Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

LA PRECESSIONE DI MERCURIO

Relatore:
Prof. Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:
Giovanni Mistretta

Anno Accademico 2020/2021

Alla mia famiglia e al loro amore

Sommario

L'obiettivo di questa tesi è ricavare e confrontare l'orbita di Mercurio sia nell'ambito della fisica newtoniana sia utilizzando la teoria della Relatività Generale. Il testo si sviluppa in tre capitoli. La prima parte si concentrerà sul "Problema di Keplero" e sulle equazioni del moto della fisica classica, mettendo in luce che non è presente alcun moto di precessione se non si considerano le perturbazioni dovute alla presenza degli altri corpi del sistema solare. La seconda parte si occuperà di derivare la metrica di Schwarzschild (corrispondente all'espressione di un campo gravitazionale generato da una distribuzione sferica di massa) e di utilizzare l'equazione di Hamilton-Jacobi relativistica per ottenere l'orbita. Vedremo che, nell'ambito della Relatività Generale, il moto di precessione non solo è previsto già per il sistema Sole-Mercurio ma è in estremo accordo con i dati sperimentali. L'ultimo capitolo è dedicato alla descrizione dell'articolo di Einstein del 1915, in cui venne studiata e calcolata per la prima volta la precessione di Mercurio.

Indice

Introduzione **2**

1 Meccanica Newtoniana **3**
1.1 Determinare la dinamica di un sistema 3
1.2 Potenziale centrale 4
1.3 Il problema di Keplero 6

2 Relatività Generale **9**
2.1 Il campo gravitazionale visto come curvatura dello spazio-tempo 9
2.2 La metrica di Schwarzschild 12
2.3 La precessione di Mercurio 15

3 L'articolo originale di Einstein **18**
3.1 L'articolo del 1915 18
3.2 Prima e seconda approssimazione 19
3.3 Il moto planetario 21

Conclusioni **25**

A **26**
A.1 Coordinate curvilinee 26
A.2 Dal tensore metrico ai simboli di Christoffel 27
A.3 Il tensore di curvatura di Riemann 30

Bibliografia **32**

Introduzione

Nel 1859 Urbain Le Verrier, matematico e astronomo francese, scoprì incongruenze tra le sue osservazioni dell'orbita di Mercurio e le previsioni fornite dalla teoria della gravità newtoniana. In particolare trovò che il moto di precessione del perielio, ossia il suo moto di rotazione sul piano dell'orbita, veniva sottostimato di circa 43" (secondi d'arco) per secolo dalla teoria classica. É interessante notare che secondo il modello di Newton questo moto è dovuto esclusivamente all'interazione degli altri pianeti del Sistema Solare con l'orbita, che altrimenti sarebbe fissa. Le Verrier propose quindi l'ipotesi dell'esistenza di un presunto pianeta ancora più vicino al Sole, Vulcano, che influenzasse l'orbita di Mercurio in modo tale da ottenere il risultato corretto. Ovviamente il pianeta non fu mai scoperto e una spiegazione migliore verrà data dalla teoria di Einstein nel 1915.

Nella parte dedicata alla relatività generale adotteremo, per la metrica nello spazio-tempo euclideo, la convenzione:

$$g_{00} = -1$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = +1$$

Per coordinate cartesiane intenderemo $x^\mu = (ct, x, y, z)$ e utilizzeremo la convenzione di Einstein (gli indici ripetuti in un prodotto sottintendono la somma $x^i x_i = \sum_i x^i x_i$).

Ai fini di questa tesi non verranno calcolate le perturbazioni dovute alla presenza degli altri pianeti. Dato che tali effetti sono molto ridotti rispetto al campo generato dalla massa del Sole possono essere trattati con la teoria di Einstein linearizzata, che corrisponde a quella classica. Di conseguenza per studiare la differenza tra le due teorie sarà sufficiente lo studio del sistema a due corpi.

Questo testo non ha la pretesa di essere esaustivo in tutti gli argomenti citati, piuttosto vuole introdurre le minime nozioni fisiche necessarie a comprendere le differenze tra i due modelli presentati e a ricavarne dei risultati quantitativi. Per questo motivo la matematica dietro molte leggi fisiche verrà spesso data per scontata.

Capitolo 1

Meccanica Newtoniana

1.1 Determinare la dinamica di un sistema

La meccanica classica si basa sul *Principio di minima azione*. Questo principio afferma che il moto di un sistema fisico avviene sulla traiettoria che minimizza l'azione S, definita come:

$$S = \int L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{1.1}$$

qui l'integrale è preso sulla traiettoria fisica del sistema, parametrizzata dal tempo t. La funzione L è detta *Lagrangiana* del sistema, con q indichiamo l'insieme delle coordinate q_i e analogamente $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ identifica le velocità $\dot{q}_i$ associate alle coordinate. Minimizzando l'integrale si trova che la Lagrangiana gode delle seguenti proprietà:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right)L(q, \dot{q}, t) = 0 \tag{1.2}$$

queste sono le equazioni del moto nella loro forma più generale possibile.

Nel caso particolare in cui la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, essa assume la forma:

$$L(q, \dot{q}) = T - V \tag{1.3}$$

dove T è una forma quadratica nelle $\dot{q}$ e viene chiamata *Energia cinetica* e V è una funzione delle coordinate detta *Potenziale*. In questa situazione l'*energia totale del sistema* H, definita come:

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{1.4}$$

si conserva, come conseguenza dell'invarianza per traslazioni temporali della Lagrangiana[1]. É evidente che per trovare un'espressione di H è necessario rendere esplicita la forma di T. In coordinate cartesiane l'energia cinetica si può esprimere come:

$$T = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{1.5}$$

dove la costante m è la massa inerziale del corpo e g_{ij} è la *matrice metrica*, ossia la matrice associata al prodotto scalare. Quest'ultima, in queste coordinate, ha la forma seguente:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \tag{1.6}$$

dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker che vale 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$ Inserendo l'Eq.(1.6) nella (1.5) troviamo per T:

$$T = \frac{m}{2} \sum_i \dot{q_i}^2 \tag{1.7}$$

e quindi per H[2]:

$$H = T + V \tag{1.8}$$

1.2 Potenziale centrale

Quando l'espressione analitica del potenziale presenta una simmetria sferica rispetto a un punto, chiamato *centro*, si parla di *potenziale centrale*. Per i nostri scopi, è da sottolineare come nello studio di un sistema a due corpi, in cui l'interazione dipende

[1]Per dimostrare che H è effettivamente una quantità conservata, osserviamo che, dato che L non dipende esplicitamente da t possiamo scrivere:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

Se ora esprimiamo il primo termine in sommatoria attraverso l'Eq.(1.2) otteniamo:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt}(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})$$

Da cui:

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L) = \frac{dH}{dt} = 0$$

[2]É importante sottolineare come l'aver scelto coordinate cartesiane non pregiudichi la generalità della nostra conclusione. Essendo T una forma quadratica nelle $\dot{q}_i$ è evidente che se il potenziale non dipende dalla velocità allora l'espressione

$$\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

e avremmo ottenuto la stessa espressione per H

solo dalla distanza tra i due, ci si possa sempre ricondurre a un problema di potenziale centrale. Siano $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ rispettivamente il raggio vettore del primo e del secondo corpo presi in un arbitrario sistema di riferimento inerziale. Sia $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ la distanza tra i due. Definiamo la posizione del centro di massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{1.9}$$

Trasliamo il nostro sistema di riferimento di modo tale che l'origine coincida con la posizione del centro di massa.

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{r}_{CM} \tag{1.10}$$

In particolare per $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ otteniamo:

$$\vec{r}_1' = \frac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2} \tag{1.11}$$

$$\vec{r}_2' = -\frac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2}$$

In queste coordinate la lagrangiana (1.3) assume la semplice forma:

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|) \tag{1.12}$$

dove $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ è chiamata *massa ridotta* del sistema. É interessante il caso in cui $M = m_1 >> m_2 = m$. Operando il limite $M \to \infty$ nell'Eq.(1.11) ricaviamo per $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_1 \approx 0 \tag{1.13}$$

$$\vec{r}_2 \approx \vec{r}$$

$$\mu \approx m$$

É evidente dalla (1.12) che il problema considerato gode di simmetria rotazionale rispetto a qualsiasi piano passante per l'origine, di conseguenza è un problema di potenziale centrale. A questa simmetria si può far corrispondere una costante del moto, il *Momento angolare* (calcolato rispetto al centro di massa, origine del nostro SdR) $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ [3], dove $\vec{r}$ indica la posizione del corpo e $\vec{p}$ il suo momento associato. Essendo $\vec{M}$ un vettore

[3] É noto che un vettore arbitrario vari per rotazioni infinitesime come:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\phi} \times \vec{r}$$

A questo punto scriviamo la variazione della lagrangiana per rotazioni infinitesime:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\delta\vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\delta\dot{\vec{r}}$$

che non muta durante il moto, altrettanto immutabile sarà il piano ortogonale a esso. Su questo piano, per costruzione, giace il vettore $\vec{r}$. Possiamo, quindi, affermare che il moto di un sistema meccanico sotto l'effetto di un potenziale centrale avviene su un piano fisso e passante per l'origine. Scegliamo arbitrariamente questo piano e passiamo in coordinate polari (r, θ) con la trasformazione $\sigma : (r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$. L'espressione di $V(r)$ resta invariata mentre per ottenere la corretta forma di T occorre procedere con più cautela. Ricordiamo che la matrice metrica si trasforma per cambiamento di coordinate in:

$$g'_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_j}{\partial x'_\beta} g_{\alpha\beta} \tag{1.14}$$

dove x'_α indicano le nuove coordinate. Inserendo questo risultato nella (1.5), troviamo per T:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \tag{1.15}$$

con cui è possibile esprimere la Lagrangiana una volta esplicitata la funzione $V(r)$.

1.3 Il problema di Keplero

Con le tecniche acquisite nelle precedenti sezioni possiamo finalmente studiare l'interazione tra Mercurio e il Sole e determinare l'orbita del pianeta nell'ambito della fisica newtoniana. In meccanica classica il potenziale gravitazionale tra due corpi è definito dal cosiddetto *potenziale di Keplero*:

$$V(r) = -\frac{k}{r} \tag{1.16}$$

qui r indica la distanza tra i due corpi e k è una costante reale positiva. Si tratta evidentemente di un campo centrale indipendente dal tempo e possiamo applicare quanto detto nella Sez.(1.2). In particolare:

- il rapporto tra le masse dei due corpi è $\frac{M_{Mercurio}}{M_{Sole}} \approx 1.66 \cdot 10^{-7}$ [5, 6], è lecito utilizzare l'approssimazione (1.13)
- il moto avviene in un piano fisso passante per l'origine

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\delta\phi \times \vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\delta\phi \times \dot{\vec{r}}$$

Definiamo il momento associato al vettore $\vec{r}$: $\vec{p} \overset{def}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}$. Permutiamo l'ordine nei prodotti vettoriali per isolare $\delta\phi$ e poniamo $\delta L = 0$ in virtù dell'invarianza rotazionale:

$$\delta L = \delta\phi(\vec{r} \times \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{p}) = \delta\phi\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \delta\phi\frac{d\vec{M}}{dt} = 0$$

Dall'arbitrarietà di $\delta\phi$ ne risulta la conservazione del momento angolare.

- l'energia H assume la forma (1.8) dove T prende la forma (1.15)

Mettiamoci nel sistema di riferimento del centro di massa, scegliamo l'asse z ortogonale al piano dell'orbita Σ e come assi x e y una qualsiasi coppia di vettori ortogonali appartenenti a Σ. In analogia a quanto detto per un potenziale centrale generico, risulta conveniente esprimere la lagrangiana in coordinate polari (r, θ) definite su Σ. Inserendo l'Eq.(1.16) nella (1.8) troviamo una forma esplicita per la lagrangiana del nostro sistema:

$$L(r, \dot{r}, \theta) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} \tag{1.17}$$

É chiaro che L non dipende esplicitamente dalla variabile θ, in questo caso θ è chiamata variabile *ciclica*. Se nell'Eq.(1.2) sostituiamo q_i con θ troviamo che il momento angolare lungo l'asse, z, $M_z \overset{def}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$, si conserva:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \tag{1.18}$$

Sostituendo quindi M_z nel secondo integrale del moto, H, troviamo:

$$H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M_z^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = E \tag{1.19}$$

dove E indica il valore conservato di H. Il nostro problema tridimensionale si è ridotto allo studio di un sistema 1-D dove il potenziale efficace è rappresentato da:

$$V_{eff}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \tag{1.20}$$

Le orbite limitate saranno quelle con $-\frac{mk^2}{2M^2} < E < 0$[4]. Separando le variabili nella (1.19) otteniamo:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]}} \tag{1.21}$$

Integrando questa equazione otteniamo $r(t)$. Il nostro obiettivo è determinare la traiettoria dell'orbita $r(\theta)$, per cui sostituiamo $dt = \frac{mr^2}{M_z}d\theta$ nella (1.21) e ricaviamo:

$$d\theta = \frac{M_z dr}{r^2\sqrt{2m[E + \frac{k}{r}] - \frac{M_z^2}{r^2}}} \tag{1.22}$$

[4]Le orbite limitate si hanno per quelle energie comprese tra il minimo del potenziale V_{min} e il suo valore all'infinito V_∞. Per il nostro potenziale efficace abbiamo:

$$V_{min} = -\frac{mk^2}{2M^2}$$

$$V_\infty = 0$$

Integriamo facendo un cambio di variabili $u = 1/r$ per ottenere l'orbita:

$$\theta(r) = -\int \frac{M_z du}{\sqrt{2m[E+ku] - M_z^2 u^2}} = -\frac{M_z}{\sqrt{(2mE)(1+\frac{mk^2}{2EM_z^2})}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{(\frac{M_z}{\sqrt{2mE}}u - \sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{k}{M_z})^2}{1+\frac{mk^2}{2EM_z^2}}}} \tag{1.23}$$

Infine con l'ultima sostituzione $v = \frac{\frac{M_z}{\sqrt{2mE}}u - \sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{k}{M_z}}{\sqrt{1+\frac{mk^2}{2EM_z^2}}}$ ricaviamo:

$$\theta(r) = -\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \arccos v + c = \arccos[\frac{\frac{M_z}{r} - \frac{mk}{M_z}}{\sqrt{2mE + \frac{2EM_z^2}{mk^2}}}] \tag{1.24}$$

dove c è una costante di integrazione che possiamo prendere uguale a 0 in virtù dell'arbitrarietà nell'origine di θ. Invertiamo la formula per esprimere $r(\theta)$ definendo $p = \frac{M_z^2}{mk}$ e l'eccentricità $e = \sqrt{1 + \frac{2EM_z^2}{mk^2}}$:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \tag{1.25}$$

Dalla (1.25) è chiaro che il raggio vettore varierà tra $r_{min} = \frac{p}{1+e}$, o perielio, e $r_{max} = \frac{p}{1-e}$, o afelio. Per vedere se l'orbita è chiusa, oltre che limitata, dobbiamo studiare l'angolo $\Delta\theta$ spazzato dal raggio vettore in un ciclo di rivoluzione completo. É evidente che $\Delta\theta$ sarà esattamente il doppio dell'angolo spazzato in un semiciclo, da r_{min} a r_{max}, ossia:

$$\Delta\theta = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} d\theta \tag{1.26}$$

Sostituendo $d\theta$ con la (1.22) e ricordando che nell'ultimo passaggio della (1.24) abbiamo già trovato una primitiva per questa espressione, otteniamo infine:

$$\Delta\theta = 2\pi \tag{1.27}$$

La teoria Newtoniana prevede quindi che l'orbita si chiuda ogni ciclo, non vi è alcun moto di precessione del perielio dovuto all'attrazione tra il Sole e Mercurio. Per spiegare questa evidenza sperimentale bisogna introdurre le perturbazioni dovute alla presenza degli altri pianeti del sistema solare ma, come già anticipato, resta comunque uno scarto di 43"/secolo che non può essere spiegato con questo modello, se non introducendo pianeti fittizi come poteva essere la prima ipotesi di Le Verrier.

Capitolo 2

Relatività Generale

2.1 Il campo gravitazionale visto come curvatura dello spazio-tempo

Dopo aver studiato la descrizione del sistema Mercurio-Sole secondo la teoria classica, ci approciamo ora alla descrizione relativistica. É importante sottolineare innanzitutto l'incompatibilità tra la relatività ristretta e il potenziale di Keplero. Immaginiamo la seguente situazione. Un corpo di massa m, inizialmente in quiete, si trova in un punto $\mathcal{A}$ immerso in un campo gravitazionale. Subirà evidentemente un'accelerazione g, che possiamo supporre costante fintanto che osserviamo il moto in una regione ristretta dello spazio, dove possiamo considerare il campo uniforme. Inizialmente il corpo in quiete avrà un'energia a riposo dovuta esclusivamente alla sua massa $E_0 = mc^2$. Dopo aver percorso una distanza h raggiungerà il punto $\mathcal{B}$ seguendo la naturale traiettoria di "caduta" e avrà un'energia:

$$E = mc^2 + mgh \tag{2.1}$$

A questo punto potrebbe succedere che in $\mathcal{B}$ il corpo annichili trasferendo tutta la sua energia in un fotone che potrebbe proseguire indisturbato dal potenziale newtoniano fino in $\mathcal{A}$ dove potrebbe di nuovo riconvertire la sua energia in massa e generare così un corpo di massa $m' = m + mgh/c^2$, violando evidentemente il principio di conservazione dell'energia.

Una nuova interpretazione della gravitazione venne data da Einstein nel 1915 con la sua teoria della relatività generale. Questo nuovo modello prevede che il campo gravitazionale sia un effetto della curvatura dello spazio-tempo. Proviamo a capire in che modo ciò possa avvenire. Innanzitutto definiamo *geodesica* la traiettoria, nello spazio-tempo, percorsa da un corpo non soggetto a interazioni. Consideriamo due esempi di spazio-tempo bidimensionale $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ (un asse spaziale e un asse temporale) rispettivamente piatto (un piano) e curvo (in questo caso una sfera). Immaginiamo di studiare due corpi in $\mathcal{P}$ e in $\mathcal{S}$. Ipotizziamo che, non soggetti a forze, si muovano su geodesiche parallele in un dato istante[1]. É evidente che in $\mathcal{P}$ le geodetiche, qui rappresentate da rette, resteranno parallele e a una distanza fissa. Non è altrettanto banale la situazione in $\mathcal{S}$ dove le geodesiche sono le circonferenze massime, i meridiani. Se le due traiettorie spazio-temporali erano parallele all'equatore di $\mathcal{S}$, allontanandosi da esso non saranno più parallele e la loro distanza diminuirà. Ognuno dei due corpi vede l'altro accelerare verso di sé. In questo modo la curvatura dello spazio-tempo si manifesta in apparenti "accelerazioni gravitazionali".

L'equazioni che determinano il campo gravitazionale, le *equazioni di Einstein*, sono:

$$G_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \tag{2.2}$$

dove G_{ik} è il tensore di Einstein (combinazione di componenti della matrice metrica e delle sue derivate, un'espressione della curvatura) e T_{ik} è il tensore energia-impulso della materia. Concentriamoci, inizialmente, sul secondo termine. Il tensore energia-impulso rappresenta la densità di energia-impulso. Vale infatti la relazione:

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{ik} \, dS_k \tag{2.3}$$

dove dS_k è l'elemento di ipersuperficie che racchiude tutto lo spazio tridimensionale e P^i è il 4-vettore impulso, con componente temporale l'energia e componenti spaziali il vettore quantità di moto classico. Se come ipersuficie prendiamo l'iperpiano $x_0 =$ costante troviamo la forma più esplicita:

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{i0} \, dV \tag{2.4}$$

Grazie a questa espressione possiamo interpretare T^{00} come la densità di massa-energia della materia e $T^{\alpha 0}$ (con le lettere greche indichiamo le componenti spaziali) come la densità di impulso lungo la direzione α. Per un corpo macroscopico il tensore energia impulso è:

$$T_{ik} = (\epsilon + p) u_i u_k - p g_{ik} \tag{2.5}$$

dove ϵ è la densità di massa-energia del corpo e p è la pressione esercitata dall'elemento di volume (qui modelizziamo questo corpo come un fluido incredibilmente denso in cui possiamo applicare la legge di Pascal).

[1] Per non creare equivoci diamo un'orientazione univoca agli assi temporale e spaziale. É evidente che $\mathcal{P}$ possa essere parametrizzato dal piano cartesiano xy, sia x l'asse spaziale e y quello temporale. In $\mathcal{S}$ le coordinate sono espresse da meridiani e paralleli, siano i meridiani (i quali soddisfano tutti la proprietà di essere geodesiche) l'asse temporale e i paralleli quelli spaziali. Pertanto quando affermiamo che due corpi si muovono su geodesiche parallele in un dato istante, intendiamo che, tracciata la curva $t =$ costante che congiunge le due geodesiche, se una delle due traiettoria è ortogonale a questa curva allora anche l'altra lo sarà.

Torniamo all'Eq.(2.2) ed esplicitiamo il primo termine:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \tag{2.6}$$

Qui g_{ik} è la matrice metrica quadridimensionale e R_{ik}, o tensore di Ricci, rappresenta la contrazione del tensore di curvatura di Riemann R^l_{ilk} (R rappresenta l'ulteriore contrazione del tensore di Ricci R^i_i), definito da:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} \tag{2.7}$$

Per chiarire in che modo questo oggetto determini la curvatura dello spazio tempo è importante sottolineare che il tensore di curvatura permette di calcolare la variazione ΔA_k dovuta al trasporto parallelo[2] di un vettore A_i lungo un contorno infinitesimo chiuso:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm} \tag{2.8}$$

dove Δf^{lm} rappresenta l'elemento di superficie infinitesima delimitata dal contorno sopracitato. I termini Γ^l_{ik} nella (2.7) vengono chiamati coefficienti di connessione o simboli di Christoffel. Questi coefficienti rappresentano la variazione che subisce un vettore a seguito di un trasporto parallelo infinitesimo δx, in simboli:

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k \delta x^l \tag{2.9}$$

Essi sono determinati dall'espressione seguente:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \tag{2.10}$$

Le equazioni di campo permettono di definire in che modo lo spazio-tempo si incurva a causa della presenza delle masse. In assenza di altre forze, una particella immersa in un campo gravitazionale si muoverà su una geodesica. Questa traiettoria, che in uno spazio piatto è descritta da una retta, è definita, in un sistema di riferimento arbitrario, dall'equazione:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \tag{2.11}$$

dove $ds = g_{ik} dx^i dx^k$ è l'intervallo invariante quadridimensionale. Le (2.11), in analogia con la (1.2), sono le equazioni del moto cercate. Un modo alternativo per ricavare la traiettoria è attraverso l'invarianza del modulo quadro del quadri-impulso

[2] Per trasporto parallelo si intende una trasformazione che, se operata in uno spazio euclideo, non cambia le componenti dei vettori, ovviamente non è altrattanto banale in coordinate curvilinee

$g_{ik}p^kp^i = p_ip^i = -m^2c^2$. Sostituendo in questa equazione $p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}$ otteniamo l'equazione di Hamilton-Jacobi in un campo gravitazionale:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} + m^2c^2 = 0 \tag{2.12}$$

In questo modo si ricava l'azione S e di conseguenza la dinamica del sistema.

Prima di iniziare a studiare il sistema Sole-Mercurio, ci tornerà utile esprimere il tensore di Einstein come la contrazione del doppio duale del tensore di curvatura di Riemann, più precisamente:

$$\mathcal{G}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}R^{|\mu\nu|}_{|\rho\sigma|}\epsilon^{\rho\sigma\gamma\delta} = -\delta^{\rho\sigma\gamma\delta}_{\alpha\beta\mu\nu}R^{|\mu\nu|}_{\rho\sigma} \tag{2.13}$$

$$G^{\delta}_{\beta} = \mathcal{G}^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} = -\delta^{\delta\rho\sigma}_{\beta\mu\nu}R^{|\mu\nu|}_{|\rho\sigma|} \tag{2.14}$$

qui indichiamo con $|\mu\nu|$ il fatto che la sommatoria vada svolta con $\mu > \nu$. Inoltre abbiamo usato il tensore quadridimensionale totalmente antisimmetrico $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ e il tensore permutazione:

$$\delta^{\delta\rho\sigma}_{\beta\mu\nu} = +1 \text{ se } \delta\rho\sigma \text{ è una permutazione pari di } \beta\mu\nu$$

$$\delta^{\delta\rho\sigma}_{\beta\mu\nu} = -1 \text{ se } \delta\rho\sigma \text{ è una permutazione dispari di } \beta\mu\nu$$

$$\delta^{\delta\rho\sigma}_{\beta\mu\nu} = 0 \text{ negli altri casi}$$

Due esempi che useremo successivamente sono:

- $G^0_0 = -(R^{12}_{12} + R^{13}_{13} + R^{23}_{23})$
- $G^1_1 = -(R^{02}_{02} + R^{03}_{03} + R^{23}_{23})$

2.2 La metrica di Schwarzschild

Nella sezione precedente abbiamo visto che per determinare la traiettoria di un corpo in un campo gravitazionale è necessario calcolare le componenti della matrice metrica. Considerando il Sole, generatore del campo, come un corpo sferico, esprimeremo prima una forma generale per una metrica che goda di questa simmetria e, in seguito, risolveremo le equazioni di campo per determinarne i coefficienti. In uno spazio-tempo piatto una forma così definita può essere espressa da:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\Omega \tag{2.15}$$

dove abbiamo sfruttato la relazione $ds = g_{ik}dx^idx^k$ per elencare le componenti della matrice metrica, e $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$. Un'espressione generale che conservi la simmetria sferica in uno spazio curvo può essere:

$$ds^2 = -a^2\,(cdt)^2 - 2ab\,dr\,(cdt) + d^2\,dr^2 + R^2\,d\Omega^2 \tag{2.16}$$

qui a, b, d e R rappresentano funzioni di r. Per rimuovere il termine misto cambiamo la variabile temporale $e^{\phi}\, cdt' = a\, cdt + b\, dr$ e definiamo $e^{2\Lambda} = b^2 + d^2$. Per ottenere un'espressione ancora più semplice notiamo che non vi è alcuna perdita di generalità nel definire $r' = R(r)$. In questo modo, ignorando l'indice primato sulle variabili radiale e temporale, otteniamo per l'intervallo:

$$ds^2 = -e^{2\phi}\,(cdt)^2 + e^{2\Lambda}\,dr^2 + r^2\,d\Omega \tag{2.17}$$

Ora utilizziamo le equazioni Einstein per esplicitare le funzioni $\Lambda(r)$ e $\Phi(r)$. Utilizziamo la metrica (2.17) nel sistema di riferimento in cui la stella è in quiete, l'unica componente non nulla della 4-velocità è quella temporale. Dall'invarianza del prodotto scalare otteniamo per u^t:

$$-c^2 = g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = g_{tt}u^t u^t = -e^{2\phi}u^t u^t \tag{2.18}$$

da cui $u^t = ce^{-\phi}$. Sostituendo questo risultato nell'espressione (2.5), otteniamo per le componenti non nulle del tensore energia impulso:

$$\begin{gathered} T_{00} = \epsilon c^2 e^{2\Phi} \qquad (2.19) \\ T_{11} = pe^{2\Lambda} \\ T_{22} = pr^2 \\ T_{33} = pr^2 \sin^2\theta \end{gathered}$$

Scriviamo le equazioni di campo (2.2) che convolgono le prime due componenti sopracitate:

$$\begin{gathered} G_{00} = \frac{8\pi k}{c^2}(\epsilon e^{2\Phi}) \qquad (2.20) \\ G_{11} = \frac{8\pi k}{c^4}(pe^{2\Lambda}) \end{gathered}$$

Per calcolarle utilizziamo l'Eq.(2.14). Le componenti del tensore di Riemann che ci servono sono:

- $R^{12}_{12} = \frac{e^{-2\Lambda}\Lambda'}{r}$
- $R^{23}_{23} = \frac{1-e^{-2\Lambda}}{r^2}$
- $R^{13}_{13} = \frac{e^{-2\Lambda}\Lambda'}{r}$
- $R^{02}_{02} = R^{03}_{03} = -\frac{e^{-2\Lambda}\Phi'}{r}$

calcolate a partire dalla metrica (2.17) passando per l'Eq.(2.10) e la (2.7). Qui l'indice primato indica la derivazione rispetto a r. Sostituendo nella (2.14) otteniamo:

$$G_{00} = g_{0i}G_0^i = g_{00}G_0^0 = e^{2\Phi}(\frac{2e^{-2\Lambda}\Lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2\Lambda}}{r^2}) = r^{-2}\frac{d}{dr}[r(1-e^{-2\Lambda})] \tag{2.21}$$

$$G_{11} = g_{11}G_1^1 = -e^{2\Lambda}(\frac{1-e^{-2\Lambda}}{r^2} - \frac{2e^{-2\Lambda}\Phi'}{r})$$

Facciamo un ulteriore precisazione prima di esplicitare le equazioni di campo. Noi siamo interessati ad avere le componenti della metrica all'esterno del corpo che ne genera la curvatura. Ne segue che la pressione p si annulli in queste regioni dello spazio. Di conseguenza l'unica componente non nulla del tensore energia impulso è T_{00}. Ora possiamo scrivere le due equazioni di campo che ci servono per esprimere Λ e Φ. Analizziamole una alla volta. Inseriamo la prima equazione della coppia (2.21) nella prima delle (2.20):

$$r^{-2}\frac{d}{dr}[r(1-e^{-2\Lambda})] = \frac{8\pi k}{c^2}\epsilon \tag{2.22}$$

Definiamo una nuova funzione di r, $r_g(r) = r(1-e^{-2\Lambda})$. L'equazione precedente assume ora la forma:

$$\frac{dr_g(r)}{dr} = 2\frac{4\pi k}{c^2}r^2\epsilon \tag{2.23}$$

Integriamo e ricaviamo:

$$r_g(r) = \frac{2k}{c^2}\int_0^r 4\pi\epsilon r'^2\,dr' = \frac{2kM}{c^2} \tag{2.24}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo considerato il fatto che per $r > R$, con R raggio del corpo che genera il campo, l'integrale si riduce alla massa-energia totale M del corpo stesso. In questo caso r_g è una costante e viene chiamata *raggio gravitazionale*. In questo modo possiamo esprimere $\Lambda(r)$:

$$e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{r_g}{r} \tag{2.25}$$

Per esprimere Φ riprendiamo l'ultima equazione delle (2.20) e utilizziamo quanto appena ricavato:

$$-\frac{r_g}{r}r^{-2} + 2(1-\frac{r_g}{r})\Phi' r^{-1} = 0 \tag{2.26}$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{r_g}{2r(r-r_g)}$$

Integrando quest'ultima equazione otteniamo per $\Phi(r)$:

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\ln(1-\frac{r_g}{r}) \tag{2.27}$$

A questo punto possiamo sostituire le espressioni (2.25) e (2.27) nella (2.17) e ricavare finalmente:

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_g}{r})\, dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2\, d\Omega \tag{2.28}$$

Questa è la cosiddetta metrica di Schwarzschild, che per primo la trovò come soluzione esatta alle equazioni di Einstein.

2.3 La precessione di Mercurio

Nella scorsa sezione abbiamo ottenuto la metrica per un campo gravitazionale a simmetria centrale. Ora useremo la metrica di Schwarzschild per studiare l'orbita di Mercurio. Come abbiamo visto nella Sez.(1.2) un campo con questa simmetria richiede che il moto avvenga su un piano fisso passante per l'origine (utilizzeremo lo stesso sistema di riferimento descritto nella Sez.(2.2)). Scegliamo questo piano per $\theta = \frac{\pi}{2}$ e riscriviamo la metrica (2.28) nella forma:

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_g}{r})\, dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2\, d\phi \tag{2.29}$$

Per trovare la traiettoria del pianeta risolviamo l'equazione di Hamilton-Jacobi (2.12) per l'azione S:

$$-(1 - \frac{r_g}{r})^{-1}(\frac{\partial S}{c^2 \partial t})^2 + (1 - \frac{r_g}{r})(\frac{\partial S}{\partial r})^2 + r^{-2}(\frac{\partial S}{\partial \phi})^2 = -m^2 c^2 \tag{2.30}$$

Ricordiamo che, come discusso nella Sez.(1.3), l'energia E_0 e il momento angolare M si conservano. Cerchiamo quindi S della forma:

$$S = -E_0 t + M\phi + S_r(r) \tag{2.31}$$

Sostituiamo nella (2.30) e risolviamo per S_r:

$$(1 - \frac{r_g}{r})^{-1}\frac{E_0^2}{c^2} - \frac{M^2}{r^2} - (1 - \frac{r_g}{r})(\frac{dS_r}{dr})^2 = m^2 c^2 \tag{2.32}$$

$$dS_r = dr\, [(1 - \frac{r_g}{r})^{-2}\frac{E_0^2}{c^2} - (\frac{M^2}{r^2} + m^2 c^2)(1 - \frac{r_g}{r})^{-1}]^{1/2}$$

e di conseguenza per l'azione radiale:

$$S_r = \int [\frac{E_0^2}{c^2}(1 - \frac{r_g}{r})^{-2} - (m^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2})(1 - \frac{r_g}{r})^{-1}]^{1/2}\, dr \tag{2.33}$$

Come è noto dalla teoria delle equazioni di Hamilton-Jacobi, le equazioni del moto sono date da $\frac{\partial S}{\partial E_0} = c$ e $\frac{\partial S}{\partial M} = d$, con c e d costanti reali. L'arbitrarietà nella scelta dell'origine temporale e angolare ci permette di scegliere $c = d = 0$. Otteniamo così:

$$ct = \frac{E_0}{mc^2} \int \frac{dr}{(1 - \frac{r_g}{r})[(\frac{E_0}{mc^2})^2 - (1 + \frac{M^2}{m^2r^2c^2})(1 - \frac{r_g}{r})]^{1/2}} \tag{2.34}$$

$$\phi = \int \frac{M}{r^2}[\frac{E_0^2}{c^2} - (m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2})(1 - \frac{r_g}{r})]^{-1/2}\, dr$$

Questo integrale si riconduce a un integrale ellittico. Le correzioni apportate alle orbite di keplero nel sistema solare sono quasi insignificanti dato che le velocità dei vari corpi è di molto inferiore a quella della luce (il raggio gravitazionale del sole è $r_g = 3km$). Possiamo studiare il sistema come una perturbazione del modello newtoniano. Nell'espressione di S_r (2.33) cambiamo variabile $r'^2 = r(r - r_g) \approx r - \frac{r_g}{2}$ ed esprimiamo l'energia relativistica come $E_0 = E' + mc^2$, con E' l'energia classica non perturbata. Ora espandiamo in serie di potenze di $\frac{r_g}{r}$ e E' come parametri perturbativi:

$$S_r = \int [\frac{E'^2}{c^2}(1 + \frac{r_g}{2r'})^2(1 - \frac{r_g}{2r'})^{-2} + 2E'm(1 + \frac{r_g}{2r'})^2(1 - \frac{r_g}{2r'})^{-2} + \tag{2.35}$$

$$+ m^2c^2[(1 + \frac{r_g}{2r'})^2(1 - \frac{r_g}{2r'})^{-2} - (1 + \frac{r_g}{2r'})(1 - \frac{r_g}{r})^{-1}] - \frac{M^2}{r'^2}]^{1/2}\, dr'$$

$$S_r = \int [(\frac{E'}{c^2} + 2E'm) + \frac{1}{r}(4E'mr_g + m^2c^2r_g) - \frac{M^2}{r^2}(1 - \frac{3m^2c^2r_g^2}{2M^2})]^{1/2}\, dr$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo ignorato l'indice primato su r. Il nostro obiettivo è vedere se questa azione perturbata riesce a spiegare il moto di precessione del perielio. Notiamo che, poiché la traiettoria è determinata dall'equazione $\phi + \frac{\partial S_r}{\partial M} = 0$, la variazione $\Delta\phi$ per un periodo di rivoluzione si può ricavare come:

$$\Delta\phi = -\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r \tag{2.36}$$

Sviluppiamo la variazione ΔS_r in serie di potenze del termine correttivo $M \to M\sqrt{1 - \frac{3m^2c^2r_g^2}{2M^2}} \approx M - \frac{3m^2c^2r_g^2}{4M}$:

$$\Delta S_r = \Delta S_r^{(0)} - \frac{3m^2c^2r_g^2}{4M}\frac{\partial \Delta S_r^{(0)}}{\partial M} \tag{2.37}$$

Sostituendo questa espressione nella (2.36) e ricordando la (1.27) otteniamo, per la variazione dell'angolo orbitale:

$$\Delta\phi = 2\pi + \frac{3\pi m^2c^2r_g^2}{2M^2} \tag{2.38}$$

Ecco quello che volevamo dimostrare. La traiettoria di un pianeta in orbita è limitata, ma non chiusa. Il perielio dell'orbita compie un moto di precessione attorno al Sole, anche senza introdurre perturbazioni dovute alla presenza degli altri corpi del sistema solare. Se calcoliamo la variazione $\delta\phi = \frac{3\pi m^2 c^2 r_g^2}{2M^2}$ otteniamo proprio i 43"/secolo [2] che perdevamo con il modello di Keplero. Questo estremo accordo dei dati sperimentali con la teoria della relatività va considerata una prova della validità di quest'ultima a dispetto della teoria di Newton che deve quindi ridursi ad una approssimazione per le basse energie.

Capitolo 3

L'articolo originale di Einstein

3.1 L'articolo del 1915

Il 25 novembre del 1915 Albert Einstein pubblicava l'articolo in cui, per la prima volta, fu spiegata la precessione di Mercurio attraverso la relatività generale. Sarà cura di questo capitolo discutere e commentare l'approccio di Einstein, utilizzando il suo formalismo. É interessante notare che, nonostante l'indubbia importanza di questo articolo, esso rappresenti una soluzione approssimata, diversamente da quella introdotta da Schwarzschild che, come abbiamo visto nel capitolo precedente, rappresenta una soluzione esatta per la metrica. La precessione del perielio verrà quindi calcolata attraverso l'utilizzo di successive approssimazioni, di cui la prima, come vedremo, rappresenta il potenziale di Keplero.

Nel vuoto, con un'opportuna scelta del sistema di coordinate, vediamo che le equazioni del campo si riducono a:

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0 \tag{3.1}$$

dove, tenendo a mente che la metrica di Einstein ha segnatura opposta rispetto a quella utilizzata fino ad ora:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}] \tag{3.2}$$

Consideriamo il Sole come un punto materiale posto nell'origine del nostro sistema di riferimento. La metrica imperturbata dello spazio-tempo piatto è:

$$g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} \tag{3.3}$$

$$g_{\rho 4} = 0$$

$$g_{44} = 1$$

dove ρ e σ prendono i valori 1, 2, 3 e indicano le componenti spaziali; δ è l'usuale delta di Kronecker. Questa metrica rappresenta l'*approssimazione zero*. Prima di trovare soluzioni per le Eq.(3.1) dobbiamo imporre alcune condizioni basate sulla simmetria sferica e sull'indipendenza dal tempo del sistema Sole-Mercurio che stiamo studiando. In particolare:

1. Tutte le componenti della metrica sono indipendenti dal tempo
2. La soluzione gode di simmetria sferica rispetto all'origine delle coordinate
3. Valgono le equazioni $g_{\rho 4} = 0$, per $\rho = 1, 2, 3$
4. All'infinito spaziale $g_{\mu\nu}$ coincide con la metrica euclidea (3.3)

3.2 Prima e seconda approssimazione

Consideriamo la curvatura generata dal Sole come una perturbazione della metrica (3.3). La deviazione da questa espressione sarà quindi data da una quantità piccola rispetto all'unità e la chiameremo approssimazione del *primo ordine*. Funzioni di grado n di questa deviazione saranno considerate come approssimazioni di ordine n. La soluzione del primo ordine proposta da Einstein è la seguente:

$$g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \tag{3.4}$$

$$g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r}$$

dove $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ e le lettere greche indicano le coordinate spaziali..

Per verificare queste soluzioni sarà necessaria anche la matrice metrica in forma controvariante, ossia la matrice inversa rispetto alla (3.4):

$$g^{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} + \frac{\frac{\alpha x_\sigma x_\rho}{r^3}}{1 + \frac{\alpha}{r}} \tag{3.5}$$

$$g^{\rho 4} = 0$$

$$g^{44} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

calcolata con il classico metodo dei minori complementari. Per semplicità verifichiamo solo l'ultima delle equazioni di campo ($\nu = \mu = 4$).

$$\frac{\partial \Gamma^\alpha_{44}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{4\beta} \Gamma^\beta_{4\alpha} = 0 \tag{3.6}$$

Consideriamo prima il primo addendo. Utilizzando la nota formula per i coefficienti di connessione otteniamo:

$$\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{44}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{2}[-\frac{\frac{2\alpha^2}{r^4}}{1+\frac{\alpha}{r}} + \frac{\frac{\alpha^2}{r^4} - \frac{2\alpha^3}{r^5}}{(1+\frac{\alpha}{r})^2}] \tag{3.7}$$

dove non compaiono termini al primo ordine.

Passiamo al secondo addendo. Gli unici termini non nulli in cui compare l'indice 4 sono, al primo ordine, $\Gamma^4_{4\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{44} = -\frac{\alpha x_\alpha}{2r^3}$. Di conseguenza il secondo termine diventa:

$$\Gamma^{\alpha}_{4\beta}\Gamma^{\beta}_{4\alpha} = 2\Gamma^{\alpha}_{44}\Gamma^{4}_{4\alpha} = \frac{\alpha^2}{2r^4} \tag{3.8}$$

Anche qui non compaiono termini al primo ordine, di conseguenza sommando le espressioni (3.7) e (3.8) il risultato è nullo, esattamente come previsto dall'equazione di campo (3.6).

Questa prima approssimazione, come vedremo, non si differenzia dalla meccanica newtoniana se non per la deflessione subita dai raggi di luce, descritti dall'equazione:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = 0 \tag{3.9}$$

Utilizzando la (3.2) possiamo ricavare i coefficienti di connessione:

$$\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma} = -\alpha(\delta_{\rho\sigma}\frac{x_\tau}{r^3} - \frac{3x_\rho x_\sigma x_\tau}{2r^5}) \tag{3.10}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{44} = \Gamma^{4}_{4\sigma} = -\frac{\alpha x_\sigma}{2r^3}$$

i coefficienti in cui l'indice 4 compare una o tre volte sono nulli.

Vedremo che, per determinare l'orbita di Mercurio, saranno sufficienti solo i simboli Γ^{σ}_{44} al secondo ordine. Sfruttando le equazioni di campo (3.1) e le espressioni approssimate (3.10) troviamo:

$$\frac{\partial\Gamma^{\sigma}_{44}}{\partial x^{\sigma}} = -\frac{\alpha^2}{2r^4} \tag{3.11}$$

Cerchiamo, viste le condizioni di simmetria, una soluzione nella forma:

$$\Gamma^{\sigma}_{44} = x_\sigma f(r) \tag{3.12}$$

derivando rispetto a x_σ otteniamo:

$$\frac{\partial\Gamma^{\sigma}_{44}}{\partial x^{\sigma}} = f(r) + \frac{x_\sigma^2}{r}\frac{df(r)}{dr} \tag{3.13}$$

Sommiamo sull'indice σ e sostituiamo nella (3.11):

$$3f + r\frac{df}{dr} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^3 f)}{dr} = -\frac{\alpha^2}{2r^4} \tag{3.14}$$

da cui, integrando:

$$r^3 f = \frac{\alpha^2}{2r} \tag{3.15}$$

$$f(r) = \frac{\alpha^2}{2r^4}$$

Infine, sostituendo nell'espressione (3.12), otteniamo per i simboli di Christoffel:

$$\Gamma^{\sigma}_{44} = x_\sigma \frac{\alpha^2}{2r^4} \tag{3.16}$$

Di conseguenza, considerando che la dipendenza del primo ordine era data dalla (3.10), ricaviamo:

$$\Gamma^{\sigma}_{44} = -\frac{\alpha x_\sigma}{2r^3}(1 - \frac{\alpha}{r}) \tag{3.17}$$

3.3 Il moto planetario

Nella scorsa sezione abbiamo calcolato i coefficienti di connessione fino al secondo ordine. Per determinare l'orbita dobbiamo risolvere le equazioni del moto (2.11):

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = \Gamma^{\nu}_{\sigma\tau} \frac{dx_\sigma}{ds} \frac{dx_\tau}{ds} \tag{3.18}$$

In prima approssimazione queste equazioni si riducono alle equazioni del moto di Newton. Se consideriamo un corpo che si muove a una velocità molto inferiore rispetto a quella della luce, ossia dx_1, dx_2, dx_3 molto minori di dx_4, è lecito scrivere $ds \approx dx_4$. Ne segue che, ricordando le (3.10), le equazioni del moto si riducono a:

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = -\frac{\alpha x_\nu}{2r^3} \tag{3.19}$$

$$\frac{d^2 x_4}{ds^2} = 0$$

Che sono precisamente le equazioni di Newton per un corpo in un campo gravitazionale. Come è noto dallo studio del potenziale di Keplero queste equazioni conducono alla conservazione dell'energia e del momento angolare:

$$\frac{1}{2}u^2 + \Phi = A \tag{3.20}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = B$$

dove con A indichiamo l'energia classica, con B il momento angolare, con u^2 il modulo quadro della velocità e con $\Phi = -\frac{\alpha}{2r}$ il potenziale newtoniano.

Proseguiamo con la seconda approssimazione per ottenere la precessione del perielio dell'orbita. Per arrivare a questo risultato dobbiamo riscrivere le equazioni del moto di modo che tengano conto dei termini del secondo ordine. Tenendo in considerazione la (3.10), l'ultima di queste equazioni diventa:

$$\frac{d^2x_4}{ds^2} = 2\Gamma^4_{\sigma 4}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_4}{ds} = -\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_4}{ds} \tag{3.21}$$

Usando la regola della catena e tenendo a mente che $g^{44} = (g_{44})^{-1}$, otteniamo:

$$\frac{\frac{d^2x_4}{ds^2}}{\frac{dx_4}{ds}} = -\frac{\frac{dg_{44}}{ds}}{g_{44}} \tag{3.22}$$

Integrando ricaviamo:

$$\log\frac{dx_4}{ds} = -\log g_{44} + C \tag{3.23}$$

$$\frac{dx_4}{ds} = -\frac{e^C}{g_{44}}$$

Dove C è una costante di integrazione. Sapendo che per $\alpha = 0$ (in assenza di campo gravitazionale) $\frac{dx_4}{ds} = 1$, possiamo scegliere $C = 0$, espandere il risultato precedente fino al primo ordine e ottenere infine:

$$\frac{dx_4}{ds} \approx 1 + \frac{\alpha}{r} \tag{3.24}$$

Torniamo alle equazioni del moto (3.18) ed esplicitiamo il secondo membro. Per $\sigma = \tau = 4$ abbiamo, espandendo fino al secondo ordine:

$$\Gamma^\nu_{44}(\frac{dx_4}{ds})^2 = -\frac{\alpha x_\nu}{2r^3}(1 + \frac{\alpha}{r}) \tag{3.25}$$

dove abbiamo sfruttato le equazioni (3.17) e (3.24). Per le combinazioni $\sigma \neq 4$, $\tau \neq 4$ otteniamo:

$$-\frac{\alpha x_\nu}{r^3}(\delta_{\sigma\tau} - \frac{3x_\sigma x_\tau}{2r^2}) \tag{3.26}$$

$$-\frac{\alpha x_\nu}{r^3}[u^2 - \frac{3}{2}(\frac{dr}{ds})^2]$$

Le equazioni del moto diventano quindi:

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} = -\frac{\alpha x_\nu}{2r^3}[1 + \frac{\alpha}{r} + 2u^2 - 3(\frac{dr}{ds})^2] \tag{3.27}$$

da cui è evidente che l'Eq.(3.20), per quanto riguarda il momento angolare, resta valida anche al secondo ordine. Tenendo in considerazione (3.20) il secondo membro diventa:

$$-\frac{\alpha x_\nu}{2r^3}[1 - 2A + \frac{3B^2}{r^2}] \tag{3.28}$$

da cui, sostituendo $s' = s\sqrt{1-2A}$ e $B' = \frac{B}{\sqrt{1-2A}}$:

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \tag{3.29}$$

$$\Phi = -\frac{\alpha}{2r}[1 + \frac{B^2}{r^2}]$$

dove per semplicità abbiamo abbandonato l'indice primato. Per ricavare la precessione dell'orbita da queste equazioni procediamo come nel caso classico. Dalla conservazione dell'energia troviamo:

$$u^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{ds^2} = 2A - 2\Phi \tag{3.30}$$

dove per il modulo quadro della velocità abbiamo usato le coordinate polari sul piano dell'orbita. Ricordando $r^2 \frac{d\phi}{ds} = B$ possiamo eliminare ds da questa equazioni e otteniamo finalmente:

$$(\frac{dx}{d\phi})^2 = \frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3 \tag{3.31}$$

dove $x = \frac{1}{r}$. Il secondo termine di questa equazione si può riscrivere come:

$$\alpha x^3 - (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \tag{3.32}$$

dove α_1 e α_2 sono soluzioni dell'equazione quadratica che si ottiene tralasciando il termine di terzo grado nella (3.31) e rappresentano rispettivamente l'inverso dell'afelio e del perielio. Se il coefficiente α è piccolo le prime due soluzioni dell'equazione cubica non si spostano tanto dai valori α_1 e α_2. La terza soluzione approssimata può essere ricavata attraverso la formula di Viet:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{\alpha} \tag{3.33}$$

da cui si ottiene immediatamente:

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha} - \alpha_1 - \alpha_3 \tag{3.34}$$

Ora, integrando per ϕ tra α_1 e α_2, otteniamo:

$$\phi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)[1 - \alpha(x + \alpha_1 + \alpha_2)]}} \tag{3.35}$$

Espandendo fino al primo ordine in α questo integrale diventa:

$$\phi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(1 + \frac{\alpha x}{2} + \alpha\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\, dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}} \tag{3.36}$$

Dividiamo l'integrale in due parti I_1 e I_2:

$$I_1 = [1 + \alpha\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}} \tag{3.37}$$

$$I_2 = \frac{\alpha}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}}$$

L'integrale I_1 si presenta nella stessa forma dell'espressione classica calcolata per il potenziale di Keplero, ne segue che il suo valore sia:

$$I_1 = [1 + \alpha\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}]\pi \tag{3.38}$$

Consideriamo ora il secondo integrale, notiamo che possiamo riscriverlo nella forma:

$$I_2 = -\frac{\alpha}{4}[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{-2x + (\alpha_1 + \alpha_2)}{\sqrt{-x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)x - \alpha_1\alpha_2}}\,dx - (\alpha_1 + \alpha_2)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}}] \tag{3.39}$$

dove è evidente che il secondo addendo è una costante che andrà a sommare l'espressione (3.38). Integrando il primo termine otteniamo infine:

$$I_2' = -\frac{\alpha}{2}[\sqrt{-x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)x - \alpha_1\alpha_2}]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = 0 \tag{3.40}$$

Di conseguenza, per l'angolo tra perielio e afelio:

$$\phi = \pi[1 + \frac{3\alpha}{4}(\alpha_1 + \alpha_2)] \tag{3.41}$$

Da questa equazione otteniamo i 43"/secolo [1] per la precessione dell'orbita, ottenuti seguendo il metodo di Einstein così come pubblicato nell'articolo del 1915.

Conclusioni

Nei tre capitoli precedenti abbiamo studiato il sistema fisico Sole-Mercurio sotto diversi punti di vista. Studiando il potenziale di Keplero abbiamo ricavato l'orbita del pianeta nell'ambito della fisica classica. L'orbita ottenuta si chiude per ogni ciclo completo di rivoluzione attorno al Sole. Il moto di precessione del perielio si può spiegare solo attraverso l'influenza degli altri corpi del Sistema Solare ma, come studiato da Le Verrier, il modello newtoniano non è in accordo con i dati sperimentali. Nel secondo capitolo abbiamo studiato lo stesso sistema con le leggi della Relatività Generale. Ricavando la metrica di Schwarschild abbiamo potuto esprimere l'equazione di Hamilton-Jacobi per l'azione e ricavarne le equazioni del moto. Da quest'ultime abbiamo ottenuto il moto di precessione dell'orbita così come descritto dai dati sperimentali. Infine abbiamo seguito il metodo di Einstein con cui, oltre a riconfermare il risultato ottenuto in precedenza, abbiamo ricavato la nota legge di Newton per l'interazione gravitazionale come approssimazione del primo ordine. Questo risultato ci porta ad affermare che per le perturbazioni dell'orbita, dovute alla presenza degli altri pianeti, calcolate nel modello classico restano valide anche nella teoria di Einstein (il raggio gravitazionale per la Terra è di 9cm). In questo modo la precessione di Mercurio deve essere ritenuta una prova sperimentale a sostegno della validità della Relatività Generale.

Appendice A

A.1 Coordinate curvilinee

La teoria della relatività generale si basa sull'equivalenza di sistemi di riferimento arbitrari. Nasce quindi la necessità di sviluppare una geometria quadridimensionale che si adatti a coordinate arbitrarie. Pensiamo a una generica trasformazione di coordinate tra due sistemi di riferimento $f : x' \longrightarrow x$:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \tag{A.1}$$

dove f è una funzione invertibile. I differenziali delle coordinate si trasformano come:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\, dx'^k \tag{A.2}$$

Chiameremo un insieme di quattro grandezze A^i *quadrivettore controvariante* se trasforma come i differenziali delle coordinate[1]:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\, A'^k \tag{A.3}$$

Consideriamo ora una generica funzione scalare ϕ, come è noto le sue derivate si trasformano per cambiamento di coordinate come:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial \phi}{\partial x'^k} \tag{A.4}$$

Come prima chiameremo un insieme di quattro grandezze A_i *quadrivettore covariante* se trasforma come le derivate di uno scalare:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\, A'_k \tag{A.5}$$

[1] É da notare che con questa definizione le coordinate x^i, a differenza dei loro differenziali, non formano un quadrivettore

In completa analogia si possono definire tensori in forma covariante, controvariante o mista se trasformano rispettivamente come il prodotto di più quadrivettori covarianti, controvarianti o di entrambre le forme. Notiamo che il prodotto scalare contratto di due quadrivettori $A^i B_i$ forma uno scalare invariante per trasformazioni delle coordinate:

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} A'^k B'_l = A'^k B'_k \tag{A.6}$$

Definiamo il quadrato dell'elemento di lunghezza quadridimensionale ds^2 come una forma quadratica dei differenziali delle coordinate:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{A.7}$$

qui le grandezze g_{ik} rappresentano le componenti covarianti del tensore metrico. In base all'equazione precedente questo tensore è sicuramente simmetrico e consente di calcolare il prodotto tra due quadrivettori controvarianti. Analogamente per il prodotto scalare tra due quadrivettori covarianti, definiamo il tensore metrico controvariante g^{ik} come il tensore inverso di g_{ik}:

$$g^{il} g_{lk} = \delta^i_k \tag{A.8}$$

dove abbiamo utilizzato il tensore unità quadridimensionale δ^i_k che vale 1 se $i = k$ e 0 in tutti gli altri casi. Ricordando l'Eq.(A.6), otteniamo una corrispondenza tra vettori covarianti e controvarianti, in particolare:

$$A^i = g^{ik} A_k \tag{A.9}$$

$$A_i = g_{ik} A^k$$

A.2 Dal tensore metrico ai simboli di Christoffel

In coordinate curvilinee i diffirenziali di un quadrivettore controvariante arbitrario non formano necessariamente un vettore. Infatti, data la legge di trasformazione (A.5), i differenziali dA_i trasformano come:

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^l \partial x^i} dx^l \tag{A.10}$$

Il differenziale dA_i non è più un vettore perché rappresenta la differenza di vettori che si trovano in due punti infinitamente vicini, ma distinti, dello spazio-tempo e i coefficienti nelle trasformazioni (A.5) sono funzioni delle coordinate, ovviamente vale lo stesso per i vettori controvarianti. Affinché il differenziale sia un vettore la differenza deve essere calcolata nello stesso punto dello spazio, bisognerà quindi "trasportare" uno dei due vettori sull'altro. Questo "trasporto" non può essere arbitrario. Infatti, in coordinate galileiane, il differenziale standard dA_i è già un vettore. Ne segue che in questo sistema di riferimento questo "trasporto" non deve produrre effetti. É evidente che questa trasformazione consiste nel trasportare parallelamente a se stesso il vettore $A_i + dA_i$ (calcolato nel punto $x^i + dx^i$) in x^i e poi calcolarne la differenza con il vettore A_i. Definiremo *trasporto parallelo* quella trasformazione che in coordinate galieliane lascia le componenti immutate.

Il differenziale per un vettore covariante DA_i in coordinate curvilinee sarà quindi:

$$DA_i = dA_i - \delta A_i \tag{A.11}$$

dove $dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^l}\, dx^l$ rappresenta il differenziale standard e δA_i la variazione dovuta al trasporto parallelo. Concentriamoci sul secondo termine. Questa variazione dipenderà dalle grandezze A_i stesse ma dovrà essere evidentemente lineare, ciò segue dal fatto che la somma di due vettori deve traformarsi con le stesse leggi che valgono per un singolo vettore. Possiamo quindi scrivere:

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k\, dx^l \tag{A.12}$$

dove Γ^k_{il} vengono chiamati simboli di Christoffel o coefficienti di connessione. É facile notare che queste grandezze non formano un tensore. Come abbiamo già detto in un sistema di riferimento galileiano δA_i si annulla, di conseguenza tutti i coefficienti Γ si annullano. Se un tensore è nullo in un dato sistema di riferimento deve essere nullo per ogni scelta delle coordinate. Ne segue che i coefficienti di Christoffel non formano un tensore. Se ora inseriamo questo risultato nella (A.11) otteniamo finalmente un'espressione per il differenziale covariante in coordinate curvilinee:

$$DA_i = (\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k)\, dx^l \tag{A.13}$$

Definiamo quindi *derivata covariante* il tensore[2]:

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k \tag{A.14}$$

Per la forma controvariante basta considerare che dall'invarianza del prodotto scalare segue $\delta A^i B_i = 0$ e quindi:

$$B_i \delta A^i = -A^i \delta B_i = -\Gamma^i_{kl} B_i A^k\, dx^l \tag{A.15}$$

da cui, data l'arbitrarietà di B_i:

$$DA^i = (\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k)\, dx^l \tag{A.16}$$

[2]La natura tensoriale di questa derivata è conseguenza del fatto che agendo su un vettore restituisce un vettore stesso

Per definire la derivata controvariante di un tensore operiamo analogamente. La variazione per trasporto paralello di un tensore A^iB^k è:

$$\delta(A^iB^k) = A^i\delta B^k + B^k\delta A^i = -(A^i\Gamma^k_{lm}B^l + B^k\Gamma^i_{lm}A^l)\,dx^m \tag{A.17}$$

In virtù della linearità di questa equazione possiamo generalizzare a tensori arbitrari e ottenere:

$$DA^{ik} = (\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}A^{mk} + \Gamma^k_{ml}A^{im})\,dx^l \tag{A.18}$$

Essendo la derivata covariante un tensore, altrettanto lo sarà la differenza $A_{k;i} - A_{i;k}$. Scegliamo il vettore A_k di modo che sia il gradiente di una funzione scalare arbitraria $\frac{\partial\phi}{\partial x^k}$. Ne segue che:

$$\frac{\partial A_k}{\partial x^i} = \frac{\partial\phi}{\partial x^i\partial x^k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \tag{A.19}$$

Di conseguenza otteniamo la relazione:

$$A_{k;i} - A_{i;k} = (\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki})\frac{\partial\phi}{\partial x^l} \tag{A.20}$$

In coordinate galileiane la derivata covariante si riduce alla derivata ordinaria. Di conseguenza il primo termine dell'Eq.(A.20) si annulla, ma, essendo un tensore, si annullerà in qualsiasi altro sistema di riferimento. Dall'arbitrarietà di ϕ ne segue la simmetria rispetto agli indici in basso dei simboli di Christoffel:

$$\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{ki} \tag{A.21}$$

Cerchiamo un'espressione per i coefficienti di connessione. Dato che il differenziale così definito è un vettore, possiamo usare le formule (A.9) per alzare e abbassare gli indici. Vale quindi la relazione:

$$DA_i = g_{ik}DA^k \tag{A.22}$$

D'altra parte $A_i = g_{ik}A^k$ e di conseguenza:

$$DA_i = A^kDg_{ik} + g_{ik}DA^k \tag{A.23}$$

Dall'arbitrarietà del quadrivettore A^i ne segue l'importante proprietà:

$$Dg_{ik} = 0 \tag{A.24}$$

Se ora esplicitiamo questa relazione tramite l'Eq.(A.18) otteniamo:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = g_{mk}\Gamma^m_{il} + g_{im}\Gamma^m_{kl} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl} \tag{A.25}$$

dove abbiamo indicato:

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl} \tag{A.26}$$

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}$$

Cicliamo gli indici e ricaviamo:

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,lk} + \Gamma_{l,ik} \tag{A.27}$$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{l,ki} + \Gamma_{k,li}$$

qui abbiamo sfruttato la simmetria rispetto agli indici inferiori. Combinando linearmente questo set di equazioni otteniamo infine l'espressione cercata:

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}) \tag{A.28}$$

In questo modo le derivate del tensore metrico determinano i coefficienti di connessione. Sostituendo quest'ultima equazione nella (A.26) troviamo l'Eq.(2.10).

Definiamo geodesica la traiettoria di un corpo non soggetto a interazioni. I simboli di Christoeffel permettono di determinarne l'equazione in coordinate curvilinee. Come è noto, in uno spazio piatto la velocità $u^i = \frac{dx^i}{ds}$, quadrivettore tangente alla traiettoria, resta costante. Vale quindi la relazione:

$$\frac{du^i}{ds} = 0 \text{ oppure } du^i = 0 \tag{A.29}$$

La generalizzazione in coordinate curvilinee sarà evidentemente:

$$Du^i = du^i + \Gamma^i_{kl}u^k dx^l = 0 \tag{A.30}$$

o, dividendo per ds:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0 \tag{A.31}$$

Quest'ultima rappresenta l'equazione cercata per la geodesica in un sistema di riferimento arbitrario.

A.3 Il tensore di curvatura di Riemann

Il trasporto parallelo di un vettore dipende in generale dalla traiettoria su cui si effettua il trasporto. Ne segue che, trasportando un vettore parallelamente a se stesso lungo una curva chiusa, il vettore risultante sia generalmente diverso da quello iniziale. Cerchiamo di determinare questa variazione. Consideriamo un sistema di riferimento arbitrario e un contorno chiuso infinitesimo. La variazione di un vettore generico ΔA_k per trasporto parallelo lungo tale contorno sarà evidentemente:

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl}A_i\, dx^l \tag{A.32}$$

dove abbiamo utilizzato l'Eq.(A.12). Applichiamo il teorema di Stokes e otteniamo:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}[\frac{\partial \Gamma^i_{km} A_i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl} A_i}{\partial x^m}]\, \Delta f^{lm} \tag{A.33}$$

dove Δf^{lm} rappresenta la superficie infinitesima delimitata dal contorno chiuso. Se ora esprimiamo le derivate del vettore A_i attraverso l'Eq.(A.12), $\frac{\partial A_i}{dx^l} = \Gamma^n_{il} A_n$, ricaviamo finalmente:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \, \Delta f^{lm} \tag{A.34}$$

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$$

R^i_{klm} è il tensore di curvatura o *tensore di Riemann.*[3] Il tensore di curvatura così definito gode di antisimmetria rispetto agli indici ik e lm ed è simmetrico rispetto alle permutazioni di queste coppie. Ne segue che, a meno di un segno, l'unica contrazione non nulla è rappresentata dal tensore, evidentemente simmetrico, di Ricci:

$$R_{ik} = R^l_{ilk} \tag{A.35}$$

Contraendo successivamente otteniamo l'invariante $R = g^{ik} R_{ik} = R^i_i$, chiamato *curvatura scalare.*

[3]La natura tensoriale si evince dal fatto che a primo membro dell'Eq.(A.34) compare la differenza tra due vettori presi nello stesso punto, ossia un vettore stesso.

Bibliografia

[1] Albert Einstein. Explanation of the perihelion motion of mercury from general relativity theory. *Koniglich Preubische Akademie der Wissenschaften*, 1915. Tradotto da Roger A. Rydin, University of Virginia.

[2] Lev D. Landau and Evgenij M. Lifsits. *Teoria dei campi*. Editori Riuniti.

[3] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company.

[4] Karl Schwarzschild. Letter from K. Schwarzschild to A. Einstein dated 22 december 1915. Tradotta da Roger A. Rydin, University of Virginia.

[5] Dr. David R. Williams. Sun fact sheet. Technical report, NASA, 2018.

[6] Dr. David R. Williams. Mercury fact sheet. Technical report, NASA, 2020.