

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

I GRUPPI DEI FREGI  
E  
I GRUPPI CRISTALLOGRAFICI PIANI

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
MONICA IDÀ

Presentata da:  
ALESSANDRO CARAVITA

Sessione Unica  
Anno Accademico 2020-2021

*Ciao nonno Raffaele,  
anche questo traguardo lo dedico a te...*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Richiami sui gruppi</b>	<b>1</b>
1.1 Richiami sui gruppi . . . . .	1
1.2 Il gruppo delle permutazioni $S_n$ . . . . .	2
1.3 Gruppi liberi . . . . .	4
1.4 Generatori e relazioni . . . . .	6
1.5 Azione di un gruppo su un insieme . . . . .	9
<b>2 Richiami sulle isometrie</b>	<b>11</b>
2.1 Affinità del piano . . . . .	11
2.2 Endomorfismi unitari . . . . .	13
2.3 Isometrie di $E^2$ . . . . .	15
<b>3 Gruppi finiti e gruppi discreti di movimenti</b>	<b>24</b>
3.1 Gruppi finiti di movimenti . . . . .	24
3.2 Gruppi discreti di movimenti . . . . .	30
<b>4 I gruppi dei fregi</b>	<b>38</b>
4.1 Classificazione . . . . .	38
4.2 Riconoscimento dei gruppi dei fregi . . . . .	47
4.3 I fregi in arte . . . . .	48
<b>5 I gruppi cristallografici piani</b>	<b>49</b>
5.1 Classificazione . . . . .	49

---

5.2	Riconoscimento dei gruppi cristallografici piani . . . . .	70
<b>6</b>	<b>La simmetria in M.C.Escher</b>	<b>71</b>
6.1	La vita di Escher . . . . .	71
	<b>Bibliografia</b>	<b>75</b>

# Introduzione

La parola *simmetria* è di origine greca ed è composta da *syn* (con) e *metria* (misura). Nell'Antica Grecia, la parola simmetria era legata ai concetti di *proporzione* e di *armonia* con una forte connotazione estetica e razionale. I pitagorici avevano due esempi ideali di simmetria geometrica: la sezione aurea e i cinque solidi platonici. In entrambi i casi il concetto di simmetria aveva anche un significato mistico e religioso, il quale rivelava l'armonia dell'universo. Infatti rettangoli con rapporto aureo tra i lati erano considerati esteticamente perfetti, piacevoli alla visione e perfino di buon auspicio. Molti studiosi sostengono che la facciata del Partenone (Atene, Grecia) fosse stata progettata utilizzando la sezione aurea. L'altro ideale importante per la simmetria era quello dei solidi platonici: Platone considerava questi cinque solidi forme perfette. Gli studi sui poliedri regolari vennero avviati nella scuola Pitagorica, di cui Platone fu allievo. Quest'ultimo, nel *Timeo*, associò a ognuno di essi uno dei quattro elementi: al tetraedro il fuoco, al cubo la terra, all'ottaedro l'aria, all'icosaedro l'acqua, mentre nel *Fedone* ritenne che il dodecaedro fosse la forma dell'universo.

Il mondo latino si appropriò di questa nozione "antica" di simmetria, la quale rimase dominante per tutto il Rinascimento. Ad esempio, Vitruvio, per spiegare il significato della simmetria in architettura, utilizzò il paragone con il corpo umano. L'armonia del corpo umano dipendeva dalla disposizione simmetrica delle parti: occhi, braccia, gambe etc. Allo stesso modo l'armonia dei templi nasceva dalla simmetria e dal rispetto delle proporzioni. *L'uomo vitruviano* di Leonardo da Vinci è una celeberrima rappresentazione delle proporzioni ideali del corpo umano, infatti egli cercò di dimostrare come esso potesse essere armoniosamente inscritto nel cerchio, che simboleggia il Cielo, e quindi la perfezione divina, e nel quadrato, che simboleggia la Terra. L'uomo quindi rappresen-

rebbe l'unione tra il microcosmo e il macrocosmo, e quindi l'idea stessa di mondo. All'inizio dell'età moderna, alla nozione "antica" di simmetria si sovrappose una visione "moderna", fondata non più su rapporti di proporzione, ma su un rapporto di uguaglianza tra le parti di una figura. Infatti nel linguaggio quotidiano la parola simmetria viene usata per indicare un oggetto che è composto da parti che si ripetono. Ad esempio, se ci domandiamo come facciamo a definire simmetrico un oggetto, ci accorgiamo che guardandolo compiamo alcune operazioni mentali che consistono nel trovare relazioni di uguaglianza tra le parti dell'oggetto e tra le posizioni della loro distribuzione spaziale. È questa uguaglianza tra le parti che permette di distinguere la simmetria "antica" da quella "moderna". Questa caratteristica rese possibile lo sviluppo in senso matematico della nozione di simmetria e permise di porre le basi per lo sviluppo della nozione scientifica di simmetria. Infatti uno dei concetti più fecondi legati al concetto di simmetria di una figura è quello di *gruppo di simmetria*, cioè il gruppo formato dalle isometrie che trasformano la figura in se stessa. Pensiamo, per esempio, ai modi di ricoprire il piano ripetendo indefinitamente un certo motivo. Lo studio dei gruppi di simmetria di questi motivi ripetuti ha portato a dimostrare che, sebbene le decorazioni del piano siano illimitate, sono limitate per quanto riguarda il tipo.



Figura 1: Evgraf Fedorov

Nel 1891 il cristallografo Evgraf Fedorov, classificò completamente i gruppi di simmetria delle decorazioni lineari, detti i *gruppi dei fregi*, che contengono traslazioni in una sola direzione, e i gruppi delle decorazioni del piano, detti i *gruppi cristallografici piani*, che contengono traslazioni in due direzioni indipendenti. Quasi contemporaneamente, sempre nel 1891, i gruppi cristallografici furono anche classificati da A.M.Schonflies. In particolare Fedorov e Schonflies dimostrarono che esistono solo 7 gruppi dei fregi e 17 gruppi cristallografici piani. Inoltre nel 1830, prima che fosse dimostrato l'analogo risultato per i gruppi cristallografici piani, il mineralogista Johann Hessel aveva già dimostrato l'esistenza di soltanto 230 tipi diversi di gruppi cristallografici spaziali. Questo ultimo teorema si è rivelato fondamentale nello studio dei cristalli. Infatti, così come le decorazioni sono

gli oggetti simmetrici più comuni nel piano allo stesso modo i cristalli lo sono nello spazio. Tra i problemi che Hilbert presentò nel 1900 c'è il diciottesimo problema, la prima parte del quale consisteva nella domanda seguente: è vero che nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale c'è solo un numero finito di tipi essenzialmente diversi di gruppi di isometrie con una regione fondamentale? Nel 1910, una risposta positiva fu data dal matematico Ludwig Bieberbach; tuttavia ancora oggi non si conosce una relazione esplicita che dia il numero di tali gruppi per un qualsiasi  $n$  dato. Solo negli anni 70, ad esempio, si è dimostrato che per  $n = 4$  ne esistono 4783.

Il concetto di gruppo di simmetria ha trovato numerose applicazioni anche in chimica e in fisica. Molti oggetti con cui si ha a che fare in chimica, come le molecole, possono essere classificati a seconda del loro gruppo di simmetria e spesso il semplice esame delle proprietà di simmetria è sufficiente per prevedere alcune caratteristiche della molecola. In fisica le applicazioni del concetto di gruppo di simmetria riguardano la fisica delle particelle.

Da un punto di vista artistico, il popolo arabo ha sviluppato mosaici e decorazioni di una bellezza unica e straordinaria. Un esempio importante è rappresentato dalla fortezza dell'Alhambra (Granada, Spagna), monumento dichiarato Patrimonio dell'umanità nel 1984. La motivazione, breve, che appare nella pratica di catalogazione dice che: "*Il bene incorpora apici artistici unici. È una testimonianza eccezionale della Spagna musulmana del secolo XIV.*"

Nell'ultimo secolo, l'Alhambra ha suscitato un grande interesse nel mondo della Matematica, in particolare riguardo allo studio dei suoi mosaici geometrici. Infatti l'Alhambra è, attualmente, il solo monumento costruito prima della teoria dei gruppi che possieda almeno un esempio di ognuno dei 17 gruppi cristallografici piani. Inoltre, i mosaici dell'Alhambra hanno ispirato artisti del livello di Maurits Cornelis Escher.

Studiare i gruppi cristallografici piani equivale a studiare quello che Escher chiamava il problema della divisione regolare del piano, riguardo alla quale l'artista scrisse: "*Essa è*



Figura 2: Alhambra, Granada

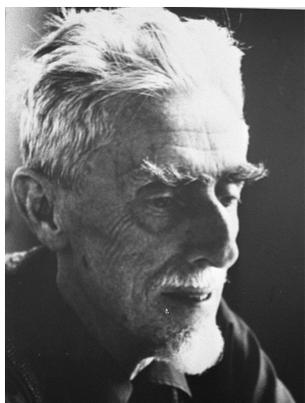


Figura 3: M.C.Escher



Figura 4: Decorazioni piastrelle Alhambra

*la più ricca fonte di ispirazione da cui io abbia mai derivato le mie idee ed essa non è in nessun modo inaridita".*

Quanto Escher fosse predisposto per la scoperta e l'applicazione della divisione regolare del piano, cominciamo già a vederlo in un'opera del tempo della sua formazione: *Otto teste* (1922). Infatti su un unico blocco di legno sono incise otto teste diverse, quattro rivolte verso l'alto e quattro rivolte verso il basso. Nel 1926, conoscendo già l'Alhambra, Escher intraprese sforzi colossali per disegnare rivestimenti regolari del piano, ma non riuscì a portarli a termine. Infatti la sola cosa che gli riuscì, furono alcuni animali piuttosto brutti e malriusciti. Per dieci anni la divisione regolare del piano rimase per lui un tabù, fino a quando nel 1936, Escher rivisitò l'Alhambra con sua moglie. Per alcuni giorni egli e sua moglie ricopiarono le decorazioni moresche e, dopo il suo ritorno in patria, le analizzò a fondo. Lesse libri sull'arte ornamentale e trattati di matematica che non riuscì a capire. L'unico aiuto furono le illustrazioni che copiava e schematizzava. Tuttavia Escher, privo di una adeguata conoscenza matematica, riuscì a individuare tutti i 17 gruppi cristallografici piani, e ne rappresentò 15 nelle sue opere. Una caratteristica della scomposizione del piano di Escher è che egli scelse sempre motivi che rappresentassero qualcosa di concreto. Egli stesso scrisse: "*I mori erano maestri proprio nel riempire completamente superfici con un motivo sempre uguale. In Spagna, all'Alhambra, hanno decorato pavimenti e pareti mettendo uno vicino all'altro pezzi*

*colorati di maiolica della stessa forma senza lasciare spazi intermedi. Peccato che l'Islam vietasse di realizzare disegni con figure. Nei loro mosaici si limitarono a comporre forme geometriche astratte. [...] Questa limitazione è per me tanto più incomprensibile, perché la riconoscibilità delle componenti dei miei stessi motivi ornamentali è la ragione del mio interesse in questo campo."*

Nel sesto capitolo si trova una breve biografia dell'artista.

Gli altri capitoli della tesi sono strutturati come segue: nel primo capitolo si richiamano alcune definizioni e alcuni risultati generali che verranno utilizzati per lo sviluppo della tesi. In particolare si richiamano i concetti di gruppo ciclico  $C_n$  e di gruppo delle permutazioni  $S_n$ . In seguito si parla di gruppo libero su insieme, di come descrivere un gruppo mediante generatori e relazioni e di azione di un gruppo su un insieme.

Nel secondo capitolo viene sviluppato il tema delle isometrie del piano. Innanzitutto, si parla di affinità del piano e di endomorfismi unitari. In seguito si ha la definizione di isometria e viene enunciato il teorema di Chasles, il quale permette di classificare le isometrie del piano. Inoltre si hanno una serie di proposizioni, le quali mostrano alcune proprietà di composizioni delle isometrie, necessarie per i capitoli successivi.

Il terzo capitolo riguarda i gruppi finiti e i gruppi discreti di movimenti. Nella prima parte viene enunciato e dimostrato il teorema del punto fisso; viene definito il gruppo diedrale  $D_n$  di ordine  $2n$ , inoltre viene dimostrato che  $C_n$  e  $D_n$  sono sottogruppi dei movimenti rigidi che lasciano fissa l'origine. Nella seconda parte si hanno la definizione di gruppo discreto di movimenti e di sottogruppo delle traslazioni di un gruppo di isometrie; inoltre viene dimostrato che i gruppi discreti del piano possono essere solo di tre tipologie. In seguito vi sono la definizione di gruppo puntuale di un gruppo di isometrie e alcune proposizioni, le quali sono fondamentali per introdurre i gruppi di simmetria dei fregi e i gruppi cristallografici piani.

Nel quarto capitolo vengono classificati i gruppi dei fregi, i quali contengono traslazioni in una sola direzione, e viene dimostrato che sono esattamente 7. Inoltre vi è un esempio per ciascuno dei setti fregi nell'arte decorativa.

Nel quinto capitolo vengono classificati i gruppi cristallografici piani, i quali contengono traslazioni in due direzioni indipendenti, e viene dimostrato che sono esattamente 17. Inoltre vengono definiti i 5 possibili reticoli del piano, da cui si parte per la dimostrazione del teorema di classificazione dei gruppi cristallografici piani.

# Capitolo 1

## Richiami sui gruppi

Sia  $T$  un insieme e siano  $f, g$  funzioni (o applicazioni) definite da  $T$  a  $T$ . Denotiamo con  $fg$  l'applicazione composta  $t \mapsto f(g(t))$ . Inoltre denotiamo con  $1$  l'applicazione *identità*:  $1(a) = a$  per ogni  $a \in T$ .

Con il simbolo " $\subset$ " intendiamo dire contenuto o uguale. Se  $G$  è un gruppo e scriviamo " $H \leq G$ ", intendiamo dire che  $H$  è un sottogruppo di  $G$ .

Nel primo e nel secondo capitolo verranno richiamate alcune nozioni di geometria ed algebra, le quali saranno necessarie per poter sviluppare e comprendere gli argomenti della tesi. Per ulteriori approfondimenti vedere [1], [2] e [3].

### 1.1 Richiami sui gruppi

**Definizione 1.1.1.** Un gruppo  $(G, \cdot)$  si dice *ciclico* se esiste un elemento  $g \in G$  tale che

$$G = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Scriviamo in tale caso che  $G = \langle g \rangle$  e diciamo che  $g$  è un *generatore di  $G$* , o che  $g$  *genera  $G$* .

**Osservazione 1.1.2.** Un gruppo ciclico può avere più di un generatore. Per esempio l'insieme  $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}^*$  con l'operazione di prodotto è un gruppo ciclico ed ha due generatori  $i$  e  $-i$ , quindi  $G = \langle i \rangle = \langle -i \rangle$ .

**Teorema 1.1.3.** *Sia  $G$  un gruppo ciclico,  $G = \langle g \rangle$ , allora  $G$  è isomorfo a  $(\mathbb{Z}, +)$  se  $g$  ha periodo infinito oppure a  $(\mathbb{Z}_n, +)$  se  $g$  ha periodo  $n$ . Inoltre un gruppo ciclico è sempre commutativo.*

*Dimostrazione.* Si veda per esempio [2]. □

**Definizione 1.1.4.** Sia  $G$  un gruppo e sia  $X$  un sottoinsieme di  $G$ . Si definisce *sottogruppo generato da  $X$*  il più piccolo sottogruppo di  $G$  contenente  $X$ . Esso coincide con l'intersezione di tutti i sottogruppi di  $G$  contenenti  $X$ . Si indica con  $\langle X \rangle$ . Quindi

$$\langle X \rangle := \bigcap_{X \subset H \leq G} H.$$

Se  $X = \{g\} \subset G$  è costituito da un solo elemento, allora

$$\langle X \rangle = \langle g \rangle.$$

**Proposizione 1.1.5.** *Sia  $X$  un sottoinsieme (finito o infinito) di un gruppo  $G$ ,  $X \neq \emptyset$ . Allora*

$$\langle X \rangle = \{t_1 t_2 \dots t_n \mid t_i \in X \text{ oppure } t_i^{-1} \in X, n \in \mathbb{N}\}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $H = \{t_1 t_2 \dots t_n \mid t_i \in X \text{ oppure } t_i^{-1} \in X, n \in \mathbb{N}\}$ . Per prima cosa  $H \neq \emptyset$ , perché  $X \neq \emptyset$ . Dimostriamo quindi che  $H$  è un sottogruppo facendo vedere che, per ogni  $a, b \in H$  si ha che  $ab^{-1} \in H$ . Siano  $a = a_1 a_2 \dots a_n$  con  $a_i \in X$  oppure  $a_i^{-1} \in X$ , e  $b = b_1 b_2 \dots b_m$  con  $b_i \in X$  oppure  $b_i^{-1} \in X$ , allora  $ab^{-1} = a_1 \dots a_n b_m^{-1} \dots b_1^{-1} \in H$ . Ora,  $H \supset X$  e, se  $K$  è un sottogruppo di  $G$  che contiene  $X$ ,  $K$  contiene tutti i prodotti  $t_1 t_2 \dots t_n$ , con  $t_i \in X$  oppure  $t_i^{-1} \in X$ , cioè  $K \supset H$ . In conclusione  $H$  è il più piccolo sottogruppo di  $G$  che contiene  $X$  e quindi  $H = \langle X \rangle$ . □

## 1.2 Il gruppo delle permutazioni $S_n$

**Proposizione-Definizione 1.2.1.** *Una applicazione biettiva  $p$  di un insieme  $T$  in sé è chiamata permutazione dell'insieme.*

*L'insieme delle permutazioni con l'operazione di composizione costituisce un gruppo in generale non commutativo, detto il gruppo simmetrico di  $T$ , denotato con  $S(T)$ .*

*Se  $T = \{1, 2, \dots, n\}$ , l'insieme delle permutazioni su  $T$  si denota con  $S_n$ .*

*Dimostrazione.* La composizione di due permutazioni di  $T$  è ancora una permutazione di  $T$ , infatti se  $f$  e  $g$  sono due applicazioni biettive di  $T$ , anche le applicazioni composte  $fg$  e  $gf$  sono applicazioni biettive di  $T$ . L'elemento neutro  $1 \in S(T)$ . Se  $f \in S(T)$ , dalla teoria delle applicazioni biettive, esiste  $f^{-1}$ , quindi  $f^{-1} \in S(T)$ . L'associatività segue dalla teoria delle applicazioni. Infine poiché si può avere  $fg \neq gf$ , si ha che  $S(T)$  è un gruppo non commutativo.  $\square$

Inoltre, ricordiamo che il gruppo delle permutazioni  $S_n$  ha ordine  $n!$ .

**Esempio 1.2.2.** Il gruppo simmetrico  $S_3$  contiene sei elementi e costituisce un esempio importante, poiché è il più piccolo gruppo in cui la composizione non è commutativa. Per descrivere questo gruppo, scegliamo due permutazioni particolari  $x, y$  mediante le quali si possono scrivere tutte le altre. Utilizzando la notazione ciclica, poniamo:

$$x := (1, 2, 3),$$

e

$$y := (1, 2).$$

Le sei permutazioni su  $\{1, 2, 3\}$  sono

$$\{1, x, x^2, y, xy, x^2y\} = \{x^i y^j \text{ tale che } 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1\}.$$

Questo può essere verificato calcolando i prodotti.

Inoltre le regole di composizione di  $S_3$ :

$$x^3 = 1, \quad y^2 = 1, \quad yx = x^2y, \tag{1.1}$$

le quali possono essere verificate direttamente, sono sufficienti per effettuare tutti i calcoli nel gruppo  $S_3$ . Infatti applicando più volte le (1.1) un qualsiasi prodotto degli elementi  $x, y$  e dei loro inversi può essere ridotto nella forma  $x^i y^j$  con  $0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1$ . Ad esempio consideriamo  $x^{-1}y^3x^2y$ , esso può essere ricondotto nella forma  $x^i y^j$  nel seguente modo:

$$x^{-1}y^3x^2y = x^{-1}yy^2yx = x^{-1}yyx = x^{-1}x = 1.$$

Inoltre, utilizzando le prime due relazioni (1.1), la terza può essere scritta nel seguente modo:

$$xyxy = 1.$$

Con le (1.1) si può scrivere una tabella di moltiplicazione completa per  $S_3$ , per tale ragione queste regole vengono chiamate *relazioni che definiscono il gruppo*.

$\cdot$	1	$x$	$x^2$	$y$	$xy$	$x^2y$
1	1	$x$	$x^2$	$y$	$xy$	$x^2y$
$x$	$x$	$x^2$	1	$xy$	$x^2y$	$y$
$x^2$	$x^2$	1	$x$	$x^2y$	$y$	$xy$
$y$	$y$	$x^2y$	$xy$	1	$x^2$	$x$
$xy$	$xy$	$y$	$x^2y$	$x$	1	$x^2$
$x^2y$	$x^2y$	$xy$	$y$	$x^2$	$x$	1

(1.2)

Infine notiamo che in  $S_3$  non vale la proprietà commutativa poiché  $yx \neq xy$ .

### 1.3 Gruppi liberi

**Definizione 1.3.1.** Sia  $S$  un insieme arbitrario di simboli,  $S = \{a, b, c, \dots\}$ , che può essere finito o infinito. Una successione finita di simboli di  $S$ , in cui sono ammesse ripetizioni, si definisce *parola*.

Per esempio,  $a$ ,  $bb$ ,  $cba$ ,  $aabbcc$  sono parole.

Denotiamo con  $W$  l'insieme di tutte le parole su  $S$  e definiamo su di esse un'operazione mediante *giustapposizione*:

$$\begin{aligned} * : W \times W &\rightarrow W \\ (w, w') &\mapsto ww'. \end{aligned}$$

Si ha immediatamente che l'operazione di composizione  $*$  è associativa. Inoltre, la "parola vuota" può essere introdotta come elemento neutro rispetto a tale legge ed essa verrà denotata con il simbolo 1.

L'insieme  $W$  non è un gruppo, poiché mancano gli inversi, per tale ragione è chiamato il *monoide libero* sull'insieme di simboli  $S$ .

Sia  $S'$  l'insieme costituito dai simboli di  $S$  e dai simboli  $a^{-1}$  per ogni  $a \in S$ , cioè:

$$S' = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, \dots\}.$$

Sia  $W'$  l'insieme delle parole su  $S'$ . Se una parola  $w \in W'$  è della forma

$$\dots xx^{-1}\dots \quad \text{oppure} \quad \dots x^{-1}x\dots$$

per qualche  $x \in S$ , possiamo ridurre la sua lunghezza cancellando  $x$  e  $x^{-1}$ .

**Definizione 1.3.2.** Una parola  $w \in W'$  si dice *ridotta* se non è possibile effettuare cancellazioni. A partire da ogni parola  $w$ , è possibile eseguire un numero finito di cancellazioni, ottenendo alla fine una parola ridotta  $w_0$ , la quale si chiama *forma ridotta* di  $w$ .

Spesso è possibile operare le cancellazioni in più modi.

**Proposizione 1.3.3.** *Esiste un'unica forma ridotta di una parola assegnata  $w \in W'$ .*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sulla lunghezza di  $w$ . Se  $w$  è ridotta, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, deve esistere qualche coppia di lettere che possono essere cancellate, diciamo la coppia sottolineata:

$$w = \dots \underline{xx}^{-1} \dots,$$

dove  $x$  denota un generico elemento di  $S'$ , con la convenzione che se  $x = a^{-1}$ , allora  $x^{-1} = a$ . Ora dimostreremo che possiamo ottenere ogni forma ridotta  $w_0$  di  $w$  cancellando per prima la coppia  $\underline{xx}^{-1}$ , in questo modo la proposizione seguirà per induzione sulla parola accorciata  $\dots \underline{xx}^{-1} \dots$  così ottenuta. Sia  $w_0$  una forma ridotta di  $w$ . Sappiamo che  $w_0$  è ottenuta da  $w$  mediante una successione di cancellazioni. La prima casistica è che la coppia  $\underline{xx}^{-1}$  venga cancellata in qualche passo di questa successione. Allora possiamo riordinare le operazioni e cancellare  $\underline{xx}^{-1}$  per prima. Quindi questo caso è risolto. D'altra parte, la coppia  $\underline{xx}^{-1}$  non può restare in  $w_0$ , poiché  $w_0$  è ridotta. A un certo punto, quindi, almeno uno dei due simboli deve essere cancellato. Se la coppia stessa non è stata cancellata, allora la prima cancellazione che riguarda la coppia deve essere del tipo:

$$\dots x^{-1} \underline{xx}^{-1} \dots \quad \text{oppure} \quad \dots \underline{xx}^{-1} x \dots$$

Si noti che in entrambi i casi la parola ottenuta mediante questa cancellazione è la stessa di quella che si sarebbe ottenuta cancellando la coppia originaria  $\underline{xx}^{-1}$ . Ci troviamo così nel primo caso, e la proposizione è dimostrata.  $\square$

**Definizione 1.3.4.** Due parole  $w$  e  $w'$  di  $W'$  si dicono *equivalenti* se hanno la stessa forma ridotta. In tale caso scriviamo  $w \sim w'$ .

Si ha immediatamente che  $\sim$  è una relazione di equivalenza.

**Proposizione 1.3.5.** *I prodotti di parole equivalenti sono equivalenti, cioè se  $w \sim w'$  e  $v \sim v'$ , allora  $wv \sim w'v'$ .*

*Dimostrazione.* Per ottenere la parola ridotta equivalente al prodotto  $wv$ , possiamo innanzitutto cancellare quanto più possibile dalle parole  $w$  e  $v$ , per ridurle rispettivamente alle loro forme ridotte  $w_0$  e  $v_0$ . Allora  $wv$  è ridotta a  $w_0v_0$ . Ora possiamo continuare a cancellare in  $w_0v_0$ , se possibile. Poiché  $w \sim w'$  e  $v \sim v'$ , lo stesso procedimento applicato a  $w'v'$ , porta anche esso a  $w_0v_0$ , e quindi fornisce la stessa parola ridotta.  $\square$

**Proposizione 1.3.6.** *Denotiamo con  $F$  l'insieme quoziente dell'insieme delle parole  $W'$  con la relazione di equivalenza appena introdotta. Allora  $F$  è un gruppo rispetto alla legge di composizione indotta da  $W'$ .*

*Dimostrazione.* L'associatività della moltiplicazione e il fatto che la classe della parola vuota  $1$  è l'elemento neutro discendono direttamente dalle proprietà corrispondenti in  $W'$ . Resta da verificare che tutti gli elementi di  $F$  siano invertibili: se  $w = xy\dots z$ , allora la classe di  $z^{-1}\dots y^{-1}x^{-1}$  è l'inversa della classe di  $w$ .  $\square$

**Definizione 1.3.7.** Il gruppo  $F$  delle classi di equivalenza di parole è il *gruppo libero* sull'insieme  $S$ .

**Osservazione 1.3.8.** Per la proposizione (1.3.3) un elemento del gruppo libero  $F$  corrisponde ad un'unica parola ridotta di  $W'$ .

## 1.4 Generatori e relazioni

Dopo aver descritto i gruppi liberi, consideriamo ora il caso in cui esistono alcune relazioni non banali tra i generatori di un gruppo.

**Proposizione 1.4.1** (Proprietà di rappresentazione del gruppo libero). *Sia  $F$  il gruppo libero su un insieme  $S = \{a, b, \dots\}$  e sia  $G$  un gruppo. Ogni applicazione tra insiemi  $f: S \rightarrow G$  si estende in modo unico ad un omomorfismo di gruppi  $\varphi: F \rightarrow G$ .*

*Se denotiamo l'immagine  $f(x)$  di un elemento  $x \in S$  con  $\bar{x}$ , allora  $\varphi$  manda una parola di  $S' = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, \dots\}$  nel prodotto corrispondente degli elementi  $\{\bar{a}, \bar{a}^{-1}, \bar{b}, \bar{b}^{-1}, \dots\}$  in  $G$ .*

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che  $\varphi$  sia ben definita, cioè che due parole equivalenti in  $W'$  corrispondono allo stesso elemento in  $G$ . Questo è ovvio poiché la cancellazione in una parola non cambia il prodotto corrispondente in  $G$ . Inoltre, poiché la moltiplicazione in  $F$  è definita mediante giustapposizione, l'applicazione  $\varphi$  è un omomorfismo di gruppi. Essa rappresenta l'unico modo di estendere  $f$  ad un omomorfismo.  $\square$

**Proposizione-Definizione 1.4.2.** *Sia  $S$  un sottoinsieme di un gruppo  $G$ . Si dice che  $S$  genera il gruppo  $G$  se l'omomorfismo  $\varphi$  di (1.4.1) dal gruppo libero su  $S$  a  $G$  è suriettivo, cioè ogni elemento di  $G$  è un prodotto di una successione finita di elementi di  $S'$ . In tal caso gli elementi di  $S$  vengono chiamati generatori di  $G$ .*

*In ogni caso, sia che  $S$  generi o non generi  $G$ , l'immagine di  $\varphi$  è il sottogruppo di  $G$  generato da  $S$ , cioè  $\text{Im}\varphi = \langle S \rangle$ . In particolare tale sottogruppo è costituito da tutti i prodotti degli elementi di  $S'$ .*

**Osservazione 1.4.3.** Supponiamo che  $S$  generi  $G$ . Poiché  $\varphi$  è un omomorfismo suriettivo, il primo teorema di omomorfismo ci dice che  $G$  è isomorfo al gruppo quoziente  $F/N$ , dove  $N = \ker\varphi$ . Definiamo gli elementi di  $N$  relazioni tra i generatori di  $G$ . Quindi una relazione è la classe di equivalenza di una parola  $w$  tale che  $\varphi(w) = 1$ .

In particolare, se  $N = \{1\}$ ,  $\varphi$  è un isomorfismo. In tale caso, anche  $G$  è chiamato gruppo libero.

Ma il sottogruppo  $N$  è infinito, a meno che  $G$  non sia libero, quindi non possiamo elencare tutti i suoi elementi. Allora diamo la seguente definizione:

**Definizione 1.4.4.** Un insieme di parole  $R = \{r_1, r_2, \dots\}$  è un insieme di relazioni che definiscono  $G$  se  $R \subset N$  e se  $N$  è il più piccolo sottogruppo normale contenente  $R$ .

**Osservazione 1.4.5.** Sia  $S$  un insieme di generatori per  $G$ ; poiché  $G$  è isomorfo a  $F/\ker\varphi$ , come già detto nell'osservazione (1.4.3), si ha che  $G$  è completamente determinato dall'insieme di generatori  $S$  e dall'insieme di relazioni  $R$ .

**Proposizione 1.4.6** (Proprietà di rappresentazione dei gruppi quoziente). *Siano  $G, G'$  due gruppi e sia  $N$  un sottogruppo normale di  $G$ . Denotiamo con  $\pi$  l'applicazione canonica  $\pi: G \rightarrow G/N$  definita da  $\pi(a) = aN = \bar{a}$ . Sia  $\varphi: G \rightarrow G'$  un omomorfismo il cui nucleo contenga  $N$ . Allora esiste un unico omomorfismo  $\bar{\varphi}: G/N \rightarrow G'$  tale che  $\bar{\varphi}\pi = \varphi$ , cioè  $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a)$ .*

*Dimostrazione.* Per definire l'applicazione  $\bar{\varphi}: G/N \rightarrow G'$ , è necessario definire  $\bar{\varphi}(\alpha)$  per ogni elemento  $\alpha$  di  $G/N$ . Rappresentiamo  $\alpha$  mediante un elemento  $a \in G$  tale che  $\alpha = \pi(a)$ , cioè  $\alpha = \bar{a}$ . Poiché vogliamo che l'applicazione  $\bar{\varphi}$  soddisfi la relazione  $\bar{\varphi}(\pi(a)) = \varphi(a)$ , non c'è altra scelta che definire  $\bar{\varphi}$  mediante la legge  $\bar{\varphi}(\alpha) = \varphi(a)$ .

Ora, vogliamo dimostrare che  $\bar{\varphi}$  è ben definita, cioè dobbiamo dimostrare che il valore che si ottiene per  $\bar{\varphi}(\alpha)$ , cioè  $\varphi(a)$ , dipende soltanto da  $\alpha$  e non dalla scelta del rappresentante  $a$ . Siano  $a$  e  $a'$  due elementi di  $G$  tali che  $\bar{a} = \bar{a}' = \alpha$ . L'uguaglianza  $\bar{a} = \bar{a}'$  significa che  $aN = a'N$ , oppure che  $a' \in aN$ . Pertanto  $a' = an$  per qualche  $n \in N$ . Poiché per ipotesi  $N \subset \ker\varphi$ ,  $\varphi(n) = 1$ . Dunque  $\varphi(a') = \varphi(an) = \varphi(a)\varphi(n) = \varphi(a)$ , quindi  $\varphi$  è ben definita.

Infine, l'applicazione  $\bar{\varphi}$  è un omomorfismo, infatti  $\bar{\varphi}(\bar{ab}) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \bar{\varphi}(\bar{a})\bar{\varphi}(\bar{b})$ . □

**Esempio 1.4.7.** Un esempio di gruppo dato tramite generatori e relazioni è il gruppo delle permutazioni  $S_3$ , il quale è generato da due elementi  $x, y$  con le relazioni:

$$x^3 = 1, \quad y^2 = 1, \quad xyxy = 1. \quad (1.3)$$

Infatti abbiamo già dimostrato che  $S_3$  è generato dagli elementi  $x, y$  che soddisfano (1.3). Pertanto, indicando con  $F$  il gruppo libero su  $x, y$ , esiste un'applicazione suriettiva  $\varphi: F \rightarrow S_3$ , e  $R = \{x^3, y^2, xyxy\}$  è contenuto nel  $\ker\varphi$ . Sia  $N$  il più piccolo sottogruppo normale di  $F$  contenente  $R$ . Allora, poiché  $\ker\varphi$  è un sottogruppo normale che contiene  $R$ ,  $N \subset \ker\varphi$ . La proprietà di rappresentazione dei gruppi quoziente (1.4.6) fornisce un omomorfismo  $\bar{\varphi}: F/N \rightarrow S_3$ . Se dimostriamo che  $\bar{\varphi}$  è un'applicazione biettiva, la

proposizione è dimostrata.

La  $\bar{\varphi}$  è suriettiva, poiché  $\varphi$  è suriettiva. Inoltre, in  $F/N$  valgono le relazioni  $\bar{x}^3 = 1$ ,  $\bar{y}^2 = 1$ ,  $\overline{xyxy} = 1$ . Usando queste relazioni, possiamo esprimere ogni parola in  $\bar{x}, \bar{y}$  nella forma:  $\bar{x}^i \bar{y}^j$ , con  $0 \leq i \leq 2$  e  $0 \leq j \leq 1$ . Questo prova che  $F/N$  ha al più 6 elementi. Poiché  $S_3$  ha esattamente 6 elementi, ne segue che  $\bar{\varphi}$  è biettiva.

## 1.5 Azione di un gruppo su un insieme

**Definizione 1.5.1.** Siano  $G$  un gruppo e  $S$  un insieme. Un'azione di  $G$  su  $S$  è un'applicazione:

$$\begin{aligned} G \times S &\rightarrow S \\ (g, s) &\mapsto gs, \end{aligned}$$

tale che soddisfi i seguenti assiomi:

1.  $1s = s$ , per ogni  $s \in S$  ( $1$  è l'elemento neutro di  $G$ );
2.  $(gg')s = g(g's)$ , per ogni  $g, g' \in G$  e  $s \in S$ .

Un insieme  $S$ , con un'azione di  $G$ , è chiamato anche un  $G$ -insieme.

Il motivo per cui una legge di composizione del genere è detta "azione" è che, se fissiamo un elemento  $g$  di  $G$ , ma lasciamo variare  $s$  in  $S$ , allora tale legge definisce un'applicazione di  $S$  in sé; denotiamo tale applicazione con  $m_g$ . Quindi:

$$\begin{aligned} m_g : S &\rightarrow S \\ s &\mapsto gs. \end{aligned}$$

Questa applicazione descrive il modo in cui l'elemento  $g$  opera su  $S$ . Inoltre  $m_g$  è una permutazione di  $S$ , infatti gli assiomi provano che essa ha l'inversa destra e sinistra:

$$m_{g^{-1}} = \text{moltiplicazione per } g^{-1}.$$

Si ha:

$$m_{g^{-1}}(m_g(s)) = g^{-1}(g(s)) = (g^{-1}g)s = 1s = s,$$

ed analogamente, scambiando i ruoli di  $g$  e  $g^{-1}$ , si ottiene:

$$m_g(m_{g^{-1}}(s)) = g(g^{-1}(s)) = (gg^{-1})s = 1s = s.$$

**Definizione 1.5.2.** Siano  $G$  un gruppo e  $S$  un insieme. Sia  $s \in S$ , definiamo l'orbita di  $s$  in  $S$  come l'insieme:

$$O_s = \{s' \in S \mid s' = gs \text{ per qualche } g \in G\}.$$

**Osservazione 1.5.3.** L'orbita è un sottoinsieme di  $S$ . Dato che gli elementi di  $G$  operano su  $S$  mediante permutazioni, allora  $O_s$  è l'insieme delle immagini di  $s$  rispetto alle varie permutazioni  $m_g$ .

**Osservazione 1.5.4.** Le orbite relative all'azione di un gruppo sono classi di equivalenza rispetto alla relazione:

$$s \sim s' \Rightarrow s' = gs \text{ per qualche } g \in G.$$

Infatti  $s \sim s$ , poiché  $s = 1s$ . Se  $s \sim s'$ , allora  $s' = gs$ , da cui  $g^{-1}s' = s$ , quindi  $s' \sim s$ . Infine se  $s \sim s'$  e  $s' \sim s''$ , allora  $s' = gs$  e  $s'' = g's'$ , da cui  $s'' = g'gs$ , quindi  $s \sim s''$ . Essendo classi di equivalenza, le orbite costituiscono una partizione dell'insieme  $S$ , quindi  $S$  è un'unione di orbite disgiunte.

**Osservazione 1.5.5.** Siano  $G$  un gruppo e  $S$  un insieme. Ogni elemento del gruppo  $G$  permuta gli elementi di ciascuna orbita  $O_s$ , con  $s \in S$ , e non porta elementi di un'orbita in un'altra orbita, cioè se  $s' \in O_s$  e  $x \in G$  allora  $x(s') \in O_s$ . Infatti sia  $s' = g(s)$  per qualche  $g \in G$ . Poiché  $G$  è un gruppo si ha che  $xg \in G$ . Quindi per definizione di orbita si ha che  $xg(s) \in O_s$ . Da cui si ha immediatamente che  $xg(s) = x(s')$ , quindi  $x(s') \in O_s$ .

# Capitolo 2

## Richiami sulle isometrie

Nel seguito utilizziamo lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^2$  e il piano affine reale  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ , il quale sarà denotato più semplicemente con  $\mathbb{A}^2$ .

$End(\mathbb{R}^2)$  denota l'insieme di tutti gli endomorfismi di  $\mathbb{R}^2$ , e  $GL(\mathbb{R}^2)$  il gruppo costituito dagli automorfismi.

### 2.1 Affinità del piano

**Definizione 2.1.1.** Sia  $v \in \mathbb{R}^2$ . La *traslazione definita dal vettore  $v$*  è l'applicazione così definita:

$$\begin{aligned} t_v : \mathbb{A}^2 &\rightarrow \mathbb{A}^2 \\ P &\mapsto P + v \end{aligned} \tag{2.1}$$

Denotiamo con  $\mathcal{T}$  l'insieme delle traslazioni di  $\mathbb{A}^2$ .

**Proposizione 2.1.2.** *L'insieme delle traslazioni  $\mathcal{T}$  con l'operazione di composizione è un gruppo, detto il gruppo delle traslazioni di  $\mathbb{A}^2$ . Tale gruppo è isomorfo al gruppo additivo di  $\mathbb{R}^2$  tramite l'isomorfismo:*

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathcal{T} \\ v &\mapsto t_v \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Si veda per esempio [1], proposizione 5.17. □

**Definizione 2.1.3.** Sia  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una applicazione lineare; chiameremo ancora *applicazione lineare*  $\varphi$  l'applicazione di spazi affini che agisce come  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^2 &\rightarrow \mathbb{A}^2 \\ P &\mapsto \varphi(P) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Una *applicazione affine del piano*  $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  è la composizione di una applicazione lineare  $\varphi$  con una traslazione  $t_w$ :

$$f = t_w \varphi. \tag{2.3}$$

Risulta quindi

$$f(P) = w + \varphi(P). \tag{2.4}$$

**Proposizione-Definizione 2.1.4.** *Sia  $f$  una applicazione affine del piano. Allora  $f$  si scrive in modo unico come composizione di una applicazione lineare con una traslazione, cioè se  $f = t_w \varphi$  e anche  $f = t_v \psi$ , si ha  $t_v = t_w$  e  $\varphi = \psi$ . Chiameremo  $\varphi$  la parte lineare di  $f$  e  $t_w$  la traslazione associata ad  $f$ .*

*La  $f$  è biettiva se e solo se la sua parte lineare  $\varphi$  è biettiva.*

*Dimostrazione.* Si veda [1], proposizione 5.21. □

**Definizione 2.1.5.** Sia  $f$  una applicazione affine del piano in sé,  $f = t_w \varphi$ ;  $f$  è detta *affinità* se è biettiva o equivalentemente se  $\varphi$  è un isomorfismo. Quindi una affinità di  $\mathbb{A}^2$  è una applicazione della forma  $t_v \varphi$  con  $v \in \mathbb{R}^2$  e  $\varphi \in GL(\mathbb{R}^2)$ .

Denotiamo con  $Aff(\mathbb{R}^2)$  l'insieme delle affinità di  $\mathbb{A}^2$ .

**Proposizione-Definizione 2.1.6.** *L'insieme*

$$Aff(\mathbb{A}^2) := \{f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2, f \text{ affinità}\}$$

*con l'operazione di composizione è un gruppo, detto il gruppo affine di  $\mathbb{A}^2$ . Il suo elemento neutro è l'identità che d'ora in poi verrà denotata con 1. I suoi sottogruppi sono detti gruppi di trasformazioni affini.*

*Dimostrazione.* Si veda [1], proposizione 5.24. □

**Proposizione 2.1.7.** *Si ha che:*

- a) *Le traslazioni di  $\mathbb{A}^2$  sono tutte e sole le affinità  $t_v$  con applicazione lineare l'identità;  $\mathcal{T}$  è un gruppo di trasformazioni affini.*
- b) *Se  $P$  è un punto fissato di  $\mathbb{A}^2$ , l'insieme*

$$Aff(\mathbb{R}^2)_P := \{f \in Aff(\mathbb{A}^2), f(P) = P\}$$

*è un gruppo di trasformazioni affini, detto il gruppo delle affinità che fissano il punto  $P$ .*

*Tale gruppo è isomorfo al gruppo  $GL(\mathbb{R}^2)$  tramite l'isomorfismo:*

$$\begin{aligned} \mu : Aff(\mathbb{A}^2)_P &\rightarrow GL(\mathbb{R}^2) \\ t_v \varphi &\mapsto \varphi \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Si veda [1], proposizione 5.25. □

## 2.2 Endomorfismi unitari

**Definizione 2.2.1.** Nel seguito  $\mathbb{R}^2$  è dotato del prodotto scalare standard  $\bullet$ ; il piano affine è detto *piano euclideo* e lo denoteremo con  $E^2$ .

In uno spazio euclideo, un riferimento  $\mathcal{R} = A\mathcal{N}$  dove  $A$  è un punto e  $\mathcal{N}$  è una base ortonormale è detto *riferimento cartesiano* o *sistema di coordinate cartesiane*. In particolare,  $\mathcal{R} = O\mathcal{E}$ , dove  $O = (0, 0)$  denota l'origine dei vettori ed  $\mathcal{E}$  è la base canonica, è detto *sistema di riferimento standard*.

**Definizione 2.2.2.** Siano  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$  due punti dello spazio euclideo  $E^2$ . La *distanza* tra  $P$  e  $Q$  è definita nel seguente modo:

$$d(P, Q) := \|Q - P\| = \sqrt{(Q - P) \bullet (Q - P)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.5)$$

**Notazione 2.2.3.** Utilizzeremo  $M_2(\mathbb{R})$  per denotare lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 e  $GL_2(\mathbb{R})$  per denotare il gruppo delle matrici invertibili di ordine 2 con il prodotto righe per colonne.

**Definizione 2.2.4.** Una matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  si dice *ortogonale* se è invertibile e se

$$A^{-1} = A^t.$$

**Proposizione-Definizione 2.2.5.** *L'insieme*

$$O(2) := \{A \in GL_2(\mathbb{R}), A \text{ ortogonale}\}$$

è un sottogruppo delle matrici invertibili  $GL_2(\mathbb{R})$ , detto il gruppo ortogonale di ordine 2.

*Dimostrazione.*  $O(2) \neq \emptyset$  poiché  $I_2 \in O(2)$ . Se  $A, B \in O(2)$ , allora  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t$ , quindi  $AB \in O(2)$ . Infine se  $A \in O(2)$ , allora  $(A^{-1})^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ , quindi  $A^{-1} \in O(2)$ .  $\square$

**Proposizione 2.2.6.** *Se  $A \in O(2)$  allora  $\det A = \pm 1$ .*

*Dimostrazione.*  $\det A = \det(A^t) = \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ , allora si ha immediatamente che  $(\det A)^2 = 1$ .  $\square$

**Proposizione-Definizione 2.2.7.** *L'insieme*

$$SO(2) := \{A \in O(2), \det A = 1\}$$

è un sottogruppo di  $O(2)$  (e quindi di  $GL_2(\mathbb{R})$ ), detto il gruppo ortogonale speciale di ordine 2.

*Dimostrazione.*  $SO(2) \neq \emptyset$  poiché  $I_2 \in SO(2)$ . Siano  $A, B \in SO(2)$ ,  $\det(AB) = (\det A)(\det B) = 1$ , allora  $AB \in SO(2)$ . Sia  $A \in SO(2)$ ,  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$ , allora  $A^{-1} \in SO(2)$ .  $\square$

**Definizione 2.2.8.** Sia  $T \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ ;  $T$  è detto *unitario* se

$$T(v) \bullet T(w) = v \bullet w \tag{2.6}$$

per ogni  $v, w \in \mathbb{R}^2$ . Si dice che l'operatore  $T$  preserva il prodotto scalare.

**Teorema 2.2.9.** *Sia  $T \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1.  $T$  è un operatore unitario;

2.  $T$  è un operatore tale che  $\|T(v)\| = \|v\|$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^2$ .

*Dimostrazione.* Si veda [1], proposizione 4.30. □

**Osservazione 2.2.10.** Si ha che un operatore unitario  $T \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$  soddisfa la condizione  $\det(T) = \pm 1$ .

**Proposizione-Definizione 2.2.11.** *L'insieme*

$$O_2 := \{T \in GL(\mathbb{R}^2), T \text{ unitario}\}$$

è un sottogruppo di  $GL(\mathbb{R}^2)$ , detto il gruppo ortogonale di  $\mathbb{R}^2$ .

Inoltre l'insieme

$$SO_2 := \{T \in O_2, \det T = 1\}$$

è un sottogruppo di  $O_2$ , detto il gruppo ortogonale speciale di  $\mathbb{R}^2$ , e gli elementi di  $SO_2$  sono detti rotazioni di  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposizione 2.2.12.** Sia  $\mathcal{N} = (e_1, e_2)$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^2$  e denotiamo con  $M_{\mathcal{N}}(T)$  la matrice associata a  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{N}$ . L'isomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{N}} : GL(\mathbb{R}^2) &\rightarrow GL_2(\mathbb{R}) \\ T &\mapsto M_{\mathcal{N}}(T) \end{aligned}$$

induce isomorfismi tra i sottogruppi:

$$\begin{array}{ccc} O_2 & \rightarrow & O(2) \\ \cup & & \cup \\ SO_2 & \rightarrow & SO(2) \end{array}$$

## 2.3 Isometrie di $E^2$

**Definizione 2.3.1.** Un'affinità  $f = t_v \phi$  si dice una *isometria*, o *movimento rigido* di  $E^2$ , se l'automorfismo associato  $\phi$  è un operatore unitario, cioè  $\phi \in O_2$ .

In particolare si dice che  $f$  è una *isometria diretta* se  $\phi \in SO_2$ , si dice che  $f$  è una *isometria inversa* se  $\phi \in O_2 \setminus SO_2$ .

Una isometria diretta che lascia fisso un punto  $P$  è detta *rotazione di centro  $P$* .

**Proposizione-Definizione 2.3.2.** *L'insieme*

$$\mathcal{M} := \{f \in \text{Aff}(\mathbb{R}^2), f \text{ isometria}\}$$

è un sottogruppo di  $\text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ , detto il gruppo delle isometrie di  $\mathbb{R}^2$ . Ricordiamo che il suo elemento neutro, cioè l'applicazione identità, viene denotata con 1.

*L'insieme*

$$\mathcal{M}^+ := \{f \in \mathcal{M}, f \text{ isometria diretta}\}$$

è un sottogruppo di  $\mathcal{M}$ , detto il gruppo delle isometrie dirette di  $\mathbb{R}^2$ .

Se  $P$  è un punto, l'insieme delle rotazioni di centro  $P$

$$\mathcal{M}_P^+ := \mathcal{M}^+ \cap \text{Aff}(\mathbb{R}^2)_P$$

è un sottogruppo di  $\mathcal{M}^+$ .

*Dimostrazione.*  $\mathcal{M} \neq \emptyset$  poiché  $1 \in \mathcal{M}$ . Siano  $f, g \in \mathcal{M}$  con  $f = t_v\varphi$  e  $g = t_w\psi$ , allora  $fg = t_{v+\varphi(w)}(\varphi\psi)$  ed essendo  $O_2$  un gruppo, si ha  $fg \in \mathcal{M}$ . Inoltre se  $f \in \mathcal{M}$ ,  $f = t_v\varphi$ , si ha che  $f^{-1} = t_{-v}\varphi^{-1}$  ed essendo  $\varphi^{-1} \in O_2$ , si ha  $f^{-1} \in \mathcal{M}$ . Quindi  $\mathcal{M}$  è un sottogruppo di  $\text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ .

Analogamente si dimostra che  $\mathcal{M}^+$  è un sottogruppo di  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}_P^+$  è un sottogruppo di  $\mathcal{M}^+$ .  $\square$

**Proposizione 2.3.3.** *Esiste un omomorfismo suriettivo  $\varphi$  di gruppi da  $\mathcal{M}$  a  $O_2$  con nucleo  $\mathcal{T}$ :*

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{M} &\rightarrow O_2 \\ t_v\psi &\mapsto \psi \end{aligned} \tag{2.7}$$

*Dimostrazione.* Dalla dimostrazione della proposizione (2.3.2) segue che  $\varphi$  è un omomorfismo. Inoltre si ha subito che  $\mathcal{T}$  è il nucleo di  $\varphi$ , da cui si ha anche che  $\mathcal{T}$  è un sottogruppo normale di  $\mathcal{M}$ .  $\square$

**Osservazione 2.3.4.** Sia  $P$  un punto arbitrario del piano, e denotiamo con  $\rho'_\theta$  la rotazione intorno a  $P$  di un angolo  $\theta$ . Allora  $\varphi(\rho'_\theta) = \rho_\theta$ . Analogamente, se  $r'$  è la riflessione intorno alla retta passante per  $P$  e parallela all'asse  $x$ , allora  $\varphi(r') = r$ .

**Proposizione 2.3.5.** *Una isometria  $f = t_v\phi$  conserva le distanze e gli angoli.*

*Dimostrazione.* Si veda [1], osservazione 6.9.  $\square$

Vediamo una classificazione di tutte le isometrie del piano.

**Definizione 2.3.6.** Un automorfismo  $\varphi$  di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varphi \in O_2$ ,  $\varphi \neq 1$ , che fissa tutti i vettori di una retta vettoriale  $l$  è detta *riflessione*, ed  $l$  si chiama *asse di riflessione*.

Analogamente, una  $f$  isometria di  $E^2$ ,  $f \neq 1$ , che fissa tutti i punti di una retta  $l$  è detta *riflessione*, ed  $l$  si chiama *asse di riflessione*.

**Definizione 2.3.7.** Una isometria  $f = t_v\phi$  di  $E^2$  con  $\phi$  riflessione di asse  $l$  parallela a  $v$ ,  $v \neq 0$ , è detta *glissoriflessione*, ed  $l$  si chiama *asse di glissoriflessione*.

**Notazione 2.3.8.** Nel seguito poniamo

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

**Osservazione 2.3.9.** Si può dimostrare che

$$SO(2) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$$

$$O(2) \setminus SO(2) = \{A_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$$

Infatti, sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2),$$

per definizione si deve avere che  $AA^t = I$ :

$$AA^t = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi deve valere che

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases},$$

la prima e la terza equazione implicano l'esistenza di due angoli  $\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$  tale che  $a = \cos\theta, b = \sin\theta, c = -\sin\varphi$  e  $d = \cos\varphi$ . Allora si ha che la seconda equazione:

$$\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta - \varphi) = 0.$$

Allora si deve avere che  $\theta - \varphi = 0$  oppure  $\theta - \varphi = \pi$ .

Nel primo caso si ottiene  $R_\theta$ , invece nel secondo caso  $A_\theta$ .

**Osservazione 2.3.10.** Sia  $\mathcal{E}$  è base ortonormale e sia  $f = t_v\varphi$  una isometria. Poiché  $\varphi \in O_2$ , si ha che  $M_{\mathcal{E}}(\varphi) \in O(2) = SO(2) \cup (O(2) \setminus SO(2))$ , quindi per l'osservazione (2.3.9)  $M_{\mathcal{E}}(\varphi)$  è della forma  $R_\theta$  oppure  $A_\theta$ .

Sia dato un sistema di riferimento cartesiano  $\mathcal{S} = A\mathcal{N}$ , dove  $A$  è un punto e  $\mathcal{N}$  è una base ortonormale. Se  $P = (x, y)_{\mathcal{S}}, f(P) = (x', y')_{\mathcal{S}}, v = f(O) = (a, b)_{\mathcal{S}}$ , si vede che le equazioni di  $f$  sono della forma:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b \end{cases} \quad \text{se } f \text{ è diretta}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta + a \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta + b \end{cases} \quad \text{se } f \text{ è inversa}$$

Infine enunciamo un teorema molto importante, il quale ci permette di ottenere una descrizione dei quattro possibili tipi di isometrie di  $E^2$ :

**Teorema 2.3.11** (Teorema di Chasles, 1831). *Una isometria di  $E^2$  che fissa un punto è una rotazione se è diretta, una riflessione se è inversa. Una isometria di  $E^2$  che non fissa alcun punto è una traslazione se è diretta, una glissoriflessione se è inversa.*

*Dimostrazione.* Si veda per esempio [1], teorema 6.17. □

Introduciamo la seguente notazione:

**Notazione 2.3.12.** Nel seguito, oltre ad indicare con  $t_a$  la traslazione di vettore  $a$  (def. (2.1.1)), utilizzeremo sempre le seguenti notazioni:

$\rho_\theta$  è la rotazione di un angolo  $\theta$  intorno all'origine  $O$ ;

$\rho_{P,\theta}$  è la rotazione di un angolo  $\theta$  intorno al punto  $P$ ;

$r$  è la riflessione rispetto all'asse  $x$ ;

$r_l$  è la riflessione rispetto a una retta  $l$ .

Vediamo ora una proposizione, la quale ci mostra alcune regole di composizioni che possono essere ottenute a partire da traslazioni, rotazioni e riflessioni.

**Proposizione 2.3.13.** *Nel gruppo  $\mathcal{M}$  delle isometrie di  $E^2$  valgono le seguenti regole di composizione:*

$$(a) \quad t_a t_b = t_{a+b};$$

$$(b) \quad \rho_\theta \rho_\eta = \rho_{\theta+\eta};$$

$$(c) \quad r^2 = 1;$$

$$(d) \quad \rho_\theta t_a = t_b \rho_\theta \text{ dove } b = \rho_\theta(a);$$

$$(e) \quad r t_a = t_c r \text{ dove } c = r(a);$$

$$(f) \quad r \rho_\theta = \rho_{-\theta} r;$$

per ogni vettore  $a, b$  e per ogni angolo  $\theta, \eta$ .

*Dimostrazione.* (a) Si ha che

$$t_a t_b(P) = t_a \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 + a_1 \\ x_2 + b_2 + a_2 \end{pmatrix} = t_{a+b}(P)$$

per ogni  $P \in E^2$ ,  $P = (x_1, x_2)$ , quindi si ha che  $t_a t_b(P) = t_{a+b}(P)$ .

(b) Per dimostrarla bisogna verificare che vale l'identità matriciale  $R_\theta R_\eta = R_{\theta+\eta}$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\eta & -\operatorname{sen}\eta \\ \operatorname{sen}\eta & \cos\eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\eta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\eta & -\cos\theta\operatorname{sen}\eta + \operatorname{sen}\theta\cos\eta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\eta + \cos\theta\operatorname{sen}\eta & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\eta + \cos\theta\cos\eta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \eta) & -\operatorname{sen}(\theta + \eta) \\ \operatorname{sen}(\theta + \eta) & \cos(\theta + \eta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Analogamente si vede che  $A_0 A_0 = I_2$ .

(d) Si ha che

$$r t_a(P) = A_0 \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + A_0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = r(P) + r(a) = t_c r(P)$$

per ogni  $P \in E^2$ ,  $P = (x_1, x_2)$ , quindi si ha che  $rt_a(P) = t_cr(P)$ .

(e) Si ha che

$$\rho_\theta t_a(P) = R_\theta \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + R_\theta \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \rho_\theta(P) + \rho_\theta(a) = t_b \rho_\theta(P)$$

per ogni  $P \in E^2$ ,  $P = (x_1, x_2)$ , quindi si ha che  $\rho_\theta t_a(P) = t_b \rho_\theta(P)$ .

(f) Per dimostrarla bisogna verificare che vale l'identità matriciale  $A_0 R_\theta = R_{-\theta} A_0$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

I movimenti  $t_a$ ,  $\rho_\theta$ ,  $r$  non sono tutti gli elementi di  $\mathcal{M}$ . Tuttavia, essi generano il gruppo delle isometrie del piano, infatti abbiamo la seguente proposizione:

**Proposizione 2.3.14.** *Il gruppo  $\mathcal{M}$  è generato dai movimenti  $t_a$ ,  $\rho_\theta$  e  $r$ . Si ha che:*

$$f = t_a \rho_\theta \quad \text{oppure} \quad f = t_a \rho_\theta r,$$

e questa scrittura è unica.

*Dimostrazione.* Ogni movimento rigido  $f$  è la composizione di un operatore ortogonale e di una traslazione, quindi possiamo scrivere  $f$  nella forma:  $f = t_a \phi$  dove  $\phi$  è un operatore ortogonale. Se  $\det\phi = 1$  allora  $\phi$  è una delle rotazioni  $\rho_\theta$ , quindi in tale caso si ha che  $f = t_a \rho_\theta$ . Infine, se  $\det\phi = -1$ , allora  $\det\phi r = 1$ , quindi  $\phi r$  è una rotazione  $\rho_\theta$ . Poiché  $r^2 = 1$  (vedere (2.3.13)), abbiamo che  $\phi = \rho_\theta r$ , e quindi  $f = t_a \rho_\theta r$ .

Per dimostrare l'unicità, supponiamo che  $f$  possa essere espresso in due modi:  $f = t_a \rho_\theta r^i = t_b \rho_\eta r^j$ , dove  $i, j = 0$  o  $1$ . Poiché  $f$  conserva l'orientazione se  $i = 0$  e inverte l'orientazione se  $i = 1$ , risulta necessariamente che  $i = j$ , quindi possiamo cancellare  $r$  da entrambi i membri, se necessario, per ottenere l'uguaglianza:  $t_a \rho_\theta = t_b \rho_\eta$ . Moltiplicando entrambi i membri a sinistra per  $t_{-b}$  e a destra per  $\rho_{-\theta}$ , si ottiene:  $t_{a-b} = \rho_{\eta-\theta}$ . Ma una traslazione non è una rotazione, a meno che entrambi non siano l'identità, quindi  $a = b$  e  $\theta = \eta$ . □

**Proposizione 2.3.15.** *La composizione di una traslazione  $t_a$  e di una rotazione  $\rho_\theta$  è un'isometria con un punto fisso  $P$ , precisamente è una rotazione di angolo  $\theta$  con centro  $P$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $m = t_a \rho_\theta$ . Il punto fisso di  $m$  è quello che soddisfa la relazione:

$$P = \rho_\theta(P) + a.$$

Allora, per ogni  $x$ , si ha che:

$$m(P + x) = t_a \rho_\theta(P + x) = \rho_\theta(P + x) + a = \rho_\theta(P) + \rho_\theta(x) + a = P + \rho_\theta(x).$$

Dunque abbiamo che  $m$  manda  $P + x$  in  $P + \rho_\theta(x)$ , e quindi  $m$  è una rotazione intorno  $P$  di un angolo  $\theta$ .  $\square$

**Proposizione 2.3.16.** *La composizione di due riflessioni, di assi due rette parallele, è una traslazione di vettore  $v$ . In particolare la direzione di  $v$  è perpendicolare alle due rette e il modulo di  $v$  è due volte la distanza delle due rette.*

*Dimostrazione.* Siano  $r_l$  e  $r_{l'}$  le due riflessioni di assi rispettivamente le due rette  $l$  e  $l'$ , le quali per ipotesi sono parallele. Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano con origine  $O$  e tale che la retta  $l$  coincida con l'asse  $x$ , per notazione  $r_l = r$ . Sia  $P = (x, y)$  un punto arbitrario del piano, allora  $r$  è tale che

$$r(P) = r(x, y) = (x, -y),$$

mentre  $r_{l'}$  è tale che

$$r_{l'}(P) = r_{l'}(x, y) = (x, z).$$

Poniamo  $a = \frac{y+z}{2}$ ,  $a > 0$ . Quindi  $z = 2a - y$  e si ha che:

$$r_{l'} r(P) = r_{l'} r(x, y) = r_{l'}(x, -y) = (x, y + 2a).$$

Abbiamo dimostrato che  $r_{l'} r = t_v$ , dove  $v = (0, 2a)$  e questo è sufficiente per concludere la dimostrazione.  $\square$

**Lemma 2.3.17.** *Sia  $v = (\cos\theta, \sin\theta)$  un vettore di  $E^2$  e sia  $l$  la retta per  $O$  e generata da  $v$ . La matrice associata alla riflessione  $r_l$  è la matrice  $A_{2\theta}$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo un vettore  $x = (x_1, x_2)$  che forma un angolo  $\alpha$  con l'asse  $x$ . Allora si ha che:

$$\begin{aligned}x_1 &= \|x\| \cos\alpha \\x_2 &= \|x\| \operatorname{sen}\alpha.\end{aligned}$$

Il vettore  $y = r_l(x)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ , forma un angolo  $2\theta - \alpha$  con l'asse  $x$  e quindi:

$$\begin{aligned}y_1 &= \|x\| \cos(2\theta - \alpha) = \|x\| \cos(2\theta)\cos(\alpha) + \|x\| \operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(\alpha) \\y_2 &= \|x\| \operatorname{sen}(2\theta - \alpha) = -\|x\| \cos(2\theta)\operatorname{sen}(\alpha) + \|x\| \operatorname{sen}(2\theta)\cos(\alpha).\end{aligned}$$

La sostituzione  $x_1 = \|x\| \cos\alpha$  e  $x_2 = \|x\| \operatorname{sen}\alpha$  conclude la dimostrazione.  $\square$

**Proposizione 2.3.18.** *La composizione di due riflessioni, di assi due rette passanti per  $O$  e formanti con l'asse  $x$  due angoli di ampiezza  $\theta$  e  $\varphi$  rispettivamente, è una rotazione intorno all'origine di angolo  $2(\varphi - \theta)$ .*

*Dimostrazione.* Dal lemma (2.3.17) segue che due riflessioni siffatte sono associate alle matrici  $A_{2\theta}$  e  $A_{2\varphi}$ , allora è sufficiente verificare che vale l'identità  $A_{2\theta}A_{2\varphi} = R_{2(\theta-\varphi)}$ .

$$\begin{aligned}A_{2\theta}A_{2\varphi} &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta)\cos(2\varphi) + \operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(2\varphi) & \cos(2\theta)\operatorname{sen}(2\varphi) - \operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(2\varphi) - \cos(2\theta)\operatorname{sen}(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\varphi) + \cos(2\theta)\operatorname{sen}(2\varphi) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\theta - \varphi)) & -\operatorname{sen}(2(\theta - \varphi)) \\ \operatorname{sen}(2(\theta - \varphi)) & \cos(2(\theta - \varphi)) \end{pmatrix} = R_{2(\theta-\varphi)}.\end{aligned}$$

$\square$

**Proposizione 2.3.19.** *Ogni isometria non banale di  $E^2$  è la composizione di al massimo 3 riflessioni.*

*Dimostrazione.* Sia  $f$  una isometria.

(a) Se  $f$  è una riflessione, banale.

(b) Se  $f$  è una traslazione, allora per la (2.3.16), si ha che  $f$  è composizione di due riflessioni.

(c) Se  $f$  è una glissoriflessione, allora per definizione è composizione di una traslazione e di una riflessione, quindi considerando il punto (b), si ha che  $f$  è composizione di tre riflessioni.

(d) Se  $f$  è una rotazione, allora per la (2.3.18) si ha che  $f$  è composizione di due riflessioni. Questa classificazione è sufficiente per terminare la dimostrazione, poiché il teorema di Chasles (2.3.11) ci dice che queste sono gli unici tipi di isometrie del piano.  $\square$

# Capitolo 3

## Gruppi finiti e gruppi discreti di movimenti

### 3.1 Gruppi finiti di movimenti

In questa sezione studiamo i sottogruppi finiti  $G$  del gruppo  $\mathcal{M}$  dei movimenti rigidi del piano.

Il teorema che ci permette di esprimere tutti i sottogruppi finiti di  $\mathcal{M}$  è il *teorema del punto fisso*. Prima di enunciarlo e dimostrarlo vediamo una definizione e un lemma, i quali ci saranno utile per tale teorema.

**Definizione 3.1.1.** Sia  $S = \{S_1, \dots, S_n\}$  un insieme di punti di  $E^2$ . Il *centro di gravità*, o *baricentro*,  $P$  di  $S$  è definito da

$$P = \frac{1}{n}(S_1 + \dots + S_n), \quad (3.1)$$

dove l'espressione a secondo membro è calcolata mediante l'addizione tra vettori in un arbitrario sistema di coordinate nel piano.

**Lemma 3.1.2.** *Sia  $S = \{S_1, \dots, S_n\}$  un insieme finito di punti del piano, e sia  $P$  il suo centro di gravità, definito da (3.1). Sia  $m$  un movimento rigido, e poniamo  $m(S_i) = S'_i$  e  $m(P) = P'$ , allora  $P' = \frac{1}{n}(S'_1 + \dots + S'_n)$ . Quindi i movimenti rigidi mandano centri di gravità in centri di gravità.*

*Dimostrazione.* Consideriamo separatamente i casi  $m = t_a$ ,  $m = \rho_\theta$  e  $m = r$ , questo sarà sufficiente poiché ogni movimento si ottiene da questi per composizione.

1. Sia  $m = t_a$ . Allora si ha che  $P' = P + a$  e  $S'_i = S_i + a$ , e che

$$P + a = \frac{1}{n}((S_1 + a) + \dots + (S_n + a)).$$

2. Sia  $m = \rho_\theta$  oppure  $r$ . Allora poiché  $m$  è un operatore lineare si ha che

$$P' = m\left(\frac{1}{n}(S_1 + \dots + S_n)\right) = \frac{1}{n}(m(S_1) + \dots + m(S_n)) = \frac{1}{n}(S'_1 + \dots + S'_n).$$

□

**Teorema 3.1.3** (Teorema del punto fisso). *Sia  $G$  un sottogruppo finito del gruppo dei movimenti  $\mathcal{M}$ . Allora esiste un punto  $P$  nel piano che è lasciato fisso da ogni elemento di  $G$ , cioè esiste un punto  $P$  tale che  $g(P) = P$  per ogni  $g \in G$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $S$  un punto del piano e sia  $O_S = \{m(S), m \in G\} = \{S_1, \dots, S_n\}$  l'orbita di  $S$  rispetto all'azione di  $G$ ;  $O_S$  è un insieme finito perché  $G$  è finito. Il centro di gravità  $P$  dell'insieme  $O_S$  è un punto fisso rispetto all'azione di  $G$ . Infatti per la proposizione (1.5.5), un elemento arbitrario  $g$  di  $G$  permuta l'orbita  $O_S = \{S_1, \dots, S_n\}$ , sicché il lemma (3.1.2) dimostra che esso manda il centro di gravità in sé. Questo completa la dimostrazione del teorema. □

**Osservazione 3.1.4.** Sia  $G$  un sottogruppo finito di  $\mathcal{M}$ . Il teorema (3.1.3) ci dice che esiste sicuramente un punto lasciato fisso da ogni elemento di  $G$ . Scegliendo le coordinate del sistema di riferimento in modo che tale punto sia l'origine, si ha che  $G$  è un sottogruppo del gruppo degli operatori ortogonali  $O_2$ , cioè del gruppo costituito dai movimenti che lasciano fissa l'origine. Quindi per descrivere i sottogruppi finiti  $G$  di  $\mathcal{M}$ , basta descrivere i sottogruppi finiti di  $O_2$ .

Tali sottogruppi sono descritti nel seguente teorema:

**Teorema-Definizione 3.1.5.** *Sia  $G$  un sottogruppo finito del gruppo  $O_2$  dei movimenti rigidi che lasciano fissa l'origine. Allora  $G$  è uno dei gruppi seguenti:*

1.  $G = C_n$ , il gruppo ciclico di ordine  $n$ , generato dalla rotazione  $\rho_\theta$ , dove  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ .
2.  $G = D_n$ , il gruppo diedrale di ordine  $2n$ , generato da due elementi: la rotazione  $\rho_\theta$ , dove  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ , e una riflessione  $r_l$  intorno a una retta  $l$  passante per l'origine.

*Dimostrazione.* Sia  $G$  un sottogruppo finito di  $O_2$ . Ricordiamo che gli elementi di  $O_2$  sono le rotazioni  $\rho_\theta$  e le riflessioni  $\rho_\theta r$ .

Caso 1) Tutti gli elementi di  $G$  sono rotazioni. In tale caso, bisogna provare che  $G$  è ciclico. Se  $G = \{1\}$ , allora  $G = C_1$ . Altrimenti  $G$  contiene una rotazione non banale  $\rho_\theta$ . Sia  $\theta$  il più piccolo angolo di rotazione positivo tra gli elementi di  $G$ , allora  $G$  è generato da  $\rho_\theta$ . Infatti, sia  $\rho_\alpha$  un elemento arbitrario di  $G$ , dove l'angolo di rotazione  $\alpha$  è rappresentato, come al solito, da un numero reale. Sia  $n\theta$  il più grande multiplo intero di  $\theta$  minore di  $\alpha$  tale che  $\alpha = n\theta + \beta$ , con  $0 \leq \beta < \theta$ . Poiché  $G$  è un gruppo e sia  $\rho_\alpha$  che  $\rho_\theta$  sono elementi di  $G$ , anche il prodotto  $\rho_\beta = \rho_\alpha \rho_{-n\theta}$  è un elemento di  $G$ . Ma per ipotesi,  $\theta$  è il più piccolo angolo di rotazione positivo in  $G$ , quindi  $\beta = 0$  e  $\alpha = n\theta$ . Questo prova che  $G$  è ciclico. Sia  $n\theta$  il più piccolo multiplo di  $\theta$  che sia  $\geq 2\pi$ , tale che  $2\pi \leq n\theta < 2\pi + \theta$ . Poiché  $\theta$  è il più piccolo angolo di rotazione positivo in  $G$ , si ha che  $n\theta = 2\pi$ . Quindi  $\theta = \frac{2\pi}{n}$  per qualche intero  $n$ .

Caso 2)  $G$  contiene almeno una riflessione. A meno di un eventuale cambiamento di coordinate, possiamo supporre che la riflessione standard  $r$  appartenga a  $G$ . Indicando con  $H$  il sottogruppo delle rotazioni in  $G$ , possiamo applicare ciò che è stato dimostrato nel caso 1) al gruppo  $H$  per concludere che esso è un gruppo ciclico, cioè  $H = C_n$ . Allora i  $2n$  prodotti  $\rho_\theta^i, \rho_\theta^i r, 0 \leq i \leq n-1$ , appartengono a  $G$  e per tale motivo  $G$  contiene il gruppo diedrale  $D_n$ . Ora dimostriamo che  $G = D_n$ . Se  $g \in G$  è una rotazione, allora per definizione si ha che  $g \in H$ ; quindi  $g$  è un elemento di  $D_n$ . Se  $g$  è una riflessione, allora  $g$  può essere scritto nella forma  $\rho_\alpha r$  per qualche rotazione  $\rho_\alpha$ . Poiché  $r$  è un elemento di  $G$ , lo sarà anche il prodotto  $\rho_\alpha r r = \rho_\alpha$ . Pertanto  $\rho_\alpha$  è una potenza di  $\rho_\theta$ , e quindi anche  $g$  appartiene a  $D_n$ , quindi  $G = D_n$ .  $\square$

**Corollario 3.1.6.** *Sia  $G$  un sottogruppo finito del gruppo dei movimenti  $\mathcal{M}$ . Allora introdotto un sistema di coordinate opportuno,  $G$  diventa uno dei gruppi  $C_n$  o  $D_n$ , dove  $C_n$  è generato da  $\rho_\theta$  con  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ , e  $D_n$  è generato da  $\rho_\theta$  e  $r$ .*

*Dimostrazione.* Il gruppo  $G$  ha un punto fisso per il teorema (3.1.3), scegliamo quindi le coordinate in modo che tale punto fisso sia  $O$ , e nel caso in cui  $G$  contenga una riflessione, in modo che l'asse di tale riflessione sia l'asse  $x$ . Basta ora applicare il teorema (3.1.5).  $\square$

**Definizione 3.1.7.** Una figura geometrica  $F$  di  $E^2$  è un sottoinsieme di  $E^2$ . Un'applicazione  $f \in \mathcal{M}$  tale che  $f(F) = F$  si dice *simmetria* di  $F$ .

**Proposizione-Definizione 3.1.8.** Le simmetrie di una figura geometrica  $F$  costituiscono un sottogruppo di  $\mathcal{M}$ , denotato con  $Isom(F)$  e chiamato gruppo delle simmetrie di  $F$ .

*Dimostrazione.*  $Isom(F) \neq \emptyset$  poiché  $1 \in Isom(F)$ . Se  $f, g \in Isom(F)$ , allora  $fg(F) = f(F) = F$ , quindi  $fg \in Isom(F)$ . Infine se  $f \in Isom(F)$ , allora  $F = f^{-1}f(F) = f^{-1}(F)$ , quindi  $f^{-1} \in Isom(F)$ .  $\square$

**Esempio 3.1.9.** Consideriamo la circonferenza  $S(O, r)$  di centro  $O$  e raggio  $r > 0$ . Il gruppo delle simmetrie di  $S(O, r)$ ,  $Isom(S(O, r))$ , coincide con  $\mathcal{M}_O$ .

Infatti se  $f \in \mathcal{M}_O$ , si ha che, per ogni  $P \in S(O, r)$ ,

$$r = d(O, P) = d(f(O), f(P)) = d(O, f(P)),$$

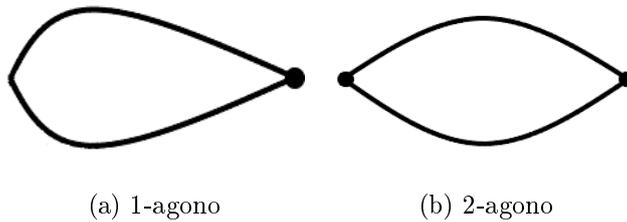
cioè  $f(P) \in S(O, r)$ , quindi  $f \in Isom(S(O, r))$ .

Viceversa, sia  $f \in Isom(S(O, r))$ . Scelti due punti  $P$  e  $Q$  diametralmente opposti, si deve avere che  $d(f(P), f(Q)) = 2r$ . I punti  $f(P), f(Q) \in S(O, r)$  sono ancora diametralmente opposti. Pertanto il punto medio  $O$  del segmento di estremi  $P$  e  $Q$  viene trasformato nel punto medio del segmento di estremi  $f(P)$  e  $f(Q)$ , il quale è ancora  $O$ . Quindi  $f(O) = O$ , cioè  $f \in \mathcal{M}_O$ .

**Proposizione 3.1.10.** Per  $n \geq 3$ , il gruppo diedrale  $D_n$  è il gruppo delle simmetrie di un poligono regolare di  $n$  lati.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è una diretta conseguenza del teorema (3.1.5), infatti un poligono regolare di  $n$  lati ha un baricentro, il quale coincide con il centro della circonferenza inscritta e di quella circoscritta e che viene mandato per il lemma (3.1.2) in se stesso; inoltre ha un gruppo di simmetria che contiene le rotazioni di  $\frac{2\pi}{n}$  intorno al suo centro e contiene anche alcune riflessioni. Il teorema ci assicura che esso è  $D_n$ .  $\square$

**Osservazione 3.1.11.** I gruppi diedrali  $D_1$ ,  $D_2$  sono troppo piccoli per essere i gruppi di simmetria di un poligono regolare di  $n$  lati. Infatti  $D_1$  è il gruppo  $\{1, r\}$  di due elementi, e quindi è un gruppo ciclico, come  $C_2$ . Tuttavia l'elemento non banale di  $D_1$  è una riflessione, mentre in  $C_2$  è la rotazione di  $\pi$ . Invece il gruppo  $D_2$  contiene i quattro elementi  $\{1, \rho_\pi, r, \rho_\pi r\}$ . Si potrebbe pensare a  $D_1$  e  $D_2$  come ai gruppi delle simmetrie dell'1-agono e del 2-agono:



**Notazione 3.1.12.** Denotiamo con  $x$  la rotazione  $\rho_\theta$  con  $\theta = \frac{2\pi}{n}$  e con  $y$  la riflessione  $r$ .

**Proposizione 3.1.13.** Il gruppo diedrale  $D_n$  è generato da due elementi  $x, y$  che soddisfano le relazioni:

$$x^n = 1, \quad y^2 = 1, \quad yx = x^{-1}y. \quad (3.2)$$

Gli elementi di  $D_n$  sono:

$$\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}; y, xy, x^2y, \dots, x^{n-1}y\} = \{x^i y^j : 0 \leq i < n, 0 \leq j < 2\}.$$

*Dimostrazione.* Gli elementi  $x = \rho_\theta$  e  $y = r$  generano il gruppo diedrale  $D_n$  per definizione. Le relazioni  $y^2 = 1$  e  $yx = x^{-1}y$  sono incluse nell'elenco delle relazioni (2.3.13) per  $\mathcal{M}$ . La relazione  $x^n = 1$  segue dal fatto che  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ , questo dimostra anche che gli elementi  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$  sono distinti. Ne segue che anche gli elementi  $y, xy, x^2y, \dots, x^{n-1}y$  sono distinti, inoltre essi sono riflessioni, infatti algebricamente si ha che  $R_\alpha A_0 = A_\alpha$ ; mentre le potenze di  $x$  sono rotazioni, quindi non ci sono ripetizioni nella lista degli elementi. Infine le relazioni ottenute possono essere usate per ridurre un generico prodotto di  $x, y, x^{-1}, y^{-1}$  nella forma  $x^i y^j$  con  $0 \leq i < n, 0 \leq j < 2$ .  $\square$

**Osservazione 3.1.14.** Dalle prime due relazioni (3.2), si ha che la terza relazione può essere scritta nel seguente modo:

$$yx = x^{n-1}y \text{ oppure } xyxy = 1.$$

Si ha immediatamente che per  $n = 3$ , le relazioni (3.2) coincidono con le relazioni che definiscono il gruppo delle permutazioni  $S_3$  (vedere esempio (1.2.2)).

Quindi  $S_3$  e  $D_3$  sono generati entrambi da due elementi  $x, y$  con le stesse relazioni, pertanto sono isomorfi. La tavola di moltiplicazione descritta in (1.2.2) per  $S_3$  è dunque anche tavola di moltiplicazione per  $D_3$ .

**Osservazione 3.1.15.** Per  $n > 3$  il gruppo diedrale  $D_n$  e il gruppo delle permutazioni  $S_n$  non sono isomorfi, poiché  $D_n$  ha ordine  $2n$ , mentre  $S_n$  ha ordine  $n!$ .

Concludiamo questa sezione con un esempio, nel quale analizziamo  $D_4$ , cioè il gruppo delle isometrie del quadrato.

**Esempio 3.1.16.** Consideriamo il gruppo diedrale  $D_4$ , per quanto detto abbiamo che  $D_4 = \langle x, y \rangle$  con le relazioni:

$$x^4 = 1, \quad y^2 = 1, \quad yx = x^3y$$

La tavola di moltiplicazione di  $D_4$  risulta essere la seguente:

$\cdot$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$y$	$xy$	$x^2y$	$x^3y$
1	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$y$	$xy$	$x^2y$	$x^3y$
$x$	$x$	$x^2$	$x^3$	1	$xy$	$x^2y$	$x^3y$	$y$
$x^2$	$x^2$	$x^3$	1	$x$	$x^2y$	$x^3y$	$y$	$xy$
$x^3$	$x^3$	1	$x$	$x^2$	$x^3y$	$y$	$xy$	$x^2y$
$y$	$y$	$x^3y$	$x^2y$	$xy$	1	$x^3$	$x^2$	$x$
$xy$	$xy$	$y$	$x^3y$	$x^2y$	$x$	1	$x^3$	$x^2$
$x^2y$	$x^2y$	$xy$	$y$	$x^3y$	$x^2$	$x$	1	$x^3$
$x^3y$	$x^3y$	$x^2y$	$xy$	$y$	$x^3$	$x^2$	$x$	1

Descriviamo tutti gli elementi di  $D_4$ :  $x$  è la rotazione di  $\frac{\pi}{2}$  in senso antiorario;  $y$  è la riflessione rispetto all'asse delle ascisse;  $x^2$  è la rotazione di  $\pi$  in senso antiorario;  $x^3$  è la rotazione di  $\frac{3\pi}{2}$  in senso antiorario;  $xy$  è la riflessione rispetto la bisettrice del primo e del terzo quadrante;  $x^2y$  è la riflessione rispetto all'asse delle ordinate;  $x^3y$  è la riflessione rispetto alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante.

## 3.2 Gruppi discreti di movimenti

**Definizione 3.2.1.** Un sottogruppo  $G$  del gruppo dei movimenti  $\mathcal{M}$  si dice *discreto* se non contiene traslazioni o rotazioni arbitrariamente piccole, cioè  $G$  è discreto se esiste un numero reale  $\epsilon > 0$  tale che:

- a) se  $t_a$  è una traslazione in  $G$  mediante un vettore non nullo  $a$ , allora si ha che  $\|a\| \geq \epsilon$ ;
- b) se  $\rho_{P,\theta}$  è una rotazione in  $G$  intorno a un punto  $P$  di un angolo non nullo  $\theta$ , allora si ha che  $|\theta| \geq \epsilon$ .

**Esempio 3.2.2.** Due esempi di gruppi che non sono discreti:

- il gruppo di simmetria di una retta, poiché possiede traslazioni arbitrariamente piccole;
- il gruppo di simmetria di una circonferenza, poiché possiede rotazioni arbitrariamente piccole.

I due strumenti principali per studiare un gruppo discreto  $G$  sono il gruppo delle traslazioni e il gruppo puntuale, che ora definiremo:

**Definizione 3.2.3.** Il *gruppo delle traslazioni*  $L_G$  di  $G$  è l'insieme dei vettori  $a$  tale che  $t_a \in G$ , cioè:

$$L_G = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid t_a \in G\}.$$

**Osservazione 3.2.4.**  $L_G$  è un sottogruppo additivo di  $\mathbb{R}^2$ , infatti si ha che  $t_a t_b = t_{a+b}$  e  $t_{-a} = t_a^{-1}$ , quindi  $a + b$  e  $-a \in L_G$ .

Tale gruppo è esattamente il sottogruppo  $\mathcal{T} \cap G$  delle traslazioni in  $G$  mediante l'isomorfismo della proposizione (2.1.2):  $a \mapsto t_a$ .

Ora  $\mathcal{T} \cap G$ , essendo un sottogruppo di  $G$ , è discreto, poiché un sottogruppo di un gruppo discreto è discreto. Quindi  $L_G$  non contiene vettori di lunghezza  $< \epsilon$ , tranne il vettore nullo. Un sottogruppo  $L$  del gruppo additivo  $\mathbb{R}^2$  che soddisfa questa condizione per qualche  $\epsilon > 0$  è detto sottogruppo *discreto* di  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposizione 3.2.5.** Se  $L$  è un sottogruppo discreto di  $\mathbb{R}^2$ , e  $a, b \in L$ , la lunghezza  $\|a - b\|$  non può essere arbitrariamente piccola.

*Dimostrazione.* Il vettore  $a - b$  sta in  $L$ , quindi essendo il sottogruppo discreto, esiste un  $\epsilon$  tale che  $\|a - b\| > \epsilon$ .  $\square$

**Proposizione-Definizione 3.2.6.** *Ogni sottogruppo discreto  $L$  di  $(\mathbb{R}^2, +)$  ha una delle seguenti forme:*

1.  $L = \{0\}$ ;

2.  $L$  è generato da un vettore non nullo  $a$ :

$$L = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\};$$

3.  $L$  è generato da due vettori linearmente indipendenti  $a, b$ :

$$L = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

*I gruppi del terzo tipo sono chiamati reticoli piani, e  $(a, b)$  è chiamata base del reticolo.*

Prima di vederne la dimostrazione enunciamo e dimostriamo due lemmi che saranno necessari ai fini della dimostrazione:

**Lemma 3.2.7.** *Sia  $L$  un sottogruppo discreto di  $\mathbb{R}^2$ .*

1. *Un sottoinsieme limitato  $S$  di  $\mathbb{R}^2$  contiene soltanto un numero finito di elementi di  $L$ .*

2. *Se  $L \neq \{0\}$ , allora  $L$  contiene un vettore non nullo di lunghezza minima.*

*Dimostrazione.* 1) Se  $S$  è limitato, si ha ovviamente che  $L \cap S$  è limitato. Ora, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, un sottoinsieme limitato e infinito deve contenere almeno un punto di accumulazione, ossia gli elementi non possono essere separati da una distanza prefissata positiva  $\epsilon$ . Questo non accade per  $L$ , in virtù della proposizione (3.2.5). Quindi si ha che  $L \cap S$  è un insieme finito.

2) Supponiamo che  $L \neq \{0\}$ . Per dimostrare che esiste un vettore di lunghezza minima, consideriamo un vettore non nullo arbitrario  $b \in L$ , e sia  $S$  il disco di raggio  $\|b\|$  intorno all'origine. Tale disco è un insieme limitato, quindi contiene soltanto un numero finito di elementi di  $L$ , incluso  $b$ . In questo insieme finito di vettori non nulli ne esiste almeno uno di lunghezza minima, che sarà il vettore richiesto.  $\square$

**Lemma 3.2.8.** *Siano  $a, b$  due vettori linearmente indipendenti appartenenti a un sottogruppo  $L$  di  $\mathbb{R}^2$ . Supponiamo che il parallelogramma  $P$  da essi generato non contenga elementi di  $L$  al di fuori dei vertici  $0, a, b, a + b$ . Allora  $L$  è generato da  $a$  e  $b$ , cioè:*

$$L = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

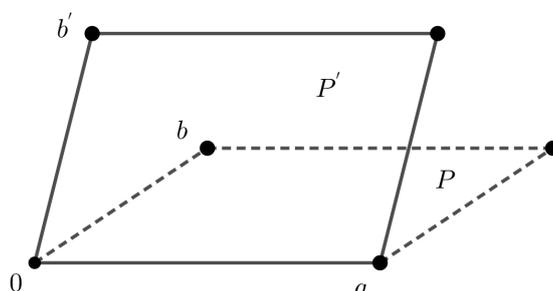
*Dimostrazione.* Sia  $v$  un elemento di  $L$ . Allora poiché  $(a, b)$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ ,  $v$  è una combinazione lineare del tipo  $v = ra + sb$ , dove  $r, s$  sono numeri reali. Scriviamo  $r = m + r_0$  e  $s = n + s_0$  dove  $m, n$  sono interi e  $0 \leq r_0, s_0 < 1$ . Consideriamo il vettore  $v_0 = r_0a + s_0b = (r - m)a + (s - n)b = ra - ma + sb - nb = v - ma - nb$ . Esso è contenuto nel parallelogramma  $P$  ed inoltre appartiene a  $L$ . Ne segue che  $v_0$  è uno dei vertici, inoltre  $r_0, s_0 < 1$ , quindi deve essere necessariamente l'origine. Dunque  $v = ma + nb$ .  $\square$

**Vediamo la dimostrazione della proposizione (3.2.6):**

*Dimostrazione.* Sia  $L$  un sottogruppo discreto di  $\mathbb{R}^2$ . Il caso in cui  $L = \{0\}$  è incluso nella lista. Se  $L \neq \{0\}$ , esiste un vettore non nullo  $a \in L$ , e vi sono due possibilità:

Caso 1) Tutti i vettori di  $L$  giacciono su una retta  $l$  passante per l'origine. Per il punto 2) del lemma (3.2.7), possiamo scegliere un vettore non nullo  $a \in L$  di lunghezza minima. Vogliamo provare che  $L$  è generato da  $a$ , cioè che ogni elemento  $v$  di  $L$  è multiplo intero di  $a$ , cioè  $v = na$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Poiché  $L \subset l$ , dato  $v \in L$  si ha  $v = ra$  con  $r \in \mathbb{R}$ . Scriviamo  $r$  nella forma  $r = n + r_0$ , dove  $n$  è un intero e  $0 \leq r_0 < 1$ . Allora il vettore  $v - na = r_0a$  ha lunghezza minore di  $a$ , e poiché  $L$  è un gruppo, tale elemento sta in  $L$ . Pertanto  $r_0 = 0$ . Questo prova che  $v$  è un multiplo intero di  $a$ , e quindi che  $v$  appartiene al sottogruppo generato da  $a$ .

Caso 2) Gli elementi di  $L$  non giacciono su una retta. Allora  $L$  contiene due vettori linearmente indipendenti  $a', b'$ . Dimostriamo che da questa coppia di vettori linearmente indipendenti è possibile costruire due vettori che generano il gruppo  $L$ . Per cominciare, sostituiamo  $a'$  con un vettore non nullo di lunghezza minima  $a$  sulla retta  $l$  generata da  $a'$ . L'argomentazione sviluppata nel caso 1) prova che il sottogruppo  $l \cap L$  è generato da  $a$ . Successivamente, consideriamo il parallelogramma  $P'$  di vertici  $0, a, b', a + b'$ :



Poiché  $P'$  è un insieme limitato, per il punto  $a$ ) del lemma (3.2.7), contiene soltanto un numero finito di elementi di  $L$ . Possiamo scegliere allora in questo insieme finito un vettore  $b$  avente distanza più piccola possibile, ma positiva, dalla retta  $l$ . Vogliamo ora dimostrare che  $a$  e  $b$  generano  $L$ . Sia  $P$  il parallelogramma di vertici  $0, a, b, a + b$ . Ebbene,  $P$  non contiene punti di  $L$  all'infuori dei vertici. Per verificare questo, osserviamo innanzitutto che un punto arbitrario  $c$  del reticolo appartenente a  $P$ , che non sia vertice, deve trovarsi su uno dei segmenti di retta  $[b, a + b]$  o  $[0, a]$ . Altrimenti i due punti  $c$  e  $c - a$  sarebbero più vicini a  $l$  di  $b$ , e uno di tali punti apparterebbe a  $P'$ . Ora il segmento di  $[0, a]$  è da scartare, poiché  $a$  è un vettore di lunghezza minima su  $l$ . Infine, se vi fosse un punto  $c$  sul segmento  $[b, a + b]$ , allora  $c - b$  sarebbe un elemento di  $L$  sul segmento  $[0, a]$ . La dimostrazione è completa per il lemma (3.2.8).  $\square$

**Definizione 3.2.9.** Sia  $L$  un reticolo  $\mathbb{R}^2$ . Un elemento  $v \in L$  si dice *primitivo* se non è multiplo intero di un altro vettore di  $L$ .

**Corollario 3.2.10.** Sia  $L$  un reticolo e sia  $v$  un elemento primitivo di  $L$ . Allora esiste un elemento  $w \in L$  tale che l'insieme  $(v, w)$  è una base del reticolo.

Il gruppo delle traslazioni è, come già detto, il primo strumento per studiare un gruppo discreto di movimenti  $G$ . Ora vediamo il secondo strumento: *il gruppo puntuale*.

**Proposizione-Definizione 3.2.11.** Sia  $G$  un sottogruppo di  $\mathcal{M}$ . Ricordiamo che esiste un omomorfismo suriettivo (2.7)  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow O_2$ , il cui nucleo è  $\mathcal{T}$ .

Se restringiamo tale omomorfismo a  $G$ , otteniamo l'omomorfismo:

$$\varphi|_G : G \rightarrow O_2.$$

Il gruppo puntuale  $\overline{G}$  è l'immagine, tramite questo omomorfismo, di  $G$  in  $O_2$ .

Si ha quindi un omomorfismo suriettivo, che denoteremo con  $\phi$ :

$$\phi: G \rightarrow \overline{G}, \quad (3.3)$$

che ha come nucleo  $\mathcal{T} \cap G$ ; tramite l'isomorfismo tra il gruppo additivo di  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathcal{T}$ ,  $v \mapsto t_v$ , si ha che  $\text{Ker}(\phi) = \mathcal{T} \cap G$  è quindi isomorfo a  $L_G$ , ed è un sottogruppo normale di  $G$ .

**Osservazione 3.2.12.** Osserviamo che se  $G$  è un sottogruppo discreto di  $\mathcal{M}$ , allora  $\overline{G}$  è un sottogruppo discreto di  $O_2$ . Infatti  $\overline{G}$  è un sottogruppo di  $O_2$ , e inoltre la controimmagine di una rotazione  $\rho_\theta \in \overline{G}$  è costituita da tutti gli elementi di  $G$  che sono rotazioni di un angolo  $\theta$  intorno a qualche punto, cioè dagli elementi di  $G$  della forma  $t_a \rho_\theta$ , per qualche  $a \in \mathbb{R}^2$  (vedere proposizione (2.3.15)).

Analogamente, denotando con  $l$  l'asse di riflessione di  $\rho_\theta r$ : il suo angolo con l'asse  $x$  è  $\frac{1}{2}\theta$ , e il gruppo puntuale  $\overline{G}$  contiene  $\rho_\theta r$  se esiste qualche elemento  $t_a \rho_\theta r$  in  $G$ ; e  $t_a \rho_\theta r$  è una riflessione o una glissoriflessione rispetto a una retta parallela a  $l$ . Pertanto la controimmagine di una riflessione  $\rho_\theta r$  è costituita da tutti gli elementi di  $G$  che sono riflessioni o glissoriflessioni rispetto a rette parallele a  $l$ .

In conclusione, poiché  $G$  non contiene rotazioni arbitrariamente piccole, lo stesso accade per il suo gruppo puntuale  $\overline{G}$ . Pertanto anche  $\overline{G}$  è discreto.

**Proposizione 3.2.13.** *Un sottogruppo discreto di  $O_2$  è un gruppo finito.*

*Dimostrazione.* Sia  $S$  un sottogruppo discreto di  $O_2$ . Gli elementi di  $S$  sono della forma  $\rho_\theta$  oppure  $\rho_\theta r$ . Supponiamo per assurdo che  $S$  sia infinito, vogliamo dimostrare che  $S$  non è discreto. Consideriamo il sottogruppo  $R$  costituito da tutte le rotazioni di  $S$ . Se  $S$  ha infinite rotazioni, allora  $R$  è infinito; se  $S$  contiene infinite riflessioni  $\rho_\theta r$ , allora deve contenere anche infinite rotazioni. Pertanto  $S$  infinito implica che anche  $R$  è infinito. Sia  $A = \{\theta \in [0, 2\pi] \mid \rho_\theta \in R\}$ . Poiché  $A$  è un sottoinsieme infinito di un intervallo reale compatto, allora  $A$  contiene un punto di accumulazione  $\theta_0$ , cioè esiste  $\theta_0 \in A$  tale che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\theta \in A$  tale che  $|\theta - \theta_0| < \epsilon$ . Poiché  $R$  è un sottogruppo, e  $\rho_\theta \in R$  e  $\rho_{\theta_0} \in R$ , si ha che  $\rho_{\theta - \theta_0} \in R$ . Quindi  $R$  non è discreto e ciò implica che anche  $S$  non è discreto.  $\square$

**Corollario 3.2.14.** *Il gruppo puntuale  $\overline{G}$  di un gruppo discreto  $G$  è  $C_n$  oppure  $D_n$ .*

*Dimostrazione.* Il corollario è conseguenza diretta della proposizione (3.2.13), dell'osservazione (3.2.12) e del teorema (3.1.5).  $\square$

Ecco qui la proposizione fondamentale che collega il gruppo puntuale con il gruppo delle traslazioni:

**Proposizione 3.2.15.** *Sia  $G$  un sottogruppo discreto di  $\mathcal{M}$ , con gruppo delle traslazioni  $L_G$  e gruppo puntuale  $\bar{G}$ . Gli elementi di  $\bar{G}$  mandano il gruppo  $L_G$  in sé, cioè se  $\bar{g} \in \bar{G}$  e  $a \in L_G$ , allora  $\bar{g}(a) \in L_G$ . Quindi  $\bar{G}$  è un sottogruppo del gruppo delle simmetrie del reticolo.*

*Dimostrazione.* Dire che  $a \in L_G$  significa che  $t_a \in G$ . Pertanto occorre provare che se  $t_a \in G$  e  $\bar{g} \in \bar{G}$ , allora  $t_{\bar{g}(a)} \in G$ . Ora in base alla definizione del gruppo puntuale,  $\bar{g}$  è l'immagine di qualche elemento  $g$  di  $G$ :  $\phi(g) = \bar{g}$ . Dimostreremo la proposizione, provando che  $t_{\bar{g}(a)}$  è il coniugato di  $t_a$  mediante  $g$ . Scriviamo  $g = t_b\rho$  oppure  $g = t_b\rho r$ , dove  $\rho = \rho_\theta$ . Allora  $\bar{g} = \rho$  oppure  $\bar{g} = \rho r$ , rispettivamente. Nel primo caso:

$$gt_ag^{-1} = t_b\rho t_a\rho^{-1}t_{-b} = t_b t_{\rho(a)}\rho\rho^{-1}t_{-b} = t_{\rho(a)},$$

come richiesto. Il calcolo è simile nell'altro caso.  $\square$

La classificazione dei sottogruppi discreti  $G$  di  $\mathcal{M}$  si basa sulla struttura dei gruppi  $L_G$  e  $\bar{G}$ . La proposizione (3.2.6) ci fa distinguere tre casi per il gruppo delle traslazioni:

1.  $L_G = \{0\}$ ;
2.  $L_G = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$ ;
3.  $L_G = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ .

Se  $L_G = \{0\}$ , allora  $\text{Ker}\phi = 1$  per l'osservazione (3.2.4), quindi  $G \cong \bar{G}$  e, per il corollario (3.2.14),  $G \cong C_n$  oppure  $G \cong D_n$ .

Le due proposizioni seguenti ci danno informazioni sulla struttura del gruppo puntuale  $\bar{G}$  quando il gruppo delle traslazioni non si riduce al vettore nullo:

**Proposizione 3.2.16.** *Sia  $G$  un sottogruppo discreto di  $\mathcal{M}$  con gruppo delle traslazioni  $L_G = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$ . Allora:*

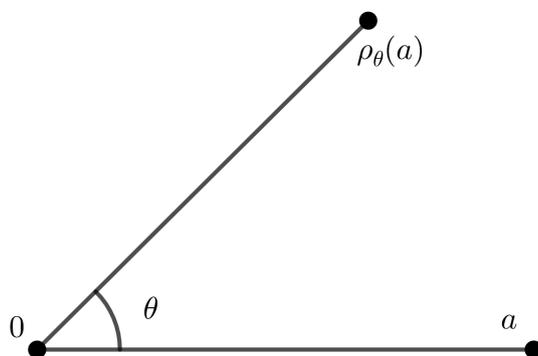
1. ogni rotazione in  $G$  ha ordine 1 oppure 2;
2. il suo gruppo puntuale  $\overline{G}$  è uno dei gruppi  $C_n, D_n$  dove  $n = 1$  oppure 2.

*Dimostrazione.* La seconda parte della proposizione segue dalla prima in virtù di (3.1.5). Per dimostrare 1), sia  $\rho_{P,\theta}$  una rotazione di centro  $P$  e di angolo  $\theta$  in  $G$  e sia  $b = ma$  un vettore in  $L_G$ . Per quanto visto abbiamo che  $\rho_\theta \in \overline{G}$ . Inoltre per la proposizione (3.2.15) si ha che  $\rho_\theta(b) \in L_G$ . I vettori  $b$  e  $\rho_\theta(b)$  hanno la stessa direzione e lo stesso modulo, cioè  $\rho_\theta(b) = \pm ma = \pm b$ . Se ne deduce che  $\theta = 0$  oppure  $\theta = \pi$ , quindi  $\rho$  ha ordine 1 oppure 2.  $\square$

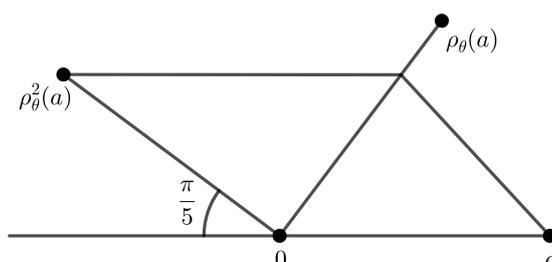
**Proposizione 3.2.17** (Restrizione cristallografica). *Sia  $H \subset O_2$  un sottogruppo finito del gruppo delle simmetrie di un reticolo  $L$ . Allora:*

1. ogni rotazione in  $H$  ha ordine 1, 2, 3, 4 oppure 6;
2.  $H$  è uno dei gruppi  $C_n, D_n$  dove  $n = 1, 2, 3, 4$  oppure 6.

*Dimostrazione.* La seconda parte della proposizione segue dalla prima in virtù di (3.1.5). Per dimostrare 1), sia  $\theta$  il più piccolo angolo di rotazione non nullo in  $H$ , e sia  $a$  un vettore non nullo in  $L$  di lunghezza minima. Allora, poiché  $H$  agisce su  $L$ , anche  $\rho_\theta(a)$  sta in  $L$ ; pertanto  $b = \rho_\theta(a) - a \in L$ . Dato che  $a$  ha lunghezza minima,  $\|b\| \geq \|a\|$ . Poiché  $\|b\| = 2 \|a\| \sin(\frac{\theta}{2})$ , si ha che  $2 \|a\| \sin(\frac{\theta}{2}) \geq \|a\|$  e quindi  $2 \sin(\frac{\theta}{2}) \geq 1$ . Ne segue che  $\theta \geq \frac{2\pi}{6}$ .



Dunque  $\rho_\theta$  ha ordine  $\leq 6$ . Inoltre il caso  $\theta = \frac{2\pi}{5}$  è da scartare, poiché allora il vettore  $b' = \rho_\theta^2(a) + a$  è più corto di  $a$ . Infatti  $\|b'\| = 2\|a\|\operatorname{sen}(\frac{\theta}{4}) = 2\|a\|\operatorname{sen}(\frac{\pi}{10})$ , dove  $2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{10}) < 1$ . Ciò completa la dimostrazione di 1).  $\square$



**Osservazione 3.2.18.** Si noti che in base alla precedente proposizione una rotazione di ordine 5 è esclusa. Non esistono disegni di carte da parati con simmetria di rotazione di ordine 5.

Una prima classificazione dei gruppi discreti di movimenti  $G \subset \mathcal{M}$ , in base alla struttura del suo gruppo delle traslazioni  $L_G$  è la seguente:

1. Se  $L_G$  è il gruppo banale,  $L_G = \{0\}$ , allora  $G$  è isomorfo al suo gruppo puntuale  $\overline{G}$ , quindi  $G$  è finito ed è  $C_n$  o  $D_n$ , per (3.2.13) e (3.2.14);  $G$  è detto *gruppo di simmetria dei rosoni*;
2. i gruppi discreti  $G$  tali che  $L_G$  sia ciclico,  $L_G = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$ , sono i *gruppi di simmetria dei fregi*;
3. se  $L_G$  è un reticolo,  $L_G = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ , allora  $G$  è chiamato *gruppo cristallografico piano*. Tali gruppi sono i gruppi delle simmetrie dei disegni delle carte da parati e dei cristalli in dimensione due.

Con le proposizioni (3.2.16) e (3.2.17) si è portati a pensare di aver concluso anche lo studio riguardante i gruppi dei fregi ed i gruppi cristallografici piani, e di aver trovato quattro possibilità per il primo e dieci per il secondo; ma la struttura di  $L_G$  e  $\overline{G}$  non è sufficiente a identificare il gruppo  $G$ , cioè conoscendo  $L_G$  e  $\overline{G}$  non è univocamente determinato (a meno di isomorfismi) il gruppo  $G$ . Vedremo esempi di questo, quando nei prossimi capitoli classificheremo i gruppi dei fregi e i gruppi cristallografici piani.

# Capitolo 4

## I gruppi dei fregi

In questo capitolo classifichiamo i gruppi dei fregi (che contengono traslazioni in una sola direzione) ed è abbastanza sorprendente rendersi conto che questi gruppi sono assai pochi, infatti vedremo che sono esattamente 7.

### 4.1 Classificazione

I gruppi dei fregi sono i sottogruppi discreti di  $\mathcal{M}$  tale che il gruppo delle traslazioni  $L_G$  sia ciclico, cioè

$$L_G = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Vedremo che esistono solo 7 gruppi dei fregi. Prima di enunciare e dimostrare il teorema, vediamo i seguenti lemmi:

**Lemma 4.1.1.** *Sia  $G$  un gruppo. Sia  $T = \langle t \rangle$  il sottogruppo ciclico generato da  $t \in G$  e sia  $g \in G$ . Allora  $g^{-1}tg$  è un generatore del sottogruppo  $g^{-1}Tg = \{g^{-1}xg \mid x \in T\}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x \in g^{-1}Tg$ . Poiché  $t$  è un generatore di  $T$  e sia  $g \in G$ , segue che  $x = g^{-1}t^l g$  per qualche  $l \in \mathbb{Z}$ . Notiamo che

$$(g^{-1}tg)^l = \underbrace{g^{-1}tgg^{-1}tg \dots g^{-1}tg}_{l \text{ volte}} = g^{-1}t^l g,$$

quindi  $x = (g^{-1}tg)^l$ . Poiché  $x$  è un arbitrario elemento di  $g^{-1}Tg$ , allora  $g^{-1}tg$  è un generatore di  $g^{-1}Tg$ .  $\square$

**Lemma 4.1.2.** *Sia  $\gamma$  una glissoriflessione e sia  $t_a$  una traslazione di vettore  $a$  tale che l'asse di  $\gamma$  ed  $a$  siano paralleli, allora  $\gamma$  e  $t_a$  commutano.*

*Dimostrazione.* Supponiamo, per semplicità, che l'asse di  $\gamma$  sia l'asse delle ascisse. Quindi  $\gamma = t_b r$  per un opportuno  $b = (b_1, 0)$ . Inoltre abbiamo che  $a = (a_1, 0)$ . Si ha immediatamente che sia  $\gamma t_a$  che  $t_a \gamma$  mandano un arbitrario punto  $(x, y)$  del piano in  $(x+a_1+b_1, -y)$ . Quindi  $\gamma$  e  $t_a$  commutano.  $\square$

**Lemma 4.1.3.** *La composizione di due rotazioni del tipo  $\rho_{Q,\pi}$  e  $\rho_{P,\pi}$  è una traslazione, la quale è diversa dall'identità se e solo se  $Q \neq P$ .*

*Dimostrazione.* La composizione di due rotazioni è un'isometria diretta, quindi per il teorema di Chasles (2.3.11) è una rotazione o una traslazione.

Consideriamo un sistema di riferimento standard. La rotazione  $\rho_{Q,\pi}$  di centro  $Q = (Q_1, Q_2)$  e di angolo  $\pi$  è del tipo:

$$\rho_{Q,\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - Q_1 \\ y - Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2Q_1 \\ -y + 2Q_2 \end{pmatrix},$$

analogamente la rotazione  $\rho_{P,\pi}$  di centro  $P = (P_1, P_2)$  e di angolo  $\pi$  è del tipo:

$$\rho_{P,\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2P_1 \\ -y + 2P_2 \end{pmatrix}.$$

Si ha che

$$\rho_{Q,\pi} \rho_{P,\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho_{Q,\pi} \begin{pmatrix} -x + 2P_1 \\ -y + 2P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2P_1 + 2Q_1 \\ y - 2P_2 + 2Q_2 \end{pmatrix},$$

quindi abbiamo ottenuto che  $\rho_{Q,\pi} \rho_{P,\pi}$  è una traslazione di vettore  $v = (-2P_1 + 2Q_1, -2P_2 + 2Q_2)$ .  $\square$

**Lemma 4.1.4.** *Sia  $g$  una isometria inversa e sia  $t_a$  una traslazione di vettore  $a$ .*

1. *Se  $gt_a = t_a g$  allora l'asse di  $g$  ed  $a$  sono paralleli;*
2. *se  $gt_a = t_{-a} g$  allora l'asse di  $g$  ed  $a$  sono perpendicolari.*

*Dimostrazione.* 1) Sia  $g$  una riflessione, supponiamo che l'asse di  $g$  sia l'asse delle ascisse, quindi  $g = r$ . Sia  $a = (a_1, a_2)$  il vettore della traslazione  $t_a$ . Si ha che  $rt_a$  manda un arbitrario punto  $(x, y)$  del piano in  $(x + a_1, -y - a_2)$ , mentre  $t_ar$  manda un arbitrario punto  $(x, y)$  del piano in  $(x + a_1, -y + a_2)$ . Si ha immediatamente che

$$rt_a = t_ar \Leftrightarrow a_2 = 0,$$

quindi  $a = (a_1, 0)$ , da cui si ha che l'asse di  $r$  ed  $a$  sono paralleli.

Si procede analogamente se  $g$  è una glissoriflessione.

2) Analogamente al caso 1). □

**Teorema 4.1.5.** *Se  $F$  è uno dei gruppi dei fregi, allora  $F$  è uno dei sette possibili gruppi:*

1.  $F_1 = \langle t \rangle$

2.  $F_1^1 = \langle t, r \mid r^2 = 1, rtr^{-1} = t \rangle$

3.  $F_1^2 = \langle t, r \mid r^2 = 1, rtr^{-1} = t^{-1} \rangle$

4.  $F_1^3 = \langle t, \gamma \mid \gamma^2 = t, \gamma t \gamma^{-1} = t \rangle$

5.  $F_2 = \langle t, \rho \mid \rho t \rho^{-1} = t^{-1}, \rho^2 = 1 \rangle$

6.  $F_2^1 = \langle t, \rho, r \mid \rho^2 = 1, \rho t \rho^{-1} = t^{-1}, r^2 = 1, rtr^{-1} = t, (r\rho)^2 = 1 \rangle$

7.  $F_2^2 = \langle t, \rho, \gamma \mid \rho^2 = 1, \rho t \rho^{-1} = t^{-1}, \gamma^2 = t, \gamma t \gamma^{-1} = t, (\gamma\rho)^2 = 1 \rangle$

*Dimostrazione.* Sia  $F$  un gruppo dei fregi, e sia  $L_F$  il suo sottogruppo delle traslazioni, quindi  $L_F = \langle t_a \rangle$ , dove  $t_a$  è la traslazione che genera  $L_F$ .

Caso 1): Supponiamo che  $F$  non contenga rotazioni non banali. Se  $F$  non contiene riflessioni, allora  $F = F_1 = \langle t_a \rangle$ . Alternativamente  $F$  conterrà una riflessione o una glissoriflessione. Supponiamo che  $F$  contenga una riflessione, scegliamo le coordinate in modo che questa riflessione diventi la riflessione standard  $r$ . Per il lemma (4.1.1),  $rt_ar^{-1}$  genera  $rL_Fr^{-1}$ . Inoltre per il lemma (3.2.11)  $L_F$  è un sottogruppo normale, quindi  $rL_Fr^{-1} = L_F$ , da cui si ha che  $rt_ar^{-1}$  genera  $L_F$ . Perciò  $rt_ar^{-1} = t_{\pm a}$ . Ciascuno dei due casi genera un differente gruppo dei fregi, quindi abbiamo che  $F = F_1^1 = \langle t_a, r \mid r^2 = 1, rtr^{-1} = t_a \rangle$

oppure  $F = F_1^2 = \langle t_a, r \mid r^2 = 1, rt_ar^{-1} = t_{-a} \rangle$ . Se  $F$  contiene anche una glissoriflessione  $\gamma$ , allora  $\gamma r$  sarà una isometria senza punti fissi che preserva l'orientazione, cioè una traslazione in  $F$ . Segue che  $\gamma$  può essere generata da  $r$  e  $t_a$ , e quindi non genera un nuovo gruppo dei fregi.

Esiste tuttavia il caso in cui  $F$  contiene una glissoriflessione senza contenere riflessioni. Quindi supponiamo che  $F$  contenga una glissoriflessione  $\gamma$ . Scegliamo le coordinate in modo che l'asse di  $\gamma$  coincida con l'asse delle  $x$ , allora  $\gamma = t_b r$  per un opportuno  $b$ , da cui  $\gamma^2 = (t_b r)^2 = t_{2b}$ . Inoltre si ha  $\gamma^2 = t_a^h = t_{ha}$  per qualche  $h \in \mathbb{Z}$ . Osserviamo che  $2b = ha$ , quindi il vettore  $a$  della traslazione  $t_a$  è parallelo all'asse  $x$ . Per il lemma (4.1.2)  $\gamma$  e  $t_a$  commutano, segue che

$$(t_a^k \gamma)^2 = t_a^{2k} \gamma^2 = t_a^{2k} t_a^h = t_a^{2k+h},$$

per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ . Scegliamo  $k \in \mathbb{Z}$  tale che  $2k+h = 0$  oppure  $2k+h = 1$ . Poniamo  $\gamma' = t_a^k \gamma$  e poiché  $\gamma'^2 = t_a^{2k+h}$ , allora  $\gamma'^2 = 1$  oppure  $\gamma'^2 = t_a$ . Inoltre, poiché  $\gamma' = t_a^k \gamma$ , segue che il gruppo generato da  $\gamma$  e  $t_a$  è uguale al gruppo generato da  $\gamma'$  e  $t_a$ , cioè  $\langle \gamma, t_a \rangle = \langle \gamma', t_a \rangle$ . Quindi se  $\gamma'^2 = 1$ , allora il gruppo generato è  $F_1^1$ . Altrimenti se  $\gamma'^2 = t_a$ , si ha un nuovo gruppo dei fregi:  $F = F_1^3 = \langle t_a, \gamma \mid \gamma^2 = t_a, \gamma t_a \gamma^{-1} = t_a \rangle$ .

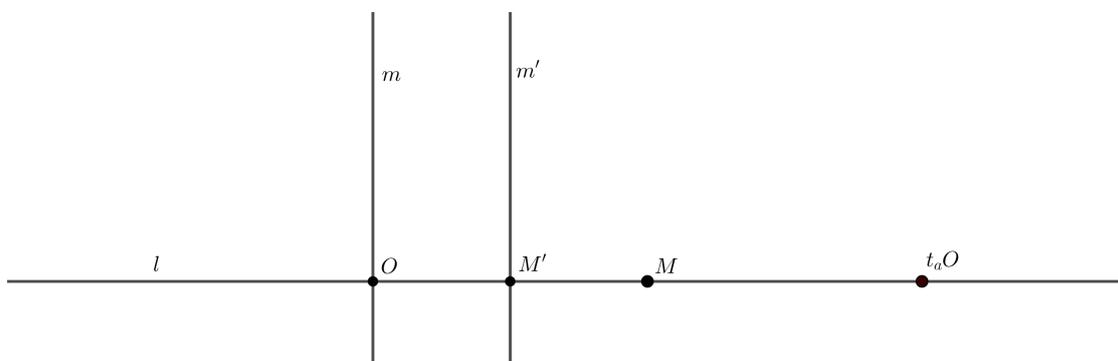
Caso 2): Supponiamo che  $F$  contenga una rotazione non banale, scegliamo le coordinate in modo che questa rotazione sia la rotazione intorno all'origine  $O$ , quindi consideriamo  $\rho_\theta$ . Per un ragionamento analogo a quello per il caso 1), si avrà che  $\rho_\theta t_a \rho_\theta^{-1} = t_{\pm a}$ . Osserviamo che se  $\rho_\theta t_a \rho_\theta^{-1} = t_a$ , dalle regole di composizione (2.3.13), si ottiene che  $t_c \rho_\theta \rho_\theta^{-1} = t_a$  dove  $c = \rho_\theta(a)$ . Quindi avremmo che  $t_c = t_a$ , cioè  $\rho_\theta(a) = a$ , da cui si ha che  $\rho_\theta$  sarebbe la rotazione banale. Per tale motivo consideriamo  $\rho_\theta t_a \rho_\theta^{-1} = t_{-a}$ . Quindi  $\rho_\theta$  è una rotazione di un angolo  $\pi$ , e di conseguenza  $\rho_\pi^2 = 1$ . Supponiamo che esista una qualche rotazione  $\rho_{P,\alpha} \in F$  tale che  $\rho_\pi \neq \rho_{P,\alpha}$ . Per lo stesso ragionamento  $\rho_{P,\alpha}$  è una rotazione di angolo  $\pi$ . Poiché  $\rho_\pi \neq \rho_{P,\pi}$ , si ha per il lemma (4.1.3) che  $\rho_{P,\pi} \rho_\pi$  è una traslazione, e quindi  $\rho_{P,\pi} \rho_\pi \in L_F$ . Poiché  $\rho_{P,\pi} \rho_\pi = t_b$ , per un opportuno  $b$ , moltiplicando per  $\rho_\pi$  a destra si ha immediatamente che  $\rho_{P,\pi} = t_b \rho_\pi$ , e quindi  $\rho_{P,\pi}$  è generato da  $\rho_\pi$  e  $t_b$ . Se  $F$  non contiene riflessioni, allora  $F = F_2 = \langle t_a, \rho_\pi \mid \rho_\pi t_a \rho_\pi^{-1} = t_{-a}, \rho_\pi^2 = 1 \rangle$ .

Supponiamo che  $F$  contenga una riflessione o una glissoriflessione  $g$  con asse  $l'$ . Come prima,  $gt_a g^{-1} = t_{\pm a}$ . Per il lemma (4.1.4), si ha che  $l' \parallel l$  oppure  $l' \perp l$ , dove  $l$  è la direzione

del vettore di traslazione di  $t_a$ . Supponiamo che  $l' \perp l$ , segue che  $(g\rho_\pi)t_a(g\rho_\pi)^{-1} = t_a$  e  $g\rho_\pi$  è un'isometria inversa (quindi necessariamente una riflessione o una glissoriflessione) con asse  $l''$  parallelo a  $l$ . Poiché  $(g\rho_\pi)t_a(g\rho_\pi)^{-1} = t_a$  e  $gt_ag = t_{-a}$ , segue che  $t_a\rho_\pi t_a\rho_\pi g = g$  e  $gt_a\rho_\pi t_a = g\rho_\pi$ . Allora possiamo riscrivere i generatori senza cambiare il gruppo, con  $(g\rho_\pi)$  che sostituisce il generatore  $g$ . Questo semplifica le due alternative  $l' \parallel l$  o  $l' \perp l$  al solo caso  $l' \parallel l$ , con  $g\rho_\pi$  una isometria inversa avente asse parallelo a  $l$ .

Ora affermiamo che  $l' = l$  dove  $l'$  è l'asse di  $g$ , la quale è un'isometria inversa, e dimostriamo tale affermazione per assurdo. Ricordiamo che  $O$  è il centro di  $\rho_\pi$ . Supponiamo che  $l' \neq l$  e consideriamo il punto  $gO$  e l'isometria  $g\rho_\pi g^{-1}$ . Segue che  $g\rho_\pi g^{-1}gO = g\rho_\pi O = gO$ . Poiché  $g\rho_\pi g^{-1}$  è un'isometria diretta e fissa  $gO$ ,  $g\rho_\pi g^{-1}$  è una rotazione per il teorema di Chasles. Per dimostrare che  $g\rho_\pi g^{-1}$  è una rotazione non banale, consideriamo un punto  $P \in E^2$  tale che  $P \neq O$ . L'immagine di  $gP$  rispetto a  $g\rho_\pi g^{-1}$  è  $g\rho_\pi P$ . Poiché  $P \neq O$ ,  $\rho_\pi P \neq P$  e quindi  $g\rho_\pi P \neq gP$  (l'isometria  $g$  preserva la distanza). Dunque  $gP$  non è fissato da  $g\rho_\pi g^{-1}$ , ovvero  $g\rho_\pi g^{-1}$  è una rotazione non banale. Abbiamo già visto che  $gO$  è fisso e sappiamo che tutte le rotazioni non banali contenute nei gruppi dei fregi sono rotazioni di angolo  $\pi$ , di conseguenza  $g\rho_\pi g^{-1} = \rho_{rO, \pi}$ , cioè è la rotazione di centro  $rO$  e angolo  $\pi$ . Poiché  $O \neq rO$ , si ha che  $(\rho_{rO, \pi})(\rho_\pi)$  è una traslazione  $t_b$ , per un opportuno  $b$ , in particolare osserviamo che l'immagine di  $O$  rispetto a  $t_b$  è una traslazione di vettore  $2\vec{OO'}$ , quindi  $b = 2\vec{OO'}$ . Poiché  $l' \parallel l$  e  $l' \neq l$ ,  $t_b$  è una traslazione che non appartiene al gruppo dei fregi. Questo dimostra che  $l = l'$ . Scegliamo le coordinate in modo che  $l = l'$  coincida con l'asse  $x$ . Segue ora che se  $g$  è una riflessione,  $g = r$ , allora  $r\rho_\pi$  deve essere una riflessione con asse  $m \perp l$  passante per  $O$ . Quindi  $F_2^1 = \langle t_a, \rho_\pi, r \mid \rho_\pi^2 = 1, \rho_\pi t_a \rho_\pi^{-1} = t_{-a}, r^2 = 1, r t_a r^{-1} = t_a, (r\rho_\pi)^2 = 1 \rangle$ .

Se invece  $g$  è una glissoriflessione,  $g = \gamma$ , analogamente al caso 1), possiamo cambiare i generatori affinché  $\gamma^2 = t_a$ , ed  $l$  diventa l'asse sia di  $\gamma$  che di  $t_a$ . Il centro di rotazione della rotazione  $\rho_\pi$  è  $O$ . Sia  $M$  il punto medio del segmento  $\overline{Ot_aO}$  e sia  $M'$  il punto medio del segmento  $\overline{OM}$ . Sia  $m$  la retta contenente  $O$  tale che  $m \perp l$ , e sia  $m'$  la retta contenente  $M'$  tale che  $m' \perp l$ , come mostrato nella seguente figura:



Siano  $r_m$  la riflessione di asse  $m$  ed  $r_{m'}$  la riflessione di asse  $m'$ . Per la proposizione (2.3.18)  $\rho_\pi = r_l r_m$  e  $\gamma = r_{m'} r_m r$ . Quindi  $\gamma \rho_\pi = r_{m'}$ , da cui si ha che  $(\gamma \rho_\pi)^2 = 1$ . Questo ci definisce l'ultimo gruppo dei fregi  $F = F_2^2 = \langle t_a, \rho_\pi, \gamma \mid \rho_\pi^2 = 1, \rho_\pi t_a \rho_\pi^{-1} = t_{-a}, \gamma^2 = t_a, \gamma t_a \gamma^{-1} = t_a, (\gamma \rho_\pi)^2 = 1 \rangle$ .  $\square$

**Notazione 4.1.6.** I sette gruppi dei fregi si possono elencare mediante un nome simbolico composto da quattro caratteri, che trae le sue origini dalla cristallografia, nel seguente modo:

- Il primo simbolo è sempre una "p";
- il secondo simbolo può essere un "1" oppure una "m" (da mirror=specchio) e indica la presenza ("m") oppure l'assenza ("1") di una riflessione nella direzione ortogonale alla direzione di traslazione;
- il terzo simbolo può essere un "1", una "m" o una "a" e indica la presenza di una riflessione ("m"), oppure di una glissoriflessione ("a"), oppure nessuna delle due ("1") nella direzione parallela alla direzione di traslazione;
- l'ultimo simbolo può essere un "1" oppure un "2" e indica la presenza ("2") oppure l'assenza ("1") di una rotazione di  $\pi$ .

Dalla notazione (4.1.6) e dalla dimostrazione del teorema (4.1.5), si ha che i sette gruppi dei fregi si indicano con:

1.  $F_1 = \langle t_a \rangle = p111$

$$2. F_1^1 = \langle t_a, r \mid r^2 = 1, rt_a r^{-1} = t_a \rangle = p1m1$$

$$3. F_1^2 = \langle t_a, r \mid r^2 = 1, rt_a r^{-1} = t_{-a} \rangle = pm11$$

$$4. F_1^3 = \langle t_a, \gamma \mid \gamma^2 = t_a, \gamma t_a \gamma^{-1} = t_a \rangle = p1a1$$

$$5. F_2 = \langle t_a, \rho_\pi \mid \rho_\pi t_a \rho_\pi^{-1} = t_{-a}, \rho_\pi^2 = 1 \rangle = p112$$

$$6. F_2^1 = \langle t_a, \rho_\pi, r \mid \rho_\pi^2 = 1, \rho_\pi t_a \rho_\pi^{-1} = t_{-a}, r^2 = 1, rt_a r^{-1} = t_a, (r\rho_\pi)^2 = 1 \rangle = pmm2$$

$$7. F_2^2 = \langle t_a, \rho_\pi, \gamma \mid \rho_\pi^2 = 1, \rho_\pi t_a \rho_\pi^{-1} = t_{-a}, \gamma^2 = t_a, \gamma t_a \gamma^{-1} = t_a, (\gamma\rho_\pi)^2 = 1 \rangle = pma2$$

dove  $t_a$  è una traslazione di vettore  $a$ ,  $r$  è la riflessione standard,  $\rho_\pi$  è la rotazione di angolo  $\pi$  intorno all'origine  $O$  e  $\gamma$  è una glissoriflessione.

Il gruppo  $F_1$  si indica con  $p111$ , esso è generato solamente da una traslazione  $t_a$ , da cui si ha immediatamente che sia nel secondo, che nel terzo che nel quarto posto vi è 1.

Il gruppo  $F_1^1$  si indica con  $p1m1$ , esso è generato da una traslazione  $t_a$  e dalla riflessione standard  $r$  tale che  $rt_a r^{-1} = t_a$ . Infatti per il lemma (4.1.4) si ha che l'asse di  $r$  e la direzione di  $a$  sono paralleli, quindi al secondo posto abbiamo 1 e al terzo posto abbiamo  $m$ . Infine dalla dimostrazione del teorema si ha immediatamente che nel quarto posto vi è 1.

Il gruppo  $F_1^2$  si indica con  $pm11$ , esso è generato da una traslazione  $t_a$  e dalla riflessione standard  $r$  tale che  $rt_a r^{-1} = t_{-a}$ . Infatti per il lemma (4.1.4) si ha che l'asse di  $r$  e la direzione di  $a$  sono ortogonali, quindi al secondo posto abbiamo  $m$  e al terzo posto abbiamo 1. Infine dalla dimostrazione del teorema si ha immediatamente che nel quarto posto vi è 1.

Il gruppo  $F_1^3$  si indica con  $p1a1$ , esso è generato da una traslazione  $t_a$  e da una glissoriflessione  $\gamma$  tale che  $\gamma t_a \gamma^{-1} = t_a$ . Infatti per il lemma (4.1.4) si ha che l'asse di  $\gamma$  e la direzione di  $a$  sono paralleli, quindi al terzo posto vi è  $a$ . Infine dalla dimostrazione del teorema si ha immediatamente che sia nel secondo posto che nel quarto posto vi è 1.

Il gruppo  $F_2$  si indica con  $p112$ , esso è generato da una traslazione  $t_a$  e da una rotazione  $\rho_\pi$  tale che  $\rho_\pi t_a \rho_\pi^{-1} = t_{-a}$ , da cui dalla dimostrazione si ha che  $\rho_\pi$  è una rotazione di  $\pi$ , quindi nel quarto posto vi è 2. Inoltre dalla dimostrazione del teorema si ha immediatamente che sia nel secondo posto che nel terzo posto vi è 1.

Il gruppo  $F_2^1$  si indica con  $pmm2$ , esso è generato da una traslazione  $t_a$ , da una rotazione  $\rho_\pi$  e dalla riflessione standard  $r$ . Dalla relazione  $rt_a r^{-1} = t_a$ , si ha per il lemma (4.1.4) che l'asse di  $r$  e la direzione di  $a$  sono paralleli, quindi nel terzo posto abbiamo  $m$ . Dalla relazione  $\rho_\pi t_a \rho_\pi^{-1} = t_{-a}$ , si ha che  $\rho_\pi$  è una rotazione di  $\pi$ , quindi nel quarto posto vi è 2. Inoltre dalla dimostrazione si ha che  $r\rho_\pi$  è una riflessione, ottenuta per composizione da  $r$  e  $\rho_\pi$ , con asse perpendicolare alla direzione di  $a$ , quindi nel secondo posto vi è  $m$ .

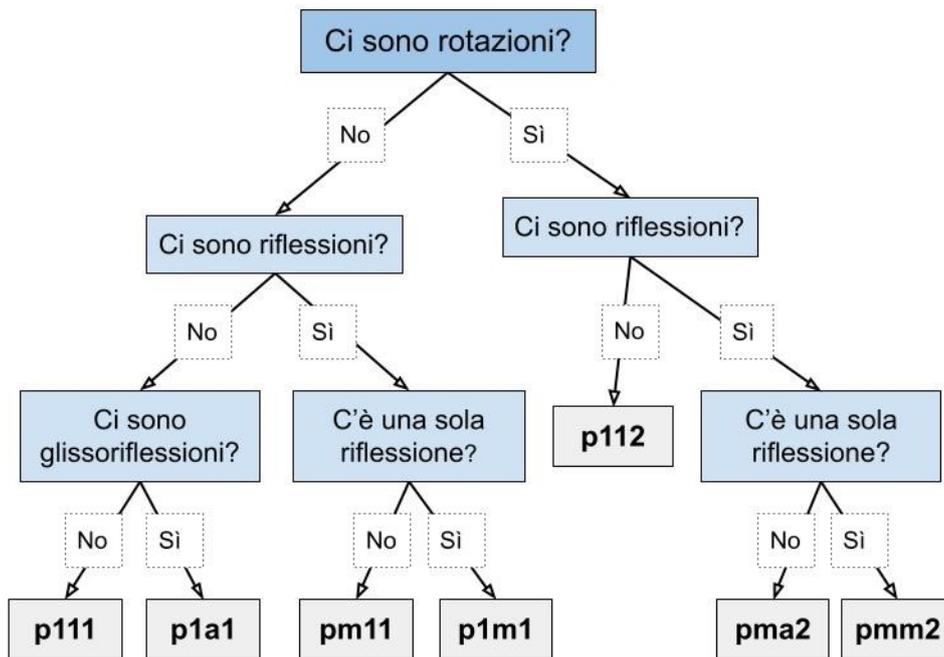
Il gruppo  $F_2^2$  si indica con  $pma2$ , esso è generato da una traslazione  $t_a$ , da una rotazione  $\rho_\pi$  e da una glissoriflessione  $\gamma$ . Dalla relazione  $\gamma t_a \gamma^{-1} = t_a$ , si ha per il lemma (4.1.4) che l'asse di  $\gamma$  e la direzione di  $a$  sono paralleli, quindi nel terzo posto abbiamo  $a$ . Dalla relazione  $\rho_\pi t_a \rho_\pi^{-1} = t_{-a}$ , si ha che  $\rho_\pi$  è una rotazione di  $\pi$ , quindi nel quarto posto vi è 2. Inoltre dalla dimostrazione si ha che  $\gamma\rho_\pi$  è una riflessione, ottenuta per composizione da  $\gamma$  e  $\rho_\pi$ , con asse perpendicolare alla direzione di  $a$ , quindi nel secondo posto vi è  $m$ .

Ora mostriamo come i setti gruppi dei fregi si possano rappresentare graficamente con delle orme; inoltre essi si possono associare a sette diversi tipi di andatura; qui il colore è usato semplicemente per distinguere il piede destro dal piede sinistro. Ad esempio  $p1a1$  è la camminata normale,  $p111$  corrisponde a saltare su un piede solo,  $p1m1$  a saltare a piè pari.

Gruppi dei fregi	Generatori	Rappresentazione	Andatura
$p111$	Traslazione		hop
$p1m1$	Traslazione e riflessione rispetto a un asse orizzontale		jump
$pm11$	Traslazione e riflessione rispetto a un asse verticale		sidle
$p1a1$	Traslazione e glissoriflessione		step
$p112$	Traslazione e rotazione di $\pi$		spinning hop
$pmm2$	Traslazione, rotazione di $\pi$ e riflessione con asse verticale		spinning jump
$pma2$	Traslazione, rotazione di $\pi$ e glissoriflessione		spinning sidle

## 4.2 Riconoscimento dei gruppi dei fregi

Vediamo ora come si può determinare quale è il gruppo di simmetria di un fregio rispondendo a quattro domande. Useremo il fatto che il gruppo contenente una glissoriflessione ma nessuna riflessione è  $p1a1$  e che solo  $p111$  e  $p112$  non contengono isometrie inverse. Seguendo il seguente diagramma ad albero si riesce a classificare qualsiasi fregio:



### 4.3 I fregi in arte

Da un punto di vista artistico il termine "fregio" indica un motivo pittorico lineare. Questo ornamento era spesso compreso tra l'architrave e la cornice dei templi antichi. I sette gruppi dei fregi siano stati usati da artisti e architetti ben prima che si arrivasse alla classificazione matematica di questi gruppi. Vediamo un esempio per ciascuno dei sette fregi nell'arte decorativa:

*p111*



*p1m1*



*pm11*



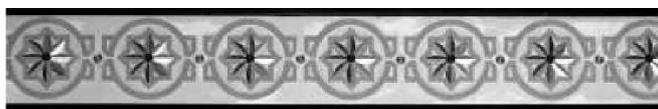
*p1a1*



*p112*



*pmm2*



*pma2*



# Capitolo 5

## I gruppi cristallografici piani

Guardando un pezzo di carta da parati o un qualsiasi motivo ripetuto, si è sorpresi della matematica che vi è dietro a quel foglio decorato. In questo capitolo mostreremo che esistono diciassette gruppi discreti periodici, usualmente denominati *gruppi della carta da parati* o *gruppi cristallografici piani* (per distinguerli da quelli nello spazio usati in cristallografia), in quanto caratterizzano qualunque decorazione realizzata ripetendo un motivo in due direzioni. Questi diciassette gruppi di simmetria si ritrovano nelle decorazioni di tutte le culture e di tutte le epoche. In particolare, è stata formulata l'ipotesi che fossero già tutti presenti nelle decorazioni dell'Antico Egitto. Nella cultura islamica si ha la maggior diffusione e varietà di utilizzo di questi gruppi nelle decorazioni degli edifici religiosi e non religiosi. In particolare, il palazzo dell'Alhambra a Granada è famoso per i suoi mosaici geometrici le cui simmetrie realizzano tutti i diciassette gruppi periodici.

### 5.1 Classificazione

Abbiamo definito un gruppo cristallografico piano come un sottogruppo discreto di  $\mathcal{M}$  tale che il gruppo delle traslazioni  $L_G$  sia un reticolo, cioè

$$L_G = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

**Teorema-Definizione 5.1.1.** *Ci sono esattamente 5 diversi tipi di reticoli, determinati dalla forma del parallelogramma individuato dai generatori  $a$  e  $b$  del reticolo.*

*Non è restrittivo supporre che*

$$\|a\| \leq \|b\| \leq \|a - b\| \leq \|a + b\|;$$

*in tal caso si hanno le seguenti possibilità:*

1. *reticolo parallelogrammatico:*  $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| < \|a + b\|;$
2. *reticolo rettangolare:*  $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|;$
3. *reticolo rettangolare centrato:*  $\|a\| < \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|;$
4. *reticolo quadrato:*  $\|a\| = \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|;$
5. *reticolo esagonale:*  $\|a\| = \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|;$

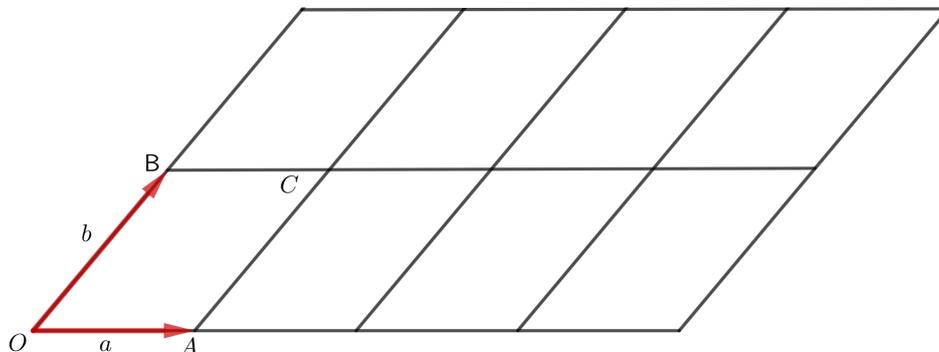
*Dimostrazione.* Osserviamo per prima cosa che non è restrittivo supporre che

$$\|a\| \leq \|b\| \leq \|a - b\| \leq \|a + b\|. \quad (5.1)$$

Infatti possiamo scegliere la base  $(a, b)$  per  $L$  in modo che  $a$  sia un vettore di lunghezza minima, e  $b$  sia di lunghezza uguale ad  $a$  se questo è possibile, altrimenti sia di lunghezza minima tra i vettori di lunghezza  $> \|a\|$  tale che  $\|a\| \leq \|b\|$  (in caso contrario, invertiamo  $a$  e  $b$ ). Per la scelta fatta, si ha necessariamente che  $\|b\| \leq \|a - b\|$  e  $\|b\| \leq \|a + b\|$ , altrimenti  $a$  e  $b$  non sarebbero più i vettori di lunghezza minima. Infine posso sostituire  $b$  con  $-b$  (poiché  $\|b\| = \|-b\|$ ), se necessario, per garantire che  $\|a - b\| \leq \|a + b\|$ .

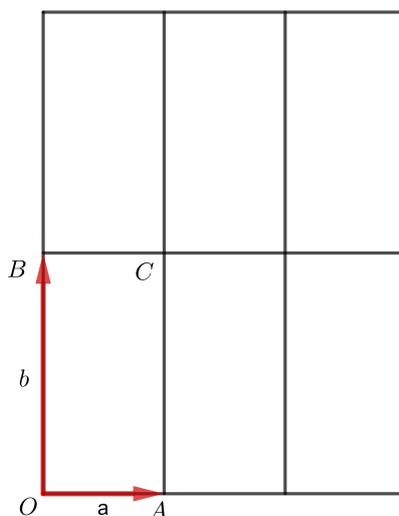
Consideriamo ora tutti gli 8 possibili casi che si possono avere in (5.1):

**Caso 1):**  $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| < \|a + b\|$ .



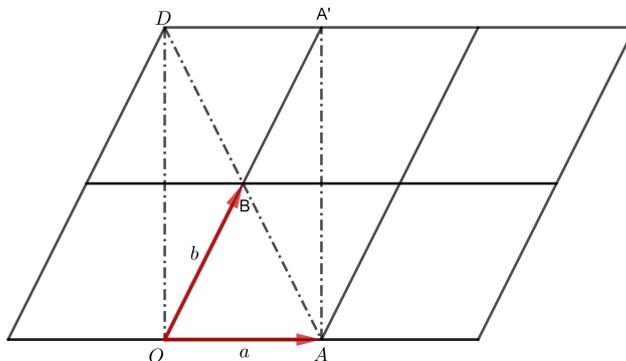
Essendo  $a$  e  $b$  sono linearmente indipendenti, il quadrilatero generato da  $a$  e  $b$ , cioè  $OACB$ , è un parallelogramma.

**Caso 2):**  $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$ .



Sia  $OACB$  il parallelogramma generato dai vettori  $a$  e  $b$ . Poiché  $a$  e  $b$  devono essere tali che  $\|a - b\| = \|a + b\|$ , si ha che  $AB \cong OC$ . Ricordiamo che se un parallelogramma ha le diagonali congruenti, allora è un rettangolo. Quindi abbiamo ottenuto che  $OACB$  è un rettangolo.

**Caso 3):**  $\|a\| < \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$ .



Consideriamo i triangoli  $OBD$  e  $ABA'$ :

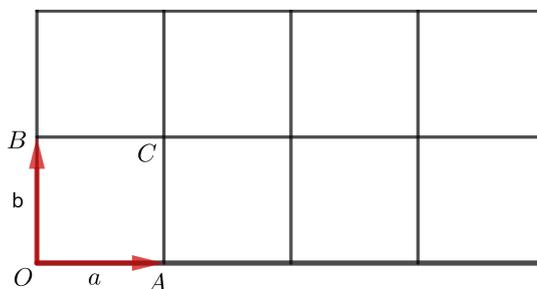
- $OB \cong AB$  poiché  $\|b\| = \|a - b\|$ ;
- $DB \cong BA'$  poiché  $\|b\| = \|a - b\|$ ;
- $\hat{O}BD \cong \hat{A}BA'$  poiché angoli opposti al vertice.

Quindi per il primo criterio di congruenza dei triangoli, si ha che i triangoli  $OBD$  e  $ABA'$  sono congruenti. In particolare,  $OD \cong AA'$ .

Consideriamo il quadrilatero  $OAA'D$ , esso è un parallelogramma poiché  $OA \cong DA'$  e  $OD \cong AA'$ .

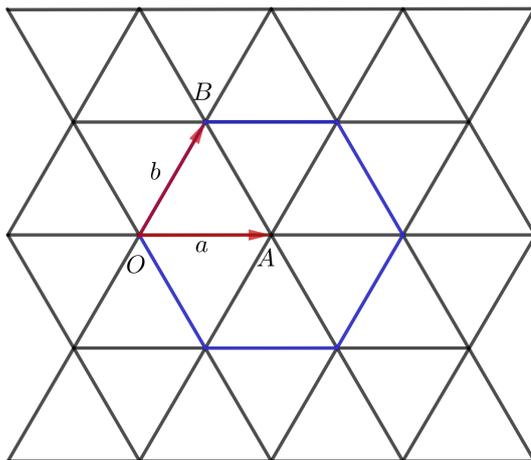
Osserviamo che  $OA' \cong AD$  poiché sono somma di segmenti congruenti. Quindi  $OAA'D$  è un rettangolo. La particolarità di questo reticolo rettangolare centrato rispetto al caso 2) del reticolo rettangolare è che qui i triangoli di lati  $a$ ,  $2b$  sono triangoli rettangoli.

**Caso 4):**  $\|a\| = \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$ .



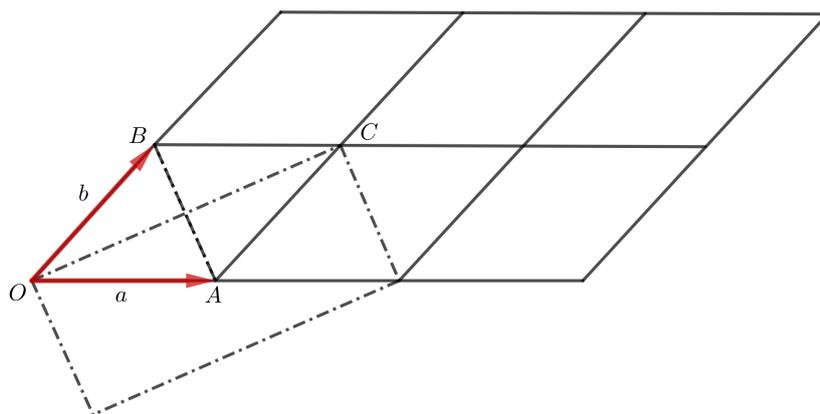
La condizione  $\|a - b\| = \|a + b\|$  mi garantisce che il parallelogramma  $OACB$  sia un rettangolo. Inoltre  $OA \cong OB$ , poiché  $\|a\| = \|b\|$ , quindi  $OACB$  è un quadrato.

**Caso 5):**  $\|a\| = \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$ .



Consideriamo il triangolo  $OAB$ , si ha che  $OA \cong OB \cong AB$ , poiché  $\|a\| = \|b\| = \|a - b\|$ . Quindi il triangolo  $OAB$  è equilatero. Il reticolo è costituito da triangoli equilateri, i quali formano degli esagoni regolari, da cui il nome reticolo esagonale.

**Caso 6):**  $\|a\| = \|b\| < \|a - b\| < \|a + b\|$ .



Ricordiamo che un parallelogramma che ha due lati consecutivi congruenti è un rombo. Consideriamo il parallelogramma  $OACB$ . Abbiamo che  $OA \cong OB$  poiché  $\|a\| = \|b\|$ ,

quindi  $OACB$  è un rombo. In un rombo le diagonali sono perpendicolari, quindi  $a - b$  e  $a + b$  sono perpendicolari. Quindi, abbiamo ottenuto ancora una volta una struttura rettangolare centrata (caso 3), i cui rettangoli hanno come base i vettori  $a - b$  e  $a + b$ .

**Caso 7):**  $\|a\| < \|b\| = \|a - b\| = \|a + b\|$ .

Consideriamo il parallelogramma generato dai vettori  $a$  e  $b$ . La condizione  $\|a - b\| = \|a + b\|$  mi garantisce che il parallelogramma sia un rettangolo (vedere caso 2). Inoltre per la condizione  $\|b\| = \|a - b\| = \|a + b\|$ , avremmo che le diagonali del rettangolo sono congruenti a un suo lato, ma questo è assurdo. Quindi tale reticolo non può esistere.

**Caso 8):**  $\|a\| = \|b\| = \|a - b\| = \|a + b\|$ .

Dal caso 7) segue immediatamente che questo reticolo non può esistere.  $\square$

Nelle pagine seguenti classificheremo i gruppi cristallografici piani a meno di isomorfismi.

**Teorema 5.1.2.** *Un isomorfismo tra gruppi cristallografici piani manda traslazioni in traslazioni, rotazioni in rotazioni, riflessioni in riflessioni e glissoriflessioni in glissoriflessioni.*

*Dimostrazione.* Siano  $G$  e  $G_1$  due gruppi cristallografici piani. Sia  $\varphi : G \rightarrow G_1$  un isomorfismo e sia  $t_v$  una traslazione in  $G$ . Traslazioni e glissoriflessioni hanno ordine infinito, invece rotazioni e riflessioni sono di ordine finito; perciò,  $\varphi(t_v)$  deve essere una traslazione o una glissoriflessione. Supponiamo che  $\varphi(t_v)$  sia una glissoriflessione e scegliamo da  $G_1$  una traslazione  $t_w$ , che non commuta con  $\varphi(t_v)$  (ad esempio ogni traslazione la cui direzione non è parallela all'asse della glissoriflessione). Se  $\varphi(g) = t_w$ , allora  $g$  deve essere una traslazione o una glissoriflessione. Così  $g^2$  è una traslazione, e quindi commuta con  $t_v$ , contraddicendo il fatto che  $\varphi(g^2) = t_w^2$  non commuta con  $\varphi(t_v)$ . Perciò, traslazioni corrispondono a traslazioni e glissoriflessioni a glissoriflessioni.

Le riflessioni hanno ordine 2, di conseguenza l'immagine di una riflessione attraverso un isomorfismo deve essere una riflessione o una rotazione di angolo  $\pi$ . Sia  $r_l \in G$  una riflessione, la cui immagine  $\varphi(r_l)$  è una rotazione di angolo  $\pi$ , e scegliamo una traslazione  $t_v$  da  $G$  con direzione non perpendicolare all'asse  $l$ . Allora  $t_v r_l$  è una glissoriflessione. Ma  $\varphi(t_v r_l) = \varphi(t_v) \varphi(r_l)$  è il prodotto di una traslazione e di una rotazione di angolo  $\pi$ ,

che è un'altra rotazione di angolo  $\pi$ . Perciò, noi abbiamo una contraddizione e riflessioni devono corrispondere a riflessioni. Infine, rotazioni devono per forza corrispondere a rotazioni.  $\square$

**Corollario 5.1.3.** *Due gruppi cristallografici piani isomorfi hanno gruppi puntuali isomorfi.*

*Dimostrazione.* Siano  $G$  e  $G_1$  due gruppi cristallografici piani con sottogruppi delle traslazioni  $L_G$  e  $L_{G_1}$  e gruppi puntuali  $\overline{G}$  e  $\overline{G}_1$  rispettivamente. Se  $\varphi : G \rightarrow G_1$  è un isomorfismo, noi abbiamo che  $\varphi(L_G) = L_{G_1}$  per il teorema (5.1.2). Perciò,  $\varphi$  induce un isomorfismo da  $G/L_G$  a  $G_1/L_{G_1}$ . In tale modo abbiamo dimostrato il corollario poiché  $\overline{G}$  è isomorfo a  $G/L_G$  e  $\overline{G}_1$  è isomorfo a  $G_1/L_{G_1}$ .  $\square$

**Notazione 5.1.4.** Per identificare i gruppi cristallografici piani useremo, come per i gruppi dei fregi, la notazione cristallografica.

Innanzitutto si fissa il parallelogramma individuato dai generatori  $a$  e  $b$  del reticolo, poi si sceglie l'asse  $x$  di un sistema di riferimento nella direzione di  $a$ . Allora:

- il primo simbolo può essere una "p" (che sta per "primitiva") o una "c" (che sta per "centrata");
- il secondo simbolo è un numero che indica il massimo ordine di rotazione presente in  $G$ ;
- il terzo simbolo può essere una "m", una "g" o un "1" e indica rispettivamente la presenza di una riflessione, di una glissoriflessione oppure l'assenza di entrambe aventi asse con vettore di direzione parallela all'asse  $x$ ;
- il quarto simbolo può essere una "m", una "g" o un "1" e indica rispettivamente la presenza di una riflessione, di una glissoriflessione oppure l'assenza di entrambe aventi asse con vettore di direzione formante un angolo  $\alpha$  con l'asse  $x$ , dove  $\alpha$  dipende dal secondo simbolo  $n$  associato al gruppo, e precisamente

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } n = 1 \text{ o } n = 2 \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } n = 4 \\ \frac{\pi}{3} & \text{se } n = 3 \text{ o } n = 6 \end{cases}$$

Nei grafici che compariranno nella dimostrazione, sarà usata la seguente leggenda:

	centro della rotazione di ordine due ( $\pi$ )
	centro della rotazione di ordine tre ( $\frac{2\pi}{3}$ )
	centro della rotazione di ordine quattro ( $\frac{\pi}{2}$ )
	centro della rotazione di ordine sei ( $\frac{\pi}{3}$ )
	asse di una riflessione
	asse di una glissoriflessione

**Notazione 5.1.5.** Sappiamo che un'isometria si scrive come  $f = t_v\varphi$ . Fissato un sistema di riferimento standard, d'ora in poi utilizzeremo la coppia  $(v, M)$  per indicare l'isometria  $f$ , dove  $v$  è il vettore della traslazione  $t_v$  e  $M$  è la matrice ortogonale associata alla parte lineare  $\varphi$ .

Ricordando quanto visto nella dimostrazione della proposizione (2.3.2), si ha che:

$$(w, N)(v, M) = (w + Nv, NM).$$

Inoltre se  $f \in O_2$ ,  $f$  sarà denotata direttamente con  $M$ , dove  $M$  è la matrice ortogonale associata a  $f$ .

Sia  $G$  un gruppo di isometrie tale che  $L_G$  è un reticolo generato da due vettori indipendenti  $a$  e  $b$ . Ricordiamo che esiste un omomorfismo suriettivo (3.3)  $\phi : G \rightarrow \overline{G}$ , dove  $\overline{G}$  denota il gruppo puntuale di  $G$ .

Nel seguito quando diremo che

*"nel gruppo puntuale vi è una certa matrice  $A$ , la quale è realizzata come una rotazione, rispettivamente una riflessione, rispettivamente una glissoriflessione"*,

intendiamo che esiste  $g \in G$  con  $g$  rotazione, rispettivamente riflessione, rispettivamente glissoriflessione tale  $\phi(g) = A$ .

**Teorema 5.1.6.** *I gruppi cristallografici piani sono, a meno di isomorfismi, diciassette.*

*Dimostrazione.* Nella prima parte della dimostrazione, esaminando ognuno dei 5 reticoli, si giunge a elencare i 17 gruppi; nella seconda parte invece andremo a dimostrare che non sono tra di loro isomorfi.

**Caso 1: Reticolo parallelogrammico.** Le uniche simmetrie in  $O_2$  che conservano un reticolo parallelogrammico sono l'identità  $I$  o la rotazione di  $\pi$  attorno l'origine,  $-I$ . Quindi i possibili gruppi puntuali sono i sottogruppi di  $\{I, -I\}$ .

**Caso 1.1:** *Il gruppo puntuale è  $\{I\}$ .* Questo ci dà il gruppo  $p111$ . Questo è il gruppo più semplice, che è generato da due traslazioni indipendenti. I suoi elementi sono della forma  $(ma + nb, I)$ , dove  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

**Caso 1.2:** *Il gruppo puntuale è  $\{I, -I\}$ .* Questo ci dà il gruppo  $p211$ . Dato che  $-I \in \overline{G}$ ,  $G$  contiene una rotazione di  $\pi$ , possiamo supporre che il punto fisso di questa rotazione sia l'origine, allora  $(0, -I)$  appartiene a  $G$ . Ora, noi abbiamo che

$$(ma + nb, I)(0, -I) = (ma + nb, -I),$$

dove  $m, n \in \mathbb{Z}$ , e quindi sono elementi di  $p211$ .

Si ha immediatamente che questi elementi sono rotazioni oppure riflessioni, poiché la matrice ortogonale  $-I$  identifica un'isometria diretta. Ora, studiamo se hanno punti fissi:

$$f(P) = P \Leftrightarrow -P + ma + nb = P \Leftrightarrow 2P = ma + nb \Leftrightarrow P = \frac{1}{2}ma + \frac{1}{2}nb,$$

per ogni  $P \in E^2$ . Quindi per il teorema di Chasles (2.3.11), abbiamo che queste isometrie sono tutte rotazioni di  $\pi$  intorno ai punti  $\frac{1}{2}ma + \frac{1}{2}nb$ .

I gruppi puntuali  $\{I\}$  e  $\{I, -I\}$  appariranno diverse volte nei prossimi casi, ma non li considereremo, sapendo che non ci danno nessun nuovo gruppo.

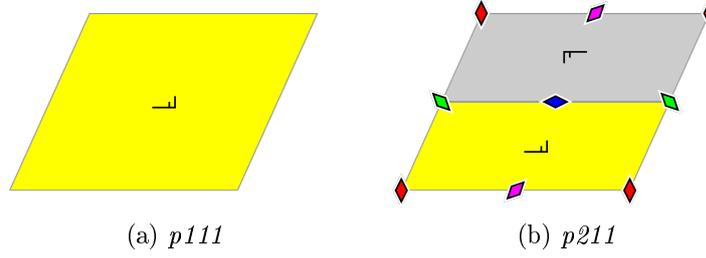


Figura 5.1: Reticolo parallelogrammico

Caso 2: **Reticolo rettangolare.** Ci sono quattro simmetrie in  $O_2$  che conservano un reticolo rettangolare, insieme a  $I$  e  $-I$ , sono la riflessione rispetto all'asse  $x$ ,  $A_0$ , e la riflessione rispetto all'asse  $y$ ,  $A_\pi$ . Quindi, tutti i gruppi puntuali in questo caso devono essere sottogruppi di  $\{I, -I, A_0, A_\pi\}$ . Come detto prima, salteremo i gruppi  $\{I\}$  e  $\{I, -I\}$ .

Caso 2.1: *Il gruppo puntuale è  $\{I, A_0\}$ .* Questo gruppo ci fornisce due differenti gruppi, in base a come  $A_0$  è realizzato nel gruppo. Se il gruppo contiene riflessioni (della forma  $(0, A_0)$ ), noi abbiamo il gruppo  $p1m1$ .

Se il gruppo non contiene riflessioni, ma ha  $\{I, A_0\}$  come gruppo puntuale, allora  $A_0$  deve essere realizzata come una glissoriflessione, noi scegliamo un punto del suo asse come origine. Questo ci dà il gruppo  $p1g1$ . Applicando una glissoriflessione due volte, si ha una traslazione, quindi la nostra glissoriflessione è del tipo  $(\frac{1}{2}ka, A_0)$  per qualche intero  $k$ . Se  $k$  fosse pari,  $(-\frac{1}{2}ka, I)$  sarebbe una traslazione in  $G$ , allora

$$\left(-\frac{1}{2}ka, I\right)\left(\frac{1}{2}ka, A_0\right) = (0, A_0),$$

quindi la riflessione  $(0, A_0)$  apparterebbe a  $G$ , contraddicendo la nostra ipotesi iniziale. Perciò  $k$  è dispari e

$$\left(-\frac{1}{2}(k-1)a, I\right)\left(\frac{1}{2}ka, A_0\right) = \left(\frac{1}{2}a, A_0\right),$$

quindi  $(\frac{1}{2}a, A_0) \in G$ . Gli elementi di  $G$  che non sono traslazione sono della forma

$$(ma + nb, I)\left(\frac{1}{2}a, A_0\right) = \left((m + \frac{1}{2})a + nb, A_0\right),$$

dove  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Queste sono tutte glissoriflessioni con asse orizzontale passante sui lati del reticolo oppure a metà tra essi. La distanza tra gli assi di queste glissoriflessioni è

un multiplo dispari di  $\frac{1}{2}a$ .

*Caso 2.2: Il gruppo puntuale è  $\{I, A_\pi\}$ .* Questo è equivalente al Caso 2.1, infatti è sufficiente cambiare "orizzontale" con "verticale" nella discussione precedente.

*Caso 2.3: Il gruppo puntuale è  $\{I, -I, A_0, A_\pi\}$ .* Questo caso ci dà tre diversi gruppi, in base a come  $A_0$  e  $A_\pi$  sono realizzati.

Se sia  $A_0$  che  $A_\pi$  sono realizzate come riflessioni, si ha  $p2mm$ . In questo caso  $G$  contiene riflessioni di asse verticale e riflessioni di asse orizzontale. Il 2 compare per il seguente motivo: scegliendo come origine l'intersezione dell'asse della riflessione verticale con quello della riflessione orizzontale, possiamo assumere che  $(0, A_0)$  e  $(0, A_\pi)$  appartengano a  $G$ . Il prodotto

$$(0, A_\pi)(0, A_0) = (0, -I)$$

è una rotazione di  $\pi$  intorno all'origine.

Se  $A_0$  è realizzata come riflessione e  $A_\pi$  come glissoriflessione, si ha  $p2mg$ . Analogamente al caso precedente, il 2 compare per il seguente motivo: scegliendo come origine l'intersezione dell'asse orizzontale della riflessione e dell'asse verticale della glissoriflessione, più l'argomentazione usata per  $p1g1$ , possiamo assumere che  $(0, A_0)$  e  $(\frac{1}{2}b, A_\pi)$  appartengano a  $G$ . Il prodotto

$$(\frac{1}{2}b, A_\pi)(0, A_0) = (\frac{1}{2}b, -I)$$

è una rotazione di  $\pi$  intorno a  $\frac{1}{4}b$ . Per studiare tutti gli elementi di  $G$ , consideriamo una partizione del gruppo data dai seguenti laterali destri:

$$L_G(0, I), \quad L_G(0, A_0), \quad L_G(\frac{1}{2}b, A_\pi), \quad L_G(\frac{1}{2}b, -I).$$

Si ha immediatamente che queste classi laterali destre costituiscono una partizione del gruppo  $G$  poiché sono le quattro classi del quoziente  $\overline{G}$ .

Nel primo abbiamo traslazioni. Un elemento del secondo è del tipo

$$(ma + nb, I)(0, A_0) = (ma + nb, A_0)$$

dove  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Quando  $m = 0$ , questa isometria è una riflessione di asse orizzontale, che passa attraverso uno dei lati del reticolo oppure passa in mezzo ad essi. Se  $m$  non

è zero, l'asse della riflessione cambia nell'asse di una glissoriflessione e la traslazione che compone la glissoriflessione ha vettore  $ma$ . Il terzo laterale contiene gli elementi del tipo

$$(ma + (n + \frac{1}{2})b, A_\pi)$$

che sono tutte le glissoriflessioni i cui assi passano attraverso uno dei lati del reticolo oppure passano in mezzo ad essi. La traslazione che le compone è un multiplo dispari di  $\frac{1}{2}b$ . Infine  $L_G(\frac{1}{2}b, -I)$  contiene le rotazioni di  $\pi$  centrate nei punti  $\frac{1}{2}ma + \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})b$ . Scambiando orizzontale e verticale nella precedente discussione si ottiene un gruppo che è isomorfo a  $p2mg$ .

Se sia  $A_0$  che  $A_\pi$  sono realizzate come glissoriflessioni, si ha  $p2gg$ . Questo gruppo non ha riflessioni, ma ha solo glissoriflessioni in due direzioni perpendicolari.

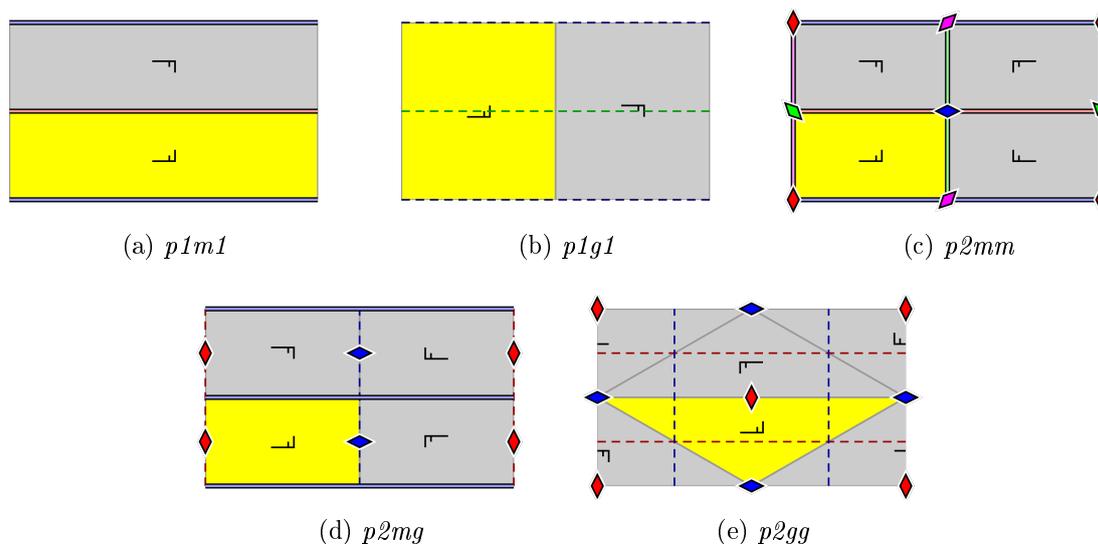


Figura 5.2: Reticolo rettangolare

**Caso 3: Reticolo rettangolare centrato.** Le isometrie che preservano il reticolo sono le stesse del reticolo rettangolare. Perciò il gruppo puntuale deve essere ancora un sottogruppo di  $\{I, -I, A_0, A_\pi\}$ . Troveremo due nuovi gruppi.

*Caso 3.1: Il gruppo puntuale è  $\{I, A_0\}$ .* Questo caso ci dà un solo gruppo  $c1m1$ . Supponiamo che  $(v, A_0)$  realizzi  $A_0$  in  $G$ . Questa isometria è una riflessione di asse orizzontale

o una glissoriflessione di asse orizzontale. Scegliamo un punto dell'asse della riflessione o dell'asse della glissoriflessione come origine, così che  $2v$  è un multiplo di  $a$ , e tenendo presente che la direzione verticale è determinata dal vettore  $2b - a$ .

(i) Se  $2v = ka$  e  $k$  è pari, la riflessione

$$(0, A_0) = \left(-\frac{1}{2}ka, I\right)\left(\frac{1}{2}ka, A_0\right)$$

appartiene a  $G$ . Gli elementi di  $G$  che non sono traslazioni sono della forma

$$(ma + nb, A_0) = \left(\left(m + \frac{1}{2}n\right)a + \frac{1}{2}n(2b - a), A_0\right)$$

dove  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Scegliendo  $n$  pari e  $m = -\frac{1}{2}n$ , si hanno tutte le riflessioni di asse orizzontale che passano sui lati del reticolo. Se  $n$  è pari, ma  $m \neq -\frac{1}{2}n$ , questi assi diventano assi di glissoriflessioni, e la traslazione che fa parte di queste glissoriflessioni è un multiplo di  $a$ . Infine se  $n$  è dispari, si hanno glissoriflessioni lungo assi che stanno in mezzo ai lati del reticolo, la traslazione che fa parte di queste glissoriflessioni è un multiplo dispari di  $\frac{1}{2}a$ .

(ii) Se  $k$  è dispari, allora

$$\left(-\frac{1}{2}(k+1)a + b, I\right)\left(\frac{1}{2}ka, A_0\right) = \left(\frac{1}{2}(2b - a), A_0\right)$$

appartiene a  $G$ , la quale è ancora una riflessione. Spostando la nostra origine, si ha che  $(0, A_0)$  è un elemento del gruppo, e otteniamo il caso quando  $k$  è pari.

*Caso 3.2: Il gruppo puntuale è  $\{I, A_\pi\}$ .* Questo è lo stesso di 3.1, ad eccezione che cambiano verticale e orizzontale. Si ha quindi un gruppo che è isomorfo a  $c1m1$ .

*Caso 3.3: Il gruppo puntuale è  $\{I, -I, A_0, A_\pi\}$ .* Questo caso ci dà un gruppo chiamato  $c2mm$ . Usando la stessa logica del Caso 3.1, si può dimostrare che sia  $A_0$  che  $A_\pi$  sono realizzate sia come riflessioni che glissoriflessioni.

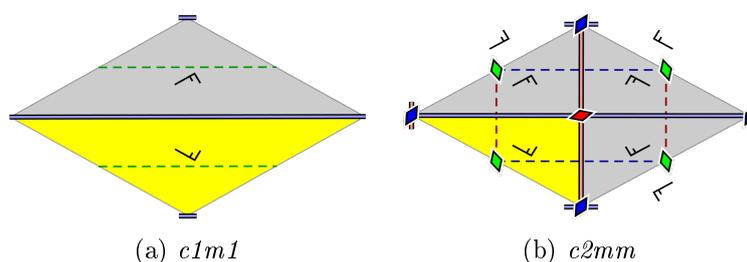


Figura 5.3: Reticolo centrato rettangolare

**Caso 4: Reticolo quadrato.** Il gruppo delle isometrie che preservano il reticolo è il gruppo diedrale di ordine 8 generato da  $R_{\frac{\pi}{2}}$  e  $A_0$ , cioè  $\{I, R_{\frac{\pi}{2}}, -I, R_{\frac{3\pi}{2}}, A_0, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\pi}, A_{\frac{3\pi}{2}}\}$ . I sottogruppi  $\{I\}$ ,  $\{I, -I\}$ ,  $\{I, A_0\}$ ,  $\{I, A_{\pi}\}$ ,  $\{I, -I, A_0, A_{\pi}\}$  sono già stati studiati precedentemente.

*Caso 4.1: Il gruppo puntuale è  $\{I, A_{\frac{\pi}{2}}\}$  o  $\{I, A_{\frac{3\pi}{2}}\}$ .* Quando il gruppo puntuale è  $\{I, A_{\frac{\pi}{2}}\}$ , se noi scegliamo  $a + b$  e  $b$  come nuove basi del reticolo, si vede che questo caso è isomorfo a  $c1m1$ . Un simile cambio di basi per il caso  $\{I, A_{\frac{3\pi}{2}}\}$ , ci dà ancora  $c1m1$ .

*Caso 4.2: Il gruppo puntuale è  $\{I, -I, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\frac{3\pi}{2}}\}$ .* Un cambio di base come il Caso 4.1, ci dà il gruppo  $c2mm$ .

*Caso 4.3: Il gruppo puntuale è  $\{I, -I, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\frac{3\pi}{2}}\}$ .* Questo caso ci dà il gruppo  $p411$ , che non ha riflessioni o glissoriflessioni, ma ha solo rotazioni di ordine 4 e 2.

*Caso 4.4: Il gruppo puntuale è  $\{I, R_{\frac{\pi}{2}}, -I, R_{\frac{3\pi}{2}}, A_0, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\pi}, A_{\frac{3\pi}{2}}\}$ .* Questo caso ci fornisce due differenti gruppi. Il gruppo puntuale è  $D_4$  (il gruppo di simmetria del quadrato) ed è generato dagli elementi  $R_{\frac{\pi}{2}}$  e  $A_0$ .

(i) La prima situazione è quando  $A_0$  è realizzato come una riflessione. Questo caso ci dà il gruppo  $p4mm$ . Questo obbliga tutte le riflessioni del gruppo puntuale a essere realizzate come riflessioni nel gruppo cristallografico piano. Infatti, scegliamo una origine in modo che  $(0, R_{\frac{\pi}{2}})$  sia in  $G$ . Poiché  $A_0$  è realizzata come una riflessione, allora è realizzata nella forma  $(\mu b, A_0)$ , poiché  $b$  è perpendicolare all'asse di riflessione. Ora,

abbiamo che

$$\begin{aligned}(0, R_{\frac{\pi}{2}})(\mu b, A_0) &= (-\mu a, A_{\frac{\pi}{2}}) \\ (-\mu a, A_{\frac{\pi}{2}})^2 &= (-\mu a - \mu b, I)\end{aligned}$$

sono elementi di  $p4mm$ , allora  $\mu \in \mathbb{Z}$ . Quindi

$$(-\mu b, I)(\mu b, A_0) = (0, A_0)$$

è in  $G$ , e componendo questo con  $(0, R_{\frac{\pi}{2}})$  diverse volte, si vede che  $A_0, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\pi}, A_{\frac{3\pi}{2}}$  sono tutte realizzate da riflessioni.

Il gruppo  $p4mm$  ha riflessioni in quattro differenti direzioni, tutte separate da  $\frac{\pi}{4}$ . Inoltre contiene anche glissoriflessioni in due direzioni e rotazioni di  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$ .

(ii) Supponiamo che il gruppo puntuale sia generato da  $R_{\frac{\pi}{2}}$  e  $A_0$ , ma  $A_0$  non può essere realizzato come una riflessione in  $G$ . Questo caso ci dà il gruppo  $p4gm$ . Scegliamo il punto fisso di una rotazione di ordine 4 come l'origine, così che  $(0, R_{\frac{\pi}{2}})$  appartenga a  $G$ , e  $(\lambda a + \mu b, A_0)$  realizza  $A_0$  in  $G$ . Il reticolo è un quadrato, quindi  $(\lambda a + \mu b, A_0)$  ci dà  $(2\lambda a, I)$ , allora  $2\lambda$  è un intero. Se  $2\lambda$  è pari

$$(-\lambda a, I)(\lambda a + \mu b, A_0) = (\mu b, A_0)$$

si ha una riflessione in  $G$  e abbiamo una contraddizione. Perciò,  $2\lambda$  deve essere dispari e

$$\left(\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)a, I\right)(\lambda a + \mu b, A_0) = \left(\frac{1}{2}a + \mu b, A_0\right)$$

è una glissoriflessione in  $G$ . Inoltre abbiamo anche che

$$(0, R_{\frac{\pi}{2}})\left(\frac{1}{2}a + \mu b, A_0\right) = \left(\frac{1}{2}b - \mu a, A_{\frac{\pi}{2}}\right)$$

e

$$\left(\frac{1}{2}b - \mu a, A_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{2} - \mu\right)(a + b), I\right)$$

sono elementi in  $G$ , così  $\frac{1}{2} - \mu$  è un intero. Concludiamo che la glissoriflessione

$$\left(\left(\frac{1}{2} - \mu\right)b, I\right)\left(\frac{1}{2}a + \mu b, A_0\right) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, A_0\right)$$

appartiene a  $G$ . Per studiare tutti gli elementi di  $G$ , consideriamo una partizione del gruppo data dai seguenti laterali destri:

$$\begin{array}{ll}
L_G(0, I) & L_G(0, R_{\frac{\pi}{2}}) \\
L_G(0, -I) & L_G(0, R_{\frac{3\pi}{2}}) \\
L_G(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, A_0) & L_G(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, A_{\frac{\pi}{2}}) \\
L_G(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, A_{\pi}) & L_G(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, A_{\frac{3\pi}{2}})
\end{array}$$

Si ha immediatamente che queste classi laterali destre costituiscono una partizione del gruppo  $G$  poiché sono gli otto elementi del gruppo puntuale  $\overline{G}$ .

È semplice riconoscere i loro elementi da un punto di vista geometrico. Per esempio, un elemento di  $L_G(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, A_{\frac{\pi}{2}})$  ha la forma

$$((m + \frac{1}{2})a + (n + \frac{1}{2})b, A_{\frac{\pi}{2}}) = (\frac{1}{2}(m + n + 1)(a + b) + \frac{1}{2}(m - n)(a - b), A_{\frac{\pi}{2}}),$$

con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Prendendo  $m + n + 1 = 0$ , abbiamo tutte le riflessioni di asse inclinato di  $\frac{\pi}{4}$  rispetto l'orizzontale che passa a metà tra i lati del reticolo. Quando  $m + n + 1$  non è nullo e  $m - n$  è dispari, queste riflessioni cambiano in glissoriflessioni. Infine, se  $m + n + 1$  non è nullo e  $m - n$  è pari, si hanno altre glissoriflessioni.

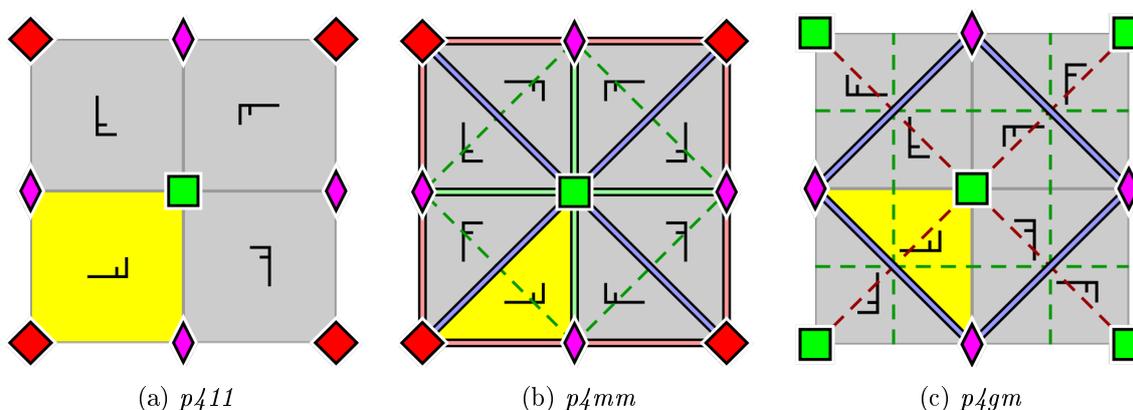


Figura 5.4: Reticolo quadrato

Caso 5: **Reticolo esagonale.** Il gruppo delle isometrie che preservano il reticolo è il gruppo diedrale di ordine 12 generato da  $R_{\frac{\pi}{3}}$  e  $A_0$ , cioè  $\{I, R_{\frac{\pi}{3}}, R_{\frac{2\pi}{3}}, -I, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}, A_0, A_{\frac{\pi}{3}}, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\pi}, A_{\frac{4\pi}{3}}, A_{\frac{5\pi}{3}}\}$ . I sottogruppi  $\{I\}$ ,  $\{I, -I\}$ ,  $\{I, -I, A_0, A_{\pi}\}$  sono già stati studiati precedentemente.

*Caso 5.1:* Il gruppo puntuale è  $\{I, A_{\frac{k\pi}{2}}\}$  per  $0 \leq k \leq 5$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Per  $k = 0$ , si ha  $\{I, A_0\}$ , che è il Caso 3.2, ed abbiamo  $c1m1$ . Quando  $k = 1$ , se noi sostituiamo  $a$ ,  $b$  con  $a + b$ ,  $b - a$ , questo diventa un reticolo centrato rettangolare con gruppo puntuale  $\{I, A_0\}$ , così noi otteniamo ancora  $c1m1$ . Analogamente per gli altri valori di  $k$  si può fare un simile cambio di base ed arrivare al gruppo  $c1m1$ .

*Caso 5.2:* Il gruppo puntuale è  $\{I, -I, R_{\frac{\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}\}$  o  $\{I, -I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}\}$ . Con un cambio di basi simile al Caso 5.1, si ottiene un reticolo centrato rettangolare con gruppo puntuale  $\{I, -I, A_0, A_\pi\}$ , ed otteniamo il gruppo  $c2mm$ .

*Caso 5.3:* Il gruppo puntuale è  $\{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}\}$ . Questo dà origine al gruppo  $p311$ , il quale non ha né riflessioni né glissoriflessioni, ma solo rotazioni di ordine tre.

*Caso 5.4:* Il gruppo puntuale è  $\{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, A_0, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}\}$ . Nonostante ci siano tre diverse riflessioni nel gruppo puntuale, questo origina un solo gruppo,  $p31m$ . Scegliamo l'origine in modo che la rotazione  $(0, R_{\frac{2\pi}{3}})$  appartenga al gruppo  $G$ ,  $(\lambda a + \mu b, A_{\frac{\pi}{3}})$  realizza  $A_{\frac{\pi}{3}}$  in  $G$ . Abbiamo che

$$(\lambda a + \mu b, A_{\frac{\pi}{3}})^2 = ((\lambda + \mu)(a + b), I),$$

così  $\lambda + \mu$  è un numero intero. Anche

$$(0, R_{\frac{2\pi}{3}})(\lambda a + \mu b, A_{\frac{\pi}{3}}) = (\lambda(b - a) - \mu a, A_\pi)$$

e

$$(\lambda(b - a) - \mu a, A_\pi)^2 = (\lambda(2b - a), I),$$

mostrano che  $\lambda$  è un intero. Perciò, sia  $\lambda$  che  $\mu$  sono interi e la riflessione

$$(0, A_{\frac{\pi}{3}}) = (-\lambda a - \mu b, I)(\lambda a + \mu b, A_{\frac{\pi}{3}})$$

appartiene al gruppo  $G$ . Gli elementi di  $G$  hanno forma  $(ma + nb, M)$  dove  $m, n \in \mathbb{Z}$  e  $M$  è una delle matrici  $\{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, -I, R_{\frac{4\pi}{3}}, A_\pi, A_{\frac{5\pi}{3}}\}$ . Per esempio

$$(ma + nb, A_\pi) = ((m + \frac{1}{2}n)a + \frac{1}{2}n(2b - a), A_\pi)$$

è una riflessione di asse verticale quando  $n = 0$  e una glissoriflessione di asse verticale altrimenti.

*Caso 5.5:* Il gruppo puntuale è  $\{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, A_{\frac{\pi}{3}}, A_{\pi}, A_{\frac{5\pi}{3}}\}$ . Simile al Caso 5.4, mostreremo che questo dà origine a un solo gruppo  $p3m1$ . Scegliamo l'origine in modo che  $(0, R_{\frac{2\pi}{3}})$  appartenga al gruppo. Consideriamo la realizzazione di  $A_{\frac{\pi}{3}}, (\lambda a + \mu b, A_{\frac{\pi}{3}})$ . Abbiamo che

$$(\lambda a + \mu b, A_{\frac{\pi}{3}})^2 = ((\lambda + \mu)(a + b), I),$$

è un elemento di  $G$ , così  $\mu + \lambda$  è un intero. Ora abbiamo che

$$(0, R_{\frac{2\pi}{3}})(\lambda a + \mu b, A_{\frac{\pi}{3}}) = (\lambda(b - a) - \mu a, A_{\pi})$$

e

$$(\lambda(b - a) - \mu a, A_{\pi})^2 = (\lambda(2b - a), I)$$

sono elementi del gruppo, così  $\lambda$  è un intero. Di conseguenza anche  $\mu$  è un intero. Abbiamo che

$$(-\lambda a - \mu b, I)(\lambda a + \mu b, A_{\frac{\pi}{3}}) = (0, A_{\frac{\pi}{3}})$$

è un elemento di  $G$ . Applicando le rotazioni, abbiamo che  $A_{\frac{\pi}{3}}, A_{\pi}$  e  $A_{\frac{5\pi}{3}}$  sono realizzate come  $(0, A_{\frac{\pi}{3}})$ ,  $(0, A_{\pi})$  e  $(0, A_{\frac{5\pi}{3}})$ , che sono tutte riflessioni. In maniera simile a  $p31m$ , si ha che  $p3m1$  ha riflessioni e glissoriflessioni con assi in tre differenti direzioni, insieme alle rotazioni di  $\frac{2\pi}{3}$ .

*Caso 5.6:* Il gruppo puntuale è  $\{I, R_{\frac{\pi}{3}}, R_{\frac{2\pi}{3}}, -I, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}\}$ . Questo ci dà il gruppo  $p611$ . Questo gruppo non ha riflessioni o glissoriflessioni, ma ha rotazioni di diverso ordine. Infatti come si può osservare dal gruppo puntuale, ci sono rotazioni di ordine 2, 3 e 6.

*Caso 5.7:* Il gruppo puntuale è  $\{I, R_{\frac{\pi}{3}}, R_{\frac{2\pi}{3}}, -I, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}, A_0, A_{\frac{\pi}{3}}, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\pi}, A_{\frac{4\pi}{3}}, A_{\frac{5\pi}{3}}\}$ . Questo ci dà il gruppo  $p6mm$ . In maniera analoga ai Casi 5.4 e 5.5, possiamo dimostrare che  $A_0, A_{\frac{\pi}{3}}, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\pi}, A_{\frac{4\pi}{3}}, A_{\frac{5\pi}{3}}$  devono essere tutti realizzati come riflessioni. Questo gruppo contiene riflessioni e glissoriflessioni con assi in sei differenti direzioni, insieme a tre differenti tipi di rotazioni: rotazioni di  $\pi$ , rotazioni di  $\frac{2\pi}{3}$  e rotazioni di  $\frac{\pi}{3}$ .

□

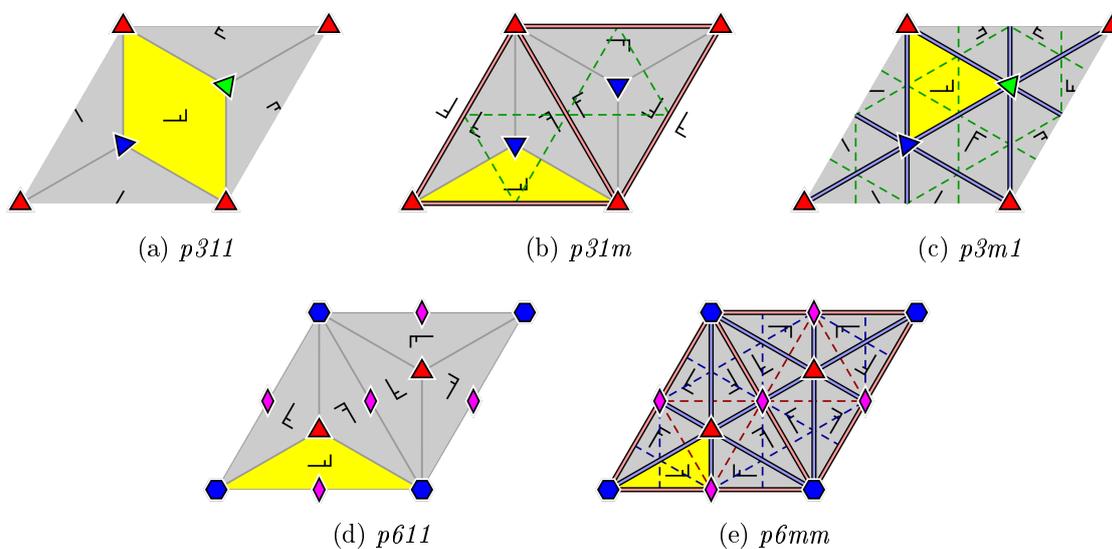


Figura 5.5: Reticolo esagonale

Ora che abbiamo visto diciassette gruppi diversi, dobbiamo dimostrare che non sono tra di loro isomorfi. Dal corollario (5.1.3), sappiamo che se due gruppi sono isomorfi, devono avere i gruppi puntuali isomorfi, quindi confronteremo tra loro solo quelli con lo stesso gruppo puntuale. Inoltre ricordiamo che un isomorfismo tra gruppi cristallografici piani manda traslazioni in traslazioni, rotazioni in rotazioni, riflessioni in riflessioni e glissoriflessioni in glissoriflessioni (vedere (5.1.2)).

**Teorema 5.1.7.** *I gruppi  $p211$ ,  $p1m1$ ,  $p1g1$  e  $c1m1$  non sono isomorfi a due a due.*

*Dimostrazione.* Tra questi solo  $p211$  contiene rotazioni, quindi non può essere isomorfo agli altri. Dei tre gruppi rimanenti,  $p1g1$  è l'unico che non contiene rotazioni, di conseguenza  $p1g1$  non è isomorfo a  $p1m1$  o  $c1m1$ . Infine  $c1m1$  contiene glissoriflessioni, la cui riflessione non appartiene al gruppo. Infatti ricordando quanto ottenuto nel Caso 3.1, possiamo porre  $m = 0$  e  $n = 1$  nella formula ed ottenere la glissoriflessione nella seguente forma

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(2b - a), A_0\right) = \left(\frac{1}{2}a, I\right)\left(\frac{1}{2}(2b - a), A_0\right).$$

La traslazione  $(\frac{1}{2}a, I)$  della glissoriflessione non è una traslazione in  $c1m1$ , ma quando è composta con la riflessione lo è. Compariamo questo con  $p1m1$ . Scegliamo un'origine in modo che  $(0, A_0) \in p1m1$ . Quindi, tutte le isometrie che non sono traslazioni hanno la

forma

$$(ma + nb, A_0) = (ma + nb, I)(0, A_0) = (ma, I)(nb, A_0)$$

dove  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Per le glissoriflessioni ( $m \neq 0$ ), vediamo che la riflessione della glissoriflessione è un multiplo di  $a$  e perciò è nel gruppo. Quindi,  $c1m1$  e  $p1m1$  non sono isomorfi.  $\square$

**Teorema 5.1.8.** *I gruppi  $p2mm$ ,  $p2mg$ ,  $p2gg$ ,  $c2mm$  e  $p411$  non sono isomorfi a due a due.*

*Dimostrazione.* Tra questi  $p411$  non contiene riflessioni o glissoriflessioni, invece altri quattro hanno riflessioni o glissoriflessioni, quindi  $p411$  non è isomorfo a  $p2mm$ ,  $p2mg$ ,  $p2gg$  e  $c2mm$ . I gruppi  $c2mm$ ,  $p2mg$  e  $p2mm$  contengono tutti riflessioni, mentre  $p2gg$  non ne contiene, quindi  $p2gg$  non è isomorfo agli altri gruppi. Similmente a quanto visto in (5.1.7), la riflessione che costituisce ogni glissoriflessione in  $p2mm$  appartiene al gruppo, a differenza dei gruppi  $p2mg$  e  $c2mm$ , che hanno assi esclusivamente per le glissoriflessioni. Quindi  $p2mm$  non è isomorfo a  $c2mm$  o  $p2mg$ . Infine, in  $p2mg$ , poiché  $A_\pi$  è realizzata solo come una glissoriflessione, tutte le riflessioni sono orizzontali. Perciò, la composizione di due riflessioni dà una traslazione. Ma in  $c2mm$  ci sono riflessioni verticali e orizzontali, e il loro prodotto è una rotazione di  $\pi$ . Quindi  $c2mm$  e  $p2mm$  non sono isomorfi.  $\square$

**Teorema 5.1.9.** *I gruppi  $p4mm$  e  $p4gm$  non sono isomorfi.*

*Dimostrazione.* Si consideri l'elemento  $(0, R_{\frac{\pi}{2}})$ , che è un elemento di entrambi i gruppi. Vedremo che  $(0, R_{\frac{\pi}{2}})$  può essere scritto come la composizione di due riflessioni in  $p4mm$ , ma non in  $p4gm$ . Dal Caso 4.5, sappiamo che  $(0, A_0)$  e  $(0, A_{\frac{\pi}{2}})$  sono elementi di  $p4mm$ . Inoltre, abbiamo che  $(0, A_{\frac{\pi}{2}})(0, A_0) = (0, R_{\frac{\pi}{2}})$ . Ora proviamo che è impossibile fattorizzare  $(0, R_{\frac{\pi}{2}})$  come due riflessioni in  $p4gm$ . Ogni fattorizzazione ha la forma  $(0, R_{\frac{\pi}{2}}) = (v, A_\alpha)(w, A_\beta)$ . Poiché  $A_\alpha A_\beta = R_{\alpha-\beta}$ , le uniche opzioni sono  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = 0$ ;  $\alpha = \pi$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ;  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\beta = \pi$ ;  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{3\pi}{2}$ . In tutti i quattro casi, uno dei fattori è  $A_0$  o  $A_\pi$ . Poiché  $A_0$  o  $A_\pi$  sono realizzati solo come glissoriflessioni, è quindi impossibile fattorizzare  $(0, R_{\frac{\pi}{2}})$  come due riflessioni in  $p4gm$ . Allora  $p4gm$  e  $p4mm$  non sono isomorfi.  $\square$

**Teorema 5.1.10.** *I gruppi  $p31m$  e  $p3m1$  non sono isomorfi.*

*Dimostrazione.* In maniera analoga al precedente teorema, dimostreremo che  $(a, R_{\frac{2\pi}{3}})$  può essere fattorizzato come il prodotto di due riflessioni in  $p3m1$ , ma non in  $p31m$ . Dal Caso 5.5, sappiamo che possiamo fattorizzare  $(a, R_{\frac{2\pi}{3}})$  come

$$(a, R_{\frac{2\pi}{3}}) = (a, A_\pi)(0, A_{\frac{\pi}{3}}) = (a, I)(0, A_\pi)(0, A_{\frac{\pi}{3}}).$$

Ora consideriamo ipoteticamente la fattorizzazione in  $p31m$ ,  $(a, R_{\frac{2\pi}{3}}) = (v, A_\alpha)(w, A_\beta)$ . Poichè  $A_\alpha A_\beta = R_{\alpha-\beta}$ , abbiamo tre casi:  $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = 0$ ;  $\alpha = \frac{4\pi}{3}, \beta = \frac{2\pi}{3}$ ;  $\alpha = 0, \beta = \frac{4\pi}{3}$ . Consideriamo il caso  $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = 0$ . poichè  $(v, A_{\frac{2\pi}{3}})$  e  $(w, A_0)$  sono entrambe riflessioni,  $v = \lambda(b - 2a)$  e  $w = \mu(2b - a)$ . Quindi, abbiamo che

$$(a, R_{\frac{2\pi}{3}}) = ((\mu - 2\lambda)a + (\lambda + \mu)b, R_{\frac{2\pi}{3}}) = (\lambda(b - 2a), A_{\frac{2\pi}{3}})(\mu(2b - a), A_0),$$

quindi  $\mu - 2\lambda = 1$  e  $\lambda + \mu = 0$ . Risolvendo si ha che  $\lambda = -\frac{1}{3}$  e  $\mu = \frac{1}{3}$ . Quindi

$$\left(\frac{1}{3}(2b - a), A_0\right)(0, A_0) = \left(\frac{1}{3}(2b - a), I\right)$$

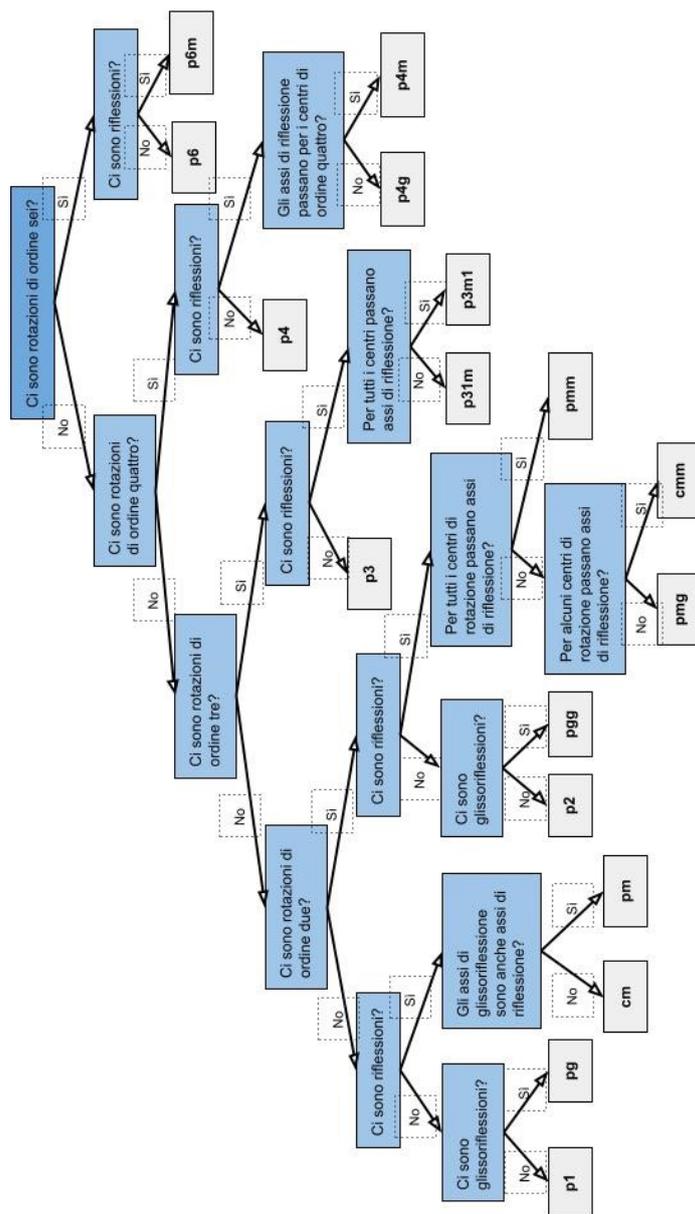
è una traslazione in  $p31m$ . Ma questa è una contraddizione, poichè  $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ . Gli altri due casi sono analoghi, ma ruotati di  $\frac{2\pi}{3}$ , così anche loro sono impossibili. Quindi  $(a, R_{\frac{2\pi}{3}})$  non può essere fattorizzato in  $p31m$  come la composizione di due riflessioni. Quindi  $p3m1$  e  $p31m$  non sono isomorfi.  $\square$

**Notazione 5.1.11.** In tutti i casi (eccetto  $p3m1$  e  $p31m$ ) sono possibili delle abbreviazioni, senza introdurre ambiguità, rispetto alla notazione cristallografica 5.1.4. La conversione fra la notazione che abbiamo usato fino adesso e quella abbreviata è la seguente:

$p111 = p1$	$p411 = p4$
$p211 = p2$	$p4mm = p4m$
$p1m1 = pm$	$p4gm = p4g$
$p1g1 = pg$	$p311 = p3$
$p2mm = pmm$	$p31m = p31m$
$p2mg = pmg$	$p3m1 = p3m1$
$p2gg = pgg$	$p611 = p6$
$c1m1 = cm$	$p6mm = p6m$
$c2mm = cmm$	

## 5.2 Riconoscimento dei gruppi cristallografici piani

Come abbiamo fatto per il gruppo dei fregi, vediamo ora come si può determinare quale è il gruppo cristallografo piano rispondendo a delle domande. Seguendo il seguente diagramma si riesce a classificare qualsiasi gruppo cristallografico:



## Capitolo 6

# La simmetria in M.C.Escher

*"Solo coloro che tentano l'assurdo raggiungeranno l'impossibile."*

M.C.Escher

### 6.1 La vita di Escher

Maurits Cornelis Escher nacque a Leeuwarden nel 1898, ultimo dei figli dell'ingegnere idraulico G.A.Escher. A tredici anni cominciò a frequentare le superiori ad Arnheim,

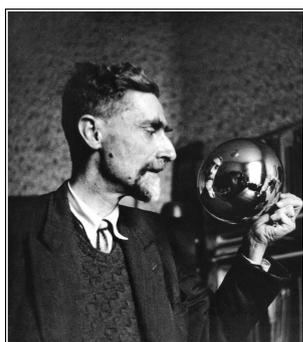


Figura 6.1: Maurits Cornelis Escher

dove la famiglia si era trasferita nel 1903. Non era propriamente un allievo modello. I suoi anni di scuola furono un incubo per lui. L'unico sprazzo di luce era rappresentato dalle due ore settimanali di disegno. Il padre di Escher riteneva che il figlio dovesse ricevere un'accurata educazione scientifica e diventare architetto, poiché, da quanto si poteva intuire, il ragazzo era artisticamente molto dotato. Così, nel 1919, Escher andò ad Haarlem, per studiare, sotto la guida dell'architetto Vorrink, presso la scuola

d'Architettura e Arti Decorative. Lo studio di questa materia però non durò molto tempo. Nel giro di pochi giorni risultò chiaro che l'attitudine del giovane si manifestava meglio nelle arti decorative che non nell'architettura. Soltanto dopo un faticoso e non del tutto convinto consenso del padre, il giovane Maurits Escher cambiò l'indirizzo degli studi.

Lavori di questo periodo mostrano che Escher presto padroneggiò la tecnica della silografia. Dopo due anni, nel 1922, Escher abbandonò la scuola d'arte. Aveva conseguito una buona formazione, per quanto riguardava il disegno e, tra le tecniche grafiche, padroneggiava perfettamente quella della silografia.

Nella primavera del 1922 Escher fece un viaggio di circa due settimane attraverso l'Italia Centrale, insieme a due amici olandesi. Escher passò poi l'inverno del 1922 e la primavera del 1923 a Siena, in una pensione. È qui che nascono le prime incisioni su legno di paesaggi italiani. Uno degli ospiti della pensione, un'anziana signora danese che si era resa conto dell'interesse di Escher per il paesaggio e l'architettura, gli parlò in modo esaltante dell'Italia Meridionale. Soprattutto Ravello (a nord di Amalfi) lo avrebbe affascinato. Escher vi si recò e scoprì paesaggi e architetture nelle quali elementi romani, greci e saraceni si mescolavano in maniera affascinante. Nella pensione nella quale alloggiava, incontrò Jetta Umiker, che avrebbe sposato nel 1924. In quell'anno i genitori di Jetta si trasferirono a Roma e la giovane coppia li seguì. Fino al 1935

Escher si trovò a proprio agio in Italia. Ogni primavera, per circa due mesi, si dedicava ai viaggi: negli Abruzzi, in Campania, in Sicilia, Corsica e Malta, di solito in compagnia di altri pittori che aveva conosciuto a Roma. In aprile, quando il cielo mediterraneo affascina di più, si mettevano in viaggio: via treno, via nave, per lo più però a piedi, con lo zaino. Scopo di tali viaggi era raccogliere impressioni e fare schizzi.

A quel tempo Escher era ancora piuttosto sconosciuto. Aveva allestito alcune piccole mostre e illustrato due o tre libri. Vendeva raramente un'opera e rimase in larga misura dipendente dai genitori. Solo molti anni più tardi, nel 1951, poté ricavare una parte delle sue entrate dalle sue opere.

In quell'anno vendette 89 stampe per 5000 fiorini; nel 1954 vendette poi altre 338 stampe per 16000 fiorini. Ma a quel tempo si era già fatto conoscere, non con i paesaggi o le



Figura 6.2: Jetta Umiker e M.S. Escher



Figura 6.3: Costiera amalfitana

vedute cittadine, ma con la riproduzione grafica di un mondo matematico che lo affascinava. Il padre, che pure si era comportato in modo che il figlio potesse realizzare la propria personalità fino al momento in cui la sua opera si rivelò di una straordinaria originalità, sfortunatamente non seppe mai valutare completamente il valore della sua produzione. Il padre di Escher morì nel 1939.

Per Escher, nel 1935, il clima politico italiano divenne insopportabile. La politica non lo interessava, non riusciva ad interessarsi ad altro che non fosse l'espressione delle sue personali convinzioni attraverso i proprio specifici mezzi espressivi. La famiglia decise di abbandonare l'Italia. Si trasferirono in Svizzera, a Chateau d'Oex, dove si fermarono però per poco. Due inverni "in questo tremendo paesaggio misero e bianco", come Escher lo definisce, furono per lui una tortura. Il paesaggio non lo ispirava per nulla. I monti sembravano pietraie senza storia, blocchi rocciosi senza vita. L'architettura era asettica, come di clinica, funzionale e senza fantasia. Tutto, intorno a lui, era l'opposto dell'Italia Meridionale, che tanto aveva catturato il suo sguardo. L'aspirazione a liberarsi da quell'ambiente freddo e squadrato, divenne quasi un'ossessione.

Una notte fu svegliato da un rumore che assomigliava alla sciacquo della risacca del mare; era Jetta che si stava lavando i capelli. D'improvviso si risvegliò in lui la nostalgia per il mare. *"Non esiste nulla di più affascinante del mare; sul ponte di prua di una piccola nave, da solo, i pesci, le nuvole, il gioco sempre mutevole delle onde, i cambiamenti continui del tempo."* Il giorno successivo scrisse una lettera a Fiume, alla Compagnia Adriatica, una compagnia che organizzava viaggi su navi mercantili per tutto il Mediterraneo. La sua proposta è degna di nota: voleva pagare con sue opere un viaggio di andata e ritorno per sé e per la moglie. La risposta della compagnia fu positiva: accettava la proposta. Questi viaggi, in parte nella Spagna meridionale, ebbero grande influenza sull'opera di Escher. Insieme alla moglie visitò l'Alhambra di Granada, dove studiò profondamente gli ornamenti moreschi che ornavano pareti e pavimenti. Egli ricopiò molti di quei motivi. Qui si gettano le basi per la sua opera pionieristica nel campo della divisione regolare



Figura 6.4: Decorazioni Alhambra

del piano.

Le *tassellazioni* sono ricoprimenti del piano realizzate con una o più figure che si ripetono. Le figure che compongono una tassellazione prendono il nome di *tasselli*. Esse si possono distinguere in due gruppi: le *tassellazioni periodiche* e le *tassellazioni non periodiche*. In particolare, le tassellazioni periodiche sono realizzate con tasselli che si ripetono in modo ricorrente. I tasselli possono avere una struttura basata su un numero limitato di figure geometriche: triangoli, esagoni regolari e quadrilateri (parallelogrammi, rombi, rettangoli e quadrati). Inoltre, come dimostrato nel quinto capitolo, i gruppi di isometrie che possono agire su una tassellazione periodica sono solo 17. Nelle opere di Escher si trovano illustrati 15 dei 17 gruppi cristallografici piani, si veda ad esempio [9].

Nel 1937 la famiglia si trasferì a Ukkel, vicino a Bruxelles, in Belgio. Lo scoppio della guerra sembrava imminente e Escher voleva essere più vicino alla sua patria. Quando la guerra incominciò, la vita in Belgio divenne psicologicamente difficile per un olandese. Nel gennaio del 1941, Escher si spostò a Baarn, in Olanda, dove i giorni freddi, umidi e nuvolosi prevalgono, e il sole e il caldo sono sentiti come un dono. Artisticamente fu un periodo molto produttivo. Escher intraprese altri viaggi su mercantili, nel Mediterraneo. Eppure non ricevette più nessuna diretta ispirazione per la sua produzione. Con la regolarità di un meccanismo ad orologeria, apparvero nuove stampe. Solo nel 1962, quando si ammalò e dovette sottoporsi ad una difficile operazione, la sua produzione si fermò. Nel 1970 si trasferì a Laren, in Olanda del Nord, e qui morì, il 27 marzo 1972.

# Bibliografia

- [1] M. Idà: *Appunti di geometria 1*, Bologna, 2016-2017.
- [2] M. Artin: *Algebra*. Bollati Boringhieri, Torino, 1997.
- [3] E. Sernesi: *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, Torino, 1989.
- [4] <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Stolarski.pdf>
- [5] D. L. Johnson: *Symmetries*. Springer, Londra, 2001.
- [6] M. A. Armstrong: *Groups and Symmetry*. Springer Science e Business Media, New York, 1997.
- [7] M. Dedò: *Forme simmetria e topologia*. Decibel editrice, Bologna, 1999.
- [8] [https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper\\_group](https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group)
- [9] <https://mcescher.com/>
- [10] B. Ernst: *Lo specchio magico di M.C.Escher*. Taschen, 2018.
- [11] D. Schattschneider: *Visioni della Simmetria. I disegni periodici di M.C.Escher*. Zanichelli, Bologna, 1992.