

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Dipartimento di Matematica  
Corso di Laurea in Matematica

**TEORIA DELLA  
RELATIVITA'  
E GEOMETRIE  
DELL'UNIVERSO**

**Relatore:**

Chiar.ma prof.ssa  
Elisa Ercolessi

**Presentata da:**

Edoardo Tesei

**Appello VI  
Anno Accademico 2019-2020**

*C'è stato un tempo  
in cui il mondo  
sembrava semplice.*

Carlo Rovelli

## Sommario

La seguente tesi vuole evidenziare il profondo legame tra la fisica e la geometria presentando la Teoria della Relatività di Einstein e rimarcandone la natura geometrica. Nella prima parte si forniscono gli strumenti matematici necessari alla modellizzazione di uno spazio curvo, più generale del classico spazio piatto Euclideo, e si descrivono oggetti dell'algebra multilineare – i tensori – utili a formalizzare l'invarianza delle leggi fisiche per diversi osservatori. Si rimarcherà come le quantità invarianti abbiano un ruolo quasi secondario in una teoria fisica rispetto alle relazioni covarianti e si estenderà la nozione di differenziazione nota per i campi vettoriali a campi tensoriali definiti su generici spazi curvi. Nella seconda parte si presenta la Relatività Ristretta, non nel modo in cui fu diffusa originariamente da Einstein, bensì alla maniera di Minkowski, che è stato il primo a darne una profonda interpretazione geometrica, gettando le basi per la sua futura generalizzazione. Tramite il formalismo tensoriale, si vede come la Relatività Ristretta costituisca solo un'approssimazione locale di una geometria globalmente più complessa, che risulta distendersi su uno spazio-tempo quadrimensionale curvo. Nella terza parte si costruisce la Relatività Generale, teoria geometrica della gravità, e si deducono le equazioni differenziali per il campo gravitazionale, le cui soluzioni costituiscono una possibile metrica dello spazio-tempo nonché del campo gravitazionale stesso. Si presenta, quindi, la soluzione di Robertson-Walker per un modello cosmologico di universo omogeneo e isotropo che risulta essere dinamico, non statico, e, ancora mediante argomentazioni tensoriali, si conclude che la sua curvatura deve necessariamente essere costante. Da qui si deducono le possibili geometrie dell'universo e mediante le equazioni di Friedmann si accenna allo studio dell'evoluzione temporale di uno spazio-tempo piatto, sferico o iperbolico.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Tensori e spazi curvi</b>	<b>1</b>
1.1 Premesse . . . . .	1
1.2 Elementi di Analisi Tensoriale in SR . . . . .	5
1.2.1 Tensori per matematici . . . . .	6
1.2.2 Tensori per fisici . . . . .	8
1.2.3 Operazioni tensoriali . . . . .	9
1.3 Elementi di Geometria riemanniana . . . . .	10
1.3.1 Varietà riemanniane e lorentziane . . . . .	10
1.3.2 Connessione affine e geodetiche . . . . .	14
1.3.3 Curvatura della connessione affine . . . . .	19
<b>2 Relatività Ristretta</b>	<b>22</b>
2.1 Spazio-tempo e pseudometrica di Minkowski . . . . .	23
2.1.1 Il tensore metrico di Minkowski . . . . .	24
2.1.2 Le trasformazioni di Lorentz . . . . .	25
2.1.3 Il gruppo di Poincaré . . . . .	28
2.2 Il tensore energia-impulso . . . . .	30
2.2.1 Quadrivettori di SR . . . . .	30
2.2.2 Flusso di $\vec{p}$ attraverso una ipersuperficie di $M_0^4$ . . . . .	31
<b>3 Relatività Generale</b>	<b>34</b>
3.1 Il principio di equivalenza . . . . .	34
3.1.1 Principio generale di covarianza . . . . .	38
3.2 Forza e potenziale gravitazionale . . . . .	39
3.2.1 Il tensore di Einstein . . . . .	40
3.3 Equazione di campo e geometrie dell'universo . . . . .	43
3.3.1 Principio cosmologico e coordinate comoventi . . . . .	43
3.3.2 Metrica di Robertson-Walker . . . . .	46

Conclusioni	iv
Appendice: Leggi di conservazione e covarianza generale	vi
Bibliografia	viii

# Introduzione

Obbiettivo di questo elaborato è presentare la rivoluzionaria Teoria della Relatività di Einstein, approfondendone gli aspetti geometrici che la caratterizzano. L'attenzione viene posta sul profondo legame che questa teoria fisica ha con la geometria moderna. Essa propone un nuovo modo di concepire spazio e tempo che porta ad una sorprendente interpretazione geometrica dell'interazione gravitazionale, diventando emblematica del perfetto dialogo tra matematica e fisica. Il *modus operandi* che ho adottato è deduttivo e generalizzante: si parte dal presentare brevemente il contesto geometrico Euclideo sul quale si struttura la fisica classica e lo si estende ad uno più generale basato su concetti matematici moderni, quali le varietà Riemanniane e i tensori. Tale generalizzazione permette di fare un salto di qualità nell'interpretazione dei fenomeni fisici, mostrando una via nuova di vedere la realtà che sfrutta le implicazioni di un modello matematico più ampio. Nel primo capitolo si introducono i tensori e le varietà e si procede nei successivi due col delineare la Teoria della Relatività, prima nella sua formulazione ristretta e poi nella più completa ed esaustiva formulazione generale, evidenziandone le trame geometriche. Ritengo necessaria una breve contestualizzazione storica: la fisica classica (XVII–XIX secolo) si basava sull'idea di uno spazio *assoluto*, fermo e immutabile, che faceva da contenitore alla realtà; il tempo pure era una quantità assoluta, che scorreva nella direzione individuata dall'entropia allo stesso modo per tutti. La geometria dello spazio rivestiva quindi un ruolo marginale – o, almeno, non centrale – utile soltanto a definire il “luogo” in cui ambientare lo studio dei fenomeni fisici. Nel corso dei secoli XVIII e XIX, però, le ricerche in ambito geometrico prendono una piega inaspettata: Gauss approfondisce lo studio delle curve e delle superfici dello spazio Euclideo, Riemann lo estende a varietà qualsiasi di dimensione arbitraria e si arrivano a concepire le *geometrie non-euclidee*. Comincia quindi a diffondersi l'idea che non è appropriato riferirsi ad un'unica e assoluta geometria, ma che esistano più geometrie, le quali possono essere classificate in vari modi. A tal riguardo Poincaré scriveva:

*“Una geometria non può essere più vera di un'altra, può essere solo più conveniente.”*

Queste nuove considerazioni sul modo di concepire la geometria hanno avuto ineluttabilmente effetto anche sulla visione “classica” dello spazio Euclideo, iniziando a far barcollare l'idea che fosse solo un mero contenitore della realtà. Nel 1872, Klein architettò il

*Programma di Erlangen*, in cui proponeva una soluzione al problema della classificazione delle geometrie mediante lo studio di quantità invarianti sotto certe trasformazioni della varietà, la quale identifica il luogo in cui si ambienta una specifica geometria. Tra questi tipi di trasformazioni si trovano, ad esempio, le trasformazioni di Lorentz, le quali possono essere ambientate in uno spazio quadridimensionale piatto. Ebbene, è su questo sfondo che si muove Albert Einstein, il quale non ebbe timore di interpretare le trasformazioni di Lorentz come una vera e propria legge fisica, invece di considerarle solo un mero artificio matematico. In effetti tali trasformazioni, se viste come le leggi che stabiliscono come un osservatore in movimento a velocità costante rispetto ad un altro percepisce spazio e tempo, nel momento in cui non si vuole rinunciare al principio per cui le leggi fisiche devono essere le stesse in tutti i sistemi di riferimento, producono delle conseguenze strane e contro-intuitive: il tempo e lo spazio non sono assoluti bensì cambiano da un osservatore all'altro. Questa idea si discosta completamente dalla visione della fisica classica, ma non per questo, per Einstein, doveva essere sbagliata. Il nuovo modo di concepire la geometria introdotto da Riemann, Klein, Poincaré (...) ha permesso di definire uno spazio ambiente più generale di quello classico tridimensionale Euclideo, che viene chiamato *spazio-tempo piatto* e nel quale si ambienta la Relatività Ristretta (SR da *Special Relativity*); nondimeno ha evidenziato come l'invarianza delle leggi fisiche per osservatori inerziali abbia una forma matematica precisa, che va sotto il nome di *Covarianza di Lorentz* e che oggi costituisce un principio cardine di molte teorie fisiche. Mosso così dalla volontà di estendere questo principio anche a sistemi di riferimento accelerati (come quelli immersi in un campo gravitazionale), Einstein prosegue nei suoi studi, individuando nell'analisi tensoriale di Ricci e Curvatura lo strumento adatto per la formulazione di una teoria generale dell'invarianza come la Relatività Generale (GR da *General Relativity*), che descrive una teoria geometrica della gravità, ambientata in uno *spazio-tempo curvo*, la cui curvatura è legata alla distribuzione della materia. Scriveva Wheeler:

*“Lo spazio-tempo dice alla materia come muoversi,  
la materia dice allo spazio-tempo come incurvarsi”*

Il campo gravitazionale descritto da GR coincide con lo spazio-tempo stesso e si fonda sul modello matematico di una 4-varietà *pseudo-riemanniana*, ovvero dotata di una metrica. Il punto conclusivo di questa tesi è la deduzione del sistema di equazioni differenziali per il campo gravitazionale, sotto forma di equazione tensoriale, la cui soluzione è data proprio dalla metrica dello spazio-tempo. Sotto certe ipotesi di “struttura” si mostra, infine, che tali equazioni possono essere utilizzate, in un contesto cosmologico, per dedurre la possibile geometria dell'intero universo fisico osservabile.

Si assumono noti tutti i risultati algebra lineare e astratta riguardanti spazi vettoriali e affini, trasformazioni lineari e bilineari e teoria dei gruppi [1], di topologia elementare [2] e di geometria differenziale *gaussiana* su curve e superfici [3].

# Capitolo 1

## Tensori e spazi curvi

Questo primo capitolo vuole essere una presentazione del modo di concepire la fisica - e in particolare la meccanica - fino al 1905 e degli strumenti matematici utili a superarlo. In particolare si evidenzia come le trasformazioni di Galileo debbano essere sostituite dalle trasformazioni di Lorentz, in un contesto geometrico più generale rispetto a quello Euclideo.

### 1.1 Premesse

La meccanica classica *newtoniana-galileiana* si fonda sulla geometria euclidea e può vedersi come una teoria fisico-geometrica ambientata nello *spazio euclideo standard*  $\mathbb{E}^3 := (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}})$  dove, per  $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ ,  $\vec{w} = (w^1, w^2, w^3)$  vettori dello spazio, la mappa

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \sum_{k=1}^3 v^k w^k \end{aligned} \quad (1.1)$$

indica il prodotto scalare standard (euclideo).

Lo spazio  $\mathbb{E}^3$  è uno spazio affine i cui elementi sono punti  $\{P_j\}_{j \in \mathcal{I}}$  individuati da vettori di  $\mathbb{R}^3$ . Munito della distanza

$$d_{\mathbb{E}}(P_1, P_2) = \sqrt{\langle P_2 - P_1, P_2 - P_1 \rangle_{\mathbb{E}}} \quad (1.2)$$

lo spazio Euclideo  $\mathbb{E}^3$  risulta essere uno *spazio metrico*.

Il contenuto fisico della teoria della relatività galileiana e, quindi, della cinematica classica si compatta nelle trasformazioni di Galileo, che forniscono una prima approssimazione di come un osservatore in movimento rispetto ad un altro percepisce spazio e tempo.

Detta  $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1,2,3}$  la base canonica di  $\mathbb{E}^3$ , per un corpo in movimento rispetto ad un altro di velocità  $\vec{v} = v\mathbf{e}_1$  valgono:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.3)$$

E' chiaro che possono scriversi le trasformazioni di Galileo (1.3) anche per corpi in moto relativo a velocità  $\vec{v} = v\mathbf{e}_j$ , con  $j = 2, 3$ .

**Osservazione 1.1.1.** *Sotto le (1.3) la distanza euclidea  $d_{\mathbb{E}}$  rimane invariata; di più: le trasformazioni Galileo sono tutte e sole quelle che lasciano invariata la metrica Euclidea. Nel corso dell'elaborato sostituiamo queste equazioni (che risulteranno non congruenti con i postulati della relatività) con altre più raffinate, dette trasformazioni di Lorentz, sotto le quali la metrica invariante non sarà più quella Euclidea, bensì la cosiddetta separazione spazio-temporale.*

Le teorie della relatività si basano sul principio (che viene di norma eretto a postulato) che *le leggi della fisica sono invarianti al variare del sistema di riferimento*. Un sistema di riferimento, in fisica, si identifica col concetto di *osservatore*, non inteso come generico essere umano ma, parafrasando Schutz in [4], come *"huge information-gathering system"*.

Il modello matematico per un osservatore è  $O \equiv O(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$  individuante una certa posizione  $\vec{\xi} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ad uno specifico istante temporale  $t \in \mathbb{R}$ ; è quindi un oggetto che permette di dare coordinate  $(\vec{\xi}; t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  ad un generico punto dello spazio in un certo tempo. Più in generale gli spazi delle coordinate possono essere spazi metrici qualsiasi muniti di arbitrarie *distanze*. Per la fisica classica esistono particolari sistemi di riferimento "privilegiati":

**Definizione 1.1.1** (Osservatore inerziale). *Su uno spazio metrico con distanza  $\delta$  e sostegno  $\mathbb{R}^3$ , un osservatore  $O$  si dice inerziale se:*

- (i)  $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$  la distanza  $\delta(P_1, P_2)$  non è una funzione del tempo;
- (ii) gli orologi in  $P_1, P_2$  misuranti tempi  $t_1, t_2$  sono sincronizzati;
- (iii)  $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$  vale  $\delta(P_1, P_2) = d_{\mathbb{E}}(P_1, P_2), \forall t \in \mathbb{R}$ .

Osserviamo che l'essere *sincronizzati* è una nozione inerziale, nel senso che è solo in riferimento ad un osservatore inerziale che due orologi possono misurare lo stesso *tempo*.

**Osservazione 1.1.2.** *A meno di specifiche tutti gli osservatori/sistemi di riferimento che considereremo da qui in avanti saranno assunti inerziali.*

**Notazione 1.1.1.** *Adottiamo da qui in avanti la notazione del metro-luce. Assumiamo cioè che la velocità della luce nel vuoto (indicata con  $c$  di "celeritas") sia  $c = 1$ .*

Sulla base della notazione 1.1.1 costruiamo un primo modello esemplificativo di spazio-tempo bidimensionale:

**Definizione 1.1.2** (Diagramma spazio-tempo). [4]

*L'insieme  $\mathbb{R}^2_{(x,t)} := \{(x(t), t) \in \mathbb{R}^2 \mid t: \text{tempo fisico}\}$  è un diagramma spazio-tempo; i suoi punti sono detti **eventi**, le sue curve sono dette **linee d'universo**, le sue rette individuano posizioni di particelle e la pendenza misurata da  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}$  corrisponde alla velocità della particella. Secondo la Notazione 1.1.1 la velocità della luce è identificata da una retta che forma con le ascisse un angolo di  $\frac{\pi}{4}$ .*

Procediamo ora a costruire coordinate per un osservatore relativo  $O'$  in movimento rispetto ad  $O$  con una certa velocità  $\vec{v} = v\mathbf{e}_1$  (tale costruzione può certamente generalizzarsi al caso di una velocità qualsiasi  $\vec{v} = v\mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  in un modello di spazio-tempo quadrimensionale). In primo luogo vale il seguente

**Teorema 1.1.1** (Invarianza degli intervalli).

*La distanza tra due eventi qualsiasi  $\mathcal{E}, \mathcal{P} \in \mathbb{R}^2_{(x,t)}$  rimane invariata al cambiare del riferimento.*

*Dimostrazione.* Per brevità si rimanda a [4].

□

**Osservazione 1.1.3.** *Si può indicare il generico intervallo di  $\mathbb{R}^2_{(x,t)}$  con  $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ . La giustificazione di tale scrittura verrà esaustivamente trattata nel Capitolo 2, in cui verrà chiarito che, nel contesto della relatività ristretta, è opportuno sostituire la nozione di metrica Euclidea con quella di Minkowski.*

**Corollario 1.1.2** (Deduzione delle trasformazioni di Lorentz).

*Sia  $O(t, x)$  un osservatore e  $O'(t', x')$  mobile rispetto a  $O$  di velocità  $\vec{v} = v\mathbf{e}_1$ , allora le coordinate di  $O'$  sono date da*

$$\begin{cases} t' = \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} \\ x' = \frac{-vt+x}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \quad (1.4)$$

*Dimostrazione.* Partiamo dal considerare una generica matrice rappresentante, su una base, una trasformazione  $A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \text{End}(\mathbb{R}_{(x,t)}^2)$  dove gli elementi  $a_{ij} = a_{ij}(v)$  dipendono solo dalla velocità di  $O$ ; allora dal sistema  $\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$  sfruttando le equazioni degli assi per l'osservatore mobile

$$\begin{cases} vt - x = 0 & \text{per l'asse } t' \\ vx - t = 0 & \text{per l'asse } x' \end{cases} \quad (1.5)$$

otteniamo

$$\begin{cases} a_{12} = -v \\ a_{11} \\ a_{22} = -\frac{1}{v} \\ a_{21} \end{cases} \quad (1.6)$$

quindi

$$\begin{cases} t' = a_{11}(t - vx) \\ x' = a_{22}(x - vt) \end{cases} \quad (1.7)$$

Ora: si deduce geometricamente, dal diagramma spazio-tempo, che due generici eventi  $(a_0, 0), (0, a_0) \in \mathbb{R}_{(x,t)}^2$  sono connessi da una linea d'universo; quindi  $a_{11} = a_{22} =: \gamma$ . Per il Teorema 1.1.1 sussiste l'uguaglianza  $-dt'^2 + dx'^2 = -dt^2 + dx^2$  la quale, unita alle (1.7), fa concludere che  $\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ . □

**Osservazione 1.1.4.** *Le equazioni (1.4) costruiscono direttamente le coordinate per un osservatore  $O'$  mobile di velocità  $\vec{v} = v\mathbf{e}_1$  rispetto ad uno  $O$  nel regime del piano  $\mathbb{R}_{(x,t)}^2$ . Volendo estenderle a  $\mathbb{R}^4$  si ha che le coordinate  $y, z$  rimangono invariate, poiché la contrazione avviene solo in direzione del moto. E' importante specificare quindi, che le trasformazioni di Lorentz (come quelle di Galileo) sono valide anche nel caso di un osservatore  $O'$  mobile di una generica velocità  $\vec{v} = v\mathbf{e}_j, \quad \forall j = 1, 2, 3$ .*

Per  $j=2,3$  si avrà rispettivamente

$$\begin{cases} t' = \frac{t-vy}{\sqrt{1-v^2}} \\ x' = x \\ y' = \frac{-vt+y}{\sqrt{1-v^2}} \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} t' = \frac{t-vz}{\sqrt{1-v^2}} \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{-vt+z}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \quad (1.8)$$

## 1.2 Elementi di Analisi Tensoriale in SR

In questa sezione ci occuperemo di stabilire la notazione che utilizzeremo per i vettori, i quali verranno estesi a una classe di oggetti matematici più generali, fondamentali per lo studio di una teoria dell'invarianza.

Nel regime della relatività ristretta diventa fondamentale considerare il tempo come una vera e propria coordinata del sistema, cosa che abbiamo già iniziato a fare senza darne una giustificazione rigorosa (verrà fatto nel Capitolo 2). Fissato un sistema di riferimento  $O$ , abbiamo rappresentato un vettore nelle coordinate del sistema come  $\vec{x} = (t, x, y, z)$ . Più in generale la sua descrizione più esauriente sarà

$$\vec{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^\mu)_{\mu=0,\dots,3} \quad (1.9)$$

Possiamo vedere i vettori come gli oggetti elementari di una teoria geometrica; siamo quindi interessati a sapere come si trasformano rispetto a un cambio di coordinate. Preso  $O'$  un secondo riferimento mobile relativamente al primo, conoscere le coordinate di  $\vec{x}$  in  $O'$  equivale a conoscere  $\vec{x}' = \Psi \vec{x}$  dove  $\Psi \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$  rappresenta una qualche trasformazione che muta le coordinate del vettore in  $O$  in quelle in  $O'$ .

Di più, vogliamo che tale trasformazione possa anche essere invertita per ottenere nuovamente le coordinate in  $O$  e, come si vedrà più avanti, è anche necessario chiedere che ci sia differenziabilità. La condizione matematica da imporre è quindi che  $\Psi$  sia un *diffeomorfismo* i.e. una mappa differenziabile invertibile con inversa differenziabile.

In particolare l'applicazione  $\Psi$  è rappresentata su una base da una matrice (invertibile)  $(\psi_\beta^\alpha)_{\beta=0,\dots,3}^{\alpha=0,\dots,3}$  e si ha:

$$\vec{x}' = \sum_{\beta=0}^3 \begin{bmatrix} \psi_\beta^0 x^\beta \\ \psi_\beta^1 x^\beta \\ \psi_\beta^2 x^\beta \\ \psi_\beta^3 x^\beta \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Allora fissando l'indice  $\alpha$  possiamo scrivere (1.10) in componenti come

$$x'^{\alpha} = \sum_{\beta=0}^3 \psi_\beta^\alpha x^\beta \quad (1.11)$$

Introduciamo la fondamentale:

**Notazione 1.2.1** (di Einstein).

*La convenzione di Einstein permette di omettere le somme sugli indici ripetuti. Più in generale questa notazione è una convenzione per contrarre i tensori: ogni indice che compare all'interno di un fattore più di una volta viene sommato al variare di tutti i possibili valori che l'indice può assumere.*

Così il quadrivettore in (1.11) si scrive semplicemente come  $x^{\alpha'} = \psi_{\beta}^{\alpha} x^{\beta}$ .

**Osservazione 1.2.1.** *Osserviamo che le trasformazioni  $\Psi$  di questo paragrafo, per osservatori inerziali, in forza del Corollario 1.1.2, sono tutte e sole del tipo Lorentz.*

*Quindi il cambio di coordinate **naturale** da un osservatore  $O$  ad uno  $O'$  in moto relativo rispetto ad esso nel regime di SR è dato da una trasformazione di Lorentz.*

Ribadiamo che un vettore è un ente geometrico astratto fondamentale e non è strano quindi che risulti invariante per diffeomorfismi. Esso ricade in una categoria di oggetti matematici-geometrici più generale che godono della proprietà di trasformarsi seguendo precise leggi rispetto ai cambi di coordinate: i tensori.

## 1.2.1 Tensori per matematici

Matematicamente un tensore è un particolare tipo di applicazione multilineare.

**Definizione 1.2.1.** *Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale, la mappa  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  è una forma bilineare se,  $\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in V; \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , valgono:*

$$\begin{cases} f(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \vec{u}) = \lambda f(\vec{v}, \vec{u}) + \mu f(\vec{w}, \vec{u}) \\ f(\vec{v}, \lambda\vec{w} + \mu\vec{u}) = \lambda f(\vec{v}, \vec{w}) + \mu f(\vec{v}, \vec{u}) \end{cases} \quad (1.12)$$

**Osservazione 1.2.2.** *Ricordiamo brevemente che una forma bilineare che sia simmetrica e definita positiva è un prodotto scalare.*

Quando il codominio di  $f$  è un generico spazio vettoriale  $W$  invece che un campo  $\mathbb{K}$  siamo di fronte a un caso più generale chiamato *applicazione bilineare*.

Una mappa *multilineare* è l'estensione di una applicazione bilineare ad un numero arbitrario  $n$  di argomenti.

Un tensore è, per analogia, lo stesso tipo di estensione fatta però su una *forma bilineare*. Volendo formalizzare abbiamo le seguenti:

**Definizione 1.2.2.** Siano  $V, W$  due spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$ , una  $F : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n\text{-volte}} \rightarrow W$  è detta essere un'applicazione multilineare se è lineare in tutti i suoi  $n$  argomenti.

**Definizione 1.2.3.** Fissando il campo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , un tensore di tipo  $(h, k)$  è una forma multilineare  $T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{h\text{-volte}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-volte}} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un tensore si può descrivere in componenti come

$$T = (T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_h})_{\mu_i, \nu_j} \quad \forall i = 1, \dots, h; j = 1, \dots, k \quad (1.13)$$

e gli indici  $h, k$  si chiamano rispettivamente di *controvarianza* e *covarianza*.

**Osservazione 1.2.3.** La notazione  $V^*$  indica lo spazio duale di  $V$  i.e.  $V^* := \mathbb{R}^V$  contenente i funzionali lineari di  $V$ . Ricordiamo che  $V^*$  è uno spazio vettoriale isomorfo a  $V$  tramite

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{e}_j &\longmapsto \varphi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}^j \quad \forall j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.14)$$

dove  $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$  è la base canonica di  $V$  e  $\{\mathbf{e}^j\}_j$  è la base canonica (duale) di  $V^*$  definita da

$$\mathbf{e}^j(\mathbf{e}_k) = \delta_k^j := \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad (1.15)$$

Si vede come  $\varphi$  dipenda pesantemente dalla base scelta, si dice pertanto che **non** è un isomorfismo canonico. La questione è diversa sul biduale  $V^{**} := \mathbb{R}^{V^*}$  che risulta essere **canonicamente** isomorfo a  $V$  e possiamo quindi identificarli completamente.

**Osservazione 1.2.4** (Sulla covarianza e la controvarianza). [5]

I tensori non sono oggetti invarianti, bensì sono caratterizzati proprio dal loro modo di variare: un tensore  $(h, 0)$  si dice controvariante in quanto, affinché risulti indipendente dalla scelta della base  $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$  in cui è ambientato, è necessario che le sue componenti subiscano una trasformazione “contraria” a quella subita dagli  $\mathbf{e}_j$ , mentre un tensore  $(0, k)$ , di contro, è detto covariante perchè per mantenere l'indipendenza dalla base  $\{\mathbf{e}^j\}_{j=1}^n$  scelta, le sue componenti devono subire la stessa trasformazione degli  $\mathbf{e}^j$ . Inoltre se, ad esempio,  $\omega_{\mu\nu}$  è un tensore  $(0, 2)$ , il tensore  $\omega^{\mu\nu}$  è – rispetto al primo – covariante, nel senso che le loro componenti variano secondo la stessa legge. Allora, un'equazione coinvolgente due tensori è detta covariante, poiché rimane valida sotto un generico cambio di coordinate. L'invarianza dunque risiede nelle relazioni tra i tensori e non nei tensori stessi.

## 1.2.2 Tensori per fisici

Da un punto di vista fisico i tensori sono l'oggetto matematico perfetto per esprimere leggi invarianti sotto un cambiamento di coordinate qualsiasi. Va da se che costituiscono lo strumento piú adatto per produrre una *teoria della relatività* esaustiva.

Consideriamo un vettore  $\vec{x}$  di cui sono note le coordinate rispetto a un osservatore  $O(x^0, x^1, x^2, x^3)$ ; allora un cambio di coordinate verso un riferimento  $O'(x^{\mu'})_{\mu'=0,\dots,3}$  sarà espresso da una matrice  $\Psi$  t.c.  $x^{\mu'} = \Psi_{\nu}^{\mu'} x^{\nu} = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}\right) x^{\nu}$ , dove si richiede che  $\Psi \in GL_4(\mathbb{R})$  sia invertibile i.e.  $\Psi_{\nu'}^{\mu} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}}\right)$  t.c.  $\Psi_{\mu}^{\mu'} \Psi_{\nu'}^{\mu} = \delta_{\nu'}^{\mu'}$  e  $\Psi_{\nu'}^{\mu} \Psi_{\nu}^{\mu'} = \delta_{\nu}^{\mu}$ . (Stiamo quindi chiedendo che  $\Psi$  è il differenziale di un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^4$ ).

In quest'ottica vogliamo che certe quantità *fisiche* vengano espresse come entità *geometriche* invarianti, in particolare:

- uno scalare deve esprimersi come  $\phi'(x') = \phi(x) \in \mathbb{R}$ ;
  - un vettore come  $A^{\mu'} = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}\right) A^{\nu}$ ;
  - un covettore come  $\omega_{\mu} A^{\mu} \in \mathbb{R}$
- e via dicendo.

Questi oggetti fondamentali possono tutti generalizzarsi tramite la nozione di tensore di ordine  $(h, k)$  che può rappresentarsi mediante il suo modo di trasformarsi, come segue:

$$T_{\nu'_1 \dots \nu'_k}^{\mu'_1 \dots \mu'_h} = \left(\frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\right) \dots \left(\frac{\partial x^{\mu'_h}}{\partial x^{\alpha_h}}\right) \left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\right) \dots \left(\frac{\partial x^{\beta_k}}{\partial x^{\nu'_k}}\right) T_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_h} \quad (1.16)$$

Tale definizione di tensore è data dal suo modo di cambiare al variare del riferimento e compatta in sé un significato fisico molto profondo. Inoltre, diversamente dalla definizione "per matematici", necessita della scelta di una base.

**Osservazione 1.2.5.** *Così un tensore di tipo  $(0, 0)$  è uno scalare, uno di tipo  $(1, 0)$  un vettore, uno di tipo  $(2, 0)$  una matrice, uno di tipo  $(1, 1)$  un'applicazione lineare, uno di tipo  $(0, 1)$  un funzionale lineare, uno di tipo  $(0, 2)$  una forma bilineare e via dicendo. Forniamo una prova di come un covettore, interpretato con questa definizione, risulta essere invariante per cambi di coordinate:*

*Dimostrazione.*  $\omega_{\mu} A^{\mu} = \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}}\right) \omega_{\alpha} \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}}\right) A^{\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha} \omega_{\alpha} A^{\beta} = \omega_{\alpha} A^{\alpha}$

□

La (1.16) ribadisce l' Osservazione 1.2.4, sottolineando che i tensori non sono oggetti invarianti, bensì sono caratterizzati proprio dal loro modo di *covariare* sotto una generica trasformazione di coordinate. In particolare, un tensore di SR – o meglio un'equazione tensoriale – che esprime una determinata legge fisica, esprimerà la stessa legge in un riferimento raggiunto mediante una trasformazione di Lorentz.

### 1.2.3 Operazioni tensoriali

Siano  $T, Q$  due tensori di ordine  $(h, k)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora  $\lambda T$ ,  $T + Q$  risultano ancora tensori dello stesso ordine[6]. Pertanto l'insieme dei tensori di tipo  $(h, k)$  su uno spazio vettoriale (reale)  $V$  forma l'  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale  $\mathcal{T}_k^h(V)$ , avente dimensione  $\dim(V)^{h+k}$ .

Discutiamo in questa sede alcune delle operazioni che possono farsi tra tensori:

**Il prodotto tensoriale:** Due tensori possono moltiplicarsi *tensorialmente* tra loro e produrre un altro tensore tramite l'operazione (binaria)

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{T}_{k_1}^{h_1}(V) \times \mathcal{T}_{k_2}^{h_2}(V) &\longrightarrow \mathcal{T}_{k_1+k_2}^{h_1+h_2}(V) \\ (A_{\beta_1 \dots \beta_{k_1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{h_1}}, B_{\beta'_1 \dots \beta'_{k_2}}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_{h_2}}) &\longmapsto C_{\beta_1 \dots \beta_{k_1} \beta'_1 \dots \beta'_{k_2}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{h_1} \alpha'_1 \dots \alpha'_{h_2}} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Questo prodotto é anche detto *prodotto diretto*.

*e.g.* Nel piú familiare caso in cui i tensori  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  siano due applicazioni lineari, il prodotto diretto  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  é la loro composizione, ovvero é il prodotto di matrici. In particolare:  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{x} = A_\nu^\mu B_\lambda^\nu x^\lambda = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{x})$  tale prodotto é associativo.

**Contrazione di indici:** Sia  $T \in \mathcal{T}_k^h(V)$  t.c.  $\exists j_0 \in \{1, \dots, h\}; k_0 \in \{1, \dots, k\}$  per cui  $\alpha_{j_0} = \beta_{k_0}$ , allora gli indici si contraggono e tale operazione produce un tensore  $T' \in \mathcal{T}_{k-1}^{h-1}(V)$ .

Questa operazione viene anche chiamata *traccia*; in effetti la contrazione di un tensore  $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$  corrisponde a calcolare la traccia  $tr(T) = \sum_{\mu=\nu} T_\nu^\mu$  della sua matrice associata rispetto a una base.

**Osservazione 1.2.6.** *Combinando l'operazione di prodotto diretto con quella di somma, moltiplicazione per scalare o contrazione di indici di tensori si ottengono sempre tensori.*

*Dal punto di vista algebrico ció esprime il fatto che la somma diretta*

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{h,k \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_k^h(V) \quad (1.18)$$

*munita del prodotto tensoriale  $\otimes$  ha una struttura naturale di  $\mathbb{R}$ -algebra associativa.*

Sono ben definite ulteriori operazioni tra tensori, le quali combinano il prodotto diretto con il tensore metrico alla contrazione di indici. Tuttavia, per chiarezza di esposizione, presenteremo queste operazioni piú avanti, man mano che costruiremo il contesto geometrico adatto.

## 1.3 Elementi di Geometria riemanniana

Generalizziamo in questa sede i risultati di geometria differenziale ottenuti da Gauss per le curve e le superfici, che possiamo vedere come *varietà immerse* in  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 1 e 2. Introdurremo in prima istanza il concetto di varietà topologica e la muniremo di una *struttura differenziabile*. In secondo luogo vi introdurremo una *metrica* e arriveremo a considerare una nozione di differenziazione su spazi curvi la quale ci porterà all'identificazione delle curve geodetiche e allo studio generale della curvatura.

### 1.3.1 Varietà riemanniane e lorentziane

Le varietà sono oggetti matematici che generalizzano il concetto di "spazio curvo" e sono uno strumento molto potente per analizzare i concetti di *locale* e *globale*, *intrinseco* e *estrinseco*. Una varietà  $\mathcal{M}$  ha una dimensione geometrica propria  $p$  sempre più piccola della dimensione di uno spazio piatto che la contiene. Si può quindi studiare  $\mathcal{M}$  in modo intrinseco, come spazio proprio a sé stante, oppure in modo estrinseco come spazio curvo *immerso* in un  $\mathbb{R}^n$ , con  $p \leq n$ .

Dando per buone le nozioni di topologia elementare, diamo la seguente

**Definizione 1.3.1.** *Uno spazio topologico  $(\mathcal{M}, \tau)$  è una  $p$ -varietà se*

- (i)  $\mathcal{M}$  è di Hausdorff;
- (ii)  $\mathcal{M}$  è a base numerabile (o II-count);
- (iii)  $\mathcal{M}$  è localmente omeomorfo a  $\mathbb{R}^p$ .

L'intero  $p$  è detto *dimensione della varietà*.

Questa risulta essere localmente *connessa*, *compatta* e può descriversi come *unione numerabile di compatti*. Inoltre risulta *metrizzabile* (prova su [7]). E' sempre possibile descrivere una varietà, anche molto complicata, come unione di "pezzi" più semplici.

Precisamente, data una  $p$ -varietà  $(\mathcal{M}, \tau)$ , si può sempre definire un *ricoprimento* fatto di aperti della varietà omeomorfi ad aperti euclidei: siano  $\{U_j\}_{j \in \mathcal{I}} \subseteq \tau$  e  $\{V_j\}_{j \in \mathcal{I}}$  aperti di  $\mathbb{R}^p$ , e siano  $\varphi_j : U_j \rightarrow V_j$  omeomorfismi; chiamiamo insiemi del tipo  $\{U_j, \varphi_j\}$  *carte* o *intorni coordinati* della varietà  $\mathcal{M}$ . Per ogni punto  $P \in U_j$ , esiste quindi una mappa  $\varphi_j$  t.c.  $\varphi_j(P) = (u^1(P), \dots, u^p(P)) \in V_j \subseteq \mathbb{R}^p$  e le funzioni  $u^\mu(P)$  si dicono essere le coordinate del punto  $P$  rispetto alla carta  $\{U_j, \varphi_j\}$ . La varietà si scrive quindi tramite il suo ricoprimento come

$$\mathcal{M} = \bigcup_{j \in \mathcal{I}} U_j \tag{1.19}$$

Una varietà deve poter essere descritta rispetto a carte diverse in modo equivalente e per far sì che questa proprietà sia soddisfatta è sufficiente richiedere quanto segue:

siano  $\{U_1, \varphi_1\}, \{U_2, \varphi_2\}$  due carte distinte di  $\mathcal{M}$  tali per cui  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , allora esiste sempre la seguente mappa (detta *cambio carta*)

$$\begin{aligned} \phi : \varphi_2(U_1 \cap U_2) &\rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \\ x &\mapsto \varphi_1(\varphi_2^{-1}(x)) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Chiaramente  $\phi$  è un omeomorfismo. La condizione espressa in (1.20) permette di ricostruire la varietà  $\mathcal{M}$  *incollando* i vari "pezzi"  $U_j$  di cui è fatta. Diciamo che due carte  $\{U_1, \varphi_1\}, \{U_2, \varphi_2\}$  sono  $\mathcal{C}^\infty$ -compatibili quando la mappa  $\phi$  è un diffeomorfismo, oltre che un omeomorfismo. Ciò porta a definire una prima importante struttura che si può mettere su una varietà:

**Definizione 1.3.2** (Varietà differenziabile).

Sia  $I$  una famiglia qualsiasi di indici. Una struttura differenziabile -  $\mathcal{C}^\infty$  su una  $p$ -varietà  $\mathcal{M}$  è data da una famiglia di carte, detta atlante  $\mathcal{A} := \{U_j, \varphi_j\}_{j \in I}$ , che soddisfi:

- (i)  $\bigcup_j \varphi_j^{-1}(V_j) = \mathcal{M}$ , dove i  $V_j$  sono aperti di  $\mathbb{R}^p$  omeomorfi agli  $U_j$ ;
- (ii)  $\forall j, k \in I$   $\{U_j, \varphi_j\}, \{U_k, \varphi_k\}$  sono  $\mathcal{C}^\infty$ -compatibili;
- (iii) se  $\{V, \psi\}$  è  $\mathcal{C}^\infty$ -compatibile con ogni  $\{U_j, \varphi_j\} \Rightarrow \{V, \psi\} \in \mathcal{A}$ .

Così, una varietà differenziabile è il dato di una varietà topologica e una struttura differenziabile  $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ .

Tale struttura dipende, sostanzialmente, dalla differenziabilità dei cambi di carta e permette di definire sulla varietà i concetti di spazio tangente, funzione differenziabile, campo vettoriale e forma differenziale. Vale il seguente risultato, la cui dimostrazione si può trovare in [7]:

**Teorema 1.3.1.** Fissata una famiglia  $\{V_k, \psi_k\}_{k \in I}$  di carte  $\mathcal{C}^\infty$ -compatibili che ricopre  $\mathcal{M}$ , esiste un'unica struttura differenziabile  $\mathcal{A}$  contenente  $\{V_k, \psi_k\}_{k \in I}$ .

Denotando con  $\sigma := \varphi^{-1}$  l'inversa di una carta, si possono descrivere i punti di una varietà come immagini di una funzione differenziabile e iniettiva:  $P = \sigma(u^1, \dots, u^p)$ . Così, derivando rispetto alle  $p$  direzioni indipendenti la "parametrizzazione"  $\sigma$ , risulta ben definito lo **spazio tangente**  $T_P \mathcal{M} := \text{span}\left\{\frac{\partial \sigma}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial u^p}\right\} \simeq \mathbb{R}^p$ .

**Osservazione 1.3.1.** In generale, per  $p \leq n$ , la  $\sigma$  è una mappa  $\mathbb{R}^p \xrightarrow{1-1} \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  differenziabile, perciò la sua matrice jacobiana  $\left(\frac{\partial \sigma^k}{\partial u^j}\right)_{j,k=1}^p =: (\sigma_j^k)_{j,k=1}^p$  ha rango massimo, costante intorno a un punto  $P \in \mathcal{M}$ , e vale quindi  $\text{rg}(\sigma_j^k) = \dim T_P \mathcal{M} = p$  i.e. lo spazio tangente ha la stessa dimensione della varietà cui tange.

Si indica con  $T_P \mathcal{M}^* := \mathbb{R}^{T_P \mathcal{M}}$  lo spazio duale del tangente, detto *spazio cotangente*, anch'esso di dimensione  $p$ .

**Definizione 1.3.3.** Data una varietà  $\mathcal{M}$ , si definiscono il fibrato tangente  $T(\mathcal{M})$  e il fibrato cotangente  $T^*(\mathcal{M})$  rispettivamente come

$$\begin{aligned} T(\mathcal{M}) &:= \bigsqcup_{P \in \mathcal{M}} T_P \mathcal{M} \\ T^*(\mathcal{M}) &:= \bigsqcup_{P \in \mathcal{M}} T_P \mathcal{M}^* \end{aligned} \quad (1.21)$$

**Osservazione 1.3.2.** Si dimostra [7] che entrambi i fibrati hanno una struttura di varietà differenziabile; inoltre, data una mappa  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  differenziabile tra due varietà, esiste sempre un'applicazione indotta sui fibrati tangenti

$$df : T(\mathcal{M}) \rightarrow T(\mathcal{N}) \quad (1.22)$$

che identifica il differenziale di  $f$ .

Quindi, ricordando che lo spazio tangente di  $\mathbb{R}$  è sé stesso in ogni punto, considerando una funzione scalare  $f : \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e sfruttando l'ipotesi di rango costante della jacobiana  $(\sigma_k^j)$  intorno a  $P \in \mathcal{M}$ , vale (in Notazione di Einstein):

$$\begin{aligned} d_P f : T_P \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v^j \partial_j &\longmapsto v^j(P) \partial_j f(P) \end{aligned} \quad (1.23)$$

dove si sta assumendo che  $T_P \mathcal{M} = \text{span}\{\partial_1, \dots, \partial_p\}$  e  $v = (v^1, \dots, v^p) \in T_P \mathcal{M}$ . Estendendo vettorialmente componente per componente si ottiene un'espressione locale per il differenziale  $d_P f \in T_P \mathcal{M}^*$  di una qualunque funzione da una varietà in  $\mathbb{R}^n$ , relativamente a una qualsiasi parametrizzazione  $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^p)$  di  $\mathcal{M}$ . Allora, ponendo

$$\begin{cases} du^k(\partial_j) := \frac{\partial u^k}{\partial w^j} = \delta_k^j \\ du^k(\sum_j v^j \partial_j) = \sum_j v^j du^k(\partial_j) = v^j \end{cases} \quad (1.24)$$

si ottiene che  $\sigma^\mu = du^\mu$  quindi  $T_P \mathcal{M}^* = \text{span}\{du^1, \dots, du^p\}$ .

Così, il differenziale di una funzione definita su una varietà a valori in  $\mathbb{R}^n$  è un *funzionale (covettore)* dello spazio cotangente che potrà esprimersi come combinazione lineare dei  $du^k$  i.e.  $df = \sum_{k=1}^p \omega_k du^k$ .

Passiamo ora a dare un'interpretazione *tensoriale* del prodotto scalare e vedere come generalizzare il concetto di *metrica* su una  $p$ -varietà differenziabile  $\mathcal{M}$  qualsiasi.

Come per le superfici, il modo migliore per *approssimare* una varietà è studiarla localmente sfruttando il suo spazio tangente. Sia quindi  $P \in \mathcal{M}$ ,  $T_P \mathcal{M} = \text{span}\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$

e siano  $v = \sum_j v^j \sigma_j$ ,  $w = \sum_j w^j \sigma_j$  due vettori tangenti a  $\mathcal{M}$ ; allora si può definire una *forma bilineare*  $\langle \cdot, \cdot \rangle \in (T_P \mathcal{M} \times T_P \mathcal{M})^*$  come

$$\langle v, w \rangle := \sum_{j,k} v^j \langle \sigma_j, \sigma_k \rangle w^k = \sum_{j,k} v^j g_{jk} w^k = v \mathbf{g} w \quad (1.25)$$

dove con  $\mathbf{g} = (g_{jk})_{j,k=1}^p$  s'intende la matrice che rappresenta  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  rispetto alla base scelta.

Descrivendo semplicemente la *segnatura* di una matrice come la coppia  $(l, m) \in \mathbb{N}^2$  con  $l$  numero di autovalori positivi e  $m$  numero di autovalori negativi, quando  $\mathbf{g} = \mathbf{g}^T$  è simmetrica e ha segnatura  $(p, 0)$  si ha che la forma  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è un prodotto scalare. Così,  $g_{jk} \in \mathcal{T}_2^0(T_P \mathcal{M})$  si dice essere il  **tensore metrico**  associato a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  in  $P \in \mathcal{M}$  e la rispettiva forma quadratica generalizza la prima forma fondamentale per le superfici dello spazio.

E' da notare il fatto che il tensore metrico è un oggetto definito localmente, quindi nell'intorno di un punto  $P \in \mathcal{M}$  ed è quindi più opportuno riferirsi ad esso con  $\mathbf{g}_P$ . Per avere una descrizione metrica globale di una varietà è fondamentale che sia soddisfatta la condizione di differenziabilità dei cambi di carta. In particolare si può utilizzare la nozione di *fibrato tangente*.

**Definizione 1.3.4** (Varietà riemanniana).

Sia  $\mathcal{M}$  una varietà differenziabile e  $\mathbf{g} \in \mathcal{T}_2^0(T(\mathcal{M}))$  un tensore metrico, il quale si intende definito per ogni punto  $P \in \mathcal{M}$ . Chiamiamo varietà riemanniana il dato di una varietà differenziabile e un tensore metrico definito sul fibrato tangente  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ .

Introduciamo inoltre una nozione più *debole* di varietà riemanniana che ci risulterà utile in seguito.

**Definizione 1.3.5** (Varietà Lorentziana).

Data  $\mathcal{M}$  una  $p$ -varietà differenziabile e  $\mathbf{g}$  un tensore metrico definito su  $T(\mathcal{M})$  con segnatura pari a  $(p-1, 1)$ , si chiama varietà pseudo-riemanniana o lorentziana la coppia  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ .

**Notazione 1.3.1.** A meno di specifiche, tutte le varietà considerate da qui in avanti saranno assunte differenziabili e con metrica (quindi riemanniane o lorentziane).

Sottolineiamo il fatto che un tensore metrico è direttamente associato al prodotto (o pseudo-prodotto) scalare che definiamo "sulla varietà", e ivi trasporta una *metrica locale*, il cui contenuto è completamente esaurito da  $\mathbf{g}_P$ ,  $\forall P \in \mathcal{M}$ . Una varietà riemanniana-lorentziana è così un modello matematico per uno spazio curvo dotato di una metrica locale.

### 1.3.2 Connessione affine e geodetiche

Vogliamo generalizzare in questa sezione il concetto di *derivata intrinseca* noto per le superfici di  $\mathbb{R}^3$  a una qualsiasi varietà riemanniana. Anche qui, come nel caso tridimensionale euclideo, avremo a che fare con campi vettoriali definiti sulla varietà stessa e tangenti ad essa. Sfruttando il fibrato tangente, vediamo come una sua *sezione*

$$\begin{aligned} X : \mathcal{M} &\rightarrow T(\mathcal{M}) \\ P &\mapsto X(P) \end{aligned} \quad (1.26)$$

identifichi un campo vettoriale *tangente* definito localmente a  $P \in \mathcal{M}$ .

Introduciamo, per alleggerire il testo, la seguente

**Notazione 1.3.2.** Indichiamo con  $\Xi_P$  l'insieme di tutti i campi vettoriali definiti **intorno** a un punto qualsiasi  $P \in \mathcal{M}$  della varietà a valori in  $T_P\mathcal{M}$ . E' chiaro che  $\Xi_P$  risulta essere uno spazio vettoriale.

**Definizione 1.3.6** (Connessione affine). Consideriamo un punto  $P \in \mathcal{M}$  su una  $p$ -varietà. Chiamiamo *connessione affine* su  $\mathcal{M}$  un operatore  $\nabla : \Xi_P \times \Xi_P \rightarrow T_P\mathcal{M}$  t.c.  $\nabla(v, X) =: \nabla_v X$  che gode delle seguenti proprietà:

$$(i) \quad \nabla_v(\lambda X + \mu Y) = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_v Y \quad , \forall v \in T_P\mathcal{M}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad X, Y \in \Xi_P$$

$$(ii) \quad \nabla_{\lambda v + \mu w} X = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_w X \quad , \forall v, w \in T_P\mathcal{M}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \quad X \in \Xi_P$$

$$(iii) \quad \nabla_v(Xf) = v(f)X + f \nabla_v X \quad , \forall v \in T_P\mathcal{M}, \quad f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \in \Xi_P$$

dove assumiamo che  $v(f)$  indichi la derivata direzionale di  $f$  in  $v$ , definita da (1.23).

**Osservazione 1.3.3.** Le condizioni (i), (ii) della precedente definizione dicono che la connessione affine  $\nabla$  è una applicazione bilineare dei campi vettoriali tangenti alla varietà  $\mathcal{M}$ , definiti in un intorno di un punto  $P \in \mathcal{M}$ . Intuitivamente la connessione  $\nabla$  permette, appunto, di "connettere" i punti intorno a  $P$  scivolando sulla varietà mediante gli spazi tangenti.

In un intorno  $\mathcal{U}$  di un punto  $P = \sigma(u^1, \dots, u^p) \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$  si considerino un campo  $X \in \Xi_P$  e un vettore tangente  $v = v^j \sigma_j$ ; allora una descrizione della *connessione* nella carta locale parametrizzata da  $\sigma$ , in virtù della bilinearità di  $\nabla$  per cui  $\nabla_{v^j \sigma_j}(X^k \sigma_k) = \sum_j v^j \nabla_{\sigma_j}(X^k \sigma_k)$ , è data da (in Notazione di Einstein):

$$\nabla_v(X^k \sigma_k) = v^j \frac{\partial X^k}{\partial u^j} \sigma_k + v^j \Gamma_{jk}^i \sigma_i X^k \quad (1.27)$$

dove i simboli  $\Gamma_{jk}^i$  sono detti *di Chrystoffel* e sono definiti da

$$\nabla_{\sigma_j} \sigma_k := \Gamma_{jk}^i \sigma_i \quad (1.28)$$

identificano i "coefficienti locali" della connessione affine.

**Osservazione 1.3.4** (Simmetria dei simboli di Chrystoffel).  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$

Grazie alle formule (1.23) e (1.24) vale  $v(X^k) = dX^k(v)$ , da cui si può riscrivere la (1.27) come

$$\nabla_v X = (dX^i(v) + v^j \Gamma_{jk}^i X^k) \sigma_i \quad (1.29)$$

Così, introducendo la base duale  $\sigma^j =: du^j$ , si ha

$$\nabla_v X = (dX^i(v) + \sigma^j(v) \Gamma_{jk}^i X^k) \sigma_i = (dX^i + \Gamma_{jk}^i \sigma^j X^k) \overbrace{\sigma_i(v)}^{\sim v(f)} \quad (1.30)$$

ovvero si ha la seguente espressione per la connessione (in componenti e non)

$$\begin{cases} \nabla_v X = \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \frac{\partial X^i}{\partial u^j} + \Gamma_{jk}^i X^k \right) du^j(v) \\ (\nabla_v X)^i = \left( \frac{\partial X^i}{\partial u^j} + \Gamma_{jk}^i X^k \right) v^j, \quad \forall i = 1, \dots, p. \end{cases} \quad (1.31)$$

Quindi, indicando con  $\nabla_j X^k := \nabla_{\sigma_j} X^k$  abbiamo ottenuto una *differenziazione* del campo  $X \in \Xi_P$  in direzione tangente su una varietà tramite la nozione di *connessione affine*; questa derivata è espressa in un contesto *tensoriale* e pertanto risulta covariante per cambio di carta. Chiamiamo  $\forall i = 1, \dots, p$

$$(\nabla_j X^k)^i = \frac{\partial X^i}{\partial u^j} + \Gamma_{jk}^i X^k \quad (1.32)$$

la **derivata covariante** del campo vettoriale  $X = X^k \sigma_k$  e notiamo che tale quantità si trasforma secondo (1.16) *i.e.* è un tensore.

**Osservazione 1.3.5** (Sui campi tensoriali). *Un campo vettoriale di  $\Xi_P$  può vedersi come un campo tensoriale controvariante di ordine 1, nel senso che ad ogni punto vicino a  $P \in \mathcal{M}$  associa un tensore  $(1,0)$ . La nozione di derivata covariante può darsi anche rispetto a un campo "co-vettoriale" *i.e.* un campo tensoriale di tipo  $(0,1)$ . Quindi essa è una derivazione che va intesa come trasformazione lineare di un campo tensoriale  $(0,1)$  o  $(1,0)$  in un altro campo tensoriale di tipo  $(1,1)$  *i.e.*  $\nabla_j \in \mathcal{T}_1^1(T_P \mathcal{M})$ .*

Vale il seguente risultato, che generalizza la (1.32):

**Teorema 1.3.2.** *La derivata covariante è una derivata tensoriale.*

*Sia  $\mathcal{I}$  una famiglia qualsiasi di indici e  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale; se  $\{e_\mu\}_{\mu \in \mathcal{I}}$  è una base di  $V$ , allora per  $\delta, \gamma \in \{0, 1\}$ , vale*

$$\begin{aligned} \nabla_\mu : \mathcal{T}_k^h(V) &\longrightarrow \mathcal{T}_{k+\gamma}^{h+\delta}(V) \\ T_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_h} &\longmapsto \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_h} + \Sigma_1 - \Sigma_2 \end{aligned} \quad (1.33)$$

dove

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \sum_{j=1}^h \omega_{\mu\rho}^{\alpha_j} T_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \rho \dots \alpha_h} \\ \Sigma_2 = \sum_{j=1}^k \omega_{\mu\beta_j}^\rho T_{\beta_1 \dots \rho \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_h} \end{cases} \quad (1.34)$$

e gli  $\omega_{jk}^i$  definiti da  $\nabla_{e_k} e_j = \omega_{jk}^i e_i$  generalizzano i simboli di Chrystoffel.

*Dimostrazione.* Le informazioni raggruppate in questo teorema sono state selezionate da [8].  $\square$

Osserviamo che, nella pratica, la derivata covariante (in una certa direzione “ $\mu$ ”) su un tensore  $(h, k)$  agisce come la derivata parziale (nella direzione “ $\mu$ ”) del tensore aggiungendovi  $(\forall (i, j) \in \{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, k\})$   $h$  termini  $\omega_{\mu\rho}^{\alpha_i} T^{\dots\rho\dots}$  e togliendovi  $k$  termini  $\omega_{\mu\beta_j}^\rho T^{\dots\rho\dots}$  dove gli indici  $\rho$  sono aggiunti alla posizione dell’ indice di somma.

In analogia coi risultati ottenuti nel contesto della *geometria gaussiana*, su una  $p$ -varietà  $\mathcal{M}$  parametrizzata da  $\sigma$  vale la seguente

**Definizione 1.3.7** (Trasporto parallelo). *Sia  $\gamma : (a, b) \subseteq \mathbb{R}_s \rightarrow \mathcal{M}$  una curva di parametro  $s \in (a, b)$  su  $\mathcal{M}$  e  $X \in \Xi_P$  un campo vettoriale tangente a  $\mathcal{M}$  in  $P = \sigma(\gamma(s))$ . Allora  $X$  è detto essere un trasporto parallelo lungo  $\gamma$  su  $\mathcal{M}$  se vale*

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0 \quad (1.35)$$

**Osservazione 1.3.6.** *Su una generica  $p$ -varietà, come su una superficie, l’elemento di linea si calcola tramite la forma quadratica associata al tensore metrico come segue:*

$$ds^2 = g_{jk} du^j du^k \quad (1.36)$$

**Definizione 1.3.8** (Curva Geodetica). *Diciamo che una curva su una varietà  $\varsigma = \varsigma(s) \in \mathcal{M}$ ,  $\forall s \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  è una curva **geodetica** su  $\mathcal{M}$  se è un punto critico del funzionale lunghezza*

$$\begin{aligned} \ell : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varsigma(s) &\longmapsto \int_a^b \|\dot{\varsigma}(s)\| ds \end{aligned} \quad (1.37)$$

Vogliamo ora recuperare, nel contesto di uno spazio curvo a dimensione arbitraria  $p$ , il legame che c'è tra il trasporto parallelo lungo una curva e la proprietà di quella curva di essere una geodetica. Introduciamo allora il seguente

**Lemma 1.** *Siano  $\gamma : \mathbb{R}_s \rightarrow \mathcal{M}$  una curva sopra una  $p$ -varietà e  $X \in \Xi_{\sigma(\gamma(s))}$  un campo lungo  $\gamma$ ; allora il campo è parallelo lungo  $\gamma$  se e solo se  $\gamma$  è geodetica i.e.*

$$\nabla_{\dot{\gamma}(s)}(X(s)) = 0 \quad \iff \quad \frac{d}{ds}\ell(\gamma(s)) = 0 \quad (1.38)$$

*Dimostrazione.* Si rimanda a sezione 10.1.b di [9]. □

Ovviamente  $X(s) = (X \circ \gamma)(s)$ . Possiamo allora enunciare il fondamentale

**Teorema 1.3.3** (Equazioni geodetiche su  $\mathcal{M}$ ).

*Sia  $\mathcal{M}$  una  $p$ -varietà e  $u : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  una curva su  $\mathcal{M}$ ; allora  $s \mapsto u(s)$  è una geodetica  $\iff$  è soluzione di*

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \quad , \forall i = 1, \dots, p. \quad (1.39)$$

*Dimostrazione.* In forza del Lemma 1, scegliendo come campo  $X(s) = \dot{u}(s)$  abbiamo che  $s \mapsto u(s)$  è geodetica  $\iff \nabla_{\dot{u}(s)}(\dot{u}(s)) = 0$ .

A questo punto, scelta una carta  $\{U, \sigma^{-1}\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$  dall'atlante della varietà, resta da calcolare esplicitamente la derivata covariante di  $\dot{u} = u'(s)$  nella direzione di  $\dot{u} = \dot{u}^j \sigma_j$  stesso. Quindi, in virtù delle equazioni (1.31) e del fatto che  $\dot{u}^i := \frac{du^i}{ds} = \frac{\partial u^i}{\partial u^j} \frac{du^j}{ds} = \delta_j^i \frac{du^j}{ds}$ , si ha  $(\forall i = 1, \dots, p)$

$$\begin{aligned} (\nabla_{\dot{u}(s)} \dot{u}(s))^i &= (\nabla_j \dot{u}(s))^i = \left( \frac{\partial \dot{u}^i}{\partial u^j} + \Gamma_{jk}^i \dot{u}^k \right) \dot{u}^j = \\ &= \left( \delta_j^i \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \frac{du^j}{ds} \right) + \Gamma_{jk}^i \delta_j^k \frac{du^j}{ds} \right) \delta_k^j \frac{du^k}{ds} = \\ &= \delta_j^i \delta_k^j \frac{du^j}{ds} \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \frac{du^j}{ds} \right) + \delta_j^k \delta_k^j \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = \\ &= \delta_k^i \frac{du^j}{ds} \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \frac{du^j}{ds} \right) + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} =: \Theta + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \end{aligned} \quad (1.40)$$

D'altra parte, sfruttando la regola di Leibnitz per la differenziazione del prodotto e il

teorema di Schwartz sulla commutatività delle derivate per funzioni  $\mathcal{C}^2$ , vale

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^i}{ds^2} &= \frac{du^k}{ds} \frac{\partial}{\partial u^k} \left( \frac{du^i}{ds} \right) + \frac{du^i}{du^k} \frac{d^2 u^k}{ds^2} \\ \iff \frac{d^2 u^i}{ds^2} - \delta_k^i \frac{d^2 u^k}{ds^2} &= \frac{du^k}{ds} \frac{\partial}{\partial u^k} \left( \frac{du^i}{ds} \right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

da cui, riprendendo le (1.40), operando una rinomina degli indici e una moltiplicazione per  $\delta_j^k$ , otteniamo

$$\Theta = \delta_k^i \frac{du^j}{ds} \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \frac{du^i}{ds} \right) = \delta_k^i \frac{d^2 u^i}{ds^2} - \delta_k^i \delta_j^i \frac{d^2 u^j}{ds^2} \delta_j^k = \delta_k^i \frac{d^2 u^i}{ds^2} - \delta_j^i \frac{d^2 u^j}{ds^2} \quad (1.42)$$

Scegliendo a questo punto  $i = k \neq j \Rightarrow \delta_j^i = 0, \delta_k^i = 1$  si ha

$$\Theta = \frac{d^2 u^i}{ds^2} \quad \forall i = 1, \dots, p. \quad (1.43)$$

□

Riassumendo: la connessione affine *connette* gli spazi tangenti di una varietà  $\mathcal{M}$  mediante la nozione di trasporto parallelo lungo una curva, che avviene sempre e solo lungo curve geodetiche.

Concludiamo il paragrafo formalizzando la nozione di *campo tensoriale*, introdotta nell'Osservazione 1.3.5, in vista di importanti risultati successivi.

**Definizione 1.3.9** (Campo tensoriale). *Sia  $\mathcal{M}$  una  $p$ -varietà differenziabile (non necessariamente riemanniana). Un campo tensoriale di ordine  $(h, k)$  sopra  $\mathcal{M}$  è una mappa differenziabile del tipo*

$$T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_k^h(T(\mathcal{M})) \quad (1.44)$$

*L'insieme di tutti i campi tensoriali di ordine  $(h, k)$  su  $\mathcal{M}$  si indica con  $\Xi_k^h(\mathcal{M})$  e forma un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale.*

Vedendo quindi  $\Xi_k^h(P)$  come l'insieme di tutti i campi tensoriali  $(h, k)$  definiti intorno a un punto  $P = \sigma(\gamma(s))$  vincolato a una curva su una varietà, otteniamo una nozione di campo tensoriale lungo una curva su  $\mathcal{M}$ . In particolare  $\Xi_P = \Xi_0^1(\sigma(\gamma(s)))$  contiene i campi vettoriali tangenti lungo curve su  $\mathcal{M}$ . I campi tensoriali danno il modo più generale di definire un tensore, cosicché si può descrivere un tensore metrico su  $\mathcal{M}$  (ma in generale un qualsiasi tensore) tramite il suo campo associato, come quel  $\mathbf{g} \in \Xi_2^0(\mathcal{M})$  t.c.

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{T}_2^0(T_P \mathcal{M}) \\ P &\longmapsto \mathbf{g}_P \end{aligned} \quad (1.45)$$

secondo le notazioni della Sezione 1.3.1.

### 1.3.3 Curvatura della connessione affine

In questa sezione presentiamo lo strumento che “capta”, dal punto di vista più generale, la curvatura di una generica  $p$ -varietà, dal quale discendono tutte le nozioni di curvatura conosciute, inclusa la curvatura Gaussiana  $K$  di una superficie: il tensore di Riemann. La sua costruzione è articolata e, per non appesantire il testo, si rimanda a [8] e [9] per le dimostrazioni dei teoremi di questa sezione.

In prima istanza, data una  $p$ -varietà  $\mathcal{M}$ , osserviamo come la proprietà di essere una  $\mathbb{R}$ -algebra associativa dei tensori, enunciata nell’ Osservazione 1.2.6, si estenda naturalmente anche ai campi tensoriali  $\Xi_k^h(\mathcal{M})$  appena discussi. Introduciamo la seguente

**Definizione 1.3.10** (Algebra di Lie). *Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  un operatore bilineare esterno che gode delle proprietà:*

- (i)  $[[v, w], u] + [[u, v], w] + [[w, u], v] = 0, \quad \forall v, w, u \in V$  (Identità di Jacobi)
- (ii)  $[v, v] = 0, \quad \forall v \in V$  (Nilpotenza)

Allora la coppia  $(V, [\cdot, \cdot])$  è detta essere un’ algebra di Lie.

Si dimostra in [7] che su una qualsiasi algebra associativa  $(\mathbb{A}, \cdot)$ , l’operatore

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x, \quad \forall x, y \in \mathbb{A} \quad (1.46)$$

detto **commutatore** verifica le condizioni (i), (ii) e induce su  $\mathbb{A}$  una struttura di algebra di Lie. Scegliendo allora  $\mathbb{A} = \Xi_0^1(\mathcal{M})$ , è facile verificare che, con l’usuale composizione di funzioni, rispetto alla *derivazione direzionale*, i campi vettoriali su una varietà formano un’ algebra di Lie *i.e.*, per  $X, Y \in \Xi_0^1(\mathcal{M})$ , vale

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X, Y](f), \quad \forall f : \mathcal{M} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R} \quad (1.47)$$

In altre parole, anche il commutatore  $[X, Y] \in \Xi_0^1(\mathcal{M})$ .

In generale, si può munire  $\mathcal{M}$  di una connessione affine  $\nabla = (\partial_j \pm \omega_{jk}^i)_{i,j,k=1}^p$  con  $\omega_{jk}^i \neq \omega_{kj}^i$  *i.e.* non necessariamente simmetrica come quella espressa tramite i simboli di Chrystoffel. Qui si può definire una mappa  $R$  detta **trasformazione di curvatura** come

$$\begin{aligned} R : \Xi_0^1(\mathcal{M}) \times \Xi_0^1(\mathcal{M}) \times \Xi_0^1(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{T}_3^1(T(\mathcal{M})) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned} \quad (1.48)$$

**Teorema 1.3.4** (Deduzione del tensore di Riemann).

*Il tensore di Riemann è l’unico campo tensoriale  $R_{jkl}^i \in \Xi_3^1(\mathcal{M})$  che risolve*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.49)$$

Rispetto a una carta locale di coordinate  $(u^\mu)_{\mu=1}^p$  si esprime come

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial u^k} \omega_{jl}^i - \frac{\partial}{\partial u^l} \omega_{jk}^i + \omega_{jl}^\lambda \omega_{k\lambda}^i - \omega_{jk}^\lambda \omega_{l\lambda}^i \quad (1.50)$$

**Osservazione 1.3.7.** Il tensore di Riemann è legato alle derivate covarianti del second'ordine le quali, in generale, non commutano. Intuitivamente  $R_{jkl}^i$  misura come varia la connessione e quindi racchiude informazioni sulla curvatura di  $\mathcal{M}$ .

**Teorema 1.3.5** (Caratterizzazione di varietà piatte tramite  $R_{jkl}^i$ ).

Sia  $\mathcal{M}$  una  $p$ -varietà con connessione affine  $\nabla$  e sia  $\mathbf{R}$  il suo tensore di Riemann. Allora  $\mathbf{R} = 0$  se e solo se esiste un isomorfismo globale  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^p$  i.e.  $\mathcal{M}$  è globalmente piatta.

Quindi la curvatura della varietà è misurata tramite il tensore di Riemann relativo a una certa connessione sulla varietà, espressa in carte locali dai simboli  $\omega_{jk}^i$ . In nessun modo  $\mathbf{R}$  è legato all'  $\mathbb{R}^n$  in cui la varietà può essere immersa, pertanto la curvatura captata dal Riemann è una nozione *intrinseca* alla varietà.

Di una connessione affine, oltre alla curvatura, può misurarsi la *torsione*; in modo analogo a quanto fatto per il tensore di Riemann, detto  $\tau$  l'**operatore di torsione**, definiamo il tensore di torsione come l'unico campo  $T_{jk}^i \in \Xi_2^1(\mathcal{M})$  che risolve

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (1.51)$$

Si dimostra che, in coordinate locali, il tensore di torsione si esprime come  $T_{jk}^i = \omega_{jk}^i - \omega_{kj}^i$  e misura quando una connessione affine è *simmetrica*. In effetti:

**Definizione 1.3.11.** Sia  $\mathcal{M}$  una varietà differenziabile (non necessariamente riemanniana) dotata di connessione affine  $\nabla$  espressa dai coefficienti  $\omega_{jk}^i$ . Diciamo che  $\nabla$  è *simmetrica* quando ha torsione nulla i.e. se e solo se  $\omega_{jk}^i = \omega_{kj}^i$ .

Tenendo sempre a mente la Notazione 1.3.1, è sempre possibile determinare univocamente una connessione su una varietà tramite la metrica, chiedendo che la lunghezza di un vettore  $\|\mathbf{v}\| := (g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu)^{\frac{1}{2}}$  sia preservata. Vale, cioè, il seguente

**Teorema 1.3.6.** Data una varietà  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  esiste un'unica connessione  $\nabla$  simmetrica tale per cui sussista:

$$\nabla \mathbf{g} = 0 \quad (1.52)$$

Tale è identificata dai simboli di Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  i quali danno una misura della lunghezza degli archi infinitesimi lungo curve su  $\mathcal{M}$  e sono fissati da  $\mathbf{g}$ .

Da qui in avanti, quando lavoreremo su una varietà, sottointenderemo sempre di prenderla munita dell'unica connessione affine simmetrica determinata dalla sua metrica. Tale è quella espressa rispetto dai simboli di Chrystoffel e su di essa sono stati basati tutti i conti della Sezione 1.3.2.

Per concludere il capitolo, come accennato nella Sezione 1.2.3, definiamo un'ulteriore operazione tensoriale, che combina il prodotto per il tensore metrico, il quale, anche se definito globalmente – in generale – non risulta costante, con la contrazione di indici:

**Definizione 1.3.12.** *Su una varietà  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  definiamo la contrazione per metrica di un tensore  $T \in \mathcal{T}_k^h(T_P\mathcal{M})$  come il prodotto tensoriale  $\mathbf{g} \otimes T$ ; in componenti:*

$$T_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_h} \mapsto g_{\mu\nu} T_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_h} = T_{\mu\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1} \dots \alpha_h} \in \mathcal{T}_{k+1}^{h-1}(T_P\mathcal{M}) \quad (1.53)$$

con la condizione che  $\alpha_j = \nu$ .

In questo modo è possibile rendere il tensore di Riemann un tensore completamente covariante:

$$g_{\mu\nu} R_{\zeta\rho\xi}^{\nu} = R_{\mu\zeta\rho\xi} \in \Xi_4^0(\mathcal{M}) \quad (1.54)$$

Elenchiamo quindi delle proprietà di simmetria del tensore di Riemann covariante, utili per risultati futuri:

$$\begin{cases} R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} \\ R_{ijkl} = R_{klij} \\ R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0 \end{cases} \quad (\text{prima identità di Bianchi}) \quad (1.55)$$

**Osserviamo** che il tensore di Riemann  $R_{jkl}^i$  considerato è quello relativo alla connessione affine simmetrica  $\Gamma_{jk}^i$ , detta *connessione di Levi-Civita*. Questo fatto è fondamentale per avere le proprietà (1.55) che sono false rispetto a una connessione a torsione non nulla.

Per completezza riportiamo la scrittura della curvatura Gaussiana di una superficie (2-varietà), avente prima forma fondamentale individuata da un tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  e parametrizzata da  $\sigma = \sigma(u, v)$ , in termini del tensore di curvatura di Riemann

$$K = \frac{R_{\lambda\mu\nu\kappa} u^\lambda v^\mu u^\nu v^\kappa}{(g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa}) u^\lambda v^\mu u^\nu v^\kappa} \quad (1.56)$$

confermando che  $K$  non dipende dalla parametrizzazione scelta.

## Capitolo 2

# Relatività Ristretta

Fino al 1905 la meccanica, e in particolar modo la cinematica, si basava sul fatto che la nozione di *movimento* e tutto ciò che ne derivava fosse relativa. Vi era però un particolare tipo di osservatore, quello inerziale, che faceva eccezione e rivestiva l'unico caso "assoluto" della cinematica classica. Nella meccanica *newtoniana-galileiana*, infatti, rispetto ad osservatori inerziali, tutte le velocità possibili erano da considerarsi relative, ammettendo anche velocità *infinite*. Trascorso il XIX secolo, però, si iniziò a pensare che questo principio, cosiddetto di relatività galileiana, non fosse una legge generale della natura, poiché entrava in netta contraddizione con la teoria dell'elettromagnetismo, la quale stabiliva un limite superiore alle velocità ammissibili in natura, identificato dalla velocità della luce  $c$ . Fu proprio con l'obbiettivo di risolvere questa contraddizione che Einstein, spinto nondimeno da un'*idea unificatrice* delle leggi fisiche, iniziò a sviluppare la sua teoria dell'invarianza che fondò su due principi che eresse a postulati.

**Postulato 1** (Il principio di relatività ristretta).

*Non esiste velocità assoluta fatta eccezione che per quella della luce nel vuoto. I risultati ottenuti in un esperimento fisico da un osservatore  $O$  non dipendono dalla sua velocità relativa ad un secondo osservatore  $O'$ . Quindi le leggi fisiche sono invarianti rispetto a cambi di sistemi di riferimento.*

**Postulato 2** (Universalità della velocità della luce).

*La velocità della luce nel vuoto relativa ad un osservatore non accelerato è indipendente dal moto della sorgente. Pertanto essa risulta costante e pari a  $c$ .*

In virtù del principio di causalità (causa-effetto) e dei due postulati sopracitati deduciamo immediatamente che la velocità di un qualsiasi osservatore (trasportante un qualsiasi tipo di informazione) rispetto ad un altro non può superare la velocità della luce  $c$ . Quindi nessuna informazione può viaggiare a velocità superiori a  $c$ .

Ricordiamo che, in virtù dell'Osservazione 1.1.2, tutti gli osservatori considerati sono assunti *inerziali*.

## 2.1 Spazio-tempo e pseudometrica di Minkowski

Il primo passo è la costruzione matematica di un nuovo ambiente geometrico, differente da quello tridimensionale euclideo, che farà da contesto per la teoria della relatività ristretta. Si sostituisce il noto  $\mathbb{E}^3$  con uno spazio vettoriale diverso, che risulterà essere “pseudo-euclideo”.

**Definizione 2.1.1** (Spazio-tempo piatto). *Si consideri  $\mathbb{A}$  un  $\mathbb{K}$ -spazio affine con  $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{A} = 4$  e una forma bilineare simmetrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{K}$  con segnatura  $(3,1)$ . Diciamo che la coppia  $(\mathbb{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  è uno spazio-tempo di Minkowski o anche spazio-tempo piatto.*

Da notare che richiedendo che la segnatura sia  $(3,1)$  abbiamo automaticamente che la forma è non degenere. E' importante il fatto che  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  non è necessariamente definita positiva e perciò non è a priori un prodotto scalare; essa è *quasi* un prodotto scalare e si dice che definisce una *pseudo-metrica* su  $\mathbb{A}$ , detta di Minkowski.

**Osservazione 2.1.1.** *Il nostro modello di spazio-tempo è  $\mathbb{M}_0^4 := (\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{M}})$ , dove*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{M}} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto -v^0 w^0 + v^k w^k \end{aligned} \quad (2.1)$$

con  $k = 1, 2, 3$  in notazione di Einstein.  $\mathbb{M}_0^4$  contiene gli **eventi**  $\mathcal{E} = (t, x, y, z)$ , dove  $t$  indica la coordinata temporale e  $x, y, z$  le coordinate spaziali.

$\mathbb{M}_0^4$  è uno spazio piatto su cui è definita una metrica diversa da quella euclidea, detta appunto *pseudo-euclidea*; ma le nozioni legate alla metrica euclidea possono comunque essere trasportate sullo spazio-tempo di Minkowski, con le opportune differenze dovute alla non definita positività di  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{M}}$ . Avremo quindi concetti vicini, come una pseudo-norma, una pseudo-ortogonalità e via dicendo. Ometteremo nel seguito, per comodità, il suffisso *pseudo*.

**Definizione 2.1.2.** *La mappa  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^4 \rightarrow i\mathbb{R}$  dove  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{M}}}$  definisce la norma rispetto alla metrica di Minkowski. Diciamo inoltre che  $\mathbf{x}$  è un vettore di tipo spazio se  $\|\mathbf{x}\|^2 > 0$ , di tipo tempo se  $\|\mathbf{x}\|^2 < 0$  e di tipo luce se  $\|\mathbf{x}\|^2 = 0$ .*

La distanza tra due eventi  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{M}_0^4$  sarà quindi data da:

$$d_{\mathbb{M}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| = \sqrt{\langle \mathcal{A} - \mathcal{B}, \mathcal{A} - \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{M}}} \quad (2.2)$$

**Definizione 2.1.3.** *L'insieme  $\Omega = \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{M}_0^4$  t.c.  $\langle e_j, e_k \rangle_{\mathbb{M}} = \delta_k^j$  se  $j, k \neq 0$ ,  $\langle e_0, e_0 \rangle_{\mathbb{M}} = -1$  è detto essere la base canonica dei versori spazio-temporali di  $\mathbb{M}_0^4$ .*

Non a caso, vale il seguente

**Teorema 2.1.1.** *L'insieme  $\Omega$  risulta essere di generatori linearmente indipendenti per  $\mathbb{M}_0^4$ , pertanto ne costituisce una base ortonormale rispetto alla metrica di Minkowski.*

*Dimostrazione.* Semplice verifica. □

**Osservazione 2.1.2.** *Dal noto Teorema di Sylvester [1] si deduce che ogni spazio-tempo di Minkowski risulta essere isomorfo a  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^4$ . Tale isomorfismo può essere costruito partendo da una qualsiasi base ortogonale di  $\mathbb{R}^4$  che rispetta le condizioni espresse nella Definizione 2.1.3.*

Possiamo perciò descrivere un generico quadrivettore  $\mathbf{A} = (A^\mu)_{\mu=0}^3 \in \mathbb{M}_0^4$  relativo a un evento  $\mathcal{E} \sim (\mathcal{E}^\mu)_{\mu=0}^3$  in termini della base canonica, in virtù della Notazione 1.2.1 come  $\mathbf{A} = A^\mu e_\mu$ .

### 2.1.1 Il tensore metrico di Minkowski

Lo spazio-tempo di Minkowski è  $\mathbb{M}_0^4 \simeq \mathbb{R}^4$ . Quindi, fissato un suo punto-evento  $\mathcal{E}$ , lo spazio tangente è se stesso:  $T_{\mathcal{E}}\mathbb{M}_0^4 = \mathbb{M}_0^4$ . Vale allora, sfruttando ancora la *notazione di Einstein*:

$$\langle \mathcal{E}, \mathcal{P} \rangle_{\mathbb{M}} = \sum_{j,k=0}^3 \mathcal{E}^j \langle e_j, e_k \rangle_{\mathbb{M}} \mathcal{P}^k =: \mathcal{E}^j \eta_{jk} \mathcal{P}^k, \quad \forall \mathcal{E}, \mathcal{P} \in \mathbb{M}_0^4 \quad (2.3)$$

dove  $\eta = (\eta_{jk})_{j,k=0,\dots,3}$  definisce un tensore metrico sullo spazio tangente a  $\mathbb{M}_0^4$ , simmetrico, con segnatura (3,1). Chiamiamo  $\eta$  il *tensore metrico di Minkowski*.

Dal punto di vista della *geometria riemanniana*, in forza di quanto detto nella Sezione 1.3.1, la coppia  $(\mathbb{M}_0^4, \eta)$  ha una struttura di *4-varietà lorentziana* globalmente isomorfa a  $\mathbb{R}^4$ . Inoltre su questo spazio-tempo è definita una connessione di Levi-Civita "banale" ( $\Gamma_{jk}^i = 0$ ), dove la derivata covariante coincide con la derivata direzionale e quindi, per il Teorema 1.3.5, il relativo tensore di Riemann è nullo.

**Osservazione 2.1.3** (Tensore metrico controvariante).

*L'inverso del tensore metrico di Minkowski (come di ogni tensore covariante) è dato dalla sua versione controvariante (e viceversa). Quindi da quell'  $\eta^{jk} \in \mathcal{T}_0^2(\mathbb{M}_0^4)$  t.c. sussiste*

$$\eta^{ij} \eta_{jk} = \delta_k^i = \eta_{jk} \eta^{ij} \quad (2.4)$$

*dal quale si deduce una versione controvariante dell'operazione di contrazione per metrica data nella Definizione 1.3.13.*

**Definizione 2.1.4** (Contrazione per metrica controvariante).

Su  $(\mathbb{M}_0^4, \eta)$  definiamo la contrazione per metrica controvariante di un tensore  $T \in \mathcal{T}_k^h(\mathbb{M}_0^4)$  come il prodotto tensoriale  $\eta^{\mu\nu} \otimes T$ ; in componenti:

$$T_{\beta_1 \dots \beta_j \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_h} \mapsto \eta^{\mu\nu} T_{\beta_1 \dots \beta_j \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_h} = T_{\beta_1 \dots \beta_{j-1}, \beta_{j+1} \dots \beta_k}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_h} \in \mathcal{T}_{k-1}^{h+1}(T_P \mathcal{M}) \quad (2.5)$$

con la condizione che  $\beta_j = \nu$ .

E' chiaro che la suddetta operazione non vale solamente sullo spazio-tempo di Minkowski  $(\mathbb{M}_0^4, \eta)$ , ma si estende ad una generica variet   $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ .

## 2.1.2 Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Galileo per descrivere il cambio di coordinate da un osservatore  $O$  ad uno  $O'$  in movimento valgono nel regime della cinametica classica, ma non sono compatibili con i fenomeni elettromagnetici nei quali interviene  $c$  come velocit  limite assoluta. Come stabilito nel precedente capitolo, vanno quindi sostituite con le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} t' = \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} \\ x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.6)$$

Le (2.6) esprimono la legge che descrive le coordinate  $(t', x', y', z')$  di un osservatore  $O'$  in movimento con velocit   $\vec{v}$  nella direzione dell'asse  $\mathbb{R}\vec{e}_1$  relativamente a un osservatore  $O(t, x, y, z)$ . Come dimostrato nella Sezione 1.1 costituiscono il cambio di coordinate naturale nel contesto di SR. Si indica con  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$  il *fattore di Lorentz*.

Quindi per  $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  e  $\Lambda := \begin{bmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\Lambda_\mu^\nu)_{\mu=0, \dots, 3}^{\nu=0, \dots, 3}$  *matrice di*

*Lorentz*, le (2.6) si scrivono in maniera compatta (matriciale) come:

$$\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} \quad (2.7)$$

le quali, sfruttando la *notazione di Einstein*, si esprimono componente per componente come:

$$\mathbf{x}^{\mu'} = \Lambda_\mu^{\nu'} \mathbf{x}^\mu \quad (2.8)$$

Le trasformazioni di Lorentz possono interpretarsi tensorialmente come  $\Lambda \in \Xi_1^1(\mathbb{M}_0^4)$ .

Se nel regime della meccanica classica la distanza (spaziale) euclidea risulta invariante rispetto alle trasformazioni di Galileo, in SR la distanza spazio-temporale  $d_{\mathbb{M}}$  risulta invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

**Teorema 2.1.2** (Invarianza della separazione spazio-temporale).

*La pseudometrica di Minkowski è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz.*

*Dimostrazione.* Siano  $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathbb{M}_0^4$  due eventi di componenti  $\mathcal{E} = (t, x, y, z), \mathcal{E}' = (t', x', y', z')$ ; la loro distanza spazio-temporale è data da:

$$d_{\mathbb{M}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \sqrt{-(t - t') + (x - x') + (y - y') + (z - z')} \quad (2.9)$$

Stimiamo ora la distanza tra  $\Lambda\mathcal{E}$  e  $\Lambda\mathcal{E}'$ , dove  $\Lambda$  indica la matrice di Lorentz; Risultato:  $\|\Lambda\mathcal{E} - \Lambda\mathcal{E}'\|^2 = \|\Lambda(\mathcal{E} - \mathcal{E}')\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - (t - t')^2$ , poiché

$$\Lambda(\mathcal{E} - \mathcal{E}') = \begin{bmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t - t' \\ x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((t - t') - v(x - x'))\gamma \\ ((x - x') - v(t - t'))\gamma \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\mathcal{E} - \mathcal{E}')\|^2 &= \left\langle \begin{bmatrix} ((t - t') - v(x - x'))\gamma \\ ((x - x') - v(t - t'))\gamma \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ((t - t') - v(x - x'))\gamma \\ ((x - x') - v(t - t'))\gamma \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{M}} = \\ &= -\gamma^2((1 - v^2)(t - t')^2 - (1 - v^2)(x - x')^2) + (y - y')^2 + (z - z')^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

□

**Osservazione 2.1.4** (Sul fattore di Lorentz). *Per velocità  $\vec{v}$  sensibilmente inferiori a  $c$  i.e.  $v \ll 1$ , il fattore  $\gamma$  tende a valere 1. Possiamo assumere quindi, abusando di notazione, che  $\lim_{v \rightarrow 0} \gamma(v) = 1$  e quindi che  $\Lambda(v \rightarrow 0) \sim \mathbf{I}_4$ .*

Vediamo ora come agisce la generica trasformazione di Lorentz  $\Lambda$  sui versori canonici spazio-temporali e tramite tale azione stabiliamo la forma generica della trasformazione di Lorentz inversa. Consideriamo quindi un quadrivettore  $\vec{A} \in \mathbb{M}_0^4$ ; allora, relativamente ad un osservatore  $O'$  mobile rispetto a  $O$  "osservatore fisso" con velocità  $\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha$ , si ha  $\vec{A}' = A^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}$ .

Applicando la trasformazione di Lorentz si ottiene:

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha'}(A^{\beta}e_{\alpha}^{\vec{v}}) = A^{\alpha}e_{\alpha}^{\vec{v}} \quad (2.12)$$

da cui per linearità di  $\Lambda$ :

$$A^{\beta}(\Lambda_{\beta}^{\alpha'}e_{\alpha}^{\vec{v}}) = A^{\alpha}e_{\alpha}^{\vec{v}} \iff A^{\alpha}(\Lambda_{\alpha}^{\beta'}e_{\beta}^{\vec{v}}) = A^{\alpha}e_{\alpha}^{\vec{v}} \iff (\Lambda_{\alpha}^{\beta'}e_{\beta}^{\vec{v}} - e_{\alpha}^{\vec{v}})A^{\alpha} = 0$$

uniformemente in  $A^{\alpha}$ . Si può concludere che

$$e_{\alpha}^{\vec{v}} = \Lambda_{\alpha}^{\beta'}e_{\beta}^{\vec{v}} \quad , \forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad (2.13)$$

Quindi le trasformazioni di Lorentz mutano versori spazio-temporali in versori spazio-temporali.

**Teorema 2.1.3.** *Sia  $\Lambda(\vec{v}) = (\Lambda_{\beta}^{\alpha}(\vec{v}))_{\alpha, \beta=0}^3$  la matrice di Lorentz per un osservatore  $O'$  mobile relativamente a  $O$  con velocità  $\vec{v} = v\vec{e}_1$ . Allora  $\Lambda(\vec{v})^{-1} = \Lambda(-\vec{v})$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\Lambda_{\alpha}^{\beta}(-\vec{v}) = \begin{bmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  t.c.  $\Lambda_{\mu'}^{\nu}(-\vec{v})e_{\nu}^{\vec{v}} = e_{\mu'}^{\vec{v}}$

Allora, moltiplicando l'equazione tramite  $\langle e_{\alpha'}, \cdot \rangle_{\mathbb{M}}$ , si ha:

$$\eta_{\alpha\mu'} = \Lambda_{\beta'}^{\nu}(-\vec{v})\Lambda_{\alpha}^{\beta'}(\vec{v})e_{\alpha}^{\vec{v}}e_{\nu}^{\vec{v}} \quad (2.14)$$

i.e.

$$\Lambda_{\beta'}^{\nu}(-\vec{v})\Lambda_{\alpha}^{\beta'}(\vec{v}) = \delta_{\alpha}^{\nu} \quad (2.15)$$

che è sufficiente per avere la tesi. □

**Osservazione 2.1.5.** *Osserviamo che con questa caratterizzazione delle trasformazioni di Lorentz inverse è facile vedere come dalle coordinate di un quadrivettore  $\vec{A} = (A^{\beta'})_{\beta'}$  nel riferimento in movimento  $O'$  si ottengono le coordinate di  $\vec{A}$  nel riferimento fisso  $O$  applicando  $\Lambda^{-1}$ ; infatti:*

$$\Lambda_{\beta'}^{\nu}(-v)(A^{\beta'}) = \Lambda_{\beta'}^{\nu}(-v)(\Lambda_{\alpha}^{\beta'}(v)A^{\alpha}) = \delta_{\alpha}^{\nu}A^{\alpha} = A^{\nu} \quad (2.16)$$

### 2.1.3 Il gruppo di Poincaré

Per quanto visto nel precedente paragrafo la matrice *identità* 4x4, la moltiplicazione (riga per colonna) e l'inversa di matrici di Lorentz è ancora una trasformazione di Lorentz. L'insieme delle matrici di Lorentz risulta quindi dotato di un elemento neutro rispetto all'operazione di prodotto matriciale, di inversi e di chiusura rispetto a tale prodotto. Forma quindi un gruppo e in particolare un sottogruppo delle matrici simmetriche  $\mathcal{M}_4^S(\mathbb{R})$ . Chiamiamo  $\mathbb{O}(3,1)$  il *gruppo di Lorentz* contenente le  $\Lambda = \Lambda(v)$  di cui sopra.

**Osservazione 2.1.6.** *Tramite il naturale isomorfismo di gruppi*

$$\psi : \mathbb{O}(3,1) \rightarrow \mathbb{O}(4) \quad (2.17)$$

*il gruppo di Lorentz è isomorfo al gruppo ortogonale di  $\mathbb{R}^4$ .*

In particolare, il gruppo di Lorentz può dunque caratterizzarsi come il sottogruppo degli endomorfismi di  $\mathbb{M}_0^4$  contenente quelle trasformazioni  $\Lambda$  per cui  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ , ovvero

$$\mathbb{O}(3,1) = \{\Lambda \in \text{End}(\mathbb{R}^4) \mid \langle \Lambda \zeta, \Lambda \xi \rangle_{\mathbb{M}} = \langle \zeta, \xi \rangle_{\mathbb{M}}, \forall \zeta, \xi \in \mathbb{R}^4\} \quad (2.18)$$

Detto poi  $\mathbb{T}_4 := \{\tau_\alpha \in \text{End}(\mathbb{R}^4) \mid \tau_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \alpha\}$  il gruppo delle *traslazioni spazio-temporali*, in componenti

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + \alpha^{\mu} \quad (2.19)$$

si ottiene come *prodotto semidiretto* tra gruppi [10] il cosiddetto *gruppo di Poincaré*:

$$\mathcal{P} = \mathbb{T}_4 \ltimes \mathbb{O}(3,1) \quad (2.20)$$

contenente le *isometrie dello spazio-tempo*  $\mathbb{M}_0^4$ .

**Osservazione 2.1.7** (Teorema generale di invarianza spazio-temporale).

*In quest'ottica le  $\Lambda \in \mathbb{O}(3,1)$ , in base al Teorema 2.1.2, costituiscono le rotazioni di  $\mathbb{M}_0^4$  e l'invarianza sotto trasformazioni di Lorentz della distanza minkowskiana  $d_{\mathbb{M}}$  si generalizza alle trasformazioni di Poincaré.*

E' degno di nota il fatto che il gruppo di Poincaré ha una più completa ed esaustiva descrizione in termini della teoria delle algebre di Lie; introduciamo quindi qualche nozione che ci risulterà utile anche in seguito:

**Definizione 2.1.5.** *Un gruppo  $(G, \circ)$  il cui sostegno sia dotato di una struttura di varietà differenziabile è detto essere un **gruppo di Lie** se la legge di composizione e la mappa  $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$  sono entrambe differenziabili, i.e. se  $\circ$  è un diffeomorfismo.*

**Definizione 2.1.6.** Sia  $G$  un gruppo di Lie e  $\mathcal{M}$  una varietà differenziabile; posto essere  $\text{Diffeo}(\mathcal{M})$  il gruppo dei diffeomorfismi della varietà, diciamo che  $G$  agisce su  $\mathcal{M}$  via diffeomorfismi se esiste una rappresentazione  $\rho : G \rightarrow \text{Diffeo}(\mathcal{M})$ . Fissato un punto  $P \in \mathcal{M}$  l'insieme  $GP = \{gP \in \mathcal{M} | g \in G\}$  è detto orbita di  $P$  mentre  $\text{stab}(P) = \{g \in G | gP = P\}$  è un sottogruppo detto stabilizzatore di  $P$ . Si dice inoltre che  $G$  agisce transitivamente su  $\mathcal{M}$  se  $\forall P, Q \in \mathcal{M} \exists g \in G$  t.c.  $gP = Q$ .

Nel nostro spazio-tempo di Minkowski si ha che  $\mathcal{P}$  è un gruppo di Lie che agisce transitivamente su  $\mathbb{M}_0^4$  e le traslazioni  $\mathbb{T}_4$  e le rotazioni  $\mathbb{O}(3, 1)$  ne costituiscono rispettivamente un sottogruppo normale e lo stabilizzatore di un punto.

**Osservazione 2.1.8.** [11]: Nell'ottica programma di Erlangen, lo spazio-tempo di Minkowski può essere visto come la geometria (piatta) definita dall'azione del gruppo di Poincaré sulla quadrivarietà lorentziana  $\mathbb{M}_0^4$ .

Con gli strumenti della teoria della rappresentazione di gruppi possiamo descrivere il concetto della covarianza, già introdotto nell'Osservazione 1.2.4, in termini di gruppi ed è possibile formulare il *Postulato 1* in forma algebrica.

**Definizione 2.1.7** (Covarianza di Lorentz). Una grandezza fisica è detta covariante di Lorentz se si trasforma in una determinata rappresentazione del gruppo di Poincaré, ovvero se si esprime come  $(\rho(g))(P) \in \mathbb{M}_0^4$ , per  $g \in \mathcal{P}$  e  $P \in \mathbb{M}_0^4$ , dove  $\rho : \mathcal{P} \rightarrow \text{Diffeo}(\mathbb{M}_0^4)$ . Un'equazione è detta covariante di Lorentz se è scritta in termini di quantità covarianti di Lorentz.

Così, il Principio di Relatività Ristretta dice che qualsiasi legge fisica vigente in un sistema di riferimento inerziale – i.e. ambientata in  $\mathbb{M}_0^4$  – è descritta da un'equazione covariante di Lorentz.

E' opportuno osservare ancora, in questa sede, che la teoria della relatività offre una visione già più ampia della realtà fisica rispetto a quanto non facesse la meccanica classica. Ciò si evince dal fatto che in SR lo spazio (-tempo) è descritto da un modello geometrico più generale di quello di Galileo e Newton, il quale poteva modellizzarsi mediante la coppia *varietà-gruppo di simmetrie*

$$(\mathbb{E}^3, \mathbb{T}_3 \times \mathbb{O}(3)) \tag{2.21}$$

che rappresenta la geometria Euclidea tridimensionale, ambientata nello spazio Euclideo standard munito delle isometrie spaziali. In SR risulta invece evidente che per poter descrivere un *fenomeno* mediante le stesse leggi in qualsiasi riferimento (per ora solo inerziale), senza voler rinunciare al fatto che la velocità della luce costituisca un limite superiore per le velocità ammissibili, sia necessario che la natura si ambienta in una geometria quadrimensionale rappresentata da  $(\mathbb{M}_0^4, \mathcal{P})$  e che le trasformazioni "fondamentali" che possono avvenire in questo spazio-tempo piatto debbano produrre una dilatazione dei tempi e una contrazione delle lunghezze per osservatori in moto relativo.

## 2.2 Il tensore energia-impulso

Obbiettivo di questa sezione – conclusiva del secondo capitolo – è descrivere il tensore energia-impulso, oggetto matematico che racchiude tutta l'informazione fisica fondamentale nella teoria della relatività. In prima istanza descriveremo i quadrivettori principali della relatività ristretta che interverranno prepotentemente nel corso della discussione e alla fine costruiremo il tensore.

### 2.2.1 Quadrivettori di SR

Le grandezze che presenteremo in questa sezione sono tutte reative alla situazione fisica più semplice per eccellenza: il caso della particella puntiforme di massa  $m \in \mathbb{R}_+$  con certe coordinate  $(\zeta^\alpha)_{\alpha=0}^3 = (ct; \vec{\zeta}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  in un riferimento  $O(\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ .

**Osservazione 2.2.1.** *La traiettoria descritta dalla suddetta particella sarà rappresentata da una curva*

$$\begin{aligned} \xi : (a, b) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ s &\longmapsto \xi(s) \end{aligned} \quad (2.22)$$

parametrizzata ad arco. Il parametro  $s$  è detto **tempo proprio**.

Consideriamo quindi la particella in moto relativo con una certa velocità  $\vec{v} = \dot{\vec{\zeta}} = v\vec{e}_j$ ,  $\forall j = 1, 2, 3$ , rispetto a  $O'$ , dove la derivata della *posizione tridimensionale* è fatta rispetto al parametro  $s$ .

Sospendiamo la *Notazione 1.1.1* del metro-luce per dare la seguente

**Definizione 2.2.1** (Quadrivelocità e quadriflusso). *Il vettore  $\vec{U} := (\dot{ct}; \dot{\vec{\zeta}}) \in \mathbb{M}_0^4$  rappresenta la **quadrivelocità**. Nel piano  $\mathbb{R}_{(x,t)}^2$  può vedersi come il vettore tangente alla curva passante per un certo evento  $\mathcal{E} \in \mathbb{R}_{(x,t)}^2$ .*

Quindi  $\vec{p} := mc\vec{U} = (p^0, p^1, p^2, p^3)$  rappresenta il **quadrimpulso**. Chiamiamo la  $j$ -esima componente  $p^j$  del quadrimpulso col nome di  $j$ -momento.

Allora è importante evidenziare alcune relazioni:

**Teorema 2.2.1.** *Scelto un riferimento  $O(\zeta^\alpha)$  si ha che il fattore di Lorentz è l'inverso della componente temporale della quadrivelocità e lo 0-momento è l'energia del sistema.*

*Dimostrazione.* Ponendo  $\gamma := \frac{1}{ct}$  e calcolando le componenti spaziali della quadrivelocità tramite la regola della catena

$$U^j = \frac{d\zeta^j}{ds} = \frac{d\zeta^j}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{v^j}{\gamma c} \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad (2.23)$$

scriviamo  $\vec{U} = (\gamma^{-1}, \frac{v^1}{\gamma c}, \frac{v^2}{\gamma c}, \frac{v^3}{\gamma c})$  Ora:  $U^\alpha U^\beta \eta_{\alpha\beta} = -\gamma^{-2}(1 - \frac{v^2}{c^2}) \iff \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .

Quindi, per come è definito, il quadrimpulso è  $p^\mu = m(\frac{c}{\gamma}; \frac{\vec{v}}{\gamma}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  e, poichè – come si può vedere in Sezione 6.2 di [12] – l’energia del sistema è  $E = \frac{mc^2}{\gamma}$ , concludiamo che  $p^0 = \frac{E}{c}$ .  $\square$

Il primo ambiente *teorico* di test per la SR è il cosiddetto *fluido relativistico*, col quale nome si intende un agglomerato **continuo** di particelle dotato di massa dipendente dalle grandezze fisiche principali che intervengono nella teoria. In particolare scegliendo un riferimento  $O$  solidale col fluido si assume che esso dipenda dalla quadrivelocità  $\vec{U}$  del sistema, dalla sua densità di energia  $\rho$ , dalla sua massa  $m$  e dalla sua pressione  $p$ . Scriviamo:  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\vec{p}, \rho, p)$ . Su tale fluido potrà in particolare calcolarsi un flusso (tutte le grandezze citate non ancora note saranno definite a breve).

Ri-adottiamo da qui in avanti la Notazione 1.1.1 e diamo le importanti

**Definizione 2.2.2** (Densità di energia). *Sia  $O_{\mathbb{R}^3}$  un riferimento tridimensionale che assumiamo essere "in quiete" e sia  $n \in \mathbb{R}^+$  lo scalare identificativo della densità di particelle del fluido rispetto a tale riferimento. Allora, rispetto ad un sistema  $O'$  in movimento con velocità  $\vec{v} = v^\mu \vec{e}_\mu$ , si ha:  $n' = n\gamma$ . Definiamo quindi con  $\rho := nm$  la **densità di energia** del fluido relativamente ad un riferimento  $O$ . Rispetto ad  $O'$  sarà:  $\rho' = \gamma^2 \rho = \frac{\rho}{1-v^2}$ .*

**Definizione 2.2.3** (Quadriflusso).

*Il flusso tridimensionale del fluido sarà quindi  $\vec{F} = n'\vec{v} = (\frac{v^1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^3}{\sqrt{1-v^2}})$ .*

*Per analogia definiamo il **quadriflusso** come:  $\vec{N} := n\vec{U} = (n'; \vec{F}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .*

**Osservazione 2.2.2.** *Si può facilmente provare che il quadriflusso  $\vec{N}$  è invariante per  $\Lambda \in \mathbb{O}(3, 1)$ . Inoltre si ha:  $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle_{\mathbb{M}} = \eta_{\mu\nu} N^\mu N^\nu = -n^2$  [4].*

Il prossimo passo è descrivere un flusso completamente generale, che tenga conto del formalismo *minkowskiano* per cui il tempo è considerato una vera e propria coordinata – potremmo anzi dire *dimensione* – del sistema. Ci accingiamo quindi a considerare una ipersuperficie di  $\mathbb{M}_0^4$  che, in forza di quanto detto nella Sezione 1.3, possiamo identificare con una *3-varietà immersa in  $\mathbb{R}^4$*  e a studiare il flusso "fisico" che la attraversa.

## 2.2.2 Flusso di $\vec{p}$ attraverso una ipersuperficie di $\mathbb{M}_0^4$

Essendo  $(\mathbb{M}_0^4, \eta)$  una 4-varietà globalmente isomorfa a  $\mathbb{R}^4$  e quindi piatta, possiamo considerare  $\mathbb{M}_0^4 \simeq \mathbb{R}^4$  come spazio ambiente in cui immergiamo una 3-varietà  $\mathcal{F}$  differenziabile, la quale eredita da  $\mathbb{M}_0^4$  una metrica tramite la restrizione di  $\eta$  su  $\mathcal{F}$  stessa, e risulta quindi essere anch’essa lorentziana.

Possiamo dare quindi la seguente

**Definizione 2.2.4** (Il tensore energia-impulso o stress-energia).

Il flusso di  $\vec{p}$  attraverso l'ipersuperficie  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{M}_0^4$  immersa in un fluido relativistico dipendente da una densità  $\rho$ , una pressione  $p$  e una quadrivelocità  $U$  è identificato dal tensore energia-impulso  $\mathbf{T}$ , definito da

$$T^{\alpha\beta} = -p\eta^{\alpha\beta} + (\rho + p)U^\alpha U^\beta \quad (2.24)$$

**Osservazione 2.2.3** ( $\mathbf{T}$  come prodotto tensoriale). : Sia  $T^{\mu\nu}$  il tensore energia-impulso relativo a un certo fluido  $\mathcal{F}(p^\mu, \rho, p)$ ; allora vale

$$\vec{p} \otimes \vec{N} = mn\vec{U} \otimes \vec{U} = \mathbf{T} \quad (2.25)$$

**Considerazioni su  $\mathbf{T}$ :** Il tensore energia-impulso dipende dalle quantità da cui dipende anche il fluido relativistico, quindi si può parlare di *tensore energia-impulso relativo a un dato fluido  $\mathcal{F}$* .  $\mathbf{T}$  risulta essere un tensore controvariante di tipo (2,0) simmetrico:  $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$  e le sue componenti rispetto a un riferimento fissato sono:

$$\begin{cases} T^{00} = \rho & (\text{flusso dell'energia attraverso } t=\text{cost.}) \\ T^{j0} = \text{densità di quantità di moto} & \forall j = 1, 2, 3 \\ T^{0k} = \text{flusso di energia} & \forall k = 1, 2, 3 \\ T^{jk} = \text{flusso di quantità di moto} & \forall j, k \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

Forniamo una descrizione matriciale a blocchi del tensore

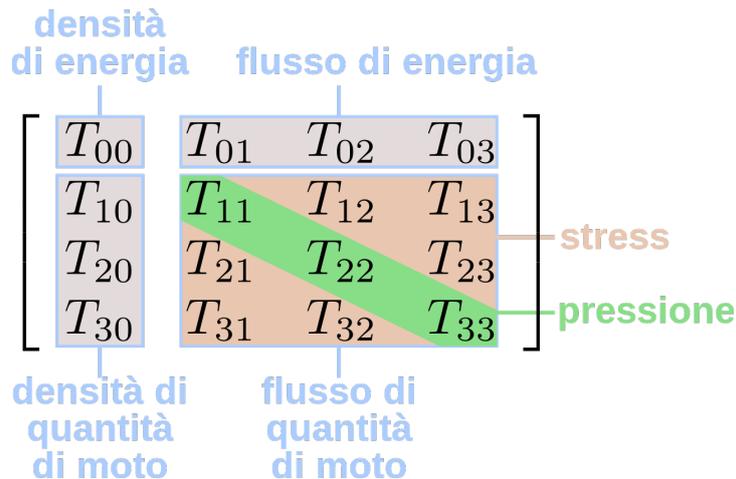


Figura 2.1: Struttura a blocchi del tensore energia-impulso.

Riportiamo, per concludere il capitolo, un risultato che generalizza la fondamentale *legge di conservazione dell'energia*, la cui derivazione può trovarsi in [8]:

**Teorema 2.2.2** (Conservazione del quadrimpulso  $\vec{p}$ ).

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.26)$$

Questa equazione tensoriale è la generalizzazione relativistica della legge di conservazione dell'energia e racchiude quindi un significato fisico profondo. In particolare coincide con l' *equazione di continuità* del fluido relativistico e può essere usata, nel contesto di SR, per trovare le equazioni del moto. Nel nostro elaborato sarà discriminante per intuire la natura geometrica della gravità.

**Osservazione 2.2.4** (Derivata covariante e leggi di conservazione).

La legge (2.26) espressa tramite la derivata covariante

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.27)$$

non è una legge di conservazione.

La (2.26) vale nel regime di SR e, quindi, nello spazio-tempo piatto di Minkowski, ma – come si vedrà a breve – sostituire la derivata direzionale  $\partial_\mu$  con la derivata covariante  $\nabla_\mu$  sposta la relazione da  $(\mathbb{M}_0^4, \eta)$  a un'arbitraria varietà  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  con curvatura non nulla, ivi l'equazione  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  non è una legge di conservazione.

La prova di quanto appena detto necessita di argomenti propri della Relatività Generale, pertanto verrà presentata più avanti. Tuttavia può essere utile spiegare già adesso il significato fisico dell'Osservazione 2.2.4: passare dalla legge (2.26) sul tensore energia-impulso di SR alla (2.27) relativa al tensore energia-impulso di una generica varietà curva equivale a "leggere" la legge di conservazione in un sistema in cui è presente un campo gravitazionale. Il motivo per cui  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  non porge una legge di conservazione, quindi, è che in presenza di gravità non influiscono sul sistema solo le caratteristiche fisiche della materia immersa in un fluido relativistico di  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  – vale a dire massa, energia, impulso, densità di materia e relativi flussi – bensì è rilevante anche l'energia trasportata dal campo gravitazionale stesso, che si dice essere *auto-interagente*.

In quest'ottica il campo gravitazionale coincide con l'intera varietà curva in cui vale la (2.27); in altre parole, il campo gravitazionale è lo spazio-tempo curvo.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Questo è uno dei punti cardine della teoria che stiamo per discutere, che descrive l'interazione gravitazionale come una proprietà geometrica dello spazio-tempo; ritenevo quindi necessaria un'anticipazione in questa sede. L'argomento necessita di una descrizione tensoriale di certe grandezze fisiche che verrà data a breve nel Capitolo 3. Si rimanda quindi ad *Appendice* per una prova rigorosa.

# Capitolo 3

## Relatività Generale

La relatività ristretta chiarisce l'apparente contraddizione che persisteva tra la meccanica *galileiana-newtoniana* e l'*elettromagnetismo*, e produce una serie di importanti risultati sulla cinematica e la dinamica che rispettano i principi di entrambe le teorie. Tuttavia mantiene intatta l'idea che esistano dei sistemi di riferimento privilegiati, assoluti, che sono i soli rispetto ai quali le leggi della fisica sono invarianti. Manca quindi di dare una visione generale delle leggi della natura, le quali – per ragioni di simmetria – devono essere le stesse per *qualsiasi* osservatore, anche non inerziale. Fu proprio con l'obiettivo di estendere il principio di relatività ristretta a sistemi non inerziali che Einstein cominciò a riflettere sui più comuni (ovvero quelli accelerati da un campo gravitazionale), e venne colto da quello che lui stesso ha chiamato "il pensiero più felice" della sua vita.

### 3.1 Il principio di equivalenza

Con lo scopo di ottenere un'equazione tensoriale per il campo gravitazionale, consideriamo dapprima l'equazione di Newton di *gravitazione universale*[13] in forma differenziale

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{3.1}$$

dove  $\Phi$  indica il potenziale gravitazionale e  $\rho = \frac{T^{00}}{c^2}$ . La (3.1) non può essere valida nel contesto di SR, poiché si basa sull'esistenza di una forza a distanza *istantanea* e ciò viola il Postulato 2. Si può quindi pensare di sostituire l'operatore *laplaciano* con il *d'Alembertiano*  $\square := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  che tiene conto del *limite luminifero*, ma comunque l'equazione  $\square\Phi = 4\pi G\rho$  risulta troppo semplice per essere un'equazione di campo, poiché il campo gravitazionale sarebbe generato solo dal potenziale  $\Phi$  mentre sappiamo che deve autogenerarsi. La svolta è *tensoriale*.

Mostriamo, sotto forma di teorema, la prima proprietà interessante di un campo gravitazionale:

**Teorema 3.1.1.** *Siano  $O$  osservatore inerziale e  $O'$  osservatore non inerziale relativamente accelerato rispetto ad  $O$  di  $\vec{g} = -g\mathbf{e}_3$ . Allora le particelle fisse in  $O'$  non risentono dell'accelerazione di gravità  $\vec{g}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $m \in \mathbb{R}_+$  la massa di una particella in caduta libera nello spazio, la trasformazione che fa passare da  $O$  a  $O'$  può scriversi come

$$\chi : \begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \\ t' = t \end{cases} \quad (3.2)$$

Quindi se su  $O$  vale

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m\vec{g} \quad (3.3)$$

applicando  $\chi$  otteniamo che su  $O'$  vale

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\vec{x}' + \frac{1}{2}\vec{g}t^2) = m\vec{g} \quad (3.4)$$

da cui  $m \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = 0$ .

□

Qui si presenta una **ambiguità**: qual è il riferimento inerziale tra  $O$  e  $O'$ ? C'è un punto di vista assoluto per poterlo stabilire? Einstein risolve l'ambiguo postulando che tali sistemi sono equivalenti!

**Postulato 3** (Il principio di equivalenza).

*Per un corpo in caduta libera immerso in un campo gravitazionale si può sempre scegliere un sistema di riferimento localmente inerziale.*

**Postulato 4** (Il principio di relatività generale).

*In virtù del terzo postulato si può estendere localmente il principio di relatività anche ai sistemi non inerziali.*

Dai nuovi postulati segue immediatamente che una qualsiasi particella soggetta a un qualsiasi campo gravitazionale descrivente una qualsiasi (anche molto complicata) traiettoria può considerarsi *ad ogni istante* in un riferimento (localmente) *inerziale*. Per questioni logiche, deduciamo che per questa particella vale (localmente) la **Relatività Ristretta** dedotta nel Capitolo 2.

**Osservazione 3.1.1** (Interpretazione pratica del principio di equivalenza). [5]

*L'intuizione fisica fondamentale è che gli effetti di un campo gravitazionale su una massa sono indistinguibili da quelli di un'accelerazione generica. Pertanto solo non misurando campi gravitazionali si può dire con certezza di essere in riferimenti inerziali. Così, si può sempre assumere che un corpo in caduta libera sia in un riferimento (localmente) inerziale e che globalmente sia presente un campo gravitazionale. In questo modo esistono tanti osservatori inerziali relativi e non più uno unico e assoluto.*

Nel contesto della relatività generale, per quanto equivalenti, stiamo sottolineando la differenza tra riferimenti inerziali e non inerziali; quindi, non sono uguali: un riferimento accelerato è *localmente* considerabile inerziale, pertanto è opportuno chiamare con nomi diversi le coordinate di tali riferimenti in modo ancor più marcato. Chiameremo con  $x^\mu$  le coordinate *globali* di un sistema e con  $\zeta^\alpha$  quelle *locali* (gli indici  $\mu, \alpha = 0, \dots, 3$  sono sempre muti).

In forza del *principio di equivalenza* possiamo quindi asserire che nel riferimento "in caduta libera" vale la relatività ristretta; in particolare per il Teorema 2.2.2 è conservato il quadrimpulso che, essendo a meno di una costante la quadrivelocità, possiamo assumere sia  $p^\alpha \sim \frac{d\zeta^\alpha}{ds}$  dove  $s$  indica il tempo locale, cosiddetto *tempo proprio*. Vale allora:

$$\frac{dp^\alpha}{ds} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2\zeta^\alpha}{ds^2} = 0 \quad (3.5)$$

Il cambio di coordinate dal *locale* al *globale* può esprimersi scrivendo le coordinate locali come funzioni delle globali  $\zeta^\alpha = \zeta^\alpha(x^\mu)$ . Vale il seguente

**Teorema 3.1.2** (Caratterizzazione geometrica della gravità).

*Passare da un riferimento inerziale in caduta libera in un campo gravitazionale ad uno globale equivale a introdurre la gravità nel sistema; essa dipende dai simboli di Chrystoffel ed è uguale a  $\Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$ .*

*Dimostrazione.* Usando la (3.5) e le regole per la differenziazione di Leibniz per il prodotto e della catena per la composta  $\zeta^\alpha(x^\beta)$  otteniamo:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{d^2 x^\beta}{ds^2} + \frac{dx^\beta}{ds} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad (3.6)$$

Moltiplicando l'equazione per  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha}$  si ha:

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{d\zeta^\alpha}{dx^\beta} \frac{d^2 x^\beta}{ds^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3.7)$$

$$\delta_\beta^\lambda \frac{d^2 x^\beta}{ds^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}}_{=: \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda} \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad (3.10)$$

□

**Osservazione 3.1.2.** Osserviamo che l'equazione (3.10), in forza del Teorema 1.3.3, altri non è che l'equazione geodetica rappresentante la traiettoria di una particella su una 4-varietà lorentziana curva dotata di una connessione affine espressa nei simboli  $\Gamma_{jk}^i$ . La traduzione fisica di questo risultato geometrico è che introdurre la gravità in un sistema inerziale equivale a passare da un riferimento inerziale locale, ambientato nella geometria piatta individuata da  $(\mathbb{M}_0^4, \mathcal{P})$ , ad uno non inerziale globale, ambientato in una geometria che – in generale – è curva. Praticamente, equivale a curvare  $\mathbb{M}_0^4$ .

Soffermiamoci ancora sul Teorema 3.12 (Caratterizzazione geometrica della gravità): siamo partiti dalla legge  $\frac{d^2\zeta^l}{ds^2} = 0$  nel riferimento locale su cui vale SR e abbiamo trovato la legge  $\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$  nel riferimento globale. Da qui si deduce, grazie al principio di equivalenza, che il cambio di riferimento dato da  $\zeta^l(x^i)$  equivale a introdurre la gravità nel sistema stesso. Così il termine  $\Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$  identifica l'azione della gravità sul sistema, che risulta indissolubilmente legata alla curvatura *matematica* della connessione affine  $\Gamma_{jk}^i$  captata (la curvatura) dall'equazione geodetica (3.10).

Quindi  $(\mathbb{M}_0^4, \eta)$  risulta essere solo un'approssimazione locale della 4-varietà lorentziana, in generale curva, che descrive globalmente il nostro spazio-tempo. Introducendo un nuovo tensore metrico  $\mathbf{g} = (g_{jk})_{j,k=0}^3$ , detto tensore metrico di Riemann o *tensore fondamentale* [14], diamo la seguente

**Definizione 3.1.1** (Spazio-tempo di Einstein). *Siano*

(i)  $\mathbb{M}^4$  una 4-varietà differenziabile t.c.  $T_{\mathcal{P}}\mathbb{M}^4 = \mathbb{M}_0^4$ ,  $\forall \mathcal{P} \in \mathbb{M}^4$

(ii)  $\mathbf{g} \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{M}_0^4)$  un tensore metrico con segnatura (3, 1)

(iii)  $\nabla$  la connessione affine simmetrica su  $\mathbb{M}^4$  (univocamente determinata dal Teorema 1.3.6) espressa nelle carte  $\sigma_j := \frac{\partial \sigma}{\partial x^j}$  da

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \zeta^l} \frac{\partial^2 \zeta^l}{\partial x^j \partial x^k}, \quad \forall \zeta^l = \zeta^l(x^j) \quad (3.11)$$

Allora  $(\mathbb{M}^4, \mathbf{g})$  è una 4-varietà lorentziana che modelizza lo spazio-tempo curvo.

### 3.1.1 Principio generale di covarianza

Per quanto visto nel Capitolo 2, si può affermare che le leggi fisiche che governano la natura sono indipendenti dall'orientamento e dalla velocità di traslazione del sistema di riferimento usato per enunciarle; in particolare sono invarianti rispetto alle simmetrie spazio-temporali del gruppo di Poincaré.

Riprendendo la Definizione 2.1.7, in fisica si usa chiamare questa caratteristica della natura col nome di **covarianza di Lorentz**, che identifica quindi l'invarianza rispetto a  $\mathcal{P}$  delle leggi fisiche, nonché il principio di relatività ristretta. La covarianza di Lorentz è una proprietà fondamentale dello spazio-tempo di Minkowski che segue da SR.

Tramite il calcolo tensoriale e il principio di equivalenza (Postulato 3) si può considerare la covarianza di Lorentz come un principio *locale*, e si può quindi estendere a una forma più generale che può enunciarsi come segue:

**Covarianza di diffeomorfismo** (o Covarianza Generale): *Le leggi fisiche sono invarianti sotto ogni trasformazione differenziabile di coordinate.*

Il principio sottolinea come i sistemi di coordinate siano un artificio astratto, utile a descrivere un sistema fisico, ma non a priori presenti in natura; quindi essi non devono giocare un ruolo discriminante nella formulazione delle equazioni che la descrivono. La covarianza generale è una proprietà fondamentale dello spazio-tempo curvo  $\mathbb{M}^4$  che segue da SR e dal *principio di equivalenza*.

Ribadendo ancora l'Osservazione 1.2.4, diamo una più precisa definizione e compattiamo in un teorema le conseguenze fondamentali di questo principio, nel contesto della Teoria della Relatività:

**Definizione 3.1.2** (Equazione covariante).

*Diciamo che un'equazione valida in SR, scritta in funzione del tensore metrico di Minkowski  $\eta_{jk}$  e delle derivate  $\partial_\mu$  è un'equazione covariante se rimane valida sostituendovi, rispettivamente, il tensore metrico di Riemann  $g_{jk}$  e le derivate covarianti  $\nabla_\mu$ .*

**Teorema 3.1.3.** *Una legge fisica di SR espressa da un'equazione tensoriale covariante  $\mathbf{T}(\zeta^\alpha) = \mathbf{S}(\zeta^\alpha)$  è automaticamente valida anche in GR come  $\mathbf{T}'(x^\mu) = \mathbf{S}'(x^\mu)$ .*

*Dimostrazione.* Segue dalla covarianza generale e dalla proprietà fondamentale dei tensori di essere covarianti per cambi di coordinate, espressa nell'equazione (1.16), Sezione 1.2.2.

□

## 3.2 Forza e potenziale gravitazionale

Applicando ad un sistema di riferimento  $O((\zeta^\alpha)_{\alpha=0}^3) \in \mathbb{M}_0^4$  un cambio di coordinate locale-globale  $\zeta^\alpha = \zeta^\alpha(x^\beta)$ , sfruttando l'equazione (1.16) sulla legge di trasformazione di un tensore, possiamo descrivere il tensore metrico di Riemann come

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} \quad (3.12)$$

Così, l'elemento di linea nello spazio-tempo curvo  $\mathbb{M}^4$  è dato da

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.13)$$

**Osservazione 3.2.1.** *Dalle equazioni (3.11) e (3.12), il tensore metrico di Riemann è una funzione delle derivate prime delle coordinate locali, mentre la connessione affine è funzione delle derivate seconde, i.e.*

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\partial \zeta^\alpha) \\ \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(\partial^2 \zeta^\alpha) \end{cases} \quad (3.14)$$

Quindi le due quantità sono legate dalla stessa relazione che intercorre tra una **forza** e il suo **potenziale**, avendo  $g_{\mu\nu}$  la forma di un integrale di  $\Gamma_{jk}^i$ .

Vale il seguente

**Teorema 3.2.1** (Forza e potenziale gravitazionale).

*Tensore metrico di Riemann e connessione di Levi-Civita identificano rispettivamente il potenziale e la forza gravitazionale. In particolare vale*

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} \quad (3.15)$$

*Dimostrazione.* Usiamo la notazione  $\frac{\partial}{\partial x^\lambda} =: \partial_\lambda$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} =: \partial_{\mu\nu}^2$ ; per la definizione di  $g_{\mu\nu}$  data in (3.12) si ha

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = (\partial_{\lambda\mu}^2 \zeta^\alpha \partial_\nu \zeta^\beta + \partial_\mu \zeta^\alpha \partial_{\mu\nu}^2 \zeta^\beta) \eta_{\alpha\beta} \quad (3.16)$$

D'altra parte

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\lambda} \stackrel{(3.11)}{=} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\lambda} = \delta_\alpha^\beta \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 \zeta^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (3.17)$$

In conclusione

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \left( \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \eta_{\alpha\beta} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} \quad (3.18)$$

□

**Corollario 3.2.2.**

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (3.19)$$

*Dimostrazione.* Segue dalla *covarianza generale*, estendendo la Definizione 2.1.4 a  $(\mathbb{M}^4, \mathbf{g})$ , moltiplicando per  $g^{\alpha\nu}$  la seguente equazione

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = 2\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}g_{\rho\nu} \quad (3.20)$$

la quale segue direttamente dal teorema precedente e dalla simmetria della connessione.  $\square$

**Osservazione 3.2.2.** La (3.19) mostra che la derivata di un tensore non è in generale un tensore: se  $\Gamma_{jk}^i$  fosse un tensore avrebbe la stessa forma in due sistemi di riferimento diversi. D'altra parte in un riferimento locale a un corpo in caduta libera dentro un campo gravitazionale si ha  $\Gamma_{jk}^i = 0$ , e passando al globale  $\Gamma_{jk}^{i'} \neq 0$ . Questo fatto può essere dimostrato calcolando direttamente come si trasforma la connessione di Levi-Civita  $\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \zeta^l} \frac{\partial^2 \zeta^l}{\partial x^j \partial x^k}$  e paragonandola con l'equazione (1.16), da cui si trova:

$$\Gamma_{jk}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} \Gamma_{mn}^l + \underbrace{\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}}_{=: \Theta} \quad (3.21)$$

Quindi  $\Gamma_{jk}^i$  non è un tensore solo per il termine  $\Theta$ .

**Corollario 3.2.3.**

$$\nabla_{\gamma}g_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu}g_{\mu\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\mu}g_{\alpha\mu} = 0 \quad (3.22)$$

*Dimostrazione.* Segue dal calcolo esplicito della derivata covariante (Teorema 1.3.2) e dal teorema precedente.  $\square$

Da notare che, in base al Teorema 1.3.6, questa informazione era già nota *ante omnia*. Nella pratica, il tensore fondamentale è una costante per la derivata covariante

$$\nabla_{\alpha_j} (g_{\mu\nu} X_{\beta_1, \dots, \beta_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_h}) = g_{\mu\nu} (\nabla_{\alpha_j} X_{\beta_1, \dots, \beta_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_h}) \quad (3.23)$$

### 3.2.1 Il tensore di Einstein

Nel contesto di GR il tensore di Riemann è strettamente legato al campo gravitazionale. Riprendendo l'Osservazione 1.3.7,  $R_{jkl}^i$  misura come varia la connessione affine e, quindi, la forza di gravità, che si manifesta come curvatura di  $\mathbb{M}^4$ . Tenendo sempre a mente la Definizione 3.1.1, il tensore di Riemann

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{jl}^j \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^j \Gamma_{li}^i \quad (3.24)$$

è l'unico tensore ottenibile dalle derivate prime e seconde del tensore fondamentale  $g_{jk}$  che sia lineare nelle derivate seconde. Fornisce uno strumento che, partendo dal tensore metrico, da informazioni sulla presenza di un campo gravitazionale.

**Osservazione 3.2.3** (Simbolo di Chrystoffel con due indici uguali).

Dal Corollario 3.2.2 si ha che

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} \quad (3.25)$$

da cui si può esprimere il tensore di curvatura di Riemann come funzione delle derivate del tensore fondamentale:

$$\begin{cases} R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (\partial_{\beta\mu}^2 g_{\sigma\nu} - \partial_{\beta\nu}^2 g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma\mu}^2 g_{\beta\nu}) \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R_{\beta\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} (\partial_{\beta\mu}^2 g_{\alpha\nu} - \partial_{\beta\nu}^2 g_{\alpha\mu} + \partial_{\alpha\nu}^2 g_{\beta\mu} - \partial_{\alpha\mu}^2 g_{\beta\nu}) \end{cases} \quad (3.26)$$

Ricordando le simmetrie del Riemann, già espresse in generale in (1.55) per una qualsiasi  $p$ -varietà, si deduce, nel contesto di GR, la cosiddetta identità differenziale o seconda identità di Bianchi:

$$\nabla_{\lambda} R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho} R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma} R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0 \quad (3.27)$$

Mediante un argomento che va sotto il nome di *Limite Classico* di GR, in cui si restringe la teoria tensoriale del campo gravitazionale fin qui discussa al caso di campi gravitazionali deboli (come quello terrestre, il cui potenziale è  $\Phi(r) = -G\frac{m}{r}$ ), si ottiene la seguente equazione sul tensore metrico di Riemann:

$$g_{00} = - \left( 1 + \frac{2}{c^2} \Phi \right) \quad (3.28)$$

Nel limite classico, inoltre, l'equazione geodetica prende la forma dell'equazione (3.1), dalla quale, mediante l'equazione (3.28) del limite Newtoniano, si trova

$$\nabla^2 g_{00} = - \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \quad (3.29)$$

Per avere un'equazione tensoriale covariante che generalizzi la (3.29), è necessario trovare il tensore relativo al laplaciano di  $g_{00}$ ; chiamiamo questo tensore  $E_{\mu\nu} \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{M}_0^4)$  il *tensore di Einstein*, il quale dovrà risolvere la seguente equazione

$$E_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.30)$$

dove  $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia-impulso del campo gravitazionale.

In particolare, si richiede che il tensore di Einstein abbia le seguenti proprietà:

- (o): sia un tensore di tipo (0,2);
- (i): lineare nelle derivate seconde, scritto mediante prodotti di derivate prime;
- (ii): simmetrico;
- (iii):  $\nabla_\mu E^{\mu\nu} = 0$ ;
- (iv): nel limite classico,  $E_{00} \approx -\nabla^2 g_{00}$ .

Il tensore di Riemann  $\mathbf{R} = (R_{ijkl}^i)$  rispetta le condizioni (o), (i), (ii).

**Teorema 3.2.4** (Tensore di Ricci e Curvatura Scalare).

Il tensore di Ricci e la curvatura scalare definiti da

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{M}_0^4) \\ R = g^{\mu\nu} R_{\lambda\mu\nu}^\lambda = R_\lambda^\lambda \in \mathcal{T}_0^0(\mathbb{M}_0^4) \end{cases} \quad (3.31)$$

sono gli unici tensori ottenibili da  $\mathbf{R}$  tramite contrazioni metriche.

Si noti che  $R$  è la traccia di  $R_{\mu\nu}$ .

*Dimostrazione.* Si veda [14].

□

**Osservazione 3.2.4.** E' chiaro che  $R_{\mu\nu}, R$  sono lineari nelle derivate seconde, discendendo dal tensore di Riemann. Prendendo una combinazione lineare del tensore di Ricci e della curvatura scalare moltiplicata per il tensore metrico di Riemann, otteniamo un tensore che rispetta le condizioni (o), (i), (ii)

$$E_{\mu\nu} = c_1 R_{\mu\nu} + c_2 R g_{\mu\nu} \quad , c_j \in \mathbb{R} \quad (3.32)$$

A questo punto, resta solo da determinare le costanti. Sfruttando le proprietà (iii), (iv) del tensore di Einstein, mediante la seconda identità di Bianchi (3.27) e la contrazione per metrica con il Riemann controvariante, dopo alcuni passaggi algebrici (che possono trovarsi in [8]), si trovano i valori per le costanti, da cui

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \quad (3.33)$$

In conclusione, l'equazione tensoriale covariante del campo gravitazionale è

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.34)$$

I due termini dell'equazione sono indicativi: il membro di destra racchiude l'informazione fisica di un oggetto immerso in  $\mathbb{M}^4$ , quello di sinistra descrive la curvatura matematica dello spazio-tempo, per effetto della materia (massa e energia) di tale oggetto.

### 3.3 Equazione di campo e geometrie dell'universo

La (3.34) sembra una, ma sono 16 equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari, del second'ordine, nelle componenti del tensore metrico di Riemann, nelle quattro variabili indipendenti  $x, y, z, t$  [15]. Il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  descrive completamente la metrica di  $\mathbb{M}^4$  e sia la curvatura scalare  $R$  che il tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$  sono sue funzioni; risolvere l'equazione di campo significa quindi trovare le 16 componenti del tensore metrico, che per simmetria si riducono a 10 indipendenti. Nelle ultime sezioni di questa tesi, tuttavia, non ci occuperemo di risolvere direttamente l'equazione di campo, bensì applicheremo delle ipotesi "empiriche" sullo spazio-tempo globale, dalle quali deriveremo una specifica metrica e risaliremo a ritroso alle equazioni che descrivono la dinamica dell'universo.

#### 3.3.1 Principio cosmologico e coordinate comoventi

Nel 1917, due anni dopo il completamento di GR, Einstein provò subito ad usare le sue equazioni per studiare la struttura globale dello spazio-tempo e formulò il cosiddetto *principio cosmologico*, asserendo che l'universo può modellizzarsi come un fluido omogeneo e isotropo, di cui le galassie ne costituiscono le particelle.

Più Precisamente: consideriamo dapprima una "foliazione"  $\{\Sigma_\tau\}_{\tau \in \mathcal{I}}$  dello spazio-tempo di Einstein i.e. un *ricoprimento* della parte spaziale di  $(\mathbb{M}^4, \mathbf{g})$ . Detta  $\eta(\tau)$  la restrizione di  $\mathbf{g}$  sulle  $\Sigma_\tau$ , si ha che le ipersuperfici della foliazione formano una famiglia di varietà riemanniane  $\{(\Sigma_\tau, \eta(\tau))\}_{\tau \in \mathcal{I}}$ , in quanto  $\eta(\tau)$  ha segnatura  $(3,0)$  i.e. è definito positivo per ogni  $\tau \in \mathcal{I}$ .

Fissato quindi  $\tau \in \mathcal{I}$ , detto  $G_\tau = \{g : \Sigma_\tau \rightarrow \Sigma_\tau; g, g^{-1} \in \mathcal{C}^1\}$  il gruppo dei *diffeomorfismi* dell' ipersuperficie, esso risulta essere il gruppo di Lie contenente le isometrie di  $\Sigma_\tau$  vista come varietà riemanniana<sup>1</sup>. Possiamo dare quindi la seguente

**Definizione 3.3.1** (Omogeneità). *Uno spazio-tempo  $(\mathbb{M}^4, \mathbf{g})$  è detto omogeneo se esiste una foliazione  $\{\Sigma_\tau\}_{\tau \in \mathcal{I}}$  tale per cui il gruppo dei diffeomorfismi  $G_\tau$  agisce transitivamente sulle  $\Sigma_\tau$  i.e.  $\forall P, Q \in \Sigma_\tau \exists g \in G_\tau$  t.c.  $g(P) = Q, \forall \tau \in \mathcal{I}$ .*

Poiché questa definizione vale per una varietà riemanniana qualsiasi, è da notare che – per quanto detto nella Sezione 2.1.3 – lo spazio-tempo di Minkowski  $\mathbb{M}_0^4$  risulta essere omogeneo rispetto all'azione del gruppo di Poincaré. In generale, uno spazio-tempo omogeneo ha la stessa geometria ovunque.

---

<sup>1</sup>L'algebra di Lie associata è formata da quei campi vettoriali  $X \in \Xi_0^1(\Sigma_\tau)$  lungo i quali la derivata di Lie del tensore metrico  $\eta(\tau)$  è nulla. Tali sono detti campi di Killing e identificano i *generatori* delle isometrie di una varietà riemanniana e possono essere usati per una presentazione più formale del successivo Teorema 3.3.2, l'ultimo di questa tesi. Si rimanda a Sezione 5.20 di [6] per i dettagli.

Consideriamo adesso, per un qualsiasi punto  $P \in \Sigma_\tau$ , il sottogruppo stabilizzatore  $\text{stab}(P) = \{g \in G_\tau; g(P) = P\} =: H_P$  detto *gruppo di isotropia di P*. Chiaramente, le rotazioni rispetto a un asse passante per  $P$  sono contenute in  $H_P$  e le curve passanti per  $P$  sono mappate da  $H_P$  in altre curve passanti per  $P$ .

**Definizione 3.3.2** (Isotropia). *Sia  $(\mathbb{M}^4, \mathbf{g})$  uno spazio-tempo e  $\{\Sigma_\tau\}_{\tau \in \mathcal{I}}$  una sua foliazione. Esso si dice isotropo in  $P \in \Sigma_\tau$  se il gruppo di isotropia di  $P$  consta delle sole rotazioni i.e.  $H_P = SO(3)$ . Si dice isotropo se è isotropo in ogni suo punto.*

In termini pratici l'isotropia di uno spazio-tempo è la proprietà per cui, data una qualsiasi curva  $\gamma : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^4$  passante per  $P$  e due qualsiasi versori normali  $A, B \in (T_P \mathbb{M}^4)^\perp$ , esiste sempre un'isometria  $g \in G_\tau$  che lascia fisso il versore tangente a  $\gamma$  in  $P$  e che ruoti  $A, B$ . L'isotropia è una proprietà che si riflette anche sui tensori della varietà considerata:

**Definizione 3.3.3.** *Considerato un punto  $P \in \Sigma_\tau$ , un tensore  $T \in \Xi_k^h(P)$  si dice isotropo se le sue componenti non variano sotto una rotazione delle coordinate, i.e.*

$$T_\nu^\mu = \sum_{\alpha, \beta} \phi_\mu^\alpha \phi_\nu^\beta T_\beta^\alpha \quad (3.35)$$

dove gli indici  $\mu, \nu, \alpha, \beta$  sono multindici di lunghezza  $h, k$  e  $\Phi \in G_\tau$ .

Enunciamo quindi un importante teorema, per gli scopi di questo elaborato, la cui prova può trovarsi in [16]

**Teorema 3.3.1.** *La delta di Kronecker  $\delta_j^i$  è l'unico tensore isotropo di ordine  $(1, 1)$  e qualsiasi tensore isotropo  $T \in \Xi_k^h(P)$  è un suo multiplo, vale a dire  $\exists c \in \mathbb{R}$  t.c*

$$T_{\nu_1, \dots, \nu_k}^{\mu_1, \dots, \mu_h} = c \delta_{\nu_1}^{\mu_1} \dots \delta_{\nu_k}^{\mu_h} \quad (3.36)$$

Il primo modello cosmologico da poter studiare tramite la Teoria della Relatività è quello di un universo-*gas cosmico* omogeneo e isotropo, le cui galassie sono *in media* statiche, ovvero si muovono molto lentamente, tanto da poter trascurare il loro quadrimpulso. Si assume che in  $\mathbb{M}^4$  sia immerso un fluido tridimensionale  $\mathcal{F}(\rho, p)$  dipendente solo dalla densità di energia e dalla pressione.

**Osservazione 3.3.1** (Postulato di Weyl). *Le proprietà topologiche di omogeneità e isotropia implicano che le curve sopra lo spazio-tempo individuano una famiglia di ipersuperfici  $\Sigma_\tau$  ad esse ortogonali. Scegliere un riferimento solidale alle  $\Sigma_\tau$  equivale a scegliere delle coordinate "spaziali", a tempo costante, che sono vincolate alla posizione media delle galassie e determinano la foliazione dello spazio-tempo. Chiamiamo queste coordinate col nome di **coordinate comoventi**.*

Le coordinate comoventi, dunque, rimuovono la dipendenza dal tempo e permettono di concentrarsi unicamente sulla *forma* dello spazio; rendono trascurabile un'eventuale espansione dell'universo descrivendo uno spazio che in media è statico, pur rimanendo comunque consistenti con tale espansione.

A questo punto, si può enunciare il teorema finale di questo elaborato:

**Teorema 3.3.2** (Sulle geometrie dell'universo).

*Le ipersuperfici  $\Sigma_\tau$  che costituiscono la foliazione di uno spazio-tempo  $(\mathbb{M}^4, \mathbf{g})$  omogeneo e isotropo hanno curvatura gaussiana  $K=\text{costante}$ .*

*Dimostrazione.* Fissato un indice  $\tau$ , in coordinate comoventi, consideriamo la restrizione  $\eta_{\mu\nu}(\tau)$  del tensore fondamentale  $g_{\mu\nu}$  sulle  $\Sigma_\tau$  e  $R_{\rho\mu\nu}^\lambda(\tau)$  il tensore di curvatura di Riemann delle ipersuperfici di foliazione. Contraendo con  $\eta^{\rho\sigma}(\tau)$  si ottiene il tensore  $R_{\mu\nu}^{\lambda\sigma}(\tau)$  che può interpretarsi come un'applicazione lineare di  $\mathcal{T}_2^0(T_P(\Sigma_\tau))$  in se stesso: chiamiamola  $\mathcal{L}$ . Dalle simmetrie di Riemann (1.55) è evidente che  $\mathcal{L}$  è *autoaggiunto*, quindi, dal teorema spettrale, può ricondursi a una forma diagonale. La  $\mathcal{L}$  identifica quindi un tensore isotropo e il Teorema 3.3.1 assicura che  $\mathcal{L} = K\mathbf{I}$  è un multiplo dell'identità (tensoriale), ovvero vale

$$R_{\mu\nu}^{\lambda\sigma}(\tau) = K\delta_\mu^\lambda\delta_\nu^\sigma \iff R_{\mu\nu\lambda\sigma}(\tau) = K\eta_{\lambda\mu}(\tau)\eta_{\sigma\nu}(\tau) \quad (3.37)$$

dove la (1.56) garantisce che  $K$  sia proprio la *curvatura gaussiana* della  $\Sigma_\tau$ . Per ipotesi di omogeneità e, ancora, di isotropia la seconda identità di Bianchi si riduce a

$$\nabla_\varsigma R_{\mu\nu\lambda\rho}(\tau) = 0 \quad (3.38)$$

e per la proprietà del tensore metrico di essere costante per la derivata covariante, espressa in (3.23), si ha

$$\eta_{\lambda\mu}(\tau)\eta_{\rho\nu}(\tau)(\nabla_\varsigma K) = 0 \quad (3.39)$$

che è vera se e solo se  $K$  è costante. □

Concludiamo che le possibili geometrie per un universo omogeneo e isotropo sono individuate dalle ipersuperfici a curvatura *gaussiana* costante e si riducono ai casi *euclideo*, *sferico* e *iperbolico*:

$$\Sigma_\tau = \begin{cases} \mathbb{S}^3 & \text{se } K > 0 \\ \mathbb{E}^3 & \text{se } K = 0 \\ \mathbb{H}^3 & \text{se } K < 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

Ciò prova che la geometria di  $\mathbb{M}^4$  dipende unicamente dal segno di  $K$ , poiché il suo modulo funge solo da fattore di scala (scalare). Si può assumere quindi che  $K = 0, \pm 1$ .

### 3.3.2 Metrica di Robertson-Walker

Le possibili geometrie di un universo omogeneo e isotropo sono dunque classificate dal Teorema 3.2.2 e possono essere usate per costruire una metrica. E' noto che un osservatore isotropo, per definizione, avrà sempre coordinate ortogonali alle ipersuperfici  $\Sigma_\tau$  della precedente sezione. Così, detta  $U = (U^\mu)_{\mu=0}^3$  la quadrivelocità del sistema, è possibile [17] esprimere il tensore metrico dello spazio-tempo gobale  $(\mathbb{M}^4, \mathbf{g})$  come

$$g_{\mu\nu} = -U_\mu U_\nu + \eta_{\mu\nu}(\tau) \quad (3.41)$$

Scegliendo quindi delle coordinate comoventi sferiche  $r, \phi, \theta$  per la parte spaziale, avremo una metrica variabile a seconda della curvatura  $K = 0, \pm 1$  delle  $\Sigma_\tau$ , data da

$$ds^2 = -dt^2 + \Omega^2(t) \begin{cases} dr^2 + \sin^2 r (d\phi^2 + \sin^2 \phi d\theta^2) \\ dr^2 + (d\phi^2 + \sin^2 \phi d\theta^2) r^2 \\ dr^2 + \sinh^2 r (d\phi^2 + \sin^2 \phi d\theta^2) \end{cases} \quad (3.42)$$

dove  $\Omega$  è una funzione del tempo non negativa che, nella letteratura, prende il nome di *fattore di scala*. La (3.42) è detta *modello cosmologico di Robertson-Walker* (RW) e può scriversi in una forma più compatta, che evidenzia la dipendenza dalla curvatura delle ipersuperfici  $\Sigma_\tau$  che *ricoprono* la "parte spaziale" di  $\mathbb{M}^4$

$$ds^2 = -dt^2 + \Omega^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\phi^2 + d\theta^2 \sin^2 \phi) \right) \quad (3.43)$$

Volendo sostituire la metrica RW nelle equazioni di campo di Einstein, è necessario capire come si presenta il tensore energia-impulso sotto le ipotesi di *omogeneità* e *isotropia*. Per come è stato definito nella (2.23), il tensore  $T_{\mu\nu}$  relativo al fluido "cosmico"  $\mathcal{F}(\rho, p)$  è dato da

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + p(U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}) \quad (3.44)$$

che si riconduce, applicando argomenti analoghi alla prova del **Teorema 3.3.2** (*Sulle geometrie dell'universo*), alla seguente forma diagonale:

$$T_{\mu\nu} = \mathbf{diag}(-\rho; p, p, p) =: (T_{\tau\tau}; T_{\sigma\sigma}) \quad (3.45)$$

A questo punto, rimane solo da calcolare le componenti del tensore di Einstein  $E_{\tau\tau}, E_{\sigma\sigma}$  a partire dalla metrica RW ed eguagliarle con  $\frac{8\pi G}{c^4} T_{\tau\tau}, \frac{8\pi G}{c^4} T_{\sigma\sigma}$ ; in particolare, si devono esprimere i coefficienti di Christoffel di  $E_{\mu\nu}$  in termini del fattore di scala  $\Omega$ .

Così, dopo una serie di conti – per i quali si rimanda a *Sezione 5.2* di [17] – la sostituzione della metrica RW nelle equazioni di campo della relatività generale produce le cosiddette *equazioni di Friedmann*

$$\begin{cases} 3\frac{\dot{\Omega}^2 + K}{\Omega^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho \\ \frac{2\Omega\dot{\Omega} + \dot{\Omega}^2 + K}{\Omega^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} p \end{cases} \quad (3.46)$$

che dipendono ancora dalla curvatura delle ipersuperfici  $\Sigma_\tau$ .

**Osservazione 3.3.2.** *Una soluzione  $\Omega(t)$  delle equazioni di Friedmann è, quindi, una funzione non negativa del tempo che descrive l'andamento di un universo omogeneo e isotropo disteso su una geometria piatta, sferica o iperbolica, in base al valore di  $K = 0, \pm 1$ .*

Le (3.46) hanno portato alla costruzione di modelli cosmologici sempre più avanzati, detti modelli di Friedmann, culminando nell'individuazione di una metrica detta di *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW), la quale tiene conto anche della materia e dell'energia oscura. Soprattutto, le equazioni di Friedmann descrivono un'universo dinamico, non statico, la cui velocità di espansione (o contrazione) è data dalla *costante di Hubble*  $H_0 = \frac{\dot{\Omega}(t)}{\Omega(t)}$ , che compare per la prima volta nel 1927 come costante di proporzionalità lineare tra il *redshift*  $\nu$  delle onde elettromagnetiche emesse dalle galassie e le loro rispettive distanze. Detta  $\delta$  la distanza tra due punti qualsiasi del fluido  $\mathcal{F}(\rho, p)$ , possiamo formalizzare quanto appena detto tramite la *legge di Hubble*

$$\nu = \frac{\delta H_0}{c} \quad (3.47)$$

dalla quale si deduce facilmente che l'universo è in espansione – almeno in via teorica. Nel 1988, un anno prima della morte di Edwin Hubble, un'osservazione sperimentale ad opera del telescopio Hale conferma la teoria [18].

In conclusione, il fattore di scala  $\Omega$  descrive la dinamica di un universo omogeneo, isotropo, non statico e tramite le sue derivate si possono ottenere informazioni sulla sua accelerazione e velocità di espansione (o contrazione). In generale, anche se il modello varia a seconda della curvatura  $K$ , ognuno dei tre possibili universi nasce al tempo iniziale  $t_0$  corrispondente ad un valore  $\Omega(t_0) = 0$  ed evolve per  $t > t_0$  secondo  $\Omega(t)$ , descrivendo un universo illimitato e aperto, nel caso in cui  $K = 0$ , limitato e chiuso se  $K = 1$ , limitato e aperto se  $K = -1$ . I teoremi di singolarità (*Sezione 9.5* di [17]) assicurano che un qualsiasi modello di universo avente densità  $\rho > 0$  e pressione  $p \geq 0$  deve necessariamente originarsi da una singolarità. Inoltre, quando  $\Omega(t) \rightarrow 0$  la densità di energia  $\rho$  diventa arbitrariamente grande ed è a questa scala che la Relatività Generale perde il suo potere descrittivo dei fenomeni gravitazionali. In futuro, questo problema potrebbe essere risolto da una teoria della *gravità quantistica*.

*“Trasporre le teorie e il loro formalismo d'origine, la matematica, fino al paese delle parole è un trasloco tanto delicato quanto essenziale. Delicato perché i concetti della fisica sono ancora più fragili della porcellana, essenziale perché questa operazione è una sfida di ordine etico, dal momento che il nostro modo di vedere le cose determina il nostro modo di pensarle. Se le diciamo male le penseremo male.”* (Étienne Klein)

# Conclusioni

La Teoria della Relatività di Einstein fornisce le fondamenta teoriche necessarie per studiare l'universo e, di fatto, pone le basi per lo sviluppo della scienza della cosmologia. Questa teoria, vecchia ormai di cento anni, ha rivoluzionato la fisica e ci ha donato una comprensione del mondo totalmente nuova. Nella sua formulazione generale la teoria di Einstein propone che la gravità è causata dalla deformazione o dalla curvatura dello spazio-tempo, ad opera di oggetti massivi come stelle e pianeti. Tra le varie frontiere della ricerca la teoria è usata per studiare le onde gravitazionali e i buchi neri, e se applicata all'intero universo prevede una sua espansione decelerata, che può procedere sostanzialmente in due modi identificanti le possibili geometrie dell'universo stesso:

(i) *Big Crunch*: l'universo continuerà ad espandersi fino ad un punto in cui invertirà la sua direzione di espansione e si contrarrà su se stesso generando un "rimbalzo". Questo è il modello di un universo sferico, limitato e chiuso.

(ii) *Big Freeze*: l'espansione dell'universo è asintotica, continuerà a espandersi all'infinito, decelerando, portando ad un inesorabile raffreddamento. Questo è il modello di un universo iperbolico, limitato e aperto.

Ma la visione accettata dalla comunità scientifica del tempo si discostava completamente da queste nuove proposte e lo stesso Einstein, in disaccordo con la sua natura anticonformista dimostrata anche dall'audace teoria che ha prodotto, si uniformò al pensiero comune e introdusse nelle sue equazioni di campo un termine  $\Lambda$ , detto *costante cosmologica*. Questa  $\Lambda$  era pensata da Einstein come qualcosa che individuasse l'energia del vuoto e che racchiudesse delle proprietà repulsive dello spazio-tempo che bilanciassero l'azione attrattiva globale della gravità. In questo modo le equazioni avrebbero contemplato anche il modello di un universo statico e immutabile. Ma in realtà le equazioni di campo di Einstein mettevano alla sua portata il mistero delle origini dell'universo. Tra i primi a non rifiutare le bizzarre idee emergenti dalla Teoria della Relatività che si scontravano con il pensiero radicato c'è sicuramente G. E. Lemaître, il quale scatenò un dibattito che non si risolse per mezzo secolo, sviluppando i suoi personali modelli cosmologici. Tali descrivevano un universo dinamico, in accordo con i modelli sopracitati, ma

ciò che soprattutto intuì e che non ebbe timore di accettare fu che, risalendo a ritroso in questa espansione, ci doveva essere stato un momento, che oggi è stimato essere quasi 14 miliardi di anni fa, in cui l'intero universo era concentrato in un volume minuscolo, qualcosa che lui chiamò "atomo primigenio" e che oggi chiamiamo Teoria del Big Bang. Dopo le osservazioni sperimentali di Hubble sull'espansione dell'universo, Einstein si ricredette e tolse la costante cosmologica dalle sue equazioni, designandola come il suo più grande errore. Scoperte più recenti indicano, di tutta risposta, che l'universo non solo si sta espandendo, ma che questa espansione è accelerata, offrendo una terza possibilità:

(iii) *Big Rip*: l'espansione dell'universo è uniformemente accelerata e continuerà ad espandersi fino ad un ipotetico "strappo". Questo è il modello di un universo piatto, illimitato e aperto.

Questa possibilità non è prevista dalle equazioni di Einstein, almeno non senza l'aggiunta della costante cosmologica  $\Lambda$ . L'errore di Einstein, a distanza di anni, si rivelò necessario per la descrizione del modello cosmologico individuato dalle osservazioni più recenti. "Genio anche nell'errore". Questo ultimo modello, quindi, sembra essere causato dall'energia del vuoto, la quale può essere stimata in questo contesto, con un valore di circa  $10^{-13} J/cm^3$ . D'altra parte, la meccanica quantistica (QM da "Quantum Mechanics"), a causa del principio di indeterminazione di Heisenberg, stabilisce la non esistenza di un vuoto privo di energia e ne calcola un valore pari a  $10^{107} J/cm^3$ : è uno dei casi in cui GR e QM divergono in maniera clamorosa. Questo è il problema della gravità quantistica, ancora aperto e al centro del dibattito scientifico sulla ricerca di una teoria unificatrice delle quattro interazioni fondamentali.

La Teoria della Relatività e tutte le sue imponenti conseguenze a livello cosmologico, non sarebbero mai state possibili e senza l'intuito di un brillante fisico e, soprattutto – a mio parere – senza l'individuazione del giusto formalismo matematico. L'analisi tensoriale sulle varietà riemanniane, fino a cento anni fa, risiedeva in quella parte della matematica che non ha ancora trovato applicazione nella fisica, quando oggi è un caposaldo della fisica moderna. Vi sono altri numerosi esempi. Non so dire se ogni teoria matematica possa essere applicata alla fisica o se ogni questione fisica possa essere risolta tramite la matematica. Ciò che è sicuro, e la teoria presentata in questa tesi ne è un chiaro esempio, è che la capacità di formulare corrette ipotesi sulla natura possa trovare conferme nella matematica. Questo non avviene costruendo una matematica *ad hoc* per il funzionamento di una determinata idea fisica, bensì cercando nelle teorie matematiche gli strumenti adatti alla formulazione di un approccio formale per descrivere questa idea. In forza di questa visione di dialogo tra matematica e fisica, oggi la Teoria della Relatività continua ancora ad essere studiata con approcci derivanti da varie discipline: la topologia differenziale e il concetto di spinore, la teoria delle algebre di Lie e i campi di simmetria, la teoria dei problemi di Cauchy per PDE iperboliche e la Relatività Numerica.

# Appendice: Leggi di Conservazione e Covarianza Generale

Sia  $O(\zeta^\alpha)_{\alpha=0}^3$  un sistema di riferimento locale a un corpo immerso in un campo gravitazionale; allora per il Postulato 3 (*Principio di equivalenza*) relativamente ad  $O$  vale SR e, in particolare, la legge di conservazione del quadrimpulso  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ . Il principio di covarianza generale (Teorema 3.1.3) assicura che nel riferimento globale  $O(x^\mu)_{\mu=0}^3$  valga l'equazione  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ . Mostriamo che questa *non* è una legge di conservazione.

Enunciamo, in primo luogo, un lemma di algebra lineare, la cui dimostrazione può trovarsi, ad esempio, in [8]

**Lemma 2.** *Sia data una matrice  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  e un vettore  $\mathbf{r} = (r^\alpha)_{\alpha=1}^n \in \mathbb{R}^n$ , allora*

$$\text{tr} \left( M^{-1}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r^\alpha} M(\mathbf{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \log(\det(M(\mathbf{r}))) \quad (3.48)$$

dove gli operatori che intervengono sono la traccia e il determinante di una matrice, e il logaritmo naturale di uno scalare.

Ora, mediante il Teorema 1.3.2, calcoliamo esplicitamente la derivata covariante del tensore energia-impulso relativo a un fluido relativistico  $\mathcal{F}(\vec{p}, \rho, p)$  immerso in un campo gravitazionale nello spazio-tempo  $(\mathbb{M}^4, \mathbf{g})$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\nu T^{\mu\nu}}_{=0} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T^{\mu\alpha} \quad (3.49)$$

Riprendendo l'Osservazione 3.2.3, il simbolo di Chrystoffel con due indici uguali è:

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\alpha} \quad (3.50)$$

Esplicitando la notazione di Einstein e ponendo  $(x^\mu)_{\mu=0}^3 =: \mathbf{x}$ , la (3.50) diventa

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=\nu} g^{\nu\rho} \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right) \quad (3.51)$$

e allora, ponendo  $-g := \det(g_{\rho\nu})$ , si può applicare il Lemma 2, da cui

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \log(-g) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \log(\sqrt{-g}) \quad (3.52)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è calcolata esplicitamente la derivata del logaritmo. Quindi la derivata covariante del tensore energia-impulso in  $(\mathbb{M}^4, \mathbf{g})$  è

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} T^{\mu\lambda} \quad (3.53)$$

D'altra parte, la covarianza generale permette di eguagliare con zero, dunque vale

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) = -\sqrt{-g} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} T^{\mu\lambda} \quad (3.54)$$

In conclusione  $\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$  equivale alla (3.54) che non è una legge di conservazione, poiché tale identità – derivando dalla covarianza generale – è di natura completamente geometrica, non fisica e non sottintende nessuna *carica di Noether* da poter conservare rispetto a una famiglia di trasformazioni di simmetria.

La gravità, quindi, “distrugge” le leggi di conservazione che valgono in un riferimento localmente inerziale, e annulla certe proprietà di invarianza rispetto a gruppi di trasformazioni (Teorema di Noether, *Sezione* 20.1 [9]). In ogni caso, sotto particolari ipotesi di *simmetria* del corpo in caduta libera è possibile recuperare alcune di queste leggi.

La Teoria della Relatività Generale individua un approccio geometrico per la ricerca delle equazioni del campo gravitazionale fondato sul calcolo tensoriale sopra una quadri-varietà lorentziana. In questo elaborato è stata presentata la loro deduzione fisica “alla Einstein”, ma oggi sono state dedotte in forma molto più rigorosa, tramite il *principio di minima azione*, potremmo dire “alla Hilbert”. La loro particolarità è quella di calcolare il campo gravitazionale come il campo tensoriale metrico della varietà, stabilendo che la gravità è una manifestazione della curvatura dello spazio-tempo. La gravità non è più una forza istantanea a distanza modellizzata dal campo vettoriale  $\vec{g}$ , bensì è una caratteristica geometrica dello spazio-tempo rappresentata dal campo tensoriale  $\mathbf{g} \in \Xi_2^0(\mathbb{M}^4)$

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathbb{M}^4 &\rightarrow \mathcal{T}_2^0(\mathbb{M}_0^4) \\ P &\mapsto \mathbf{g}_P \end{aligned} \quad (3.55)$$

# Bibliografia

- [1] *Michael Artin*, **Algebra**, *Bollati Boringhieri*, 1997.
- [2] *Stefano Francaviglia*, **Topologia**, ISBN: 978-1658028929, 2020.
- [3] *Andrew Pressley*, **Elementary Differential Geometry**, *Springer*, 2010.
- [4] *Bernard Schutz*, **A first course in general relativity**, *Cambridge University Press*, 1985.
- [5] *Fabio Toscano*, **Il genio e il gentiluomo**, *Sironi Editore*, 2004.
- [6] *Bernard Schutz*, **Geometrical methods of mathematical physics**, *Cambridge University Press*, 1980.
- [7] *William M. Boothby*, **An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry**, *Academic Press*, 1975.
- [8] *Steven Weinberg*, **Gravitation and cosmology**, *John Wiley and Sons*, 1972.
- [9] *Theodore Frankel*, **The geometry of physics**, *Cambridge University Press*, 2004.
- [10] *G. S. Hall*, **Symmetries and curvature structure in general relativity**, *World Scientific Publishing Co.*, 2004.
- [11] *Marco Andreatta*, **La forma delle cose**, *Il Mulino*, 2019.
- [12] *C. Christodoulides*, **The Special Theory of Relativity**, *Springer*, 2016.
- [13] *W.H. Müller, W. Weiss*, **Laplace and Poisson Equation in Newtonian Gravity**, *SpringerBriefs in Continuum Mechanics*, 2016.
- [14] *Albert Einstein*, **Le due relatività**, *Bollati Boringhieri*, 2015.
- [15] *Alan Zamboni*, **Teoria della Relatività08 - La Relatività Generale - CURIUSS**, Video Youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=5g7NomjhDcot=797s>

- [16] *B. Finzi, M. Pastori, **Calcolo Tensoriale e Applicazioni**, Ed. Zanichelli Bologna, 1971.*
- [17] *Robert M. Wald, **General Relativity**, The University of Chicago Press, 1984.*
- [18] *Judith G. Cohen, **ASP Conference Series, Vol 4, The Extragalactic Distance Scale**, San Francisco ASP, ed. by Sidney van den Bergh, Christopher J. Pritchet, p. 114, 1988.*