizzato tramite ipotesi quantistiche. Lo studio della diffusione elettrone-fotone, infatti, fu un punto cruciale nello sviluppo della teoria della meccanica quantistica e permise di dimostrare la natura corpuscolare della radiazione elettromagnetica, affiancandosi agli studi condotti da Einstein sull'effetto fotoelettrico.

In base al regime energetico del fotone è possibile distinguere due diversi scattering. Si parla di *diffusione Thomson* se l'energia del fotone è al di sotto di un certo limite per cui è ancora possibile trattare il processo attraverso delle ipotesi classiche; se, invece, l'energia del fotone è al di sopra di tale limite, allora è necessaria la trattazione quantistica del processo e si ha la *diffusione Compton*.

In ambito astrofisico, tuttavia, è più comune incontrare la *diffusione Compton inversa*, in cui l'elettrone non risulta in quiete bensì possiede velocità relativistiche: in questo caso, l'energia del fotone risulterà essere molto minore rispetto a quella dell'elettrone.

4.1 Diffusione Thomson

Quando l'energia del fotone soddisfa la condizione

$$h\nu \ll m_e c^2$$

dove m_e è la massa dell'elettrone in quiete, allora il fotone può essere trattato classicamente come un'onda elettromagnetica e il processo di scattering viene assunto, anziché come un vero e proprio urto, come un elettrone che viene accelerato da un campo elettrico coulombiano e quindi emette radiazione con una certa lunghezza d'onda.

Il campo elettrico può essere trattato come un'onda elettromagnetica di ampiezza E_0 e pulsazione ω , diretta lungo la direzione delineata dal versore \hat{n} : $\mathbf{E} = E_0 \sin(\omega t)\hat{n}$.

L'equazione differenziale che descrive il moto dell'elettrone di carica e sottoposto al campo \mathbf{E} è:

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = eE_0 \sin(\omega t) \hat{n}$$

Riscrivendo la precedente equazione in funzione del momento di dipolo dell'elettrone $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, si ricava la soluzione:

$$\mathbf{d} = -\left(\frac{e^2 E_0}{m_e \omega^2}\right) \sin(\omega t) \hat{n}$$

L'elettrone, a seguito allo stimolo indotto dal campo elettrico, si comporta come un dipolo oscillante e viene accelerato, per poi emettere radiazione alla stessa lunghezza d'onda del campo elettrico in cui è immerso. L'accelerazione dell'elettrone è:

$$a(t) = \frac{eE_0}{m_e} \sin(\omega t)$$

Sostituendo il valore medio dell'accelerazione nella formula di Larmor (1.18) e ricordando che la media del fattore $\sin(\omega t)$ dà come contributo $\frac{1}{2}$, si ottiene la potenza emessa:

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{eE_0}{m_e}\right)^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{3} \frac{e^4 E_0^2}{m_e^2 c^3} \quad (4.1)$$

All'onda elettromagnetica \mathbf{E} è associata una certa energia trasportata e la grandezza che quantifica il flusso di energia irradiato è il vettore di Poynting \mathbf{S} , il cui modulo è:

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

Il modulo del vettore di Poynting permette di definire la *sezione d'urto di Thomson* come il rapporto tra (4.1) e $\langle |\mathbf{S}| \rangle$:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (4.2)$$

dove r_0 è il raggio classico dell'elettrone. Essa ha le dimensioni di un'area e si identifica come una misura dell'efficacia dello scattering. Sostituendo i valori numerici, si ricava: $\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$.

La sezione d'urto ottenuta è indipendente dalla lunghezza d'onda, perciò lo scattering avrà la stessa efficienza ad ogni frequenza. Ciò si riflette nel comportamento della radiazione emessa, che ha la stessa lunghezza d'onda dell'onda incidente, contrariamente allo scattering Compton, che provoca un cambiamento nell'energia del fotone.

Una proprietà fondamentale della diffusione Thomson è la capacità di produrre radiazione polarizzata anche se il campo elettrico incidente non possiede grado di polarizzazione. Tale caratteristica è sfruttata per individuare la radiazione emessa in particolari casi in cui non è possibile osservare la sorgente direttamente, ad esempio a causa di nubi di polvere che la oscurano e ne assorbono la radiazione.

4.2 Diffusione Compton

Quando l'energia $h\nu$ del fotone cresce e il suo valore tende ad avvicinarsi all'energia a riposo dell'elettrone, non sarà più appropriato trattare il processo impiegando la diffusione Thomson. Se il fotone possiede un'energia elevata, cioè si trova in banda X o γ , la lunghezza d'onda della radiazione dopo aver incontrato l'elettrone non rimarrà costante e si parla di *effetto Compton* o *diffusione Compton*.

Dal momento che la lunghezza d'onda iniziale del fotone è estremamente piccola, tendono a prevalere gli effetti quantistici su quelli classici e, di conseguenza, non sarà possibile trattarlo come un'onda piana classica. Il fotone viene assunto come una particella che collide con l'elettrone in quiete: parte dell'energia del fotone viene trasferita durante l'urto all'elettrone, che si mette in moto, e il fotone allunga la sua lunghezza d'onda per compensare la perdita di energia. Una rappresentazione grafica è raffigurata in *Figura 4.1*

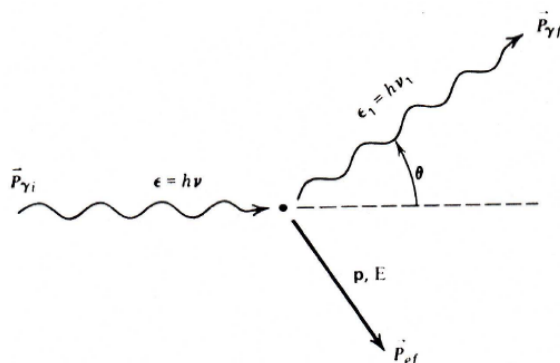


Figura 4.1: Rappresentazione grafica dello scattering elettrone-fotone che genera l'effetto Compton (figura tratta da [1]).

Come detto in precedenza, la caratteristica fondamentale dell'effetto Compton è allungare la lunghezza d'onda del fotone diffuso. La differenza tra quella iniziale e la finale viene calcolata imponendo la conservazione del quadrivettore energia-impulso prima e dopo l'urto. Con riferimento alla *Figura 4.1*, il fotone ha quadrimomento iniziale e finale dati da:

$$\mathbf{P}_{\gamma,i} = \frac{\epsilon}{c}(1, \hat{n}_i) \quad \mathbf{P}_{\gamma,f} = \frac{\epsilon_1}{c}(1, \hat{n}_f)$$

con \hat{n}_i e \hat{n}_f versori corrispondenti alla direzione incidente e di diffusione. L'elettrone, invece, ha quadrimomenti:

$$\mathbf{P}_{e,i} = (m_e c, \mathbf{0}) \quad \mathbf{P}_{e,f} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)$$

dove \mathbf{p} è l'impulso dell'elettrone dopo la diffusione.

Imponendo la conservazione del quadrivettore energia-impulso si ottiene un'espressione per l'energia del fotone dopo l'urto ϵ_1 , da cui si ottiene l'espressione per la lunghezza d'onda ricordando che $\epsilon = hc/\lambda$:

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (4.3)$$

dove θ è l'angolo di scattering. Si definisce così la *lunghezza d'onda di Compton* per l'elettrone

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \cdot 10^{-2} \text{Å} \quad (4.4)$$

che è una quantità quanto-meccanica fondamentale per le particelle.

La relazione (4.3) mostra come la lunghezza d'onda del fotone sia sempre modificata, a meno che $\theta = 0$, cioè la situazione in cui il fotone non cambia direzione e si ha una situazione di “non scattering”. È inoltre possibile affermare che, se le lunghezze d'onda sono elevate, cioè se $\lambda \gg \lambda_C$, allora l'urto è pressoché elastico e l'energia del fotone non viene modificata [1].

Un ulteriore effetto causato dall'introduzione di ipotesi quantistiche per lo studio del fotone è la modifica della sezione d'urto dell'elettrone, non più determinata dalla sezione classica di Thomson e che viene descritta tramite la teoria dell'elettrodinamica quantistica con la formula di Klein-Nishina:

$$\sigma_{KN} = \sigma_T \frac{3}{4} \left[\frac{1+x}{x^3} \left(\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right) + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right] \quad (4.5)$$

dove $x = h\nu/m_e c^2$. La ripercussione più importante dell'introduzione della formula di Klein-Nishina è la riduzione il valore della sezione d'urto totale, portando così ad avere una minore efficienza dell'effetto Compton ad alte energie. Infatti, si può vedere come, per regimi di bassa energia del fotone (cioè per $x \ll 1$), la formula (4.5) tenda alla sezione d'urto di Thomson; mentre, per regimi di alte energie ($x \gg 1$), la sezione d'urto totale tende a decrescere e ad avere un andamento proporzionale a x^{-1} .

4.3 Diffusione Compton inversa

L'effetto Compton inverso permette, tramite la collisione tra un fotone e un elettrone che si muove a velocità relativistica, di produrre fotoni ad alta energia.

Un particolare contesto dove si riscontra emissione per diffusione Compton inversa sono gli spettri dei nuclei galattici attivi (AGN). I fotoni provenienti dal disco di accrescimento del buco nero, che tipicamente emette in banda ultravioletta, possono aumentare la loro energia tramite effetto Compton inverso e passare in banda X o γ , dove sono rilevati.

Per descrivere in maniera relativamente semplice la potenza emessa per diffusione Compton inversa, si suppone che sia possibile utilizzare la sezione d'urto di Thomson, cioè di ignorare gli effetti quantistici previsti dalla formula di Klein-Nishina (4.5). Ciò è possibile se nel sistema di riferimento dove l'elettrone è in quiete l'energia del fotone è minore dell'energia a riposo della particella. I due sistemi di riferimento presi in esame sono S , quello dell'osservatore, e S' , quello dell'elettrone, e sono mostrati in *Figura 4.2*.

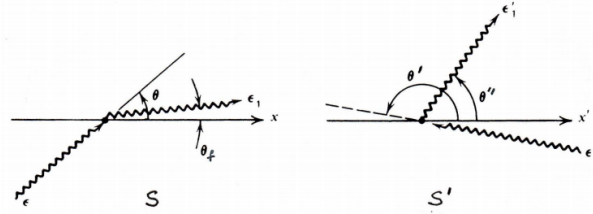


Figura 4.2: Rappresentazione grafica dei sistemi di riferimento S e S' (figura tratta da [5]).

Si consideri una regione di spazio dove sono contenuti dei fotoni con distribuzione spaziale $n(p)$; la densità di fotoni con energia nell'intervallo $d\epsilon$ è data da $v d\epsilon$ e vale la relazione: $v d\epsilon = n d^3p$. Dato che $n(p)$ è un invariante relativistico, anche $v d\epsilon/\epsilon$ lo sarà.

La potenza della radiazione diffusa nel sistema S' è data da:

$$\frac{dE'_1}{dt} = c\sigma_T \int \epsilon'_1 v' d\epsilon'$$

dove $v' d\epsilon'$ è la densità di fotoni incidenti.

Attraverso l'ipotesi che le variazioni energetiche del fotone nel sistema di riferimento S' siano trascurabili rispetto a quelle nel sistema S , è possibile affermare che $\epsilon'_1 = \epsilon$ e ricavare la potenza emessa nel sistema S :

$$\frac{dE_1}{ct} = c\sigma_T \int (\epsilon')^2 \frac{v' d\epsilon'}{\epsilon'} = c\sigma_T \int (\epsilon')^2 \frac{v d\epsilon}{\epsilon}$$

perché la potenza emessa è un invariante relativistico.

È noto, a causa dell'effetto Doppler, che $\epsilon' = \epsilon\gamma(1 - \beta \cos\theta)$ e, sostituendo tale relazione nell'espressione precedente, si è in grado di esprimere la potenza in funzione solo di grandezze nel sistema S . Inoltre, considerando una distribuzione isotropa dei fotoni, si esegue una media della funzione integranda su tutti gli angoli fino ad ottenere:

$$\frac{dE_1}{dt} = c\sigma_T \gamma^2 \int (1 - \beta \cos\theta)^2 \epsilon v d\epsilon = c\sigma_T \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) U_{ph}$$

dove U_{ph} è la densità iniziale dell'energia dei fotoni.

L'energia totale iniziale dei fotoni subisce un decremento pari a $dE_1/dt = -\sigma_t c U_{ph}$, quindi la potenza totale emessa per effetto Compton inverso è:

$$P_{IC} = c\sigma_T U_{ph} \left[\gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2 \right) - 1 \right] = \frac{4}{3}\sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_{ph} \quad (4.6)$$

dove l'uguaglianza è ottenuta ricordando che $\gamma^2 - 1 = \beta^2$.

Si nota una chiara somiglianza con l'espressione (3.5) della potenza emessa per sincrotrone, derivata nel *Capitolo 3.1*. Eseguendo il rapporto tra le due:

$$\frac{P_S}{P_{IC}} = \frac{U_B}{U_{ph}} \quad (4.7)$$

Il quoziente tra la potenza emessa per sincrotrone e quella emessa per effetto Compton inverso è uguale al rapporto tra la densità di energia dovuta al campo magnetico e la densità dei fotoni. Tuttavia, la relazione (4.7) perde validità quando non risulta possibile utilizzare la sezione d'urto Thomson.

La ragione della similitudine tra le due espressioni per la potenza emessa, (3.5) per il sincrotrone e (4.6) per l'effetto Compton inverso, è che in entrambi i casi l'elettrone viene accelerato, nel suo sistema di riferimento, da un campo elettrico. Nel caso della radiazione di sincrotrone, il campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ è collegato al movimento dell'elettrone all'interno di un campo magnetico; mentre, nel caso dell'effetto Compton inverso, il campo elettrico che accelera l'elettrone risulta essere la somma di tutti i campi associati alle onde elettromagnetiche incidenti [4]. La correlazione tra i due processi è evidente nel fenomeno del Synchrotron Self Compton, analizzato in seguito.

Per determinare lo spettro della radiazione emessa per effetto Compton inverso è necessario applicare due trasformazioni di Lorentz in successione e il risultato del calcolo dell'intensità specifica, eseguito da Blumenthal e Gould per una radiazione incidente isotropa e ad una frequenza data ν_0 , è rappresentato graficamente in *Figura 4.3*.

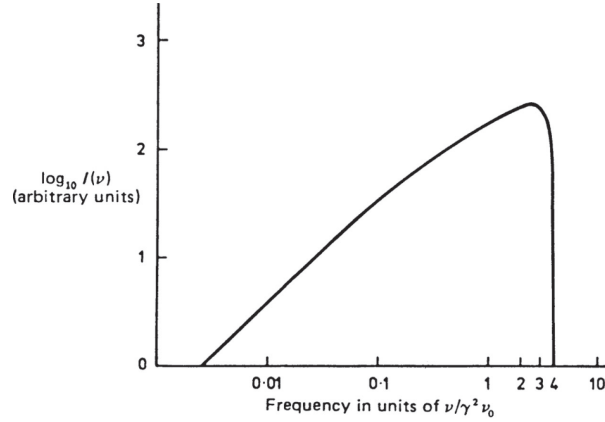


Figura 4.3: Spettro di emissione per effetto Compton inverso da parte di un singolo elettrone; sull'asse delle ascisse è riportata la frequenza in funzione di γ e di ν_0 , la frequenza della radiazione incidente, mentre sull'asse delle ordinate è riportata l'intensità specifica in scala logaritmica (figura tratta da [4]).

Per la frequenza ν della radiazione diffusa si ottiene la seguente relazione:

$$\nu \propto \gamma^2 \nu_0 \quad (4.8)$$

dove ν_0 è la frequenza incidente. Il fattore γ^2 mostra come vi sia una forte amplificazione dell'energia: l'effetto Compton inverso è un processo molto efficiente per produrre fotoni ad alta energia, anche avendo inizialmente a disposizione radiazione a bassa frequenza. Infatti, tramite questa diffusione, i fotoni radio possono essere amplificati e trasformati in fotoni X, oppure γ .

Generalmente i processi di scattering Compton e Inverse Compton coesistono, ma sovente vi sono dei casi astrofisici in cui uno dei due è predominante rispetto all'altro.

Nel caso in cui, in una data regione di spazio, siano presenti elettroni non relativistici in equilibrio termico e interagenti con dei fotoni, supponendo che $h\nu \ll m_e c^2$, è possibile dedurre una stima della variazione energetica della popolazione di fotoni.

I fotoni possono perdere energia tramite effetto Compton ordinario con gli elettroni in quiete. Eseguendo una media su tutti i possibili angoli di interazione, si deduce l'andamento dell'energia persa nel tempo:

$$\left\langle \frac{d\epsilon}{dt} \right\rangle_C \approx -\frac{h\nu}{m_e c^2} \quad (4.9)$$

dedotta dalla relazione (4.3).

Allo stesso tempo, i fotoni possono acquistare energia dagli elettroni per effetto Compton inverso. Approssimando $\gamma \approx 1$ ed esprimendo l'energia cinetica degli elettroni in

funzione dell'energia termica $\frac{1}{2}m_e v^2 \approx \frac{3}{2}k_B T$, da (4.6) si ottiene:

$$\left\langle \frac{d\epsilon}{dt} \right\rangle_{IC} \approx \frac{4}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \approx \frac{4k_B T}{m_e c^2} \quad (4.10)$$

Complessivamente, il tasso di variazione energetica dei fotoni è:

$$\left\langle \frac{d\epsilon}{dt} \right\rangle \approx \frac{4k_B T - h\nu}{m_e c^2} \quad (4.11)$$

Se $4k_B T \approx h\nu$ allora non vi è alcuna modifica netta dell'energia e i due processi sono bilanciati; se $4k_B T \ll h\nu$ allora prevale l'effetto Compton classico e i fotoni tendono a perdere più energia di quanta ne acquistano; infine, se $4k_B T \gg h\nu$ prevarrà l'effetto Compton inverso e i fotoni tenderanno ad acquistare energia.

Un'applicazione pratica delle considerazioni appena trattate è l'*effetto Sunyaev - Zel'dovich*, che consiste nella modifica dello spettro di corpo nero prodotto dalla radiazione cosmica di fondo a causa dell'interazione dei fotoni emessi con gli elettroni relativistici del gas ad alta temperatura presente nei cluster di galassie.

Lo studio di tale effetto è importante per individuare gli ammassi di galassie dove non si è in grado di condurre osservazioni o misurazioni dirette, ad esempio a causa dell'oscuramento prodotto dalla polvere o a causa della grande distanza. Se lo spettro della CMBR proveniente da una data regione appare piccato a frequenze maggiori della banda radio, dove invece dovrebbe trovarsi, allora lì sarà presente del gas ad alta temperatura che interagisce con i fotoni.

Un secondo fenomeno correlato all'effetto Compton inverso è denominato *Synchrotron Self Compton* (SSC). Dato un insieme di elettroni relativistici che emettono per sincrotrone, se la densità di fotoni ed elettroni è sufficientemente elevata, i fotoni che erano stati emessi per sincrotrone possono interagire per effetto Compton inverso con gli stessi elettroni che li avevano emessi. Lo spettro risultante è uno spettro sincrotrone modificato per self-Compton inverso con una componente alle alte frequenze ($\propto \gamma^2 \nu_0$) avente lo stesso indice spettrale della componente sincrotrone che la origina [3].

Questo processo ha luogo in tutte le sorgenti compatte che presentano il fenomeno di auto-assorbimento per sincrotrone. Un particolare esempio in cui si osserva sono i Blazars, una delle famiglie di nuclei galattici attivi, il cui spettro presenta due picchi ben definiti: il primo è relativo all'emissione per sincrotrone e il secondo, molto simile al precedente, causato dall'effetto Compton inverso. La distribuzione dell'energia in funzione della frequenza, cioè la Spectral Energy Distribution, è rappresentata in *Figura 4.4*, dove sono ben evidenti i due picchi.

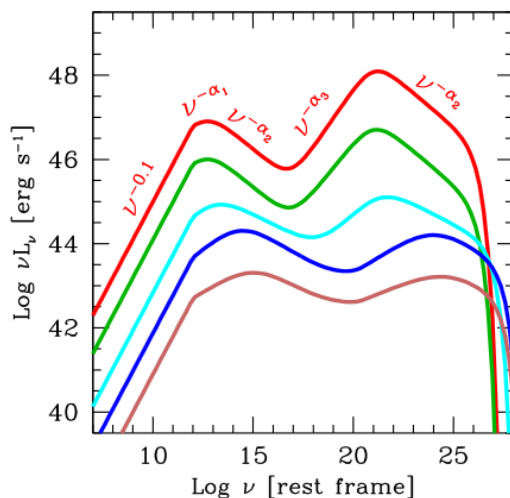


Figura 4.4: Spectral Energy Distribution (SED) di un Blazar in scala doppio-logaritmica (figura tratta da [7]).

Dallo studio dello spettro emesso per SSC si può eseguire una stima della densità di fotoni emessi per sincrotrone e da essa ottenere il rapporto tra U_{ph} e $U_B = \frac{B^2}{8\pi}$. Tale quoziente è equivalente al rapporto tra la luminosità emessa per effetto Compton inverso e quella emessa per sincrotrone. Lo sviluppo dei calcoli, eseguito in [5], fornisce la seguente approssimazione:

$$\frac{L_{IC}}{L_S} \simeq \left(\frac{T_{b,max}}{10^{12} \text{ K}} \right)^5 \frac{\nu_C}{\text{GHz}} f(\alpha) \quad (4.12)$$

dove ν_C è la frequenza critica dello spettro di sincrotrone determinata in (3.9), $T_{b,max}$ è la temperatura di brillantezza massima e $f(\alpha)$ rappresenta un coefficiente dell'ordine dell'unità che tiene conto della forma esatta dello spettro quando si calcola L_S . Dalla precedente relazione si deduce che, per temperature di brillantezza superiori ai 10^{12} K, l'effetto Compton inverso è dominante sulla radiazione di sincrotrone: $T_b = 10^{12}$ K rappresenta il valore massimo della temperatura di brillantezza di un corpo quando emette per sincrotrone. Al di sopra di tale valore, l'effetto Compton inverso è così preponderante da ridurre di molto la vita media degli elettroni interagenti, che perdono rapidamente energia emettendo fotoni ad alta frequenza. Il fenomeno è conosciuto come *catastrofe Compton* e si osserva in sorgenti molto compatte.

Quando si incorre nella catastrofe Compton, si è di fronte ad effetti relativistici che apparentemente amplificano la radiazione osservata, superato il limite definito da $T_{b,max}$.

Capitolo 5

Applicazione astrofisica: la Nebulosa di Orione

In quest'ultimo capitolo viene esposto un esempio di come lo studio dell'emissione continua, prodotta dai processi illustrati nelle precedenti sezioni, abbia permesso di costruire un modello della composizione della Nebulosa di Orione. La trattazione è basata su quanto riportato in [8], che riassume gli studi condotti nei primi anni Novanta sulla radioemissione della nebulosa.

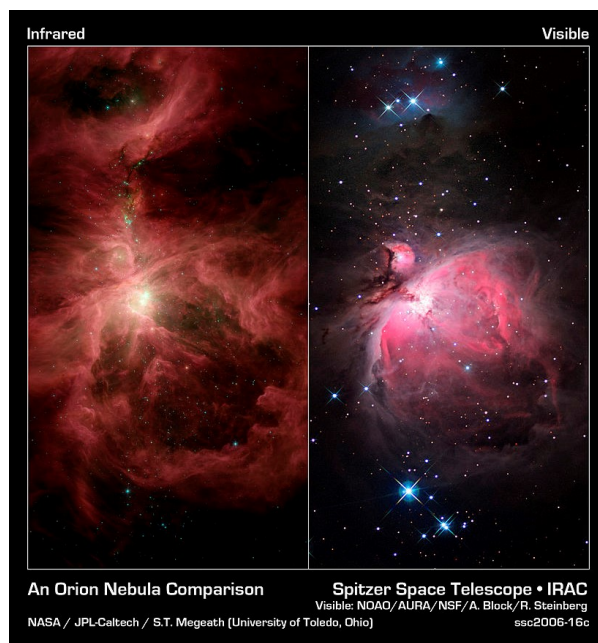


Figura 5.1: Confronto tra un'immagine della Nebulosa acquisita in banda infrarossa e in banda ottica, la figura è tratta da [9].

La Nebulosa di Orione, mostrata in *Figura 5.1* in due bande dello spettro elettromagnetico, è una nebulosa ad emissione che si trova ad una distanza di circa 1300 anni luce, cioè 400 parsec, dalla Terra. Si tratta di una delle più vicine zone di formazione stellare, nonché una delle più vaste e massive: si stima che il suo raggio medio si attesti attorno a 12 anni luce, mentre la sua massa è di circa $2 \cdot 10^3$ masse solari.

È stato scelto di prendere in esame Orione in quanto si tratta di una struttura cosmica fondamentale, considerata il modello di *regione III* galattica [8]. Essa viene osservata in diverse bande dello spettro elettromagnetico, in particolare in banda radio e in banda ottica. Nella prima viene studiata l'emissione continua del gas, mentre nell'ottico si osserva solo emissione in riga. Quest'ultima è prodotta da elementi in fase di ricombinazione o diseccitazione nel processo complessivo di raffreddamento del gas; una delle righe più importanti che sono osservate è la riga di ricombinazione $H\alpha$ della serie di Balmer. La radiazione del continuo, invece, è composta da due principali sorgenti: una parte di radiazione di corpo nero generata dalla polvere interstellare, una delle componenti principali delle nubi, e una parte di bremsstrahlung, prodotta dal gas ionizzato.

Una SED della Nebulosa è mostrata in *Figura 5.2*, in cui sono evidenti le due principali componenti della radiazione: l'emissione in banda radio, in basso a destra, e l'emissione nel visibile, nella parte sinistra. La zona superiore del grafico, più ricca di misure, è rappresentativa dell'emissione della nebulosa nel suo complesso, mentre gli altri punti individuali mostrano i diversi contributi dei singoli oggetti oppure a parti ad essa appartenenti; ad esempio, i punti individuati dal colore rosso indicano l'emissione in banda infrarossa della polvere.

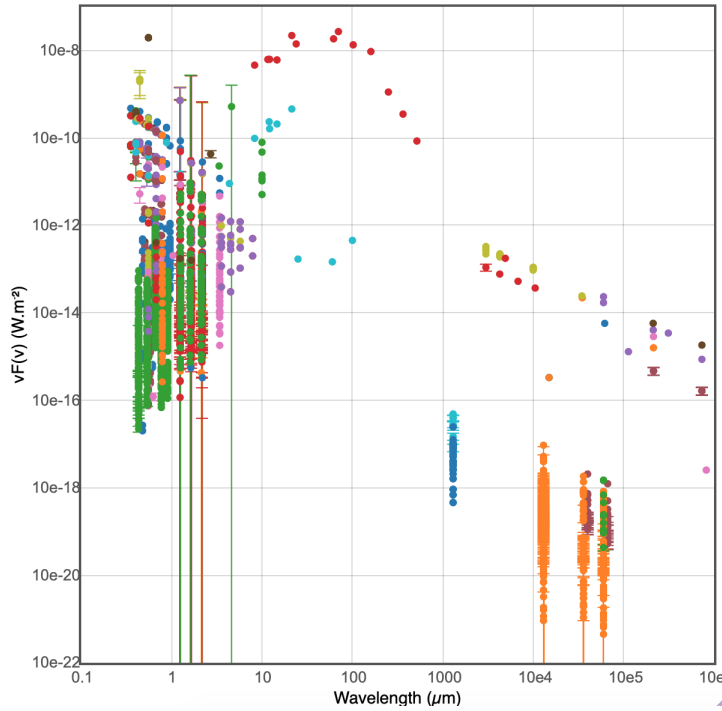


Figura 5.2: SED di Orione in scala doppio-logaritmica; il grafico è stato ottenuto da misure di flusso e lunghezza d'onda, con relative barre di errore, provenienti da diversi rilevatori (individuati dai colori) e raccolte in [10]. Il raggio di estensione delle misure è $30''$.

5.1 Regioni HII

Una regione HII è una nube di idrogeno ionizzato formatasi attorno a stelle calde e massive, tipicamente con classificazione spettrale O oppure B. La temperatura superficiale di tali stelle raggiunge almeno i 10^4 K, che corrisponde ad un picco della curva di corpo nero nella banda ultravioletta, portandole ad apparire di colore blu. Emettendo molti fotoni con energia superiore a 13.6 eV, le stelle blu sono in grado di ionizzare l'idrogeno per dare origine a dei plasmi. Nel caso della Nebulosa di Orione, la regione HII più importante è quella attorno all'ammasso di stelle in formazione conosciuto come Trapezio, formato da quattro stelle con classificazione spettrale O e B e indicate con le lettere A, B, C e D. La disposizione di suddette stelle è mostrata in *Figura 5.3*.

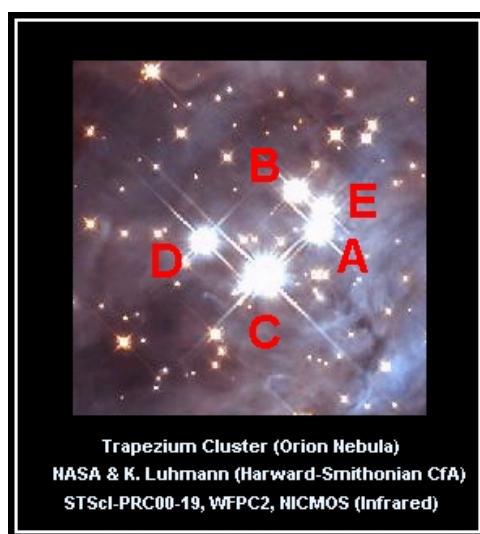


Figura 5.3: Stelle dell'ammasso del Trapezio, figura tratta da [11].

Data la grande efficienza della fotoionizzazione, tutti i fotoni della stella vengono assorbiti entro una distanza ben definita. Pertanto la transizione tra zona ionizzata e zona non ionizzata è molto netta e dipende essenzialmente dal flusso di fotoni ultravioletti della stella [3]. La divisione così netta porta a modellizzare le regioni HII con la *sfera di Strömgren*: il gas ionizzato è distribuito omogeneamente attorno alla stella entro una sfera, il cui raggio dipende dalla temperatura e dalla massa della stella. In prima approssimazione, il raggio dipende anche dalla densità dell'idrogeno che compone la regione perché, se la densità del gas aumenta, la sfera tenderà ad essere più piccola e compatta.

Questa approssimazione non è sempre verificata, come nel caso della Nebulosa di Orione, e ciò è dovuto alla posizione della sfera di Strömgren rispetto alla nube di polvere che la circonda. Se la formazione della stella, e della regione HII attorno ad essa, avviene intorno al centro della nube, allora la sfera di Strömgren tenderà ad essere più omogenea e di forma sferica; se, al contrario, la formazione stellare avviene ai bordi della nube, si avranno dimensioni diverse verso l'interno della nube e verso l'esterno. Nello specifico, verso l'esterno della nube si ha contatto dell'idrogeno ionizzato con il mezzo interstellare, dotato di una bassissima densità, e la sfera subisce una forte espansione, come raffigurato in *Figura 5.4*. Si parla di “*effetto a tappo di champagne*” e la trattazione matematica è riportata in [12].

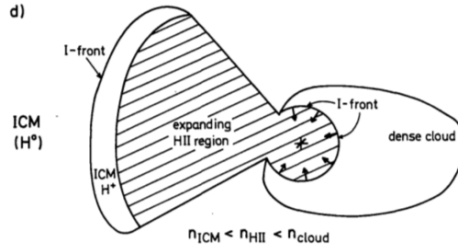


Figura 5.4: Espansione della regione HII in seguito al contatto con il mezzo interstellare esterno alla nube (figura tratta da [12]).

La temperatura all'interno della sfera di Strömgen dipende dal flusso UV della stella e tende a rimanere costante per tutto il tempo in cui la stella brucia l'idrogeno. Supponendo che l'energia di ionizzazione generata dalla stella venisse meno, è possibile determinare la durata del processo di emissione per bremsstrahlung. Tale scala temporale è denominata tempo di raffreddamento e viene calcolato come il rapporto tra l'energia termica del plasma e l'energia emessa per bremsstrahlung:

$$t_{cool} = \frac{\frac{3}{2}(n_e + n_i)k_B T}{J_\nu(T)} = \frac{6 \cdot 10^3}{n_e g_{ff}} T^{\frac{1}{2}} \text{ anni} = 10^2 - 10^3 \text{ anni} \quad (5.1)$$

dove n_e è la densità degli elettroni per unità di volume e vale $n_e \sim 10^2 - 10^3 \text{ cm}^{-3}$. Si tratta di un tempo piuttosto breve, specialmente se confrontato con lo stesso tempo calcolato per la seconda principale sorgente di emissione per bremsstrahlung, il gas intergalattico negli ammassi di galassie. Per quest'ultimo, i cui parametri fisici sono $T \sim 10^7 - 10^8 \text{ K}$ e $n_e \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$, si ottiene un tempo di raffreddamento dell'ordine di 10^{10} anni, paragonabile all'età dell'Universo.

Un altro modo per studiare l'andamento della temperatura nelle regioni HII è tramite le righe degli spettri atomici dovute al processo di ricombinazione e diseccitazione di elettrone e protone. Infatti, lo studio del rapporto fra l'intensità delle righe di ricombinazione e l'emissione termica del continuo dà una misura del rapporto fra elettroni legati ed elettroni liberi e permette quindi di analizzare le variazioni della temperatura delle regioni HII nella galassia [5].

5.2 Modello della struttura della Nebulosa di Orione

Dalle osservazioni condotte, i cui risultati sono riportati in [8], è stato costruito un modello della composizione interna della Nebulosa di Orione, mostrato in *Figura 5.5*.

La radiazione è stata analizzata in diversi intervalli di risoluzione in modo da poter studiare meglio le caratteristiche delle singole strutture. In particolare, gli studi a bassa risoluzione (dell'ordine dell'arcominuto) sono stati utili a studiare l'emissione del gas

diffuso a bassa densità, mentre le analisi condotte ad alta risoluzione (dell'ordine dell'arcosecondo) hanno permesso di studiare l'emissione del gas ad alta densità e l'emissione con origine non termica.

In primo luogo, osservando su larga scala, cioè a risoluzione maggiore o uguale di 1', la struttura della nebulosa è risultata asimmetrica a causa della presenza di una nube molecolare che blocca l'espansione dell'idrogeno ionizzato. Inoltre, dal confronto con l'emissione in banda radio e ottica, sono emerse delle notevoli discrepanze, spiegate attraverso il meccanismo di erosione della nube molecolare da parte delle stelle del Trapezio. Tale erosione comporta il fluire del gas ionizzato verso l'osservatore.

Studiando su scala intermedia, per risoluzioni comprese tra 1' e 1'', è stata individuata una regione in cui la radioemissione, così come l'emissione ottica, presentano una decrescita dovuta alla mancanza di gas ionizzato. Tale regione è denominata "dark bay".

Osservando nello stesso intervallo di risoluzione, è stata modellizzata la struttura della regione HII attorno alla stella C del Trapezio, la più brillante delle quattro. Il core centrale della regione è rappresentato dalla C rovesciata in *Figura 5.5*. La sua peculiare morfologia è legata all'interazione con la nube molecolare circostante e al forte vento stellare prodotto dalle stelle del Trapezio. Quest'ultimo non è individuabile in banda radio perché non presenta emissione, tuttavia è stato possibile studiarlo indirettamente tramite i suoi effetti sulla nube di gas.

Infine, analizzando i dati raccolti sulla piccola scala, con risoluzione minore o uguale a 1'', è stato possibile studiare nel dettaglio le singole sorgenti e, in particolare, le stelle che compongono il Trapezio. L'alta risoluzione ha permesso di individuare della radiazione di natura non termica proveniente dalla stella A e dovuta alla sua natura variabile¹.

Le osservazioni ad alta risoluzione hanno permesso anche di studiare le sorgenti infrarosse presenti nella nebulosa, la più importante delle quali è conosciuta come la regione Becklin-Neugebauer (BN).

Per poter costruire il modello in *Figura 5.5* è stato necessario effettuare un confronto con i risultati ottenuti e le mappe della nebulosa ricavate dall'analisi delle righe spettrali atomiche e molecolari. Le prime, specialmente le righe di ricombinazione dell'idrogeno, sono state utili per studiare le velocità del gas tramite l'effetto Doppler; le velocità sono rappresentate in *Figura 5.5* come delle frecce indicate con V_{SLR} .

Le righe molecolari, diversamente da quelle atomiche, sono emesse a seguito di transizioni fra i livelli discreti rotazionali o vibrazionali della molecola: le transizioni fra livelli vibrazionali presentano righe tipicamente in banda infrarossa, quelle fra livelli rotazionali sono caratterizzati da lunghezze d'onda in banda radio. È importante lo studio delle righe molecolari per ricostruire la composizione chimica delle nubi, nonché ricavare informazioni precise sulla densità e la temperatura del mezzo interstellare.

Una molecola fondamentale negli studi spettrali è il monossido di carbonio CO, in quanto permette di tracciare la presenza dell'idrogeno molecolare H_2 , non osservabile

¹Si tratta di una stella la cui luminosità è soggetta a fluttuazioni legate ad attività magnetiche.

direttamente a causa del suo momento di dipolo elettrico nullo. Dallo studio del CO, molto abbondante nella nube primordiale che ha generato Orione, è stato dedotto che l'emissione in infrarosso della regione BN-KL fosse dovuta alla forte presenza di polvere calda e non all'emissione del gas ionizzato. Inoltre, dalle stesse analisi, è stata individuata la presenza di gas molecolare all'interno della dark bay che blocca l'espansione dell'idrogeno ionizzato della regione HII.

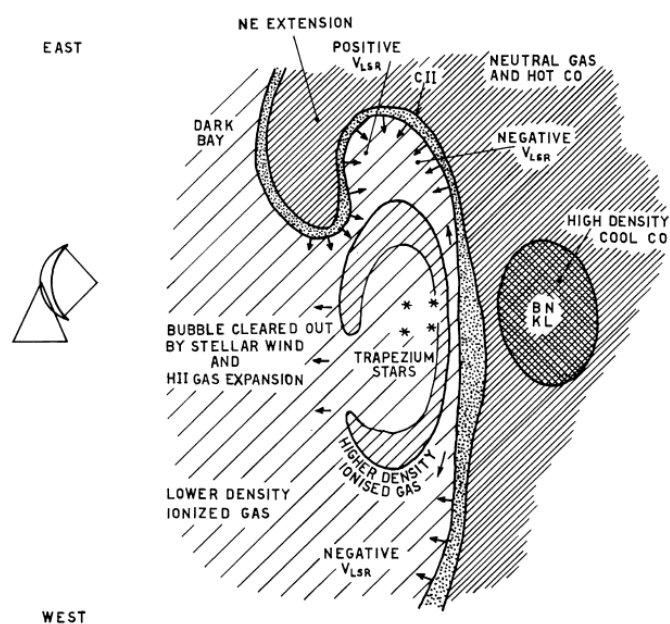


Figura 5.5: Modello della composizione della Nebulosa di Orione ricostruito dalle osservazioni in banda radio descritte in [8]; il simbolo a sinistra indica il radiotelescopio, cioè l'osservatore.

Pertanto, le zone di maggiore rilevanza della Nebulosa di Orione, individuate dalle osservazioni e indicate in *Figura 5.5*, sono:

- *Gas ionizzato a bassa densità:* la ionizzazione è prodotta dalla radiazione emessa dalle stelle del Trapezio, vengono osservate le righe $H\alpha$ dell'idrogeno e uno spettro continuo caratteristico di bremsstrahlung. Dalla frequenza di cutoff dello spettro è possibile ricavare la temperatura della regione.
- *Gas ionizzato ad alta densità:* come nel caso precedente si osserva uno spettro continuo di bremsstrahlung, confermato dalla presenza di righe $H\alpha$ negli spettri atomici. Ciò che permette di distinguere le due zone a diverse densità, a parità di frequenza di cut-off che definisce le temperature (simile nei due casi), è l'emissività J che dipende da n_e^2 .

- *Bolla ripulita dal vento stellare e dall'espansione del gas HII*: l'emissione di radiazione ad alta frequenza delle stelle del Trapezio genera un vento stellare molto intenso a causa della vicinanza tra i corpi celesti. Il vento stellare "ripulisce" almeno parzialmente la regione dal gas e dalla polvere presenti.
- *Gas neutro e CO caldo*: la presenza di questa nube, individuata grazie agli spettri molecolari, impedisce all'idrogeno ionizzato della regione HII di espandersi in quella direzione. Per determinare la temperatura del monossido di carbonio si sfruttano le transizioni rotazionali della molecola, governate dal momento angolare totale \mathbf{J} della molecola. Le transizioni tra \mathbf{J} grandi corrispondono a temperature più elevate, invece quelle che coinvolgono \mathbf{J} più bassi corrispondono a temperature minori. In questo caso, le righe dello spettro del CO sono associate a transizioni con \mathbf{J} grande, perciò la temperatura del gas molecolare deve essere elevata.
- *BN-KL*: da tale regione proviene una forte emissione infrarossa e si osservano delle linee molecolari del CO molto intense, da cui si deduce l'alta densità della nube. Come nel caso precedente, la temperatura del monossido di carbonio è ottenuta dalle righe corrispondenti a transizioni rotazionali: in questo caso, risultano associate a \mathbf{J} poco elevati e la temperatura è bassa. Essendo una zona a minore temperatura, tenderà a raffreddarsi più rapidamente per bremsstrahlung a causa della dipendenza della potenza emessa (2.13) da $T^{-1/2}$.
- *Zona CII*: si tratta di una regione di transizione tra il mezzo freddo della nube molecolare e il gas ionizzato della regione HII, creatasi dall'interazione fra le due. La presenza di carbonio ionizzato è stata determinata dagli spettri a righe.

Conclusioni

A conclusione dell'analisi fisica condotta nel presente lavoro, vengono riassunti i punti salienti dei diversi argomenti trattati.

Nel *Capitolo 1* è stata esaminata la teoria del trasporto radiativo che introduce alcune grandezze spettrali importanti, quali la brillantezza I_ν e l'emissività specifica J_ν , e permette di analizzare come varia la radiazione quando attraversa i diversi mezzi presenti nello spazio. Nello stesso capitolo è stata studiata la radiazione di corpo nero proveniente da sorgenti in equilibrio termico con l'ambiente circostante e il cui spettro ha l'andamento caratteristico delineato dalla funzione di Planck. È anche stata esposta una breve trattazione della radiazione emessa da particelle cariche accelerate da campi elettromagnetici.

Nel *Capitolo 2* è stato approfondito il processo di bremsstrahlung, o radiazione di frenamento, sia in un contesto generico che nel caso di emissione di origine termica, la situazione più comune in ambito astrofisico. La tipica sorgente di bremsstrahlung termica è costituita dall'idrogeno ionizzato delle regioni III, con temperature dell'ordine di 10^4 K, e il gas all'interno cluster di galassie, dove la temperatura è di circa 10^8 K. L'andamento dell'emittanza termica ha una forte dipendenza dalla temperatura e dalla densità del plasma. Lo spettro presenta una frequenza oltre cui l'emissione è prossima a zero, definita frequenza di cut-off e dipendente dalla sola temperatura. Grazie a misure di quest'ultima è possibile effettuare una stima della temperatura della sorgente.

Il *Capitolo 3* è dedicato alla radiazione di sincrotrone, processo di origine non termica originato dall'interazione tra campi magnetici e particelle, solitamente elettroni, che si muovono a velocità ultra-relativistiche. L'emissione, di natura impulsiva, è concentrata in un cono la cui semi-apertura è proporzionale al fattore di Lorentz della particella e all'interno di cui si ha un'amplificazione energetica proporzionale a γ^2 . Dallo studio dello spettro viene definita una frequenza critica oltre cui l'emissione diventa trascurabile e tipicamente registrata in banda radio. La caratteristica peculiare della radiazione di sincrotrone è la sua polarizzazione lineare.

L'ultima categoria di processi con spettro continuo, lo scattering elettrone-fotone, è stata analizzata nel *Capitolo 4*, dove sono state distinte tre categorie di diffusione in base al regime energetico del fotone. Il caso più semplice è lo scattering Thomson, che avviene quando un fotone a bassa frequenza incide su di un elettrone in quiete e

provoca l'emissione di radiazione con la stessa frequenza incidente. Invece, se ci si trova in presenza di un fotone ad alta frequenza che incide sull'elettrone a riposo, allora si ha scattering Compton ed è necessario un approccio quantistico per ricavare la lunghezza d'onda finale, diversa da quella incidente. In astrofisica, tuttavia, risulta più importante lo scattering Compton inverso dove il fotone collide con un elettrone relativistico e si ha produzione di radiazione soggetta al beaming relativistico e ad energie molto elevate. I processi di sincrotrone e Compton inverso sono strettamente legati e possono essere osservati simultaneamente tramite l'effetto conosciuto come Synchrotron Self Compton.

Nel *Capitolo 5* sono illustrati i risultati dello studio della radioemissione continua proveniente dalla Nebulosa di Orione, che sono stati confrontati con i dati ricavati dallo studio dell'emissione in riga e che sono stati fondamentali per ricostruire la morfologia interna della nube. La Nebulosa di Orione è una regione HII che presenta l'effetto a "tappo di champagne" ed è costituita da zone a diversa composizione. Grazie all'analisi degli spettri di bremsstrahlung sono state individuate due zone composte da idrogeno ionizzato a diversa densità, mentre grazie allo studio delle righe atomiche e molecolari sono state identificate regioni ricche di monossido di carbonio e di carbonio ionizzato.

Lo studio della Nebulosa di Orione è di importante rilevanza per l'astrofisica. La sua vicinanza con la Terra, la vasta estensione spaziale e la ricchezza di componenti differenti la rendono il modello per eccellenza per l'analisi delle regioni HII. L'emissione, sia continua che in riga, del gas che compone la nube è tutt'oggi studiata su diverse bande di lunghezza d'onda e a diverse risoluzioni, in modo da riuscire a distinguere quante più sorgenti possibile e delineare in maniera precisa la sua struttura. Lo studio di Orione ha permesso di trarre importanti conclusioni sulla composizione e l'evoluzione sia delle regioni HII che delle nebulose galattiche e, di conseguenza, sviluppare modelli fisici sempre più accurati.

L'esempio di Orione dimostra come la comprensione dei meccanismi di radiazione, in modo particolare quelli che presentano spettro continuo, sia cruciale per determinare molti dei parametri fisici essenziali all'esame degli enti astrofisici e allo sviluppo di modelli che ne descrivano la struttura e l'evoluzione temporale. Senza l'analisi profonda di tali processi non saremmo in grado di indagare a fondo il cosmo che ci circonda.

Bibliografia

- [1] G.B. Rybicki and A.P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics*. Wiley, 2008.
- [2] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, and K.J. Donner. *Fundamental Astronomy*. Springer Berlin Heidelberg, 2017.
- [3] A. Ferrari. *Stelle, galassie e universo: Fondamenti di astrofisica*. Springer Milan, 2011.
- [4] M.S. Longair. *High Energy Astrophysics*. Cambridge University Press, 2011.
- [5] C. Fanti and R. Fanti. Una finestra sull'universo invisibile. Lezioni di radioastronomia, 2012.
- [6] H. Bradt. *Astrophysics Processes: The Physics of Astronomical Phenomena*. Cambridge University Press, 2008.
- [7] Gabriele Ghisellini. The blazar sequence 2.0. *Galaxies*, 4(4):36, September 2016.
- [8] M. Felli, E. Churchwell, T.L. Wilson, and G.B. Taylor. The radio continuum morphology of the Orion Nebula: from 10' to 0.1" resolution. *Astronomy and Astrophysics, Suppl. Ser.*, 98:137–164, April 1993.
- [9] Messier 42. <https://www.messier-objects.com/messier-42-orion-nebula/>. Accesso: 16/06/2021.
- [10] VizieR photometry viewer. <http://vizier.unistra.fr/vizier/sed/>. Accesso: 30/06/2021.
- [11] Trapezium cluster. <https://www.messier-objects.com/trapezium-cluster/>. Accesso: 16/06/2021.
- [12] G. Tenorio-Tagle. The gas dynamics of H II regions. I. The champagne model. *Astronomy and Astrophysics, Suppl. Ser.*, 71:59–65, January 1979.