

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**TEORIA DEI NODI
DI BRACCI ROBOTICI NELLO
SPAZIO 3 E 4 DIMENSIONALE**

Tesi di Laurea in Topologia

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Massimo Ferri

Presentata da:
Danilo Lewanski

I Sessione
Anno Accademico 2010/11

Alla mia famiglia

Introduzione

La robotica sta uscendo da una lunga fase pionieristica in cui si é sfruttato, con perizia ingegneristica, un amplissimo spettro di conoscenze matematiche e fisiche con risultati veramente notevoli.

Si é dunque arrivati al punto in cui si possono raccogliere le esperienze, le innovazioni, i problemi emersi in questo periodo in un nuovo quadro teorico. Questo non solo risponde ad un'esigenza di eleganza intellettuale, ma é necessario per passare ad una seconda fase di sviluppo in cui il progresso robotico sia accompagnato da un progresso matematico specifico e mirato.

Questa é anche la premessa ad un fenomeno mirabile e frequente: la ricaduta in ambiti anche molto lontani da quello di ispirazione iniziale.

Questa tesi é focalizzata sugli aspetti topologici degli spazi di configurazione di un braccio robotico, in particolare sulle questioni relative all'annodamento.

Il carattere poligonale di un braccio robotico fa infatti discostare il problema dell'annodamento dalla teoria dei nodi classica. Il carattere di generalità di questa nuova teoria é esemplificato dal fatto che si ottengono rapidamente risultati in uno spazio quadridimensionale già lontano dalla robotica propriamente detta.

Le ricadute della teoria cominciano a manifestarsi anche in alcune applicazioni di biologia molecolare.

Dopo un capitolo dedicato ai bracci robotici nello spazio bidimensionale,

il capitolo successivo tratta il problema originario dell'annodamento nello spazio ordinario.

Il capitolo centrale è il numero tre, diviso in due parti sostanzialmente distinte: la prima tratta un algoritmo per rettificare catene aperte, la seconda tratta invece un algoritmo per convessificare catene chiuse.

Un ultimo capitolo accenna ad alcune applicazioni nella biologia molecolare.

Indice

Introduzione	i
1 Bracci robotici nello spazio 2-dimensionale	1
1.1 Prime definizioni	2
1.2 Risultati fondamentali sul piano	4
2 Bracci robotici nello spazio 3-dimensionale	7
2.1 Catene aperte	9
2.1.1 Lo spazio delle configurazioni $Ch_5(l_1, \dots, l_5)$	12
2.2 Catene chiuse	18
2.2.1 Snodate bloccate in Pol_6 : primo esempio	18
2.2.2 Snodate bloccate in Pol_6 : secondo esempio	20
3 Bracci robotici nello spazio 4-dimensionale	25
3.1 Rettificare Catene aperte in \mathbb{R}^4	26
3.1.1 Step 1: s_g libero	28
3.1.2 Step 2: s_g intersecato	31
3.1.3 Un algoritmo più efficiente	33
3.2 Convessificare Catene chiuse in \mathbb{R}^4	35
3.2.1 Scegliere la retta vincolante del moto L	37
3.2.2 Spazio delle configurazioni e diagramma dei vincoli nel caso 3-dimensionale	38
3.2.3 Spazio delle configurazioni e diagramma dei vincoli nel caso 4-dimensionale	41

3.3	Catene in dimensioni superiori	46
4	Applicazioni in biologia molecolare	47
4.1	Enzimi topologici per il DNA	48
4.1.1	Formazione di nodi del DNA nella ciclizzazione casuale di DNA lineare	50
4.1.2	Formazioni di nodi del DNA <i>In Vivo</i>	50
4.2	Progetto KINARI	51
	Conclusioni	53
	Bibliografia	55

Capitolo 1

Bracci robotici nello spazio 2-dimensionale

La teoria dei nodi classica studia sottoinsiemi $K \subset \mathbb{R}^n$, chiamati “nodi”, quotientati con la relazione di isotopia ambiente. Una isotopia ambiente è una famiglia di omeomorfismi $h_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che dipende in modo continuo dal parametro $t \in [0, 1]$ tale che h_0 sia la mappa identità da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n . Due sottoinsiemi $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ si dicono isotopi ambiente se esiste un’isotopia $h_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $h_1(K_1) = K_2$, in altre parole, si può pensare h_t come ad una deformazione continua di \mathbb{R}^n che porta K_1 in K_2 . Interessante è la ricerca di invarianti di nodi all’interno della stessa classe di isotopia ambiente e lo studio di classificazioni di queste classi secondo alcuni invarianti. Nella teoria dei nodi di bracci robotici si studia una variante “robotica” di questi problemi, analizzando il comportamento di catene aperte, catene chiuse e alberi, quando questi oggetti vengono immersi nel piano, nello spazio, o in spazi euclidei di dimensione superiore.

Nel primo capitolo, dopo aver definito formalmente questi oggetti, vengono presentati alcuni importanti risultati riguardanti catene aperte e chiuse immerse nel piano, seguendo principalmente uno dei primi testi di topologia robotica, quale quello di M.Farber [1], insieme ad alcuni studi tratti dagli articoli raccolti.

1.1 Prime definizioni

Un *braccio robotico* o *catena aperta* è intuitivamente un meccanismo dotato di giunture (vertici) che collegano barre rigide (lati o segmenti). Le giunture permettono variazioni degli angoli tra i segmenti che rimangono, invece, rigidi in ogni trasformazione.

Inoltre si richiede che il braccio robotico sia e rimanga semplice, ovvero senza auto-intersezioni: questa condizione vuole rappresentare l'impenetrabilità dei corpi.

Definizione 1.1. Sia $L = (l_1, \dots, l_{n-1})$ un vettore fissato detto *vettore delle lunghezze*, con $l_i > 0 \quad i = 1, \dots, n-1$. Si definisce *configurazione* φ di un braccio robotico immerso nel piano a cui è associato un vettore delle lunghezze L una n -upla ordinata $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ delle giunture tale che:

1. $|p_i - p_{i-1}| = l_i, \quad i = 1, \dots, n-1$ (rigidità delle barre)
2. $|i - j| > 1 \Rightarrow [p_i, p_{i+1}] \cap [p_j, p_{j+1}] = \emptyset$ (semplicità)
3. $[p_i, p_{i+1}] \cap [p_{i+1}, p_{i+2}] = p_{i+1}$ (semplicità)

Definizione 1.2. Sia X_L lo spazio di tutte le possibili configurazioni di bracci robotici con vettore delle lunghezze L immersi nel piano.

Osservazione 1. Siano $u_i := \frac{p_i - p_{i-1}}{|p_i - p_{i-1}|} \quad i = 2, \dots, n$ versori nel piano in numero $n-1$, allora dato L ogni configurazione φ si può univocamente determinare tramite la n -upla $\varphi = (p_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$. Con queste notazioni si vede che X_L è un sottoinsieme aperto del prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^{n-1}$

Definizione 1.3. Una *catena chiusa* o *poligonale chiusa immersa nel piano* è una configurazione di un braccio robotico nel piano in cui coincidano il primo e l'ultimo punto, ovvero vale la condizione aggiuntiva:

$$[p_1, p_2] \cap [p_{n-1}, p_n] = p_1 = p_n$$

Definizione 1.4. Una *deformazione di un braccio robotico sul piano o di una catena chiusa* con vettore delle lunghezze L è una famiglia di funzioni continue $p_1(t), \dots, p_n(t) \in \mathbb{R}^2$, dipendenti dal parametro reale $t \in [0, 1]$, tali che $(p_1(t), \dots, p_n(t))$ sia in ogni istante $t \in [0, 1]$ configurazione di un braccio robotico o di una poligonale chiusa con vettore delle lunghezze associato L .

Definizione 1.5. Un *moto espansivo* è una deformazione di un braccio robotico tale che $|p_i(t) - p_j(t)|$ è monotona crescente per ogni coppia di vertici del braccio robotico.

Si può dimostrare che nei moti espansivi non si incorre in autointersezioni durante tutta la trasformazione.

Definizione 1.6. Dato un moto espansivo $p_1(t), \dots, p_n(t)$, si considerino i vettori $v_i := p'_i(0)$ che descrivono la velocità del moto nel vertice i -esimo all'istante iniziale. Si definisce *moto infinitesimale* una n -upla di vettori velocità (v_1, \dots, v_n) . Un moto infinitesimale (v_1, \dots, v_n) è definito *espansivo* se vale:

$$\langle v_{i+1} - v_i, p_{i+1} - p_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

e per ogni coppia di indici $i < j$ è soddisfatta:

$$\langle v_j - v_i, p_j - p_i \rangle > 0$$

Vale che per ogni configurazione possibile $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^{n-1}$ del braccio robotico esiste un moto espansivo infinitesimale (v_1, \dots, v_n) .

Queste definizioni si possono generalizzare in modo naturale per catene aperte o catene chiuse immerse in spazi euclidei n -dimensionali; in questi casi, è interessante studiare per quali configurazioni di catene aperte o chiuse esistano deformazioni continue che portino la configurazione di partenza di una sorta di “*configurazione base*”. Nel caso delle catene aperte, questa configurazione è rappresentata come la configurazione rettificata, in cui tutti i segmenti del braccio robotico sono adiacenti orizzontali da sinistra a destra, espressa con $e = (p_1, u_2, \dots, u_n) = (p_1, 1, 1, \dots, 1)$. Nel caso delle poligonali chiuse, invece, la “*configurazione base*” è quella la cui proiezione su di un piano sia il bordo

di un poligono semplice convesso. Questo argomento è stato affrontato in diversi articoli, si vedano, ad esempio, i riferimenti [20, 21, 22].

1.2 Risultati fondamentali sul piano

Presentiamo alcuni importanti risultati riguardanti catene aperte e chiuse immerse nel piano. Storicamente uno dei primi teoremi di snodamento fu provato da L.Antoine nel 1921 e afferma l'inesistenza di nodi non banali formati da curve sul piano.

Teorema 1.2.1. *Per ogni curva chiusa C immersa nel piano esiste una isotopia $h_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che manda C sulla circonferenza $S^1 = \partial D^2 \subset \mathbb{R}^2$. Nello stesso modo, ogni cammino semplice $L \subset \mathbb{R}^2$ è isotopo ad un segmento rettilineo.*

Il teorema di Antoine ci toglie dall'impaccio di cercare annodamenti di catene aperte o chiuse sul piano, ma apre un altro quesito molto discusso, noto come il problema della “Regola del Carpentiere”. Questo problema è incentrato sulla connessione per archi di X_L : ci si chiede se per ogni elemento di X_L esista una deformazione continua che porti il braccio robotico nella configurazione rettificata conservando in ogni istante la semplicità della catena.

Questo quesito fu elencato nella celebre lista di Kirby in *Problemi in Topologia basso-dimensionale* e rimase irrisolto per anni malgrado gli sforzi di molti matematici. La soluzione arrivò nel 2003 ad opera di C.Connelly, E.Domaine e G.Rote [23]. L'idea di base della dimostrazione è quella di comporre la deformazione continua che rettifica il braccio robotico con un numero elevato di moti espansivi infinitesimali, che assicurano l'assenza di autointersezioni servendosi della teoria della *tensengrity* e del Teorema di Maxwell-Cremona. Riportiamo di seguito la soluzione del problema della *Regola del Carpentiere*:

Teorema 1.2.2. *Lo spazio delle configurazioni X_L è connesso per archi. Inoltre, il quoziente X_L/G è contraibile, dove $G = SE(\mathbb{R}^2)$ è il gruppo delle isometrie che preservano l'orientazione di \mathbb{R}^2 .*

In seguito furono studiati approcci tramite altri algoritmi: ricordiamo lo studio tramite pseudo-triangolazioni della *tensengrity* di I.Streinu [25] e l'approccio energetico illustrato in [24]. La stessa I.Streinu ha compiuto diversi studi sugli alberi e sugli alberi metrici immersi nel piano, che rappresentano un altro importante oggetto della topologia robotica. In [12], edito da altri autori, è stato dimostrato che gli alberi metrici nello spazio possono bloccarsi, ovvero lo spazio delle configurazioni associato ha più di una componente connessa.

Capitolo 2

Bracci robotici nello spazio 3-dimensionale

Il caso tridimensionale è sicuramente il più interessante per quanto riguarda la teoria dei nodi di bracci robotici e di poligoni chiuse. Si tratta, infatti, dell'unica dimensione in cui questi oggetti possono bloccarsi, cioè in cui esistono configurazioni che non ammettono deformazioni continue alla configurazione rettificata (nel caso delle catene aperte) e convessificata (nel caso delle catene chiuse). Un approccio interessante è stato affrontato in [10], uno studio che utilizza la semplicità della proiezione bidimensionale (eseguita dopo aver mosso opportunamente i segmenti tramite un algoritmo) per avere informazioni sullo stato di annodamento delle catene tridimensionali proiettate. Invece gli alberi metrici, come accennato nel capitolo precedente, si possono bloccare anche nel caso bidimensionale (si veda ad esempio [12]). Consideriamo ora una catena di n segmenti di lunghezza l_1, \dots, l_n immersi in \mathbb{R}^3 , denotiamo con $Ch_n(l_1, \dots, l_n)$ lo spazio delle configurazioni delle catene aperte con queste lunghezze e con $Pol_n(l_1, \dots, l_n)$ lo spazio delle configurazioni delle poligoni chiuse.

Ci poniamo ora il seguente quesito: le componenti connesse di $Pol_n(l_1, \dots, l_n)$ corrispondono biunivocamente a tipologie di nodi, oppure esistono diverse immersioni nello spazio dello stesso nodo che non possono essere portate le

une nelle altre da una trasformazione continua?

Il problema sta quindi nell'eventuale esistenza di cammini in Pol_n che non provengono da isotopie ambientali. Uno studio in questo senso è stato prodotto da Cantarella e Johnston [4], sviluppando studi precedenti di Randell [18] e Millett [7].

Millett e Orellana nel 1994 [7] provarono la connessione in $Pol_6(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ della classe delle catene chiuse snodate (quelle catene che, pensate nella teoria dei nodi classica, corrispondono al nodo banale), mentre Calvo [19] più recentemente ha mostrato come, considerando l'orientazione, sussistono in $Pol_6(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ l'immersione destra e quella sinistra del nodo trifoglio come due classi di omotopia distinte.

Il risultato che vogliamo illustrare in questa sezione, di Cantarella e Johnston, afferma che in $Ch_5(l_1, \dots, l_5)$ è possibile scegliere opportunamente l_1 e l_5 affinché esistano tre classi di equivalenza distinte e che per ogni altra scelta delle lunghezze che non produce quelle tre classi $Ch_5(l_1, \dots, l_5)$ contiene unicamente la classe banale.

E' stato provato invece per $Pol_n(l_1, \dots, l_n)$ che, per $n > 5$ e per scelte opportune della lunghezza dei segmenti, esistono configurazioni *snodate bloccate*: configurazioni che non sono annodate, ma che non possono essere deformate in poligonali convessificate.

Di fatto queste configurazioni rappresentano una novità completa nella teoria dei nodi classica; si ha infatti che queste tipologie di "semi-nodi", se pensate nel modo classico come curve chiuse senza segmenti rigidi, si possono sempre deformare nella circonferenza standard S^1 e quindi appartengono alla classe banale dello spazio delle configurazioni.

Nella sezione dedicata alle catene chiuse illustreremo il primo esempio di *snodata bloccata* in $Pol_6(l_1, \dots, l_6)$, pubblicato in [4], insieme ad un esempio successivo fornito da Toussaint [5].

2.1 Catene aperte

In questo paragrafo si vuole affrontare il problema della rettificazione della configurazione di una catena aperta in Ch_n . Il metodo che vogliamo illustrare, proposto da Cantarella e Johnston [4], è quello di studiare la proiezione $p : Ch_{n+1} \rightarrow Ch_n$ ottenuta collassando l'ultimo segmento di ciascuna configurazione.

Si osservi che questa mappa non gode della proprietà del sollevamento dei cammini: si pensi che la possibilità di sollevare il cammino a partire dalla sua "base" Ch_n implica che ogni deformazione dei primi n segmenti della catena non è influenzata dalla presenza dell' $(n+1)$ -esimo. La Figura 2.1 (a sinistra) illustra un controesempio, una configurazione dove ciò è assurdo. Per semplicità, appaiono soltanto i segmenti rilevanti, mentre l'ultimo, il segmento che viene retratto, è tratteggiato.

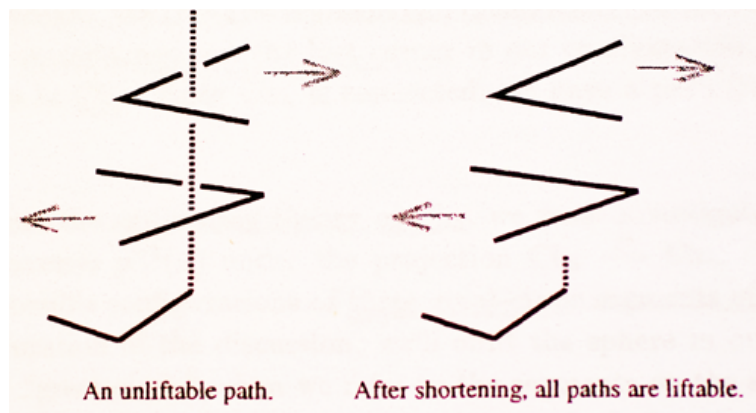


Figura 2.1: Mancanza della proprietà di sollevamento dei cammini.

Apportiamo ora una piccola variazione alla situazione: fissiamo il numero di segmenti della configurazione e lasciamo variare il vettore delle lunghezze. Denotiamo questo spazio delle configurazioni con Ch_n^1 : con questo accorgimento la proiezione $p : Ch_{n+1}^1 \rightarrow Ch_n^1$ gode della proprietà del sollevamento. Per provarlo osserviamo che per ogni cammino $\alpha : I \rightarrow Ch_n^1 \exists \varepsilon$ istante in-

finitesimo dopo il quale $\alpha(t)$ interseca l'ultimo segmento. Per sollevare α , usiamo ε per restringere l'ultimo segmento fino al momento in cui non interferisce con i primi n segmenti, come in Figura 2.1. (a destra). Dunque con un altro istante ε operiamo una rotazione nell'ultimo segmento fino ad allinearlo con l' n -esimo; a questo punto si può ritrarre tutto nella n -esima giuntura. Proviamo ora il nostro primo Lemma:

Lemma 2.1.1. *Se il vettore delle lunghezze è lasciato variare, la fibra di ciascun punto nella proiezione $p : Ch_{n+1}^1 \rightarrow Ch_n^1$ è connessa e inoltre Ch_n^1 è connesso per ogni n naturale.*

Dimostrazione. Consideriamo il collasso dell'ultimo segmento in ogni configurazione di Ch_{n+1}^1 .

Questo collasso è un retratto di deformazione della fibra di ogni punto $p^{-1}(x_0)$ della proiezione $p : Ch_{n+1}^1 \rightarrow Ch_n^1$ sullo spazio delle configurazioni di un segmento attaccato ad una estremità di un altro segmento. Considerando ora la sfera posta nel vertice tra l' n -esimo e l' $n+1$ -esimo segmento, possiamo identificare questo spazio delle configurazioni come $S^2 \setminus \{\text{pto}\}$; si noti che ciò implica la connessione della fibra di ogni punto.

Il punto nero in Figura 2.2 indica l'immagine sferica dell' n -esimo segmento. Poiché Ch_1^1 connesso, segue per induzione su n , utilizzando la proprietà del sollevamento dei cammini e la connessione delle fibre, che $\forall n \in \mathbb{N} \quad Ch_n^1$ è connesso. \square

Torniamo ora ad esaminare il caso in cui sia fissato il vettore delle lunghezze. Chiameremo nel seguito e il punto base di ogni $Ch_n(l_1, \dots, l_n)$, cioè la configurazione rettilinea nella quale ogni segmento e il suo successivo siano adiacenti, cioè appartengono alla stessa retta.

Lemma 2.1.2. *$Ch_n(l_1, \dots, l_n)$ è connesso per ogni l_i con $n < 5$*

Dimostrazione. Procediamo ancora per induzione: Ch_1 è connesso, consideriamo il caso generale $p : Ch_{n+1} \rightarrow Ch_n$.

Come già visto, l'immagine inversa $p^{-1}(x_0)$ è la configurazione di un segmento, che può intersecare un certo numero di segmenti nello spazio. L'effetto

di questi ostacoli è di rimuovere un certo numero di archi di circonferenza, insieme ad un punto, nella sfera rappresentativa dello spazio delle configurazioni mostrata in Figura 2.2.

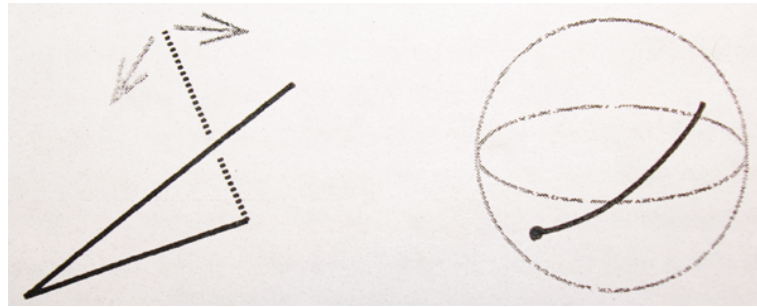


Figura 2.2: L'aggiunta di segmenti nella catena produce la rimozione di archi di circonferenza da S^2 .

Elenchiamo alcune osservazioni della situazione:

1. Ci sono al più $n-1$ archi di circonferenza sulla sfera di rappresentazione.
2. Ogni arco ha lunghezza sferica $< \pi$.
3. La catena degli archi di circonferenza è sempre connessa.

La prima e la seconda osservazione ci dicono che la fibra e la base sono connessi per $n < 4$. In effetti, occorrono almeno tre archi di circonferenza consecutivi di lunghezza sferica $< \pi$ per delimitare un'area su S^2 .

Se ogni fibra è connessa e Ch_n è connesso, allora vogliamo mostrare Ch_{n+1} connesso costruendo un cammino da ogni punto x su Ch_{n+1} ad e in Ch_{n+1} . Per fare ciò, assumiamo $p(x) = x_0$ e consideriamo il punto nell'immagine inversa $p^{-1}(x_0)$ antipodale rispetto al punto marcato \bullet , che rappresenta l'immagine dell' n -esimo segmento.

Siccome $p^{-1}(x_0)$ è connesso, l' $n + 1$ -esimo segmento può essere mosso fino all'antipodale di \bullet .

In questo modo, si è raddrizzato l'ultimo angolo nella nostra configurazione,

riducendola ad una configurazione in Ch_n . Essendo Ch_n connesso, esiste un cammino da x ad e configurazione rettilinea. \square

2.1.1 Lo spazio delle configurazioni $Ch_5(l_1, \dots, l_5)$

Si vogliono studiare in particolare le componenti connesse dello spazio delle configurazioni di catene aperte a cinque segmenti $Ch_5(l_1, \dots, l_5)$, perché questo caso presenta alcune proprietà interessanti di cui parleremo fra poco. Investighiamo la struttura delle immagini inverse $p^{-1}(x)$ rispetto alla proiezione $Ch_5 \rightarrow Ch_4$, ovvero consideriamo le possibili configurazioni dei tre archi di circonferenza di lunghezza $< \pi$ su \mathbb{S}^2 .

Se consideriamo le configurazioni in Ch_4 munite di un'orientazione, saranno dotate di orientazione anche le controimmagini corrispondenti sulla sfera di rappresentazione. Queste saranno formate da tre archi di circonferenza, perché dei quattro segmenti della catena il primo è necessariamente radiale ed ha, quindi, proiezione puntiforme su \mathbb{S}^2 . Se i segmenti sono connessi, le proiezioni sulla sfera saranno solo dei tre tipi mostrati in Figura 2.3.



Figura 2.3: Marziano alto, configurazione aperta, marziano basso.

Certo questo non si verifica in ogni situazione: per esempio, se l'ultimo segmento ha lunghezza sufficientemente piccola, il suo moto non è ostruito dagli altri segmenti, eccetto che dal segmento radiale.

Nella Figura 2.3 il punto sulla sfera denotato con \bullet è l'immagine sferica del quarto segmento, quello radiale. L'immagine sferica dell'ultimo segmento sarà denotata con y .

La prima e la terza configurazione sono chiamate *marziano alto* e *marziano basso*, per indicare l'orientazione data dall'ordine numerico degli archi rispetto all'orientazione standard di \mathbb{S}^2 . In ognuno di questi casi, data una configurazione generica $x \in Ch_5$ con $p(x) = x_0$, ci riferiremo all'unione dei punti dei tre archi come a $C(x_0)$.

Illustriamo ora il risultato principale del sottoparagrafo:

Teorema 2.1.3. *Lo spazio $Ch_5(l_1, \dots, l_5)$ ha tre componenti connesse se $l_1, l_5 \geq l_1 + l_2 + l_3$ e una componente connessa altrimenti. Una di queste componenti è quella che contiene la configurazione rettificata (classe banale), le altre due contengono le configurazioni bloccate k e \bar{k} mostrate nella Figura 2.4.*



Figura 2.4: Due immersioni non banali in Ch_5 .

Dimostrazione. La linea generale di questa dimostrazione passa per la dimostrazione di una serie di lemmi, che verranno proposti nel seguito.

Per prima cosa, se Ch_4 è sempre connesso come nel caso del Lemma 2.1.1, osserviamo che se ogni angolo della configurazione in Ch_5 può essere raddrizzato, allora la configurazione può essere deformata in e .

Dal Lemma 2.1.4, se $C(x_0)$ è un marziano, allora l'antipodale di \bullet non appartiene a $C(x_0)$. Questo implica che se $C(x_0)$ non è un marziano, o se y non appartiene a $C(x_0)$, la configurazione x può essere deformata in e .

Rovesciando l'orientazione di x e ripercorrendo i medesimi passaggi, troviamo proposizioni corrispondenti sulla posizione y' del primo segmento relativo

alla configurazione $C(x'_0)$ degli ultimi quattro segmenti.

Così rimane da analizzare solo il caso in cui y e y' stiano rispettivamente dentro a $C(x_0)$ e $C(x'_0)$. In questo caso, dal Lemma 2.1.5, non ci sono ostacoli a deformare x in e (vedi dimostrazione).

Osserviamo che se $l_5 < l_2 + l_3 + l_4$, possiamo deformare la configurazione x fino a far scomparire un angolo del marziano $C(x_0)$. E' quindi possibile muovere il punto y fuori da $C(x_0)$, raddrizzando l'ultimo angolo di x e deformandolo in e .

Con la medesima procedura, se $l_1 < l_2 + l_3 + l_4$, si può deformare x in e : allora x è rappresentante della classe banale.

Nel caso invece in cui $l_1, l_5 \geq l_2 + l_3 + l_4$, y e y' appartengano ai rispettivi marziani $C(x_0)$ e $C(x'_0)$, il Lemma 2.1.6 prova che $C(x_0)$ e $C(x'_0)$ rimangono connessi per ogni isotopia del poligono.

Proveremo nel Lemma 2.1.7 che $C(x_0)$ e $C(x'_0)$ rimangono marziani dopo qualunque isotopia: da qui l'impossibilità di costruire un cammino da x ad e .

Non esiste una deformazione di x che muta l'orientazione di $C(x_0)$ o di $C(x'_0)$: a prima vista si sarebbero potute individuare quattro classi, corrispondenti alle combinazioni possibili di (*alto / basso*, *alto / basso*), mentre per il Lemma 2.1.8 sono possibili solamente le combinazioni (*alto, alto*) e (*basso, basso*). Questo prova che non esistono cammini da k a \bar{k} , né da uno di questi ad e . Ciò prova il Teorema 2.1.3. \square

Lemma 2.1.4. *L'antipodale del punto \bullet non appartiene al marziano $C(x_0)$.*

Dimostrazione. Definiamo il lato contenente il punto \bullet l'arco superiore del marziano. Questa definizione è consistente (eventualmente si perturbi il marziano), anche se non sempre è coerente con l'orientazione standard. Si osservi, con l'ausilio della Figura.2.5, che se AB interseca AC in A, questi non può intersecare il segmento tratteggiato che collega \bullet al suo antipodale. \square

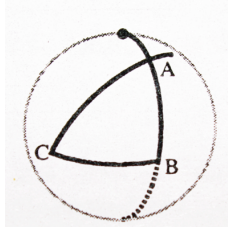


Figura 2.5: L'antipodale del punto \bullet è esterno al marziano.

Lemma 2.1.5. *Se y e y' sono all'interno dei marziani $C(x_0)$ e $C(x'_0)$, dato un $\varepsilon > 0$, è possibile deformare x fino a che i vertici 3 e 4 siano compresi tra $\pi - \varepsilon$ e π .*

Dimostrazione. Per semplificare le cose, assumiamo che i vertici 1 e 2 giacciono sull'asse z , che il vertice 3 giaccia sul piano (y, z) con $y > 0$, e che il vertice 4 abbia $x < 0$.

Si ottiene una configurazione come nel diagramma in Figura 2.6.

Inoltre, si può assumere che il primo segmento rimanga fisso mentre il secondo permanga sul piano (y, z) durante tutta la trasformazione. Si considerino ora l'insieme di tutti i moti rigidi dei segmenti 2,3 e 4 che fissano un estremo del segmento 2 nell'origine, evitando l'asse z e mantenendo il vertice 4 dietro l'asse (y, z) : queste deformazioni non incontrano ostacoli nel muovere il braccio robotico come in Figura 2.6. \square

Lemma 2.1.6. *Se $l_1 \geq l_2 + l_3 + l_4$ la configurazione x non può essere deformata in un marziano sconnesso $C(x_0)$.*

Dimostrazione. Consideriamo la sfera centrata nel secondo vertice di x , con raggio l_1 : il marziano $C(x_0)$ è la proiezione radiale della parte di x contenuta nella sfera, sulla superficie della sfera stessa.

Se x è connesso, la proiezione è sconnessa soltanto se x esce e rientra all'interno della sfera. Comunque, il vincolo sul vettore delle lunghezze assicura che al più l'ultimo segmento possa contenere punti all'esterno della sfera, ma essendo l'ultimo, non esiste nessun altro segmento consecutivo a questo che

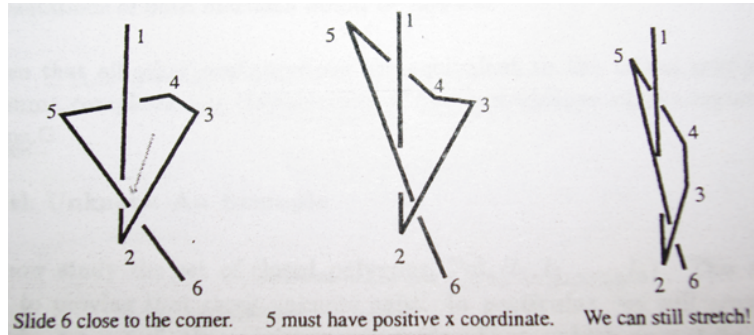


Figura 2.6: Vincoli nel moto dei vertici 2,3 e 4.

abbia punti all'esterno della sfera e tantomeno che possa rientrare all'interno della superficie. La porzione massima di x che fuoriesce dalla sfera è quindi un segmento retto, che non dà problemi di sconnessione sul marziano. \square

Lemma 2.1.7. *Supponiamo x configurazione tale che $C(x_0)$ sia un marziano connesso e che x rispetti i vincoli sul vettore delle lunghezze. Se esiste un'isotopia di x che apre $C(x_0)$, allora y' dev'essere all'esterno di $C(x'_0)$.*

Dimostrazione. Esistono solo due isotopie che aprono il marziano: nel primo caso, avremo la situazione illustrata nella Figura 2.7.

Osserviamo che il segmento 5 deve attraversare la retta definita dai vertici (2,3), così dal punto di vista di 5 l'immagine del punto 6 (ovvero y') sta sull'arco di circonferenza formato estendendo un lato del marziano $C(x'_0)$.

In particolare y' è all'esterno di $C(x'_0)$.

Nel secondo caso, il punto 6 dovrebbe giacere nella porzione di piano definita dai punti 2,3,4 come illustrato in Figura 2.8.

La restrizione sulle lunghezze implica che 6 è all'esterno da questa porzione di piano.

Dunque, come prima, dal punto di vista del vertice 5, y' è esterno a $C(x'_0)$. \square

Lemma 2.1.8. *Esistono esattamente due tipi distinti di configurazioni bloccate in cui entrambi y e y' sono all'interno dei loro rispettivi marziani $C(x_0)$ e $C(x'_0)$ e queste sono proprio le configurazioni k e \bar{k} mostrate in Figura 2.4.*

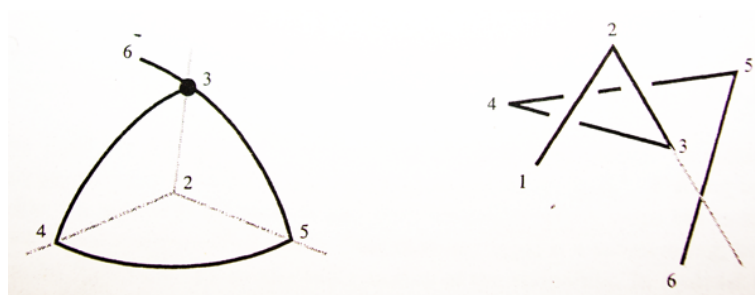


Figura 2.7: Primo caso.

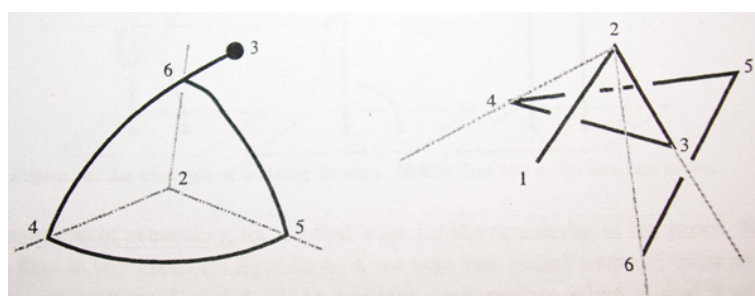


Figura 2.8: Secondo caso.

Dimostrazione. Ogni marziano ha orientazione alta oppure bassa. Dobbiamo provare che le orientazioni coincidono: consideriamo allora le scelte fatte nella dimostrazione del Lemma 2.1.5 e riferiamoci alle figure trattate durante quell'argomentazione.

Se scegliamo che il vertice 4 abbia ascissa negativa, troviamo il vertice 5 con ascissa positiva; dunque il marziano formato dai segmenti 1,2,3 è orientato alto. D'altro canto, troviamo che i vertici 3,4,5 sono disposti intorno all'asse z in senso antiorario.

Se il vertice 6 dev'essere sopra agli altri per il vincolo sulle lunghezze, il marziano formato dai segmenti 3,4,5 dev'essere orientato alto.

Se invece scegliamo il vertice 4 con ascissa positiva, ritroveremo questi risultati in modo speculare e l'orientazione di entrambi i marziani sarà necessariamente bassa. \square

Questo Lemma conclude la dimostrazione del Teorema 2.1.3.

2.2 Catene chiuse

Dedichiamoci ora alle poligonali chiuse. Indicheremo lo spazio di queste configurazioni con $Pol_n(l_1, \dots, l_n)$, dove l_1, \dots, l_n sono le lunghezze dei segmenti della catena.

Vogliamo mostrare alcuni esempi di curve in \mathbb{R}^3 poligonali bloccate (per le quali non esista alcun moto che conservi la rigidità dei segmenti e la semplicità della catena, che porti la poligonale in una seconda configurazione la cui proiezione sul piano sia convessa), ma snodate, in particolare in $Pol_6(l_1, \dots, l_6)$.

Proveremo che $\forall n > 5, \exists x$ configurazione snodata bloccata.

Un corollario facilmente derivabile da questo risultato afferma che al crescere di n , il numero di snodate bloccate cresce senza limite.

Questo è in netto contrasto con il caso di $Pol_n(L, L, \dots, L)$, spazio delle poligonali equilatera chiuse, in cui al crescere di n il numero di snodate bloccate non converge ad una funzione crescente continua: questo risultato quindi dipende essenzialmente dal fatto che i segmenti abbiano lunghezze differenti. Non vedremo come costruire risultati corrispondenti nel caso equilatero in $Pol_n(L, L, \dots, L)$, si sospetta anzi che non sia proprio possibile.

2.2.1 Snodate bloccate in Pol_6 : primo esempio

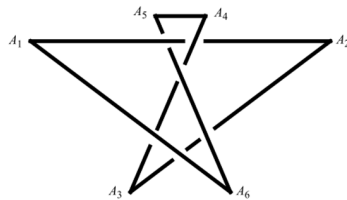


Figura 2.9: La snodata bloccata di Cantarella e Johnston.

In Figura 2.9 si può osservare l'esempio di Cantarella e Johnston [4] costruito in Pol_6 tramite le coordinate:

1	2	3	4	5	6
$(0, 0, -50)$	$(0, 0, 50)$	$(20, -5, -10)$	$(-2, 2, 2)$	$(-2, -2, -2)$	$(20, 5, 10)$

Teorema 2.2.1. *Per scelte adatte del vettore delle lunghezze, esistono almeno due classi di immersioni di poligonali snodate bloccate in $Pol_6(l_1, \dots, l_6)$.*

L'idea di base per la dimostrazione di questo teorema è di utilizzare la geometria di $Pol_6(l_1, \dots, l_6)$ per costruire una corrispondenza tra nodi poligonali e stringhe. Le stringhe nella teoria dei nodi classica sono insiemi di archi o cammini che connettono due piani paralleli in R^3 . Si può provare che le stringhe corrispondenti al nostro esempio sono non banali.

Questo risultato si può estendere al caso generale di $Pol_n(l_1, \dots, l_n)$: è sufficiente infatti aggiungere angoli in corrispondenza di un vertice senza aumentare troppo la lunghezza dei segmenti. Per osservare che esistono diversi tipi di poligonali snodate bloccate per n grande, si pensi che con un grande numero di vertici si può sostituire una stringa S con la sua somma connessa $S \# S$; questo è un tipo differente di stringa rispetto a S , che corrisponde ad un poligono snodato.

Per le dimostrazioni dettagliate del risultato precedente e di quello seguente rimandiamo a [4], pp.1036-1039. Vediamo ora come si comporta la cardinalità dell'insieme delle snodate bloccate al variare di n : esistono, per n grande, almeno tre classi distinte di poligonali snodate bloccate. Con un numero sufficiente di vertici si può considerare la somma connessa effettuata un numero arbitrariamente grande di volte, creando una famiglia vasta a piacere di poligonali snodate bloccate. Si può provare, in particolare:

Corollario 2.2.2. *Per scelte adatte del vettore delle lunghezze, per ogni $n > 5$, esistono molteplici classi di poligonali snodate bloccate.*

Per ogni tipo di nodo o di cammino esiste più di un valore di n per il quale

esistono classi di immersioni distinte di quegli stessi nodi o cammini.

Il numero di classi di immersioni distinte di un nodo dato cresce al crescere di n e diviene arbitrariamente grande quando $n \rightarrow \infty$.

2.2.2 Snodate bloccate in Pol_6 : secondo esempio

Per concludere questo capitolo mostreremo un risultato di G.Toussaint [5], che prosegue direttamente il lavoro di Cantarella e Johnston [4]: mentre questi avevano illustrato l'esistenza di una poligonale snodata bloccata in $Pol_6(l_1, \dots, l_6)$, portando il numero delle classi di snodate a tre, Toussaint mostra un nuovo modello di snodata bloccata, portando il numero di classi di snodate a cinque. Toussaint illustra inoltre come il suo modello sia bloccato in un senso più forte rispetto al modello di [4].

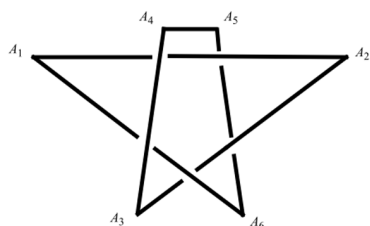


Figura 2.10: La snodata bloccata di Touissant.

Denotiamo lo spazio del poligono esagonale tramite i suoi vertici $A = A_1A_2\dots A_6$ e sia l_i la lunghezza del segmento che collega $A_iA_{i+1} \pmod 6$. La figura 2.10. non rispetta esattamente le proporzioni, ma facilita la comprensione dell'oggetto.

Sia L il vettore delle lunghezze, $L=(20,13,4,1,4,13)$. L'unico modo possibile per rendere planare il poligono sarebbe passare la catena $A_3A_4A_5A_6$ sopra A_1 o sotto A_2 .

Per compiere tale moto rigido occorre necessariamente che la lunghezza di $A_3A_4A_5A_6$ non sia minore della lunghezza minima tra l_2 e l_6 . Invece, si ha

$l(A_3A_4A_5A_6) = 9 < 13 = l_2 = l_6$. Questa condizione è sufficiente a determinare il poligono in figura 2.10. come bloccato.

Costruiamo ora un riferimento cartesiano nel quale immergere il poligono in figura, mantenendo le lunghezze dei segmenti ed in modo tale che la distanza tra le proiezioni parallele su (x,y) dei segmenti A_1A_2 e A_4A_5 sia unitaria.

Denotiamo l'altezza (coordinata z) di ogni vertici con h_i riportate nella figura 2.11.

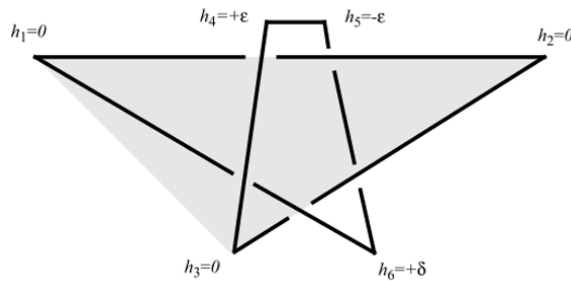


Figura 2.11: Diagramma delle altezze dei vertici rispetto al piano (x,y) .

Si ha che $A_1, A_2, A_3 \in (x, y)$; dunque, $h_1 = h_2 = h_3 = 0$, sia $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere e sia $h_4 = +\varepsilon, h_5 = -\varepsilon$. Il segmento A_3A_4 adesso è fissato sul piano (x, y) , costruiamo il segmento retto da A_5 con $z = -\varepsilon$ attraverso A_2A_3 fino ad intersecare la retta verticale che contiene A_6 ad altezza δ' ; verifichiamo ora se $A_1\delta'$, che giace sopra il piano (x, y) per costruzione, giace anche sotto il segmento A_3A_4 : se questa condizione è verificata scegliamo $h_6 = \frac{\delta'}{2}$, se invece giace sopra il segmento A_3A_4 si diminuisce h_6 fino a trovare la massima altezza di A_6 che verifichi la condizione, aggiustando $l(A_1A_6)$. Come nell'esempio di Cantarella e Johnston, diamo la tabella delle coordinate dei punti che costituiscono la poligonale snodata bloccata:

La discussione completa di Toussaint passa attraverso il nodo “ferri da calza” (Figura 2.12.), esempio principe di catena bloccata di cinque elementi,

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$(100, 10, 0)$	$(-100, 10, -1)$	$(10, 20, 0)$	$(10, 0, 10)$	$(-10, 0, -10)$	$(-10, 20, 0)$

già osservato da altri autori in [4] e in [10].

A proposito di questo modello si ha il Lemma seguente:

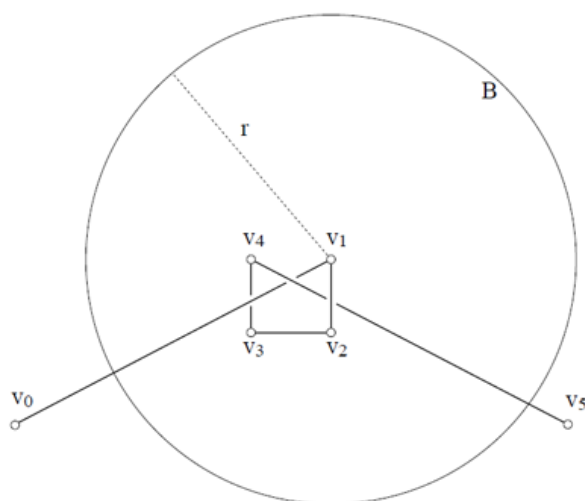


Figura 2.12: Il nodo ferri da calza.

Lemma 2.2.3. *I ferri da calza non sono rettificabili.*

Dimostrazione. La dimostrazione è già stata vista nella sottosezione delle catene Lemma 2.1.5.

□

Enunciamo quindi il risultato principale di Toussaint:

Teorema 2.2.4. *Per scelte accurate del vettore delle lunghezze, esistono almeno cinque classi di immersioni distinte di poligoni snodate in Pol_6 .*

Dimostrazione. Le prime tre classi sono già state illustrate dai teoremi precedenti. La quarta e la quinta classe contengono il modello in Figura 2.10

nelle due orientazioni possibili. Questo si dimostra tramite il Lemma 2.2.3 e la costruzione del modello all'inizio della sottosezione. \square

Per concludere, si vuole introdurre un nuovo concetto 'quantitativo' sul bloccaggio delle poligonali.

Definizione 2.1. Il *numero di bloccaggio* di una poligonale nello spazio è il minimo numero di segmenti che sono da rimuovere affinché la catena rimanente sia rettificabile. Se il numero di bloccaggio di una poligonale è k si scriverà che quella poligonale è k -bloccata.

Chiameremo poi una poligonale *debolmente k -bloccata* se la rimozione di qualunque k -upla di segmenti consente la rettificazione della catena rimanente. Chiameremo invece una poligonale *fortemente k -bloccata* se essa non è debolmente k -bloccata ma esiste una k -upla di segmenti la cui rimozione rende rettificabile la catena rimanente.

Osservazione 2. Il modello di Cantarella-Johnston è debolmente 1-bloccato, il modello di Toussaint è fortemente 1-bloccato.

Dimostrazione. Il primo risultato è banale. Per il secondo si noti come la rimozione di A_1A_2 produca una catena "ferri da calza", che è bloccata. \square

Infine, riportiamo alcuni problemi aperti riguardanti poligonali e catene bloccate nello spazio:

1. Dato $P \in Pol_n(l_1, \dots, l_n)$, qual'è la complessità nel determinare il numero di bloccaggio di P ?
2. Qual'è la cardinalità di $Pol_6(l_1, \dots, l_6)$ e quante di queste classi contengono poligonali snodate bloccate?
3. A quale funzione converge (se converge) la cardinalità di $Pol_n(l_1, \dots, l_n)$ e il numero delle classi di poligonali snodate bloccate al crescere di n ? (Cantarella e Johnston hanno congetturato che la crescita delle classi di poligonali snodate bloccate sia geometrica).

Capitolo 3

Bracci robotici nello spazio 4-dimensionale

Nello spazio quadridimensionale, come nei casi precedenti, sono stati prodotti alcuni studi sul problema dell'esistenza di catene bloccate, come pure sull'esistenza di alberi bloccati.

L'ipotesi che ha incentivato le ricerche in questo senso consiste nel fatto che gli spazi di dimensione maggiore di tre abbiano troppa libertà di manovra per poter bloccare le catene. Infatti, ogni qual volta in una deformazione si sta per incorrere in un incrocio tra due segmenti, è possibile, sfruttando la nuova dimensione guadagnata rispetto al caso tridimensionale, perturbarli leggermente e farli passare uno accanto all'altro senza che si intersechino. Questo, dal punto di vista tridimensionale, sarebbe come “*passare attraverso la materia*”.

Inoltre, era già noto un teorema della teoria dei nodi classica, riguardante le curve in \mathbb{R}^4 , che afferma:

Teorema 3.0.5. *Non esiste curva C chiusa, differenziabile a tratti, senza autointersezioni, che sia annodata in \mathbb{R}^4 .*

Per una dimostrazione di questo teorema si rimanda a [29], p.270-271. Si era, quindi, propensi a pensare che fosse possibile esportare questo risultato al caso analogo della teoria dei nodi dei bracci robotici. In particolare, questo

tema è stato trattato da R.Cocan in [27] e poi da R.Cocan e J.O'Rourke in [11], dai quali emergono tre risultati fondamentali elencati nel seguito:

Teorema 3.0.6. *Ogni catena aperta semplice e ogni albero semplice in \mathbb{R}^4 può essere rettificato tramite un algoritmo con complessità temporale di $O(n^2)$ e complessità spaziale di $O(n)$, che raggiunge la configurazione rettificata in $O(n)$ mosse.*

Teorema 3.0.7. *Ogni catena chiusa semplice in \mathbb{R}^4 può essere convessificata tramite un algoritmo con complessità temporale di $O(n^6 \lg(n))$ che raggiunge la configurazione convessificata in $O(n^6)$ mosse.*

Teorema 3.0.8. *Nessuna catena aperta o chiusa né nessun albero possono essere bloccati in dimensioni superiori a tre.*

Nei teoremi precedenti il termine *mossa*, utilizzato inizialmente in [10], si riferisce ad una rotazione monotona di alcuni segmenti.

Vediamo nel dettaglio gli algoritmi e le dimostrazioni che hanno permesso di raggiungere i teoremi appena citati, a meno della parte relativa agli alberi.

3.1 Rettificare Catene aperte in \mathbb{R}^4

Definizione 3.1. Sia P una catena semplice aperta poligonale in \mathbb{R}^4 con $n \geq 2$ vertici v_1, \dots, v_n e siano s_i i segmenti tali che $s_i = v_i v_{i+1}$. Si dice che v_i è *rettificato* se (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) è una terna appartenente alla stessa retta nello spazio quadridimensionale e questi vertici formano una catena semplice aperta: dunque, l'angolo relativo a v_i è pari a π . Si definisce *configurazione rettificata* una configurazione rettificata per ogni vertice v_i , $i = 1, \dots, n$.

Si vuole provare il primo teorema relativamente alle catene aperte, rettificando il vertice v_1 e considerando come un unico segmento la catena rettificata (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) . Si itera poi il procedimento fino a quando ogni vertice non è stato rettificato. Si noti che questa procedura non è applicabile al caso tridimensionale, nel quale non si ha la validità del teorema 3.0.8.

Definizione 3.2. Si definisce *posizione traguardo* v_g di v_0 e coerentemente *posizione traguardo* s_g di s_0 , l'unica posizione di v_0 e di s_0 per la quale v_1 è rettificato. Una posizione traguardo si dice *intersecata* se $s_g \cap s_i \neq \emptyset$ per qualche $i = 3, \dots, n$, in caso contrario si ha una posizione traguardo *libera*.

Definizione 3.3. Si definisce C_0 lo *Spazio delle configurazioni* di vertice v_0 con v_1 fissato, ovvero l'insieme di ogni possibile posizione di v_0 che conservi la lunghezza v_0v_1 . Si ha che C_0 è una 3-sfera in \mathbb{R}^4 centrata in v_1 con raggio l_0 .

Definizione 3.4. Si definisce F_0 lo *Spazio libero* di vertice v_0 con v_1, \dots, v_n fissati, ovvero l'insieme di quelle posizioni di v_0 che conservano la lunghezza v_0v_1 e la semplicità della catena.

Definizione 3.5. Si definisce $Ob(v_0)$ il *Diagramma dei vincoli o delle ostruzioni*, ossia quel sottoinsieme di C_0 tale che $F_0 = C_0 / Ob(v_0)$

ALGORITMO 1a: RETTIFICAZIONE PER CATENE APERTE SEMPLICI

REPEAT {

1. SE s_g È POSIZIONE TRAGUARDO LIBERA ALLORA COSTRUISCI IL *Diagramma dei vincoli* $Ob(v_0)$ SU S^3 E POI APPLICA LA PIANIFICAZIONE DEL MOTO CHE PORTA v_0 IN v_g ;
2. ALTRIMENTI SE s_g È INTERSECATA COSTRUISCI IL *Diagramma dei vincoli* $Ob(v_1)$ SU S^2 E POI MUOVI v_1 IN MODO TALE CHE LA POSIZIONE TRAGUARDO SIA LIBERA;

} UNTIL(LA CATENA È RETTIFICATA);

3.1.1 Step 1: s_g libero

Per procedere, necessitiamo di alcune nozioni geometriche riguardanti le intersezioni di oggetti che verranno presentate in \mathbb{R}^d tramite una serie di lemmi, successivamente considerati nel caso particolare con $d = 3$ e $d = 4$.

Lemma 3.1.1. *L'intersezione tra un piano H e una $(d-1)$ -sfera S in \mathbb{R}^d consta in una circonferenza oppure in un singolo punto oppure nell'insieme vuoto.*

Dimostrazione. Si trasli e si ruoti la sfera e il piano in modo tale che la sfera sia centrata nell'origine e il piano sia parallelo al x_1x_2 -piano. Così facendo si ottengono le equazioni:

$$S : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = r^2$$

$$H : x_3 = a_3, x_4 = a_4, \dots, x_d = a_d$$

Da cui:

$$S \cap H : x_1^2 + x_2^2 = r^2 - A^2$$

Se $r^2 < A^2$ l'intersezione è vuota, se $r^2 = A^2$ l'intersezione coincide con il punto $(0, 0, a_3, \dots, a_d)$, infine se $r^2 > A^2$ l'intersezione è una circonferenza di centro $(0, 0, a_3, \dots, a_d)$ e raggio $\sqrt{r^2 - A^2}$. \square

Lemma 3.1.2. *L'intersezione di una retta o di un segmento con una $(d-1)$ -sfera S in \mathbb{R}^d consta al più di due punti.*

Dimostrazione. Sia H un piano generato da tre punti non allineati a, b, c , sia $s = ab \subset H$ il segmento che unisce due punti e sia c il centro di una $(d-1)$ -sfera. Per costruzione $s \cap S = (s \cap H) \cap S = s \cap (H \cap S)$, con $H \cap S$ circonferenza che può essere intersecata da un segmento o da una retta in al più due punti. \square

Definizione 3.6. Se a, b, c sono tre punti distinti non allineati di \mathbb{R}^d , definiamo *Cono triangolare* $\Delta_c(a, b)$ l'unione delle semirette uscenti da c che intersecano il segmento ab .

Definiamo invece *Cono quadrangolare* $Q_c(a, b)$ la chiusura di $\Delta_c(a, b) \setminus T$, con T triangolo determinato da (a, b, c)

Lemma 3.1.3. *L'intersezione di un cono triangolare $\Delta_c(a, b)$ con una $(d-1)$ -sfera S in \mathbb{R}^d consiste al più in due componenti connesse, se c è il centro della sfera al più in una componente connessa. Ciascuna componente è un punto o un arco di circonferenza.*

Dimostrazione. Sia $\Delta = \Delta_c(a, b)$ contenuto nel piano H . Dunque $\Delta \cap S = \Delta \cap (H \cap S)$. Dal Lemma 3.1.1 $(H \cap S)$ è una circonferenza C su H . Quindi il problema si riduce all'intersezione del cono triangolare con la circonferenza. Nella Figura 3.1 si può osservare come questa intersezione sia al più un arco di circonferenza se c è il centro di C , al più due archi di circonferenza in caso contrario. Ogni arco può degenerare ad un punto se il cono triangolare degenera ad una retta.

□

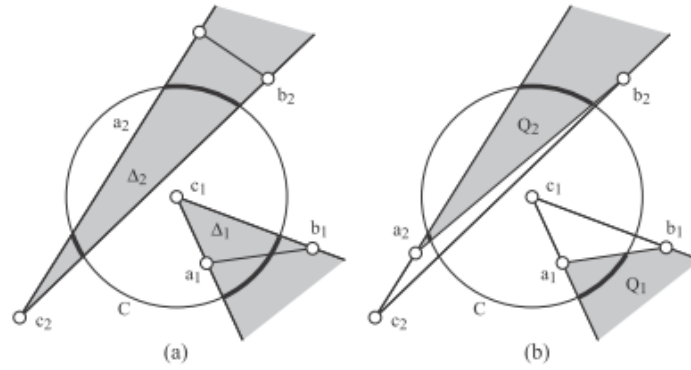


Figura 3.1: (a) Intersezioni dei coni triangolari $\Delta_1 = \Delta_{c_1}(a_1, b_1)$ e $\Delta_2 = \Delta_{c_2}(a_2, b_2)$ con la circonferenza C . (b) Intersezioni dei coni quadrangolari Q_1 e Q_2 con C .

Estendiamo ora il Lemma precedente ai coni quadrangolari:

Lemma 3.1.4. *L'intersezione tra un cono quadrangolare $Q_c(a, b)$ e una $(d-1)$ -sfera in \mathbb{R}^d consiste al più in due componenti connesse, se c è il centro*

della sfera al più in una componente connessa. Ciascuna componente è un punto o un arco di circonferenza.

Dimostrazione. $Q_c(a, b)$ è semplicemente $\Delta_c(a, b)$ intersecato con il semipiano chiuso H contenente ab ; si osserva inoltre che intersecare le componenti del Lemma 3.1.3 con il semipiano non può produrre aumento di componenti connesse. \square

Per alleggerire la notazione, indicheremo con $\Delta_{ji} := \Delta_{v_j}(v_i, v_{i+1})$ il cono triangolare con vertice v_j determinato dall' i -esimo segmento; nello stesso modo per i coni quadrangolari indicheremo con $Q_{ji} = Q_{v_j}(v_i, v_{i+1})$.

Lemma 3.1.5. *L'insieme dei punti $Ob(v_0) \subset C_0$ nella 3-sfera S consiste al più in $n - 1$ componenti connesse, ciascuna delle quali è un arco di circonferenza oppure un punto.*

Dimostrazione. $Ob(v_0)$ è l'unione delle ostruzioni date dai segmenti s_i , $i = 2, \dots, n$ con il punto che impedisce la sovrapposizione con s_1 . Se s_0 interseca s_i , allora v_0 giace in Q_{1i} , quindi v_0 giace su una semiretta da v_1 passante per s_0 al di là dell'intersezione con s_i . Così $S \cap Q_{1i}$ è esattamente la posizione di v_0 per la quale s_0 interseca s_i . Dal Lemma 3.1.4 questa intersezione consta di un arco di circonferenza o di un punto: l'unione sugli i prova l'enunciato. \square

Lemma 3.1.6. *Se v_g , posizione traguardo di v_0 , è libera, allora v_1 può essere rettificato.*

Dimostrazione. Per la libertà di v_g si ha $v_g \notin Ob(v_0)$ e per la semplicità della catena anche la posizione iniziale $v_0 \notin Ob(v_0)$. Essendo la 3-sfera S il luogo delle posizioni possibili per v_0 ed essendo $Ob(v_0)$ un insieme finito di punti e archi di circonferenza, si ha che la rimozione di $Ob(v_0)$ da S^3 non può sconnettere v_0 da v_g . In particolare, essi saranno connessi per archi. Questo segue dal fatto che \mathbb{R}^d non può essere sconnesso da un sottoinsieme di dimensione inferiore a $d - 2$ e, dunque, nemmeno \mathbb{S}^d potrà essere sconnesso. Infatti, se si suppone che il sottoinsieme X disconnetta due punti p e q di \mathbb{S}^d , utilizzando

le proiezioni stereografiche da \mathbb{S}^d a \mathbb{R}^d , si può rimuovere dalla sfera un punto nel complementare di $X \cup p \cup q$: questo produce un sottoinsieme X' in \mathbb{R}^d che sconnette p' e q' , proiezioni stereografiche su \mathbb{R}^d di p e q , contraddicendo l'ipotesi. Si è provata quindi l'esistenza di un cammino γ in $F_0 = S/Ob(v_0)$ tale che $\gamma(0) = v_0$ e $\gamma(1) = v_g$, che rappresenta una deformazione continua del segmento s_0 del braccio robotico tale che la deformazione rettifichi v_1 . \square

3.1.2 Step 2: s_g intersecato

Se s_g è posizione traguardo intersecata, allora, necessariamente, la rotazione di s_0 alla posizione traguardo non conserva la semplicità della catena. In questi casi, l'idea di base è quella di perturbare v_1 fino a quando si rende libera s_g . L'esistenza di questo moto infinitesimo è provata dal seguente Lemma:

Lemma 3.1.7. *E' possibile muovere v_1 ad una nuova posizione v'_1 mantenendo ogni altro vertice fisso, conservando la semplicità della catena, in modo tale che la nuova posizione traguardo s'_g sia libera.*

Dimostrazione. Si fissino le posizioni di ogni vertice fatta eccezione per la posizione di v_1 . Definiamo la 2-sfera $S = \{z \in \mathbb{R}^4 : |z - v_0| = l_0, |z - v_2| = l_1\}$, insieme delle possibili configurazioni di v_0 che conservano le lunghezze dei segmenti. Si osservi che S consiste nell'intersezione di due 3-sfere e, assumendo v_1 non ancora rettificato quindi con angolo $\theta < \pi$ (altrimenti non ci sarebbe nulla da provare), si ha che S non degenera ad un singolo punto, quindi S è necessariamente una 2-sfera. Costruiamo adesso il diagramma dei vincoli $Ob(v_1)$ su S , che contiene ogni posizione di v_0 per le quali:

1. La posizione traguardo s_g di s_0 è intersecata.
2. La catena (v_0, v_1, v_2) interseca la catena fissata (v_2, v_3, \dots, v_n) .

Analizziamo i casi uno alla volta:

1. Posizioni traguardo intersecate

Il segmento traguardo s_g giace sulla semiretta uscente da v_2 che attraversa v_1 , quindi per costruzione s_g è tale da rettificare v_1 . Affinchè s_g intersechi s_i , necessariamente v_i giace in Δ_{2i} (Figura 3.2.), anche se non è vero in generale che ogni $v_1 \in \Delta_{2i}$ porta ad un'intersezione di s_g con s_i . Applicando il Lemma 3.1.3 si osserva che $S \cap \Delta_{2i}$ contribuisce al più con due punti o archi di circonferenza a $Ob(v_1)$, per ogni $i \notin \{0, 1\}$.

2. Intersezioni tra s_0, s_1 e il resto della catena

$Ob(v_1)$ contiene anche tutte le posizioni di v_1 per le quali i segmenti di cui è vertice intersecano qualche segmento del resto della catena. Il segmento $v_1 v_2$ è contenuto nel cono Δ_{2i} , il segmento $v_0 v_1$ è contenuto nel cono Δ_{0i} ; di nuovo questi insiemi contengono tutte le posizioni in cui si hanno ostruzioni, quindi si può applicare, come nel caso precedente, il Lemma 3.1.3.

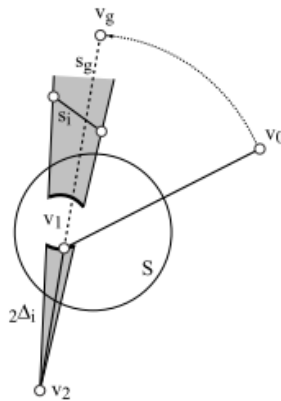


Figura 3.2: Il cono triangolare Δ_{2i} interseca la sfera S al più in due archi di circonferenza.

Sommando sugli indici i si ottiene l'insieme che contiene il diagramma delle ostruzioni $Ob(v_1)$, composto al più da $6(n-2) = O(n)$ punti o archi di circonferenza di S . Così $Ob(v_1)$ è una disposizione di $O(n)$ archi su una

2-sfera, ove la posizione iniziale di v_1 giace almeno su di un arco, perché, per ipotesi, s_g era segmento traguardo intersecato. Infine, un qualsiasi punto $v'_1 \in Ob(v_1)$, all'interno di una cella sul bordo della quale giace v_1 , è un punto che soddisfa l'enunciato. \square

Osservazione 3. E' possibile che v_1 sia confinato all'interno di una cella di $Ob(v_1)$, ma è anche vero che questa cella non rappresenta un impedimento per il moto.

Infatti, per provare la nostra tesi, non necessitiamo dell'esistenza di un cammino da v_1 a un altro punto arbitrario di S , ma è sufficiente che esista almeno un punto v'_1 vicino a v_1 e a questo connesso tramite un cammino tale che la rettificazione di v'_1 conservi la semplicità della catena.

D.Halperin nel 1997 [30] ha pubblicato un algoritmo per costruire $Ob(v_1)$ con complessità temporale pari a $O(n^2)$ e complessità spaziale pari a $O(n^2)$. Per i nostri scopi non è necessario costruire l'intero Diagramma delle ostruzioni, ma è sufficiente trovare una nuova posizione di v_1 che, rendendo libero il segmento traguardo, ci riporti allo Step 1 dell'algoritmo. Per questa ricerca la complessità è minore rispetto a quella dell'algoritmo di Halperin ed è espressa nel seguente Lemma (per la dimostrazione si veda [11], pag.8):

Lemma 3.1.8. *Lo spostamento da v_1 a v'_1 , punto la cui esistenza è garantita dal Lemma 3.1.8, è calcolabile con complessità temporale e spaziale pari a $O(n)$.*

3.1.3 Un algoritmo più efficiente

L'algoritmo 1a appena illustrato è caratterizzato da una complessità totale, in termini di mosse nel senso illustrato in [10], pari a $O(n^4)$ e da una complessità temporale di $O(n^4 \lg(n))$. Si osserva però che una pianificazione generale del moto come quella descritta nell'algoritmo precedente è un lavoro troppo scrupoloso rispetto a ciò che ci è strettamente necessario. Esiste infatti un secondo algoritmo, leggermente più complesso in termini di passaggi logici, ma con una complessità di $O(n)$ mosse e complessità temporale di

$O(n^2)$.

Di seguito daremo solamente alcune linee generali: l'idea di base è quella di spostare l'attenzione dalla posizione assoluta di v_0 alla direzione di rotazione di s_0 .

Sia $w_0 = v_0 - v_1$ il vettore lungo s_0 e $w_g = v_g - v_1$ il vettore lungo s_g . Sia w il vettore traguardo definito come quel versore ortogonale a w_g che rappresenta la direzione di rotazione di s_0 (si veda Figura 3.3.).

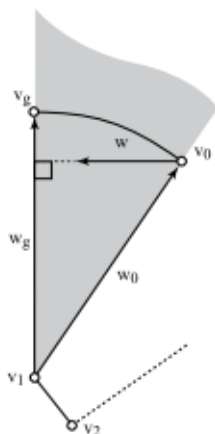


Figura 3.3: Il vettore traguardo w definisce la direzione secondo la quale w_0 dovrebbe ruotare per raggiungere w_g .

Se w non è ostruito allora il cono triangolare (ombreggiato) $\Delta_1(v_0, v_g)$ non interseca nessun altro segmento della catena.

Così si ha che w è l'unico versore che punta nella direzione della componente di $w_g - w_0$ ortogonale a w_g . Lo spazio delle direzioni possibili di w costituisce una 2-sfera, invece che una 3-sfera affrontata nel passo dell'algoritmo precedente. Questo consente di diminuire fortemente la complessità computazionale.

Diamo di seguito le tappe fondamentali dell'algoritmo 1b.

**ALGORITMO 1b: RETTIFICAZIONE
PER CATENE APERTE SEMPLICI**

REPEAT {

1. SE w È LIBERO ALLORA RUOTA DIRETTAMENTE s_0 IN s_g ;
2. ALTRIMENTI SE w È OSTRUITO, ALLORA RUOTA s_0 AD UNA NUOVA POSIZIONE DELLA QUALE w' SIA LIBERO;
3. ALTRIMENTI SE s_g È INTERSECATO, ALLORA MUOVI v_1 IN MODO TALE CHE LA POSIZIONE TRAGUARDO SIA LIBERA;

}UNTIL (LA CATENA È RETTIFICATA);

Chiariamo i termini dell'algoritmo appena illustrato: si ha un *versore traguardo ostruito* w se nella rotazione di s_0 lungo w si verifica un "impatto" con un altro segmento della catena prima dell'arrivo alla posizione traguardo; mentre si ha un *versore traguardo libero* w se w non è ostruito e la sua posizione traguardo è libera.

3.2 Convessificare Catene chiuse in \mathbb{R}^4

Vogliamo illustrare in questa sezione un algoritmo per la convessificazione di catene chiuse sviluppato in [11]. Questo algoritmo si basa sulla struttura di un algoritmo precedente, di Lenhart e Whitesides [28], pubblicato quattro anni prima (1995). In aggiunta però l'algoritmo in [11] esige la conservazione della semplicità durante la convessificazione: questa condizione complica notevolmente il processo.

Definizione 3.7. Siano $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$ cinque vertici consecutivi di una catena poligonale chiusa (eventualmente $v_0 = v_4$). Si definisce *Moto vincolato ad una retta* un moto di v_2 lungo una certa retta L nello spazio che fissa v_0 e v_4 .

Osserviamo che un tale moto è consentito fintanto che gli angoli associati a v_1 e v_3 sono diversi da π (vertici rettificati) e da zero (viene meno la semplicità della catena). Il nostro scopo è quello di utilizzare i moti vincolati ad una retta per rettificare dei vertici.

Sarà perciò importante scegliere una retta L adeguata, sopra cui vincolare il moto: in particolare, la sceglieremo in modo tale che la distanza tra v_2 e v_0 e tra v_2 e v_4 sia monotona crescente: questa condizione è sufficiente ad assicurare che almeno uno tra i vertici v_1 e v_3 venga rettificato. Rimane da provare che questo è possibile senza che venga compromessa la semplicità durante il moto, cioè occorre provare:

Teorema 3.2.1. *Per un braccio robotico semplice (eventualmente chiuso) (v_0, \dots, v_4) in uno spazio 4-dimensionale, esiste un moto di v_2 vincolato ad una retta che rettifica almeno uno tra i vertici v_1 e v_3 , conservando la semplicità della catena durante il moto.*

La prova di questo teorema richiederà diverse considerazioni. Cominciamo col tracciare le linee fondamentali dell'algoritmo di convessificazione:

ALGORITMO 2: CONVESSIFICAZIONE PER CATENE CHIUSE SEMPLICI

REPEAT {

1. CALCOLA LA DIREZIONE DELLA RETTA L SOPRA LA QUALE VINCOLARE IL MOTO DI v_2 ;
2. CALCOLA I MOTI LIBERI π_1 E π_3 PER I VERTICI v_1 E v_3 ;
3. MUOVI v_2 LUNGO L , v_1 LUNGO π_1 , v_3 LUNGO π_3 ;
4. CONSIDERA COME UN UNICO SEGMENTO L'UNIONE DEI DUE SEGMENTI CHE HANNO COME ESTREMO IL VERTICE RETTIFICATO

} UNTIL (LA CATENA È UN TRIANGOLO);

3.2.1 Scegliere la retta vincolante del moto L

Il nostro obiettivo è trovare un punto $q \in \mathbb{R}^4$, $q \neq v_2$ tale che se v_i , $i \in \{1, 3\}$ è il vertice da rettificare, alla fine della trasformazione si ha $v_i \equiv q$ e dunque L è la retta che contiene il segmento qv_2 .

Lemma 3.2.2. *E' sempre possibile trovare $q \in \mathbb{R}^4$ che determina L con complessità computazionale temporale e spaziale di $O(n^4)$.*

Dimostrazione. Cerchiamo q che soddisfi:

1. Muovendo v_2 lungo L la distanza tra v_2 e v_4 e tra v_2 e v_0 aumenta.
2. v_i , $i \in \{1, 3\}$ viene rettificato dal moto, ovvero $|qv_0| = |v_0v_1| + |v_1v_2| = r_0$ oppure $|qv_4| = |v_2v_3| + |v_3v_4| = r_4$.
3. Se $|qv_j| = r_j$, $j \in \{0, 4\} \Rightarrow qv_j$ non interseca nessun segmento della catena, escludendo i due segmenti dei quali diviene unione e un terzo segmento di $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$ ad questi consecutivo, che interseca in un estremo.
4. $qv_2 \cap s_i = \emptyset$, $i > 4$.

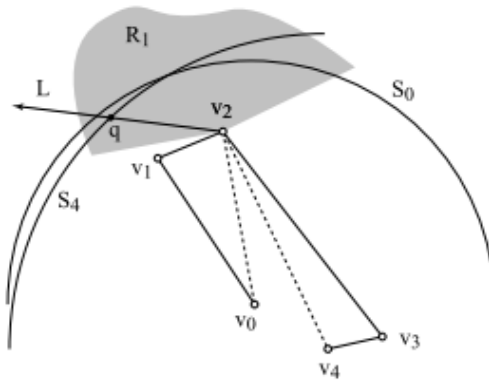


Figura 3.4: La scelta di q determina L . $R_1 \cap R_2 = R_1 \cap (S_0 \cup S_4)$.

Sia R_i la regione dei punti di \mathbb{R}^4 che soddisfano la condizione i . R_1 è l'intersezione di due semispazi chiusi che contengono v_2 , rispettivamente

ortogonali a v_0v_2 e v_2v_4 . Si osservi $v_2 \in R_1$. Se v_0v_2 e v_2v_4 giacciono sulla stessa retta, R_1 degenera a un 3-spazio ortogonale a tale retta; altrimenti consiste in un insieme 4-dimensionale, si veda la Figura 3.4.

$R_2 = S_0 \cup S_4$ è l'unione di due 3-sfere centrate in v_0 e v_4 di raggio r_0 e r_4 . Siccome $|v_0v_2| < r_0$, $v_2 \in D_0$, ove D_0 è l'interno 4-dimensionale di $S_0 \Rightarrow R_1 \cap S_0 \neq \emptyset$. Nello stesso modo, $R_1 \cap S_4 \neq \emptyset$, allora $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$. La dimensione di questo insieme dipende dal fatto che $\{v_0, v_2, v_4\}$ siano allineati o meno: se lo sono, si intersecano in una 2-sfera, altrimenti in una 3-sfera.

Consideriamo il caso in cui venga rettificato v_1 (il caso in cui viene rettificato v_3 è del tutto analogo): cerchiamo l'insieme dei q che verificano le quattro condizioni in alto.

Dalla dimostrazione del Lemma 3.1.7, i punti proibiti del segmento s_i giacciono nel cono triangolare $\Delta_{0i} = \Delta_{v_0}(v_i, v_{i+1})$, così $\bigcap_i \Delta_{0i} \cap R_1 \cap R_2$ è l'insieme dei punti che devono essere esclusi nella scelta del punto q , $\Rightarrow R_3 \supset \mathbb{R}^4 \setminus \bigcup_i \Delta_{0i}$.

Dal Lemma 3.1.3, sappiamo che l'intersezione di Δ_{0i} con le sfere di R_2 consta al più di due punti o archi di circonferenza, indipendentemente dalla dimensione della sfera.

Quindi, in entrambi i casi, che $\{v_0, v_2, v_4\}$ siano allineati o meno, l'intersezione produce un $O(n)$ di punti o archi di circonferenza.

In modo analogo, si mostra $R_4 \supset \mathbb{R}^4 \setminus \bigcup_{i>4} \Delta_{2i}$, poiché qv_2 può intersecare s_i soltanto se q giace in Δ_{2i} . Di nuovo devono essere eliminati $O(n)$ punti o archi di circonferenza in $R_1 \cap R_2$, che non può essere ricoperto da nessuna unione di punti e archi dal momento che consiste in uno spazio 3 o 4-dimensionale.

Così $\bigcap_i R_i \neq \emptyset$; abbiamo dunque provato l'esistenza di q . \square

3.2.2 Spazio delle configurazioni e diagramma dei vincoli nel caso 3-dimensionale

Per fissare le idee, illustriamo, prima nello spazio 3-dimensionale, il procedimento di costruzione dello spazio delle configurazioni e del diagramma dei vincoli. Di conseguenza, come quoziente topologico dei due spazi, si ottiene

lo spazio delle configurazioni libero, del quale si vuole studiare la connessione per archi.

Si ripeterà poi lo stesso procedimento nel caso 4-dimensionale.

Si osservi che nel caso 3-dimensionale il Teorema 3.2.1 è inconsistente, mentre è valido nel caso 4-dimensionale. Proprio questa differenza porterà a osservazioni molto diverse sulla connessione degli spazi delle configurazioni dei due casi.

Si vuole ora parametrizzare la posizione di v_2 lungo L tramite il parametro $t \in [0, 1)$, ove $t = 0$ rappresenta l'istante di partenza del moto e $t = 1$ l'istante in cui v_2 raggiunge q . Supponiamo, senza perdere in generalità, di rettificare il vertice v_1 .

Lemma 3.2.3. *Sia C' lo spazio delle configurazioni della catena isolata $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$, allora si ha che: $C' = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0, 1)$.*

Dimostrazione. Fissiamo t in modo tale che v_2 sia fisso; si ha che v_1 e v_3 sono liberi di ruotare indipendentemente su due circonferenze immerse in \mathbb{R}^3 con i centri che rispettivamente appartengono a v_0v_2 e v_2v_4 . Al variare di t i cerchi si muovono nello spazio variando la posizione del loro centro e il modulo del loro raggio, mentre quando $t = 1$ le circonferenze degenerano ad un punto. \square

Cerchiamo ora di costruire il diagramma dei vincoli considerando come ostacoli soltanto i segmenti della catena che non appartengono a $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$. Svilupperemo il diagramma prima per t fissato, in tal modo $C' = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Dato che stiamo ignorando i primi quattro segmenti della catena come ostacoli, i movimenti sulle due circonferenze sono indipendenti, quindi sarà sufficiente determinare il diagramma delle ostruzioni $Ob(v_1)$ su una 1-sfera S_1 .

Lemma 3.2.4. *Nello spazio 3-dimensionale:*

1. *Se $(v_2 - v_1)(v_1 - v_0) = 0 \wedge (v_2 - v_0)(v_1 - v_0) \neq 0$, allora un segmento della catena può contribuire nel diagramma delle ostruzioni al più con quattro punti.*

2. Se $(v_2 - v_1)(v_1 - v_0) = 0 \wedge (v_2 - v_0)(v_1 - v_0) = 0$, allora un segmento della catena può contribuire nel diagramma delle ostruzioni al più con un arco di circonferenza di S_1 per v_1 .

La dimostrazione verrà illustrata nella prossima sottosezione nella veste più generale del caso 4-dimensionale, precisamente nel Lemma 3.2.6. Sia ora $v_1(t)$ la posizione di v_1 al tempo t .

Il fatto che $v_1(t) \cap Ob(v_1) = \emptyset \quad \forall t \in [0, 1)$ è equivalente al fatto che i segmenti (v_0, v_1, v_2) non incorrano in intersezioni con altri segmenti della catena. Tralasciamo per ora il caso in cui il segmento che contribuisce al diagramma delle ostruzioni è ortogonale a v_0v_2 , allora si ha che un insieme finito di segmenti genera un diagramma delle ostruzioni contenente un numero finito di punti su S_1 : al variare di t questi punti vagano sulla circonferenza, scompaiono, riappaiono, si uniscono e si dividono. Il diagramma delle ostruzioni di v_0 può essere considerato come un insieme di archi sul *tuboide* $\mathbb{S} \times [0, 1)$.

E' chiaro intuitivamente come sia possibile sconnettere lo spazio delle confi-



Figura 3.5: Il punto $v_1(t)$ è "catturato" tra punti di ostruzione sulla superficie del tuboide.

gurazioni: è sufficiente che il diagramma dei vincoli contenga degli archi sul tuboide in modo che non esistano cammini nel complementare del diagramma che portino un punto $v_1(t_1)$ in un altro $v_1(t_2)$. Si osservi nella Figura 3.5

la particolarità di questo tipo di sconnesione: non è necessario che il diagramma delle ostruzioni contenga una curva chiusa per sconnettere lo spazio libero, poiché un cammino che interseca un parallelo del tuboide in due punti distinti rappresenta un braccio robotico che nello stesso istante assume due configurazioni distinte!

3.2.3 Spazio delle configurazioni e diagramma dei vincoli nel caso 4-dimensionale

Riproponiamo il procedimento appena affrontato nel caso 4-dimensionale: osserviamo prima la struttura dello spazio delle configurazioni di (v_0, v_1, v_2) con v_0 fissato, costruiamo il diagramma dei vincoli, unione dei vincoli costituiti dalle configurazioni non semplici della catena, andiamo infine ad osservare come lo spazio libero non può essere sconnesso, provando in questo modo la validità del Teorema 3.2.1.

I movimenti di un vertice della catena (v_0, v_1, v_2) in \mathbb{R}^4 , fissati v_0 e v_2 , corrispondono a \mathbb{S}^2 , ottenuto come intersezione di due 3-sfere. In questo modo, lo spazio delle configurazioni C' della nostra catena di quattro segmenti $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$, per $t \in [0, 1)$, fissati v_0 e v_4 , è equivalente a:

$$C' = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times [0, 1)$$

Al tempo $t = 1$, almeno una delle 2-sfere degenera ad un punto, in particolare quella il cui vertice relativo viene rettificato. Cerchiamo ora l'insieme dei punti di $Ob(v_1)$, come nel caso 3-dimensionale, per i quali (v_0, v_1, v_2) interseca un segmento s_i , $i > 4$. Anche in questo caso $Ob(v_1)$ è costituito da un insieme finito di punti; questo risultato segue dalle possibilità con i quali una retta può intersecare un cono triangolare.

Definizione 3.8. Siano a, b punti di \mathbb{R}^d , $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ un angolo, definiamo un $(d-1)$ -cono $C(a, b, \theta)$ l'insieme dei punti $q \in \mathbb{R}^d$ tali da formare un angolo θ tra i segmenti qa e ab , (ove chiameremo a punto d'apice e b punto d'asse) ovvero l'insieme dei punti $q \in \mathbb{R}^d$ che soddisfano:

$$(p - a)(b - a) = |p - a||b - a|\cos(\theta)$$

Per i valori estremi di θ , $C(a, b, 0)$ è la semiretta che contiene ab , mentre $C(a, b, \frac{\pi}{2})$ è quel $(d-1)$ -spazio ortogonale ad ab passante per a . Si osservi che un 1-cono non corrisponde al cono triangolare definito negli algoritmi delle catene aperte.

In 3 dimensioni, $C(a, b, \theta)$ è la superficie di un cono circolare il cui asse è la semiretta contenente ab con la quale i punti della superficie formano un angolo θ ; la sua intersezione con il piano ortogonale ad ab è una circonferenza. In 4 dimensioni, $C(a, b, \theta)$ è un *cono sferico* la cui intersezione col 3-spazio ortogonale ad ab è una 2-sfera. Vale il seguente Lemma (per la dimostrazione rimandiamo a [11], p. 22):

Lemma 3.2.5. *L'intersezione di un $(d-1)$ -cono $C(a, b, \theta)$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, con una retta, una semiretta o un segmento la cui direzione non contenga l'apice del cono consta al più di due punti.*

Lemma 3.2.6. *In \mathbb{R}^4 se $(v_2 - v_0)(v_1 - v_0) \neq 0 \quad \wedge \quad (v_2 - v_0)(v_1 - v_2) \neq 0$, allora un segmento della catena s contribuisce a $Ob(v_1)$ al più con quattro punti.*

Dimostrazione. v_2 si muove spazzando due coni finiti, troncamenti dei coni infiniti $C(v_0, v_2, \theta_0)$ e $C(v_2, v_0, \theta_2)$ rispettivamente tali che:

$$(v_2 - v_0)(v_1 - v_0) = |v_2 - v_0||v_1 - v_0|\cos\theta_0$$

$$(v_2 - v_0)(v_1 - v_2) = |v_2 - v_0||v_1 - v_2|\cos\theta_2$$

Dalle ipotesi abbiamo $\theta_j \neq \frac{\pi}{2}$, $j = 0, 2$; dunque, possiamo supporre tramite opportune riflessioni $\theta_j \in [0, \frac{\pi}{2})$, e distinguere due casi:

1. La retta contenente s non passa attraverso v_0 né attraverso v_2 .

Le condizioni del Lemma 3.2.5 sono soddisfatte, dunque s interseca i due coni al più in quattro punti, ciascuno dei quali fissa una posizione di v_1 corrispondente ad un'ostruzione cioè ad un punto di $Ob(v_1)$.

2. La retta H che contiene s passa attraverso v_0 (il caso attraverso v_2 è analogo).

E' dunque possibile che $s \cap C(v_0, v_2, \theta_0)$ sia un segmento contenuto in s , poiché il vettore $p - v_0$ forma il medesimo angolo con $v_2 - v_0$ per ogni $p \in s$. In questo caso, s ostruisce l'unica posizione di v_1 posta su H , quindi contribuisce con un unico punto a $Ob(v_1)$.

Siccome l'intersezione con l'altro cono consiste al più in due punti, allora s genera al più 3 punti di $Ob(v_1)$.

□

Il caso escluso dalle ipotesi del Lemma 3.2.6 si riferisce alla situazione nella quale un cono degenera in un piano.

Per questa situazione vale: se $(v_2 - v_0)(v_1 - v_0) = 0$, allora $Ob(v_1)$ è un insieme finito di punti e archi di circonferenza su S_1 , la 2-sfera delle posizioni di v_1 .

Necessitiamo, infine, di un ultimo Lemma per determinare il diagramma delle ostruzioni:

Lemma 3.2.7. *La condizione $(v_2 - v_0)(v_1 - v_0) = 0$ vale al più per un singolo valore di $t \in [0, 1]$, parametro del moto di v_2 lungo L .*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla scelta di L , che garantisce crescente la distanza $|v_0 v_2|$. La funzione del valore dell'angolo $\alpha(t)$ in v_1 rispetto al tempo è continua su un compatto ed è monotona crescente strettamente: se il valore iniziale dell'angolo è minore di $\frac{\pi}{2}$ (il valore finale è π perché il vertice viene rettificato), per il Teorema di Bolzano esiste un valore di t per il quale $\alpha(t) = \frac{\pi}{2}$, altrimenti $\alpha(t) > \frac{\pi}{2} \quad \forall t \in [0, 1]$ □

Si vuole descrivere ora lo spazio delle configurazioni libero e verificare che sia effettivamente connesso nello spazio 4-dimensionale. Sia come nel caso precedente $v_1(t)$ la posizione di v_1 al tempo t sulla 2-sfera S_1 . Lo spazio libero per i moti della catena (v_0, v_1, v_2) è un sottoinsieme di $\mathbb{S}^2 \times [0, 1)$. Per ogni $t \in [0, 1)$ dal Lemma 3.2.6 e dal Lemma 3.2.7 $Ob(v_1)$ è un sottoinsieme di

punti e di archi in particolare finito eccetto al più che per un valore di t . Così se $v_1(t)$ evita queste ostruzioni, allora evita intersezioni con ogni segmento s_i della catena con $i > 3$.

Si vuole mostrare che le ostruzioni non hanno dimensione sufficientemente grande per bloccare $v_1(t)$ in una componente connessa dello spazio delle configurazioni libero. Intuitivamente si può pensare alla sfera delle posizioni possibili per $v_1(t)$, che varia il proprio raggio al variare del tempo t : $v_1(t)$ deve evitare un insieme di punti per ogni istante e forse esiste (ma è comunque unico) quell'istante dove è chiamato ad evitare un insieme di archi di circonferenza. Questo approccio rende evidente l'impossibilità di bloccare $v_1(t)$. Si potrebbe altresì osservare che lo spazio delle configurazioni $\mathbb{S}^2 \times [0, 1)$ è 3-dimensionale, mentre gli elementi di $Ob(v_1(t))$ sono 0-dimensionali oppure 1-dimensionali per ogni istante t ; dunque la rimozione di $Ob(v_0)$ non può sconnettere C' per la dimostrazione del Lemma 3.1.6.

Cerchiamo di formalizzare questo discorso:

Lemma 3.2.8. *Sia C'_1 lo spazio delle configurazioni $C'_1 = \mathbb{S}^2 \times [0, 1)$, allora lo spazio libero $F'_1 \subset C'_1$ per v_1 è connesso per archi.*

Dimostrazione. Consideriamo la 2-sfera S_1 come un piano orizzontale e $[0, 1)$ come un segmento verticale (Figura 3.6). I vincoli, punti di $Ob(v_1)$, divengono al trascorre del tempo cammini continui monotoni rispetto all'asse del tempo. Al più ad un istante $t = t_1$ può esistere un piano su cui giacciono degli archi di circonferenza di $Ob(v_1)$. Data questa situazione dobbiamo provare che per ogni $t' < 1$ esiste un cammino che collega $v_1(0)$ a $v_1(t')$. Distinguiamo due casi:

1. $Ob(v_1)$ contiene solo punti isolati per ogni $t \in [0, 1)$. Sia N il massimo numero di punti di $Ob(v_1)$ in un singolo istante e sia t'' uno qualsiasi degli istanti che presenta N vincoli. Sappiamo che $N < 2n$ e che una 2-sfera alla quale vengono rimossi N punti rimane connessa per archi. Per ogni t , si rimuovano dunque N punti dal corrispondente $S_1(t)$, rimuovendo punti ulteriori negli istanti che ne prevedono un numero minore

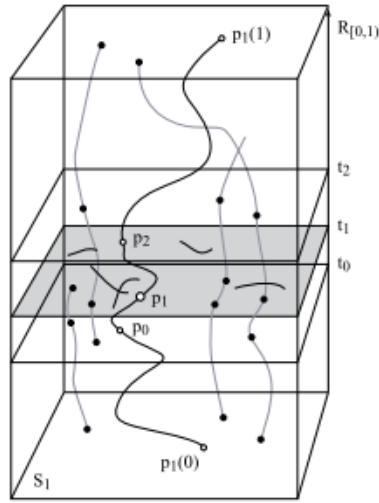


Figura 3.6: Lo spazio delle configurazioni libero F_1 per v_1 è connesso per archi. Il sottospazio (ombreggiato) al tempo $t = t_1$ contiene archi di $Ob(v_1)$.

di N . Ora osserviamo che ogni coppia di 2-sfere private di N punti sono omeomorfe tra loro, dunque F_1' è omeomorfo a $S_1(t'') \times [0, 1]$. Ognuno di questi spazi è connesso per archi e il prodotto di due spazi connesso per archi è ancora connesso per archi.

2. $Ob(v_1)$ contiene archi al tempo $t = t'$. Vogliamo scegliere un punto $p_1 = v_1(t_1)$ che non è ostruito al tempo $t = t'$, dunque connetterlo tramite due archi rispettivamente a $v_1(0)$ e a $v_1(t')$; per incollamento dei due cammini segue la connessione per archi. Di fatto nel punto 1 e' stato provato che $F_- = F$ relativo a $[0, t_1)$ e $F_+ = F$ relativo a $(t_1, 1)$ sono entrambi connessi per archi. Proveremo che $\exists p_0 \in F_-$, $\exists p_2 \in F_+$ tali che esista un cammino che colleghi p_0 a p_2 .

Sia $p_1 \in S_1(t_1)$ un punto libero, che esiste perché, su $S_1(t_1)$, $Ob(v_1)$ consta di un numero solo finito di archi di circonferenza.

Dunque, esiste un intorno $U \subset F_1'$ di p_1 dentro al quale tutti i punti siano liberi. Scegliamo $p_0 \in U \cap S_1(t_0)$ ove $t_0 < t_1$ e $p_2 \in U \cap S_1(t_2)$ ove $t_2 > t_1$. Entrambi i punti sono liberi e si ha, per connessione locale

per archi, che esiste un cammino tutto contenuto in U che collega p_0 a p_2 passando per p_0 ; collegando infine $v_1(0)$ a p_0 e p_2 a $v_1(t)$ si prova l'enunciato.

□

Questi risultati si estendono all'intero spazio delle configurazioni C_1 su $t \in [0, 1]$, andando a studiare la connessione per archi con l'ultimo foglio $t = 1$. La questione è un po' delicata, perché almeno una delle due 2-sfere degenera ad un punto quando v_2 su L si avvicina molto a q . Per questi dettagli rimandiamo a [11]. L'estensione dei risultati a C_1 conclude definitivamente la dimostrazione del Teorema 3.2.1.

3.3 Catene in dimensioni superiori

Abbiamo osservato che in uno spazio 4-dimensionale è possibile rettificare ogni catena aperta e convessificare ogni catena chiusa; a partire da questi risultati vogliamo verificarne la validità in spazi di dimensioni superiori.

Per una catena aperta, possiamo rettificare quattro segmenti alla volta e iterare il procedimento un numero finito di volte fino alla rettificazione dell'intera catena: infatti, in \mathbb{R}^d , quattro segmenti possono generare uno spazio al più di dimensione quattro, dove valgono i risultati precedenti. Anche per le catene chiuse possiamo muovere quattro segmenti alla volta, infatti essi determineranno un k -spazio H con $k \leq 4$ e si avrà $H \subset \mathbb{R}^d$ poiché $d > 4$.

Dobbiamo solamente prestare attenzione a quei segmenti rimanenti che intersecano H , anche se, deformando catene di segmenti, la loro intersezione con H può essere solo un punto oppure un segmento.

Come si è già visto in \mathbb{R}^4 , queste ostruzioni possono essere evitate nel moto. Quindi in $H \subset \mathbb{R}^d$ è possibile completare la rettificazione di questi quattro segmenti conservando rigidità e semplicità. La complessità per questi algoritmi è la stessa del caso 4-dimensionale e questo prova il teorema 3.0.7.

Capitolo 4

Applicazioni in biologia molecolare

Per molto tempo lo studio della teoria dei nodi è rimasto strettamente riservato al campo di matematici e fisici. I primi risultati in chimica derivano dall'interesse nei polimeri aggrovigliati e nel sintetizzare una nuova classe di molecole nelle quali i legami tra gli atomi si possono considerare attraverso un approccio topologico, superando l'approccio fisico dell'interazione tra gli atomi stessi. Una prima molecola annodata fu identificata durante lo studio dell'azione di un enzima, la proteina omega dell'*Escherichia coli*.

La proteina omega si è rivelata essere la prima di una classe di enzimi di interesse attuale chiamata *DNA topoisomerasi*: una classe di enzimi, ovvero proteine funzionalmente attive, che agiscono su sezioni di DNA a forma di anello.

Questo capitolo è dedicato ad illustrare, a titolo di esempio, il contenuto di diversi articoli riguardanti applicazioni della teoria dei nodi di bracci robotici nella biologia molecolare rispettivamente incentrati sulla topoisomerasi e sull'analisi della rigidità di strutture di proteiche. Questi articoli sono testimonianza di una corrente applicativa, sviluppata soprattutto negli ultimi due decenni da alcuni biologi e matematici, tra i quali ricordiamo I.Streinu, Y.Shaw, C.Wang, N.Fox.

4.1 Enzimi topologici per il DNA

La probabilità di trovare nodi di una catena chiusa è tema di interesse nella biologia molecolare, perché esistono strutture biologiche complesse che presentano di fatto grande analogia con i bracci robotici e con le poligoni chiuse. Tramite elaborazioni al calcolatore, in particolare utilizzando il metodo Monte Carlo, è stata calcolata la probabilità di annodamento di certe catene come funzione del numero dei segmenti della catena stessa e delle proprietà solventi nella quale essa è immersa. In questa sezione illustriamo un lavoro di Y.Shaw e C.Wang [9] sulla probabilità della formazione di nodi nella ciclizzazione casuale del DNA *in vitro*, ossia in un ambiente creato appositamente per uno studio sperimentale e non nell'ambiente naturale dell'unità biologica.

In biologia molecolare si parla di *superavvolgimento* del DNA, un processo nel quale il DNA viene distorto come una corda: quando il DNA è in uno stato rilassato, un filamento percorre un giro completo intorno all'asse ogni 10.4 paia di basi; se invece è distorto, il numero di basi può aumentare o diminuire. Lo stato di superavvolgimento in cui si trova una molecola di DNA è definito *topologia*. Se il DNA si avvolge nella direzione dell'elica si parla di superavvolgimento positivo, altrimenti negativo. In natura, la maggior parte delle molecole di DNA presentano un lieve superavvolgimento negativo, introdotto dagli enzimi topoisomerasi.

Le topoisomerasi sono enzimi che presentano sia un'attività nucleasica, cioè in grado di tagliare un filamento del DNA (primo tipo di topoisomerasi) oppure un paio di filamenti nel caso del DNA a doppia elica (secondo tipo di topoisomerasi), che ligasica, cioè in grado di rilegare due filamenti precedentemente tagliati o spezzati. In questo modo si rende possibile il passaggio di un filamento (o due nel secondo caso) attraverso il varco aperto, che viene sigillato immediatamente dopo bloccando il DNA in uno stato topologico differente.

Il DNA con struttura di doppia elica richiede che i due filamenti siano avvolti l'uno intorno all'altro, così, nel DNA circolare chiuso, i due filamenti sono

topologicamente connessi. Una situazione simile si verifica, ad esempio, nel caso dei cromosomi, suddivisi in una quantità di anelli più piccoli. I vincoli topologici impongono che i due filamenti intrecciati siano slegati durante diverse manipolazioni del DNA; è proprio in questo passaggio che intervengono prontamente le topoisomerasi in quasi tutte le transazioni, comprese la replicazione, la trascrizione e la ricombinazione.

Al livello del DNA, la reazione di annodamento o snodamento nella topoisomerasi del secondo tipo coinvolge il passaggio di un doppio filamento di DNA attraverso un varco aperto in un filamento doppio, con un conseguente rovesciamento del nodo.

L'immediatezza con la quale le rappresentazioni matematiche sanno descrivere le reazioni di topoisomerasi e i loro prodotti ha contribuito in modo determinante ad instaurare una sinergia tra la matematica e la biologia molecolare dei nodi nel DNA.

Una questione fondamentale in questo tipo di studi è la stabilità di un certo nodo o, in altri termini, la probabilità che si incorra in un nodo non triviale in una curva chiusa.

Alcuni calcoli, effettuati da Sumners, Whittington e separatamente da Pip-penger su reticoli poligonali, hanno mostrato che quando il numero di segmenti della catena aumenta, la probabilità di avere nodi triviali tende a zero. Si è quindi calcolata, come funzione del numero di segmenti della catena, la probabilità di avere nodi non banali e la complessità stessa dei nodi che si verrebbero a formare. E' stato anche stabilito che le reazioni di topoisomerasi producono annodamenti a livelli molto maggiori rispetto ai valori di equilibrio calcolati grazie al metodo Monte Carlo; questo è possibile, presumibilmente, in quanto il grande eccesso di questi enzimi facilita la sovrapposizione di segmenti di DNA anche distanti tra di loro.

4.1.1 Formazione di nodi del DNA nella ciclizzazione casuale di DNA lineare

Su frammenti di DNA di 5.6 oppure 8.6 paia di kilobasi si hanno condizioni che permettono conversioni reversibili da frammenti lineari di DNA a frammenti ciclizzati, ossia a forma di anello. Inoltre la ri-fusione degli estremi di segmenti ad elica singola è un procedimento piuttosto lento nella reazione di ciclizzazione, che permette il campionamento di un composto stabile di frammenti ciclizzati. Le probabilità di ciclizzazione sono state misurate in relazione alla presenza di *NaCl* e *MgCl₂* in concentrazioni variabili, e si è osservato come la lunghezza del DNA non subisca variazioni significanti sotto queste condizioni.

4.1.2 Formazioni di nodi del DNA *In Vivo*

DNA annodati sono presenti soltanto in cellule con una dotazione normale di topoisomerasi. Si è visto che se un nodo si forma in vivo, ovvero nel proprio ambiente naturale, il secondo tipo di topoisomerasi può catalizzare velocemente la conversione del nodo in una configurazione snodata termodinamicamente più conveniente. Sotto certe condizioni sono stati osservati nodi nel DNA a livelli tra le cinque e le dieci volte maggiori rispetto alle stesse cellule allo stato naturale. Il batterio *Escherichia Coli*, ad esempio, possiede due topoisomerasi dominanti: la DNA topoisomerasi I diminuisce negativamente il DNA superavvolto, la DNA topoisomerasi II (chiamata anche DNA *gyrase*) introduce superavvolgimenti negativi oppure diminuisce i superavvolgimenti positivi. Normalmente l'eliminazione del gene della topoisomerasi I costituisce una mutazione letale.

Esiste, comunque, un insieme di mutazioni compensatorie che introdotte nella cellula ne consentono la sopravvivenza: una classe di queste mutazioni è presente in entrambe le subunità di codificazione dei geni della DNA *gyrase*, conosciute come GyrA e GyrB. Nelle cellule in cui è stato cancellato il primo tipo di topoisomerasi e dove è stata introdotta una mutazione compensatoria

in GyrA oppure in GyrB, il plasmide *pBR322* si annoda a livelli circa dalle cinque alle dieci volte maggiori rispetto alle cellule allo stato naturale.

Per di più, le stesse classi di nodi esistono sia nelle cellule mutanti che in quelle naturali. In altre parole, i nodi osservati sono prevalentemente annodati con torsione negativa e nodi con un numero dispari di torsioni sono presenti in quantità molto maggiori rispetto a quelli con torsioni pari.

Permangono alcuni quesiti aperti relativamente allo studio di queste questioni sui nodi *in vivo*, come ad esempio: l'aumento degli annodamenti è direttamente dipendente dal gene della gyrase mutato, oppure le varie mutazioni della topoisomerasi lasciano intravedere la funzione di un altro enzima, come il tipo II di topoisomerasi nell' *Escherichia Coli*?

Studiare come viene prodotta una classe così impressionante di nodi può veramente aiutare la nostra conoscenza relativamente al modo in cui la mutazione del DNA gyrase altera il funzionamento dell'enzima o lo stato di superavvolgimento intracellulare. Poiché questa mutazione permette la sopravvivenza in presenza di un'altra mutazione letale come quella topoisomerasi I, una comprensione di questa disposizione dei nodi del DNA potrebbe infine facilitare delle ipotesi sul ruolo *in vivo* di entrambi gli enzimi discussi.

Lo studio degli annodamenti del DNA affonda le radici in diverse discipline come la topologia algebrica, la fisica dei polimeri e la chimica. Nell'attesa di arrivare alla completa comprensione del funzionamento della cellula, gli anelli di DNA annodato offrono un'importante veduta sul comportamento e sulle trasformazioni del DNA nella cellula, e sulle proprietà fisiche della doppia elica nei processi della DNA topoisomerasi.

4.2 Progetto KINARI

Kinari-Web [15] è il nome di un web server per le analisi numeriche di flessibilità e rigidità delle proteine ideato da N.Fox, F.Jagodzinski, Y.Li, I.Streinu affiliato al Dipartimento di Computer Science, Università del Massachusetts, USA e Smith College, Northampton, USA.

Questo server gratuito consiste in una serie di strumenti interattivi, scaricabili o utilizzabili direttamente dal sito <http://kinari.linkage.cs.umass.edu>, che permettono di eseguire analisi sulla rigidità o sulla flessibilità delle proteine a partire da una struttura tridimensionale degli agglomerati di molecole d'interesse. Include, inoltre, opzioni per modellare le interazioni tra gli atomi che possono contribuire alla stabilità meccanica della molecola o dell'agglomerato.

KINARI utilizza algoritmi di tipo combinatorio, secondo l'approccio che seguirono per primi Jacobs e Thorpe, e mira a divenire un'applicazione versatile e veloce per testare la stabilità e la rigidità di ogni tipo di struttura molecolare (non soltanto proteine), e facile da integrare all'interno di applicazioni più vaste.

Alla base delle applicazioni utilizzabili, ci sono strutture costruite come bracci robotici, dove le cerniere rappresentano atomi di vario genere mentre i segmenti del braccio sono legami atomici o interazioni. Le strutture poi possono complicarsi fino a divenire alberi, catene poligonali chiuse, strutture molto complesse sul piano o nelle tre dimensioni, i cui movimenti sono legati ai moti espansivi, ai moti infinitesimali e alla teoria della meccanica razionale. Molti studi di biologia molecolare sono stati prodotti proprio grazie a questo software, in particolare alcuni studi sulla sensibilità delle molecole a grappolo rigide di modificarsi in presenza di interazioni non covalenti, per le quali è stato proposto un metodo di classificazione in *critical* o *redundant* (o interazioni in eccesso), basandosi sulla possibilità di rimuovere delle interazioni per rendere la struttura flessibile [17].

Conclusioni

Questa tesi ha esplorato un'area nuova della topologia: la topologia robotica. Più precisamente, quella parte della topologia robotica dedicata allo studio dei nodi di bracci robotici e di catene chiuse, attraverso l'analisi di alcuni articoli pubblicati su riviste scientifiche negli ultimi due decenni.

Sono stati esaminati alcuni risultati fondamentali ottenuti sul piano; sono stati approfonditi alcuni esempi di catene bloccate, di poligonali annodate e snodate bloccate nello spazio; sono stati illustrati algoritmi di rettificazione e convessificazione di catene nello spazio quadridimensionale; si è, inoltre, osservato come i risultati del caso quadridimensionale conservino la loro validità in dimensioni superiori.

Infine sono stati citati due esempi di applicazioni in biologia molecolare.

Chiudiamo con il seguente problema aperto: esistono oggetti di dimensione opportuna che possono bloccarsi in spazi euclidei di dimensione superiore a tre?

Se esistono come sono fatti e quali relazioni sussistono tra le componenti connesse dei loro spazi delle configurazioni quelle relative ai bracci robotici nello spazio tridimensionale?

Bibliografia

- [1] M.Farber, *Invitation to Topological Robotics*, Zurich Lecture Notes in Advanced Mathematics, European Mathematical Society, 2008.
- [2] C.Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, ed. italiana Zanichelli Editore S.P.A., Bologna, 2010.
- [3] D.Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Berkeley, 1974.
- [4] J.Cantarella, H.Johnston, *Nontrivial embeddings of polygonal intervals and unknots in 3-space*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, vol.7, No 8(1998) pp.1027-1039.
- [5] G.Toussaint, *A New Class of Stuck Unknots in Pol_6* , Contribution to Algebra and Geometry, vol. 42(2001), No. 2: pp.301-306.
- [6] T.Fevens, A.Hernandez, A.Mesa, P.Morin, M.Soss, G.Toussaint, *Simple Polygons with an Infinite Sequence of Deflations*, Contribution to Algebra and Geometry, vol. 42(2001), No. 2: pp.307-3011.
- [7] K.Millett, *Knotting of Regular Polygons in 3-space*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, vol.3, No 3(Special Issue, 1994): pp.263-273.
- [8] R. Randell, *An Elementary invariant of Knots*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, vol.3, No 3(Special Issue, 1994): pp.279-286.

- [9] S.Shaw, J. Wang, *Dna Formation in Aqueous Solutions*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, vol.3, No 3(Special Issue, 1994): pp.287-298.
- [10] T.Biedl, E.Demaine, M.Demaine, S.Lazard, A.Lubiw, J.O'Rourke, M.Overmars, S.Robbins, I.Streinu, G.Toussaint, S.Whitesides, *Locked and Unlocked Polygonal Chains in 3D*, Discrete and Computational Geometry, 26(3): pp.283-287, February 2001. reperibile come arXiv:cs.CG/9910009, <http://www.arXiv.org/abs/cs.CG/9910009>.
- [11] R.Cocan, J.O'Rourke, *Polygonal Chains Cannot Lock in 4D*, Proc. 11th Canad. Conf. Comput. Geometry, Vancouver, 1999, pag 5-8, reperibile come arXiv:cs/9908005v3 [cs.CG] 20 Feb 2001.
- [12] T.Biedl, E.Demaine, M.Demaine, S.Lazard, A.Lubiw, J.O'Rourke, S.Robbins, I.Streinu, G.Toussaint, S.Whitesides, *On Reconfiguring Tree Linkages: Trees can Lock*, arXiv:cs/9910024v2 [cs.CG] 29 Sep 2000.
- [13] I.Streinu, *Pseudo-Triangulation, Rigidity and Motion Planning*, Discrete and Computational Geometry, 34(2005) pp.587-635.
- [14] G.Rote, F.Santos, I.Streinu, *Expansive Motions and the Polytope of Pointed Pseudo-Triangulations*, reperibile come arXiv:math/0206027v2 [math.CO] 30 Sep 2002.
- [15] N.Fox, F.Jagodzynski, Y.Li, I.Streinu, *KINARI-WEB: A Web Server for Protein Rigidity and Flexibility Analysis*, website address: <http://kinari.linkage.cs.umass.edu>.
- [16] L.Gagliardini, Rel. M.Ferri, *Nodi Poligonali in Robotica*, Tesi di Laurea Triennale in Topologia, Alma Mater Studiorum Bologna, 2009.
- [17] N.Fox, I.Streinu, *Redundant Interactions in Protein Rigid Cluster Analysis*, Computational Advances in Bio and Medical Sciences (ICCABS), 2011 IEEE 1st international conference.

-
- [18] R.Randell, *A molecular conformation space*, MATH/CHEM/COMP 1987, Studies in Physical and Theoretical Chemistry 54(1988), pp.125-140.
- [19] J.Calvo, *The embedding space of hexagonal knots*, Topology and its Application 110(2) (2000).
- [20] O.Aichholzer, E. Domaine, J.Erickson, F.Hurtado, M.Overmars, M.Soss, G.Toussaint, *Reconfiguring convex polygons*, Computational Geometry 20: pp.85-95 (2001).
- [21] T.Biedl, E.Demaine, S.Lazard, M.Robbins, A.Soss, *Convexifying Monotone Polygons*, Lecture note in Computer Science, pag.415-424, 1999.
- [22] H.Everett, S.Lazard, S.Robbins, H.Schröder, S.Whitesides, *Convexifying Star Shaped Polygons*, Montreal, Canada, 1998, <http://cgm.cs.mcgill.ca/cccg98/proceedings/cccg98-everett-convexifying.ps.gz>.
- [23] R. Connelly, E. Demaine, G.Rote, *Straightenign Polygonal Arcs and Convexifying Polygonal Cycles*, Discrete and Computational Geometry, 30(5), 205-239, 2003.
- [24] J.Cantarella, E.Demaine, H.Iben, J.O'Brien, *An Energy-Driven Approach to Linkage-Unfolding*, Symposium of Computational Geometry, 2004.
- [25] I.Streinu, *A combinatorial approach to planar non-colliding robot arm motion planning*, Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundation of Computer Science, Redondo Beach, California, p.443-453, 2000.
- [26] R.Cocan and J.O'Rourke. *Polygonal Chains cannot lock in 4D*. 11th Canadian Conference of Computational Geometry, pp.5-8, 1999.

- [27] R.Cocan. *Polygonal chains cannot lock in 4D*. Undergraduate thesis, Smith College, 1999.
- [28] J.Lenhart, H.Whitesides, *Reconfiguring closed polygonal chains in Euclidean d-space*, Discrete Computational Geometry, 13:123 - 140,1995.
- [29] C.Adams, *The knot book*. W.Freeman, New York, 1994.
- [30] D.Halperin. Arrangements. In J.Goodman J. O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 21, pages 389-412. CRC Press LLC, Boca Raton 1997.

Ringraziamenti

Grazie alla famiglia fantastica che mi ha sostenuto e mantenuto fino ad ora (e spero ancora per molto tempo).

Grazie al Prof. Ferri per la disponibilità e per la passione con la quale ci ha coinvolto nella topologia algebrica.

Grazie alla Prof. Kogoj per i file Latex e al Guru per la traduzione dei geroglifici di biologia molecolare.

Grazie a Ledo e Lindro. Grazie al Ninja e a Looorrrrrriii, ai ragazzi del Derrick (Dennish!) e al modo serio e professionale con cui perseveriamo nel nostro impegno al caffè università, è un lavoro duro, ragazzi! Prima o poi lo giriamo quel film. E dai dai dai. A ben pensarci ci sono comparse specialiste per il ruolo di Hulk che si potrebbero provare a coinvolgere. Ma poi di chi é questa tesi qui sul comodino?!? ne sai qualche cosa? magari la spiegazione ha a che vedere con le qualità di tua sorella.

Grazie a FiloLogico per l'amicizia sincera che ha tinto insieme al sangiovese i tavolacci delle taverne bolognesi, a Jack per la determinazione, per le innumerevoli edizioni di Riola passate e future, per la correttezza, per le pezze infinite, a Gandalf per averci rappresentato per tre anni, per il teatro, perchè ieri ha smesso con gli origami (é ufficiale??), ad Albe per l'energia, per il trattato di biologia marina sulle funzioni riproduttive dei pesci, per aver dimostrato la banalità del link di Hopf tra bicicletta e catenaccio. Grazie in generale a tutti i ragazzi appassionati di matematica, che spalla a spalla danno corpo mente cuore per riempire di senso ciò che ci muove.

Grazie al mondo Scout e al mondo del Judo, zii di infanzia e adolescenza.
Grazie alle compagnie di domani... ?

*“Oh, certo può sembrare inutile una stazione a chi non parte mai
ma i treni che davvero portan via non han fiori sui sedili
ma da fuori non lo sai, devi entrarci per sapere dove vai...”*

Un cerchio é chiuso, buona strada.