

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**UN MODELLO MATEMATICO
PER LA PERCEZIONE DEL
COLORE**

Tesi di Laurea in
Modelli Matematici per le Scienze Biomediche

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Giovanna Citti

Presentata da:
Martina Vallicelli

VI Sessione
Anno Accademico 2019/2020

Alla mia famiglia ...

Indice

Introduzione	iii
1 Sistema visivo e percezione del colore	1
1.1 Il sistema visivo	2
1.1.1 L'occhio	2
1.1.2 La retina: coni e bastoncelli	4
1.1.3 Il Nucleo Genicolato Laterale	7
1.1.4 La corteccia visiva	7
1.2 La percezione del colore	10
1.2.1 Lo spazio del colore	12
1.2.2 Le cellule cromatiche	16
2 Un modello classico di percezione del colore: il <i>Retinex</i>	19
2.1 Gli esperimenti classici	20
2.2 Modelli di <i>Retinex</i>	26
2.2.1 Il modello di Land e McCann	26
2.2.2 Modelli variazionali di <i>Retinex</i>	29
2.3 Determinazione di minimi di funzionali	35
2.3.1 Il metodo di <i>steepest descent</i>	35
2.3.2 La <i>steepest descent</i> del modello di Morel	41
3 Azione delle cellule sensibili al colore e modello <i>Retinex</i>	45
3.1 I profili recettori delle cellule sensibili al colore	46
3.1.1 Cellule a singola opposenza	46

3.1.2	L'insieme dei profili recettivi delle cellule a singola op- ponenza come gruppo	48
3.1.3	Cellule a doppia opponenza	50
3.1.4	L'insieme dei profili recettivi delle cellule a doppia op- ponenza come gruppo	52
3.2	Dai profili recettori al modello Retinex	55
3.3	Risultati	58
3.3.1	Immagini in bianco e nero	58
3.3.2	Immagine a colori	60
3.3.3	Confronto con metodo <i>steepest descent</i>	65
Conclusioni		69
Bibliografia		71
Ringraziamenti		75

Introduzione

Il sistema visivo umano è altamente elaborato e complesso: è attraverso la visione che riceviamo la maggior parte delle informazioni provenienti dal mondo esterno. Un ruolo di fondamentale importanza è rivestito dal *colore*: esso ci permette di riconoscere, distinguere ed interagire con gli oggetti circostanti. Vi è una chiara distinzione tra quello che viene chiamato stimolo di colore, ossia la radiazione luminosa che raggiunge la retina, e quello che è il *colore percepito*, cioè il risultato dei complessi meccanismi di analisi e percezione del sistema visivo umano.

La *percezione visiva* avviene attraverso una serie di processi che implicano non solo fattori fisiologici, ma anche una complessa rielaborazione dei segnali luminosi da parte del cervello. La prima tappa di questi processi ha sede negli occhi: essi sono responsabili della ricezione e traduzione dell'energia in un segnale nervoso. Questo segnale viene poi elaborato nella corteccia cerebrale, dove si attivano i neuroni sensibili alle varie caratteristiche fisiche e cognitive degli stimoli. In realtà è solo a questo punto che si può parlare di percezione, perché gli stimoli cominciano ad acquisire un significato solo una volta elaborati dal nostro cervello.

Scopo di questa tesi è la presentazione di un modello matematico per la percezione dei colori. In particolare, ci soffermeremo sull'azione di una classe ben precisa di cellule neuronali responsabili della visione cromatica.

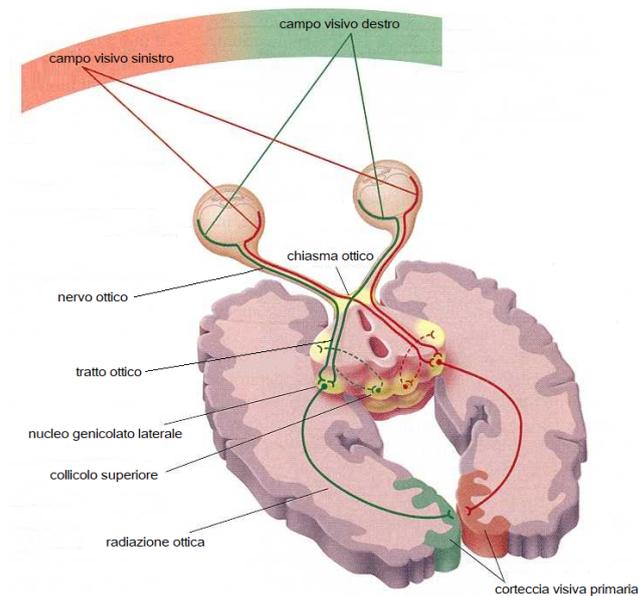


Figura 1: Le vie visive: dalla retina alla corteccia.

Nel primo capitolo daremo una breve descrizione del meccanismo che sta alla base della visione e della percezione dei colori, dando anche nozioni dal punto di vista anatomico e funzionale del sistema visivo umano (seguendo [27], [4]).

Nel secondo capitolo presenteremo la teoria *Retinex* introdotta da Land e McCann ([12]) e riporteremo i modelli di Kimmel ([7]) e Morel ([21]) che esprimono il problema come minimi di funzionali. Per questo tratteremo in particolare anche il metodo della *steepest descent* in spazi infinito dimensionali, metodo che permette la determinazione dei minimi di funzionali ([1]).

Infine, nel terzo capitolo presenteremo un modello matematico di percezione dei colori, che tiene conto dei profili recettori delle cellule neuronali cromatiche (in accordo con [23], [3]). Verrà data una sua implementazione con software Matlab al fine di verificare nella pratica la correttezza del modello proposto.

Capitolo 1

Sistema visivo e percezione del colore

Il **colore** non è una proprietà intrinseca della materia, ma esiste solo nella nostra mente: è una risposta percettiva alla luce che si riflette sugli oggetti e che entra poi nei nostri occhi. Il colore, quindi, non è una caratteristica del mondo reale, bensì il risultato di un fenomeno fisico a cui segue un fenomeno biologico.

La luce è una forma di energia. In particolare, è quella parte dello spettro elettromagnetico a cui i nostri occhi sono sensibili. Il sistema visivo umano è in grado di rilevare solo una banda molto stretta di lunghezze d'onda nell'intervallo approssimativo di 390-780 nm, come mostrato in Figura 1.1.

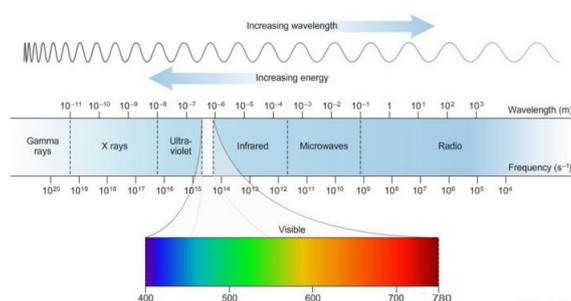


Figura 1.1: L'intero spettro elettromagnetico.

1. Sistema visivo e percezione del colore

Riportiamo di seguito una breve descrizione in termini fisiologici del sistema visivo umano e dei processi coinvolti nella visione dei colori.

1.1 Il sistema visivo

Il sistema visivo è costituito da due organi sensoriali, gli occhi, e dalla parte del sistema nervoso centrale necessaria per la percezione visiva, cioè responsabile della ricezione, elaborazione e interpretazione delle informazioni visive.

Si possono distinguere tre unità principali: la *retina*, il *nucleo genicolato laterale* e la *corteccia visiva*.

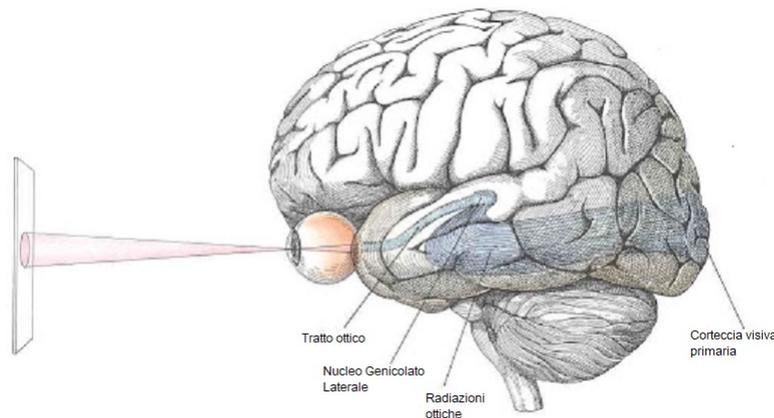


Figura 1.2: Il sistema visivo: dall'occhio al cervello.

1.1.1 L'occhio

L'occhio propriamente detto, ossia il *bulbo oculare* è un organo di forma approssimativamente sferica, il cui contenuto è dato da fluidi detti umori, e la cui parete è costituita da tre membrane sovrapposte:

- la *tonaca fibrosa* che rappresenta l'involucro più esterno e si differenzia in sclera, bianca ed opaca, e in cornea, trasparente;

1.1. Il sistema visivo

- la *tonaca vascolare* o *uvea* situata tra la tonaca fibrosa e quella nervosa, membrana connettivale molto ricca di vasi sanguiferi, la cui funzione principale è quella di assicurare un'adeguata nutrizione alla retina. Si suddivide in tre parti: la coroide, il corpo ciliare e l'iride;
- la *tonaca nervosa* o *retina* che è la membrana più interna.

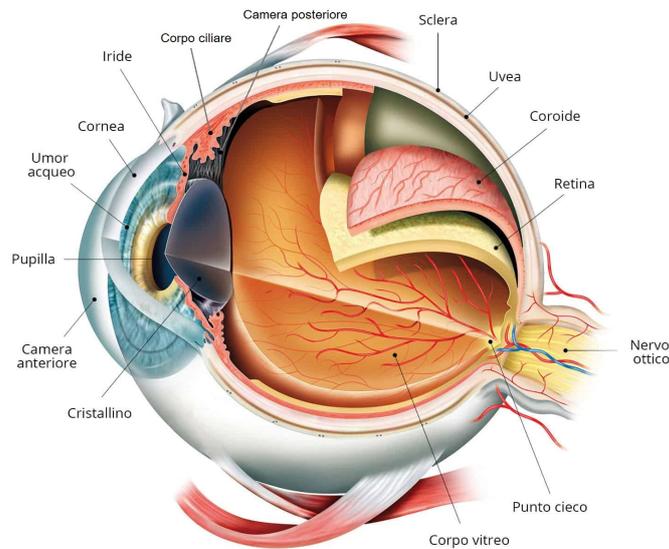


Figura 1.3: Rappresentazione schematica dell'occhio umano.

Collocata posteriormente alla cornea si trova l'*iride*, lamina circolare che suddivide l'occhio in una camera anteriore, che contiene l'umor acqueo, liquido salino, e in una camera posteriore. L'iride ha una struttura pigmentata, la parte colorata dell'occhio. Si presenta come un disco circolare con un foro nella parte centrale chiamato *pupilla*, che regola l'ingresso dei raggi luminosi variando il suo diametro. Le fibre muscolari lisce che formano l'iride costituiscono il diaframma dell'occhio (simile a quello di una macchina fotografica). Infatti, l'iride regola la quantità di luce che entra nell'occhio, così da consentire di vedere in modo ottimale in varie condizioni di luminosità. Nella visione da vicino e in condizioni di luminosità, la muscolatura circolare si contrae e la pupilla si restringe; nella visione da lontano con scarsa luminosità si contraggono le fibre radiali per dilatare la pupilla, il che permette

1. Sistema visivo e percezione del colore

l'entrata nell'occhio di una maggiore quantità di luce.

Il *cristallino*, invece, è una lente biconvessa, elastica e trasparente che si trova posteriormente all'iride e anteriormente al corpo vitreo, il tessuto connettivo che occupa la cavità del globo oculare tra il cristallino e la retina. Il cristallino ha la funzione di far convergere e mettere a fuoco sulla retina i raggi provenienti a diverse distanze dall'esterno, adattando così l'occhio alla visione di oggetti lontani e vicini. Questa azione avviene mediante una variazione di curvatura della sua superficie determinata dalla contrazione e/o rilasciamento del muscolo ciliare, il muscolo dell'accomodazione visiva.

1.1.2 La retina: coni e bastoncelli

La *retina* costituisce la membrana più interna dell'occhio, avente una funzione nervosa e sensoriale: è deputata alla trasformazione degli stimoli luminosi in segnali nervosi e alla trasduzione di questi ultimi alle strutture cerebrali. La retina è suddivisa in 10 strati di neuroni e di cellule, il secondo strato contiene cellule specializzate, note come *bastoncelli* e *coni*, più precisamente detti fotorecettori perchè stimolati dalla luce. I segnali elettrici dai fotorecettori vengono trasmessi attraverso una catena bineuronale (cellule bipolari e poi cellule gangliari), quindi abbandonano la retina mediante il nervo ottico sottoforma di impulsi nervosi che alla ne raggiungono la corteccia visiva. Il risultato è la visione.

I fotorecettori sono distribuiti su tutta la retina sensitiva tranne del punto in cui il nervo ottico (formato dagli assoni delle cellule gangliari) emerge dal bulbo oculare; questa zona è denominata *punto cieco*; infatti, quando la luce proveniente da un oggetto è focalizzata nel disco, scompare dalla visione e quindi non si vede.

I bastoncelli sono più numerosi alla periferia, ossia ai margini della retina e diminuiscono di numero verso il centro; essi permettono di vedere non a colori, ma con diverse tonalità di grigio in condizioni di luce crepuscolare. È noto che i bastoncelli contengono un composto pigmentato: la rodopsina. I coni sono recettori che in condizione di luce piena, forniscono un'elevata ca-

1.1. Il sistema visivo

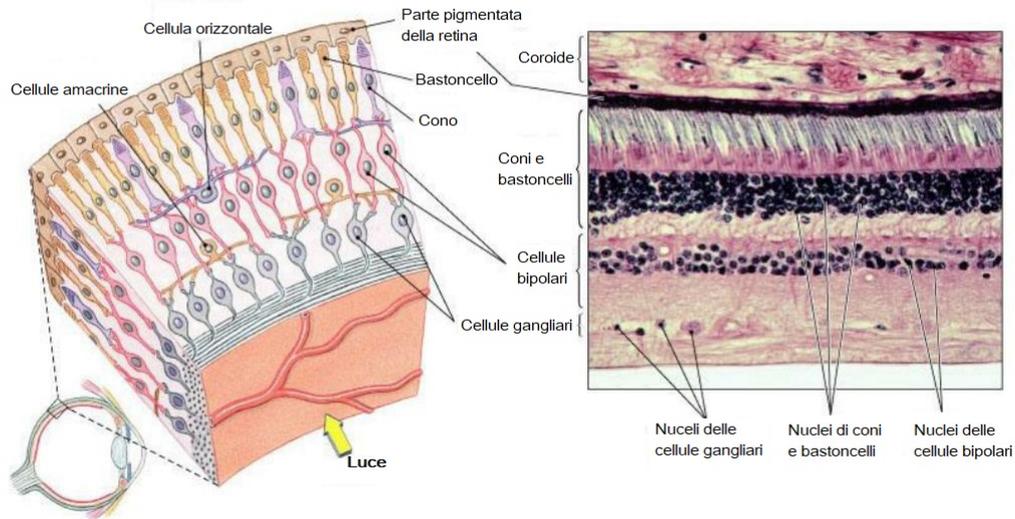


Figura 1.4: Rappresentazione schematica della retina.

pacità di discriminazione visiva, consentendo di vedere a colori nei dettagli il mondo circostante. Essi sono più ttamente addensati nel centro della retina e il loro numero diminuisce verso la periferia. Lateralmente al punto cieco si trova la fovea centrale, una minuscola depressione che contiene soltanto coni; di conseguenza questa zona è l'area di massima acuità visiva, ossia il punto dove la vista è più acuta, e difatti tutto ciò che si vuole vedere distintamente viene focalizzato sulla fovea. Anche i coni contengono una sostanza chimica fotosensibile, la iodopsina e probabilmente anche altre, ma quali esse siano in realtà non è ben noto ad oggi.

In relazione alla lunghezza d'onda dello spettro luminoso alla quale sono sensibili si distinguono tre categorie di coni:

- coni **L** (Long): sensibili a lunghezze d'onda lunghe;

1. Sistema visivo e percezione del colore

- coni **M** (Medium): sensibili a lunghezze d'onda medie;
- coni **S** (Short): sensibili a lunghezze d'onda corte.

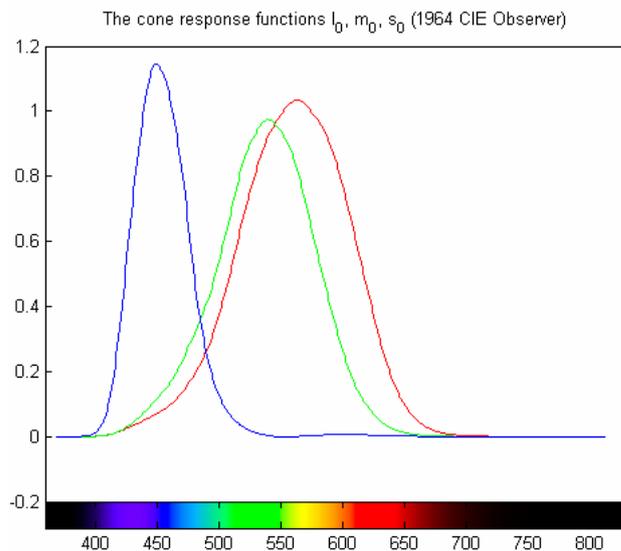


Figura 1.5: Spettro di assorbimento delle tre classi di coni.

Precisamente i coni S rispondono massimamente alla luce blu (437 nm), i coni M alla luce verde (533 nm), mentre i coni L rispondono massimamente a lunghezze d'onda di 564 nm, che includono sia il verde che il rosso. I coni non sono tuttavia sensibili solo alla lunghezza d'onda centrale, ma rispondono con intensità minore ad un intervallo di lunghezze centrato attorno a quella centrale.

Al di fuori dell'intervallo compreso tra 390 e 780 nm, che consideriamo quello della luce, non percepiamo nulla, per questo motivo non siamo in grado di vedere le radiazioni infrarosse e ultraviolette.

La risposta di ogni classe di cono può essere stimata dall'integrazione sullo spettro visibile della sensibilità spettrale del fotopigmento del cono e della distribuzione spettrale dell'energia nel segnale a colori che entra l'occhio ([28]). Se rappresentiamo la riflettanza con $P(\lambda)$, la sorgente di luce $E(\lambda)$ e le sensibilità spettrali dei coni $\Phi_L(\lambda)$, $\Phi_M(\lambda)$ e $\Phi_S(\lambda)$ ciascuna con funzioni

1.1. Il sistema visivo

discrete ad un certo numero di lunghezze d'onda, allora le risposte del cono possono essere calcolate dalle seguenti semplici equazioni:

$$\begin{aligned}L &= \sum E(\lambda)P(\lambda)\Phi_L(\lambda), \\M &= \sum E(\lambda)P(\lambda)\Phi_M(\lambda), \\S &= \sum E(\lambda)P(\lambda)\Phi_S(\lambda),\end{aligned}\tag{1.1}$$

1.1.3 Il Nucleo Genicolato Laterale

Il *nucleo genicolato laterale*, che indicheremo in seguito con la sigla LGN (dall'inglese Lateral Geniculate Nucleus), è una porzione del talamo preposta allo smistamento delle informazioni visive provenienti dal tratto ottico, una continuazione del nervo ottico. Attraverso il LGN passano quasi tutti gli input sensoriali verso la corteccia, ad eccezione di quelli olfattivi. Nella proiezione dalla retina al LGN vengono preservate le caratteristiche topografiche dello stimolo (ordine retinotopico): gli assoni provenienti dalla retina si connettono con i neuroni del LGN secondo un ordine preciso, in base alla posizione dei relativi neuroni sulla retina. Dai neuroni del LGN partono poi le fibre nervose dirette alle corteccia visive primarie, situate nella parte posteriore del cranio, dove l'elaborazione dei segnali visivi viene perfezionata rendendo possibile la percezione cosciente.

1.1.4 La corteccia visiva

Il percorso neurale iniziato nell'occhio termina nella corteccia visiva, situata posteriormente nel nostro cervello, nel lobo occipitale.

La corteccia visiva è suddivisa tipicamente in sei aree (V1-V6) in base a funzioni e struttura. La prima area della corteccia visiva è la cosiddetta area 17 (secondo la classificazione di Brodmann), detta *corteccia visiva primaria* (V1); qui si innervano le terminazioni provenienti dal LGN e viene rappresentato in modo abbastanza dettagliato circa metà a campo visivo.

1. Sistema visivo e percezione del colore

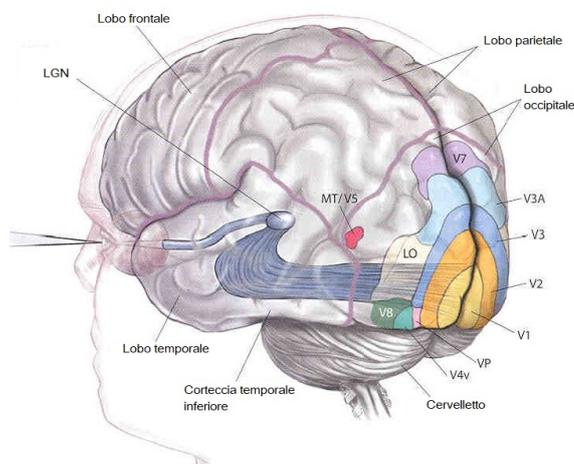


Figura 1.6: La corteccia cerebrale e le aree preposte alla visione.

Nel corso degli ultimi decenni sono stati numerosi gli studi sperimentali volti a spiegare l'organizzazione funzionale della corteccia visiva. Hubel e Wiesel per primi riscontrarono un'ordinata organizzazione periodica di unità funzionali, dette colonne, contenenti neuroni selettivi ad un particolare orientazione. Il modello da loro introdotto prende nome di “*ice cube*” (Figura 1.7). L'insieme di colonne verticali corrispondenti ad una sequenza completa di orientazioni (un periodo), secondo la terminologia adottata da Hubel e Wiesel, prende il nome di **ipercolonna**. In questo spazio anatomico si trova un'altra organizzazione che si riferisce alla dominanza oculare. I neuroni della corteccia, infatti, o sono monoculari e rispondono quindi solo a un determinato occhio o, pur essendo binoculari, rispondono più vigorosamente a uno dei due occhi. Si è trovato che le cellule che rispondono principalmente a un occhio sono raggruppate in colonne, dette **colonne della dominanza oculare**. In ogni ipercolonna sono rappresentati tutti i possibili orientamenti e sono presenti due colonne di dominanza oculare, una per l'occhio destro e una per il sinistro. L'ipercolonna è quindi un raggruppamento di cellule che unisce i due campi visivi e possiede le proprietà per analizzare oggetti di tutti gli orientamenti in una determinata zona del campo visivo. Centrati all'interno di ogni colonna di dominanza oculare si trovano i **blobs**, insiemi di cellule

1.2 La percezione del colore

La nostra moderna comprensione del colore inizia con una serie di esperimenti condotti da Sir Isaac Newton alla fine del 1660. Prima dei suoi esperimenti, la gente credeva che il colore fosse un misto di luce e oscurità. Hooke, l'antagonista di Newton, era un sostenitore di questa teoria. Newton ribaltò questa teoria con l'uso del prisma. In un esperimento rivoluzionario, prima scisse la luce nel suo spettro e poi la rifratturò di nuovo insieme. Riformando la luce originale, egli dimostrò che la luce stessa era responsabile del colore. Gli esperimenti di Newton hanno portato alla comprensione della natura del colore, ma non hanno detto nulla su come lo vediamo.

La **Teoria Tricromatica** della visione del colore, proposta per la prima volta dal fisico inglese Thomas Young nel 1802, è stata la prima teoria ampiamente accettata di come vediamo effettivamente i colori. Young formulò l'ipotesi che la nostra visione fosse tricromatica, cioè che affinché il nostro occhio potesse discriminare i colori delle varie regioni dello spettro, fossero sufficienti tre sole sensazioni distinte, risultanti dalla stimolazione della retina da parte di tre colori puri (rosso, verde e violetto). Tale teoria fu ripresa successivamente da Helmholtz, secondo cui ognuno dei tre meccanismi doveva essere sensibile a tutte le radiazioni dello spettro, ma in modo differenziale. L'ipotesi tricromatica di Young-Helmholtz ha trovato conferma solo nel 1964, quando si è dimostrato che nella retina esistono tre tipi di coni che contengono sostanze fotosensibili diverse. I tre pigmenti assorbono in percentuali diverse le radiazioni dello spettro, ma la loro sensibilità è massima ad una precisa lunghezza d'onda. Quando una radiazione monocromatica incide sulla retina, essa viene assorbita in percentuali diverse dai tre tipi di coni, stimolandoli in modo diverso. Mentre la teoria tricromatica del colore spiega molti aspetti della generazione del colore, essa è seriamente carente quando si tratta della percezione umana del colore. Possiamo usarla per simulare i colori, ma non spiega perché ci sono certi colori che non vediamo mai insieme.

1.2. La percezione del colore

Nel XIX secolo il fisiologo Edwald Hering propose un modello diverso per la visione dei colori. Egli propose la **Teoria dell'opponenza cromatica** che ora accettiamo come generalmente corretta. Hering ipotizzò che i segnali tricromatici dei coni fossero soggetti a successive elaborazioni neurali. Secondo questa teoria i tre colori primari si distribuirebbero in tre coppie di colori mutuamente antagoniste: rosso-verde, blu-giallo, bianco-nero; queste coppie di colori sarebbero rappresentate nella retina in tre distinti canali nervosi di opponenza cromatica.

Successivamente grazie agli studi di Leo Hurvich e Dorothea Jameson la teoria dell'opponenza cromatica è ad oggi confermata e non viene più messa in discussione. Il modello moderno di come gli esseri umani (e gli altri primati) vedono i colori incorpora sia la teoria tricromatica che la teoria dell'opponenza cromatica. Il primo stadio, quello tricromatico, può essere considerato come lo stadio del recettore, che consiste dei tre coni L, M, S. Il secondo è lo stadio di elaborazione neurale ed è qui che si verifica l'opponenza cromatica. Inizia già dal primo strato post-recettoriale nella retina e continua attraverso il sistema visivo fino alla corteccia visiva stessa.

La Figura 1.8 mostra in termini generali il meccanismo dell'opponenza cromatica. I segnali captati dai coni si mantengono separati lungo tre canali, un canale acromatico e due canali cromatici:

- canale Bianco-Nero (luminanza);
- canale Rosso-Verde;
- canale Blu-Giallo.

Successivamente le informazioni portate da tali circuiti vengono elaborati a livello della corteccia visiva portando alla percezione del contrasto (relativamente al canale acromatico) e alla percezione dei colori.

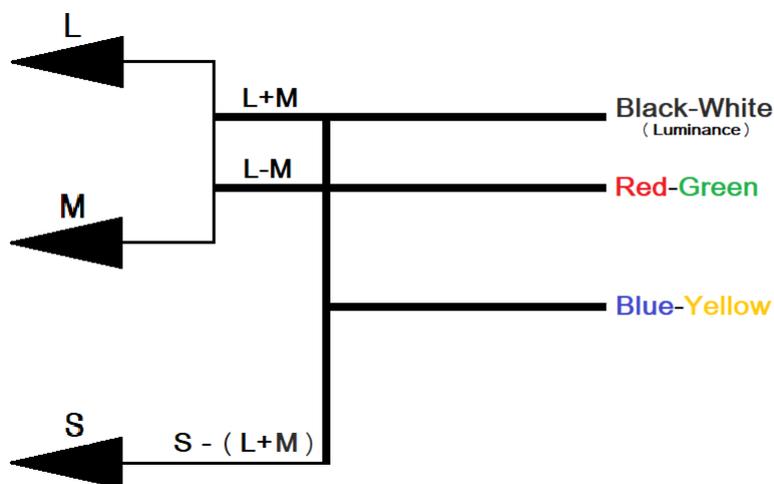


Figura 1.8: Meccanismo alla base della percezione dei colori.

1.2.1 Lo spazio del colore

I colori sono essenzialmente un'interpretazione del cervello umano applicata alla limitata informazione spettrale ricevuta dagli occhi. La relazione tra la percezione del colore e la sua base fisica è abbastanza complicata e soggetta a vari fattori variabili. Tuttavia, un'ampia ricerca ha stabilito modi per specificare oggettivamente i colori percepibili con valori in certi spazi di colore.

Nel 1931 la CIE (*Commission Internationale de l'Éclairage* = Commissione Internazionale per l'Illuminazione) ha definito gli spazi colore **CIE 1931 RGB** e **CIE 1931 XYZ**, riferimento generale e la base per la definizione di altri spazi di colore.

Tali spazi colore derivano da una serie di esperimenti fatti alla fine degli anni Venti da William David Wright e John Guild. I risultati sperimentali sono stati combinati nelle specifiche dello spazio colore CIE RGB, da cui è derivato lo spazio cromatico CIE XYZ.

L'idea dello spazio di colore RGB è davvero quella di attenersi al principio della visione umana e rappresentare i colori come una semplice somma di

1.2. La percezione del colore

qualsiasi quantità (da 0 a 1) dei colori primari (rosso, verde e blu). Come tale può essere rappresentato come un semplice cubo (figura 1.9) dove tre dei vertici rappresentano i colori primari. Muovendosi in una direzione lungo i vertici di questo cubo si ottiene la miscelazione di due dei colori primari insieme che porta, quando si raggiunge il vertice del cubo opposto ai due colori primari, a un colore secondario (ciano, magenta o giallo). Due dei vertici del cubo sono speciali perché corrispondono al bianco (quando i tre colori primari sono mescolati insieme in piena quantità) e al nero (assenza di uno dei tre colori primari). Questi vertici definiscono una diagonale lungo la quale tutti i colori sono grigi (scala di grigi). Si noti qui che si parla di colore in termini della loro cromaticità, non in termini della loro possibile luminosità.

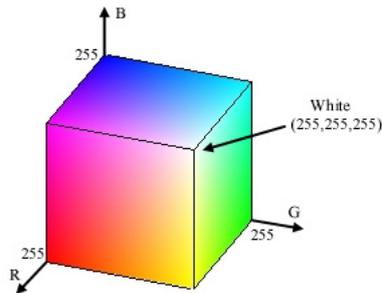


Figura 1.9: Cubo dei colori nello spazio RGB: componenti reali fra 0 e 1, discrete fra 0 e 255.

Dal risultato di questo esperimento, hanno tracciato la quantità di luce primaria rossa, verde e blu necessaria per rappresentare ogni colore dello spettro visibile. Il risultato di questo esperimento fornisce tre curve conosciute come le funzioni di corrispondenza dei colori dell'osservatore standard CIE (in letteratura si può parlare di osservatore standard CIE 1931 2°).

Lo spazio CIE XYZ formalizza le caratteristiche di percezione cromatica dell'osservatore standard, tramite curve di sensibilità standard. Si tratta di tre funzioni (figura 1.10) \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} definite nell'intervallo di lunghezze d'onda $[390, 780]nm$.

1. Sistema visivo e percezione del colore

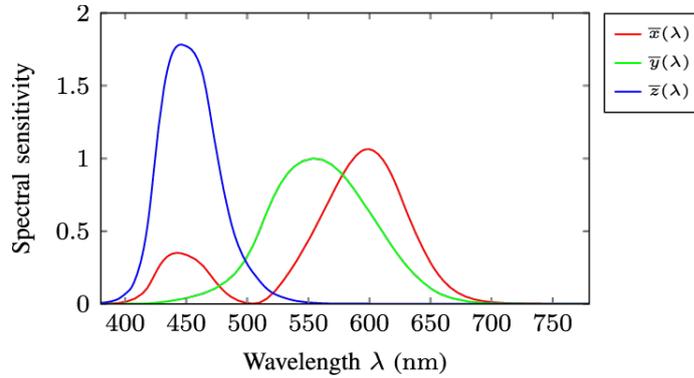


Figura 1.10: Funzioni di corrispondenza dei colori dell'osservatore standard CIE 1931.

A partire dalle curve di sensibilità standard il CIE introdusse un metodo univoco per convertire la radianza spettrale di una radiazione elettromagnetica compresa nello spettro luminoso, in tre valori X, Y, Z, detti valori di tristimolo del segnale luminoso, ossia:

$$X = K_{max} \int_{380}^{780} L_e(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda$$

$$Y = K_{max} \int_{380}^{780} L_e(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda$$

$$Z = K_{max} \int_{380}^{780} L_e(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda$$

dove $K_{max} = 683 \text{ lmW}^{-1}$ è il valore massimo di efficacia luminosa, L_e indica lo spettro della sorgente luminosa e \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} lo spettro di assorbimento per il diverso tipo di cono.

Al fine di separare l'informazione inerente la quantità di energia della luce percepita dalla sola informazione inerente la cromaticità, la CIE ha poi introdotto le coordinate cromatiche x, y:

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad y = \frac{Y}{X + Y + Z},$$

1.2. La percezione del colore

Matematicamente x e y risultano dalla trasformazione proiettiva dei valori di tristimolo in un piano bidimensionale. Lo spazio del colore che ne deriva, caratterizzato dalle coordinate x , y e Y , è conosciuto come **CIE xyY** . Quindi, tutte le caratteristiche di un segnale luminoso possono essere individuate tramite la terna di valori (x, y, Y) , che individua univocamente il colore tramite le coordinate di cromaticità e la luminosità (l'energia) dello stesso tramite la luminanza totale Y . Tutti i possibili valori di cromaticità possono essere rappresentati in un piano di assi x e y : questo è chiamato il diagramma di cromaticità CIE xy , rappresentato in figura 1.11.

Lo spazio di colore CIE XYZ (di conseguenza anche il diagramma di cromaticità CIE xy) soffre di alcune limitazioni in termini di percezione dei colori, poichè la distanza tra due punti nello spazio XYZ o nel diagramma xy non è proporzionale alla differenza percepita tra i colori corrispondenti ai punti. Ciò è stato espresso da MacAdam, con opportune ellissi che indicano zone di indistinguibilità del colore determinate sperimentalmente nello spazio cromatico (x, y) . Si può notare la diversa estensione e inclinazione nelle varie zone del diagramma. Dato che ogni punto del diagramma corrisponde ad una terna di stimolo, si può dedurre che, per esempio, nelle zone del verde rispetto al blu, un numero decisamente maggiore di triplette producono la stessa sensazione di colore o perlomeno sensazioni tra loro indistinguibili. Questo non vuole dire che gli esseri umani sono meno sensibili al verde rispetto al blu, bensì che le funzioni che mappano la distribuzione spettrale nella tripletta di stimolo non sono percettivamente lineari. Una soluzione a questo problema potrebbe essere quella di deformare lo spazio (x, y) e renderlo più lineare percettivamente. Furono così proposti dal CIE altri due spazi cromatici: il Luv e il Lab.

Un ulteriore spazio di colore che utilizzeremo nel seguito è lo spazio **HSV** (*Hue, Saturation, Value*), un modello di colore cilindrico che rimappa i colori primari RGB nelle dimensioni di tonalità, saturazione e valore. La tonalità o tinta specifica l'angolo del colore sul cerchio dei colori RGB,

1. Sistema visivo e percezione del colore

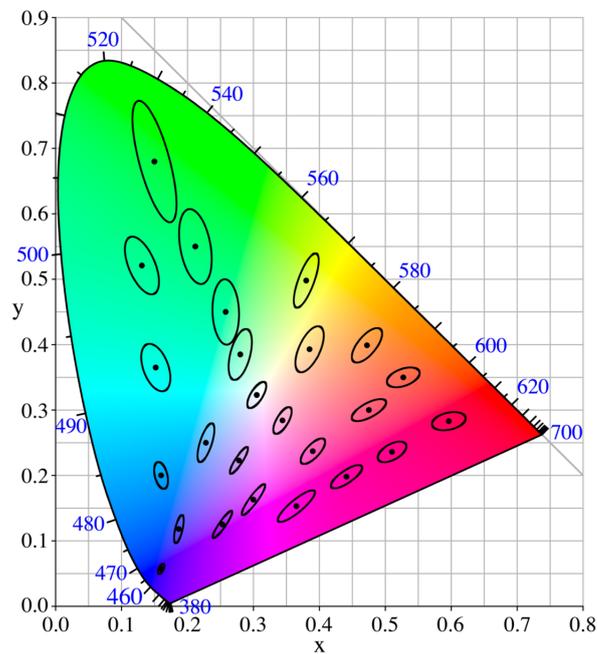


Figura 1.11: Diagramma di cromaticità xy con ellissi di MacAdam.

la saturazione controlla la quantità di colore usata e il valore controlla la luminosità del colore.

1.2.2 Le cellule cromatiche

I segnali captati dai coni seguono i tre canali percettivi, rimanendo sempre ben distinti e separati. Il primo livello di elaborazione dei segnali avviene da parte di diverse classi di cellule gangliari della retina e successivamente queste li inviano tramite i loro assoni al nucleo genicolato laterale (LGN). Quest'ultimo invia il messaggio alla **V1**, la corteccia visiva primaria.

Le cellule responsabili della percezione del colore si suddividono in due tipi:

- cellule a **singola opponenza**;
- cellule a **doppia opponenza**.

1.2. La percezione del colore

Le cellule cromatiche a singola opponenza sono le cellule gangliari retiniche, cellule del LGN e sembrerebbe alcune cellule presenti nella V1. Quelle a doppia opponenza, invece, si trovano esclusivamente nella V1. Questi due tipi di cellule rivestono rispettivamente ruoli differenti nella percezione del colore e ciò è dovuto anche al diverso tipo di campo recettivo che presentano. Le prime rispondono a grandi aree di colore, mentre le seconde sono più sensibili a pattern, texture e bordi colorati.

In seguito esamineremo nel dettaglio i campi recettivi e i profili recettivi di entrambi i tipi di cellule cromatiche opponenti e ne daremo una modellizzazione.

Capitolo 2

Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

Ad oggi numerose sono le ricerche degli scienziati che si sono assunti l'arduo compito di modellare il sistema visivo umano, al fine di comprendere al meglio i meccanismi che si celano dietro la percezione del colore. Un fenomeno che ha suscitato particolare interesse è quello della *costanza del colore*, ovvero la capacità del nostro sistema visivo di percepire il medesimo colore di un oggetto, nonostante cambiamenti nelle condizioni di illuminazione.

Un esempio di questo fenomeno percettivo è mostrato nella Figura 2.1(a), nella quale sono rappresentati due cubi identici formati da varie tessere colorate, però illuminati rispettivamente da luci di colore diverso. Se consideriamo, ad esempio, le tessere che ci appaiono rosse nel cubo che è sotto l'effetto di un'illuminazione giallastra, queste ci appaiono rosse anche nel cubo in cui l'illuminazione tende al blu. Nonostante ci sembrino del medesimo colore, queste non lo sono, così come raffigurato nella Figura 2.1(b).

Gli scienziati hanno tentato di spiegare come l'occhio, a differenza della macchina fotografica, veda gli stessi colori in condizioni di illuminazione diverse, creando algoritmi informatici in grado di imitare il sistema visivo

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

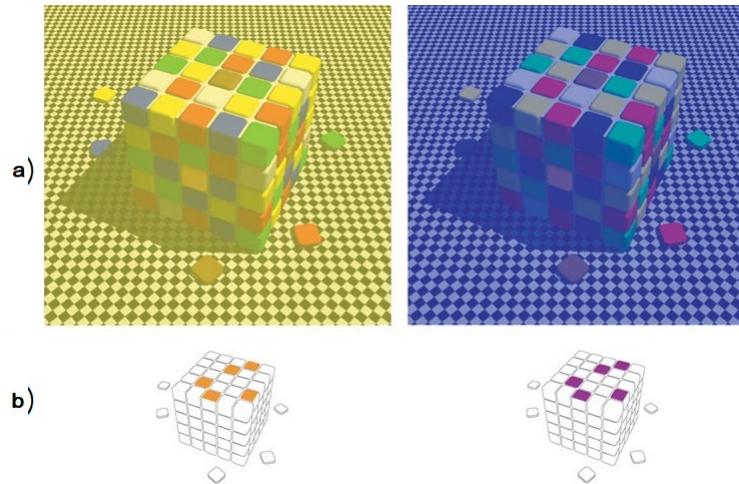


Figura 2.1: Esempio di illusione ottica generata dalla costanza del colore.

umano. Uno dei ricercatori più famosi in questo campo e il cui contributo è stato fondamentale per una migliore comprensione della costanza del colore è Edwin Herbert Land, fondatore della Polaroid Corporation. Egli effettuò una serie di esperimenti con risultati piuttosto sorprendenti, che lo portarono alla formulazione della cosiddetta *teoria Retinex*.

Attualmente il termine *Retinex* assume un duplice significato: indica sia una modello di percezione a colori del sistema visivo umano sia un algoritmo utilizzato nell'elaborazione di immagini.

Esamineremo di seguito entrambi gli aspetti.

2.1 Gli esperimenti classici

Il termine *Retinex* è una contrazione di “*retina*” e “*cortex*” : fu coniato nel 1964 da Edwin H. Land per la necessità teorica di indicare tre sistemi retino-corticali responsabili del fenomeno della costanza del colore (si veda [10]). Egli, infatti, non sapeva esattamente se il meccanismo alla base del fenomeno avvenisse a livello della retina o a livello della corteccia visiva nel cervello, così come riportò in [12]:

2.1. Gli esperimenti classici

“[...] we came to the conclusion that a color sensation involves the interaction of at least three (or four) retinal-cortical systems. Each retinal system starts with a set of receptors peaking, respectively, within the long-, middle-, or shortwave portion of the visible spectrum. Each system forms a separate image of the world; the images are not mixed but are compared. Each system must discover independently, in spite of the variation and unknowability of the illumination, the reflectances for the band of wavelengths to which that system responds. We invented a name, retinex, for each of these systems. A retinex employs as much of the structure and function of the retina and cortex as is necessary for producing an image in terms of a correlate of reflectance for a band of wavelengths, an image as nearly independent of flux as is biologically possible.”

La teoria Retinex presuppone che la visione umana si basi su tre sistemi retino-corticali, ciascuno dei quali elabora in modo indipendente i segnali prodotti da coni L, M ed S. Ogni sistema è indipendente dall'altro e ognuno di essi forma un'immagine distinta che determina il relativo valore di *chiarezza* delle varie regioni di una scena. La parola chiarezza è usata come traduzione del termine inglese *lightness*: indica la luminosità percepita di una superficie e/o oggetto che riflette la luce.

Gli esperimenti più famosi che riguardano il fenomeno della costanza del colore sono quelli condotti da Edwin H. Land e McCann intorno al 1960-1970 e che rappresentano la base della teoria Retinex (si vedano [11],[12]). Uno tra i più celebri è l'esperimento noto come *Color Mondrian*, nel quale Land e McCann utilizzarono delle superfici policrome, costituite da differenti pezzi di carta di colori diversi incollati insieme, denominate appunto “Mondrian”, per la somiglianza con le opere del pittore olandese Piet Mondrian. I rettangoli e i quadrati che costituivano tali collages, differivano in forma e dimensioni e creavano una scena astratta. Nessun cartoncino era circondato

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

da un altro avente lo stesso colore per evitare eventuali illusioni ottiche. I diversi pezzi erano formati da carta opaca che rifletteva una costante quantità di luce in tutte le direzioni. Nella Figura 2.2 è mostrato l'esperimento: Land e McCann usarono due Mondrian identici illuminati da tre proiettori indipendenti a luce regolabile che fornivano luci di diversa lunghezza d'onda (rispettivamente solo lunga, media e corta). Un rivelatore di luce (spettrometro) misurava la composizione spettrale del segnale luminoso riflesso nell'occhio da qualsiasi area particolare del Mondrian.

In tale esperimento l'attenzione degli osservatori era focalizzata su due carte circolari raffigurate rispettivamente nei due Mondrian, una di colore verde e una di colore rosso.

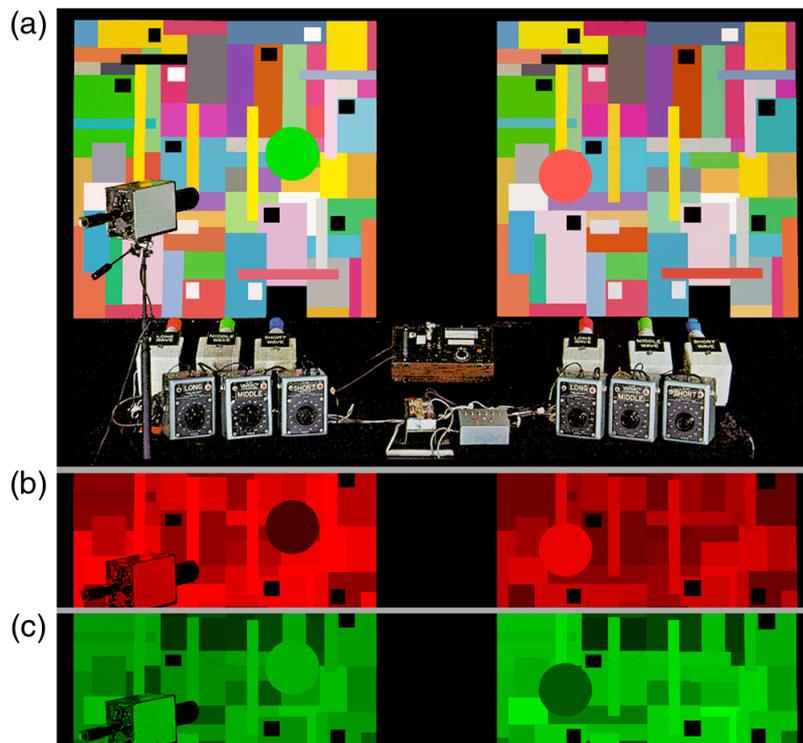


Figura 2.2: (a) Illustrazione dell'esperimento *Color Mondrian*. (b) Parte dei Mondrian visti in illuminazione a onde lunghe. (c) Parte dei Mondrian visti in illuminazione a onde medie.

Durante l'esperimento vennero regolate le intensità delle illuminazioni dei

2.1. Gli esperimenti classici

due set di proiettori in modo che provenisse la stessa quantità di luce dal cerchio verde e da quello rosso.

Per prima cosa accesero solo le luci a lunghezza d'onda lunga e regolarono le quantità di illuminazione sul cerchio verde di sinistra e sul cerchio rosso a destra in modo che le letture del contatore fossero uguali (Figura 2.2 (b)). La carta verde circolare a sinistra aveva la stessa radianza spettrale della carta rossa circolare a destra, ma il cerchio verde appariva più scuro rispetto a quello rosso, più chiaro. Il cerchio verde rifletteva una più piccola percentuale di luce a onde lunghe rispetto al cerchio rosso.

In seguito Land accese solo le luci a onde medie (Figura 2.2 (c)): il cerchio verde rifletteva più luce a onde medie che il cerchio rosso sulla destra. La carta verde è apparsa più chiara, e la carta rossa appariva più scura nell'illuminazione a onde medie nonostante avessero radianze identiche.

Le osservazioni fatte portarono Land e McCann a concludere che il colore di un oggetto non fosse determinato solo dalla lunghezza d'onda dominante della luce riflessa da esso, bensì dal confronto con la composizione spettrale della luce riflessa dalle superfici circostanti.

Come già riportato supposero l'esistenza di tre canali retino-corticali separati, le cui sensibilità spettrali erano approssimabili con le risposte dei coni, ognuno dei quali generava risultati distinti in termini di chiarezza dell'immagine osservata. La sensazione finale di colore era poi la fusione dei tre risultati indipendenti.

Un altro esperimento riguardo la costanza del colore è quello proposto da Vadim Maximov, riprodotto poi in seguito da McCann, noto col nome *Maximov's Shoe Boxes* ([19]). L'esperimento prevedeva l'utilizzo di due scatole di cartone di circa 15 x 12 x 32 cm, con un foro tagliato nella parte superiore per far passare la luce, un filtro di correzione del colore e un tubo di visualizzazione (vedi Figura 2.3). Il tubo di visualizzazione limitava il campo visivo sulla parete opposta dove erano montati dei piccoli Mondrian semplificati a cinque pezzi colorati, chiamati Tatami come i tappetini giapponesi.

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

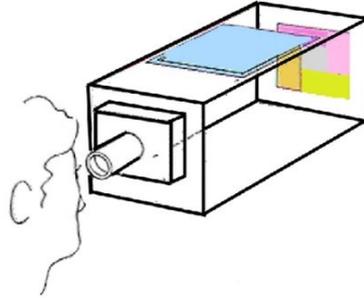


Figura 2.3: Scatola di visualizzazione dell'Esperimento *Maximov's Shoe Boxes*.

Per i due Tatami sono stati selezionati due filtri diversi che attenuavano il colore, ma non riducevano a zero la luce a qualsiasi lunghezza d'onda. Quando i Tatami sono stati visualizzati nelle scatole sono apparsi identici, nonostante il fatto che le riflettanze fossero diverse (Figura 2.4(a)). Il meccanismo della costanza del colore sembrava essersi "spento". Ciò, invece, non si verifica dopo l'introduzione di un contorno bianco intorno ai quadrati centrale nei due Tatami (Figura 2.4(b)).

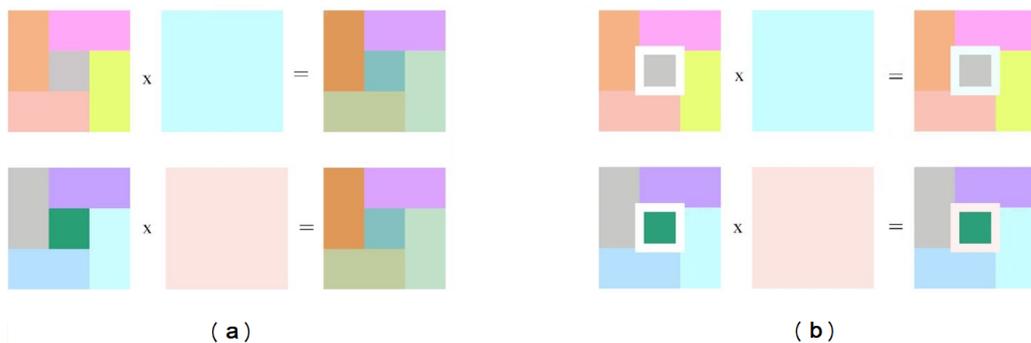


Figura 2.4: Esperimento con Tatami *Maximov's Shoe Boxes*.

L'esperimento portò McCann a concludere che il fenomeno della costanza del colore fosse locale, controllato dalle risposte dei fotorecettori L, M, S ristrette al campo visivo. Inoltre, i coni normalizzano ai massimi livelli ogni

2.1. Gli esperimenti classici

sensazione percepita (riferimento luce bianca).

Dopo essersi reso conto che la visione umana era un meccanismo spaziale, Land si avvicinò al mondo della riproduzione delle immagini in un modo nuovo. Egli ipotizzò che la riproduzione di scene reali dovesse incorporare un modello spaziale di visione: prima era necessario catturare le informazioni della scena, elaborarle per calcolare le sensazioni visive, poi, “*scrivere*” le sensazioni sulla pellicola. Nel 1968 Land e McCann estesero la teoria del Retinex all’illuminazione non uniforme utilizzando l’esperimento *Black & White Mondrian* ([12]).

Il Mondrian utilizzato in questo caso era composto da una vasta gamma di pezzi di carta neri, bianchi e grigi, di dimensioni e forme diverse. L’esperimento è mostrato nella Figura 2.5: il Mondrian presenta un’illuminazione maggiore in basso che in alto ed è scelta in modo che i cerchi concentrici rappresentati abbiano le stesse radianze spettrali. Tuttavia, essi appaiono differenti.

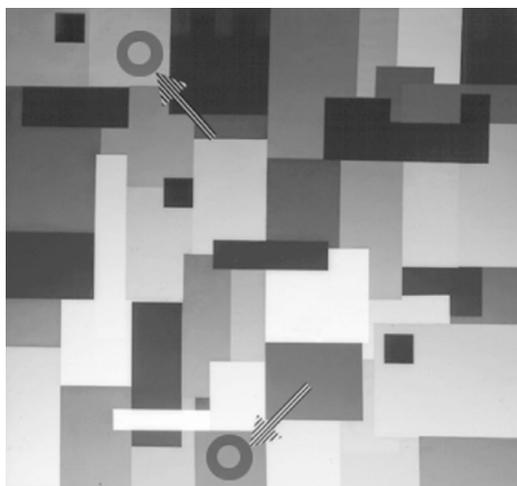


Figura 2.5: Esperimento *Black & White Mondrian*.

Questo risultato portò Land e McCann ad alcune considerazioni: valori identici di radianze possono generare qualsiasi sensazione di colore dal bianco al nero, in una scena complessa la radianza non può prevedere l’aspetto

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

della scena e viceversa. Il meccanismo di visione umana opera effettuando dei confronti spaziali e questo secondo Land e McCann era un aspetto fondamentale da considerare nella formulazione di un modello e di un algoritmo di riproduzione delle immagini, che imiti il sistema visivo umano.

2.2 Modelli di *Retinex*

2.2.1 Il modello di Land e McCann

L'algoritmo Retinex di Land e McCann (si veda [12]) è uno tra i più famosi tentativi di modellare e spiegare come il sistema visivo umano percepisce i colori. Esso si basa sul presupposto che il sistema visivo umano operi attraverso tre sistemi retino-corticali, ognuno dei quali elabora in modo indipendente i segnali prodotti dai coni L, M ed S. Ognuno di questo sistema produce un valore di chiarezza (*lightness*) che determina, per sovrapposizione, la percezione del colore da parte dell'uomo. Nelle immagini digitali a valori RGB, la chiarezza è rappresentata dai valori di luminosità nei tre canali cromatici, ovvero dalla terna (L_R, L_G, L_B) .

Land e McCann osservarono che i bordi tra aree adiacenti di un'immagine giocano un ruolo fondamentale nella percezione del colore e sono la principale fonte di informazione per ottenere la costanza del colore. Inoltre, si sono resi conto che prendendo il rapporto tra le chiarezze di due punti adiacenti si può sia rilevare un bordo che eliminare l'effetto di un'illuminazione non uniforme. Per questo hanno scelto il rapporto tra le chiarezze di due aree adiacenti come proprietà adimensionale che descrive la relazione tra le chiarezze di tali aree. Se queste due aree hanno una chiarezza molto diversa, il rapporto è ben lontano dal valore unitario e tende verso il valore 1 dove la loro chiarezza tende a diventare uguale. Se tale rapporto viene calcolato in molte posizioni dell'immagine e ne viene fatta una media, allora l'algoritmo Retinex può calcolare in modo efficiente la chiarezza complessiva dell'immagine.

2.2. Modelli di *Retinex*

Ispirati da diversi esperimenti da loro condotti, Land e McCann hanno scoperto che un modo efficiente per calcolare i valori della chiarezza di un pixel $x = (i, j)$ in un'immagine era di considerare un certo numero di percorsi, che iniziano in punti casuali e terminano in x , e poi calcolare la media dei prodotti dei rapporti tra i valori di intensità dei punti successivi nei percorsi. Questo calcolo viene ripetuto su tutti e tre i canali di colore e le terzine di luminosità risultanti corrispondono al colore percepito.

Entriamo nei dettagli dell'algoritmo, seguendo [9] e [22].

Data un'immagine digitale $Image \subset \mathbb{R}^2$ a valori RGB la risposta allo stimolo visivo nel punto x dell'immagine è data da:

$$S^x = \int_{\lambda \in (400nm, 700nm)} E(\lambda) R^x(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (2.1)$$

dove $E(\lambda)$ rappresenta la distribuzione spettrale della luce, $R^x(\lambda)$ indica la riflettanza nel punto x , mentre ρ è la sensibilità spettrale dei coni. Inoltre, l'integrale è calcolato rispetto alla lunghezza d'onda λ appartenente allo spettro elettromagnetico della luce visibile.

Per calcolare il relativo valore di *lightness* nel punto x si considerino N percorsi orientati $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ che partono da pixel casuali j_k e terminano nel pixel x (Figura 2.6). Sia n_k il numero di pixel del percorso γ_k e si denoti con $x_{t_k} = \gamma_k(t_k)$ per $t_k = 1, \dots, n_k$ e $x_{t_k+1} = \gamma_k(t_k + 1)$ il pixel successivo lungo il percorso. Si indichi con $I(x_{t_k})$ l'intensità per ogni canale cromatico del pixel x_{t_k} .

Il valore di chiarezza $L(x)$ di un pixel x nel canale cromatico $c \in \{R, G, B\}$ è dato dalla media dei relativi valori di chiarezza in x lungo tutto i percorsi che terminano in x , ossia

$$L_c(x) = \frac{\sum_{k=1}^N L(x; j_k)}{N} \quad (2.2)$$

dove $L(x; j_k)$ denota la chiarezza di un pixel x rispetto a j_k (Figura 2.7) ed

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

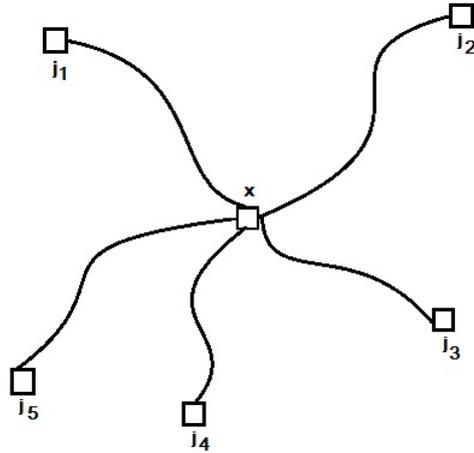


Figura 2.6: Esempio di percorsi dai punti j_1, j_2, \dots, j_n per il calcolo del valore di *lightness* nel punto x .

è definito da

$$L(x; j_k) = \sum_{t_k=1}^{n_k} \delta \left[\log \frac{I(x_{t_k+1})}{I(x_{t_k})} \right] \quad (2.3)$$

per un valore fissato della soglia t

$$\delta(s) = \begin{cases} s & |s| > t \\ 0 & |s| < t \end{cases} \quad (2.4)$$

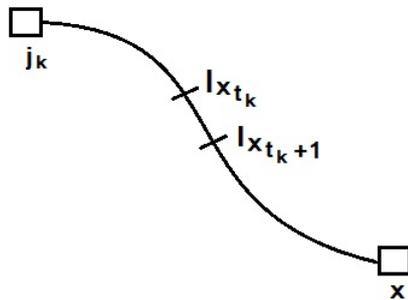


Figura 2.7: Lungo il percorso dal punto j_k al punto x , la relativa *lightness* è data dal rapporto tra le risposte visive nei punti generici x_{t_k} e x_{t_k+1} .

2.2. Modelli di *Retinex*

Questi calcoli devono essere eseguiti separatamente per i tre canali cromatici.

Si può osservare che l'algoritmo proposto dipende dal numero dei percorsi scelti e da un valore di soglia che non permette di tenere conto dei piccoli rapporti di chiarezza, che corrispondono a leggeri cambiamenti di colore dovuti ad una illuminazione non uniforme.

L'algoritmo Retinex ha un meccanismo *reset* mediante il quale, durante il calcolo lungo un percorso, se si trova un'area più chiara, la chiarezza relativa cumulata è posta uguale ad 1, facendo ripartire il calcolo della media da quest'area. L'effetto di questo meccanismo di *reset* è quello di considerare l'area più chiara di un'immagine per avere un valore di riferimento locale per il colore bianco.

Attualmente sono numerosi gli algoritmi e i modelli computazionali Retinex che gli studiosi hanno implementato sulla base del lavoro di Land e McCann. Ognuno di essi presenta un'efficienza computazionale diversa, ma anche obiettivi specifici diversi, nonostante tutti condividano come obiettivo finale quello di imitare la visione umana. Tuttavia, questo rimane ad oggi un problema aperto.

Nel seguito diamo una breve rassegna dei più famosi algoritmi Retinex implementati ed utilizzati nel mondo biomedico e dell'elaborazione delle immagini digitali.

2.2.2 Modelli variazionali di *Retinex*

Per la teoria Retinex l'aspetto cromatico di un'area di un'immagine è fortemente correlato al contesto, ossia alla distribuzione del colore attorno all'area considerata. Per questo motivo tutti gli algoritmi Retinex sfruttano il concetto di *località*. Si possono distinguere due metodi differenti per sfruttare il concetto di località nell'algoritmo, ovvero:

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

- il *campionamento*: l'algoritmo campiona i dati dell'immagine;
- l'*integrazione*: l'algoritmo calcola una media dei valori del contorno dell'area in esame.

Fanno parte della prima categoria l'algoritmo *Brownian Retinex* di Marini e Rizzi e il *Multilevel Retinex* proposto da McCann.

Nel modello computazionale proposto da Marini e Rizzi ([15]) i cammini lungo i quali l'algoritmo Retinex effettua i calcoli sono percorsi casuali browniani. Il vantaggio che ne consegue riguarda la necessità di un numero minore di percorsi rispetto alle altre implementazioni Retinex per approssimarne la chiarezza di ogni pixel.

L'algoritmo proposto da McCann nel 1999, invece, si caratterizza dalla costruzione di una piramide di multirisoluzione delle immagini, da cui il nome *Multilevel Retinex*. Al vertice della piramide vi è l'immagine in input.

Per quel che riguarda i metodi che utilizzano l'integrazione essi si basano sulla seguente formula:

$$R_c(x, y) = \log(I_c(x, y)) - \log(F(x, y) * I_c(x, y)) \quad (2.5)$$

dove I indica l'immagine in input, (x, y) le coordinate spaziali, $c \in \{R, G, B\}$ il canale cromatico e F una funzione di convoluzione. È importante notare che per ogni pixel viene effettuato un solo confronto tra il valore del pixel e il valore integrato sulla funzione surround. Inoltre, l'utilizzo della convoluzione fornisce un valore medio ponderato per stimare il contributo che porta alla chiarezza del pixel di destinazione. Tuttavia, tale metodo può risultare più difficile nelle implementazioni di modelli computazionali.

Un altro interessante modello è il *Random Spray Retinex* ([24]), chiamato così perchè i cammini utilizzati dall'algoritmo originario sono sostituiti

2.2. Modelli di *Retinex*

da “spray” casuali, ovvero distribuzioni bidimensionali puntiformi attorno ai pixel dell’immagine (Figura 2.8).

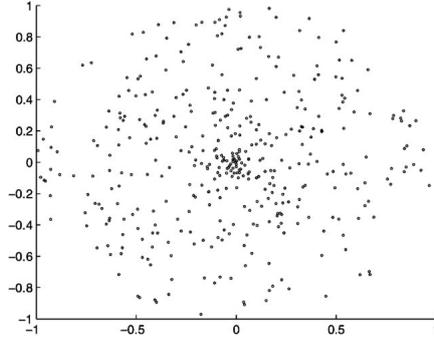


Figura 2.8: Esempio di uno spary casuale con 400 punti e raggio unitario.

Di particolare interesse è un recente modello Retinex che unifica i metodi precedenti: il *modello variazionale* proposto da Kimmel ([7]). Partendo dall’obiettivo di decomporre una data immagine di input S in un’immagine di riflettanza R e un’immagine di illuminazione L , $S = R \cdot L$, il modello si basa su alcune assunzioni:

- l’illuminazione dell’immagine è spazialmente regolare;
- l’immagine di riflettanza, è ristretta all’intervallo $[0, 1]$, per cui $L \geq S = L \cdot R$;
- l’immagine di illuminazione è vicina all’immagine originale, migliorando così il contrasto locale dell’immagine di riflettanza;
- l’immagine di riflettanza ha un’alta probabilità a priori;
- l’illuminazione è assunta uniformemente costante oltre i bordi dell’immagine, assunzione richiesta perchè le condizioni di bordo abbiano un effetto minore sui risultati finali.

Sotto tali ipotesi si ponga $s = \log(S)$, $l = \log(L)$, $r = \log(R)$. Il modello è ricondotto alla risoluzione del seguente problema variazionale

$$F[l] = \int_{\Omega} (|\nabla l|^2 + \alpha(l - s)^2 + \beta|\nabla(l - s)|^2) dx dy \quad (2.6)$$

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

tale che

$$l \geq s \quad e \quad \langle \nabla l, \vec{n} \rangle = 0 \text{ su } \partial\Omega \quad (2.7)$$

dove Ω è il supporto dell'immagine, $\partial\Omega$ il suo bordo, \vec{n} la normale al bordo, α e $\beta \in \mathbb{R}_+$.

Analizziamo i tre termini che compongono il funzionale:

- $|\nabla l|^2$: forza la regolarità sull'immagine di illuminazione;
- $\alpha(l-s)^2$: forza la vicinanza tra l e s . La differenza tra queste immagini è esattamente r , il che significa che la norma di r dovrebbe essere piccola (cioè, R tende al bianco). L'obiettivo principale di questo termine è la regolarizzazione del problema che lo rende meglio condizionato;
- $\beta|\nabla(l-s)|^2$: costringe r ad essere un'immagine "visivamente piacevole".

Il problema (2.6) ha una forma di programmazione quadratica: Kimmel ha dimostrato che la matrice Hessiana associata alla funzione F è definita positivamente se $\alpha > 0$. Di conseguenza, questo problema è strettamente convesso e ha soluzione unica. Dimostriamo l'unicità del problema attraverso il seguente teorema.

Teorema 2.2.1. *Il problema di ottimizzazione variazionale P dato dalla minimizzazione del funzionale*

$$F[l] = \int_{\Omega} (|\nabla l|^2 + \alpha(l-s)^2 + \beta|\nabla(l-s)|^2) dx dy$$

tale che

$$l \geq s \quad e \quad \langle \nabla l, \vec{n} \rangle = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

con $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$, ha soluzione unica.

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo che $F[l]$ è convesso. La matrice Hessiana associata è data da

$$\frac{\partial^2 F[l]}{\partial l^2} = -(1 + \beta)\Delta + \alpha I$$

2.2. Modelli di *Retinex*

dove I è la matrice identità. L'Hessiana è definita positiva, poichè $-(1 + \beta)\Delta \geq 0$ e $\alpha I > 0$. Ne consegue che $F[l]$ è un funzionale strettamente convesso. Nel caso in cui $\alpha = 0$ l'Hessiana è semidefinita positiva e il funzionale convesso.

Si ponga $C = \{l | l \geq s \text{ e } \langle \nabla l, \vec{n} \rangle = 0 \text{ su } \partial\Omega\}$ in modo tale che i vincoli del problema P siano equivalenti a richiedere che $l \in C$.

Per ogni $l_1, l_2 \in C$, $\forall \theta \in [0, 1]$ si ha $\theta l_1 + (1 - \theta)l_2 \in C$, ossia C è un insieme convesso. Questo è vero perché C è l'intersezione di due insiemi convessi (uno per ogni vincolo originale).

Denotiamo \hat{l}_{opt} il minimo di $F[l]$. Questa soluzione è unica poiché $F[l]$ è strettamente convesso. Se $\hat{l}_{opt} \in C$ allora \hat{l}_{opt} è la soluzione di P , e quindi si ottiene una soluzione unica come sostiene il teorema.

D'altra parte se $\hat{l}_{opt} \notin C$ la soluzione di P sul bordo dell'insieme dei vincoli $C = \{l | l \geq s\}$. Dimostriamolo procedendo per assurdo.

Assumiamo che la soluzione sia $l_0 \in Int(C)$. Definiamo $l_1 = (1 - \theta)l_0 + \theta\hat{l}_{opt}$ per $\theta \in (0, 1)$. Poichè $F[l]$ è convesso si ha

$$F[l_1] < (1 - \theta)F[l_0] + \theta F[\hat{l}_{opt}].$$

Poiché $l_0 \in C$ per θ sufficientemente vicino a zero si può garantire che anche $l_1 \in C$. In questo modo otteniamo l_1 come soluzione migliore, contraddicendo la nostra ipotesi. Così, la soluzione per P si ottiene sul bordo di C .

Siano ora l_1 e l_2 due soluzioni tali che

- $l_1, l_2 \in C$;
- $l_1, l_2 \notin Int(C)$;
- $F[l_1] = F[l_2]$;
- $\forall l \in C \quad F[l] > F[l_1]$;
- $F[l] : l_1, l_2 \neq \hat{l}_{opt}$.

Poichè C è un insieme convesso

$$\forall \theta \in (0, 1) \quad l_0 = (1 - \theta)l_2 + \theta l_1 \in C.$$

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

Inoltre, si ha

$$F[l_0] = F[(1 - \theta)l_2 + \theta l_1] < (1 - \theta)F[l_1] + \theta F[l_2] = F[l_1].$$

Allora otteniamo una soluzione l_0 migliore di l_1 e l_2 . Questo contraddice le ipotesi precedenti, e quindi, esiste una ed una sola soluzione del problema P . \square

L'ultimo modello che andiamo a citare è quello proposto da Morel in [21]. Modificando e semplificando il modello di Kimmel, propose di esprimere l'algoritmo Retinex come il seguente problema di Neumann per un'equazione di Poisson:

$$-\Delta L(x) = F(x) \quad (2.8)$$

dove L indica il valore di *lightness*, $x = (i, j)$ denota il pixel dell'immagine.

$$\Delta L(i, j) = L(i + 1, j) + L(i - 1, j) + L(i, j + 1) + L(i, j - 1) - 4L(i, j) \quad (2.9)$$

è il laplaciano in forma discreta,

$$F(i, j) = f\left(\frac{I(i, j)}{I(i + 1, j)}\right) + f\left(\frac{I(i, j)}{I(i - 1, j)}\right) + f\left(\frac{I(i, j)}{I(i, j + 1)}\right) + f\left(\frac{I(i, j)}{I(i, j - 1)}\right), \quad (2.10)$$

e $f(x)$ è una funzione di soglia, il cui valore è zero se $|x| < t$ e l'identità negli altri casi. I è l'immagine da elaborare. Questa funzione f elimina le piccole variazioni di intensità dell'immagine I . Il parametro t (la soglia) è di default $t = 4$, ma si può scegliere il valore a seconda delle variazioni che si vogliono eliminare. Quando I è un'immagine a livello di grigio, l'algoritmo si applica a I . Quando I è un'immagine a colori, l'algoritmo viene applicato a ciascun canale cromatico separatamente.

Questo risultato fornisce un algoritmo veloce che coinvolge un solo parametro, presente anche nella teoria originale.

2.3 Determinazione di minimi di funzionali

Come abbiamo precedentemente visto i modelli più recenti di Retinex sono espressi in termini di minimi di funzionali. Vediamo ora come il metodo della *steepest descent* permette la determinazione di tali minimi. Seguiamo la presentazione di Ambrosetti Malchiodi ([1]).

Data un'immagine originale a colori ne vengono estratte le sue componenti RGB: ognuna di queste è rappresentata da una funzione di due variabili $I(x, y)$. L'idea è quella di definire un ambiente tridimensionale mediante l'aggiunta di una coordinata t , che rappresenterà la scala della modifica attuata su $I(x, y)$; tale ambiente è detto *scale space* (spazio di scala). Si avrà dunque una funzione $I(x, y, t)$, con $I(x, y, 0) = I(x, y)$.

L'immagine originale viene quindi assunta come condizione iniziale di un problema del tipo

$$\begin{cases} I_t = F(I) \\ I(x, y, 0) = I(x, y) \end{cases} \quad (2.11)$$

dove I_t indica la derivata parziale di I rispetto alla variabile di scala t e F è un opportuno operatore applicato ad I .

Nel seguito esponiamo le nozioni teoriche necessarie alla trattazione del problema e alla sua successiva implementazione.

2.3.1 Il metodo di *steepest descent*

Sia E uno spazio di Banach. Un funzionale su E è una funzione continua

$$J : E \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Definizione 2.1. Siano E, F spazi di Banach. Diciamo che $J : E \rightarrow F$ è *differenziabile secondo Fréchet* in $u \in E$ con derivata $dJ(u) \in L(E, F)$ se,

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

per $h \rightarrow 0$,

$$J(u+h) - J(u) = dJ(u)h + o(\|h\|_E). \quad (2.13)$$

Si dice che J è *differenziabile* in E se J è differenziabile in ogni punto di E . Se J è differenziabile in E e la mappa

$$E \mapsto L(E, \mathbb{R}), \quad u \mapsto dJ(u)$$

è continua, si dice che

$$J \in C^1(E, \mathbb{R}).$$

Definizione 2.2. Sia $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Il *flusso di steepest descent* di J (o più brevemente la *steepest descent* di J) è la funzione $\alpha(u, t)$ tale che, per ogni $u \in E, t \mapsto \alpha(u, t)$ sia soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \alpha'(t) = -\nabla J(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = u. \end{cases} \quad (2.14)$$

Denotiamo $\alpha(u, t) =: \alpha_u(t)$.

Denotiamo con $[t_0, T[$ l'intervallo massimale di esistenza di α . Premettiamo un lemma che ci sarà utile nel seguito.

Lemma 2.3.1. *Se $T < +\infty$ allora*

$$\nexists \lim_{t \uparrow T} \alpha(t).$$

Dimostrazione. Per assurdo si supponga che esista $v_0 \in E$ tale che $v_0 = \lim_{t \uparrow T} \alpha(t)$ e sia β la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \beta'(t) = -\nabla J(\beta(t)) \\ \beta(T) = v_0. \end{cases}$$

2.3. Determinazione di minimi di funzionali

definita in un intorno di T . Allora la funzione

$$\gamma(t) := \begin{cases} \alpha(t) & \text{per } t \in [t_0, T[\\ \beta(t) & \text{per } t \in [T, T + \epsilon[\end{cases}$$

è soluzione di (2.14) definita su tutto $[t_0, T + \epsilon[$, e questo costituisce un assurdo. \square

Lemma 2.3.2. *Sia α la steepest descent del funzionale $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Allora, valgono i fatti seguenti:*

1. Per ogni $u \in E \mapsto J(\alpha(u, t))$ è decrescente sull'intervallo massimale $[0, T_u[$ di definizione della soluzione $t \mapsto \alpha(u, t)$;
2. Per ogni $u \in E$ e per ogni $t, \tau \in [0, T_u[$,

$$J(\alpha(u, t)) - J(\alpha(u, \tau)) = - \int_{\tau}^t \|\nabla J(\alpha(u, s))\|^2 ds;$$

3. Se J è limitato inferiormente, $T_u = +\infty \quad \forall u \in E$.

Dimostrazione. 1) Fissato $u \in E$,

$$\frac{d}{dt} J(\alpha_u(t)) = \langle \nabla J(\alpha(u, t)), \alpha'_u(t) \rangle = -\|\nabla J(\alpha_u(t))\|^2 \leq 0.$$

2) Da quanto visto sopra si ha

$$J(\alpha(u, t)) - J(\alpha(u, \tau)) = \int_{\tau}^t \frac{d}{ds} J(\alpha_u(s)) ds = - \int_{\tau}^t \|\nabla J(\alpha_u(s))\|^2 ds.$$

3) Per assurdo supponiamo che esista $v \in E$ con $T_v < +\infty$. Allora, dalla (2) con $\tau = 0$,

$$J(\alpha_v(s)) - J(v) = - \int_0^s \|\nabla J(\alpha_v(s))\|^2 ds.$$

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

Poichè J è inferiormente limitato esiste $M > 0$ tale che

$$\int_0^t \|\nabla J(\alpha_v(s))\|^2 ds \leq M < +\infty.$$

Sia ora $(t_n)_n$ una successione in $[0, T_v[$, $t_n \uparrow T_v$. Allora, per ogni k, h

$$\begin{aligned} \|\alpha_v(t_k) - \alpha_v(t_h)\| &\leq \int_{t_h}^{t_k} \|\alpha'_v(s)\| ds = \int_{t_h}^{t_k} \|\nabla J(\alpha_v(s))\| ds \leq \\ &\leq |t_k - t_h|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_h}^{t_k} \|\nabla J(\alpha_v(s))\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |t_k - t_h|^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Quindi, la successione $(\alpha_v(t_n))_n$ è di Cauchy, portando ad un assurdo del lemma 2.3.1, siccome per ipotesi abbiamo supposto $T_v < +\infty$. \square

Proposizione 2.3.3. *Supponiamo esistano $\delta > 0, c \in \mathbb{R}$ per i quali valga*

$$\|\nabla J(u)\| \geq \delta \quad \forall u \in E : |J(u) - c| \leq \delta. \quad (2.15)$$

Allora esiste una deformazione i di $E^{c+\delta}$ tale che

$$i(E^{c+\delta}) \subset E^{c-\delta}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che J sia inferiormente limitato. Allora, per la (3) del lemma precedente $T_u = +\infty$ per ogni $u \in E$. Sia $T := \frac{2}{\delta}$ e poniamo

$$i(u) := \alpha(u, T)$$

dove α è la *steepest descent* di J .

Vogliamo provare che

$$J(i(u)) \leq c - \delta \quad \forall u \in E^{c+\delta}.$$

Supponiamo per assurdo che esista $v \in E^{c+\delta}$ per cui $c - \delta < J(i(v)) =$

2.3. Determinazione di minimi di funzionali

$J(\alpha_v(T))$. Siccome $s \mapsto J(\alpha_v(s))$ è decrescente, si avrà

$$c - \delta < J(\alpha_v(s)) \quad \forall s \in [0, T].$$

Ora $\|\nabla J(\alpha_v(s))\| \geq \delta$ per ipotesi e poichè $v \in E^{c+\delta}$ si ha $J(v) \leq c + \delta$. Quindi, per la (2) del lemma 2.3.2 con $\tau = 0$

$$\begin{aligned} J(\alpha_v(T)) &= J(v) - \int_0^T \|\nabla J(\alpha_v(s))\|^2 ds \leq J(v) - \delta^2 T = \\ &= J(v) - 2\delta \leq c + \delta - 2\delta = c - \delta, \end{aligned}$$

ma ciò costituisce un assurdo.

Infine, osserviamo che, se J non è limitato dal basso, è sufficiente considerare $\tilde{J}(u) := \eta(J(u))$ con $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strettamente crescente ed inferiormente limitata, tale che $\eta(s) = s$ per ogni $s \geq c - \delta$. Così \tilde{J} risulta limitato dal basso, ed inoltre, $\tilde{J}(u) = J(u)$ per ogni $u \in \{u \in E : J(u) \geq c - \delta\}$. Quindi, ripetendo gli argomenti precedenti, segue la tesi. \square

Definizione 2.3. Una successione $(u_n)_n$ in E , tale che $J(u_n)$ sia limitato e $\nabla J(u_n) \rightarrow 0$, è detta una *successione di Palais-Smale* (o più brevemente, una *(PS)-successione*). Si dice che $(u_n)_n$ è una *(PS)_c-successione*, dove $c \in \mathbb{R}$, se $(u_n)_n$ è una *(PS)-successione* e $J(u_n) \rightarrow c$.

Diciamo che J soddisfa la condizione *(PS)* (rispettivamente *(PS)_c*), se ogni *(PS)-successione* (rispettivamente *(PS)_c-successione*) ammette una sottosuccessione convergente.

Teorema 2.3.4. Sia $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ limitato inferiormente e verificante la condizione *(PS)_m* per

$$m := \inf_{u \in E} J(u) > -\infty.$$

Allora,

$$\exists z \in E \quad : \quad \begin{cases} J(z) = m, \\ \nabla J(z) = 0. \end{cases}$$

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

Inoltre, se $\alpha = \alpha(u, t)$ è la *steepest descent* di J e se v è un punto di E tale che non ci siano livelli critici in $[m, J(v)]$,

$$J(\alpha(v, t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} m.$$

Dimostrazione. Consideriamo una successione $(u_n)_n$ tale che

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m.$$

Possiamo assumere, a meno di sottosuccessioni, che

$$\|\nabla J(u_n)\| \rightarrow 0,$$

altrimenti esisterebbe $\delta > 0$ tale che $\|\nabla J(u_n)\| \geq \delta$ per ogni n tale che $|J(u_n) - m| \leq \delta$ e ne seguirebbe l'esistenza di una deformazione i di $E^{m+\delta}$ in E per cui

$$i(E^{m+\delta}) \subset E^{m-\delta}.$$

Questo non è possibile perchè $E^{m-\delta} = \emptyset$, mentre $E^{m+\delta} \neq \emptyset$.

Allora $(u_n)_n$ è una $(PS)_m$ -successione: per ipotesi, $(u_n)_n$ ammette una sottosuccessione che converge ad un certo $z \in E$. Ne segue che

$$J(z) = m, \quad \nabla J(z) = 0.$$

Proviamo ora che la *steepest descent* di J si avvicina, per $t \rightarrow +\infty$, ad un punto di minimo. Intanto il lemma 2.3.2 (3) garantisce che α_v sia definita in $[0, +\infty]$, poichè J è limitato inferiormente. Sempre per il lemma 2.3.2 (1), $t \mapsto J(\alpha(v, t))$ è decrescente. Inoltre, è limitata inferiormente, quindi

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} J(\alpha(v, t)) =: w, \quad w \leq J(v).$$

Vogliamo dimostrare che $w = m$.

Supponiamo per assurdo che $w \neq m$, cioè che $w \in]m, J(v)]$. Allora esiste

2.3. Determinazione di minimi di funzionali

$\delta > 0$ per cui

$$\|\nabla J(u)\| \geq \delta \quad \forall u : |J(u) - w| \leq \delta.$$

Segue dunque, dalla Proposizione 2.3.3 che

$$\exists \bar{t} \in [0, +\infty] \quad : \quad i(E^{w+\delta}) \subset E^{w-\delta},$$

dove $i(u) := \alpha(u, \bar{t})$. In altre parole,

$$\exists \bar{t} \in [0, +\infty] \quad : \quad \alpha(v, \bar{t}) < w;$$

ma ciò è assurdo perchè $t \mapsto J(\alpha(v, t))$ è decrescente. Pertanto

$$J(\alpha(v, t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} m.$$

□

Quello che abbiamo dimostrato è che la *steepest descent* di un funzionale fornisce una successione minimizzante; il fatto che tale successione si determini risolvendo un problema di Cauchy rende questo metodo molto efficiente dal punto di vista dell'implementazione.

2.3.2 La *steepest descent* del modello di Morel

Applichiamo ora il metodo di *steepest descent* ai funzionali introdotti da Kimmel e Morel.

Consideriamo il seguente funzionale:

$$J(I) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla I\|^2. \quad (2.16)$$

I minimi di questo funzionale su W^1 sono proprio soluzioni dell'equazione di Laplace con condizioni al bordo di Neumann.

Studiamo d'apprima il funzionale J con condizioni nulle al bordo.

J è ben definito sullo spazio di Hilbert $W_0^1(\Omega)$, che si ottiene come comple-

2. Un modello classico di percezione del colore: il *Retinex*

tamento dello spazio $C_0^1(\Omega)$ delle funzioni di classe C^1 su Ω e a supporto compatto, rispetto alla norma $\|u\|_{\nabla} := \|\nabla u\|_2$.

Il differenziale di Fréchet di J é:

$$dJ(I)h = \langle I, h \rangle_{\nabla}. \quad (2.17)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} J(I+h) - J(I) - \langle I, h \rangle_{\nabla} &= \frac{1}{2}\|I+h\|_{\nabla}^2 - \frac{1}{2}\|I\|_{\nabla}^2 - \langle I, h \rangle_{\nabla} = \\ &= \frac{1}{2}\|I\|_{\nabla}^2 + \frac{1}{2}\|h\|_{\nabla}^2 + \langle I, h \rangle_{\nabla} - \frac{1}{2}\|I\|_{\nabla}^2 - \langle I, h \rangle_{\nabla} = \\ &= \frac{1}{2}\|h\|_{\nabla}^2 = o(\|h\|_{\nabla}). \end{aligned}$$

Osservando che $W_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, su W_0^1 si può considerare il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ indotto da L^2 . Il gradiente di J rispetto a tale prodotto scalare, in un punto $I \in C^2(\Omega)$, è

$$\nabla_{L^2} J(I) = -\Delta I. \quad (2.18)$$

Infatti, integrando per parti si ottiene

$$dJ(I)h = \int_{\Omega} \nabla I \nabla h = - \int_{\Omega} \Delta I h = \langle \Delta I, h \rangle_2. \quad (2.19)$$

Si osservi che si possono scegliere funzioni test $h \in C_0^\infty$, per cui l'espressione ha senso se ΔI è integrabile sui compatti di Ω .

Per questa equazione di *steepest descent* si ha il seguente risultato classico di regolarità.

Teorema 2.3.5. *Per ogni dato iniziale $u_0 \in W_0^1$, la soluzione dell'equazione di steepest descent in L^2 associata al funzionale $J(I) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\Delta I\|^2$ e con dato nullo su $\partial\Omega$ è di classe C^∞ su $[\epsilon, +\infty[$ per ogni $\epsilon > 0$.*

Rimuoviamo ora la condizione nulla al bordo. Avremo quindi che i minimi verificano (2.19). Integrando per parti senza la condizione al bordo nulla si

2.3. Determinazione di minimi di funzionali

ha

$$\int_{\Omega} \nabla I \nabla h = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla I, \nu \rangle h - \int_{\Omega} \Delta I h \quad \forall h \quad (2.20)$$

e questo si annulla se $\Delta I = 0$, e $\langle \nabla I, \nu \rangle = 0$.

Si riottiene così, proprio il funzionale di Morel.

È possibile quindi ottenere i minimi come *steepest descent* del funzionale J con condizione al bordo di Neumann.

Capitolo 3

Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

Siamo interessati ad analizzare l'elaborazione compiuta dalle cellule neuronali responsabili della percezione del colore quando queste sono sottoposte ad uno stimolo visivo. In particolare, vogliamo comprendere come le cellule gangliari e quelle del LGN operino una prima elaborazione delle risposte captate dai cono, interpretando il classico modello percettivo *Retinex*, prima nel caso di immagini in bianco e nero e successivamente nel caso di immagini a colori.

Per prima cosa è necessario studiare e modellizzare le cellule cromatiche per comprendere l'elaborazione da esse effettuata.

A tal fine esaminiamo i campi e i profili recettivi di tali cellule.

Il **campo recettivo** di una cellula può essere definito come l'area del campo visivo all'interno della quale deve cadere lo stimolo visivo in modo da attivare la risposta della cellula interessata, o più semplicemente il dominio M della retina a cui il neurone è sensibile.

Il **profilo recettivo** di un neurone visivo, invece, agisce come un filtro sull'immagine e si definisce come una funzione $\varphi(x, y)$ (con x, y le coordinate

retiniche), $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ dove M è il piano retinico, che misura la risposta neurale della cellula alla stimolazione nel punto (x, y) : assumerà quindi valori positivi in corrispondenza delle regioni ON e negativi in corrispondenza di quelle OFF.

3.1 I profili recettori delle cellule sensibili al colore

3.1.1 Cellule a singola opposenza

Wiesel e Hubel sono stati i primi a descrivere in [29] le cellule cromatiche a singola opposenza e le hanno distinte in:

- cellule di Tipo I (*center-surround*):
 - ON-center, OFF-surround: input eccitatorio al centro del campo recettivo e input inibitorio alla periferia;
 - OFF-center, ON-surround: input inibitorio al centro del campo recettivo e input eccitatorio nella periferia;
- cellule di Tipo II (*center-only*): input eccitatori e inibitori nella stessa area del campo recettivo.

Il profilo recettivo delle cellule a singola opposenza può essere modellato utilizzando delle Gaussiane bidimensionali sia per la parte eccitatoria sia per la parte inibitoria:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (3.1)$$

Per il profilo recettivo delle cellule con organizzazione *center-only* le due Gaussiane avranno ugual parametro σ , ma saranno invertite di segno. Per il profilo recettivo delle cellule con organizzazione *center-surround* le due Gaussiane avranno anche diverso σ .

3.1. I profili recettori delle cellule sensibili al colore

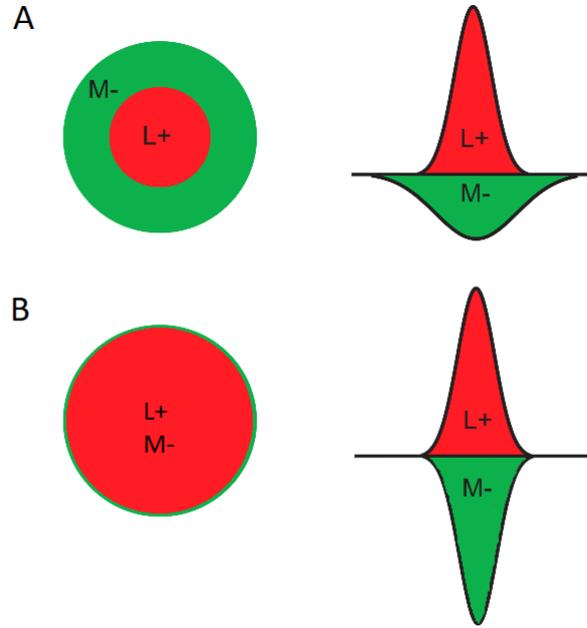


Figura 3.1: Rappresentazione dei campi recettivi (a sinistra) e dei profili recettivi (a destra) delle cellule a singola opposenza. A: Esempio di cellula di Tipo I. B: Esempio di cellula di Tipo II.

Per semplicità se vogliamo utilizzare un valore fissato di σ per il profilo di una singola cellula possiamo controllare la dimensione del profilo attraverso un parametro k e la Gaussiana bidimensionale sarebbe così definita:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi(k\sigma)^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(k\sigma)^2}} \quad (3.2)$$

Ad esempio, il profilo recettivo della cellula ON-center, OFF-surround in Figura 3.1.A può essere modellato nel modo seguente: per la parte eccitatoria stimolata dai coni L utilizziamo la Gaussiana G_{ex} (con $k = 1$), mentre per la parte inibitoria stimolata dai coni M la Gaussiana G_{in} .

$$G_{ex}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (3.3)$$

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

$$G_{in}(x, y) = -\frac{1}{2\pi(k\sigma)^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(k\sigma)^2}} \text{ con } k > 1 \quad (3.4)$$

La dimensione dei campi recettivi delle varie cellule è quindi controllata dal parametro σ .

3.1.2 L'insieme dei profili recettivi delle cellule a singola opposizione come gruppo

Consideriamo in un primo momento che tutte le cellule a singola opposizione da noi considerate abbiano campi recettivi con uguale dimensione. In altre parole, tutti i profili recettivi di questa famiglia di cellule possono essere ottenuti da quello di una cellula fissata, $\varphi_0(x, y)$, tramite traslazione:

$$\varphi_{x_1, y_1}(x, y) = \varphi_0(x_1 - x, y_1 - y) \quad (3.5)$$

Per distinguere cellule appartenenti a canali cromatici differenti introduciamo un parametro $c \in \mathbb{Z}_2$ definito nel seguente modo:

- $c = 0$ indica che il canale cromatico considerato rimane il medesimo;
- $c = 1$ indica un cambiamento del canale cromatico.

Supponiamo che il profilo recettivo fissato sia quello di una cellula appartenente al canale L/M: indichiamo con 0 tale canale e con 1 il canale S/(L+M). In questo modo l'operazione che andremo a definire di seguito risulterà coerente con quello che vogliamo rappresentare, cioè la distinzione tra i profili dei due canali cromatici.

Sia T_{x_1, y_1} la traslazione di un vettore (x_1, y_1) e c_1 il parametro relativo al canale cromatico.

Tutti i profili recettivi possono essere ottenuti come

$$\varphi(x_1, y_1, c_1) = \varphi_{c_1} \circ T_{x_1, y_1} \quad (3.6)$$

3.1. I profili recettori delle cellule sensibili al colore

dove φ_{c_1} indica che al profilo fissato φ_0 è assegnato il canale cromatico indicato da $0 + c_1$. Poichè l'insieme delle traslazioni e $(\mathbb{Z}_2, +)$ sono gruppi abeliani l'insieme dei parametri (x, y, c) può essere visto come un gruppo nello spazio $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_2$ con la seguente operazione:

$$(x_1, y_1, c_1) +_T (x_2, y_2, c_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, [c_1 + c_2]) \quad (3.7)$$

Il gruppo ottenuto è commutativo, con elemento neutro $(0, 0, 0)$ e inverso $(-x, -y, c)$. Ad ogni elemento del gruppo corrisponde un profilo recettivo.

Consideriamo ora la possibilità che le cellule cromatiche a singola opposizione studiate abbiano rispettivamente campi recettivi di dimensione differente. In questo caso, a partire dal profilo recettivo di una cellula fissata possiamo ottenere i profili delle altre cellule tramite traslazione e applicando un'omotetia diretta, la cui matrice associata è definita come:

$$O_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

dove λ , *rapporto di omotetia*, è un valore positivo non nullo. Se $\lambda < 1$ si avrà una dilatazione di fattore λ , mentre per $\lambda > 1$ si avrà una contrazione.

Quindi, denotiamo con T_{x_1, y_1} la traslazione di un vettore (x_1, y_1) e con O_λ la matrice di omotetia di rapporto λ . Tutti i profili recettivi delle cellule possono essere interpretati come:

$$\varphi(x_1, y_1, \lambda_1, c_1) = \varphi_{c_1} \circ A_{x_1, y_1, \lambda_1} \quad (3.9)$$

dove $A_{x_1, y_1, \lambda_1} = T_{x_1, y_1} \circ O_{\lambda_1}$ e applicata nel punto (x, y) porta a:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Il set di parametri $g_1 = (x_1, y_1, \lambda_1, c_1)$ forma un gruppo con l'operazione

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

indotta dalla composizione $A_{x_1, y_1, \lambda_1, c_1} \circ A_{x_2, y_2, \lambda_2, c_2}$. Ciò risulta essere:

$$g_1 \cdot g_2 = (x_1, y_1, \lambda_1, c_1) +_O (x_2, y_2, \lambda_2, c_2) = (x_1 + \lambda_1 x_2, y_1 + \lambda_1 y_2, \lambda_1 \lambda_2, [c_1 + c_2]) \quad (3.11)$$

L'operazione $+_O$ verifica le proprietà di gruppo, ma non è commutativa. Infatti,

$$(x_2, y_2, \lambda_2, c_2) +_O (x_1, y_1, \lambda_1, c_1) = (x_2 + \lambda_2 x_1, y_2 + \lambda_2 y_1, \lambda_2 \lambda_1, [c_2 + c_1]) \quad (3.12)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= \lambda_2 \lambda_1 \\ c_1 + c_2 &= c_2 + c_1 \\ (x_1 + \lambda_1 x_2, y_1 + \lambda_1 y_2) &\neq x_2 + \lambda_2 x_1, y_2 + \lambda_2 y_1. \end{aligned}$$

L'elemento neutro è rappresentato da $(0, 0, 1, 0)$ e l'inverso $g_1^{-1} = (x_1, y_1, \lambda_1, c_1)^{-1}$ è dato da $(-\frac{x_1}{\lambda_1}, -\frac{y_1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_1}, c_1)$.

In conclusione, abbiamo ottenuto un gruppo non abeliano, generato dall'operazione $+_O$ nello spazio $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}_2$. Ogni profilo recettivo è identificato da un elemento del gruppo. Da questo risultato ne consegue che i segnali elaborati dalle cellule a singola opponenza saranno identici sotto traslazioni e dilatazioni/contrazioni dell'immagine catturata dalla retina.

I ragionamenti fino a qui esposti possono essere applicati sia a profili di cellule a singola opponenza di Tipo I sia a quelli di cellule di Tipo II. Inoltre, considerata una singola cellula le trasformazioni di traslazione e/o omotetia sono applicate in ugual modo per entrambi i coni del canale cromatico opponente in esame.

3.1.3 Cellule a doppia opponenza

Nella corteccia visiva primaria, V1, oltre a cellule cromatiche a singola opponenza si trovano cellule neuronali il cui profilo recettivo mostra pro-

3.1. I profili recettori delle cellule sensibili al colore

prietà più complesse. I profili recettivi sono cromaticamente e spazialmente opposti. In particolare, è stato riportato che alcuni neuroni in V1, chiamati a doppia opposizione, sono sensibili all'orientazione dei bordi cromatici e acromatici (si veda [25]).

In un primo momento vari studiosi sostennero che i profili recettivi delle cellule a doppia opposizione fossero circolari con un'organizzazione centro-periferia (Figura 3.2.B). Tuttavia, tale modello non ha trovato riscontro nei risultati sperimentali raggiunti negli ultimi anni. Infatti, vari esperimenti hanno dimostrato che le cellule a doppia opposizione sono sensibili all'orientazione e per questo motivo è stato proposto un profilo recettivo che tenga conto di questo, come mostrato in Figura 3.2.A. Nell'esempio qui proposto il profilo recettivo è composto da sottoregioni. All'interno di ogni sottoregione, i coni L e i coni M inviano segnali di segno opposto, ma non sono esattamente bilanciati in intensità. Anche la simmetria spaziale non è più la stessa di quella di un neurone *centre-surround*, ma assomiglia ai campi recettivi spaziali asimmetrici o dispari-simmetrici di cellule non opposti.

Per ogni cono il profilo recettivo con due regioni spazialmente antagoniste e affiancate tra loro (Figura 3.2.A) può essere modellato utilizzando la derivata parziale del primo ordine di una Gaussiana bidimensionale:

$$\psi(x, y, \theta) = \frac{\partial G(x, y, \theta)}{\partial \tilde{x}} \quad (3.13)$$

$$G(x, y, \theta) = \frac{1}{2\pi(k\sigma)^2} e^{-\frac{\tilde{x}^2 + \gamma^2 \tilde{y}^2}{2(k\sigma)^2}} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \tilde{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (3.15)$$

dove

- γ controlla l'ellitticità dei profili recettivi (*spatial aspect ratio*);
- θ è l'orientamento preferito di una data cellula;

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

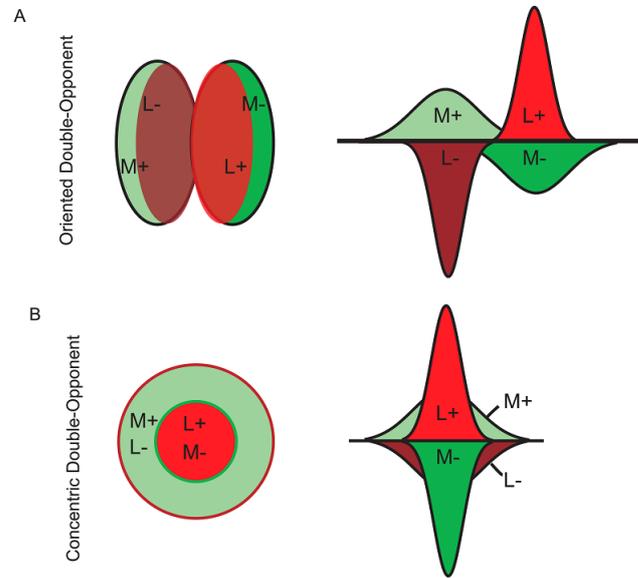


Figura 3.2: Modelli di profili recettivi dei neuroni a doppia opposenza. A sinistra l'organizzazione del campo recettivo bidimensionale e a destra l'ipotetico profilo di sensibilità spaziale. A: Cellula semplice a doppia opposenza sensibile all'orientazione; B: modello classico di un ipotetico neurone a doppia opposenza con geometria circolare centro-periferia.

- $k\sigma$ determina la dimensione del profilo recettivo della cellula.

Il parametro σ può essere scelto uguale a quello utilizzato per i profili recettori delle cellule a singola opposenza in modo da utilizzare un'unica scala.

Se si sceglie di impostare k ad un valore diverso da 1, ad esempio due, significherebbe che il profilo recettivo dei neuroni in V1 è due volte più grande in diametro rispetto al profilo di una cellula con $k = 1$.

3.1.4 L'insieme dei profili recettivi delle cellule a doppia opposenza come gruppo

Procediamo il modo analogo a quanto fatto per le cellule a singola opposenza, modellando il profilo recettivo relativo ad ogni cono. Fissato σ i profili avranno valori di k differenti e saranno invertiti di segno. Ad esempio, per

3.1. I profili recettori delle cellule sensibili al colore

la cellula relativa al canale L/M mostrata in figura 3.2. A il profilo relativo al cono M sarà sempre una derivata prima di Gaussiana come il profilo relativo al cono L, ma avrà un valore di k maggiore dato che la dimensione del profilo è maggiore.

Consideriamo prima il caso in cui tutte le cellule a doppia opponenza abbiano campi recettivi della medesima dimensione. In questo caso i profili recettivi delle cellule si possono ottenere da quello di una cellula fissata, $\psi_0(x, y, \theta, c)$ tramite traslazione e rotazione.

Denotiamo con T_{x_1, y_1} la traslazione di un vettore (x_1, y_1) , con c_1 il parametro relativo al canale cromatico e sia R_θ la matrice di rotazione di un angolo θ :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Tutti i profili recettivi delle cellule possono essere interpretati come:

$$\psi(x, y, \theta, c_1) = \psi_{c_1} \circ M_{x_1, y_1, \theta_1} \quad (3.17)$$

dove $M_{x_1, y_1, \theta_1} = T_{x_1, y_1} \circ R_{\theta_1}$ e applicata nel punto (x, y) porta a:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Il set di parametri $p_1 = (x_1, y_1, \theta_1, c_1)$ forma un gruppo con l'operazione indotta dalla composizione $M_{x_1, y_1, \theta_1} \circ M_{x_2, y_2, \theta_2}$. Ciò risulta essere:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= (x_1, y_1, \theta_1, c_1) +_R (x_2, y_2, \theta_2, c_2) = \\ &= \left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + R_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_1 + \theta_2, [c_1 + c_2] \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

L'operazione $+_R$ verifica le proprietà di gruppo, ma non è commutativa.

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

Infatti,

$$(x_2, y_2, \theta_2, c_2) +_R (x_1, y_1, \theta_1, c_1) = \left(\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + R_{\theta_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_2 + \theta_1, [c_2 + c_1] \right) \quad (3.20)$$

Si ha $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$ e $c_1 + c_2 = c_2 + c_1$, ma il primo termine è diverso.

L'elemento neutro è rappresentato da $(0, 0, 0, 0)$ e l'inverso $p_1^{-1} = (x_1, y_1, \theta_1, c_1)^{-1}$ è dato da $(-x_1 \cos \theta_1 + y_1 \sin \theta_1, -x_1 \sin \theta_1 - y_1 \cos \theta_1, -\theta_1, c_1)$.

In conclusione, abbiamo ottenuto un gruppo non abeliano, generato dall'operazione $+_R$ nello spazio $\mathbb{R}^2 \times S^1 \times \mathbb{Z}_2$. Ogni profilo recettivo è identificato da un elemento del gruppo. Da questo risultato ne consegue che i segnali elaborati dalle cellule a singola opponenza saranno identici sotto traslazioni e rotazioni dell'immagine catturata dalla retina.

Ora consideriamo il caso in cui le cellule abbiano campi recettivi di dimensione differente. In questo caso, i profili recettivi possono essere ottenuti dal profilo di una cellula fissata per traslazione, rotazione ed anche dilatazione/contrazione. Usando le notazioni precedenti si avrà:

$$\psi_{x_1, y_1, \theta_1, \lambda_1, c_1} = \psi_{c_1} \circ Q_{x_1, y_1, \theta_1, \lambda_1} \quad (3.21)$$

dove $Q_{x_1, y_1, \theta_1, \lambda_1} = M_{x_1, y_1, \theta_1} \circ O_{\lambda_1}$ e applicata nel punto (x, y) porta a:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos \theta_1 & \lambda_1 \sin \theta_1 \\ -\lambda_1 \sin \theta_1 & \lambda_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

In questo caso gli elementi del tipo $p_1 = (x_1, y_1, \theta_1, \lambda_1, c_1)$ forma un gruppo con l'operazione indotta dalla composizione $Q_{x_1, y_1, \theta_1, \lambda_1} \circ Q_{x_2, y_2, \theta_2, \lambda_2}$. Ciò

3.2. Dai profili recettori al modello Retinex

risulta essere:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= (x_1, y_1, \theta_1, \lambda_1, c_1) \star (x_2, y_2, \theta_2, \lambda_2, c_2) = \\ &= \left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \lambda_1 R_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_1 + \theta_2, \lambda_1 \lambda_2, [c_1 + c_2] \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'operazione \star verifica le proprietà di gruppo, ma non è commutativa. L'elemento neutro è $(0, 0, 0, 1, 0)$ e l'inverso di un generico elemento $(x, y, \theta, \lambda, c)$ è dato da

$$\left(\left(\frac{1}{\lambda} R_{\theta}^{-1} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \right)^T, -\theta, \frac{1}{\lambda}, c \right) \quad (3.24)$$

Concludendo, abbiamo ottenuto un gruppo non abeliano, generato dall'operazione \star nello spazio $\mathbb{R}^2 \times S^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}_2$. Ogni profilo recettivo è identificato da un elemento del gruppo.

3.2 Dai profili recettori al modello Retinex

Analizziamo il caso in cui lo stimolo visivo sia un'immagine in bianco e nero. Per semplicità consideriamo in un primo momento solo le cellule gangliari e del LGN appartenenti al canale cromatico Bianco-Nero. Infatti, procedendo in questo modo risulterà più facile modellare i profili recettori delle cellule.

Ogni neurone visivo è caratterizzato dal suo campo recettivo. Come già detto in precedenza sperimentalmente è stato scoperto che le cellule gangliari e del LGN, se sottoposte ad uno stimolo luminoso, non rispondono uniformemente su tutto il proprio campo recettivo. Questo può essere diviso in due zone concentriche, a risposta opposta. Si possono distinguere due classi di cellule appartenenti alla classe di cellule di tipo I *center-surround*:

- a *centro-on*: risposta eccitatoria al centro, inibitoria nella periferia;

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

- a *centro-off* risposta inibitoria al centro, eccitatoria nella periferia.

In entrambe le classi la parte centrale del campo recettivo presenta una sensibilità allo stimolo luminoso maggiore che non la parte periferica.

Coerentemente con la notazione adottata in precedenza indichiamo il profilo recettore di una cellula come la funzione $\varphi(x, y) : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Quando uno stimolo visivo $I(x, y) : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ attiva lo strato retinico, le cellule centrate nei punti $(x, y) \in M$ processano in parallelo gli stimoli retinici con i loro profili recettivi.

E' possibile modellare questi profili recettivi attraverso il Laplaciano di una Gaussiana.

Posto

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(\xi^2+\eta^2)}{2\sigma^2}} \quad (3.25)$$

il profilo recettivo di una cellula gangliare sarà:

$$\varphi(\xi, \eta) = \Delta G(\xi, \eta) \quad (3.26)$$

dove il parametro σ controlla la dimensione del profilo.

Sia φ_0 il profilo recettivo di una cellula fissata. Sopra ogni altro punto del piano retinico vi è una cellula analoga, che si ottiene per traslazione:

$$\varphi_{(x,y)}(\xi, \eta) = \varphi_0(x - \xi, y - \eta) \quad (3.27)$$

Fissato σ formalmente l'insieme dei profili recettivi $\{\varphi_{(x,y)} : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ sarà identificato con una copia del gruppo commutativo $(\mathbb{R}^2, +)$.

Stessi profili recettivi si trovano nel Nucleo Genicolato Laterale.

Se la retina è sottoposta ad uno stimolo visivo puntiforme in un punto (x, y) , la risposta della cellula è descritta dalla funzione $\varphi(x, y)$. Se invece sulla retina è proiettato uno stimolo visivo $I(x, y)$, ad esempio un'immagine, allora la cellula corticale provvederà ad integrare gli stimoli che provengono dai diversi punti, con densità dipendente dall'intensità dello stimolo visivo. L'output della cellula sarà quindi in generale descrivibile mediante un inte-

3.2. Dai profili recettori al modello Retinex

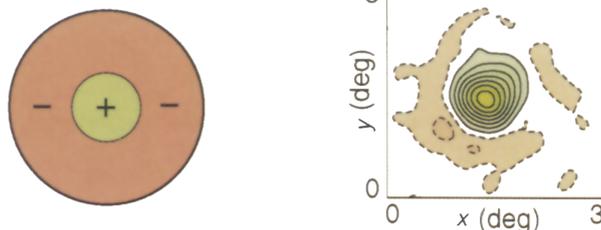


Figura 3.3: **Profilo recettivo dei neuroni delle cellule gangliari e del LGN.** A *sinistra* un profilo schematico di una cellula centro-on e a *destra* un profilo rilevato sperimentalmente.

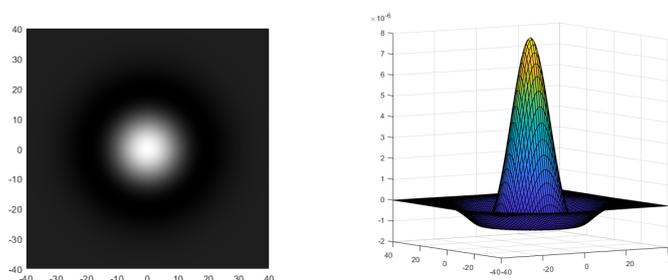


Figura 3.4: Laplaciano di Gaussiana ottenuto tramite software Matlab

grale.

Sia $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un'immagine in bianco e nero. Allora l'output delle cellule sarà:

$$\begin{aligned}
 O(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_{(x,y)}(\xi, \eta) I(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_0(x - \xi, y - \eta) I(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \Delta G(x - \xi, y - \eta) I(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\
 &= (\Delta G * I)(x, y) = \\
 &= \Delta(G * I)(x, y) \approx \Delta I(x, y)
 \end{aligned}$$

L'output delle cellule del LGN si propaga attraverso la connettività orizzontale nel LGN stesso. Sperimentalmente si è dimostrato che tale connet-

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

tività è isotropa. Di conseguenza sia i profili recettivi che la connettività hanno la stessa simmetria radiale. Quindi possiamo scegliere come modello della connettività la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace nella metrica isotropa euclidea:

$$\Gamma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.28)$$

In modo analogo alle cellule del LGN, la connettività laterale agisce sull'output $O(x, y)$, con forza $\Gamma(x, y)$, dando un totale contributo pari a

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \int \Gamma(\xi - x, \eta - y) O(x, y) dx dy = \\ &= (\Gamma * O)(\xi, \eta) = \end{aligned}$$

Ne consegue

$$\Delta u = O * \Delta I$$

Si noti che stiamo identificando l'insieme di profili recettivi con \mathbb{R}^2 , la geometria è quella euclidea e la propagazione viene eseguita con il Laplaciano standard su di esso. Ciò non significa che l'immagine percepita coincida in generale con l'input visivo originario. Infatti, $O(x, y) = \Delta I$ non implica che $u = I$, ma implica che $u - I$ è una funzione armonica.

3.3 Risultati

3.3.1 Immagini in bianco e nero

Applichiamo quanto appena descritto all'immagine 3.5. L'immagine I considerata presenta due cerchi le cui intensità di grigio apparentemente sembrano essere diverse, ma in realtà sono uguali. Questa illusione ottica è causata dal contrasto con sfondo. Esso non è uniforme, bensì lineare in ξ , ossia della forma $I = a\xi + b$.

L'output delle cellule del LGN compie una prima elaborazione come mostrato

3.3. Risultati



Figura 3.5: A sinistra l'immagine originale sulla quale è stato applicato l'algoritmo. A destra i cerchi separati dallo sfondo dell'immagine.

in Figura 3.6 (a). Poichè lo sfondo è lineare $\Delta I = 0$ calcolato nei punti dello sfondo: coerentemente l'azione delle cellule produce uno sfondo costante.

La seconda elaborazione compiuta dalla connettività orizzontale delle cellule dà l'output mostrato in Figura 3.6 (b). Osserviamo che il cerchio a destra appare di un livello di grigio più luminoso di quello a sinistra.

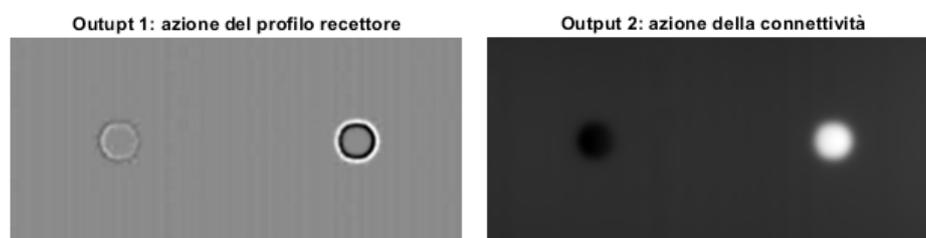


Figura 3.6: Applicazione algoritmo Retinex all'immagine 3.5

L'algoritmo descritto è stato implementato tramite l'utilizzo del software Matlab: riportiamo di seguito il codice.

```
1 Image = imread('example.jpg'); %lettura immagine
2 I = rgb2gray(Image); %conversione immagine in scala di grigi
3
4 %% Costruzione Output1 : azione del profilo recettivo ...
   (laplaciano di gaussiana)
5 sigma = 1.4;
6 [X,Y] = meshgrid(-10 : 10);
```

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

```
7 G = (1/(2*pi*sigma^2))*exp((-X.^2-Y.^2)/(2*sigma^2)); ...
    %gaussiana
8 L = del2(G); %laplaciano
9 surf(X,Y,L);
10 colorbar
11
12 figure
13 pcolor(X,Y,L);
14 colormap('gray');
15 shading interp;
16 axis square;
17
18 O1 = conv2(I,L,'valid'); %Output1 senza effetto di bordo
19
20 %% Costruzione Output 2: azione della connettivita'
21 [H,K] = meshgrid(-5:0.01:5);
22 sol = log(H.^2+K.^2+ 0.001); %soluzione fondamentale
23
24 O2 = conv2(O1,sol,'same'); %convoluzione tra Output1 e ...
    sol.fondamentale
25
26 figure,imshow(I);title('Immagine originale');
27 figure,imshow(O1,[]);title('Output 1: azione del profilo ...
    recettore');
28 figure,imshow(O2,[]);title('Output 2: azione della ...
    connettivita');
```

3.3.2 Immagine a colori

Consideriamo ora l'immagine test a valori RGB rappresentata nella Figura 3.7: è stata scelta perchè presenta solo gradazioni di verde e di rosso, in modo da poter effettuare un'analisi più semplice, considerando solo il canale cromatico Rosso-Verde.

In questo caso le cellule coinvolte nella percezione del colore sono cellule a singola opponenza il cui profilo recettivo è dato da due gaussiane, una per la

3.3. Risultati

parte eccitatoria (G_{ex}) e una per quella inibitoria (G_{in}):

$$G_{ex}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$G_{in}(x, y) = -\frac{1}{2\pi(k\sigma)^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(k\sigma)^2}} \text{ con } k > 1$$

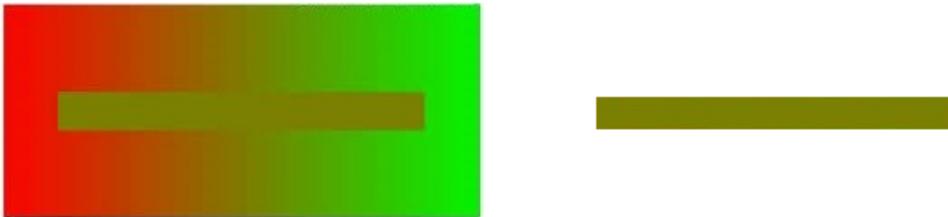


Figura 3.7: Immagine originale a colori e striscia verde *estrapolata*.

Se osserviamo l'immagine originale la striscia centrale di colore verde non ci apparirà di intensità uniforme, ma più chiara a destra e più scura a sinistra. L'illusione ottica è causata, in accordo con la teoria Retinex, dal colore diverso delle parti dello sfondo che circondano la striscia verde.

La prima elaborazione dell'immagine originale è mostrata nella Figura 3.8(a), mentre l'output dato dalla connettività orizzontale delle cellule è mostrato nella Figura 3.8(b). I risultati ottenuti sembrano coerenti con quanto

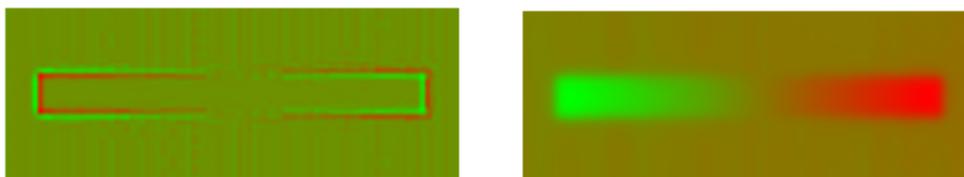


Figura 3.8: Applicazione algoritmo Retinex all'immagine 3.7

riscontrato nel caso dell'immagine in bianco e nero. L'output finale è prova

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

del fatto che il colore che noi percepiamo è effettivamente influenzato dal confronto spaziale con le aree presenti nel nostro campo visivo.

Il codice Matlab dell'implementazione è riportato di seguito.

```
1 Image = imread('red-green.jpg'); %lettura immagine
2 imshow(Image);
3 I = rgb2gray(Image); %conversione in scala di grigi
4 figure; imshow(rescale(I));
5
6 %% Costruzione Output1 : azione del profilo recettivo
7 %DIFFERENZA DI GAUSSIANE%
8
9 sigma1 = 1.2;
10 sigma2 = 1.6;
11 a = 1;
12
13 [X,Y] = meshgrid(-15 : 15);
14 G1 = (1/(2*pi*sigma1^2))*exp((-X.^2-Y.^2)/(2*sigma1^2));
15 G2 = -a*(1/(2*pi*sigma2^2))*exp((-X.^2-Y.^2)/(2*sigma2^2));
16 D = G1+G2;
17
18 O1 = conv2(I,-D,'valid');
19 figure,imshow(O1,[]);title('Outupt 1');
20 figure,imshow(rescale(O1));
21 my_map = colorGradient([1 0 0],[0 1 0],256); %gradiente ...
    tra 2 colori per creare colormap
22 colormap(my_map);
23
24 %% Costruzione Output 2: azione della connettivita'
25 [H,K] = meshgrid(-3.6:0.01:3.6);
26 sol = log(H.^2+K.^2+ 0.001); %soluzione fondamentale
27
28 OO1 = conv2(O1, sol,'same');
29 figure,imshow(OO1,[]);title('Output 2');
30 figure,imshow(rescale(OO1));
31 colormap(my_map);
```

3.3. Risultati

Analizziamo ora il caso di un'immagine test a valori RGB generica, in modo da non considerare un solo canale cromatico. Utilizziamo l'immagine in Figura 3.9.

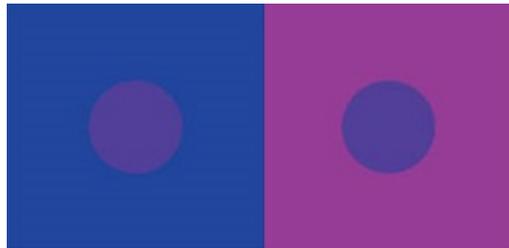


Figura 3.9: Immagine originale a colori da elaborare



Figura 3.10: I due cerchi separati dallo sfondo dell'immagine originale appaiono identici.

In questo caso usiamo lo spazio dei colori **HSV** (*Hue Saturation Value*): l'approccio consiste nel decomporre l'immagine a colori in tre componenti, ossia tonalità, saturazione e valore o luminosità. La componente corrisponde alla luminosità di ogni pixel dell'immagine, per cui risulta ragionevole trattare solo tale componente, poiché stiamo cercando di estrarre l'immagine dell'illuminazione. Dopo aver convertito l'immagine in input a valori RGB ad un'immagine a valori HSV procediamo in modo analogo al caso precedente, applicando le due elaborazioni alla sola componente V. L'output che otteniamo è rappresentato in figura 3.11:

Osserviamo che l'immagine ottenuta ci mostra il cerchio di sinistra un po' più chiaro, mentre quello di destra più scuro, in accordo con quanto i nostri occhi percepiscono, anche se i due cerchi sono in realtà del medesimo colore (figura 3.10).

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

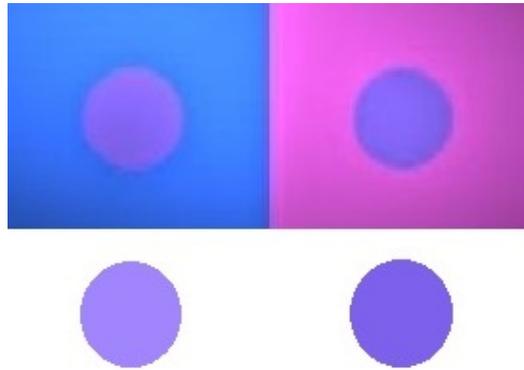


Figura 3.11: Immagine output.

Il codice Matlab utilizzato è il seguente:

```
1 Image = imread('violet_original.jpg');
2 figure; imshow(Image);
3
4 I = rgb2hsv(Image);
5
6 I1 = double(I(:,:,1));
7 I2 = double(I(:,:,2));
8 I3 = double(I(:,:,3));
9
10 %Costruzione Output 1
11 %DIFFERENZA DI GAUSSIANE%%
12 sigma1 = 1.3;
13 sigma2 = 1.9;
14 a = 1;
15
16 v = 8;
17 [X,Y] = meshgrid(-v : v);
18 G1 = (1/(2*pi*sigma1^2))*exp((-X.^2-Y.^2)/(2*sigma1^2));
19 G2 = -a*(1/(2*pi*sigma2^2))*exp((-X.^2-Y.^2)/(2*sigma2^2));
20 D = G1+G2;
```

3.3. Risultati

```
21
22 O3 = conv2(I3,-D,'valid');
23 figure,imshow(O3,[]);title('Outupt 1');
24
25 %% Costruzione Output 2
26 [H,K] = meshgrid(-3.5:0.003:3.5);
27 sol = log(H.^2+K.^2+ 0.001);
28
29 O03 = conv2(O3, sol,'same');
30 figure,imshow(O03,[]);title('Output 2 B');
31
32 I1 = I1(v+1:end-v,v+1:end-v);
33 I2 = I2(v+1:end-v,v+1:end-v);
34 F = cat(3,I1,I2,O03);
35 F = hsv2rgb(F);
36
37 figure;imshow(F,[]);
```

3.3.3 Confronto con metodo *steepest descent*

Utilizziamo ora il metodo di *steepest descent* e confrontiamo i risultati prodotti con quelli ottenuti in precedenza.

Il codice Matlab dell'implementazione è riportato di seguito.

```
1 Image = imread('violet_original.jpg'); %lettura immagine
2 [n2,n1,n3] = size(Image);
3
4 paint = cast(Image,'double');
5 paint2 = cast(paint,'uint8');
6 figure; imagesc(paint2);
7 axis tight; axis off; axis equal;
8 drawnow
9
10 paintoriginal = paint;
11 f = paint.*0;
```

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*

```
12 f(:, :, 1) = ...
    Dxx(paintoriginal(:, :, 1))+Dyy(paintoriginal(:, :, 1));
13 f(:, :, 2) = ...
    Dxx(paintoriginal(:, :, 2))+Dyy(paintoriginal(:, :, 2));
14 f(:, :, 3) = ...
    Dxx(paintoriginal(:, :, 3))+Dyy(paintoriginal(:, :, 3));
15
16 img = paint.*0;
17 img = img.*0+sum(sum(paint))/(n1*n2);
18 dt =.1;
19
20 for i=1:5000
21     img(:, :, 1)=img(:, :, 1)+dt.*(Dxx(img(:, :, 1))+ ...
22         Dyy(img(:, :, 1))-f(:, :, 1));
23     img(:, :, 2)=img(:, :, 2)+dt.*(Dxx(img(:, :, 2))+ ...
24         Dyy(img(:, :, 2))-f(:, :, 2));
25     img(:, :, 3)=img(:, :, 3)+dt.*(Dxx(img(:, :, 3))+ ...
26         Dyy(img(:, :, 3))-f(:, :, 3));
27 end
28
29 Mi = max(max(max(img)));
30 mi = min(min(min(img)));
31 img1 = (img-mi).*256./(Mi-mi);
32 paint3 = cast(img, 'uint8');
33 figure; imagesc(paint3);
34 axis tight; axis off; axis equal;
35 drawnow
36
37 function f = Dxx(Mat)
38     [m, n] = size(Mat);
39     f = Mat([2:m, m], 1:n) - 2.* Mat + Mat([1, 1:m-1], 1:n);
40 end
41
42 function f = Dyy(Mat)
43     [m, n] = size(Mat);
44     f = Mat(1:m, [2:n, n]) - 2.*Mat + Mat(1:m, [1, 1:n-1]);
45 end
```

3.3. Risultati

In questa implementazione lo spazio di colore utilizzato è lo spazio RGB: dall'immagine originale vengono estratte le tre componenti cromatiche e per ognuna di queste viene applicato il metodo di *steepest descent*.

L'output che otteniamo è il seguente:

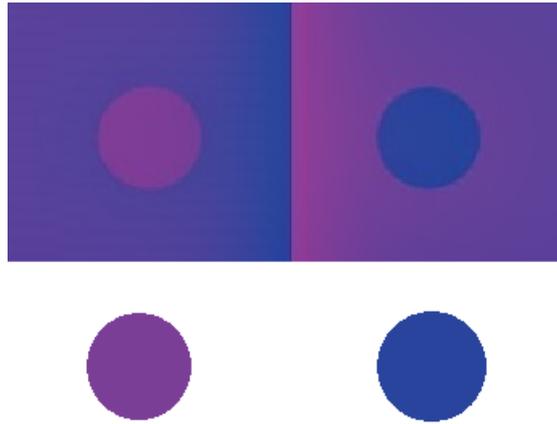


Figura 3.12: Immagine output prodotta tramite *steepest descent* e cerchi *estrapolati* dallo sfondo.

Possiamo notare che anche in questo caso l'immagine ottenuta presenta il cerchio di sinistra più chiaro e quello di destra più scuro, coerentemente con la nostra sensazione percettiva. Ciò che cambia è, invece, lo sfondo: la *steepest descent* cerca di regolarizzare l'immagine, per cui tenta di uniformare lo sfondo, che però in questa immagine test non è lineare.

Se, invece, utilizziamo come immagine test quella in Figura 3.13 (A), ossia un'immagine con sfondo lineare quello che produce l'algoritmo è un'immagine ben regolarizzata.

Diversa è l'immagine che otteniamo come output se utilizziamo il modello di percezione cromatica precedentemente illustrato e lo spazio colore HSV. Infatti, possiamo osservare che in questo caso lo sfondo non è stato regolarizzato e i bordi sono meno nitidi (Figura 3.14).

3. Azione delle cellule sensibili al colore e modello *Retinex*



Figura 3.13: A)Immagine test con sfondo lineare. B)Immagine output.



Figura 3.14: Immagine output nello spazio colore HSV.

Tutte le elaborazioni effettuate sono il risultato di scelte fatte sui valori dei parametri coinvolti negli algoritmi, al fine di produrre immagini output abbastanza coerenti con ciò che ci aspettavamo. Per questo un miglioramento a livello computazionale degli algoritmi proposti potrebbe essere quello di ricercare i valori migliori dei parametri, valutando in termini di errore la differenza tra l'immagine originale e quella finale.

Conclusioni

Modellare la visione umana dei colori è un compito molto arduo. Richiede una profonda comprensione dei principi e dei meccanismi sottostanti, a partire dal segnale luminoso che entra nell'occhio, raggiunge la retina e prosegue attraverso il LGN fino alla corteccia visiva primaria. L'ostacolo principale è che non tutte le funzioni e gli aspetti della visione umana dei colori sono ancora completamente studiati e compresi.

In questa tesi abbiamo considerato solo alcuni degli aspetti conosciuti, così come alcuni meccanismi e teorie, e li abbiamo collegati a diversi modelli di visione già esistenti.

Il nostro principale intento è stato quello di sviluppare un semplice modello matematico di percezione del colore che tenesse conto dei profili recettivi delle cellule cromatiche, al fine di comprendere alcuni tra i tanti e complessi meccanismi operati dal nostro cervello.

In un primo momento ci siamo soffermati sul sistema visivo umano dal punto di vista anatomico e fisiologico e sul processo di acquisizione delle informazioni cromatiche dal mondo esterno ai nostri occhi.

Particolare interesse è stato riportato nella ricerca dello stato dell'arte dei modelli matematici e computazionali di percezione del colore che sono stati sviluppati negli anni, a partire da quello *Retinex* di Land e McCann ([12]) fino a quello proposto da Morel ([21]).

Sulla base delle ricerche degli ultimi decenni abbiamo modellizzato i profili recettori delle cellule a singola e doppia opponenza, responsabili della percezione cromatica. In particolare, abbiamo formalizzato la prima elaborazione compiuta dal sistema visivo umano e ne abbiamo fatto un'implementazione a livello computazionale utilizzando il software Matlab.

Abbiamo applicato il modello ad immagini che mostrano illusioni ottiche di *contrasto del colore*. I risultati ottenuti dal nostro modello sono stati confrontati con quelli ottenuti tramite implementazione della *steepest descent*: si può evincere che quest'ultimo metodo dà immagini output meglio regolarizzate nei bordi, in quanto vengono applicate delle condizioni al contorno.

Ad oggi sono numerosi i modelli matematici e computazionali che tentano di *imitare* il fenomeno di percezione cromatica: essi vengono utilizzati in molteplici settori, come nel settore biomedico, nell'elaborazione delle immagini digitali e nella robotica. Ad esempio, nell'ambito della medicina, un modello matematico della visione umana aiuterà a studiare il comportamento del sistema visivo in varie condizioni e situazioni, per prevedere possibili carenze e restrizioni della visione. Sarà così, possibile aprire nuove strade per il trattamento di deficit visivi.

Tuttavia, occorrono ancora molteplici ricerche per poter raggiungere una migliore e più completa comprensione del complesso e affascinante funzionamento che sta alla base della percezione del colore operata dal nostro sistema visivo.

Bibliografia

- [1] Ambrosetti Antonio, Malchiodi Andrea, *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [2] Citti Giovanna, Sarti Alessandro, *A Gauge Field Model of Modal Completion*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2013.
- [3] Citti Giovanna, Sarti Alessandro, *Neurogeometry of Perception: Isotropic and Anisotropic Aspects*, Axiomathes, 2019.
- [4] Conti Fiorenzo, *Fisiologia Medica*, Vol. 1, Edi. Ermes, 2005.
- [5] Conway Bevil, Chatterjee Soumya, Field Greg, Horwitz Gregory, Johnson Elizabeth, Koida Kowa, Mancuso Katherine, *Advances in Color Science: From Retina to Behavior*, The Journal of Neuroscience, Vol. 30, pp. 14955-63, 2010.
- [6] Gregory C. DeAngelis, Izumi Ohzawa, Ralph D. Freeman, *Receptive-field dynamics in the central visual pathways*, Trends in Neurosciences, Vol. 18(10), pp. 451-458, 1995.
- [7] Kimmel Ron, Elad Michael, Shaked Doron, Keshet Renato, Sobel Irwin, *A Variational Framework for Retinex*, International Journal of Computer Vision, Vol. 52, pp. 7-23, 2003.

- [8] Kremers Jan, Baraas Rigmor, Marshall N. Justin, *Human Color Vision*, Springer Series in Vision Research, Vol. 5, Springer International Publishing, 2016.
- [9] Land Edwin H., *Recent advances in retinex theory and some implications for cortical computations: color vision and the natural image*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA., Vol. 80, pp. 5163-5169, 1983.
- [10] Land Edwin H., *THE RETINEX*, American Scientist, Vol. 52(2), pp. 247-264, 1964.
- [11] Land Edwin H., *The Retinex Theory of Color Vision*, Scientific American, Vol. 237(6), pp. 108-128, 1977.
- [12] Land Edwin H., McCann John J., *Lightness and Retinex Theory*, Journal of the Optical Society of America, Vol. 61(1), pp. 1-11, 1971.
- [13] Lindeberg Tony, *A computational theory of visual receptive fields*, Biological Cybernetics, Vol. 107, pp. 589-635, 2013.
- [14] Lourens Tino, *A Biologically Plausible Model for Corner-based Object Recognition from Color Images*, Shaker, 1998.
- [15] Marini Daniele, Rizzi Alessandro, *A computational approach to color illusions*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1310, 1997.
- [16] McCann John J., *Color constancy: small overall and large local changes*, Proceedings Reprint SPIE, Vol. 1666, Human Vision, Visual Processing, and Digital Display III, 1992.
- [17] McCann John J., *Lessons Learned from Mondrians Applied to Real Images and Color Gamuts*, Is&T Rep, Vol. 14, pp. 1-8, 1999.
- [18] McCann John J., *Retinex at 50: color theory and spatial algorithms, a review*, Journal of Electronic Imaging, Vol. 26(3), 2017.

BIBLIOGRAFIA

- [19] McCann John J., *Rules for colour constancy*, Ophthalmic Physiological Optics, Vol. 12(2), pp.175-177, 1992.
- [20] McCann John J., Rizzi Alessandro, *The Art and Science of HDR Imaging*, John Wiley & Sons, Ltd, 2011.
- [21] Morel Jean Michel, Petro Ana Belen, Sbert Catalina. *A PDE formalization of Retinex theory*, IEEE Trans. Image Process., Vol. 19(11), pp. 2825-37, 2010.
- [22] Morel Jean Michel, Petro Ana Belen, Sbert Catalina, *Fast implementation of color constancy algorithms*, Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2009.
- [23] Petitot Jean, *Elements of Neurogeometry: Functional Architectures of Vision*, Springer, 2017.
- [24] Provenzi Edoardo, Fierro Massimo, Rizzi Alessandro, De Carli Luca, Gadia Davide, Marini Daniele, *Random Spray Retinex: A New Retinex Implementation to Investigate the Local Properties of the Model*, IEEE Transactions on Image Processing: a publication of the IEEE Signal Processing Society, Vol. 16, pp. 162-171, 2007.
- [25] Shapley Robert, Hawken Michael J., *Color in the Cortex: single- and double-opponent cells*, Vision Research, Vol. 51(7), pp. 701-717, 2011.
- [26] Shapley Robert, Hawken Michael J., *Neural mechanisms for color perception in the primary visual cortex*, Current Opinion in Neurobiology, 12, pp. 426-432, 2002.
- [27] Tovée Martin J., *An Introduction to the Visual System*, Cambridge University Press, 2008.
- [28] Westland Stephen, Cheung Vien, *Colour Perception*, Total Colour Management in Textiles, pp.7-21, Woodhead Publishing, 2006.

- [29] Wiesel Torsten N., Hubel David H., *Spatial and Chromatic Interactions in the Lateral Geniculate Body of the Rhesus Monkey*, Journal of Neurophysiology, Vol. 29(6), pp. 1115-56, 1966.
- [30] Yang Kai-Fu, Gao Shaobing, Li Chaoyi, Li Yongjie, *Boundary Detection Using Double-Opponency and Spatial Sparseness Constraint*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 24, no. 8, pp. 2565-2578, 2015.
- [31] Yang Kai-Fu, Gao Shaobing, Li Chaoyi, Li Yongjie, *Efficient Color Boundary Detection with Color-Opponent Mechanisms*, Proceedings/CVPR IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2013.
- [32] Zosso Dominique, Tran Giang, Osher Stanley, *A unifying retinex model based on non-local differential operators*, Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, Vol. 8657, 2013.

Ringraziamenti

Ringrazio la mia relatrice, la Professoressa Giovanna Citti, per avermi affiancata e supportata nella stesura di questa tesi con grande professionalità e disponibilità. Grazie per essere riuscita a trasmettermi la sua passione per la disciplina e la sua curiosità.

Ringrazio di cuore i miei genitori, Patrizia e Massimo, che mi hanno sempre sostenuta e amata. Grazie per i sacrifici che hanno fatto per permettermi di raggiungere questo traguardo importante. Ringrazio mio fratello Cristian per avermi strappato un sorriso nei momenti di difficoltà.

Un grazie speciale va ai miei nonni che hanno sempre creduto in me e che mi hanno dato la giusta motivazione per affrontare il mio percorso di studi, puntando sempre a dare il meglio.

Una dedica speciale va a tutti i miei amici, che hanno condiviso con me i sacrifici, le gioie, i successi, i pianti, gli sconforti, stando sempre al mio fianco. Grazie alla mia amica di sempre Giulia, per avermi mostrato affetto e sostegno fin da quando eravamo piccole. Grazie per avermi fatta ridere fino alle lacrime anche nei momenti più tristi.

Grazie Mari per essermi sempre stata accanto in questi anni come una sorella e per avermi sempre supportata, condividendo con me emozioni e ansie. Grazie Arianna per avermi spronata e incoraggiata a dare sempre il massimo. Grazie Jenni, Sara, Giulia per aver creduto nelle mie potenzialità e per riuscire sempre a sollevarmi il morale.

Ringrazio Marina, conosciuta fra i banchi di Matematica, che ha saputo starmi vicino anche a chilometri di distanza e che riesce sempre a farmi sorridere.

3. Ringraziamenti

Grazie per tutte le volte che mi hai sopportato nei miei momenti di sclero. Grazie Sofia, compagna di danze e pazzie, per la grinta hai saputo trasmettermi ogni giorno. Ho capito subito che avrei potuto contare su di te. Infine, un grazie speciale va a me stessa, per non aver mai perso la determinazione e la curiosità che fanno parte di me fin da bambina. Le parole non saranno mai abbastanza. Spero di aver reso fieri di me tutta la mia famiglia e tutti i miei amici, e mi auguro di potervi rendere soddisfatti di me anche in futuro.