

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

LA  
MATEMATICA  
DEI FRATTALI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.  
Annamaria Montanari

Presentata da:  
Marco Calzolari

VI Sessione  
Anno Accademico 2019/2020



*Alla mia famiglia,  
ai miei amici, e a tutte le persone  
che hanno creduto in me e mi  
hanno sempre supportato*



## 0.1 Introduzione

Nella vita quotidiana non incontriamo mai oggetti con bordi lisci o con le forme regolari di una sfera, di un cerchio, di una retta o di un cono come afferma la geometria euclidea. In realtà il mondo è di forma irregolare e rugoso, ma fino a poco tempo fa non c'era una geometria in grado di studiare i fenomeni naturali cause di tali irregolarità. Il matematico che per primo portò delle novità in questo campo fu Benoit Mandelbrot, che nella seconda metà del '900 cominciò a parlare di frattali nei suoi libri, dove descrive strutture apparentemente caotiche in modo matematico. I frattali sono degli insiemi, apparentemente incasinati, che in realtà sono descrivibili con una semplice regola matematica. In questa tesi verranno trattate le proprietà matematiche che li governano, ma prima di iniziare vediamo alcuni esempi di frattali che si possono trovare in natura, cercando di capire perchè vengano studiati, perchè siano così affascinanti e capirne le principali proprietà in modo intuitivo.

Il primo esempio che vediamo è il *cavolo romano*, un oggetto che gode di una proprietà molto sorprendente, che si vede bene guardando altri oggetti con cui siamo più abituati a rapportarci. Se si guarda questo oggetto a una distanza di dieci metri, lo si idealizza con una piramide. Consideriamo quindi una piramide e notiamo che avvicinandoci a uno dei lati con l'occhio non vediamo più la piramide ma solo un suo lato, cioè vediamo una superficie. Questa proprietà, ovvero che un oggetto guardato a scale diverse cambia, la si può vedere sugli oggetti con cui entriamo in contatto tutti i giorni, come ad esempio un pallone da calcio (ossia una sfera). Osservando da lontano vediamo una sfera, ma avvicinandosi non si vede più la sfera bensì il suo piano tangente, lo stesso vale per la Terra vista dallo spazio e coi nostri occhi. Quindi cambiando scala cambia la "forma" dell'oggetto. Adesso applichiamo la stessa cosa al cavolo romano, guardandolo da una decina di metri sembra una piramide, ma avvicinandosi a una decina di centimetri si vede sempre il cavolo romano, lo stesso vale guardandolo ancor più da vicino.



Figura 1: Il cavolo romano visto da due scale diverse

Quindi il cavolo romano è un oggetto che visto da scale completamente diverse sembra sempre la stessa cosa, quindi l'oggetto si riproduce anche a scale molto piccole. Ovviamente a un certo punto ci fermiamo, ma un'idealizzazione matematica ci porta a pensare che potrebbero esistere oggetti che guardati a tutte le scale siano sempre uguali a se stessi, e questa proprietà viene detta autosimilarità.

In natura abbiamo altri casi in cui si verifica questa proprietà. Consideriamo ad esempio la *felce*: guardando la figura vediamo che il ramoscello rosso è esattamente uguale a quello verde più grande, ciò vale anche ingrandendo e prendendo come partenza il ramoscello rosso e il suo ramoscello giallo, e così via.



Figura 2: La felce

Un altro esempio sono gli alberi, strutture apparentemente disordinate che in realtà sono caratterizzati da una regola semplicissima: ripetersi a tutte le scale, ovvero il tronco si dirama in due-tre rami, ogni ramo si dirama in altri due-tre rami e così via. In informatica si usa molto l'idealizzazione matematica di un albero reale, ad esempio per ricerche binarie o strutturare dati.

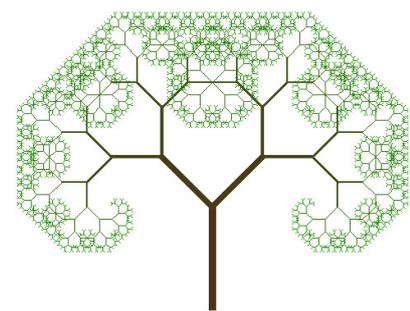


Figura 3: Idealizzazione matematica di un albero

Un esempio simile è il *polmone*: infatti la struttura del polmone è simile a quella di un albero, ci sono tante diramazioni che ovviamente si fermano a un certo punto perchè ci sono gli alveoli che devono prendere ossigeno. Ricordiamo che un polmone serve a farci arrivare l'ossigeno, e più ne si prende meglio è. L'idea è che quindi la superficie totale di questi ramoscelli debba essere molto ampia, e se la andiamo a misurare è uguale a un campo

da tennis, ovvero 70-80  $m^2$ ! Quindi da un lato c'è la necessità di avere una grande superficie ma bisogna farla stare nel busto, quindi in un volume contenuto. La soluzione che ha trovato la natura per ottenere questa cosa è effettuare infinite diramazioni a ogni scala, che aumentano la superficie in modo idealmente infinito, ottenendo quindi una superficie infinita in un volume finito. Questo quindi è un primo esempio che ci fa capire che ci sono oggetti matematici che non vivono bene nelle dimensioni usuali: abbiamo una superficie infinita che quindi non vive bene in dimensione 2, ma non vive bene nemmeno in dimensione 3 perchè essa non ha volume. Quindi abbiamo la seconda proprietà che caratterizza i frattali, ovvero hanno dimensione intermedia.

Facciamo un ultimo esempio che è quello delle coste. Esse come possiamo vedere nelle cartine sono molto frastagliate, e la loro caratteristica è che la stessa frastagliatezza si ripete a tutte le scale. Mandelbrot nel suo libro *'The fractal geometry of nature'* si chiede come si possa misurare la costa della Gran Bretagna.



Figura 4: Approssimazioni della costa della Gran Bretagna con poligoni

Si approssima la costa con una poligonale. Se si usa un'approssimazione grossolana, ad esempio una poligonale con segmenti lunghi tutti 200 km, ci risulterà che la costa è lunga all'incirca 2400 km. Se invece di 200 km usiamo una poligonale con segmenti tutti di 100 km e si ricalcola la lunghezza della costa, si ottiene che la lunghezza è aumentata a circa 2800 km. Se usiamo invece un'approssimazione di 50 km troveremo che la lunghezza della costa è circa 3200 km. In realtà si potrebbe andare avanti e scoprire che più è fine l'approssimazione e più la lunghezza della costa tende a crescere. Siamo dunque nella stessa situazione del polmone, ovvero qui abbiamo una curva che sta in un'area finita (se circoscriviamo la Gran Bretagna con un rettangolo, seppur molto grande, quel rettangolo ha area finita e quindi lo stesso vale anche per quella della Gran Bretagna), però ogni volta che andiamo ad approssimare questa curva la lunghezza cresce. Quindi abbiamo una curva di lunghezza infinita che però sta in un'area finita.

Che cosa abbiamo capito di questi frattali "naturali"? Abbiamo visto che hanno due proprietà importanti che sono l'autosimilarità e il fatto di non "vivere bene" nelle dimensioni usuali, cioè avere dimensione intermedia (questa è la dimensione di Hausdorff). Non è ancora stata data una definizione unanime dei frattali. Noi consideriamo i frattali come figure geometriche caratterizzate dall'aver dimensione di Hausdorff e dall'essere autosimilari. Nel primo capitolo verrà fatta una breve introduzione sulle misure astratte per

poi definire la misura di Hausdorff e le sue proprietà, ad esempio come si comporta con le funzioni lipschitziane. Successivamente definiremo la dimensione di Hausdorff e introdurremo due frattali: l'insieme di Cantor e il tappeto di Sierpinski, di cui del primo calcoleremo la dimensione di Hausdorff applicando la definizione. Nel secondo capitolo parleremo delle contrazioni e daremo la definizione di insieme autosimilare. Subito dopo daremo un importante teorema che lega l'autosimilarità e la dimensione di Hausdorff e applicheremo questo teorema a diversi frattali. Infine nel terzo capitolo descriveremo brevemente alcuni insiemi particolarmente interessanti: gli insiemi di Mandelbrot e di Julia, considerati frattali per la loro frastagliatura e per il fatto che pur non essendo autosimilari, la struttura di partenza si può ritrovare a tutte le scale.

# Indice

0.1	Introduzione . . . . .	i
<b>1</b>	<b>La dimensione di Hausdorff</b>	<b>1</b>
1.1	Misure astratte e misure metriche . . . . .	1
1.2	Misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	3
1.2.1	Misure di Hausdorff e funzioni lipschitziane . . . . .	7
1.3	Dimensione di Hausdorff . . . . .	8
1.3.1	L'insieme di Cantor . . . . .	10
1.3.2	Il tappeto di Sierpinski . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Contrazioni e insiemi autosimilari</b>	<b>13</b>
2.1	Dimensione e forma di un insieme autosimilare . . . . .	16
2.2	Insiemi auto-affini . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Insiemi di Mandelbrot e di Julia</b>	<b>21</b>



# Capitolo 1

## La dimensione di Hausdorff

Come anticipato nell'introduzione, in questo capitolo tratteremo la prima caratteristica dei frattali, ovvero il non "vivere bene" nelle dimensioni usuali, dando dei cenni preliminari sulle misure astratte per poi arrivare fino alla dimensione di Hausdorff.

### 1.1 Misure astratte e misure metriche

**Definizione 1.1.1.** (misura su  $X$ ). Se  $X$  è un arbitrario insieme non vuoto, si chiama misura su  $X$  una funzione

$$m : \wp(X) \rightarrow [0, +\infty]$$

tale che:

1.  $m(\emptyset) = 0$
2.  $m(A) \leq m(B)$  se  $A \subseteq B \subseteq X$  ( $m$  è monotona)
- 3.

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k)\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$$

se  $(A_k) \subseteq X, \forall k \in \mathbb{N}$  ( $m$  è numerabilmente sub-additiva)

**Esempio 1.1.2.** La misura esterna di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$  è uno degli esempi più importanti di misura. Indicheremo tale misura con  $\mu_n$ .

**Definizione 1.1.3.** Un sottoinsieme  $A$  di  $X$  si dice  $m$ -misurabile se  $m(E) = m(E \cap A) + m(E \cap A')$  per ogni  $E \subseteq X$ . Con  $A'$  abbiamo indicato il complementare di  $A$  rispetto a  $X$ :  $A' = X \setminus A$

*Osservazione 1.1.4.* Si possono dimostrare le seguenti proprietà degli insiemi  $m$ -misurabili:

- Un sottoinsieme  $A$  di  $X$  è  $m$ -misurabile se, e solo se, è misurabile il suo complementare.
- Ogni sottoinsieme  $A$  di  $X$  avente  $m$ -misura nulla è  $m$ -misurabile.

- $\emptyset$  e  $X$  sono  $m$ -misurabili.
- Se  $(A_k)_{k \in \mathcal{A}}$ ,  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ , è una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi di  $X$   $m$ -misurabili, allora

$$\bigcup_{k \in \mathcal{A}} A_k$$

e

$$\bigcap_{k \in \mathcal{A}} A_k$$

sono  $m$ -misurabili. Inoltre se  $A_k \cap A_h = \emptyset$ , per  $k \neq h$ ,

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathcal{A}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathcal{A}} m(A_k)$$

- Se  $A$  e  $B$  sono sottoinsiemi  $m$ -misurabili di  $X$ , allora  $A \setminus B$  è  $m$ -misurabile. Inoltre se  $B \subseteq A$  e  $m(B) < +\infty$ ,

$$m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$$

- Se  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione di sottoinsiemi  $m$ -misurabili di  $X$  e se  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  è monotona crescente, allora

$$m\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(A_k)$$

- Se  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione di sottoinsiemi  $m$ -misurabili di  $X$  e se  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  è monotona decrescente e se  $m(A_1) < +\infty$  allora

$$m\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(A_k)$$

Se  $m$  è una misura su uno spazio metrico  $(X, d)$  risulta interessante studiare la  $m$ -misurabilità dei sottoinsiemi chiusi (o, equivalentemente, dei sottoinsiemi aperti) di  $X$ .

**Definizione 1.1.5.** (misura metrica). Se  $m$  è una misura su  $(X, d)$ , si dice che  $m$  è una misura metrica rispetto alla distanza  $d$  se

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B), \forall A, B \subseteq X : d(A, B) > 0$$

**Teorema 1.1.6.** (Carathéodory). Se  $m$  è una misura metrica su  $(X, d)$ , ogni sottoinsieme chiuso di  $X$  è  $m$ -misurabile.

**Corollario 1.1.7.** Se  $m$  è una misura metrica su  $(X, d)$ , ogni sottoinsieme aperto di  $X$  è  $m$ -misurabile.

**Definizione 1.1.8.** Una famiglia  $\mathcal{A}$  di sottoinsiemi di  $X$  è chiamata  $\sigma$ -algebra se

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

2.  $A \setminus B \in \mathcal{A}$  se  $A, B \in \mathcal{A}$

3.

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$$

se  $A_k \in \mathcal{A}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$

**Definizione 1.1.9.** L'intersezione di tutte le  $\sigma$ -algebre contenenti i chiusi (e quindi gli aperti) di  $X$  è una  $\sigma$ -algebra i cui elementi si chiamano boreliani di  $(X, d)$ .

**Proposizione 1.1.10.** Se  $m$  è una misura metrica su  $(X, d)$  ogni boreliano di  $(X, d)$  è  $m$ -misurabile.

## 1.2 Misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$

Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 0$ , poniamo

$$\omega_\alpha := \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)},$$

dove  $\Gamma$  indica la funzione gamma di Eulero definita, per  $s > 0$ , nel modo seguente:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

È importante osservare che il numero reale positivo  $\omega_\alpha$ , quando  $\alpha$  è un intero positivo, è la misura di Lebesgue  $\alpha$  dimensionale del disco unitario di  $\mathbb{R}^\alpha$ . Per ogni sottoinsieme non vuoto  $B$  di  $\mathbb{R}^n$  poniamo

$$r(B) := \frac{1}{2} \text{diam}(B) := \frac{1}{2} \{ \sup |x - y| \mid x, y \in B \}$$

Poniamo inoltre  $m_\alpha(\emptyset) = 0$  e, se  $B \neq \emptyset$ ,

$$m_\alpha(B) = \omega_\alpha (r(B))^\alpha$$

**Esempio 1.2.1.** Sia

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2\}$$

il disco di  $\mathbb{R}^3$  di centro  $(a, b, c)$  e raggio  $r$ . Risulta  $r(B) = r$  e  $m_\alpha(B) = \omega_\alpha r^\alpha$ . In particolare

$$m_\alpha(B) = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi r^3, & \text{se } \alpha = 3 \\ \pi r^2, & \text{se } \alpha = 2 \\ 2r, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

**Definizione 1.2.2.** ( $\delta$ -ricoprimento). Se  $A$  è un arbitrario sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  e se  $\delta$  è un numero reale positivo, si chiama  $\delta$ -ricoprimento di  $A$  una famiglia  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$  di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  tale che:

1.  $\mathcal{A}$  è finito o numerabile,
2.  $\text{diam}(B_k) \leq \delta$ , per ogni  $k \in \mathcal{A}$ ,
- 3.

$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{A}} B_k .$$

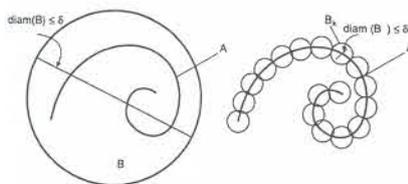


Figura 1.1: esempi di  $\delta$ -ricoprimenti

Definiamo:

$$H_\alpha^{(\delta)}(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k) \mid (B_k)_{k \in \mathcal{A}} \text{ } \delta\text{-ricoprimento di } A \right\}$$

Se  $0 < \delta' < \delta$  ogni  $\delta'$ -ricoprimento di  $A$  è anche un  $\delta$ -ricoprimento di  $A$ ; pertanto

$$H_\alpha^{(\delta)}(A) \leq H_\alpha^{(\delta')}(A)$$

La funzione

$$]0, +\infty[ \ni \delta \mapsto H_\alpha^{(\delta)}(A) \in [0, +\infty]$$

è quindi monotona decrescente e, di conseguenza, ha limite in  $[0, +\infty]$  per  $\delta \mapsto 0^+$ .

**Definizione 1.2.3.** (misura di Hausdorff  $\alpha$ -dimensionale). Si chiama misura di Hausdorff  $\alpha$ -dimensionale di  $A$  il numero reale esteso

$$H_\alpha := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^{(\delta)}(A) = \sup_{\delta > 0} H_\alpha^{(\delta)}(A)$$

*Osservazione 1.2.4.* Poichè esiste una iniezione naturale di  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^{n+p}$ ,  $p \geq 1$  (basta infatti identificare  $\mathbb{R}^n$  col sottospazio  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ ,  $0 \in \mathbb{R}^p$ ), ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  è quindi anche contenuto in  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Tuttavia la misura di Hausdorff  $\alpha$ -dimensionale di  $A$  non dipende dallo spazio euclideo nel quale  $A$  si considera immerso. Basta infatti osservare che

$$m_\alpha(B \cap \mathbb{R}^n) \leq m_\alpha(B), \forall B \subseteq \mathbb{R}^{n+p}.$$

**Proposizione 1.2.5.**  $H_\alpha^{(\delta)}$  e  $H_\alpha$  sono misure su  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre  $H_\alpha$  è una misura metrica rispetto alla distanza euclidea. Precisamente:

- $H_\alpha^{(\delta)}(\emptyset) = H_\alpha(\emptyset) = 0$

- $H_\alpha^{(\delta)}$  e  $H_\alpha$  sono sub-additive
- $\text{dist}(A, B) > 0 \Rightarrow H_\alpha(A \cup B) = H_\alpha(A) + H_\alpha(B)$

*Dimostrazione.* Proviamo inanzi tutto che  $H_\alpha^{(\delta)}$  è sub-additiva su  $\mathbb{R}^n$ . Scegliamo

$$\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n.$$

Supponiamo che

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j^k$$

e che  $\text{diam}C_j^k \leq \delta$ ; quindi  $\{C_j^k\}_{j,k=1}^\infty$  ricopre  $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$ . Allora:

$$H_\alpha^{(\delta)}\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \omega_\alpha\left(\frac{\text{diam}C_j^k}{2}\right)^\alpha.$$

Prendendo l'inf troviamo:

$$H_\alpha^{(\delta)}\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty H_\alpha^{(\delta)}(A_k).$$

Proviamo le affermazioni relative a  $H_\alpha$ . Prima di tutto

$$H_\alpha(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^{(\delta)}(\emptyset) = 0.$$

Inoltre se  $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ , per ogni  $\delta > 0$  si ha:

$$H_\alpha^{(\delta)}(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} H_\alpha^{(\delta)}(A_k) \leq H_\alpha(A_k).$$

E quindi:

$$H_\alpha(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^{(\delta)}(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} H_\alpha(A_k).$$

Con questo è provato che  $H_\alpha$  è monotona e numerabilmente sub-additiva e che, quindi, è una misura su  $\mathbb{R}^n$ . Dimostriamo infine che  $H_\alpha$  è una misura metrica. Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  tali che  $d(A, B) > 0$ . Dobbiamo provare che

$$H_\alpha(A \cup B) = H_\alpha(A) + H_\alpha(B).$$

Ovviamente, poichè  $m$  è sub-additiva, basta dimostrare la disuguaglianza

$$H_\alpha(A \cup B) \geq H_\alpha(A) + H_\alpha(B). \quad (1.1)$$

Se  $H_\alpha(A \cup B) = +\infty$  la 1.1 è ovvia. Supponiamo quindi  $H_\alpha(A \cup B) < +\infty$ . Essendo  $H_\alpha^{(\delta)} \leq H_\alpha$  sarà allora

$$H_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) < +\infty, \forall \delta > 0.$$

Fissato ad arbitrio  $\epsilon > 0$ , scegliamo un  $\delta$ -ricoprimento  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$  di  $A \cup B$ , con  $0 < \delta < d(A, B)$ , tale che

$$H_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) + \epsilon > \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k). \quad (1.2)$$

Poniamo ora  $\mathcal{A}' = \{k \in \mathcal{A} / B_k \cap A \neq \emptyset\}$  e  $\mathcal{A}'' = \{k \in \mathcal{A} / B_k \cap B \neq \emptyset\}$ . Poichè  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $A \cup B$ , le famiglie  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}'}$  e  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}''}$  sono  $\delta$ -ricoprimenti, rispettivamente, di A e di B. Se  $0 < \delta < d(A, B)$  risulta poi  $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$ . Infatti, se esistesse  $k \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$ , gli insiemi  $B_k \cap A$  e  $B_k \cap B$  sarebbero entrambi non vuoti, e risulterebbe,

$$d(A, B) \leq \text{diam}(B_k) \leq \delta$$

, contrariamente all'ipotesi. Da  $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$  e da 1.2 otteniamo allora

$$H_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) + \epsilon > \sum_{k \in \mathcal{A}'} m_\alpha(B_k) + \sum_{k \in \mathcal{A}''} m_\alpha(B_k) \geq H_\alpha^{(\delta)}(A) + H_\alpha^{(\delta)}(B)$$

per  $0 < \delta < d(A, B)$ . Da questa, per  $\delta, \epsilon \rightarrow 0$ , si ottiene la 1.1.  $\square$

**Corollario 1.2.6.** *Ogni boreliano di  $\mathbb{R}^n$  è  $H_\alpha$  misurabile qualunque sia  $\alpha \geq 0$*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla proposizione precedente e dalla Proposizione 1.3.1  $\square$

La misura di Hausdorff  $H_\alpha$  è regolare nel senso seguente:

**Teorema 1.2.7.** *Qualunque sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  esiste un boreliano  $B$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che*

$$B \supseteq A \quad e \quad H_\alpha(B) = H_\alpha(A)$$

*Dimostrazione.* Se  $H_\alpha(A) = +\infty$  l'affermazione è banale: in questo caso, infatti, basta prendere  $B = \bar{A}$ . Supponiamo allora  $H_\alpha(A) < +\infty$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste un  $\frac{1}{k}$ -ricoprimento di A,  $(B_j^k)_{j \in \mathcal{A}_k}$ , tale che

$$\sum_{j \in \mathcal{A}_k} m_\alpha(B_j^k) < H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k}.$$

Poniamo

$$B^k = \bigcup_{j \in \mathcal{A}_k} \bar{B}_j^k \quad B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B^k.$$

L'insieme B è un boreliano di  $\mathbb{R}^n$  contenente A e

$$H_\alpha^{(1/k)}(B) \leq H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k} \quad (1.3)$$

in quanto

$$H_\alpha^{(1/k)}(B) \leq H_\alpha^{(1/k)}(B^k) \leq \sum_{j \in \mathcal{A}_k} m_\alpha(\bar{B}_j^k) < H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k}.$$

Per  $k \rightarrow +\infty$  da 1.3 si trae  $H_\alpha(B) \leq H_\alpha(A)$ . D'altra parte, essendo  $A \subseteq B$ ,  $H_\alpha(A) \leq H_\alpha(B)$ . Quindi  $H_\alpha(A) = H_\alpha(B)$ .  $\square$

Inoltre abbiamo un altro importante risultato che riguarda la misura di Hausdorff n-dimensionale:

**Teorema 1.2.8.** *Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  allora la misura di Hausdorff n-dimensionale di  $A$  è uguale alla misura di Lebesgue di  $A$ , cioè:*

$$H_n(A) = \mu_n(A)$$

Ora riportiamo alcuni importanti risultati per quanto riguarda la misura di Hausdorff e le funzioni lipschitziane.

### 1.2.1 Misure di Hausdorff e funzioni lipschitziane

**Definizione 1.2.9.** Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^p$ , si dice lipschitziana in  $A$  se esiste una costante  $L \geq 0$  tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in A \quad (1.4)$$

la costante  $L$  che figura al secondo membro di questa disuguaglianza si dice che è una costante di Lipschitz di  $f$ .

**Esempio 1.2.10.** Ogni trasformazione lineare  $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz  $L = \|T\|$ . Infatti

$$|T(x) - T(y)| \leq \|T\||x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p.$$

**Esempio 1.2.11.** Anche un'isometria  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione lipschitziana, infatti:

$$|F(x) - F(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Quindi, ogni isometria è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz  $L = 1$ . Dato che le trasformazioni ortogonali e le traslazioni sono isometrie, allora sono anche funzioni lipschitziane.

Il principale risultato che riguarda le funzioni lipschitziane e la misura di Hausdorff è il seguente:

**Teorema 1.2.12.** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz  $L$ .*

*Allora, per ogni  $\alpha \geq 0$ , risulta*

$$H_\alpha(f(A)) \leq L^\alpha H_\alpha(A). \quad (1.5)$$

*Dimostrazione.* Proviamo che per ogni  $\delta > 0$  risulta

$$H_\alpha^{(L\delta)}(f(A)) \leq L^\alpha H_\alpha^{(\delta)}(A). \quad (1.6)$$

Da questa, per  $\delta \rightarrow 0+$ , seguirà 1.5 .

Osserviamo prima di tutto che per ogni  $B \subseteq A$ ,

$$\text{diam}(f(B)) = \sup_{x, y \in B} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x, y \in B} |x - y| = L \text{diam}(B). \quad (1.7)$$

Allora, se  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$  è un arbitrario  $\delta$ -ricoprimento di  $A$ ,  $(f(B_k))_{k \in \mathcal{A}}$  è un  $L\delta$ -ricoprimento di  $f(A)$ , e quindi

$$H_\alpha^{L\delta}(f(A)) \leq \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(f(B_k)) \leq \text{per la 1.7} \sum_{k \in \mathcal{A}} L^\alpha m_\alpha(B_k).$$

Da questa, per l'arbitrarietà del  $\delta$ -ricoprimento  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$  di  $A$ , segue la 1.6.  $\square$

### 1.3 Dimensione di Hausdorff

La definizione di dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  si basa sulla seguente proposizione:

**Proposizione 1.3.1.** *Se  $A$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  tale che*

$$H_\alpha < +\infty$$

*per un opportuno  $\alpha \geq 0$ , allora*

$$H_{\alpha+t}(A) = 0 \quad \forall t > 0 \tag{1.8}$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $\delta$  e  $t > 0$  e per ogni  $\delta$ -ricoprimento di  $A$ ,  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ , si ha

$$\begin{aligned} H_{\alpha+t}^{(\delta)} &\leq \sum_{k \in \mathcal{A}} m_{\alpha+t}(B_k) = \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_{\alpha+t} \left( \frac{\text{diam}(B_k)}{2} \right)^{\alpha+t} \\ &\leq (\text{poich } \text{diam}(B_k) \leq \delta) \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} \left( \frac{\delta}{2} \right)^t \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_\alpha \left( \frac{\text{diam}(B_k)}{2} \right)^\alpha = \\ &(\text{posto } c_{\alpha,t} = \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} 2^{-t}) c_{\alpha,t} \delta^t \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k). \end{aligned}$$

Prendendo, all'ultimo membro, l'estremo inferiore rispetto a tutti i  $\delta$ -ricoprimenti di  $A$ , si ottiene

$$H_{\alpha+t}^{(\delta)} \leq c_{\alpha,t} \delta^t H^{(\delta)}(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H_\alpha(A).$$

Per  $\delta \rightarrow 0+$  l'ultimo membro di queste disuguaglianze tende a zero, in quanto  $t > 0$  e  $H_\alpha(A) < +\infty$  per ipotesi. Allora

$$H_{\alpha+t}(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} H_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) = 0.$$

$\square$

**Corollario 1.3.2.** *Per ogni  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  risulta*

$$H_{n+t}(A) = 0 \quad \forall t > 0 \tag{1.9}$$

*Dimostrazione.* Se  $D(0,k)$  indica il disco di  $\mathbb{R}^n$  di centro 0 e raggio  $k$ , risulta

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap D(0, k))$$

e quindi, per la sub-additività numerabile della misura di Hausdorff,

$$H_{n+t}(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} H_{n+t}(A \cap D(0, k)). \quad (1.10)$$

D'altra parte

$$H_n(A \cap D(0, k)) = \mu_n(A \cap D(0, k)) \leq \mu_n(D(0, k)) \leq \omega_n k^n < +\infty,$$

e quindi, per la proposizione precedente

$$H_{n+t}(A \cap D(0, k)) = 0 \quad \forall t > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da questa e dalla 1.10 segue subito la 1.9.  $\square$

**Definizione 1.3.3.** (Dimensione di Hausdorff). Si chiama **dimensione di Hausdorff** di un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  il numero reale non negativo

$$\alpha(A) := \inf\{s > 0 \mid H_s(A) = 0\} \quad (1.11)$$

Osserviamo esplicitamente che per il Corollario 1.3.2, qualunque siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $s > n$  risulta  $H_s(A) = 0$ . Pertanto

$$\alpha(A) \leq n \text{ per ogni } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

**Proposizione 1.3.4.** Se  $A$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  avente dimensione di Hausdorff  $\alpha(A) > 0$ , allora

$$H_t(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } t > \alpha(A) \\ +\infty & \text{se } 0 \leq t < \alpha(A) \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Se  $t > \alpha(A)$  esiste  $s < t$  tale che  $H_s(A) = 0$ . Per la proposizione 1.3.1 risulta quindi  $H_t(A) = 0$ .

Se  $0 \leq t < \alpha(A)$  e se fosse, ragionando per assurdo,  $H_t(A) < +\infty$ , ancora per la Proposizione 1.3.1 si avrebbe  $H_s(A) = 0$  per ogni  $s > t$ . Ne verrebbe per la Definizione 1.3.3,  $\alpha(A) \leq t$ , contro l'ipotesi.  $\square$

Concludiamo con alcuni esempi:

**Esempio 1.3.5.** Se  $a \in \mathbb{R}^n$ , allora

$$H_0(\{a\}) = 1$$

Infatti se  $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $A$ , allora

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} m_0(B_k) = \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_0(r(A))^0 = \omega_0 \text{card} \mathcal{A} = \text{card} \mathcal{A} \geq 1.$$

Pertanto  $H_0^{(\delta)}(\{a\}) \leq 1$  per ogni  $\delta > 0$ . D'altra parte, essendo ovviamente  $(\{a\})$  un  $\delta$ -ricoprimento di  $\{a\}$ , qualunque sia  $\delta > 0$ , risulta

$$H_0^{(\delta)}(\{a\}) \leq m_0(\{a\}) = \omega_0(r\{a\})^0 = 1$$

Allora  $H_0^{(\delta)}(A) = 1$  per ogni  $\delta > 0$ , e quindi  $H_0(A) = 1$ .

**Esempio 1.3.6.** Se  $A$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  finito o numerabile allora

$$H_0(A) = \text{card}(A) \text{ e } \alpha(A) = 0.$$

Infatti, se  $A = \{a_k/k \in \mathcal{A}\}$  con  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$  e  $a_k \neq a_h$  se  $k \neq h$ , allora

$$H_0(A) = H_0\left(\bigcup_{k \in \mathcal{A}} \{a_k\}\right) = (\{a_k\} H_0 - \text{misurabile in quanto chiuso e}$$

$$\{a_k\} \cap \{a_h\} = \emptyset \text{ per } k \neq h) \sum_{k \in \mathcal{A}} H_0(\{a_k\}) = (H_0(\{a_k\}) = 1$$

per l'Esempio 1.3.5)  $\text{card}\mathcal{A} = \text{card}A$ .

Questo dimostra che  $H_0(A) = \text{card}(A)$ . Per dimostrare che  $\alpha(A) = 0$  basta osservare che, per ogni  $t > 0$ , si ha

$$H_t(A) \leq \sum_{k \in \mathcal{A}} H_t(\{a_k\}) = 0$$

in quanto, essendo  $H_0(\{a_k\}) = 1$ , risulta  $H_t(\{a_k\}) = 0$  per ogni  $t > 0$ .

**Esempio 1.3.7.** Ogni sottoinsieme  $\mu_p$ -misurabile di  $\mathbb{R}^p$  avente misura (di Lebesgue) positiva ha dimensione di Hausdorff  $p$ . Infatti se  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  e  $\mu_p(A) > 0$ , allora per il Teorema 1.2.8,  $H_p(A) > 0$ . Di conseguenza, se  $s$  è un numero reale non negativo tale che  $H_s(A) = 0$ , deve essere  $s > p$ . In altri termini

$$\inf\{s \geq 0/H_s(A) = 0\} \geq p.$$

D'altra parte, poichè  $A \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $\alpha(A) \leq p$ . In definitiva  $\alpha(A) = p$ .

### 1.3.1 L'insieme di Cantor

Il più noto sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  avente dimensione di Hausdorff non intera è l'insieme di Cantor  $\mathcal{C}$ , così definito:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}_k$$

dove  $(\mathcal{C}_k)_{k \geq 0}$  è la successione di plurintervalli chiusi definita, per ricorrenza, col procedimento seguente:

- $\mathcal{C}_0$  è l'intervallo chiuso  $[0,1]$ .
- $\mathcal{C}_1$  si ottiene rimuovendo da  $\mathcal{C}_0$  l'intervallo aperto  $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ , quindi  $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ .
- $\mathcal{C}_2$  si ottiene rimuovendo, dal centro di ogni intervallo componente  $\mathcal{C}_1$ , un intervallo aperto di lunghezza  $(\frac{1}{3})^2$ ; quindi  $\mathcal{C}_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ .

In generale,  $\mathcal{C}_{k+1}$  si ottiene rimuovendo dal centro di ogni intervallo componente  $\mathcal{C}_k$  un intervallo aperto di lunghezza  $(\frac{1}{3})^{k+1}$ . Potremmo, prima di tutto, cercare di calcolare la misura di Lebesgue di questo insieme. Notiamo che il plurintervallo  $\mathcal{C}_k$  è quindi unione di  $2^k$  intervalli chiusi e disgiunti ciascuno dei quali ha lunghezza  $(\frac{1}{3})^k$ . La lunghezza totale di  $\mathcal{C}_k$  è quindi  $(\frac{2}{3})^k$ . La misura di Lebesgue di  $\mathcal{C}$  è:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

Notiamo che quindi la misura di Lebesgue è nulla pur essendo un insieme



Figura 1.2: Costruzione dell'insieme di Cantor

non vuoto. Questa misura non è molto vantaggiosa. Proviamo, invece, a trovare la dimensione e la misura di Hausdorff di questo insieme. Se indichiamo con  $\mathcal{I}_k = (I_{k,j})_{j=1,\dots,2^k}$  la famiglia di questi intervalli di lunghezza  $(\frac{1}{3})^k$ , allora  $\mathcal{I}_k$  è un  $\delta_k$ -ricoprimento di  $\mathcal{C}$  con  $\delta_k = (\frac{1}{3})^k$ . Per ogni  $t \geq 0$  risulta quindi

$$H_t^{(\delta_k)}(\mathcal{C}) \leq \sum_{j=1}^{2^k} m_t(\mathcal{I}_{k,j}) = 2^k \omega_t \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^k\right)^t = \omega_t 2^{-t} 2^k 3^{-kt}.$$

Da questa disuguaglianza, indicando con  $s$  il numero reale

$$s := \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

si trae

$$H_t^{(\delta_k)}(\mathcal{C}) \leq \omega_t 2^{-t} e^{k(s-t)\log 3}$$

e quindi, per ogni  $t > s$

$$H_t(\mathcal{C}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_t^{(\delta_k)}(\mathcal{C}) = 0$$

mentre per  $t = s$ ,

$$H_s(\mathcal{C}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_s^{(\delta_k)}(\mathcal{C}) \leq \omega_s 2^{-s}.$$

Si può dimostrare che vale anche la disuguaglianza inversa:

$$H_s(\mathcal{C}) \geq \omega_s 2^{-s}$$

Pertanto

$$H_s(\mathcal{C}) = \omega_s 2^{-s} \quad \alpha(\mathcal{C}) = s$$

### 1.3.2 Il tappeto di Sierpinski

Il tappeto di Sierpinski (variante del triangolo di Sierpinski) è un frattale descritto dal matematico polacco Waclaw Sierpinski nel 1916, e si costruisce in questo modo: si prende un quadrato  $Q$ , lo si divide in 9 quadrati più piccoli (equivalenti tra loro) e si toglie il quadrato centrale. A questo punto si ripete il procedimento sugli otto quadrati ottenuti e così via.

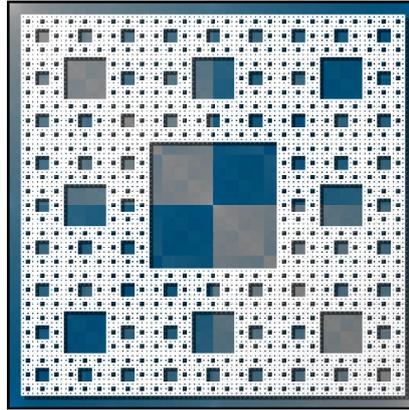


Figura 1.3: Costruzione del tappeto di Sierpinski

Ogni volta si ottengono otto quadrati di lunghezza  $\frac{1}{3}$  rispetto a quello da cui siamo partiti ottenendo così una figura con area che tende a zero e perimetro infinito. Da una semplice equazione (che vedremo nel prossimo capitolo) si ottiene che la dimensione di Hausdorff del tappeto di Sierpinski, che chiameremo  $\alpha(Q)$  è

$$\alpha(Q) = \frac{\ln(8)}{\ln(3)} \approx 1,893$$

Esiste una versione in tre dimensioni che prende il nome di spugna di Menger. Ogni faccia della spugna è un tappeto di Sierpinski, quindi continua ad avere area nulla e perimetro infinito, con la particolarità ulteriore di avere volume nullo.

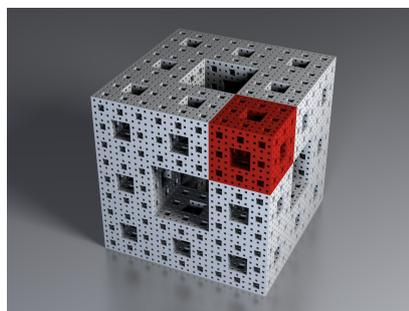


Figura 1.4: Spugna di Menger

## Capitolo 2

# Contrazioni e insiemi autosimilari

In questo capitolo parleremo dell'altra caratteristica dei frattali di cui abbiamo parlato nell'introduzione: l'autosimilarità. Un insieme autosimilare, in poche parole, è un insieme che può essere diviso in un certo numero di pezzi che sono copie a una scala diversa dell'insieme stesso. Iniziamo a dare le definizioni necessarie per descrivere matematicamente questa proprietà.

**Definizione 2.0.1.** Diciamo che la mappa  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una contrazione se esiste una costante  $c \in (0, 1)$  così che la disuguaglianza

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq c\|x - y\|$$

valga per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

In altre parole, una mappa è una contrazione se soddisfa la definizione di essere Lipschitz con una costante  $c$  minore di uno. Definiamo la costante di Lipschitz di  $\psi$  come la più piccola tra tutte le  $c$ , e la chiamiamo  $L(\psi)$ . In accordo al principio di contrazione in uno spazio metrico completo,  $\psi$  ha un unico punto fisso  $\bar{x}$ , cioè che esiste un unico punto  $\bar{x}$  che soddisfa l'equazione

$$\bar{x} = \psi(\bar{x}) \tag{2.1}$$

Per questo punto fisso scriviamo semplicemente  $F(\psi)$ . Ora estendiamo l'equazione 2.1 a diverse contrazioni ed enunciamo la definizione seguente:

**Definizione 2.0.2.** Sia  $m \geq 2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , e sia  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$  un insieme di  $m$  contrazioni definite su  $\mathbb{R}^n$ . Diciamo che un insieme compatto  $V$  in  $\mathbb{R}^n$ ,  $V$  non vuoto, è autosimilare se soddisfa

$$V = \bigcup_{i=1}^m \psi_i(V). \tag{2.2}$$

Notiamo che non viene richiesto che le contrazioni siano 'simili' in senso geometrico. Sono solo contrazioni in senso generale. Comunque ci sono altre definizioni di autosimilarità che sono un po più restrittive e insistono sul fatto che non tutte le contrazioni sono solo simili ma devono anche soddisfare una certa condizione di separazione, cioè che le miniature devono essere reciprocamente separate.

Infatti possiamo considerare 2.2 proprio come l'equazione 2.1, come il punto fisso di una qualche contrazione. Ragioniamo in questo modo: sia  $K(\mathbb{R}^n)$  l'insieme di tutti gli insiemi compatti non vuoti di  $\mathbb{R}^n$ . Per un elemento  $A \in K(\mathbb{R}^n)$  poniamo

$$N_\epsilon(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(x, A) \equiv \min_{y \in A} |x - y| \leq \epsilon \right\}$$

e diciamo che  $N_\epsilon(A)$  è l' $\epsilon$ -collare di  $A$ . L'insieme  $K(\mathbb{R}^n)$  diventa uno spazio metrico quando diamo la seguente definizione:

**Definizione 2.0.3.** (Distanza di Hausdorff)

$$d_H(A, B) = \min_{\epsilon \geq 0} \{A \subset N_\epsilon(B), B \subset N_\epsilon(A)\}$$

Il vantaggio di avere questa distanza è dato da questo teorema:

**Teorema 2.0.4.** *Con la distanza di Hausdorff  $d_H$ ,  $K(\mathbb{R}^n)$  diventa uno spazio metrico completo.*

*Dimostrazione.* Sia  $\{A_i\}$  una successione di Cauchy arbitraria in  $\mathbb{R}^n$  tale che per ogni  $\epsilon > 0$  possiamo scegliere un  $m \equiv m(\epsilon)$  abbastanza grande con  $d_H(A_p, A_q) \leq \epsilon$  per ogni coppia di interi  $p$  e  $q$ ,  $p \geq q \geq m$ . Dobbiamo far vedere che la successione  $\{A_i\}$  converge rispetto alla distanza di Hausdorff a un punto di  $K(\mathbb{R}^n)$ . Poniamo

$$E_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}.$$

Ogni  $E_k$  è un insieme compatto. Dato che la successione  $\{E_k\}$  è monotona decrescente, l'insieme

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

appartiene a  $K(\mathbb{R}^n)$ . Da qui segue che

$$E \subset E_q = \overline{\bigcup_{i=q}^{\infty} A_i} \subset N_\epsilon(A_q).$$

D'altra parte, dato  $x \in A_q$ , esistono punti  $y_p \in A_p$  tali che  $\|x - y_p\| \leq \epsilon$ , per ogni intero  $p$ ,  $p \geq q$ , perchè  $A_q \subset N_\epsilon(A_p)$ . Se  $z$  è un punto di accumulazione della successione  $\{y_p\}$ , abbiamo che  $\|x - z\| \leq \epsilon$ . Inoltre, per ogni  $p \geq k$  abbiamo  $y_p \in A_p \subset E_p \subset E_k$ , ed  $E_k$  è compatto, otteniamo che  $z \in E_k$  e dato che  $k$  era arbitrario ciò implica che  $z \in E$ . Quindi abbiamo che

$$x \in N_\epsilon(\{z\}) \subset N_\epsilon(E).$$

Così  $d_H(E, A_q) \leq \epsilon$  e cioè la successione  $\{A_i\}$  converge a  $E$ .  $\square$

Useremo questo risultato per mostrare che esiste un unico insieme autosimilare.

**Teorema 2.0.5.** *Data una famiglia di  $m$  contrazioni  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$ ,  $m \geq 2$ , esiste un unico insieme autosimilare  $V$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo prima una mappa  $\Phi : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$  tale che:

$$\Phi(A) = \bigcup_{i=1}^m \psi_i(A), \quad (2.3)$$

dove le  $\psi_i(A)$  sono le immagini di  $A$  tramite le  $\psi_i$ . Dato che l'immagine di un insieme compatto tramite una mappa continua è compatta e che l'unione finita di insiemi compatti è compatta ci assicura che  $\Phi$  manda  $K(\mathbb{R}^n)$  in  $K(\mathbb{R}^n)$ . Poichè per il teorema precedente  $K(\mathbb{R}^n)$  è uno spazio metrico completo, rimane da dimostrare che la mappa  $\Phi$  è una contrazione su  $K(\mathbb{R}^n)$ . Così l'unico punto fisso  $F(\Phi) \in K(\mathbb{R}^n)$  sarà il nostro insieme autosimilare.

Ora per gli insiemi arbitrari  $A_0, A_1, A_2, A_3 \in K(\mathbb{R}^n)$  valgono le seguenti proprietà:

- $d_H(\psi_i(A_0), \psi_i(A_1)) \leq L(\psi_i)d_H(A_0, A_1)$ .
- $d_H(A_0 \cup A_1, A_2 \cup A_3) \leq \max\{d_H(A_0, A_2), d_H(A_1, A_3)\}$ .

Per provare la prima, poniamo  $s = d_H(A_0, A_1)$ ; poi per ogni  $x \in A_0$  esiste un certo  $y \in A_1$  tale che  $\|x - y\| \leq s$ . Questo implica che

$$\|\psi_i(x) - \psi_i(y)\| \leq L(\psi_i)\|x - y\| \leq L(\psi_i)s,$$

e quindi  $\psi_i(x) \in N_t(\psi_i(A_1))$ , dove scriviamo per semplicità  $L(\psi_i)s = t$ . Da questo otteniamo che  $\psi_i(A_0) \subset N_t(\psi_i(A_1))$ , dato che abbiamo scelto  $x$  in modo arbitrario. Analogamente otteniamo la seconda relazione di inclusione. Poi, per dimostrare la seconda proprietà poniamo  $s = d_H(A_0, A_2)$  e  $t = d_H(A_1, A_3)$ ; l'inclusione  $A_0 \subset N_s(A_2)$  e  $A_1 \subset N_t(A_3)$  danno le inclusioni

$$A_0 \cup A_1 \subset N_s(A_2) \cup N_t(A_3) \subset N_r(A_2 \cup A_3),$$

dove  $r = \max\{s, t\}$ . La seconda inclusione viene nello stesso modo.

Ora per ogni  $A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ , e l'uso ripetuto della seconda proprietà otteniamo

$$d_H(\Phi(A), \Phi(B)) = d_H\left(\bigcup_{i=1}^m \psi_i(A), \bigcup_{i=1}^m \psi_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d_H(\psi_i(A), \psi_i(B)).$$

Dalla prima proprietà,

$$\max_{1 \leq i \leq m} d_H(\psi_i(A), \psi_i(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} L(\psi_i)\right) d_H(A, B),$$

da cui otteniamo la disuguaglianza

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(\psi_i) < 1$$

che ci permette di dire che  $\Phi : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$  è una contrazione.  $\square$

Questo risultato ci dice che, partendo da un insieme compatto  $A$ , la successione di insiemi compatti  $\{\Phi^k(A)\}$  converge all'insieme autosimilare  $V$ . In particolare, se un insieme  $B$  in  $K(\mathbb{R}^n)$  soddisfa  $\Phi(B) \subset B$  (per esempio  $B$  può essere una palla chiusa di raggio abbastanza grande centrata nell'origine), la successione  $\{\Phi^k(B)\}$  di insiemi compatti è monotona decrescente e quindi il suo limite  $\cap \Phi^k(B)$  diventa l'insieme autosimilare  $V$ . La stessa osservazione si applica a  $B \in K(\mathbb{R}^n)$  con  $\Phi(B) \supset B$  (per esempio  $B$  potrebbe essere un punto fisso di  $\psi_i$ ) e in questo caso vediamo che  $V \supset B$ .

## 2.1 Dimensione e forma di un insieme autosimilare

Per misurare la dimensione di un insieme autosimilare diamo prima qualche risultato riguardante la dimensione di Hausdorff. Dato un insieme di contrazioni  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$  definiamo la dimensione di similarità del corrispondente insieme autosimilare  $V$  come la radice positiva di un'equazione in  $d$

$$\sum_{i=1}^m (L(\psi_i))^d = 1, \quad (2.4)$$

che dipende solo dalle costanti di Lipschitz delle contrazioni. Chiamiamo questo valore  $\dim_S(V)$ . Anche se chiamiamo  $\dim_S(V)$  'dimensione', non definisce una vera e propria dimensione, ma usiamo questo nome perchè sotto certe condizioni questo valore corrisponde alla dimensione di Hausdorff dell'insieme autosimilare  $V$ . Aggiungiamo che l'equazione 2.3 ha un'unica radice positiva perchè la funzione  $f(x) = \sum (L(\psi_i))^x$  è monotona decrescente e soddisfa la relazione  $f(0+) = m \geq 2 > f(\infty) = 0$ . Abbiamo in generale la seguente disuguaglianza:

**Teorema 2.1.1.** *Per un insieme autosimilare  $V$ ,*

$$\alpha(V) \leq \dim_S(V).$$

dove con  $\alpha(V)$  è la dimensione di Hausdorff definita nel Capitolo 1.

È molto importante capire quando la disuguaglianza precedente diventa un'uguaglianza, infatti solitamente calcolare la dimensione di Hausdorff è difficile (si vedano gli esempi del capitolo 1), mentre se valesse l'uguale ci ricondurremmo a risolvere un'equazione.

Diciamo che l'insieme di contrazioni  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$  soddisfa la condizione di 'insieme aperto' se esiste un intorno aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U \neq \emptyset$  tale che

$$\psi_i(U) \subset U, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \text{e} \quad \psi_i(U) \cap \psi_j(U) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Dato che  $\Phi(\bar{U}) \subset \bar{U}$ , abbiamo che  $V \subset \bar{U}$ , come abbiamo detto alla fine di 2.1. Inoltre, diciamo che una mappa  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una contrazione simile se  $\|\psi(x) - \psi(y)\| = L(\psi)\|x - y\|$ , per ogni  $x$  e per ogni  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ . Ora abbiamo il seguente teorema di Hutchinson.

**Teorema 2.1.2.** *Per un insieme autosimilare  $V$  definito da una famiglia di contrazioni che soddisfano la condizione di un insieme aperto, vale l'uguaglianza  $\alpha(V) = \dim_S(V)$ .*

*Osservazione 2.1.3.* Per le contrazioni simili  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$  che soddisfano la condizione di insieme aperto, la soluzione positiva  $d$  dell'equazione 2.4, la dimensione di similarità di  $V$ , deve essere minore o uguale a  $n$ . Così vediamo che se una famiglia di contrazioni simili ha un grado di similarità maggiore di  $n$ , allora questa non soddisfa la condizione di insieme aperto. Tuttavia è stato dimostrato che l'equazione nel teorema è sempre verificata, tranne per il fatto che viene sostituito  $\dim_S(V)$  con  $\min\{\dim_S(V), n\}$ , in una grande classe di contrazioni simili che non soddisfa la condizione di insieme aperto.

**Esempio 2.1.4.** Consideriamo di nuovo l'insieme di Cantor  $\mathcal{C}$ , descritto nel Capitolo 1. L'insieme di Cantor è autosimilare e corrisponde a due contrazioni:

$$\psi_1(x) = \frac{x}{3}, \quad \psi_2(x) = 1 - \frac{x}{3}$$

I fattori di contrazione  $L(\psi_1) = L(\psi_2) = \frac{1}{3}$  e quindi secondo l'equazione 2.3  $\dim_S(\mathcal{C})$  è data da:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1$$

Da questa equazione troviamo che  $d = \dim_S(\mathcal{C}) = \frac{\log 2}{\log 3}$ . In questo caso la condizione di insieme aperto è soddisfatta con  $U = (0, 1)$ , quindi  $\dim_S(\mathcal{C})$  coincide con la dimensione di Hausdorff: abbiamo trovato esattamente lo stesso risultato ottenuto nel Capitolo 1.

**Esempio 2.1.5.** Controlliamo con questo teorema anche la dimensione della curva di Koch  $\mathcal{K}$ .

La curva di Koch, descritta per la prima volta nel 1904 da Helge Von Koch, matematico svedese, è definita ricorsivamente in questo modo: partiamo dal primo intervallo  $C_0$ , un segmento che possiamo identificare con l'intervallo  $[0, 1]$ , poi dividiamo  $C_0$  in tre parti uguali. Togliamo la parte centrale e la sostituiamo con una "punta" costituita da due lati lunghi un terzo della linea originaria che formano un angolo pari a 60 gradi. In questo modo si ottiene una spezzata costituita da quattro segmenti uguali. Si ripete la stessa operazione su ognuno di questi quattro segmenti, ottenendo così una spezzata più complessa formata da 16 piccoli segmenti, lunghi ciascuno  $\frac{1}{9}$  della linea originaria. Si prosegue così all'infinito e, il limite di questa sequenza è la curva di Koch. Notiamo che tre curve di Koch, originate da tre lati di un triangolo equilatero generano il fiocco di neve di Koch. Dato che la curva di Koch, che denotiamo con  $\mathcal{K}$ , è costruita ricorsivamente come l'insieme di Cantor, possiamo ripetere lo stesso ragionamento che abbiamo utilizzato per trovare la dimensione di Hausdorff di  $\mathcal{C}$  e otterremo che:

$$\alpha(\mathcal{K}) = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618.$$

Va infine fatta una piccola osservazione su questa curva molto particolare: è una curva continua, che non interseca mai se stessa, perchè i nuovi triangoli costruiti su ciascun lato sono sempre abbastanza piccoli da evitare di urtarsi tra loro, ma pur essendo continua non ha tangente in nessun punto.

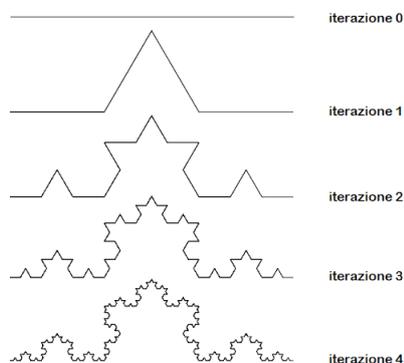


Figura 2.1: Costruzione della Curva di Koch

$\mathcal{K}$  è un insieme autosimilare, corrispondente alle contrazioni di  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ :

$$\psi_1(z) = \omega \bar{z}, \quad \psi_2(z) = \bar{\omega}(\bar{z} - 1) + 1$$

dove  $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{6}$ . Siccome  $L(\psi_1) = L(\psi_2) = |\omega| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , risolvendo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d = 1$$

otteniamo che  $\dim_S(\mathcal{K}) = \frac{\log 4}{\log 3}$  che è uguale alla dimensione di Hausdorff poi ch'è soddisfa la condizione di insieme aperto.

**Esempio 2.1.6.** Un altro esempio è l'insieme autosimilare chiamato 'albero', che corrisponde alle seguenti due contrazioni similari di  $\mathbb{C}$ :

$$\psi_1(z) = \omega(\bar{z}), \quad \psi_2(z) = \frac{2\bar{z} + 1}{3}$$

Dato che  $L(\psi_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  e  $L(\psi_2) = \frac{2}{3}$ , la dimensione di Hausdorff di questo insieme è la radice positiva dell'equazione:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d + \left(\frac{2}{3}\right)^d = 1$$

Qui come U prendiamo l'interno del pentagono di vertici  $0, 1, \omega, \bar{\omega}, \omega^2$ .

## 2.2 Insiemi auto-affini

Un insieme autosimilare definito da una contrazione lineare è chiamato insieme auto-affine. In questa sezione considereremo solo insiemi auto-affini



Figura 2.2: The Tree

determinati da due contrazioni  $\psi_1, \psi_2$ . Esprimiamo queste trasformazioni in termini di trasformazioni di  $\mathbb{C}$ :

$$\psi(z) = az + b\bar{z} + c$$

Senza perdere di generalità, possiamo normalizzare  $\psi$  in modo tale che  $z = 0$  sia il punto fisso di  $\psi_1$  e  $z = 1$  sia il punto fisso di  $\psi_2$ . Così otteniamo la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \gamma - \delta \end{pmatrix}$$

dove  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  sono parametri complessi. Chiamiamo la matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  la matrice dei parametri.

Ogni insieme autosimile sarà associato alle due contrazioni, e cioè alla matrice dei parametri. Ovviamente, dobbiamo assegnare le seguenti condizioni ai parametri in modo tale che  $\psi_1, \psi_2$  siano delle contrazioni:

$$0 < |\alpha| + |\beta| < 1 \quad e \quad 0 < |\gamma| + |\delta| < 1$$

Infatti, se consideriamo  $\psi_1$  abbiamo

$$\|\psi_1(z) - \psi_2(w)\| = \|\alpha(z - w) + \beta(\bar{z} - \bar{w})\| \leq (|\alpha| + |\beta|)\|z - w\|.$$

Inoltre notiamo che  $\psi_i$  è una contrazione simile solo se  $\alpha\beta = \delta\gamma = 0$ . Dato che i frattali sono insiemi connessi, potremmo chiederci quali sono le condizioni da dare ai parametri della matrice affinché ottenga degli insiemi connessi. Data la difficoltà, questa parte non verrà trattata e dunque passiamo subito a dare degli esempi. Poniamo  $\sigma = \frac{1+i}{2}$ .

**Esempio 2.2.1.** La curva di Koch è data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix}$

**Esempio 2.2.2.** La curva di Lévy è definita dalla matrice  $\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$ . La particolarità di questa curva è che ha area uguale al triangolo isoscele con vertici in  $0, 1, e \sigma$ . Avendo area positiva, la sua dimensione di Hausdorff è quindi due.

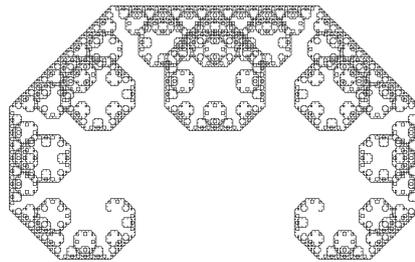


Figura 2.3: La curva di Lévy

## Capitolo 3

# Insiemi di Mandelbrot e di Julia

Nell'ultimo capitolo di questa tesi trattiamo brevemente degli insiemi molto particolari: gli insiemi di Mandelbrot e di Julia. L'insieme di Mandelbrot è uno dei frattali più popolari, grazie soprattutto alle svariate illustrazioni colorate che sono state divulgate. Questo insieme deve il suo nome a Benoit Mandelbrot, matematico polacco che per primo scoprì questo insieme ottenendo delle immagini al computer e iniziando a descriverle. Esso è considerato un frattale perchè guardandolo a diverse scale e spostandosi sul bordo, si ritrova sempre la stessa struttura di partenza. Gli insiemi di

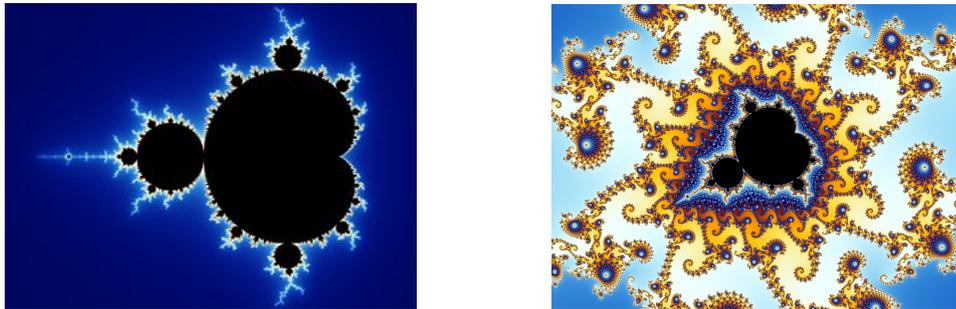


Figura 3.1: L'insieme di Mandelbrot e un suo ingrandimento a una scala molto piccola

Julia sono fortemente collegati a quelli di Mandelbrot, e devono il loro nome al matematico Gaston Julia. Sono infatti descritti dalla seguente formula matematica:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad \text{con } z, c \in \mathbb{C}$$

Quindi partendo da uno  $z_0 \in \mathbb{C}$  si ottiene quello successivo facendo  $z_1 = z_0^2 + c$  e così via. Ovviamente il comportamento di  $z_n$  dipende da  $z_0$  e da  $c$ . L'insieme di Mandelbrot (indicato con  $M$ ) si ottiene fissando  $z_0 = 0$  e facendo variare  $c$ , invece quelli di Julia (indicati con  $J_c$ ) si ottengono fissando  $c$  e facendo variare  $z_0$ . Allora  $M$  è definito da

$$M = \left\{ \begin{array}{l} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{array} \right.$$

mentre gli insiemi di Julia  $J_c$  sono definiti da una funzione

$$f_c(z) = z^2 + c$$

Notiamo che questi insiemi sono definiti tramite delle successioni e ci chiediamo se queste successioni convergono o meno. Effettivamente alcuni punti convergono all'interno di una regione limitata il cui confine ha forma frattale. Nelle raffigurazioni (ad esempio la figura sopra) i punti vengono colorati in base alla loro convergenza, ad esempio quelli convergenti sono rappresentati con un colore scuro, mentre quelli che vanno all'infinito sono di un colore diverso a seconda della loro velocità. Si è vista un'importante relazione che lega l'insieme di Mandelbrot a quello di Julia:

- se  $c$  è scelto all'interno dell'insieme di Mandelbrot (nella parte dove converge) allora l'insieme di Julia  $J_c$  corrispondente sarà connesso
- se  $c$  è scelto sul confine dell'insieme di Mandelbrot l'insieme di Julia corrispondente si riduce a un'insieme che non ha parte interna, cioè non ha alcuna area ma è connesso
- se  $c$  è scelto fuori dall'insieme di Mandelbrot il corrispondente insieme di Julia non è connesso

Infine vediamo qualche esempio di insieme di Julia con il codice matlab corrispondente:

```
1. Codice Matlab:
col=20;
m=300;
cx=0;
cy=0;
l=1.5;
x=linspace(cx-l,cx+l,m);
y=linspace(cy-l,cy+l,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
c= -1.3+0.1*i;
Z=X+i*Y;
for k=1:col;
Z=Z*Z+c;
W=exp(-abs(Z));
end
colormap jet(256)
pcolor(W);
shading flat;
axis('square','equal','off');
```

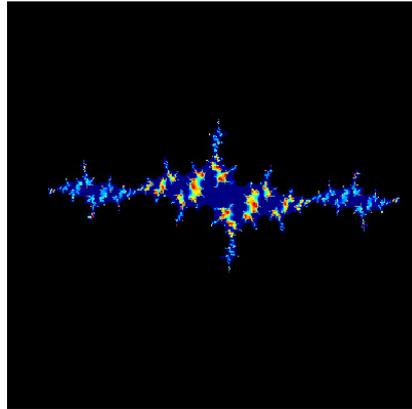


Figura 3.2: Insieme di Julia con  $c = -1.3 + 0.1i$

2. Codice Matlab:

```
col=30;
m=300;
cx=0;
cy=0;
l=1.5;
x=linspace(cx-l,cx+l,m);
y=linspace(cy-l,cy+l,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
c= 0.11031031-0.67037*i;
Z=X+i*Y;
for k=1:col;
Z=Z*Z+c;
W=exp(-abs(Z));
end
colormap cool(256)
pcolor(W);
shading flat;
axis('square','equal','off');
```

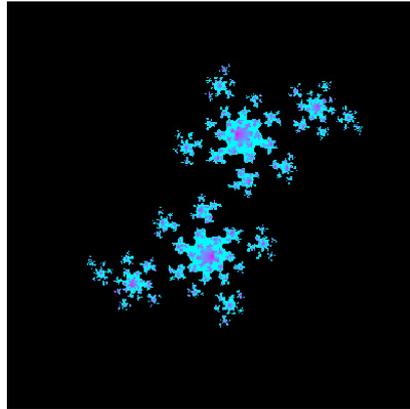


Figura 3.3: Insieme di Julia con  $c=0.11031031-0.67037i$

3. Codice Matlab:

```
col=30;
m=300;
cx=0;
cy=0;
l=1.5;
x=linspace(cx-l,cx+l,m);
y=linspace(cy-l,cy+l,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
c= -0.488679-0.56790*i;
Z=X+i*Y;
for k=1:col;
Z=Z*Z+c;
W=exp(-abs(Z));
end
colormap copper(256)
pcolor(W);
shading flat;
axis('square','equal','off')
```

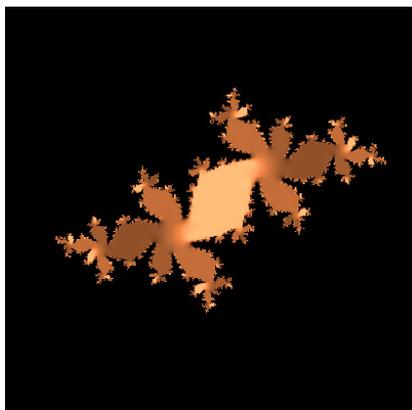


Figura 3.4: Insieme di Julia con  $c=-0.488679-0.56790i$



# Bibliografia

- [1] Lanconelli, E. (1997). Lezioni di analisi matematica 2, seconda parte. Pitagora Editrice, Bologna.
- [2] Yamaguchi, M., Hata, M., Kigami, J. (1997). Mathematics of fractals.
- [3] Falconer, K. J. (1986). The geometry of fractal sets.
- [4] Mandelbrot, B. B., Mandelbrot, B. B. (1982). The fractal geometry of nature.

## Siti web consultati

- [5] Luigi Orsina, Teorema delle contrazioni e sistemi di funzioni iterate, Appunti del Corso.  
URL: <http://www1.mat.uniroma1.it/people/orsina/Frattali.pdf>
- [6] Frattali autosimili  
URL: <http://www-dimat.unipv.it/gilardi/WEBGG/PSPDF/frattali.pdf>
- [7] Fractals with Matlab (1998)  
URL: <http://www.albertostrumia.it/sites/default/files/Fractals/FractalMatlab/frmatlab.html>
- [8] Frattali: l'ordine oltre il disordine, Giuseppe Mingione  
URL: <https://www.youtube.com/watch?v=KV0gql8dPyw>