

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**TEORIA DELLA DISCESA E TEOREMI
TIPO VAN KAMPEN**

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:

**Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini**

Presentata da:

Matteo Ravot Licheri

Sessione di Laurea Luglio 2021

Indice

Introduzione	2
1 Gruppoide fondamentale	4
1.1 Gruppoidi	4
1.2 Gruppi di isotopia dei coomotopizzatori e dei coequalizzatori	7
1.3 Gruppoide fondamentale	12
2 Discesa	14
2.1 Categorie fibrate	14
2.2 Pseudofuntori	15
2.3 Discesa	18
2.4 Discesa topologica	19
3 Discesa e gruppoide fondamentale	28
3.1 Discesa del gruppoide fondamentale	28
3.2 Il teorema di Van Kampen	31
3.3 Il teorema di van Kampen e i ricoprimenti	34
Bibliografia	37

Introduzione

Il presente elaborato mira alla compilazione di metodi e risultati che forniscono strumenti molto potenti per lo studio degli spazi topologici tramite il gruppoide fondamentale, oltre a introdurre i fondamenti della discesa topologica.

Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico è un invariante con una definizione molto intuitiva. Infatti, le prime menzioni sono dovute a H. Poincaré, che nel 1895 pubblicò l'importantissimo "Analysis situs". Questa iniziale facilità cela però notevoli difficoltà tecniche nel calcolare i gruppi fondamentali anche di spazi fra i più semplici. Le tecniche più usuali sono il teorema di Seifert - van Kampen (che sotto certe condizioni permette di calcolare il gruppo fondamentale di uno spazio a partire dai gruppi fondamentali di sottospazi che lo ricoprono e delle loro intersezioni) e, supponendo che lo spazio sia slacciabile, l'utilizzo del legame fra i rivestimenti dello spazio e i sottogruppi del gruppo fondamentale. Ottimi riferimenti al riguardo sono [3], [6] e [10].

Il teorema di Seifert - van Kampen trova una naturale generalizzazione priva di molte delle sue limitazioni quando si considera il gruppoide fondamentale, il cui trattamento non necessita di tenere conto di un punto base. D'altro canto, lo studio dei rivestimenti di uno spazio topologico può essere visto in una nuova luce dalla prospettiva della teoria della discesa, che trova una notevole applicazione proprio nello studio dei gruppi fondamentali.

La teoria della discesa nasce negli anni '60 nell'ambito della geometria algebrica come potente strumento alla base di molti teoremi di esistenza. I primi metodi di discesa si osservano in lavori di A. Weil e P. Cartier. Tuttavia, le basi della teoria della discesa formulata in termini generali, la sua utilità e la sua versatilità sono sviluppate e mostrate da A. Grothendieck ([8],[9]) e J. Giraud ([7]). Inoltre, Grothendieck sviluppa e presenta in SGA1 una teoria analoga a quella del gruppo fondamentale topologico in geometria algebrica e dimostra teoremi analoghi al teorema di Seifert - van Kampen, sfruttando le proprietà di discesa dei rivestimenti étale di preschemi. Successivamente, tecniche analoghe sono state trasportate in topologia algebrica con grande successo.

Nel primo capitolo vengono trattate le basi della teoria dei gruppidi. La costruzione dei coequalizzatori nella categoria dei gruppidi è trattata con particolare attenzione, nonché l'ottenimento di una esplicitazione dei loro gruppi di isotropia. Nel fare ciò è stato introdotto, seguendo il [3], il gruppoide coomotopizzatore, che funge da passo intermedio per il trattamento del coequalizzatore. Il capitolo si conclude con l'introduzione del gruppoide fondamentale di uno spazio topologico.

Il secondo capitolo è dedicato esclusivamente alla teoria della discesa. Iniziamo con la presentazione delle categorie fibrato e dei pseudofuntori. L'equivalenza dei due for-

malismi è trattata in dettaglio, in quanto la teoria della discesa riposa su di essi. Dopo l'introduzione dei concetti fondamentali legati alla discesa, nell'ultima sezione del capitolo viene trattata la discesa topologica, donando concretezza a ciò che in precedenza abbiamo trattato a un livello di astrazione molto alto.

Nel terzo capitolo i risultati dei primi due capitoli vengono utilizzati per fornire generalizzazioni del teorema di Seifert - van Kampen. Vengono presentate e studiate due generalizzazioni del teorema al gruppoide fondamentale di uno spazio topologico, che entro certe condizioni è isomorfo a un gruppoide coequalizzatore. Esse stanno alla base di una versione con ipotesi molto meno restrittive del teorema di Seifert - van Kampen per i gruppi fondamentali, sfruttando lo studio dei gruppi di isotropia dei coequalizzatori nel primo capitolo. Di particolare interesse è il caso dell'applicazione dei teoremi ai ricoprimenti. Utilizziamo il caso di un ricoprimento con due sottospazi che soddisfano certe condizioni ragionevoli per sottolineare il legame fra certe proprietà algebriche del gruppo fondamentale dello spazio e certe proprietà topologiche della loro intersezione. Infine calcoliamo i gruppi fondamentali delle sfere, mostrando che il teorema di van Kampen generalizzato può essere usato per calcolare il gruppo fondamentale del cerchio.

Una parte significativa del testo fa riferimento alla teoria delle categorie, che è indispensabile per avere il linguaggio nel quale formulare adeguatamente i concetti esposti. L'utilizzo di tale linguaggio segue i riferimenti bibliografici [11], [13], [14].

Capitolo 1

Gruppoide fondamentale

1.1 Gruppoidi

Definizione 1. *Chiamiamo gruppoide una categoria piccola le cui frecce sono tutte isomorfismi.*

Sia G un gruppoide. Denotiamo con $Orb(G)$ l'insieme delle classi di isomorfismo degli oggetti di G , che chiameremo orbite. G è detto transitivo se $Orb(G)$ contiene esattamente un elemento.

In un gruppoide, i gruppi di automorfismi dei singoli oggetti (detti gruppi di isotropia) tendono ad essere particolarmente ricchi e codificano tantissime informazioni sul gruppoide stesso. In particolare dimostreremo che i gruppi di isotropia di oggetti nella stessa orbita sono isomorfi e che, in un gruppoide transitivo G , il gruppo di isotropia di un elemento è una categoria equivalente a G .

Teorema 1. *Sia G un gruppoide transitivo e siano a, b due oggetti di G . Allora $Aut_G(a) \simeq Aut_G(b)$.*

Dimostrazione. Sia ϕ una freccia da a a b (tale freccia esiste per la transitività di G). Definiamo allora un'applicazione $\phi' : Aut_G(b) \rightarrow Aut_G(a)$ tale che $\phi'(g) = \phi g \phi^{-1}$, per ogni $g \in Aut_G(b)$. Siano $g, h \in Aut_G(b)$. Denotiamo ϕ^{-1} con ψ e definiamo $\psi' : Aut_G(a) \rightarrow Aut_G(b)$. Siano $g, h \in Aut_G(b)$ e $x \in Aut_G(a)$. Mostriamo ora che ϕ' è un morfismo di gruppi e che ψ' è il suo inverso:

$$\phi'(gh) = \phi gh \psi = \phi g \psi \phi h \psi = \phi'(g) \phi'(h)$$

$$\phi'(\psi'(g)) = \phi \psi g \phi \psi = g \wedge \psi'(\phi'(x)) = \psi \phi x \psi \phi = x$$

Per l'arbitrarietà di g, h, x e per il fatto che la funzione inversa di un morfismo bigettivo di gruppi è il morfismo di gruppi inverso si ha la conclusione. \square

Teorema 2. *Siano G un gruppoide transitivo e $g_0 \in G$. Allora $Aut_G(g_0)$ è una categoria equivalente a G .*

Dimostrazione. Sia F l'insieme delle frecce di G con origine g_0 . La funzione che a ogni freccia di F associa il suo termine è surgettiva. Per l'assioma della scelta, essa possiede una sezione s tale che $s(g_0) = id_{g_0}$. Indichiamo con ι l'inclusione e con π il funtore che manda tutti gli oggetti in g_0 e tale che $\pi(m) = s(g_2)^{-1} m s(g_1)$ per ogni freccia $m : g_1 \rightarrow g_2$. Segue immediatamente che $p \circ \iota = id_{Aut_G(g_0)}$ e che la trasformazione naturale $\eta : id_G \rightarrow \iota \circ \pi$ tale che $\eta[g] = s(g)^{-1}$ è invertibile. \square

Definizione 2. Sia G un gruppoide. Un sottogruppoide H di G è detto normale se gli oggetti di H coincidono con gli oggetti di G e per ogni due oggetti g, h di H e ogni freccia $\phi : h \rightarrow g$ in G vale la seguente:

$$\phi^{-1}Aut_H(g)\phi = Aut_H(h)$$

Se H è un sottogruppoide normale del gruppoide G , diciamo che due frecce f, g in G sono equivalenti modulo H se e solo se esistono due frecce x, y in H tali che $f = xgy^{-1}$ (osserviamo che le origini e i termini di due frecce equivalenti sono nella stessa orbita di H). Definiamo G/H il quoziente di G per H nella seguente maniera: $Ob(G/H) = Orb(H)$ e le frecce di G/H sono le classi di equivalenza di frecce di G secondo la relazione di equivalenza modulo H . La proiezione canonica di G su G/H sarà indicata in seguito con π_H .

Lemma 1. Siano G un gruppoide, H un suo sottogruppoide normale e $g \in G$. Allora π_H induce un morfismo di gruppi surgettivo $\phi : Aut_G(g) \rightarrow Aut_{G/H}(\pi_H(g))$ il cui nucleo è $Aut_H(g)$.

Dimostrazione. ϕ è ovviamente un morfismo di gruppi. Sia m un automorfismo di $Aut_{G/H}(\pi_H(g))$. Esiste una freccia $n : a \rightarrow b$ in G tale che $\pi_H(n) = m$, quindi a e b sono nella stessa orbita di H che contiene anche g , ovvero esistono frecce $x : g \rightarrow a$ e $y : b \rightarrow g$ in H . Si ha dunque $\phi_H(ynx) = m$. Abbiamo la surgettività di ϕ . Il nucleo di ϕ è formato dalla classe di equivalenza di id_g intersecata con $Aut_G(g)$, che una semplice verifica mostra essere $Aut_H(g)$. \square

Dato che intersezioni arbitrarie di sottogruppoidi normali sono sottogruppoidi normali e che ogni gruppoide è normale in sè stesso, esiste per ogni insieme di frecce F di G il più piccolo sottogruppoide normale che contiene tali frecce. Il quoziente di G per tale sottogruppoide è detto gruppoide ottenuto da G per contrazione delle frecce di F .

Come per i gruppi, anche per i gruppoidi esiste una nozione di azione. Relativamente ad un insieme T munito di un'applicazione $p : T \rightarrow S$ chiamiamo $\mathfrak{B}(T, p)$ il gruppoide che ha come oggetti gli elementi di S e come frecce le bigezioni fra le fibre di p , con le applicazioni origine e termine tali che $g : T_a \rightarrow T_b$ sia una freccia $a \rightarrow b$ (la composizione delle frecce viene ereditata dalla composizione delle bigezioni fra le fibre di p). Se S è l'insieme di vertici del gruppoide G , allora chiamiamo azione (oppure operazione) di G su (T, p) un morfismo di gruppoidi $\omega : G \rightarrow \mathfrak{B}(T, p)$ che induce l'identità sui vertici.

L'azione di gruppo si recupera come caso particolare dell'azione di gruppoide. Consideriamo infatti un insieme T e sia p l'unica funzione da T a un insieme S contenente un unico elemento. Allora $\mathfrak{B}(T, p)$ è il gruppoide con un solo oggetto e le cui frecce sono le bigezioni da T a T , ossia il gruppo delle permutazioni di T . L'azione di gruppoide di un gruppo G su $\mathfrak{B}(T, p)$ coincide dunque con l'azione del gruppo G sull'insieme T .

Siano ora $f, g : X' \rightarrow X$ due funtori fra i gruppoidi X' e X . Concluderemo questa sezione introducendo la categoria di omotopia dei gruppoidi $Grpdh$, il gruppoide $Coh(f, g)$ coomotopizzatore di f e di g e costruendo i coequalizzatori nella categoria dei gruppoidi.

Definizione 3. La categoria di omotopia dei gruppidi $Grpdh$ è definita come la categoria i cui oggetti sono gli stessi di $Grpd$ e i cui morfismi sono le classi di equivalenza naturali di funtori fra gruppidi. Nel seguito chiameremo \mathfrak{H} il funtore da $Grpd$ a $Grpdh$ che è l'identità sugli oggetti e che manda i morfismi nelle loro classi di equivalenza.

Definizione 4 (Coomotopizzatore). Siano $f, g : X' \rightarrow X$ due funtori fra i gruppidi X' e X . Chiamiamo coomotopizzatore di f e g il gruppoide $Coh(f, g)$ insieme a un funtore $coh : X \rightarrow Coh(f, g)$ e a un'equivalenza naturale $\eta : coh \circ f \rightarrow coh \circ g$ che possiede la seguente proprietà universale: per ogni morfismo di gruppidi $u : X \rightarrow Y$ tale che $\mathfrak{H}(u \circ f) = \mathfrak{H}(u \circ g)$ e ogni equivalenza naturale $\nu : u \circ f \rightarrow u \circ g$ esiste ed è unico un morfismo $\bar{u} : Ch(f, g) \rightarrow Y$ tale che il seguente diagramma commuti, che $\bar{u}(\eta) = \nu$ e che $\bar{u} \circ coh = u$:

$$\begin{array}{ccc} X' & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{H}(g)} \\ \xrightarrow{\mathfrak{H}(f)} \end{array} & X & \xrightarrow{\mathfrak{H}(coh)} & Coh(f, g) \\ & & \downarrow \mathfrak{H}(u) & \swarrow \mathfrak{H}(\bar{u}) & \\ & & Y & & \end{array}$$

Notiamo che, se esiste il coomotopizzatore, esso è unico a meno di isomorfismo. Ciò deriva immediatamente dalla proprietà universale. Prima di mostrarne l'esistenza, ricordiamo la definizione di quiver.

Definizione 5 (Quiver). Chiamiamo quiver un dato (O, F, o, t) , dove O e F sono insiemi, detti "degli oggetti", rispettivamente "delle frecce", e o e t sono funzioni da F a O , dette rispettivamente "origine" e "termine". Un laccio è una freccia s tale che $o(s) = t(s)$.

Un morfismo di quiver da $Q = (O, F, o, t)$ a $Q' = (O', F', o', t')$ è una coppia di funzioni (g, h) , tali che:

1. $g : O \rightarrow O'$;
2. $h : F \rightarrow F'$;
3. Per ogni freccia $s \in F$, vale $o'(h(s)) = g(o(s))$ e $t'(h(s)) = g(t(s))$.

In seguito useremo la notazione $Ob(Q)$ e $Fr(Q)$ per O , rispettivamente F .

Teorema 3 (Esistenza e costruzione dei coomotopizzatori). *Mantenendo le notazioni della Definizione 4, esiste $Coh(f, g)$.*

Dimostrazione. Sia X_0 il gruppoide libero generato dal quiver i cui vertici sono gli oggetti di X e le cui frecce sono le frecce di X e gli oggetti di X' , dove, per $x' \in X'$, si ha $x' : f(x') \rightarrow g(x')$. Sia ζ l'inclusione del quiver X nel quiver X_0 . Proviamo che $Coh(f, g)$ è ottenuto da X_0 per le contrazioni dei lacci delle seguenti forme: $\zeta(\phi) \circ \zeta(\psi) \circ \zeta(\phi \circ \psi)^{-1}$ per ϕ, ψ frecce di X e $\zeta(g(m)) \circ x_1 \circ \zeta(f(m))^{-1} \circ x_2^{-1}$ per $m : x_1 \rightarrow x_2$ in X' , il funtore coh è l'inclusione di X in $Coh(f, g)$ e la trasformazione naturale η è definita $\eta[x'] = x' \forall x' \in X'$.

Definiamo $\bar{u} : Coh(f, g) \rightarrow Y$ sui generatori di $Coh(f, g)$ in questa maniera: \bar{u} coincide con u sugli oggetti e sulle frecce di X e se $x' \in Ob(X')$, allora $\bar{u}(x') = \nu[x']$. Si osserva subito che \bar{u} è ben definito e soddisfa le condizioni e che ogni morfismo che le soddisfa deve coincidere con \bar{u} , in quanto deve coinciderne su dei generatori di $Coh(f, g)$ \square

Manteniamo la notazione anche per il seguente teorema:

Teorema 4. *Nella categoria dei gruppidi esistono coequalizzatori.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\text{Coeq}(f, g)$ è ottenuto da $\text{Coh}(f, g)$ per contrazione delle frecce date da X' . Siano $u : X \rightarrow Y$ tale che $u \circ f = u \circ g$ e \bar{u} l'unico morfismo di gruppidi tale che $\bar{u} \circ \text{coh} = u$ e tale che $\bar{u}(\eta) = \text{id}$. Ponendo $\gamma : \text{Coh}(f, g) \rightarrow \text{Coeq}(f, g)$ la proiezione canonica, esiste un morfismo $v : \text{Coeq}(f, g) \rightarrow Y$ tale che $\bar{u} = v \circ \gamma$. Dato che γ è un epimorfismo e che \bar{u} è unico, anche v è unico. \square

Siano $p_X, p_{X'}$ le proiezioni canoniche degli oggetti di X , rispettivamente X' , nelle loro orbite. Le orbite di X' possono essere viste come frecce per le orbite di X in questo modo: $p_{X'}(x') : p_X(f(x')) \rightarrow p_X(g(x'))$. La definizione è ben posta, in quanto l'esistenza di un morfismo fra x' e y' in X' comporta l'esistenza di morfismi fra $f(x')$ e $f(y')$ e fra $g(x')$ e $g(y')$.

Definizione 6. *Chiamiamo l'armatura $\Gamma(f, g)$ dei morfismi (f, g) il quiver i cui oggetti sono le orbite di X e le cui frecce sono le orbite di Y con le applicazioni origine e termine discusse precedentemente.*

Concludiamo la sezione con un risultato relativo alle orbite del coequalizzatore.

Lemma 2. *Esiste una bigezione fra le orbite di $\text{Coeq}(f, g)$ e le componenti connesse di $\Gamma(f, g)$.*

Dimostrazione. Sia $\pi : \text{Orb}(X) \rightarrow \text{Orb}(\text{Coeq}(f, g))$ la funzione dedotta dal morfismo canonico fra X e $\text{Coeq}(f, g)$. Tale funzione è ben posta per la funtorialità di coeq ed è surgettiva per la surgettività di quest'ultima sugli oggetti. Questo significa che esiste una bigezione fra $\text{Orb}(\text{Coeq}(f, g))$ e il quoziente di $\text{Orb}(X)$ per la relazione indotta da π . Sia β la funzione surgettiva che manda componenti connesse di $\Gamma(f, g)$ in orbite di $\text{Coeq}(f, g)$ dedotta da π per passaggio al quoziente. Siano $x, y \in X$ e $[x], [y]$ le loro orbite e supponiamo $\pi([x]) = \pi([y])$. Quindi $[\text{coeq}(x)] = [\text{coeq}(y)]$ (l'uso delle parentesi è analogo a sopra). Segue dalla costruzione di $\text{Coeq}(f, g)$ che $[x] = [y]$ oppure che esiste $z \in X'$ tale che $f(z) \in [x]$ e $g(z) \in [y]$. Da qui discende anche l'iniettività di β . \square

Osserviamo che lo stesso ragionamento mostra che l'applicazione canonica dal coomotopizzatore al coequalizzatore induce una bigezione sulle orbite.

1.2 Gruppi di isotropia dei coomotopizzatori e dei coequalizzatori

Riepiloghiamo la situazione della costruzione del coomotopizzatore, che nel seguito supponiamo sempre transitivo: Siano X', X gruppidi e $f, g : X' \rightarrow X$ due morfismi. Sia X_0 come nel teorema 3 e siano $\zeta : X \rightarrow X_0$ l'inclusione del quiver sottostante a X in X_0 e $\pi : X_0 \rightarrow \text{Coh}(f, g)$ la proiezione canonica.

Sia $\text{coh} : X \rightarrow \text{Coh}(f, g)$ la mappa canonica, ossia $\text{coh} = \pi \circ \alpha$. Sia $\Gamma(f, g)$ l'armatura di f e g (essa è connessa!) e siano \hat{h} l'inclusione di X' nelle frecce di X_0 e $h = \pi \circ \hat{h}$. Siano infine or, ter le applicazioni origine e termine di $\Gamma(f, g)$ e \bar{f}, \bar{g} le funzioni dedotte da f, g per passaggio alle orbite. Sia $\gamma : \text{Coh}(f, g) \rightarrow \text{Coeq}(f, g)$ la proiezione canonica.

Ora scegliamo un equipaggiamento di base della coppia (f, g) , ovvero un dato (a, b, c_f, c_g, T, i_0) , dove:

1. a è una sezione della proiezione canonica degli oggetti di X nelle sue orbite
2. b è una sezione della proiezione canonica degli oggetti di X' sulle sue orbite
3. c_f è una funzione che a ogni $j \in Orb(X')$ associa una freccia $c_f(j) : f(b(j)) \longrightarrow a(\bar{f}(j))$
4. c_g è una funzione che a ogni $j \in Orb(X')$ associa una freccia $c_g(j) : g(b(j)) \longrightarrow a(\bar{g}(j))$
5. T è un albero massimale del grafo associato a $\Gamma(f, g)$
6. $i_0 \in Orb(X)$

L'esistenza degli equipaggiamenti di base è assicurata dall'assioma della scelta.

Deduciamo dall'equipaggiamento di base scelto dati $(\tau, \{\phi_i | i \in Orb(X)\}, \{\delta_i | i \in Orb(X)\}, \{f_j | j \in Orb(X')\}, \{g_j | j \in Orb(X')\})$, definiti nei modi seguenti:

1. $\tau : \Gamma(f, g) \longrightarrow X_0$ è il morfismo di quiver che a $i \in Orb(X)$ associa $a(i)$ e a $j \in Orb(H)$ associa $c_g(j) \circ b(j) \circ c_f(j)^{-1}$
2. Per ogni orbita i di X , gli $\phi_i : Aut_X(a(i)) \longrightarrow Aut_{Coh(f,g)}(a(i))$ sono i morfismi di gruppi dedotti da *coh*
3. Per $i \in Orb(X)$, δ_i è l'immagine per $\pi \circ \tau$ dell'unica classe di cammini d_i in T che lega i_0 ad i . Si tratta, dunque, di una freccia da $a(i_0)$ ad $a(i)$
4. Per $j \in Orb(X')$, gli $f_j : Aut_{X'}(b(j)) \longrightarrow Aut_X(a(\bar{f}(j)))$ sono i morfismi di gruppi dati da $f_j(m) = c_f(j) \circ f(m) \circ c_f(j)^{-1}, \forall m \in Aut_{X'}(b(j))$
5. Per $j \in Orb(X')$, gli $g_j : Aut_{X'}(b(j)) \longrightarrow Aut_X(a(\bar{g}(j)))$ sono i morfismi di gruppi dati da $g_j(m) = c_g(j) \circ g(m) \circ c_g(j)^{-1}, \forall m \in Aut_{X'}(b(j))$

Sia $\mathfrak{F} : Set \longrightarrow Grp$ il funtore che ad un insieme associa il gruppo libero generato da esso (ossia l'aggiunto sinistro del forgetful functor). Definiamo $\bar{\tau} : \mathfrak{F}(Orb(X')) \longrightarrow Aut_{Coh(f,g)}(a(i_0))$ l'unico morfismo di gruppi tale che $\bar{\tau}(j) = \delta_{\bar{g}(j)}^{-1} \circ \pi(\tau(j)) \circ \delta_{\bar{f}(j)}$ per ogni $j \in Orb(X')$. Inoltre, per $i \in Orb(X)$ abbiamo $\bar{\phi}_i : Aut_X(a(i)) \longrightarrow Aut_{Coh(f,g)}(a(i_0))$ il morfismo di gruppi tale che $\bar{\phi}_i(m) = \delta_i^{-1} \phi_i(m) \delta_i$ per ogni $m \in Aut_X(a(i))$.

Da questa collezione di morfismi, si deduce per proprietà universale un'unico morfismo dal prodotto libero dei gruppi sopra citati in $Aut_{Coh(f,g)}(a(i_0))$ tale che ristretto ad essi ne risultino i morfismi costruiti precedentemente. Sia esso

$$\Lambda : (*_{i \in Orb(X)} Aut_X(a(i))) * \mathfrak{F}(Orb(X')) \longrightarrow Aut_{Coh(f,g)}(a(i_0))$$

Teorema 5. *Il morfismo Λ è surgettivo ed il suo nucleo è il sottogruppo normale generato dalle immagini delle frecce di T e dagli elementi della forma $f_j(m)jg_j(m)^{-1}j^{-1}$, per $j \in Orb(X')$ e $m \in Aut_{X'}(b(j))$*

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema, procederemo in due fasi. La prima ha lo scopo di ridurre il problema a uno più semplice, la seconda sarà la dimostrazione della surgettività e la determinazione del nucleo. Inizieremo dunque passando categoricamente il problema allo "scheletro". Per snellire la notazione, quando non si corre il rischio di

generare confusione identificheremo T con le sue frecce e i morfismi di gruppi covarianti con i loro analoghi controvarianti.

Siano $A = Im(a)$, $B = Im(b)$, X_A la sottocategoria piena di X i cui oggetti sono gli elementi di A e X'_B la sottocategoria piena di X' i cui oggetti sono gli elementi di B . Osserviamo quindi che X_A e X'_B non sono altro che le unioni dei gruppi degli automorfismi degli elementi di A in X , rispettivamente degli elementi di B in X' . Quindi, per un ragionamento analogo a quello del teorema 1, si tratta degli scheletri di X e X' . In particolare, dato che sono gruppidi, possiamo identificare $Orb(X_A)$ con A e $Orb(X'_B)$ con B . Il nostro scopo è mostrare che possiamo lavorare con questi gruppidi più semplici, scambiandoli con X e X' .

Sia $v : X \rightarrow X_A$ una proiezione, inversa a meno di equivalenza naturale dell'inclusione in senso contrario. Siamo dunque nella situazione descritta da questo diagramma, dove $f' = v \circ f$, $g' = v \circ g$, \bar{v} è la composizione del morfismo canonico da X_A a $Coh(f', g')$ con v e w è il morfismo (unico) che fa commutare il diagramma.

$$\begin{array}{ccc} X' & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{H}(g)} \\ \xrightarrow{\mathfrak{H}(f)} \end{array} & X & \xrightarrow{\mathfrak{H}(coh)} & Coh(f, g) \\ & & \downarrow \mathfrak{H}(\bar{v}) & \swarrow \mathfrak{H}(w) & \\ & & Coh(f', g') & & \end{array}$$

Si tratta di una equivalenza di categorie fra $Coh(f, g)$ e $Coh(f', g')$, in quanto risulta dalla costruzione dei coomotopizzatori e del funtore w che esso è surgettivo (non solo essenzialmente!) e pienamente fedele. Ciò implica un isomorfismo fra i gruppi di isotropia, in quanto sarebbero anche loro equivalenti, ma due gruppi equivalenti come categorie sono isomorfi.

Dall'equipaggiamento di base $(id_A, b, v \circ c_f, v \circ c_g, T, a(i_0))$ si deduce un morfismo di gruppi $\Lambda' : (*_{i \in Orb(X)} Aut_X(a(i))) * \mathfrak{F}(Orb(X')) \rightarrow Aut_{Coh(f', g')}(a(i_0))$. Dato che $\bar{f} = \bar{f}'$ e $\bar{g} = \bar{g}'$ e ponendo w' l'isomorfismo fra gruppi di isotropia dedotto da w , si verifica sui generatori la relazione $\Lambda = w' \circ \Lambda'$. Questo significa che i due gruppi di isotropia sono isomorfi anche come gruppi sotto $(*_{i \in Orb(X)} Aut_X(a(i))) * \mathfrak{F}(Orb(X'))$.

Sia ι_B l'inclusione di X'_B in B e siano $f'' = f' \circ \iota_B$, $g'' = g' \circ \iota_B$ e v'' l'inversa a meno di equivalenza naturale di ι_B . Usando le ovvie notazioni, sia u il morfismo che fa commutare il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} X'_B & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{H}(g'')} \\ \xrightarrow{\mathfrak{H}(f'')} \end{array} & X_A & \xrightarrow{\mathfrak{H}(coh'')} & Coh(f'', g'') \\ & & \downarrow \mathfrak{H}(coh') & \swarrow \mathfrak{H}(u) & \\ & & Coh(f', g') & & \end{array}$$

Osserviamo che $\mathfrak{H}(coh'' \circ f') = \mathfrak{H}(coh'' \circ f' \circ \iota_B \circ v'') = \mathfrak{H}(coh'' \circ g' \circ \iota_B \circ v'') = \mathfrak{H}(coh'' \circ g')$. Questo significa che possiamo dedurre un morfismo v tale che il diagramma riportato in basso commuti:

$$\begin{array}{ccc} X' & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{H}(g')} \\ \xrightarrow{\mathfrak{H}(f')} \end{array} & X_A & \xrightarrow{\mathfrak{H}(coh')} & Coh(f', g') \\ & & \downarrow \mathfrak{H}(coh'') & \swarrow \mathfrak{H}(v) & \\ & & Coh(f'', g'') & & \end{array}$$

Dalla proprietà universale del coomotopizzatore e dalle relazioni

$$\mathfrak{H}(v \circ u \circ coh'') = \mathfrak{H}(v \circ coh') = \mathfrak{H}(coh'')$$

e

$$\mathfrak{H}(u \circ v \circ coh') = \mathfrak{H}(u \circ coh'') = \mathfrak{H}(coh')$$

risulta che da u scaturisce un'equivalenza di categorie con inversa che, a meno di equivalenza naturale, coincide con v . A fortiori ne risulta l'isomorfismo dei gruppi di isotropia dei due coomotopizzatori.

Analogamente a quanto svolto in precedenza, dall'equipaggiamento di base $(id_A, id_B, v \circ c_f, v \circ c_g, T, a(i_0))$ si deduce un morfismo di gruppi $\Lambda'' : (*_{i \in Orb(X)} Aut_X(a(i))) * \mathfrak{F}(Orb(X')) \longrightarrow Aut_{Coh(f'', g'')}(a(i_0))$. Dato che $\bar{f}' = \bar{f}''$ e $\bar{g}' = \bar{g}''$ e ponendo ν l'isomorfismo fra gruppi di isotropia dedotto da u , si verifica sui generatori la relazione $\Lambda' = u \circ \Lambda''$.

Abbiamo ottenuto che si tratta di un isomorfismo non solo nella categoria dei gruppi, ma anche nella categoria dei gruppi sotto $(*_{i \in Orb(X)} Aut_X(a(i))) * \mathfrak{F}(Orb(X'))$. Questo fatto conclude la prima parte della dimostrazione. Forti di questo risultato possiamo procedere alla parte della dimostrazione dove lavoreremo direttamente sul morfismo Λ per giungere alla conclusione, supponendo tranquillamente che X e X' fossero uguali a X_A e X'_B .

Sia Y il gruppoide ottenuto da X_0 per contrazione dei lacci di forma $\zeta(\phi) \circ \zeta(\psi) \circ \zeta(\phi \circ \psi)^{-1}$ per ϕ, ψ frecce di X . Illustriamo con un diagramma commutativo la situazione delle proiezioni:

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\pi_0} & Y \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi_Y \\ & & Coh(f, g) \end{array}$$

Sia $\epsilon : Aut_Y(i_0)^{op} \longrightarrow Aut_{Coh(f, g)}(i_0)$ il morfismo di gruppi indotto da π_Y (esso è surgettivo) e sia $\lambda : (*_{i \in X} Aut_X(i)) * \mathfrak{F}(X') \longrightarrow Aut_Y(i_0)^{op}$ l'unico morfismo di gruppi tale che $\lambda(m) = \delta_i m \delta_i^{-1}$ per ogni $i \in X$ e $m \in Aut_X(i)$ e $\lambda(j) = \delta_{\bar{f}(j)} \tau(j) \delta_{\bar{g}(j)}^{-1}$. Si verifica agevolmente che vale

$$\Lambda = \epsilon \circ \lambda$$

La strategia che seguiremo sarà quella di mostrare induttivamente la surgettività di λ e poi calcolare il nucleo di Λ in base a quello di λ e a quello di ϵ , che sono più facili da calcolare. In seguito sarà chiaro anche il guadagno enorme relativo al passaggio del problema dalla formulazione iniziale a quella attuale.

Sia $\mu \in Aut_Y(i_0)$. Possiamo allora rappresentare μ nella seguente forma: $\mu = \mu_0 k_1 \mu_1 \dots k_n \mu_n$ per un certo numero naturale n , dove $\mu_0 \in Aut_X(i_0)$, $k_i \in X' \vee k_i^{-1} \in X'$, $\bar{f}(k_1) = i_0 = \bar{g}(k_n)$, $\bar{f}(k_{t+1}) = \bar{g}(k_t)$ per $t \in [1, n-1]_{\mathbb{N}}$ e $\mu_t \in Aut_X(\bar{g}(k_t))$ per $t \in [1, n]_{\mathbb{N}}$. In questo caso diremo che μ ammette rappresentazioni di lunghezza n . Sfruttando il buon ordinamento di \mathbb{N} possiamo porre $l(\mu)$ la lunghezza di μ , ossia il limite inferiore delle lunghezze rispetto alle quali μ ammette rappresentazioni. Poniamo S l'insieme dei numeri naturali n tali che la relazione $\mu \in Aut_Y(i_0)$ con $l(\mu) \leq n$ implichi $\mu \in Im(\lambda)$.

Se μ ammette rappresentazioni di lunghezza 0, allora $\mu = \mu_0 \in Aut_X(i_0) = \lambda(\mu_0)$ e quindi $0 \in S$. Supponiamo ora $n \in S$ e $\mu = \mu_0 k_1 \dots k_{n+1} \mu_{n+1}$. Sfruttando il fatto che T è un albero e quanto fatto finora si ha

$$\mu = \mu_0 k_1 \dots k_{n-1} \mu_{n-1} \delta_{\bar{g}(k_{n-1})}^{-1} \delta_{\bar{g}(k_{n-1})} k_n \delta_{\bar{g}(k_n)}^{-1} \delta_{\bar{g}(k_n)} \mu_n \delta_{\bar{g}(k_n)}^{-1} \delta_{\bar{g}(k_n)} k_{n+1} \mu_{n+1}$$

Dato che $\delta_{\bar{g}(k_{n+1})} = id_{i_0}$ si può concludere che μ appartiene all'immagine di λ .

Adesso che abbiamo ottenuto la surgettività di Λ non resta che calcolarne il nucleo. Il fatto di base che guiderà quest'ultima parte della dimostrazione è $Ker(\Lambda) = \lambda^{-1}(Ker(\epsilon))$. $Aut_{Coh(f,g)}(i_0)$ è ottenuto da $Aut_Y(i_0)^{op}$ per contrazione dei lacci $f(m)jg(m)^{-1}j^{-1}$ per $j \in X'$ e $m \in Aut_{X'}(j)$, ed ϵ è la proiezione canonica, quindi $Ker(\epsilon)$ è il sottogruppo normale generato da tali lacci.

Sia $j \in T$. Allora $\lambda(j) = \delta_{\bar{f}(j)}\tau(j)\delta_{\bar{g}(j)}^{-1} = \tau(d_{\bar{f}(j)}jd_{\bar{g}(j)^{-1}}) = id_{i_0}$. Questo significa che esiste ed è unica una fattorizzazione di λ della forma $\lambda = \xi \circ q$, dove $q : (*_{i \in X} Aut_X(i)) * \mathfrak{F}(X') \rightarrow (*_{i \in X} Aut_X(i)) * \mathfrak{F}(X' - T)$ è la proiezione che ha come nucleo il più piccolo sottogruppo normale generato dalle frecce di T . In queste condizioni, ξ è surgettivo. Se mostrassimo che è anche iniettivo, allora la conclusione del teorema ne risulterebbe immediatamente.

Siano $j_1, j_2, \dots, j_n \in X'$. Allora

$$\begin{aligned} \xi(j_1 \dots j_n) = id_{i_0} &\Leftrightarrow \tau(d_{\bar{f}(j_1)}j_1 \dots j_n d_{\bar{g}(j_n)^{-1}}) = id_{i_0} \Leftrightarrow d_{\bar{f}(j_1)}j_1 \dots j_n d_{\bar{g}(j_n)^{-1}} = id_{i_0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow j_1 \dots j_n \in T \Leftrightarrow j_t \in T \forall t \in [1, n]_{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Le ultime due equivalenze conseguono dalla massimalità di T . Adesso che abbiamo ottenuto la libertà delle immagini dei j in $Aut_Y(i_0)^{op}$, sia $x \in (*_{i \in X} Aut_X(i)) * \mathfrak{F}(X')$ qualsiasi. Questo significa che possiamo scrivere $x = x_0 k_1 x_1 \dots k_n x_n$ per un qualche n naturale, dove $x_t \in (*_{i \in X} Aut_X(i))$ (potenzialmente anche neutri) e $k_t \in X' \vee k_t^{-1} \in X'$ per ogni $t \in [0, n]_{\mathbb{N}}$. Si verifica che $\xi(x) = id_{i_0} \Leftrightarrow n = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = id_{i_0}$, ossia che ξ è iniettivo. Ciò conclude la dimostrazione. \square

Sia $\gamma_{i_0} : Aut_{Coh(f,g)}(a(i_0)) \rightarrow Aut_{Coeq(f,g)}(\gamma(a(i_0)))$ la proiezione dedotta da γ . Per il lemma 1, il suo nucleo è il più piccolo sottogruppo normale di $Aut_{Coh(f,g)}(a(i_0))$ che contiene i lacci $k_1 \dots k_n$ indicizzati di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ per un qualche n naturale, dove $k_t \in X' \vee k_t^{-1} \in X', \forall t \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e tali che $\bar{f}(k_{t+1}) = \bar{g}(k_t), \forall t \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indicheremo l'insieme di tali lacci con Ω

Scelto un equipaggiamento di base (a, b, c_f, c_g, T, i_0) , chiameremo equipaggiamento complementare un dato (Z, σ) tale che:

1. $Z \subseteq \Omega$ è tale che il più piccolo sottogruppo normale di $Aut_{Coh(f,g)}(a(i_0))$ che lo contiene è il nucleo di γ_{i_0}
2. σ è una funzione che a ogni elemento $z = (z_1, \dots, z_n) \in Z$ associa una n-upla $(z_1^\sigma, \dots, z_n^\sigma)$ di frecce di X' tali che leghino i vertici di X' corrispondenti dei z_t con le immagini per b delle orbite dei z_t

Il dato di un equipaggiamento di base insieme ad uno complementare si chiama equipaggiamento completo. In seguito considereremo di averne scelto uno.

Sia $y \in Z$. Allora si ha in $Coh(f, g)$ che vale $y_k \circ coh(g(y_k^\sigma)) = coh(f(y_k^\sigma)) \circ b(j_{y_k})$, dove j_{y_k} è l'orbita di y_k .

$$\begin{array}{ccc} f(y_k) & \xrightarrow{coh(f(y_k^\sigma))} & f(b(j_{y_k})) \\ \downarrow y_k & & \downarrow b(j_{y_k}) \\ g(y_k) & \xrightarrow{coh(g(y_k^\sigma))} & g(b(j_{y_k})) \end{array}$$

Svolgendo dei conti giungiamo a questa formula (riferita a frecce di $Coh(f, g)^{op}$):

$$y_k = coh(f(y_k^\sigma))b(j_{y_k})coh(g(y_k^\sigma))^{-1} = coh(f(y_k^\sigma))coh(c_f(j_{y_k}))\delta_{\bar{f}(j_{y_k})}^{-1} \Lambda(j_{y_k})\delta_{\bar{g}(j_{y_k})}^{-1} coh(c_g(j_{y_k}))^{-1} coh(g(y_k^\sigma))^{-1}$$

Denotando con (o, q) la situazione $y_{k-1}^o \in X'$ e $y_k^q \in X'$, definiamo ora

$$\lambda_k(y) = c_g(j_{y_{k-1}})^{-1}g((y_{k-1}^\sigma)^{-1}f(y_k^\sigma)c_f(j_{y_k})) \text{ se } (1, 1), \lambda_k(y) = c_g(j_{y_{k-1}})^{-1}g((y_{k-1}^\sigma)^{-1}g(y_k^\sigma)c_f(j_{y_k}))$$

$$\text{se } (1, -1), \lambda_k(y) = c_f(j_{y_{k-1}})^{-1}f((y_{k-1}^\sigma)^{-1}f(y_k^\sigma)c_f(j_{y_k})) \text{ se } (-1, 1)$$

$$\text{e } \lambda_k(y) = c_f(j_{y_{k-1}})^{-1}f((y_{k-1}^\sigma)^{-1}g(y_k^\sigma)c_g(j_{y_k})) \text{ se } (-1, -1).$$

Osserviamo dunque che $\Lambda(\lambda_1(y)k_1 \dots \lambda_n(y)k_n)$ è coniugato a $y_1k_1 \dots y_nk_n$ in $Coh(f, g)$.

Considerando quanto svolto finora, siamo giunti a una presentazione di $Aut_{Coeq(f, g)}(\gamma(a(i_0)))$.

Teorema 6. *Sia $(a, b, c_f, c_g, T, i_0, Z, \sigma)$ un equipaggiamento completo della coppia (f, g) . Allora esiste un unico morfismo $\Xi : (*_{i \in Orb(X)} Aut_X(a(i))) * \mathfrak{F}(Orb(X')) \longrightarrow Aut_{Coh(f, g)}(a(i_0))$ tale che $\Xi(m) = \delta_i coeq(m) \delta_i^{-1}$ per $i \in Orb(X)$ e $m \in Aut_X(a(i))$ e $\Xi(j) = \delta_{\bar{f}(j)} \tau(j) \delta_{\bar{g}(j)}^{-1}$ per $j \in Orb(X')$. Esso è surgettivo e il suo nucleo è il più piccolo sottogruppo normale di $(*_{i \in Orb(X)} Aut_X(a(i))) * \mathfrak{F}(Orb(X'))$ che contiene gli elementi j per $j \in T$, $f_j(m)jg_j(m)^{-1}j^{-1}$, per $j \in Orb(X')$ e $m \in Aut_{X'}(b(j))$ e $\lambda_1(y)k_1 \dots \lambda_n(y)k_n$ per $y = (y_1, \dots, y_n) \in Z$ e $k_t \in Orb(X') \wedge k_t^{-1} \in Orb(X'), \forall t \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata, applicando quanto svolto in precedenza, osservando che $\Xi = \Lambda \circ \gamma_{i_0}$. \square

1.3 Gruppoide fondamentale

Sia X uno spazio topologico. Chiamiamo gruppoide fondamentale di X (oppure gruppoide di Poincaré di X) il gruppoide che ha come vertici i punti di X , come frecce le classi di omotopia a estremi fissati dei cammini $m \in \mathcal{C}([0, 1], X)$ (la classe di omotopia di m , che denoteremo $[m]$, è una freccia che origina da $m(0)$ e termina a $m(1)$). Lo denoteremo con $\varpi(X)$.

Prima di andare oltre premettiamo un piccolo lemma:

Lemma 3. *Siano X, Y, Z spazi topologici e siano $g, h : X \longrightarrow Y$ e $\gamma, \chi : Y \longrightarrow Z$ funzioni continue. Supponiamo inoltre che g e h siano omotope, come anche γ e χ . Allora $\gamma \circ g$ e $\chi \circ h$ sono omotope. Inoltre, se g, h sono collegate da una omotopia fissa su $X' \subseteq X$ e γ, χ sono collegate da una fissa su $g(X')$, allora l'omotopia congiungente $\gamma \circ g$ a $\chi \circ h$ è fissa su X'*

Dimostrazione. Siano A, B omotopie che legano g e h , rispettivamente γ e χ . Poniamo $T : X \times [0, 1] \longrightarrow Z$ una funzione definita in questo modo: $T(x, t) = B(A(x, t), t)$. Essa è continua in quanto è composizione di funzioni continue e $T(x, 0) = \gamma(g(x)) \wedge T(x, 1) = \chi(h(x)), \forall x \in X$. La giustificazione dell'enunciato sulle omotopie fisse su sottospazi segue dalla costruzione di T , prendendo come A e B due omotopie che soddisfano le condizioni dell'ipotesi. \square

Se m, n sono due cammini in X tali che $m(1) = n(0)$, allora definiamo $m \cdot n : [0, 1] \longrightarrow X$ tale che $m \cdot n(t) = m(2t)$ per $t \in [0, 1/2[$ e $m \cdot n(t) = n(2t - 1)$ per $t \in [1/2, 1]$. La continuità di $m \cdot n$ discende immediatamente dalla continuità di m ed n e dalla coincidenza dei limiti laterali in $1/2$. Definiamo allora la composizione di $[m]$ con $[n]$ in $\varpi(X)$ tramite la formula $[m][n] = [m \cdot n]$. Per brevità a volte scriveremo $[mn]$ invece di $[m][n]$, quando ciò non comporta rischio di confusione.

Si verifica agevolmente che tale composizione è associativa. In effetti, è proprio per l'associatività che si considerano le classi di omotopia dei cammini e non i cammini in quanto tali. Si osserva anche che l'identità in un punto è la classe del cammino costante in quel punto, che identificheremo con il punto stesso se non si corre il rischio di creare confusione.

$\varpi(X)$ è un gruppoide, perché ogni cammino può essere percorso "all'indietro":

Sia $[m] \in \varpi(X)$. Mostriamo a titolo illustrativo che $[\bar{m}]$ è l'inverso di $[m]$. dove $\bar{m}(t) = m(1-t), \forall t \in [0, 1]$ (notiamo subito che $\bar{\bar{m}} = m$). Un'omotopia che lega $[m\bar{m}]$ a $m(0)$ è $H(t, s) = m \cdot \bar{m}(ts)$.

Sia $\phi : X \rightarrow Y$ una funzione continua e siano m, n cammini in X . Poniamo $\varpi(\phi) : \varpi(X) \rightarrow \varpi(Y)$ tale che $\varpi(\phi)([m]) = [\phi \circ m]$. Dato che $\phi \circ (m \cdot n) = (\phi \circ m) \cdot (\phi \circ n)$ otteniamo che $\varpi(\phi)$ è un morfismo di gruppidi.

Il gruppoide fondamentale ha un comportamento functoriale covariante. Infatti, se $\phi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow Z$ sono funzioni continue e m è un cammino in X , abbiamo $\varpi(\psi \circ \phi)([m]) = [\psi \circ \phi \circ m] = [\psi][\phi \circ m] = \varpi(\psi) \circ \varpi(\phi)([m])$. Concludiamo il capitolo mostrando che esso è compatibile con il passaggio da Top a $Toph$.

Teorema 7. *Siano X, Y spazi topologici e $g, h : X \rightarrow Y$ funzioni continue. Se g e h sono omotope, allora $\varpi(g) = \varpi(h)$*

Dimostrazione. Sia m un cammino in X . Allora, tenendo presente il lemma 3, vale $\varpi(g)([m]) = [g \circ m] = [h \circ m] = \varpi(h)([m])$. □

Osserviamo anche che le orbite del gruppoide fondamentale di uno spazio topologico X coincidono con le componenti connesse per archi di X e che i gruppi di isotropia di tali orbite sono proprio i gruppi fondamentali delle componenti connesse per archi.

L'azione del gruppo fondamentale su un rivestimento può essere estesa a un'azione del gruppoide fondamentale. Ricordiamo che $p : E \rightarrow X$ riveste X se ogni punto di X possiede un intorno U tale che la sua preimmagine attraverso p è omeomorfa a $U \times D$, dove D è uno spazio discreto e p induce omeomorfismi fra gli $U \times \{d\}$ e U per ogni $d \in D$. Si tratta dell'azione $\varpi(X) \rightarrow \mathfrak{B}(E, p)$ che a ogni classe di omotopia a estremi fissi di cammini $\gamma : a \rightarrow b$ associa la bigezione fra la fibra di a e la fibra di b che a $a' \in E_a$ associa il termine del cammino in E ottenuto sollevando γ con origine in a' . La definizione è ben posta grazie al lemma di sollevamento unico dei cammini.

Capitolo 2

Discesa

2.1 Categorie fibrato

Nel resto della sezione \mathcal{E} sarà una categoria e (\mathcal{F}, P) sarà una categoria su \mathcal{E} . Eccetto situazioni che possono risultare ambigue scriveremo sempre \mathcal{F} invece di (\mathcal{F}, P) . Supponiamo che in entrambe le categorie esistano tutti i limiti proiettivi.

Se S è un oggetto di \mathcal{E} , denoteremo con \mathcal{F}_S la categoria-fibra di S rispetto a P , ossia la retroimmagine tramite P della sottocategoria puntuale S di \mathcal{E} con il solo oggetto S e la sola freccia id_S . Osserviamo che \mathcal{F}_S si identifica con il prodotto fibrato $\mathcal{F} \times_{\mathcal{E}} S$ dato da P e dall'inclusione.

Definizione 7 (Morfismi cartesiani e ipercartesiani). *Siano η, ξ oggetti di \mathcal{F} e m una freccia da η a ξ . Chiamiamo m morfismo cartesiano se per ogni oggetto $\eta' \in \mathcal{F}_{P(\eta)}$ e qualsiasi morfismo $u : \eta' \rightarrow \xi$ tale che $P(u) = P(m)$ esiste ed è unico $u' \in \text{Hom}_{\mathcal{F}_{P(\eta)}}(\eta', \eta)$ tale che $m \circ u' = u$.*

Diciamo che m è ipercartesiano se per ogni oggetto $\eta' \in \mathcal{F}$, qualsiasi morfismo $u : \eta' \rightarrow \xi$ e qualsiasi morfismo $v' : P(\eta') \rightarrow P(\eta)$ esiste ed è unico $v \in \text{Hom}_{\mathcal{F}_{P(\eta)}}(v', \eta)$ tale che $m \circ v = u$ e che $P(v) = v'$.

In queste condizioni si ha una bigezione fra i morfismi di η' e η come oggetti su ξ e $P(\eta')$ e $P(\eta)$ come oggetti su $P(\xi)$.

Se per ogni oggetto $x \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ e ogni freccia m' in \mathcal{E} e che termina in $P(x)$ esiste una freccia cartesiana m in \mathcal{F} che termina in x e tale che $P(m) = m'$, diciamo che il funtore P è prefibrante. Se vale anche che ogni composizione di frecce cartesiane è cartesiana allora P viene detto fibrante.

Lemma 4. *P è fibrante se e solo se per ogni oggetto $x \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ e ogni freccia m' in \mathcal{E} e che termina in $P(x)$ esiste una freccia ipercartesiana m in \mathcal{F} che termina in x e tale che $P(m) = m'$.*

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando la prima implicazione. Supponiamo dunque che P sia fibrante e siano $x \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ e m' in \mathcal{E} una freccia che termina in $P(x)$. Dato che P è prefibrante, esistono $y \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ e $m : y \rightarrow x$ in \mathcal{F} una freccia cartesiana tale che $P(m) = m'$. Dobbiamo mostrare che m è ipercartesiana.

Siano $z \in \text{Ob}(\mathcal{F})$, $u : z \rightarrow x$ una freccia in \mathcal{F} e $t' : P(z) \rightarrow P(y)$ una freccia tale che $m' \circ t' = P(u)$. Dobbiamo sollevare t' a un morfismo $t : z \rightarrow y$ in \mathcal{F} e mostrare che la condizione di unicità è soddisfatta.

Usiamo il fatto che P è prefibrante su t' . Esiste dunque una freccia cartesiana $\bar{t} : \bar{z} \rightarrow y$ tale che $P(\bar{t}) = t'$. Ora usiamo il fatto che P è proprio fibrante e determiniamo che $m \circ \bar{t}$ è cartesiano. Come $P(m \circ \bar{t}) = P(u)$, esiste un unico $v \in \mathcal{F}_{P(z)}$ tale che $m \circ \bar{t} \circ v = u$. Denotiamo $\bar{t} \circ v$ con t . Con questo abbiamo provato l'esistenza.

Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo $\tau : z \rightarrow y$ una freccia tale che $m \circ \tau = u$ e $P(\tau) = t'$. Sfruttando la cartesianità di \bar{t} , esiste un unico morfismo di fibra w da z a \bar{z} tale che $\tau = \bar{t} \circ w$. Questo significa che w è un morfismo di fibra fra z e \bar{z} per il quale è vero che $m \circ \bar{t} \circ w = u$. Ricordando che $m \circ \bar{t}$ è cartesiano, si conclude che $w = v$, e quindi che $\tau = t$.

Mostriamo adesso l'implicazione in direzione opposta. Dato che ogni morfismo ipercartesiano è cartesiano, P è prefibrante. La dimostrazione procede in due passi: prima mostriamo che in queste condizioni ogni morfismo cartesiano è ipercartesiano, poi dimostriamo che una composizione di morfismi ipercartesiani rimane un morfismo ipercartesiano.

Sia $m : y \rightarrow x$ un morfismo cartesiano. Esiste dunque $\bar{m} : \bar{y} \rightarrow x$ ipercartesiano e tale che $P(\bar{m}) = P(m)$. Otteniamo adesso dalla cartesianità dei due morfismi due morfismi di fibra $v : y \rightarrow \bar{y}$ e $w\bar{y} \rightarrow y$ tali che $m = \bar{m} \circ v$ e $\bar{m} = m \circ w$. Quindi $m = m \circ w \circ v$ e $\bar{m} = \bar{m} \circ v \circ w$. Quindi v e w sono l'uno l'inverso dell'altro e danno un'isomorfismo fra oggetti sopra x . Sfruttando l'ipercartesianità di \bar{m} si conclude subito che anche m gode di tale proprietà.

Consideriamo adesso la situazione dove $m : x_2 \rightarrow x_1$ e $n : x_3 \rightarrow x_2$ sono morfismi cartesiani e $u : z \rightarrow x_1$ è un morfismo qualunque. Sia $t' : P(z) \rightarrow P(x_3)$ un morfismo tale che $P(u) = P(m) \circ P(n) \circ t'$ e usiamo la notazione $P(n) \circ t' = r'$. Allora esiste ed è unico (m è ipercartesiano) $r : z \rightarrow x_2$ tale che $P(r) = r'$ e $m \circ r = u$. Similmente esiste ed è unico (n è ipercartesiano) $t : z \rightarrow x_3$ tale che $P(t) = t'$ e $n \circ t = r$. Osserviamo che $P(m \circ n \circ t) = P(m \circ r) = P(u)$. Per mostrare che t è l'unico morfismo con le due proprietà considerate, basta osservare che se $\tau : z \rightarrow x_3$ le soddisfa, allora deve valere $n \circ \tau = r$ (r è unico), e poi $\tau = t$ per unicità di t . Con questo abbiamo concluso la dimostrazione. \square

Mettiamo in rilievo due fatti fondamentali che seguono dalla dimostrazione precedente:

1. Se P è fibrante allora ogni morfismo cartesiano è ipercartesiano.
2. La composizione di due morfismi ipercartesiani resta un morfismo ipercartesiano.

Definizione 8 (Categorie fibrante). *Sia (\mathcal{F}, P) una categoria sulla categoria \mathcal{E} . Diciamo che (\mathcal{F}, P) è una categoria fibrata su \mathcal{E} (oppure, equivalentemente, una categoria \mathcal{E} -fibrata) se P è un funtore fibrante. Un morfismo di categorie \mathcal{E} -fibrate è un morfismo di categorie su \mathcal{E} che manda frecce cartesiane in frecce cartesiane.*

Qualora P fosse evidente dal contesto diremo semplicemente che \mathcal{F} è una categoria fibrata su \mathcal{E} .

Nel resto della sezione considereremo \mathcal{F} fibrata su \mathcal{E} .

2.2 Pseudofuntori

Questa sezione sarà dedicata al mostrare come si possono sollevare frecce di \mathcal{E} lungo P attraverso morfismi cartesiani. Poi osserveremo che la stessa cosa si può fare usando

un formalismo diverso, quello degli pseudofuntori, che possono essere considerati una generalizzazione dei prefasci. Di particolare interesse è anche la relazione fra i due formalismi.

Definizione 9 (Categorie clivate). *Sia K una famiglia di frecce cartesiane di \mathcal{F} . Diciamo che K è un clivaggio se per ogni freccia $m' : y' \rightarrow x'$ in \mathcal{E} e ogni oggetto $x \in \mathcal{F}_{x'}$ esiste un'unica freccia cartesiana in K che termina in x e la cui immagine è m' . Un clivaggio è detto normalizzato se, per ogni $x \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ la freccia in K corrispondente a $\text{id}_{P(x)}$ è id_x . Un clivaggio è detto scindente (oppure splitting) se è normalizzato ed è chiuso rispetto alla composizione di morfismi.*

Una categoria clivata è una categoria fibrata munita di un clivaggio.

Osserviamo da subito che l'esistenza di clivaggi (normalizzati e non) è conseguenza immediata dell'assioma della scelta. I clivaggi scidenti però non esistono sempre. In seguito forniremo delle condizioni necessarie e sufficienti affinché esistano.

Adesso vediamo che, intuitivamente, i clivaggi ci permettono di "sollevare" P . L'idea di base è la seguente: a ogni oggetto x' in \mathcal{E} associeremo $\mathcal{F}_{x'}$ e a ogni freccia $m' : x' \rightarrow y'$ in \mathcal{E} associeremo un funtore $\mathcal{F}(m') : \mathcal{F}_{y'} \rightarrow \mathcal{F}_{x'}$. Tuttavia non richiederemo che per $m' : x' \rightarrow y'$ e $n' : y' \rightarrow z'$ in \mathcal{E} valga $\mathcal{F}(n') \circ \mathcal{F}(m') = \mathcal{F}(n' \circ m')$, bensì che siano naturalmente isomorfi. Ora facciamo alcune considerazioni sulla realizzazione di quest'idea.

Definizione 10 (Pseudofuntori). *Uno pseudofuntore su \mathcal{E} è una corrispondenza Φ che a ogni oggetto x' in \mathcal{E} associa una categoria $\Phi(x')$, a ogni freccia $m' : x' \rightarrow y'$ in \mathcal{E} associa un funtore $\Phi(m') : \Phi(y') \rightarrow \Phi(x')$, munito di equivalenze naturali $\Phi_{\text{Nat}}(x') : \Phi(\text{id}_{x'}) \rightarrow \text{id}_{\Phi(x')}$ e $\Phi_{\text{Nat}}(m', n') : \Phi(m') \circ \Phi(n') \rightarrow \Phi(n' \circ m')$, dove $n' : y' \rightarrow z'$ è una freccia in \mathcal{E} . Inoltre, questi dati devono soddisfare le seguenti condizioni di compatibilità:*

1. $\Phi_{\text{Nat}}(\text{id}_{x'}, m')[y] = \Phi_{\text{Nat}}(x')[\Phi(m')(y)]$ e $\Phi_{\text{Nat}}(m', \text{id}_{y'})[y] = \Phi(m')(\Phi_{\text{Nat}}(y')[y])$, dove y è un oggetto di $\Phi(y')$

2. Se abbiamo anche $l' : w' \rightarrow x'$ e un oggetto z di $\Phi(z')$, allora vale

$$\Phi_{\text{Nat}}(m' \circ l', n')[z] \circ \Phi_{\text{Nat}}(l', m')[\Phi(n')(z)] = \Phi_{\text{Nat}}(l', n' \circ m')[z] \circ \Phi(l')(\Phi_{\text{Nat}}(m', n')[z])$$

Osserviamo che la seconda condizione di compatibilità è semplicemente la commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \Phi(l') \circ \Phi(m') \circ \Phi(n') & \longrightarrow & \Phi(m' \circ l') \circ \Phi(n') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi(l') \circ \Phi(n' \circ m') & \longrightarrow & \Phi(n' \circ m' \circ l') \end{array}$$

Adesso possiamo enunciare un teorema che chiarifica il significato dei clivaggi. Parte integrante della sua dimostrazione è proprio la costruzione rigorosa dell'idea accennata nel paragrafo precedente alla definizione 10. Premettiamo però prima un lemma.

Lemma 5. *Una freccia m in \mathcal{F} tale che $P(m)$ è un isomorfismo è ipercartesiana se e solo se essa stessa è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Consideriamo $m : x \rightarrow y$ e supponiamo che sia un isomorfismo. Allora, per $u : z \rightarrow y$ e $v' : P(z) \rightarrow P(x)$ tale che $P(m) \circ v' = P(u)$ esiste ed è unica $v : z \rightarrow x$

tale che $m \circ z = u$, ovvero $v = m^{-1} \circ u$. Dato che $v' = P(m)^{-1} \circ P(u)$, abbiamo $P(v) = v'$, concludendo la prima parte della dimostrazione.

Se invece supponessimo m ipercartesiana, allora basta considerare $n : y \rightarrow x$ l'unica freccia tale che $P(n) = P(m)^{-1}$ e $m \circ n = id_y$. Resta da mostrare che $n \circ m = id_x$. Questo segue dal fatto che id_x è l'unica freccia che ha immagine $id_{P(x)}$ e tale che $m \circ id_x = m$. Dato che queste relazioni sono soddisfatte anche da $n \circ m$ concludiamo la dimostrazione. \square

Teorema 8. *A ogni clivaggio di \mathcal{F} corrisponde uno pseudofuntore su \mathcal{E} .*

Dimostrazione. Consideriamo su \mathcal{F} un clivaggio K . Costruiamo adesso uno pseudofuntore Φ partendo da questo dato. Siano x', y', z' oggetti qualsiasi di \mathcal{E} e $m' : x' \rightarrow y', n' : y' \rightarrow z'$ frecce qualsiasi in \mathcal{E} con le origini e i termini come indicato. Poniamo $\Phi(x') = \mathcal{F}_{x'}$.

Adesso definiamo $\Phi(m') : \mathcal{F}_{y'} \rightarrow \mathcal{F}_{x'}$. Per ogni oggetto y nella fibra di y' esiste un'unica freccia (cartesiana) m in K con termine y e tale che $P(m) = m'$. Poniamo $\Phi(m')(y)$ uguale all'origine di m (quindi abbiamo "tirato indietro" x' attraverso m). Sia adesso un morfismo $h : y_1 \rightarrow y_2$ nella fibra di y' . Allora poniamo $\Phi(m')(h)$ come il morfismo di fibra fra $\Phi(m')(y_1)$ e $\Phi(m')(y_2)$ tale che $m_2 \circ \Phi(m')(h) = h \circ m_1$, dove gli m_i sono i morfismi cartesiani di K con immagine per P uguale a m e con termine y_i , per $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\Phi(m')(h)$ esiste ed è unico per le proprietà dei morfismi cartesiani. Proprio per quest'unicità si osserva immediatamente che $\Phi(m')$ preserva le composizioni fra morfismi di fibra, quindi è un funtore covariante.

Adesso definiamo la trasformazione naturale $\Phi_{Nat}(x')$. Sia x un elemento della fibra di x' . Poniamo $\Phi_{Nat}(x')[x]$ l'unica freccia di $\mathcal{F}_{x'} \cap K$ con termine x . Per la costruzione di $\Phi(id'_x)$ si osserva subito che si tratta di una trasformazione naturale. La trasformazione inversa è definita invertendo le frecce, dato che, per il lemma precedente, gli $\Phi_{Nat}(x')[x]$ sono tutti degli isomorfismi.

Sia z un oggetto di $\mathcal{F}_{z'}$. Allora $\Phi(n' \circ m')$ corrisponde all'unico elemento \bar{x} di $\mathcal{F}_{x'}$ che ottenuto per sollevamento di $n' \circ m'$ tramite l'unica freccia cartesiana di K $\mu : \bar{x} \rightarrow z$ con termine z e immagine $n' \circ m'$. Similmente, sia $y = \Phi(n')(z)$ e $x = \Phi(m')(y) = (\Phi(m') \circ \Phi(n'))(z)$ e siano $n : y \rightarrow z$ e $m : x \rightarrow y$ le uniche frecce di K con i termini indicati e tali che $P(n) = n'$ e $P(m) = m'$. Allora definiamo, per la cartesianità di μ , $\Phi_{Nat}(m', n')[z]$ come l'unica freccia di \mathcal{F} tale che $\mu \circ \Phi_{Nat}(m', n')[z] = n \circ m$. La trasformazione inversa si definisce analogamente, sfruttando la cartesianità di $n \circ m$. La naturalità e le condizioni di compatibilità seguono dopo una semplice verifica. \square

Ripercorrendo i passi della dimostrazione osserviamo che il clivaggio K è normalizzato se e solo se lo pseudofuntore ad esso associato preserva le identità. Analogamente, K è scindente se e solo se lo pseudofuntore associato è proprio un funtore.

In seguito mostriamo come si può costruire una categoria clivata partendo da uno pseudofuntore Φ . Tale costruzione è conosciuta anche come "Costruzione di Grothendieck" o "Fibrazione di Grothendieck".

Teorema 9 (Costruzione di Grothendieck). *Ad ogni pseudofuntore Φ corrisponde una categoria clivata su \mathcal{E} le cui fibre corrispondono agli oggetti dell'immagine di Φ .*

Dimostrazione. Sia \mathcal{F} la categoria i cui oggetti sono dati da $Ob(\mathcal{F}) = \sqcup_{x \in \mathcal{E}} Ob(\Phi(x))$, ossia le coppie (x, ξ) , con $x \in \mathcal{E}$ e $\xi \in \Phi(x)$. Definiamo le frecce $(y, \nu) \rightarrow (x, \xi)$ come le coppie (m, μ) , con $m : x \rightarrow y$ (in $mathcal{E}$) e $\mu : \Phi(m)(\nu) \rightarrow \xi$ (in $\Phi(x)$). La composizione di $(n, \nu) : (z, \zeta) \rightarrow (y, \nu)$ con $(m, \mu) : (y, \nu) \rightarrow (x, \xi)$ è data da $(m, \mu) \circ (n, \nu) = (n \circ m, \mu \cdot \nu)$,

dove $\mu \cdot \nu = \mu \circ \Phi(m)(\nu) \circ \Phi_{Nat}(m, n)^{-1}[\zeta]$. La situazione viene presentata nel diagramma riportato in basso.

$$\begin{array}{ccc} \Phi(n \circ m)(\zeta) & \longrightarrow & \xi \\ \downarrow & & \uparrow \\ (\Phi(m) \circ \Phi(n))(\zeta) & \longrightarrow & \Phi(m)(\nu) \end{array}$$

La composizione è ovviamente associativa.

Per le condizioni di compatibilità enunciate nella definizione 9 risulta che l'identità dell'oggetto (y, ν) è $(id_y, \Phi_{Nat}(y)[\nu])$. Quindi \mathcal{F} è veramente una categoria.

Definiamo ora $P : \mathcal{F}^{op} \rightarrow \mathcal{E}$ nel modo seguente: $P((x, \xi)) = x$ e $P(m, \mu) = m$. Si osserva subito che si tratta di un funtore e che le fibre \mathcal{F}_x^{op} sono categorie canonicamente isomorfe alle $\Phi(x)$, per ogni oggetto x di \mathcal{E} . Resta da mostrare che \mathcal{F}^{op} è cartesiana e di sceglierne un clivaggio. Faremo ciò in un colpo solo costruendo direttamente il clivaggio e mostrando che le sue frecce sono cartesiane.

Infatti, ad m e a (y, ν) associamo la freccia $(m, id_{\Phi(m)(\nu)})$. Siano ora $l : a \rightarrow y$, $\lambda : \Phi(l)(\nu) \rightarrow \alpha$ e $v : a \rightarrow x$ tale che $m \circ v = l$. Ponendo $\beta : (\Phi(v) \circ \Phi(m))(\nu) \rightarrow \alpha$, $\beta = \lambda \circ \Phi_{Nat}(v, m)[\nu]$, osserviamo che $(m, id_{\Phi(m)(\nu)}) \circ (v, \beta) = (l, \lambda)$ (in \mathcal{F}^{op}). Se $\beta' : (\Phi(v) \circ \Phi(m))(\nu) \rightarrow \alpha$ avesse la stessa proprietà di β , allora $\beta' \cdot id_{\Phi(m)(\nu)} = \beta' \circ \Phi_{Nat}(v, m)^{-1}[\nu] = \lambda$, e quindi $\beta' = \beta$. Ciò conclude la dimostrazione. \square

Considerando le costruzioni dei teoremi 8 e 9 è facile vedere che sono l'una "l'inversa" dell'altra. Da ciò scaturisce un'equivalenza fra la categoria dei pseudofuntori su \mathcal{E} e la categoria delle categorie clivate su \mathcal{E} . Per maggiori approfondimenti rimandiamo a SGA1 (Exposé VI, 8).

2.3 Discesa

Adesso possiamo finalmente formulare la discesa. In questa sezione \mathcal{E} sarà una categoria qualsiasi, Φ uno pseudofuntore su \mathcal{E} e \mathcal{F} la categoria fibrata associata a Φ .

Consideriamo il seguente diagramma in \mathcal{E} , dove $\varphi \circ \alpha' = \varphi \circ \beta'$. $x' \xrightarrow[\alpha']{\beta'} y' \xrightarrow{\varphi} z'$

Definizione 11 (Dato di incollamento). *Sia y un oggetto di $\Phi(y')$. Chiamiamo dato di incollamento su y relativo ai morfismi α' e β' un isomorfismo fra $\Phi(\alpha')(y)$ e $\Phi(\beta')(y)$.*

Se $m : y_1 \rightarrow y_2$ è una freccia di $\Phi(y')$ e y_1, y_2 sono muniti di dati di incollamento, diciamo che m è compatibile con tali dati se il seguente diagramma commuta (in $\Phi(x')$):

$$\begin{array}{ccc} \Phi(\alpha')(y_1) & \xrightarrow{\Phi(\alpha')(m)} & \Phi(\alpha')(y_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi(\beta')(y_1) & \xrightarrow{\Phi(\beta')(m)} & \Phi(\beta')(y_2) \end{array}$$

In queste condizioni possiamo parlare della categoria $\tilde{\Phi}(y')$ i cui oggetti sono gli oggetti di $\Phi(y')$ muniti di un dato di incollamento e i morfismi sono i morfismi compatibili con tali dati.

La situazione descritta sopra ci permette di definire un funtore $\tilde{\varphi} : \Phi(z') \rightarrow \tilde{\Phi}(y')$. Sia z un oggetto di $\Phi(z')$. Poniamo $\varphi(z)$ uguale a $\Phi(\varphi)(z)$ munito del dato di incollamento

$\Phi_{Nat}(\beta', \varphi)[z]^{-1} \circ \Phi_{Nat}(\alpha', \varphi)[z]$, detto dato di incollamento canonico. Sui morfismi $\tilde{\varphi}$ coincide con $\Phi(\varphi)$, in quanto i diagrammi commutano per naturalità. Gli oggetti isomorfi a oggetti dell'immagine di $\tilde{\varphi}$ sono detti muniti di un dato di incollamento effettivo.

Il diagramma $x' \xrightarrow[\alpha']{\beta'} y' \xrightarrow{\varphi} z'$ è detto esatto se $\tilde{\varphi}$ è pienamente fedele, ossia se induce un isomorfismo sulla sottocategoria piena di $\tilde{\Phi}(y')$ degli oggetti muniti di dati di incollamento effettivi.

Da ora in poi supponiamo \mathcal{E} munita di prodotti fibrati.

Definizione 12 (Discesa). *Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ in \mathcal{E} . Un dato di discesa ξ su un oggetto x in $\Phi(X)$ relativo a φ è un dato di incollamento su x relativo al diagramma riportato in basso che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $\Phi_{Nat}(\Delta, p_2)[x] \circ \Phi(\Delta)(\xi) = \Phi_{Nat}(\Delta, p_1)[x]$, dove $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ denota la diagonale
2. $\Phi(p_{3,1})(\xi) = \Phi(p_{3,2})(\xi) \circ \Phi(p_{2,1})(\xi)$, dove le p denotano le proiezioni di $X \times_Y X \times_Y X$ su $X \times_Y X$

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{p_1} & X \\ \downarrow p_2 & & \downarrow \varphi \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} .$$

φ è detto morfismo di discesa se il diagramma sopra è esatto.

Un esempio molto illustrativo di discesa si ottiene considerando Φ lo pseudofunttore che a un oggetto X di \mathcal{E} associa la categoria $\mathcal{E}_{/X}$ degli oggetti su X . Sia un morfismo $m : X \rightarrow Y$ in \mathcal{E} e sia (Z, ζ) un oggetto su Y . Allora poniamo $\Phi(m)(Z, \zeta) = (X \times_Y Z, p_X)$. Le trasformazioni naturali sono quelle ovvie.

2.4 Discesa topologica

In questa sezione ci occuperemo della teoria della discesa per spazi topologici. Poichè la categoria degli spazi topologici è dotata di prodotti fibrati, considereremo la discesa che risulta dallo pseudofunttore Φ presentato alla fine della sezione precedente o da sottocategorie fibrati ad esso legate (come i rivestimenti o gli spazi étalés). In particolare, ci concentreremo prima sulla caratterizzazione dei morfismi di discesa e poi sulla discesa attraverso diverse classi di morfismi.

A meno di specifica contraria, nel resto della sezione $\varphi : X \rightarrow Y$ è una funzione continua e denotiamo $X \times_Y X$ con \bar{X} .

Sia τ un dato di discesa su (Z, ζ) (oggetto di $\Phi(X)$) relativo a φ . Si tratta dunque di un omeomorfismo tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccc} Z \times_X (X \times_Y X) & \xrightarrow{\tau} & Z \times_X (X \times_Y X) & & \\ \downarrow \pi_Z & \searrow \pi_X & & \swarrow \pi'_X & \downarrow \pi'_Z \\ Z & & X \times_Y X & & Z \\ & \searrow \zeta & \downarrow p_1 \downarrow p_2 & \swarrow \zeta & \\ & & X & & \end{array} .$$

Per evitare l'abuso di notazione, chiamiamo D il dominio di τ e C il suo codominio. Gli elementi di D sono della forma (z, x_1, x_2) , dove $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ e $\zeta(z) = x_1$. Quindi possiamo semplificare la loro rappresentazione alla seguente: $(z, \zeta(z), x)$. Analogamente, gli elementi di C possono essere scritti $(z, x, \zeta(z))$, dove $\varphi(x) = (\varphi \circ \zeta)(z)$.

Abbiamo $(\pi'_X \circ \tau)(z, \zeta(z), x) = \pi_X(z, \zeta(z), x) = (\zeta(z), x)$, quindi esiste $\tilde{\tau} : Z \times_Y X \rightarrow Z$ tale che $\tau(z, \zeta(z), x) = (\tilde{\tau}(z, x), \zeta(z), x)$. $\tilde{\tau}$ è continua, dato che $\tilde{\tau} = \pi'_Z \circ \tau \circ \iota$, dove $\iota : Z \times_Y X \rightarrow D$, $\iota(z, x) = (z, \zeta(z), x)$ è continua per la proprietà universale del prodotto fibrato (si verifica facilmente che si tratta in effetti di un omeomorfismo). Dato che τ è un omeomorfismo (e in particolare una funzione bigettiva), per ogni coppia (x, x') in $X \times_Y X$ $\tilde{\tau}$ induce una bigezione $\tau_{x, x'}$ fra Z_x e $Z_{x'}$. Dalla condizione 2 della definizione 11 risulta $\tau_{x, x''} = \tau_{x', x''} \circ \tau_{x, x'}$, mentre dalla condizione 1 risulta che $\tau_{x, x} = id_{Z_x}$ per ogni $x \in X$. Viceversa, dato $\tilde{\tau}$ che induce bigezioni sulle fibre e tale che $\tau_{x, x''} = \tau_{x', x''} \circ \tau_{x, x'}$, mostriamo che la funzione data da $\tau(z, \zeta(z), x) = (\tilde{\tau}(z, x), \zeta(z), x)$ è un dato di discesa. Le condizioni 1 e 2 della definizione 11 sono ovvie. In seguito mostriamo che τ è un omeomorfismo.

Osserviamo che τ si ottiene dal quadrato cartesiano (ossia il diagramma del prodotto fibrato) riportato qui sotto:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\pi'_Z} & Z \\
 \downarrow \pi'_X & \swarrow \tau & \nearrow \tilde{\tau} \circ \iota^{-1} \\
 & D & \\
 \downarrow \pi_X & \swarrow \pi_X & \downarrow \zeta \\
 X \times_Y X & \xrightarrow{p_2} & X
 \end{array}$$

In particolare, τ è continua.

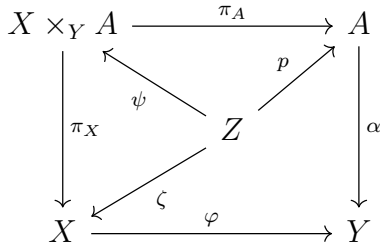
Definiamo $\theta : C \rightarrow D$, $\theta(z, x, \zeta(z)) = (\tau_{x, \zeta(z)}^{-1}(z), x, \zeta(z))$. Si verifica che θ è l'inversa di τ . Resta da vedere se è continua. Il problema si riduce, dunque, al mostrare la continuità di $\pi_Z \circ \theta$. Ma, per $(z, x, x') \in C$ si ha $(\pi_Z \circ \theta)(z, x, x') = \tau_{x, x'}^{-1}(z) = \tau_{x', x}(z) = (\pi'_Z \circ \tau)(z, x', x)$. Quindi $\pi_Z \circ \theta = \tau \circ \delta$, dove $\delta : C \rightarrow D$. $\delta(z, x, \zeta(z)) = (z, \zeta(z), x)$, che è continua. Concludiamo dunque che τ è un dato di discesa. Abbiamo ottenuto il seguente teorema.

Teorema 10. *Esiste una corrispondenza biunivoca fra i dati di discesa su Z e le funzioni continue $\tilde{\tau} : X \times_Y Z \rightarrow Z$ che inducono bigezioni sulle fibre $\tau_{x, x'}$ e tali che $\tau_{x, x} = id_{Z_x}$ e $\tau_{x, x''} = \tau_{x', x''} \circ \tau_{x, x'}$*

In quanto segue tenderemo ad usare la notazione $\tau \rightarrow \tilde{\tau}$ per questa corrispondenza. Notiamo velocemente che un morfismo g in $Top_{/X}$ fra (Z, τ) e (Z, τ') è compatibile con i dati di discesa se e solo se $g(\tilde{\tau}(z, x)) = \tilde{\tau}'(g(z, x))$ per ogni $(z, x) \in Z \times_Y X$.

Mantenendo le notazioni, viene naturale chiedersi se si possono trovare delle condizioni intrinseche necessarie e sufficienti affinché (Z, τ) sia un dato di discesa effettivo. Notiamo innanzitutto che il dato di discesa canonico su $\tilde{\varphi}(A)$ è definito da $(X \times_Y A) \times_Y X \rightarrow (X \times_Y A)$, $(x, a, x') \rightarrow (x', a)$. Vogliamo dunque vedere in quali condizioni possiamo trovare A partendo da (Z, τ) (che chiameremo semplicemente Z quando τ è chiaro dal contesto) tale che $Z \approx \tilde{\varphi}(A)$.

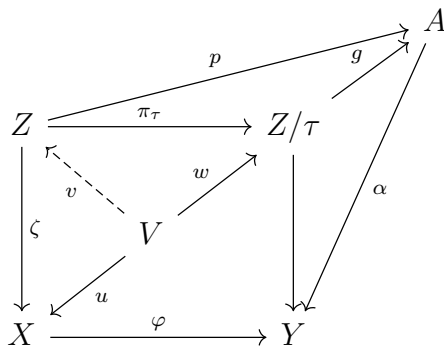
Per chiarire la situazione da studiare, consideriamo proprio la situazione $Z = \tilde{\varphi}(A)$. In questa maniera otterremo condizioni necessarie, che in seguito mostreremo anche sufficienti. Siano ξ il dato di discesa canonico su $\tilde{\varphi}(A)$, ψ un isomorfismo fra Z e $\tilde{\varphi}(A)$ e denotiamo $\pi_A \circ \psi$ con p . Vale dunque $\psi \circ \tilde{\tau} = \tilde{\xi} \circ \psi \times_Y id_X$.



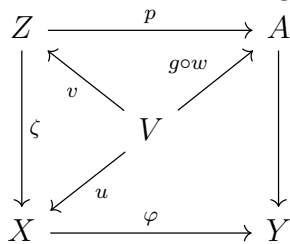
Possiamo tranquillamente supporre π_A surgettiva (e quindi anche p), in quanto il quadrato resta cartesiano anche sostituendo $Im(\pi_A)$ ad A . Denotiamo con R_τ la relazione di equivalenza su Z data da $z_1 R_\tau z_2$ se e solo se $(\phi \circ \zeta)(z_1) = (\phi \circ \zeta)(z_2)$ e $\tilde{\tau}(z_1, \zeta(z_2)) = z_2$. Siano $Z/\tau = Z/R_\tau$, $\pi_\tau: Z \rightarrow Z/\tau$ la proiezione canonica e $g: Z/\tau \rightarrow A$, $g \circ \pi_\tau = p$. Mostriamo la buona posizione di g : se $p(z_1) = p(z_2)$, allora $(\phi \circ \zeta)(z_1) = (\phi \circ \zeta)(z_2)$. Ponendo $\psi(z_1) = (\zeta(z_1), a_1)$ e osservando che $p = \pi_A \circ \psi$, si ottiene $p(z_1) = a_1 = p(z_2)$.

Possiamo dedurne che $\psi(z_2) = (\zeta(z_2), a_1) = \tilde{\xi}(\psi(z_1), \zeta(z_2))$, e quindi $z_2 = (\tilde{\tau}(z_1, \zeta(z_2)))$. Ossia $p(z_1) = p(z_2) \Rightarrow \pi_\tau(z_1) = \pi_\tau(z_2)$.

Siamo giunti al seguente diagramma commutativo. Un risultato notevole è che il quadrato è cartesiano. Poniamo V come nel diagramma e dimostriamo che v esiste ed è unica.



Sia v ottenuta dal seguente quadrato cartesiano:



Allora $g \circ w = p \circ v = g \circ \pi_\tau \circ v$. Poichè g è bigettiva, $w = \pi_\tau \circ v$. Quindi esiste v che faccia commutare il primo diagramma. Sia anche v' con la stessa proprietà. Allora $\zeta \circ v' = u$ e $p \circ v' = g \circ \pi_\tau \circ v' = g \circ w$, quindi v' fa commutare anche il secondo diagramma. Dato che v è ottenuta proprio da questo diagramma per proprietà universale, essa è unica. Ne risulta che $v' = v$. Quindi anche il primo quadrato è cartesiano. Possiamo adesso enunciare il teorema:

Teorema 11. (Z, τ) è effettivo se e solo se il seguente quadrato è cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi_\tau} & Z/\tau \\ \downarrow \zeta & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Dimostrazione. Se il quadrato è cartesiano, allora consideriamo ψ l'unico omeomorfismo tale che il seguente diagramma commuti. Muniamo $X \times_Y Z/\tau$ del dato di discesa canonico ξ e mostriamo che ψ è compatibile con τ e ξ .

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi_\tau} & Z/\tau \\ \downarrow \zeta & \swarrow \psi^{-1} & \nearrow \pi_Z \\ & X \times_Y Z/\tau & \\ \downarrow \zeta & \swarrow \pi_X & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Siano $(z, x) \in Z \times_Y X$. Allora $\tilde{\xi}(\psi(z), x) = \tilde{\xi}(\zeta(z), \pi_\tau(z), x) = (x, \pi_\tau(z))$. D'altro canto $\psi(\tilde{\tau}(z, x)) = (\zeta(\tilde{\tau}(z, x)), \pi_\tau(\tilde{\tau}(z, x))) = (x, \pi_\tau(z))$. Ciò termina la dimostrazione, in quanto l'implicazione opposta è stata dimostrata nella discussione precedente all'enunciato del teorema.

□

Vale anche il seguente lemma, che non dimostriamo (proposition 2 p.386 di [3]):

Lemma 6. *Mantenendo le notazioni del teorema 11, se φ è aperta, lo è anche π_τ . Se φ è propria, π_τ è chiusa.*

In seguito studieremo diverse classi di morfismi di discesa. Prima di procedere, ricordiamo che diciamo φ étale se per ogni punto di X esiste un suo intorno tale che φ ristretta ad esso induce un omeomorfismo sull'immagine, che a sua volta è un intorno dell'immagine del punto di partenza (in queste condizioni, X è uno spazio étalé su Y). La definizione è equivalente al dire che φ è aperta e che la diagonale è aperta in $X \times_Y X$. In particolare, rivestimenti, immersioni aperte e composizioni di étale sono étale. Chiamiamo la categoria degli spazi étalés su Y $TopE/Y$. Sia Φ' lo pseudofuntore dedotto da Φ che a uno spazio topologico Z associa $TopE/Z$. Che esso sia ben definito discende dal lemma seguente:

Lemma 7. *Sia il quadrato riportato in basso cartesiano. Se p è aperta (o étale), lo è anche p' .*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p'} & A \\ \downarrow t' & & \downarrow t \\ B & \xrightarrow{p} & C \end{array}$$

Dimostrazione. Identifichiamo Z a $A \times_Y B$. Una base di aperti è data dai $U \times_Y V$, con U aperto di A e V aperto di B . $p'(U \times_Y V) = t^{-1}(p(V))$, che è aperto. Questo dimostra la prima asserzione. Per quanto riguarda la seconda, consideriamo $z \in Z$ e V un intorno aperto di $t'(z)$ in B omeomorfo all'aperto di C $p(V)$. Poniamo $U = t^{-1}(p(V))$. Abbiamo visto che $p'|_U$ è aperta, continua e surgettiva. Mostriamo che è anche iniettiva

per completare la dimostrazione. Siano $(u, v), (u', v') \in U \times_Y V$ tali che $p'(u, v) = p'(u', v')$. Otteniamo quindi $v = v'$ e $p(u) = t(v) = t(v') = p(u')$. Tenendo conto della bigettività di $p|_U$, concludiamo che $u = u'$. \square

Teorema 12. *Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e surgettiva che induce un omeomorfismo $X/\varphi \rightarrow Y$. Allora $\tilde{\varphi}$ è un morfismo di discesa rispetto a Φ' .*

Dimostrazione. Siano A e B degli Y -spazi étalés. Sappiamo che φ induce una funzione $Hom_{TopE/Y}(A, B) \rightarrow Hom_{TopE/X}(\tilde{\varphi}(A), \tilde{\varphi}(B))$. Vogliamo costruirne un'inversa. Consideriamo dunque il seguente diagramma, dove h è compatibile con i dati di discesa canonici $(\tau_A, \text{rispettivamente } \tau_B)$:

$$\begin{array}{ccc}
 A \times_Y X & \xrightarrow{h} & B \times_Y X \\
 \downarrow p_A & \searrow p_X & \swarrow p'_X \\
 & X & \\
 & \downarrow \varphi & \\
 A & \xrightarrow{\chi} & B \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\
 & Y &
 \end{array}$$

Vogliamo mostrare l'esistenza e unicità di χ . Denotando $p'_B \circ h$ con h' e osservando che $p'_X \circ h = p_X$, otteniamo $h(a, x) = (h'(a, x), x)$ per ogni $(a, x) \in A \times_Y X$. Dato che φ è surgettiva, lo è anche p_A , quindi se esiste $\chi : A \rightarrow B$ tale che $\chi \circ p_A = h'$, allora essa è unica. Per l'esistenza, basta verificare che $h'(a, x) = h'(a, x')$ per ogni $x, x' \in X$ tali che $\varphi(x) = \varphi(x') = \alpha(a)$. Dalle condizioni di compatibilità con i dati di discesa, abbiamo $h'(\tilde{\tau}_A(a, x, x')) = \tilde{\tau}_B(h'(a, x), x, x') \Leftrightarrow h'(a, x') = h'(a, x)$, per ogni $(a, x, x') \in A \times_Y X \times_Y X$. Quindi χ esiste ed è unica. Se fosse continua, sarebbe immediato che $\tilde{\varphi}(\chi) = h$ e il teorema sarebbe dimostrato.

Procediamo con la dimostrazione della continuità. La strategia che seguiremo sarà dimostrare che la topologia quoziente indotta da p_A su A coincide con la topologia di A e sfruttare le uguaglianze $\chi \circ p_A = h' = p'_B \circ h$ (che sono delle uguaglianze di funzioni continue) per giungere alla conclusione.

Intorno ad ogni punto $a \in A$ scegliamo un intorno aperto U_a tale che α induca un omeomorfismo $U_a \rightarrow \alpha(U_a)$. Ragionando come nella dimostrazione del lemma precedente, otteniamo anche un omeomorfismo fra $V_a = p_A^{-1}(U_a)$ e $\varphi^{-1}(\alpha(U_a))$. Facciamo un riassunto della situazione nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 V_a & \xrightarrow{p_X|_{V_a}} & p_X(V_a) \\
 \downarrow p_A|_{V_a} & & \downarrow \varphi|_{p_X(V_a)} \\
 U_a & \xrightarrow{\alpha|_{U_a}} & \alpha(U)
 \end{array}$$

Sia $O \subseteq U_a$ tale che $p_A^{-1}(O)$ sia un aperto di V_a . Allora $\varphi^{-1}(\alpha(O))$ è un aperto di $p_X(V_a)$, e per la proprietà di φ sui quozienti risulta che O è un aperto di U_a . Questo dimostra che la topologia quoziente che $p_A|_{V_a}$ induce su U_a coincide con la topologia di sottospazio di U_a .

Sia adesso $O \subseteq A$ tale che $p_A^{-1}(O)$ sia aperto in $A \times_Y X$. Allora $p_A^{-1}(O) = p_A^{-1}(\cup_{a \in A} U_a \cap O) \Rightarrow O = \cup_{a \in A} p_A(p_A^{-1}(O) \cap V_a)$. Per quanto discusso in precedenza, siamo arrivati

ad esprimere O come unione di aperti di A . Quindi O è anch'esso un aperto di A . Dunque p_A induce su A la topologia quoziente, e quindi χ è continua. Ciò conclude la dimostrazione. \square

Le condizioni del teorema sono soddisfatte, ad esempio, se:

1. φ è continua, surgettiva e aperta
2. φ è continua, surgettiva e chiusa
3. X è il coprodotto di una famiglia di sottospazi di Y i cui interni ricoprono Y e φ è l'applicazione canonica.

Osserviamo che se φ è tale che assicura il fatto che la topologia di A nella dimostrazione sopra coincida con la topologia quoziente indotta da p_A (per esempio se φ fosse aperta o propria, oltre che soddisfacente le condizioni della tesi), allora φ è un morfismo di discesa anche rispetto a Φ .

I prossimi teoremi studieranno delle condizioni su φ nelle quali ogni dato di discesa su certe classi di X -spazi è effettivo. Questi risultati saranno di particolare interesse nella prossima sezione.

Teorema 13. *Sia φ continua e tale che ogni punto di Y possieda un intorno sopra il quale φ ammette una sezione continua. Allora ogni dato di discesa relativo a un X -spazio è effettivo.*

Dimostrazione. Sia (Z, ζ) un X -spazio munito di un dato di discesa τ . Per il teorema 11, si tratta di dimostrare che il seguente diagramma è cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi_\tau} & Z/\tau \\ \downarrow \zeta & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Sia ψ il morfismo canonico $Z \rightarrow X \times_Y Z/\tau$. Come $\psi(z) = \psi(z') \Rightarrow z' = \tilde{\tau}(z, \zeta(z')) = \tilde{\tau}(z, \zeta(z)) = z$, ψ è iniettiva. Sia adesso $(x, \pi_\tau(z)) \in X \times_Y Z/\tau$. Allora $\varphi(x) = (\varphi \circ \zeta)(z)$ implica $(z, x) \in Z \times_Y X$ e quindi $(x, \pi_\tau(z)) = \psi(\tilde{\tau}(z, x))$. Adesso che abbiamo mostrato che ψ è continua e bigettiva, completiamo la dimostrazione verificando che si tratta di un omeomorfismo.

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{\pi_Z} & Z/\tau & & \\ \downarrow \pi_X & \searrow \psi & \nearrow \pi_\tau & & \downarrow q \\ & & Z & & \\ & \swarrow \zeta & \searrow \varphi & & \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y & & \end{array}$$

Dimostriamo che ψ^{-1} è continua in ogni punto.

Siano $(x, u) = \psi(z) \in X \times_Y Z/\tau$ e $y = \varphi(\zeta(z))$. Per ipotesi y possiede un intorno aperto U in Y e una sezione continua di φ al di sopra di U $s : U \rightarrow X$. Denotando $\zeta^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ con V , osserviamo che tale sottospazio è saturo rispetto a R_τ . Consideriamo la funzione $\theta : V \rightarrow V$ tale che $\theta(z') = \tilde{\tau}(z', (s \circ \varphi \circ \zeta)(z'))$, che è continua in quanto composizione di funzioni continue.

Come $\pi_\tau(z_1) = \pi_\tau(z_2) \Rightarrow \theta(z_1) = \theta(z_2), \forall z_1, z_2 \in V$, esiste ed è unica $t : \pi_\tau(V) \rightarrow V$ tale che $t \circ \pi_\tau = \theta$. Quest'applicazione verifica $\pi_\tau \circ t \circ \pi_\tau = \pi_\tau \circ \theta = id_{Z/\tau} \circ \pi_\tau$, e quindi $\pi_\tau \circ t = id_{\pi_\tau(V)}$, in quanto π_τ è un epimorfismo. In particolare, t è una sezione di π_τ e $\varphi \circ \zeta \circ t = \varphi \circ s \circ q|_{\pi_\tau(V)} = q|_{\pi_\tau(V)}$. Si verifica facilmente che $\psi^{-1}|_{U \times_Y \pi_\tau(V)}(x', u') = \tilde{\tau}(t(u'), x')$. Ricordando che V è saturo rispetto a R_τ e aperto in Z , osserviamo che la sua immagine per π_τ è aperta in Z/τ . Quindi ψ^{-1} è continua intorno a (x, u) . Per l'arbitrarietà di tale punto giungiamo alla conclusione. \square

La dimostrazione precedente fornisce un metodo per dimostrare che certi dati di discesa sono effettivi, mettendo in rilievo il carattere locale della discesa.

Teorema 14. *Se φ è continua, surgettiva e possiede almeno una delle seguenti due proprietà: 1. φ è aperta ; 2. φ è propria e la diagonale di $X \times_Y X$ è chiusa (ossia è propria e separata), allora ogni dato di discesa su un X -spazio étalé (Z, ζ) è effettivo.*

Dimostrazione. Sia τ un dato di discesa su Z . Per il teorema 11, si tratta di dimostrare che il seguente diagramma è cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi_\tau} & Z/\tau \\ \downarrow \zeta & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Sia ψ il morfismo canonico $Z \rightarrow X \times_Y Z/\tau$. Ragionando come nella dimostrazione del teorema precedente, ψ è bigettiva.

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{\pi_Z} & Z/\tau \\ \downarrow \pi_X & \swarrow \psi & \nearrow \pi_\tau \\ & Z & \\ \downarrow \zeta & \swarrow \psi & \nearrow \pi_\tau \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \downarrow q & \end{array}$$

La strategia che seguiremo è coprire $X \times_Y Z$ di insiemi aperti tali che la restrizione di ψ^{-1} ad essi sia continua. Se così fosse, ψ^{-1} sarebbe continua intorno ad un qualsiasi punto, e quindi continua su tutto lo spazio. Si tratta essenzialmente della strategia usata nel teorema 13.

Dimostriamo prima il caso 1 (φ aperta).

Siano $z \in Z$ e $x = \zeta(z)$. Allora esiste un intorno aperto U di x e una sezione continua di ζ $s : U \rightarrow Z$ tale che $s(x) = z$. Osserviamo che le applicazioni $U \times_Y U \rightarrow Z \times_Y Z$ date da $(u, u') \rightarrow (s(u), s(u'))$ e $(u, u') \rightarrow (s(u), \tilde{\tau}(s(u), u'))$ sono due sezioni continue di $\zeta \times_Y \zeta$ che coincidono su Δ_U , e quindi anche su un intorno W della diagonale (questo deriva dal fatto che ζ è étalé). Sia V un intorno di x in U tale che $V \times_Y V \subseteq W$. Come π_τ è aperta (lemma 6), $V \times_Y \pi_\tau(s(V))$ è aperto in $X \times_Y Z$. Sia $(v, \pi_\tau(s(v'))) \in V \times_Y \pi_\tau(s(V))$. Si ha $s(v) = \tilde{\tau}(s(v'), v)$, che implica $\pi_\tau(s(v)) = \pi_\tau(s(v'))$. Da questo risultato inferiamo $(v, \pi_\tau(s(v'))) = (v, \pi_\tau(s(v))) = \psi(s(v))$. Quindi, localmente, $\psi^{-1} = s \circ p_X$.

Dimostriamo adesso il secondo caso φ è (propria e separata).

Siano $z \in Z$, $x = \zeta(z)$ e $y = \varphi(x)$. L'applicazione $x' \rightarrow \tilde{\tau}(z, x')$ è una sezione di ζ sulla fibra $X_y = \varphi^{-1}(y)$. Dato che φ è propria e separata, tale fibra è compatta e T_2 . Per il lemma riportato qui sotto, esiste un intorno aperto U di X_y in X e una sezione continua di ζ $s : U \rightarrow Z$ che prolunga la sezione di partenza. Come ζ è étalé, lo stesso

si può dire anche di s , in quanto sua sezione. Per il lemma 6, π_τ è chiusa. Come $s(U)$ contiene la fibra di $\pi_\tau(z)$ e l'immagine del complementare di $s(U)$ attraverso π_τ è chiusa, esiste un intorno aperto V di $\pi_\tau(z)$ in Z/τ tale che la sua preimmagine sia contenuta in $s(U)$. Allora $W = \zeta^{-1}(U) \cap \pi_\tau^{-1}(V)$ è un intorno di z contenuto in $s(U)$.

Sia $(x', u) = \psi(z')$ in $U \times_Y V = \psi(W)$. Come $z' \in W$, abbiamo $z' = s(x')$. Quindi localmente $\psi^{-1} = \text{circp}_X$. Con questo abbiamo concluso la dimostrazione del teorema. \square

Lemma 8. *Siano E, B spazi topologici, $p : E \rightarrow B$ étale, A un sottospazio compatto di B tale che ogni due punti distinti di A possiedano intorni in B disgiunti e $s : A \rightarrow E$ una sezione continua di p . Allora esiste un aperto U di B contenente A e una sezione di p $s' : U \rightarrow E$ che prolunga s .*

Non dimostriamo questo lemma. Si tratta di un caso particolare del teorema 2 p.37 di [3].

Il teorema 12 vale anche se sostituiamo a Φ' lo pseudofuntore definito nella maniera oramai ovvia e che lega i rivestimenti su Y ai rivestimenti su X Φ_R (in quanto i rivestimenti sono casi particolari di spazi étalés). La buona posizione di Φ_R deriva dal lemma seguente:

Lemma 9. *Sia il quadrato riportato in basso cartesiano. Se B è un rivestimento di C , Z è un rivestimento di A .*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p'} & A \\ \downarrow t' & & \downarrow t \\ B & \xrightarrow{p} & C \end{array}$$

Dimostrazione. Sia $a \in A$. Allora esiste un intorno U di $t(a)$ aperto in C tale che $V = p^{-1}(U) \approx U \times D$, dove D è uno spazio discreto. Allora $t'^{-1}(V) \approx t^{-1}(U) \times D$ e p' induce omeomorfismi come richiesto. \square

Di particolare interesse sono gli spazi semi-localmente semplicemente connessi, ossia spazi localmente connessi per archi dove ogni punto possiede un intorno nel quale ogni laccio è contraibile nello spazio ambiente a un punto. Per semplificare la terminologia, seguiremo il [3] nella bibliografia e chiameremo tali spazi slacciabili. La proprietà più importante di tali spazi è l'esistenza di rivestimenti universali, che stabilisce un legame molto forte fra i gruppidi fondamentali e la teoria dei loro rivestimenti.

Questo legame ha conseguenze importanti anche in quanto riguarda la discesa topologica, come vediamo nel teorema seguente:

Teorema 15. *Supponiamo Y slacciabile e φ continua, surgettiva, aperta e avente la proprietà del sollevamento di cammini. Allora ogni dato di discesa su un rivestimento di X è effettivo e lo spazio quoziente è esso stesso un rivestimento.*

Dimostrazione. Visto che stiamo nelle ipotesi del teorema 14, la prima asserzione ne discende direttamente. Non dimostriamo la seconda asserzione, che si trova completa in [3] (proposition 7 p. 394). \square

Sempre relativamente alla discesa dei rivestimenti presentiamo senza dimostrazione un risultato simile al teorema precedente, che sostituisce all'essere slacciabile delle condizioni più tecniche. Maggiori dettagli si trovano in [3] p.391-393. Il ruolo del teorema 14 è analogo.

Teorema 16. *Se φ è continua, surgettiva, propria e separata e vale una delle due condizioni 1 e 2, allora ogni dato di discesa relativo a un rivestimento di X è effettivo e lo spazio quoziente è un rivestimento di Y .*

1. *Le fibre di φ e lo spazio $X \times_Y X$ possiedono la proprietà della locale connessione*
2. *Le fibre di φ sono finite, Δ_X è aperta in $X \times_Y X$ e lo spazio $X \times_Y X - \Delta_X$ è localmente connesso*

Capitolo 3

Discesa e gruppoide fondamentale

3.1 Discesa del gruppoide fondamentale

Mantenendo le notazioni della sezione precedente e supponendo X e Y non vuoti, sia G il gruppoide coequalizzatore di

$\varpi(X \times_Y X) \begin{matrix} \xrightarrow{\varpi(p_2)} \\ \xrightarrow{\varpi(p_1)} \end{matrix} \varpi(X)$ e sia ϕ l'applicazione che rende il diagramma riportato in

basso commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \varpi(X \times_Y X) & \begin{matrix} \xrightarrow{\varpi(p_2)} \\ \xrightarrow{\varpi(p_1)} \end{matrix} & \varpi(X) & \xrightarrow{\varpi(\varphi)} & \varpi(Y) \\ & & \downarrow \text{coeq} & \nearrow \phi & \\ & & G & & \end{array}$$

In seguito identificheremo l'insieme dei vertici di G con l'immagine di φ . In questa sezione studieremo l'impatto di certe proprietà topologiche di $X \xrightarrow{\varphi} Y$ sulla relazione di G con $\varpi(Y)$. Di particolare interesse saranno i casi dove ϕ è un isomorfismo e G è transitivo. In questo caso potremo applicare il teorema 6 per ottenere una descrizione esplicita del gruppo fondamentale di Y in un suo qualsiasi punto. Questo è il punto di partenza delle prossime sezioni, dove tratteremo varie generalizzazioni del teorema di Seifert-van Kampen.

Teorema 17. *Se X è localmente connesso per archi, Y è connesso e φ è suriettiva e induce un omeomorfismo $X/\varphi \rightarrow Y$, allora G è transitivo.*

Dimostrazione. Sia $\Gamma(p_1, p_2)$ l'armatura di p_1, p_2 (ricordiamo che le frecce sono le frecce di $\varpi(X)$ insieme agli oggetti di $X \times_Y X$). Se mostriamo che essa è connessa, possiamo giungere alla conclusione per il lemma 2. Sia C una componente connessa di $\Gamma(p_1, p_2)$ vista come sottospazio di X . Per ogni $x \in C$, C contiene la componente connessa per archi di x , che è aperta per la locale connessione per archi di X . Dunque C è aperta in X . Similmente, per $x \in \bar{C}$ esiste un intorno connesso per archi che interseca C , e quindi $x \in C$, ergo C è anche chiusa in X .

Siccome $x \in C$ e $\varphi(x') = \varphi(x)$ implica $x' \in C$, segue che C è saturo per la relazione di equivalenza indotta da φ . In particolare, dato che la topologia di Y coincide con la topologia quoziente per φ , $\phi(C)$ è un sottospazio aperto, chiuso e non vuoto in Y . Per la connessione di Y , concludiamo che $\varphi(C) = Y$. Quindi per ogni punto di X esiste un punto di C che abbia la stessa immagine di x , e quindi $\Gamma(p_1, p_2)$ è connessa. \square

Teorema 18. *Se X è localmente connesso per archi, Y è slacciabile e connesso e φ è suriettiva e la topologia di Y coincide con la topologia quoziente per φ . Allora $\phi : G \rightarrow \varpi(Y)$ è suriettiva.*

Dimostrazione. Dato che sappiamo che ϕ è suriettiva sugli oggetti, basta verificare che lo sia sulle frecce. La strategia che seguiremo è mostrare che ϕ induce epimorfismi sui gruppi di isotropia e giungere alla conclusione sfruttando la transitività di G .

A tale scopo, sia y_0 un punto di Y e sia $H = \pi_1(Y, y_0) \cap \phi(G)_{y_0}$. Usando il fatto che Y è slacciabile, esistono un rivestimento connesso (T, θ) di Y e un punto $t_0 \in \theta^{-1}(y_0) = T[y_0]$ il cui fissatore rispetto all'azione di $\pi_1(Y, y_0)$ sia H .

Sia adesso $x \in X$. Per il teorema precedente G è transitivo, dunque esiste una freccia $u : y_0 \rightarrow \varphi(x)$ in $\phi(G)$. Rialziamo u lungo θ con punto di partenza t_0 e denotiamo con s_x il suo punto di arrivo (che è nella fibra $T_{\varphi(x)}$). Esso non dipende dalla scelta di u , in quanto H fissa t_0 . Consideriamo la funzione $s : X \rightarrow T$, $s(x) = s_x$. Dato che $\varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow s_x = s_{x'}$, possiamo fattorizzare s per Y come nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & T \\ \downarrow \varphi & \nearrow \sigma & \\ Y & & \end{array} .$$

Siccome $\theta \circ \sigma \circ \varphi = \theta \circ s = \varphi$ e φ è un epimorfismo (in quanto funzione suriettiva), otteniamo $\theta \circ \sigma = id_Y$. Sia U un aperto di T tale che $\theta|_U$ sia un omeomorfismo sull'immagine. Allora $\sigma(\sigma^{-1}(U) = \theta|_U^{-1}(\sigma^{-1}U))$. Se σ fosse continua, la sua immagine sarebbe dunque aperta. Ma ricordandoci che $\theta = \theta \circ (\sigma \circ \theta)$ e che la diagonale di $T \times_Y T$ è chiusa, avremmo che $(id_T \times_Y (\sigma \circ \theta))^{-1}(\Delta_T) = \sigma(Y)$ sarebbe chiusa in Y . Ciò implicherebbe che si tratta di un omeomorfismo fra T e Y , in quanto T è connesso. Siccome $\pi_1(Y, y_0)$ fissa y_0 (che possiamo identificare con t_0), avremmo proprio $H = \pi_1(Y, y_0)$.

Ci resta da mostrare che s è continua per verificare che anche σ lo sia. Ma l'applicazione $id_X \times_Y s : X \rightarrow X \times_Y T$ è compatibile con le operazioni canoniche di $\varpi(X)$ su X e $X \times_Y T$ (che per il lemma 7 è un rivestimento di X), e quindi è continua (lemma 1 p.312 di [3]). Allora s è continua, in quanto è composizione di funzioni continue, e quindi lo è anche σ per le proprietà dei quozienti.

Abbiamo dimostrato che ϕ induce isomorfismi sui gruppi di isotropia. Sia u una freccia di $\varpi(Y)$. Dato che G è transitivo, esiste una freccia $\phi(v)$ in $\phi(G)$ con la stessa origine e lo stesso termine di u . Allora $u \circ \phi(v)^{-1}$ sarebbe un laccio in $\varpi(Y)$. Per quanto dimostrato sopra, esiste un laccio w in G tale che $\phi(w) = u \circ \phi(v)^{-1}$. Quindi $u = \phi(wv)$. Questo conclude la dimostrazione \square

Il prossimo teorema tratta invece dell'iniettività di ϕ . Esso riposa su un lemma tecnico, la cui dimostrazione può essere trovata in [3] (lemme 2 p. 396).

Lemma 10. *Supponiamo X slacciabile, $X \times_Y X$ localmente connesso per archi e φ tale che ogni dato di discesa relativo a un rivestimento di X sia effettivo e che lo spazio quoziente sia un rivestimento di Y . Sia T un insieme munito di una funzione $t : T \rightarrow Y$ e di un'operazione del gruppoide G relativa a tale funzione. Allora esiste ed è unica una topologia su T tale che (T, t) sia un rivestimento di Y e che l'operazione di G su T si fattorizzi attraverso un'operazione di $\varpi(Y)$*

Teorema 19. *Nelle ipotesi del lemma precedente, ϕ è iniettivo.*

Dimostrazione. Siano u, v frecce di G tali che $\phi(u) = \phi(v)$. Come ϕ induce l'identità sugli oggetti, u e v hanno la stessa origine y e lo stesso termine w . Sia T l'insieme di frecce di

G con origine y e sia $t : T \rightarrow Y$ la restrizione a T dell'applicazione termine. G opera per composizione a destra su T , e per il lemma 10 u e v inducono la stessa azione. Facendoli agire sulla freccia identica in y , si ottiene $u = v$ e il teorema è dimostrato. \square

Mettendo insieme i teoremi 18 e 19, otteniamo il seguente teorema fondamentale:

Teorema 20. *Siano X, Y slacciabili e supponiamo φ continua e suriettiva e che almeno una delle seguenti tre condizioni sia vera:*

1. φ è propria, separata, a fibre localmente connesse e $X \times_Y X$ è localmente connesso per archi;
2. φ è propria, separata, a fibre finite, Δ_X è aperta in $X \times_Y X$ e il suo complementare è localmente connesso per archi;
3. φ è aperta e possiede la proprietà di sollevamento dei cammini.

Allora ϕ è un isomorfismo.

Le condizioni del teorema 20 sono abbastanza tecniche. Concludiamo la sezione con un risultato simile nella portata, ma con ipotesi più intuitive. Di particolare interesse è la dimostrazione di questo risultato, che utilizza metodi che non fanno riferimento alla discesa.

Teorema 21. *Se ogni punto di Y possiede un intorno tale che φ abbia una sezione continua al di sopra di esso, allora ϕ è un isomorfismo di gruppidi.*

Dimostrazione. Sia \mathfrak{A} un ricoprimento aperto di Y tale che per ogni $A \in \mathfrak{A}$ esiste una sezione s_A di φ al di sopra di A . Grazie a queste sezioni possiamo sollevare i cammini localmente a cammini di X , ma sorgono problemi nell'incollare assieme i sollevamenti locali per generarne uno globale. Questo problema può essere evitato principalmente in due maniere: possiamo considerare su (X, φ) una struttura più ricca (come quella di rivestimento), oppure possiamo passare il problema al gruppoide coequalizzatore. Infatti, per $c, d \in \varpi(X)$, vale che $coeq(c)$ e $coeq(d)$ sono componibili se e solo se $\varpi(\varphi)(c)$ e $\varpi(\varphi)(d)$ lo sono.

Mostriamo che ϕ è suriettiva partendo dalla discussione informale svolta sopra. Sia γ un cammino in Y . Per il lemma di Lebesgue, posto $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande ogni intervallo della forma $[k/n, (k+1)/n]$ (con $0 \leq k \leq n-1$) è contenuto all'interno di un certo $\gamma^{-1}(A_k)$, per $A_k \in \mathfrak{A}$. Ponendo $\gamma_k = s_{A_k} \circ \gamma|_{[k/n, (k+1)/n]}$ e usando come consueto le parentesi quadre per denotare le classi di omotopia ad estremi fissi, otteniamo $[\gamma] = \phi(coeq([\gamma_0]) \dots coeq([\gamma_{n-1}]))$.

Mostriamo ora che ϕ è iniettiva. Siano $u, v \in G$ tali che $\phi(u) = \phi(v)$. Dato che G è generato dall'immagine di coeq , esistono cammini in X in modo da poter scrivere $u = \text{coeq}([c_1]) \dots \text{coeq}([c_n])$ e $v = \text{coeq}[d_1] \dots \text{coeq}([d_n])$. Poniamo ora $c = \varphi(c_1) \dots \varphi(c_n)$, $d = \varphi(d_1) \dots \varphi(d_n)$ e osserviamo che dall'ipotesi $\phi(u) = \phi(v)$ discende $[c] = [d]$. Sia dunque H un'omotopia in Y che lega c a d .

Per il lemma di Lebesgue, esiste un $m \in \mathbb{N}$ abbastanza grande tale che per ogni $(j, k) \in [0, m-1] \times [0, m-1] \cup \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ esista un $A_{j,k} \in \mathfrak{A}$ con la proprietà $[j/m, (j+1)/m] \times [k/m, (k+1)/m] \subseteq H^{-1}(A_{j,k})$. Per semplificare la notazione, poniamo $s_{j,k} = s_{A_{j,k}}$ e consideriamo i seguenti cammini (dove $t \in [0,1]$):

1. $c_{j,k}(t) = s_{j,k}(H((j+t)/m, k/m))$
2. $d_{j,k}(t) = s_{j,k}(H((j+t)/m, (k+1)/m))$
3. $h_{j,k}^0(t) = s_{j,k}(H(j/m, (k+t)/m))$
4. $h_{j,k}^1(t) = s_{j,k}(H((j+1)/m, (k+t)/m))$

Dimostriamo che $[c_{j,k}h_j, k^1] = [h_j, k^0d_{j,k}]$. Siano \bar{c} il cammino in $[0,1] \times [0,1]$ ottenuto per giustaposizione da $t \rightarrow (t,0)$ e $t \rightarrow (1,t)$ e \bar{d} il cammino ottenuto per giustaposizione da $t \rightarrow (0,t)$ e $t \rightarrow (t,1)$. Questi cammini sono omotopi a estremi fissi (basta considerare $(s,t) \rightarrow (1-s)\bar{c}(t) + s\bar{d}(t)$). Siccome $[c_{j,k}h_j, k^1] = [H_{j,k} \circ \bar{c}]$ e $[h_j, k^0d_{j,k}] = [H_{j,k} \circ \bar{d}]$, dove $H_{j,k}(s,t) = s_{j,k}(H((j+s)/m, (k+t)/m))$, giungiamo alla tesi di questo risultato intermedio.

Siamo quasi giunti al termine della dimostrazione. Rimane da "incollare" tutto nel coequalizzatore. Siccome $\varphi \circ c_{j,k} = \varphi \circ d_{j-1,k}$ e $\varphi \circ h_{j,k}^0 = \varphi \circ h_{j,k-1}^1$, ricordandoci la costruzione del coequalizzatore otteniamo $\phi([c_{j,k}]) = \phi([d_{j-1,k}])$ e $\phi([h_{j,k}^0]) = \phi([h_{j,k-1}^1])$. Similmente, è facile vedere che:

$$u = \text{coeq}([c_{0,0}]) \dots \text{coeq}([c_{m-1,0}]) = \text{coeq}([c_{0,0}]) \dots \text{coeq}([c_{m-1,0}]) \text{coeq}([h_{m-1,0}^1]) \dots \text{coeq}([h_{m-1,m-1}^1])$$

$$v = \text{coeq}([d_{0,m-1}]) \dots \text{coeq}([d_{m-1,m-1}]) = \text{coeq}([h_{0,0}^0]) \dots \text{coeq}([h_{0,m-1}^0]) \text{coeq}([d_{0,m-1}]) \dots \text{coeq}([d_{m-1,m-1}])$$

Ricordando il risultato intermedio si vede immediatamente per induzione che

$$\begin{aligned} & \text{coeq}([c_{0,0}]) \dots \text{coeq}([c_{m-1,0}]) \text{coeq}([h_{m-1,0}^1]) \dots \text{coeq}([h_{m-1,m-1}^1]) = \\ & = \text{coeq}([h_{0,0}^0]) \dots \text{coeq}([h_{0,m-1}^0]) \text{coeq}([d_{0,m-1}]) \dots \text{coeq}([d_{m-1,m-1}]) \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato quindi che $\phi(u) = \phi(v) \Rightarrow u = v$. □

3.2 Il teorema di Van Kampen

Per meglio apprezzare l'utilizzo dei metodi presentati precedentemente, premettiamo il teorema di Seifert - van Kampen classico, la cui dimostrazione è analoga a quella del teorema 21. Esso è un teorema utilissimo nel calcolare i gruppi fondamentali e conosce molte applicazioni. Tuttavia, le condizioni imposte dall'ipotesi sono molto restrittive e precludono utilizzi che l'intuito reputa ovvi, come il calcolo del gruppo fondamentale del cerchio partendo da due semicirconferenze che lo ricoprono.

In questo quadro, i teoremi 20 e 21 possono essere visti come potenti generalizzazioni al gruppoide fondamentale del teorema di Seifert - van Kampen, che non soffrono delle limitazioni dello stesso. Ricordando il teorema 6 sui gruppi di isotropia di gruppoidi coequalizzatori, essi forniscono il quadro completo per ottenere un risultato analogo al teorema di Seifert - van Kampen riportato sotto, ma considerevolmente più generale e prontamente applicabile nelle computazioni.

Teorema 22 (Seifert - van Kampen). *Siano X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi, e A, B due aperti connessi per archi di X che ricoprono X e con l'intersezione connessa. Sia $x_0 \in A \cap B$. Allora $\pi_1(X)$ è isomorfo al prodotto libero di $\pi_1(A)$ e $\pi_1(B)$ amalgamato da $\pi_1(A \cap B)$.*

In seguito manteniamo le notazioni della sezione precedente, ossia consideriamo $X.Y$ spazi topologici non vuoti, φ continua, G il gruppoide coequalizzatore di

$$\varpi(X \times_Y X) \begin{matrix} \xrightarrow{\varpi(p_2)} \\ \xrightarrow{\varpi(p_1)} \end{matrix} \varpi(X) \quad \text{e } \phi \text{ l'applicazione che rende il diagramma riportato in basso}$$

commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \varpi(X \times_Y X) & \begin{matrix} \xrightarrow{\varpi(p_2)} \\ \xrightarrow{\varpi(p_1)} \end{matrix} & \varpi(X) & \xrightarrow{\varpi(\varphi)} & \varpi(Y) \\ & & \downarrow \text{coeq} & \nearrow \phi & \\ & & G & & \end{array}$$

Definizione 13. *Diciamo che φ soddisfa la proprietà di van Kampen (in seguito la denoteremo VK) se e solo se essa è suriettiva, induce un isomorfismo da X/φ a Y e ϕ è un isomorfismo fra il gruppoide coequalizzatore G e il gruppoide fondamentale di Y .*

Nella discussione che segue supponiamo che φ soddisfi la proprietà VK. Scriveremo anche Γ intendendo l'armatura della coppia $(\varpi(p_1), \varpi(p_2))$.

Denotiamo con $p_{i,j}$ il morfismo che fa commutare il seguente diagramma, dove le frecce che appaiono sono le proiezioni:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{p_1} & X \\ & \swarrow p_{i,j} & \nearrow p_i \\ & X \times_Y X \times_Y X & \\ & \swarrow p_j & \searrow \\ X & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array}$$

Chiamiamo dato di van Kampen di φ un dato $(a, b, c_1, c_2, T, i_0, \theta, \gamma_{1,2}, \gamma_{2,3}, \gamma_{1,3})$, dove (a, b, c_1, c_2, T, i_0) forma un equipaggiamento di base della coppia $(\varpi(p_1), \varpi(p_2))$, θ è una sezione della proiezione degli oggetti di $\varpi(X \times_Y X \times_Y X)$ sulle orbite e $\gamma_{s,t}$ è una funzione che associa a ogni $k \in \pi_0(X \times_Y X \times_Y X)$ una classe di omotopia di cammini in $X \times_Y X$ che lega $(p_{s,t} \circ c)(k)$ a $(b \circ j)(\bar{p}_{s,t}(k))$. Si osserva che le triple di forma $((p_{1,2}(c(k)), 1), (p_{2,3}(c(k)), 1), (p_{1,3}(c(k)), -1))$ e le classi di cammini $(\gamma_{1,2}(k), \gamma_{2,3}(k), \gamma_{1,3}(k))$ completano l'equipaggiamento.

Continuiamo seguendo la linea della seconda sezione del primo capitolo. Quindi definiamo:

1. τ è l'unico morfismo di quiver che a $i \in \pi_0(X)$ associa $\varphi(a(i))$ e a $j \in \pi_0(X \times_Y X)$ associa la classe di omotopia di cammini $\varpi(\varphi(c_1(j)))^{-1}\varpi(\varphi(c_2(j)))$ che lega $\varphi(a(\pi_0(pr_1)(j)))$ a $\varphi(a(\pi_0(pr_2)(j)))$;
2. Per $j \in \pi_0(X \times_Y X)$ $\alpha_j = \text{int}(c_1(j))^{-1} \circ \varpi(pr_1)$ è un morfismo $\pi_1(X \times_Y X, b(j)) \longrightarrow \pi_1(X, a(\pi_0(pr_1)(j)))$;
3. Per $j \in \pi_0(X \times_Y X)$ $\beta_j = \text{int}(c_2(j))^{-1} \circ \varpi(pr_2)$ è un morfismo $\pi_1(X \times_Y X, b(j)) \longrightarrow \pi_1(X, a(\pi_0(pr_2)(j)))$;
4. Per $i \in \pi_0(X)$ sia δ_i l'immagine per $\bar{\tau}$ dell'unica classe di cammini d_i in T che lega i_0 a i ;
5. Per $k \in \pi_0(X \times_Y X \times_Y X)$ il laccio

$$\lambda_1(k) = c_1(\pi_0(pr_{1,3})(k))^{-1}\varpi(pr_1)(\gamma_{1,3}(k))^{-1}\varpi(pr_1)(\gamma_{1,2}(k))c_1(\pi_0(pr_{1,2})(k));$$
6. Per $k \in \pi_0(X \times_Y X \times_Y X)$ il laccio

$$\lambda_2(k) = c_2(\pi_0(pr_{1,2})(k))^{-1}\varpi(pr_2)(\gamma_{1,2}(k))^{-1}\varpi(pr_1)(\gamma_{2,3}(k))c_1(\pi_0(pr_{2,3})(k));$$
7. Per $k \in \pi_0(X \times_Y X \times_Y X)$ il laccio

$$\lambda_3(k) = c_2(\pi_0(pr_{2,3})(k))^{-1}\varpi(pr_2)(\gamma_{2,3}(k))^{-1}\varpi(pr_2)(\gamma_{1,3}(k))c_2(\pi_0(pr_{1,3})(k)).$$

Adesso ci troviamo nelle condizioni per applicare il teorema 6. Ricordiamo che indichiamo con \mathfrak{F} il funtore che a un insieme S ne associa il gruppo libero con base S e che a ogni funzione g associa il morfismo ottenuto per proprietà universale da:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(S) & \xrightarrow{\mathfrak{F}(g)} & \mathfrak{F}(T) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

Teorema 23 (Teorema di van Kampen generalizzato). *Supponiamo che Y sia connesso per archi e che φ soddisfi la condizione VK. Allora esiste un unico morfismo*

$$\Xi : (*_{i \in \pi_0(X)} \pi_1(X, a(i)) * \mathfrak{F}(\pi_0(X \times_Y X))) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(a(i_0)))$$

tale che, per $i \in \pi_0(X)$, $m \in \pi_1(X, a(i))$ e $j \in \pi_0(X \times_Y X)$, valga:

$$\Xi(m) = \delta_i \varpi(\varphi)(m) \delta_i^{-1}$$

$$\Xi(j) = \delta_{\pi_0(pr_1)(j)} \tau(j) \delta_{\pi_0(pr_2)(j)}^{-1}$$

Esso è suriettivo e il suo nucleo è il più piccolo sottogruppo normale di $(*_{i \in \pi_0(X)} \pi_1(X, a(i)) * \mathfrak{F}(\pi_0(X \times_Y X)))$ che contiene, per $j' \in T$, $j \in \pi_0(X \times_Y X)$, $m \in \pi_1(X \times_Y X, b(j))$ e $k \in \pi_0(X \times_Y X \times_Y X)$, gli elementi:

$$\begin{aligned} & j' \\ & \alpha_j(m) j \beta_j(m)^{-1} j^{-1} \\ & \lambda_1(k) \pi_0(pr_{1,2})(k) \lambda_2(k) \pi_0(pr_{2,3})(k) \lambda_3(k) \pi_0(pr_{1,3})(k)^{-1} \end{aligned}$$

3.3 Il teorema di van Kampen e i ricoprimenti

In questa ultima sezione riportiamo la generalizzazione del teorema di van Kampen nell'ambito del legame tra il gruppo fondamentale dello spazio e i gruppi fondamentali dei sottospazi che insieme ne formano un ricoprimento. Poniamo quindi Y uno spazio topologico connesso per archi e non vuoto, \mathfrak{A} un ricoprimento di Y formato da sottospazi non vuoti e connessi per archi, $X = \sqcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ e $\varphi : X \rightarrow Y$ il morfismo canonico ottenuto dalle inclusioni $\iota_A : A \rightarrow Y$ per $A \in \mathfrak{A}$. Imponiamo inoltre una relazione di buon ordinamento su \mathfrak{A} . Per il resto, manteniamo le notazioni della sezione precedente.

Siamo interessati al caso nel quale φ soddisfa la proprietà di van Kampen. Questa richiesta è meno restrittiva di quanto possa sembrare a prima vista, in quanto è verificata nei seguenti due casi molto importanti:

1. la famiglia degli interni degli elementi di \mathfrak{A} forma un ricoprimento aperto di Y ;
2. Y è slacciabile, \mathfrak{A} è un ricoprimento chiuso e localmente finito e le intersezioni a due a due di elementi di \mathfrak{A} sono localmente connesse per archi.

Per poter applicare il teorema di van Kampen in questa situazione, dovremo scegliere un dato di van Kampen relativo a φ . Notiamo che $(A) = \pi_0(X)$ e che le componenti connesse per archi di $X \times_Y X$ sono della forma $(\varphi^{-1}(V) \cap \text{Im}(\iota_A)) \times_Y (\varphi^{-1}(V) \cap \text{Im}(\iota_B))$ per $A, B \in \mathfrak{A}$ e $V \in \pi_0(A \cap B)$. Per snellire la notazione denotiamo gli oggetti di forma $\varphi^{-1}(V) \cap \text{Im}(\iota_A)$ con V_A e poniamo $\Gamma = \Gamma(\varpi(pr_1), \varpi(pr_2))$. Scegliamo adesso:

1. per ogni $i \in \mathfrak{A}$ un suo elemento $a(i)$;
2. per ogni $j = V_A \times_Y V_B \in \pi_0(X \times_Y X)$ un suo elemento $b(j)$;
3. per ogni $j \in \pi_0(X \times_Y X)$ una classe di omotopia di cammini $c_1(j)$ che lega $pr_1(b(j))$ a $a(\pi_0(pr_1)(j))$;
4. per ogni $j \in \pi_0(X \times_Y X)$ una classe di omotopia di cammini $c_2(j)$ che lega $pr_2(b(j))$ a $a(\pi_0(pr_2)(j))$;
5. T un albero massimale del grafo associato al quiver Δ ottenuto da Γ prendendo tutti gli oggetti e solo le frecce di forma $V_A \times_Y V_B$ con $A < B$. Esso è anche un albero massimale in Γ , in quanto è un albero connesso che contiene tutti gli oggetti;
6. $i_0 \in \mathfrak{A}$;
7. per ogni $A, B, C \in \mathfrak{A}$ e $k \in \pi_0(A \cap B \cap C)$ un elemento $\theta(k) \in k$ (notiamo che gli elementi di $\pi_0(X \times_Y X \times_Y X)$ si identificano con le componenti connesse in Y delle intersezioni a tre degli elementi di \mathfrak{A});
8. per ogni $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A}$, $k \in \pi_0(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ e $(s, t) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ una classe di omotopia di cammini in $A_s \cap A_t$ che lega $\theta(k)$ a $b(\pi_0(pr_{s,t})(\tilde{k}))$, dove \tilde{k} è l'elemento di $\pi_0(X \times_Y X \times_Y X)$ corrispondente a k .

Procedendo quindi come nella sezione precedente e mantenendone le notazioni otteniamo una riformulazione del teorema di van Kampen per i ricoprimenti. Per una discussione con tutti i dettagli rimandiamo al [3] (sezione 5 del capitolo IV).

Teorema 24 (Teorema di van Kampen per i ricoprimenti). *Esiste un unico morfismo*

$$\Xi : (*_{i \in \mathfrak{A}} \pi_1(i, a(i)) * \mathfrak{F}(\pi_0(X \times_Y X))) \longrightarrow \pi_1(Y, a(i_0))$$

tale che, per $i \in \mathfrak{A}$, $m \in \pi_1(i, a(i))$ e $j \in \pi_0(X \times_Y X)$, valga:

$$\Xi(m) = \delta_i \varpi(\varphi)(m) \delta_i^{-1}$$

$$\Xi(j) = \delta_{\pi_0(pr_1)(j)} \tau(j) \delta_{\pi_0(pr_2)(j)}^{-1}$$

Esso è suriettivo e il suo nucleo è il più piccolo sottogruppo normale di $(*_{i \in \mathfrak{A}} \pi_1(i, a(i)) * \mathfrak{F}(\pi_0(X \times_Y X)))$ che contiene, per $j' \in T$, $j \in \pi_0(X \times_Y X)$, $m \in \pi_1(X \times_Y X, b(j))$ e $k \in \pi_0(X \times_Y X \times_Y X)$, gli elementi:

$$\begin{aligned} & j' \\ & \alpha_j(m) j \beta_j(m)^{-1} j^{-1} \\ & \lambda_1(k) \pi_0(pr_{1,2})(k) \lambda_2(k) \pi_0(pr_{2,3})(k) \lambda_3(k) \pi_0(pr_{1,3})(k)^{-1} \end{aligned}$$

Consideriamo adesso il caso nel quale \mathfrak{A} sia composto da due elementi (A, B) i cui interni ricoprono Y oppure tali che A, B sono chiusi, A, B, Y sono slacciabili e $A \cap B$ è localmente connessa per archi. Allora $C = A \cap B$ è non vuoto (in quanto Y è connesso). Denotiamo con i_A, i_B le inclusioni di A, B in Y . Scegliendo $x \in C$ e denotando con j_0 la componente connessa di C che contiene x , notiamo che $\{j_0\}$ è un albero massimale di Δ . Per $j \in \pi_0(X \times_Y X)$ scegliamo $q_j \in j$ e una classe di omotopia di cammini s_j in A e una t_j in B che leghino q_j a x . Possiamo dunque riformulare il teorema in questo caso specifico per renderlo più semplice.

Teorema 25. *Esiste un unico morfismo*

$$\Xi : \pi_1(A, x) * \pi_1(B, x) * \mathfrak{F}(\pi_0(C) - \{j_0\}) \longrightarrow \pi_1(Y, x)$$

tale che, per $v \in \pi_1(A, x)$, $w \in \pi_1(B, x)$ e $j \in \pi_0(C) - \{j_0\}$, valga:

$$\Xi(v) = \pi_1(i_A)(v)$$

$$\Xi(w) = \pi_1(i_B)(w)$$

$$\Xi(j) = s_j^{-1} t_j$$

Esso è suriettivo e il suo nucleo è il più piccolo sottogruppo normale di $\pi_1(A, x) * \pi_1(B, x) * \mathfrak{F}(\pi_0(C) - \{j_0\})$ che contiene, per $j \in \pi_0(C) - \{j_0\}$ e $m \in \pi_1(C, q_j)$ gli elementi:

$$\alpha_j(m) j \beta_j(m)^{-1} j^{-1}$$

$$\alpha_{j_0}(m) \beta_{j_0}(m)^{-1}$$

Notiamo che, nelle ipotesi del teorema 25, $\mathfrak{F}(\pi_0(C) - \{j_0\})$ è immerso in $\pi_1(Y, x)$. Quindi da informazioni algebriche su $\pi_1(Y, x)$ potremo ricavare informazioni topologiche su C . Infatti, se $\pi_1(Y, x)$ è banale, C è necessariamente connesso per archi, mentre se $\pi_1(Y, x)$ è commutativo, C ha al più due componenti connesse per archi.

Il teorema inoltre ci permette di calcolare immediatamente i gruppi fondamentali delle sfere. Infatti, ricoprendo S^n con due semisfere chiuse A, B , notiamo che esse sono omeomorfe a palle chiuse n -dimensionali, e quindi sono contraibili, mentre la loro intersezione è omeomorfa a S^{n-1} . Questo ricoprimento è tale che A, B sono chiusi, A, B, S^n sono slacciabili e $A \cap B$ è localmente connessa per archi. Se $n \geq 2$, S^{n-1} è connessa per archi, e dunque il gruppo fondamentale di S^n è banale. S^0 invece è omeomorfa allo spazio discreto contenente due punti, e quindi il gruppo fondamentale di S^1 è isomorfo a \mathbb{Z} .

Bibliografia

1. Bourbaki N.: Algèbre, chapitres 1 à 3. Springer (2007)
2. Bourbaki N.: Théorie des ensembles. Springer (2007)
3. Bourbaki N.: Topologie algébrique, chapitres 1 à 4. Springer (2016)
4. Bourbaki N.: Topologie générale, chapitres 1 à 4. Springer (2007)
5. Bourbaki N.: Topologie générale, chapitres 5 à 10. Springer (2007)
6. Fomenko, A.; Fuchs, D.: Homotopical Topology. Springer (2016)
7. Giraud J.: Méthode de la descente, Mémoires de la S. M. F., tome 2 (1964) (www.numdam.org)
8. Grothendieck A.: Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie - 1960-1961 : Revêtements et groupe fondamental - (SGA 1), Springer (1971)
9. Grothendieck A.: Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats, dans Séminaire Bourbaki : années 1958/1959 - 1959/1960, exposées 169-204, Séminaire Bourbaki, no. 5 (1960), exposée no.190 (<http://www.numdam.org>)
10. Hatcher, A.: Algebraic Topology. (2001)
11. Mac Lane S.: Categories for the Working Mathematician. Springer (1998)
12. Poincaré, H.: Analysis situs. Journal de l'École Polytechnique (2) (1895) (gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France)
13. Riehl E.: Category Theory in Context. Dover Publications (2017)
14. Strooker J. R.: Introduction to Categories, Homological Algebra and Sheaf Cohomology. Cambridge University Press (2008)
15. Van Kampen, E.: On the Connection between the Fundamental Groups of Some Related Spaces. American Journal of Mathematics, 55(1), 261-267 (1933)
16. Vistoli A.: Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory, arXiv:math.AG/0412512. (2007)