

Università degli Studi di Bologna

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

DICAM

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e dei Materiali

Corso di laurea in Ingegneria Civile
Indirizzo Infrastrutture Viarie e Trasporti

Insegnamento:

COSTRUZIONE DI STRADE, FERROVIE ED AEROPORTI L-S

**TECNICHE NUMERICHE AVANZATE PER LA
MODELLAZIONE DELL'AGGREGATO LITICO DEI
CONGLOMERATI BITUMINOSI: L'APPROCCIO
PARTICELLARE**

Elaborato di:

ANNALISA FERRARESI

Relatore:

Chiar.mo Prof. Ing. **GIULIO DONDI**

Correlatori:

Dott. Ing. **VALERIA VIGNALI**

Dott. Ing. **GIULIA MANGANELLI**

Sessione I

Anno Accademico 2010 - 2011

PAROLE CHIAVE

Aggregato

Conglomerato bituminoso

DEM particellare

Prova triassiale

PFC^{3D}

INTRODUZIONE	1
<i>Introduzione al problema</i>	1
<i>Struttura della tesi</i>	2
1. I METODI DI MODELLAZIONE NUMERICA PER LO STUDIO DELLE PAVIMENTAZIONI STRADALI FLESSIBILI	
1.1 <u>Introduzione</u>	5
1.2 <u>Il metodo delle differenze finite FDM</u>	8
1.2.1 <i>I concetti di base</i>	8
1.2.2 <i>Vantaggi e limiti del metodo FDM</i>	9
1.2.3 <i>Il Finite Volume Method FVM</i>	10
1.3 <u>Il metodo degli elementi finiti FEM</u>	11
1.3.1 <i>I concetti di base</i>	11
1.3.2 <i>Vantaggi e limiti del metodo FEM</i>	13
1.4 <u>Il metodo degli elementi al contorno BEM</u>	14
1.4.1 <i>I concetti di base</i>	14
1.4.2 <i>Vantaggi e limiti del metodo BEM</i>	16
1.5 <u>Il metodo degli elementi discreti DEM</u>	17
1.5.1 <i>I concetti di base</i>	17
1.5.2 <i>Vantaggi e limiti del metodo DEM</i>	18
1.6 <u>Le tipologie di DEM</u>	19
1.6.1 <i>Il DEM esplicito</i>	19
1.6.2 <i>Il DEM implicito: il DDA</i>	23
1.6.3 <i>Il DEM particellare</i>	24
1.6.3.1 <i>Il ciclo di calcolo</i>	24
1.6.3.2 <i>La legge forza-spostamento</i>	27
1.6.3.3 <i>Le equazioni del moto</i>	30
1.6.3.4 <i>La legge dello smorzamento</i>	31
1.6.3.5 <i>L'intervallo di tempo critico</i>	31

1.6.3.6	<i>Vantaggi e limiti del DEM particellare</i>	33
2.	LA MODELLAZIONE DEM DEL CONGLOMERATO BITUMINOSO	
2.1	<i>Introduzione</i>	34
2.2	<i>I modelli di simulazione bidimensionali</i>	36
2.2.1	<i>La modellazione FEM del conglomerato bituminoso</i>	37
2.2.2	<i>La modellazione DEM del conglomerato bituminoso</i>	41
2.2.2.1	<i>La schematizzazione della prova Marshall</i>	51
2.2.2.2	<i>Conclusioni</i>	62
2.2.3	<i>Metodi a confronto</i>	63
2.3	<i>La modellazione tridimensionale</i>	65
2.3.1	<i>Modellazione con il metodo DEM-P della prova ITSM</i>	65
2.3.2	<i>Comportamento a fatica di una pavimentazione flessibile</i>	71
2.3.3	<i>Conclusioni</i>	80
3.	LA MODELLAZIONE DEM DI UNA PROVA TRIASSIALE	
3.1	<i>Introduzione</i>	81
3.2	<i>Il comportamento di un materiale a grana grossa</i>	82
3.2.1	<i>Introduzione</i>	82
3.2.2	<i>Caratteristiche di resistenza e cerchi di Mohr</i>	84
3.3	<i>La modellazione DEM di una prova triassiale</i>	87
3.4	<i>I parametri significativi nella modellazione DEM di un test triassiale</i>	92
3.4.1	<i>Andamenti delle curve al variare della pressione di confinamento</i>	92
3.4.2	<i>Variazione delle proprietà geotecniche</i>	94
3.4.3	<i>Fattori che incidono sulla resistenza al taglio</i>	95
3.4.3.1	<i>Influenza dell'indice dei vuoti</i>	96
3.4.3.2	<i>Influenza della forma dei grani</i>	96
3.4.3.3	<i>Influenza della distribuzione granulometrica</i>	97
3.4.3.4	<i>Influenza della scabrezza dei grani</i>	97
3.4.3.5	<i>Influenza data dalla presenza d'acqua</i>	98
3.4.3.6	<i>Influenza della dimensione dei grani</i>	98
3.5	<i>La validazione con provini costituiti da sfere d'acciaio</i>	98
3.5.1	<i>Materiale utilizzato e specifiche della prova</i>	99

3.5.2	<i>Analisi dei risultati</i>	100
3.5.2.1	<i>Influenza dell'angolo d'attrito interparticellare</i>	100
3.5.2.2	<i>Considerazioni sulla forma del provino</i>	100
3.5.2.3	<i>Analisi delle tensioni</i>	101
3.5.2.4	<i>Distribuzione delle forze di contatto</i>	103
3.5.2.5	<i>Movimenti delle particelle</i>	103
4.	IL SOFTWARE DI CALCOLO PFC^{3D}	
4.1	<u>Introduzione</u>	104
4.2	<u>I cicli di calcolo</u>	107
4.2.1	<i>La legge forza-spostamento</i>	107
4.2.2	<i>La legge del moto</i>	110
4.3	<u>Lo smorzamento</u>	111
4.4.	<u>Le condizioni iniziali</u>	111
4.5	<u>La creazione del modello</u>	112
4.5.1	<i>Introduzione</i>	112
4.5.2	<i>La generazione delle particelle</i>	113
4.5.3	<i>I modelli di contatto</i>	115
4.5.3.1	<i>Il modello di rigidezza</i>	115
4.5.3.2	<i>Il modello di slittamento</i>	117
4.5.3.3	<i>Il modello di legame</i>	117
4.5.4	<i>Applicazione delle condizioni iniziali e al contorno</i>	120
4.5.5	<i>L'interpretazione dei risultati</i>	121
4.6	<u>Le applicazioni di PFC</u>	122
5.	LA SPERIMENTAZIONE EFFETTUATA	
5.1	<u>Introduzione</u>	125
5.2	<u>Descrizione della ricerca dell'unità operativa di Bologna</u>	126
5.3	<u>Obiettivo e programma del lavoro</u>	129
6.	LA SPERIMENTAZIONE EFFETTUATA SU PROVINI COSTITUITI DA SFERE	
6.1	<u>Introduzione</u>	132
6.2	<u>La scelta delle modalità più opportune per simulare l'aggregato reale in modo significativo</u>	132
6.2.1	<i>La scelta del materiale costituente le sfere</i>	133

6.2.2	<i>La scelta del test triassiale</i>	135
6.3	<u>La calibrazione dei parametri microscopici con cui schematizzare le sfere di acciaio</u>	135
6.3.1	<i>Introduzione</i>	135
6.3.2	<i>Fase di laboratorio</i>	136
6.3.3	<i>Fase di modellazione</i>	142
6.3.3.1	<i>Il listato per la generazione dei wall</i>	143
6.3.3.2	<i>Il listato per la generazione delle sfere</i>	145
6.3.4	<i>I test svolti</i>	150
6.4	<u>Analisi macroscopica dei risultati ottenuti</u>	151
6.4.1	<i>Andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale</i>	151
6.4.2	<i>Andamento della deformazione volumetrica in funzione della deformazione assiale</i>	152
7.	LA SPERIMENTAZIONE EFFETTUATA SU PROVINI COSTITUITI DA CLUMP	
7.1	<u>Introduzione</u>	154
7.2	<u>Fase di laboratorio</u>	156
7.2.1	<i>L'incollaggio delle sfere</i>	158
7.3	<u>Fase di modellazione</u>	159
7.3.1	<i>I listati per la generazione del provino</i>	160
7.4	<u>I risultati ottenuti</u>	165
7.4.1	<i>Configurazione del provino alla fine della prova</i>	165
7.4.2	<i>Valutazione della percentuale di clump rotti</i>	165
7.4.3	<i>Andamento della tensione di confinamento</i>	167
7.4.4	<i>Andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale</i>	167
8.	ANALISI DEI RISULTATI: IL CONFRONTO TRA SFERE E CLUMP	
8.1	<u>Introduzione</u>	171
8.2	<u>Analisi della resistenza massima del sistema</u>	171
8.3	<u>Analisi delle caratteristiche geotecniche</u>	173
8.3.1	<i>Angolo d'attrito di picco</i>	173

8.3.2	<i>Angolo d'attrito residuo</i>	177
8.3.3	<i>Indice dei vuoti e porosità</i>	179
8.3.4	<i>Addensamento</i>	180
8.4	<i><u>Analisi delle caratteristiche microscopiche</u></i>	182
8.4.1	<i>Le forze di contatto</i>	182
8.4.2	<i>Il numero di coordinazione</i>	183
CONCLUSIONI		184
	<i>Sviluppi futuri</i>	187
BIBLIOGRAFIA		188

Introduzione al problema

Il conglomerato bituminoso è un materiale eterogeneo, il cui comportamento meccanico è fortemente influenzato dalle proprietà delle fasi che lo costituiscono; in particolar modo dalle caratteristiche dell'aggregato, dalle proprietà del bitume e dalle loro reciproche interazioni.

Il comportamento meccanico del conglomerato risulta pertanto difficilmente schematizzabile a causa della sua complessa natura intrinseca disomogenea ed anisotropa e dell'elevata influenza esercitata dalle condizioni ambientali.

L'approccio tradizionale alla modellazione degli strati in conglomerato bituminoso di una pavimentazione stradale consiste in una trattazione su scala macroscopica, utilizzando modelli di tipo continuo che, per la loro intima concezione, non tengono conto della natura eterogenea del materiale.

A giustificare l'approccio continuo c'è da un lato il vantaggio di poter disporre di metodologie analitiche e numeriche ben consolidate, e dall'altro l'evidenza sperimentale che ne prova l'efficacia e la significatività almeno da un punto di vista fenomenologico.

In ambito stradale, e più in generale nell'ambito dell'ingegneria civile, si osserva però che i mezzi granulari esplicano un comportamento meccanico nettamente diverso da quello degli altri materiali e questa differenza è imputabile proprio alla loro natura particellare.

Diventa quindi indispensabile il ricorso ad uno strumento che sia in grado di considerare il carattere discreto della materia, rappresentando i materiali in esame attraverso una struttura eterogenea associabile a quella reale. È questo l'approccio del codice di calcolo DEM (*Distinct Element Method*), che modella la struttura microscopica del materiale come un insieme di particelle discontinue, rappresentando diversi aspetti della realtà sulla base di leggi costitutive ed un numero limitato di parametri intrinseci del materiale.

In tale modellazione sussiste la possibilità di schematizzare gli aggregati mediante una *mesh* di elementi discreti, è possibile quindi modellare forme complesse

e simulare la propagazione della rottura sul contorno dell'aggregato e all'interno dello stesso.

Nell'ottica di un'evoluzione di tali criteri è necessario quindi considerare la composizione discreta del conglomerato bituminoso. Dunque nell'ambito dei metodi discontinui si fa riferimento a quello degli Elementi Distinti Particellari (DEM-P), perché modella il sistema come un insieme di elementi di forma circolare che interagiscono nei punti di reciproco contatto secondo appropriate leggi costitutive, adattandosi quindi allo studio del comportamento meccanico di un materiale granulare.

In particolare, la presente tesi si propone di studiare attraverso quest'ultimo metodo l'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo di una miscela in conglomerato bituminoso.

Struttura della tesi

La sperimentazione condotta e descritta nella presente tesi si inserisce nell'ambito di un progetto di ricerca PRIN (Programmi di ricerca scientifica di Rilevante Interesse Nazionale), dal titolo "*Modellazione e progettazione avanzata di pavimentazioni stradali perpetue*", conclusosi nel 2010, al quale partecipano diverse università italiane.

Il progetto si propone di sviluppare strumenti specifici per la valutazione preventiva delle pavimentazioni perpetue per ciò che riguarda sia le indagini sperimentali sia la modellazione.

L'approccio alla progettazione di queste pavimentazioni è incentrato sull'utilizzo di tecniche numeriche avanzate basate sui metodi di calcolo agli elementi distinti particellari, che prendono in considerazione le condizioni critiche e lo sviluppo dei danni all'interno della sovrastruttura.

Nei primi capitoli sono riportati i risultati di una lunga ricerca bibliografica condotta allo scopo di introdurre l'argomento trattato e di motivare le scelte di modellazione effettuate.

Nel **capitolo 1** sono descritti i principali metodi utilizzati per studiare il comportamento a fatica di una pavimentazione stradale flessibile, differenziandoli tra metodi al continuo, che schematizzano il sistema come un dominio discretizzato in unità elementari di forma geometrica semplice e metodi discontinui che invece

rappresentano il sistema come un insieme di corpi discreti e distinti che interagiscono tra loro solo in caso di reciproco contatto.

Per ognuno dei metodi appartenenti al primo od al secondo gruppo, sono presentate le potenzialità, i limiti ed alcuni concetti di base.

Nel **capitolo 2** si concentra l'attenzione sul secondo tipo di approccio riportando gli studi più interessanti condotti sul conglomerato bituminoso.

Diversi studi hanno dimostrato che il modulo di resistenza del conglomerato è fortemente influenzato dall'interazione che sussiste tra le particelle; a tal proposito in questo capitolo sono riportate in ordine cronologico alcune applicazioni di questo moderno approccio che sostengono il concetto in esame.

Poiché l'elaborato ha come scopo principale quello di validare i modelli simulati attraverso software, mediante il confronto con i risultati ottenuti da prove realizzate in laboratorio, nel **capitolo 3** si riportano gli studi che hanno riprodotto un test triassiale mediante la metodologia DEM allo scopo di conoscere quali sono i parametri del materiale che condizionano sia la significatività della modellazione, sia il risultato finale del test.

Si riportano quindi nel seguito del capitolo le principali esperienze presenti in letteratura condotte mediante l'utilizzo di sfere d'acciaio. Esse infatti costituiscono un "aggregato ideale", in grado di fornire un confronto significativo tra i risultati numerici e quelli sperimentali in virtù del fatto che sono ben riproducibili con il metodo DEM particellare.

Per la validazione dei modelli simulati attraverso software nel **capitolo 4** si riporta appunto il software di calcolo *Particle Flow Code in Three Dimensions* PFC^{3D} discutendo il processo di calcolo e i principi alla base del sistema, come la legge forza-spostamento, la legge del moto, lo smorzamento, i modelli di contatto e le condizioni iniziali e al contorno.

Per separare la parte sperimentale da quella di ricerca bibliografica nel **capitolo 5** si riporta brevemente il progetto di ricerca di cui sopra descrivendo nel particolare l'attività di ricerca svolta dall'Unità operativa di Bologna in termini di obiettivi e programma di lavoro.

L'attività sperimentale, riportata nei successivi due capitoli, è stata distinta in due fasi: nel **capitolo 6** si riporta la sperimentazione condotta su provini costituiti

unicamente da sfere in cui si discute della fase di laboratorio di creazione del campione e della fase di modellazione di cui si riportano i listati del programma.

Per approfondire l'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento del sistema nel **capitolo 7** si riporta la sperimentazione condotta su provini costituiti da *clump* distinguendo come sopra la fase di laboratorio da quella di modellazione.

Al termine di entrambi i capitoli si conduce un'analisi macroscopica dei risultati ottenuti, nel secondo caso differenziata al variare del tipo di particella elementare.

Nel **capitolo 8** si è condotta infine un'analisi microscopica dei risultati ottenuti confrontando il comportamento del provino costituito da sfere e quello formato da *clump*. L'analisi si è concentrata su particolari peculiarità come le caratteristiche geotecniche, quindi l'angolo d'attrito ed l'indice dei vuoti, le caratteristiche di resistenza e l'andamento delle forze di contatto.

I METODI DI MODELLAZIONE NUMERICA PER LO STUDIO DELLE PAVIMENTAZIONI STRADALI FLESSIBILI

1.1 Introduzione

I metodi di modellazione numerica sono degli strumenti che permettono di coniugare un buon grado di rappresentazione della geometria del sistema, considerando anche il comportamento tenso-deformativo, con tempi di calcolo ragionevoli.

Secondo la teoria di Hudson (2001) le metodologie di modellazione sono classificabili in quattro grandi categorie (figura 1.1) (Vignali, 2006):

- metodi di tipo A, basati sull'esperienza del progettista;
- metodi di tipo B, impostati su modelli analitici semplificati;
- metodi di tipo C che prevedono modellazioni mirate a descrivere solo i meccanismi rilevanti del fenomeno trattato;
- metodi di tipo D, basati su una modellazione completa del fenomeno studiato.

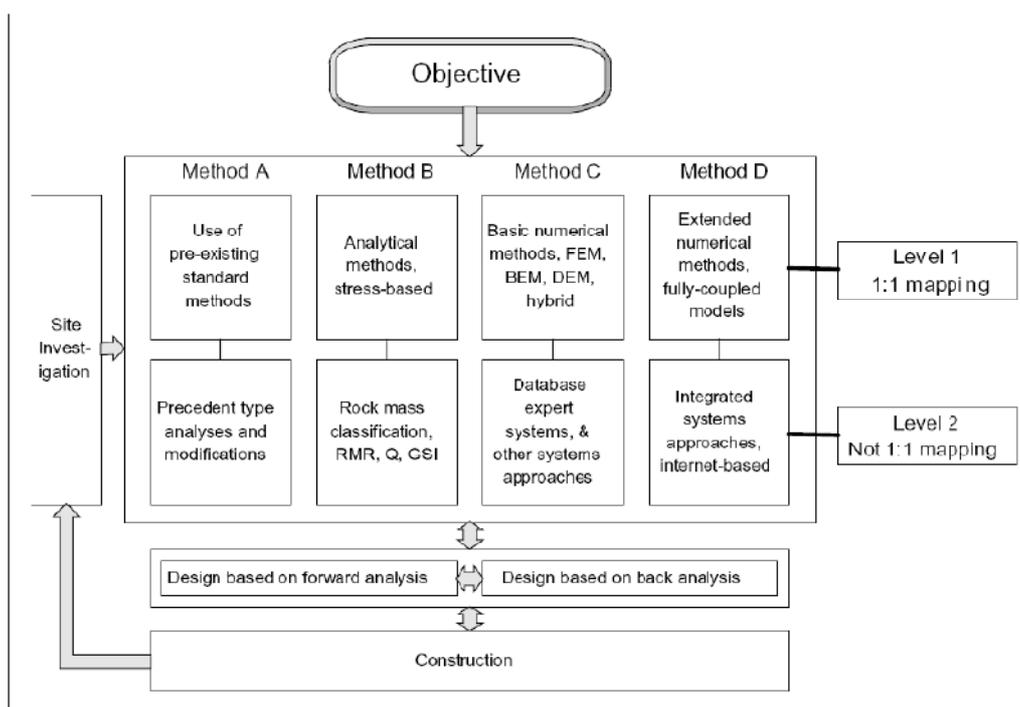


FIGURA 1.1: CLASSIFICAZIONE DEI METODI DI MODELLAZIONE NUMERICA (HUDSON, 2001)

La scelta del metodo numerico più idoneo per il caso in esame si svolge sulla base dell'obiettivo da raggiungere (*objective*) e dei dati iniziali a disposizione.

Ciascuna categoria si sviluppa su due livelli:

- il primo (*level 1*), nel quale si studiano singolarmente i meccanismi elementari che originano il fenomeno da modellare (*1:1 mapping*), simulati direttamente attraverso esplicite relazioni tenso-deformative;
- il secondo (*level 2*), che comprende i procedimenti nei quali alcuni parametri iniziali sono inseriti senza essere modellati specificatamente (*not 1:1 mapping*).

In entrambi i casi è possibile sfruttare i dati iniziali ottenuti da prove e rilevamenti in sito (*site investigation*).

Inoltre è possibile classificare i metodi numerici in due grandi gruppi (Jing, 2003):

- metodi al continuo: schematizzano il sistema come un dominio discretizzato in unità elementari di forma geometrica semplice (triangoli, quadrilateri, tetraedri, ecc..) le quali, pur deformandosi, rimangono costantemente in contatto reciproco attraverso le relative superfici di separazione. Poiché il mezzo conserva in tutti i suoi elementi le proprietà osservate nell'insieme, lo studio può essere condotto a livello fenomenologico anziché a livello atomico;
- metodi discontinui: rappresentano il sistema come un insieme di corpi discreti e distinti che interagiscono tra loro solo in caso di reciproco contatto. Il comportamento meccanico del mezzo è descritto tracciando l'andamento delle forze che si sviluppano nei punti di contatto ed i movimenti dei singoli elementi che lo compongono. Infatti, nei metodi al continuo i contatti fra le unità elementari rimangono invariati indipendentemente dalla risposta del modello, mentre in quelli discontinui vengono aggiornati ad ogni iterazione in base alla posizione ed al movimento relativo dei singoli elementi.

Grazie a questa peculiarità è possibile indagare l'evoluzione della risposta del sistema in condizioni di equilibrio stabile, equilibrio limite ed a rottura, oltre la quale, a differenza dei metodi al continuo, è ammessa la separazione del dominio in blocchi che continuano a risentire delle sollecitazioni agenti.

Tra i metodi al continuo possiamo citare (Jing, 2003):

- il Metodo delle Differenze Finite (*Finite Difference Method – FDM*);
- il Metodo degli Elementi Finiti (*Finite Element Method - FEM*);

- il Metodo degli Elementi di Contorno (*Boundary Element Method* - BEM).

Mentre dei metodi discontinui fa parte il Metodo degli Elementi Discreti (*Discrete Element Method* - DEM).

Il metodo FDM si basa sull'approssimazione diretta delle equazioni differenziali parziali (per semplicità indicate come *Partial Differential Equations* - PDEs) ottenuta sostituendo alle derivate parziali delle differenze definite sul dominio del problema (Jing, 2003). Si tratta quindi di approssimare un continuo in una serie di punti discreti. Si giunge così alla soluzione del sistema imponendo le condizioni iniziali e quelle al contorno.

Il FEM richiede la discretizzazione, ovvero la suddivisione del dominio del problema, in sottodomini (elementi) di forma semplice e regolare (triangoli, quadrati, tetraedri, ecc..), caratterizzati da un numero fissato di nodi. Per approssimare l'andamento delle PDEs a livello del singolo elemento e generare le equazioni algebriche locali che ne rappresentano il comportamento, si ricorre a funzioni di tentativo in genere polinomiali. Le equazioni così ottenute sono poi assemblate in sistemi globali la cui soluzione produce l'informazione richiesta nel dominio, dopo aver imposto adeguatamente le condizioni iniziali e quelle al contorno. Il FEM è oggi il metodo numerico maggiormente impiegato nell'ingegneria per la sua flessibilità nel trattare l'eterogeneità e la non linearità dei materiali e la complessità delle condizioni al contorno (Cesari, 2002).

A causa della discretizzazione interna, l'efficienza del FEM e del FDM diminuisce all'aumentare del numero dei gradi di libertà che è in genere proporzionale a quello dei nodi (Jing, 2003).

Il BEM richiede invece la discretizzazione del dominio della soluzione solo ai bordi, riducendo così le dimensioni del problema e semplificando i dati richiesti in ingresso. Si basa sulla risoluzione di un'equazione integrale definita sul contorno invece che sulla risoluzione diretta delle PDEs come nel FDM e nel FEM. A parità di livello di discretizzazione tale metodo comporta una maggiore precisione rispetto a quest'ultimi (Jing, 2003).

Il DEM è un metodo relativamente nuovo se confrontato con quelli sopra descritti. È un metodo discontinuo che schematizza il sistema come un assemblaggio di blocchi connessi tra loro attraverso i relativi punti di contatto. In tale metodo sono

ammessi grandi spostamenti o rotazioni, fratture o addirittura il completo distacco tra i singoli elementi, impossibili invece nei metodi FEM, FDM e BEM.

Le condizioni di compatibilità sugli spostamenti rappresentano un'importante differenza tra i metodi al continuo e quelli discreti: nei primi la compatibilità deve essere imposta tra elementi interni ed è automatica nel FDM e nel BEM ma non nel FEM; nei secondi non è richiesta poiché è sostituita dai modelli costitutivi di contatto tra unità adiacenti.

Esistono inoltre dei metodi ibridi, come ad esempio quelli FEM/DEM o DEM/BEM.

Di seguito si forniscono alcune indicazioni sui metodi sopra elencati.

1.2 Il metodo delle differenze finite FDM

1.2.1 I concetti di base

Il Metodo delle Differenze Finite (FDM) è il procedimento numerico più antico, utilizzato al fine di ottenere soluzioni approssimate delle equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali (per semplicità indicate come *Partial Differential Equations* - PDEs) (Jing, 2003). L'idea fondamentale su cui si basa il metodo è la sostituzione delle derivate parziali delle funzioni obiettivo (ad esempio lo spostamento) mediante delle differenze definite su determinati intervalli del dominio del problema nelle tre direzioni principali Δx , Δy , Δz (figura 1.2) (Wheel, 1996). La soluzione del sistema di equazioni algebriche così ottenuto fornisce in tutti i nodi il valore della funzione obiettivo che soddisfa sia le PDEs, sia le particolari condizioni al contorno.

Il FDM utilizza generalmente griglie regolari come mostra la figura 1.2.

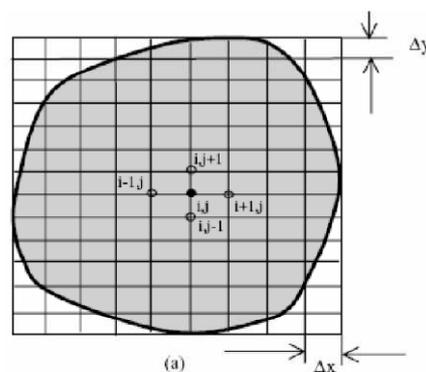


FIGURA 1.2: GRIGLIA PER IL METODO DELLE DIFFERENZE FINITE (WHEEL, 1996)

Nel caso di uno schema FDM a 5 nodi, ad esempio, le equazioni risultanti nei nodi della griglia (i, j) saranno espresse come combinazione dei valori della funzione nei quattro nodi adiacenti (figura 1.2). Applicando il teorema di Navier al punto generico (i, j) si ottiene:

$$u_x^{i,j} = a_1 \cdot u_x^{i-1,j} + a_2 \cdot u_x^{i,j-1} + a_3 \cdot u_x^{i,j+1} + a_4 \cdot u_x^{i+1,j} + a_5 \cdot u_x^{i+1,j+1} + a_6 \cdot F_x^{i,j} \quad (1.1)$$

$$u_y^{i,j} = b_1 \cdot u_y^{i-1,j} + b_2 \cdot u_y^{i,j-1} + b_3 \cdot u_y^{i,j+1} + b_4 \cdot u_y^{i+1,j} + b_5 \cdot u_y^{i+1,j+1} + b_6 \cdot F_y^{i,j} \quad (1.2)$$

dove a_k e b_k ($k=1,2,\dots,6$) sono funzione degli intervalli Δx e Δy della griglia e delle proprietà elastiche del solido; $F_x^{i,j}$ ed $F_y^{i,j}$ sono le forze in direzione x ed y applicate nel punto (i, j) .

L'insieme di tali equazioni valutate in tutti i punti della mesh produrrà un sistema la cui soluzione può essere ottenuta per mezzo di metodi diretti o iterativi.

1.2.2 Vantaggi e limiti del metodo FDM

Il concetto di base su cui si fonda il Metodo delle Differenze Finite (FDM) è la discretizzazione diretta delle PDEs che governano il problema mediante la sostituzione delle derivate parziali con differenze definite sul contorno dei punti della griglia. In particolare, per approssimare le PDEs nell'intorno dei punti campionati non si utilizzano funzioni di interpolazione (come invece accade nel FEM e nel BEM), poiché la configurazione della mesh adottata è tale da generare valori della funzione obiettivo nei punti rappresentativi con intervalli tanto piccoli da rendere gli errori introdotti non significativi. Per questo motivo il metodo FDM è la tecnica più diretta ed intuitiva per la soluzione delle PDEs (Jing, 2003).

Essendo basato su una griglia regolare, il FDM "convenzionale" risulta generalmente poco adatto alla modellazione di problemi complessi di meccanica delle terre e delle rocce, in quanto fatica a tenere conto di condizioni al contorno particolari e della non omogeneità del materiale. Per questo motivo sono state sviluppate ulteriori versioni basate su griglie quadrilatera irregolari (Perrone & Kao, 1975), tra le quali quella più significativa è l'approccio del Volume Finito (*Finite Volume Method - FVM*).

1.2.3 Il Finite Volume Method FVM

Il *Finite Volume Method* (FVM) si basa sull'approssimazione delle PDEs in forma integrale. Si considera un corpo Ω e lo si suddivide in un numero finito N di celle contigue di forma poliedrica arbitraria, chiamate *Control Volume* (CV) Ω_k , con confine Γ_k e di versore normale uscente n_i^k con $(k=1,2,\dots,N)$. Il confine Γ_k di CV è costituito da un numero (M^k) di elementi poligonali Γ_k^p con $(p=1,2,\dots,M^k)$ e vale la relazione (Jing, 2003):

$$\Gamma_k = \bigcup_{p=1}^{M^k} \Gamma_k^p \quad (1.3)$$

Applicando il teorema di Gauss, le equazioni di equilibrio di Navier-Cauchy in termini di tensioni possono essere riscritte in termini di spostamenti come segue:

$$\sum_{k=1}^N \left[\sum_{p=1}^{M^k} \int_{\Gamma_k^p} t_i^k \cdot d\Gamma + \int_{\Omega_k} f_i \cdot d\Omega \right] = \sum_{k=1}^N \left[\sum_{p=1}^{M^k} \int_{\Gamma_k^p} \sigma_{ij}^k \cdot n_j^p \cdot d\Gamma + F_x^k \right] = 0 \quad (1.4)$$

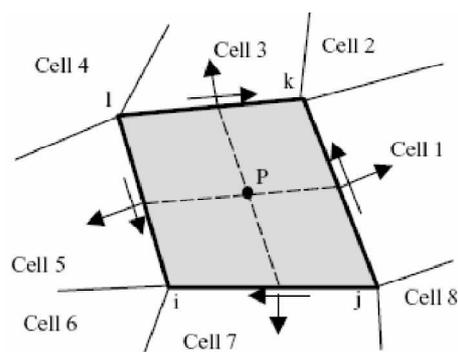
dove $F_i^k = \rho \cdot g_i \cdot V^k$ è il vettore delle forze applicato al centro del volume V^k di CV, ρ è la densità del materiale e g_i è il vettore delle accelerazioni.

Il metodo consiste nel formulare gli integrali dell'equazione precedente in termini di funzioni algebriche degli spostamenti nei nodi. Applicando tale formula alla cella P della griglia quadrilatera di figura 1.3, ad esempio, avente il centro nel nodo P quattro lati (ij, jk, kl, li) e quattro nodi (i, j, k, l) , circondata da otto celle vicine con centro I, J, \dots, O ; assumendo come variabili gli spostamenti dei centri delle zone, si ottiene (Jing, 2003):

$$A_p \cdot u_x^p + \sum_r A_r \cdot u_x^r + B_p \cdot u_y^p + \sum_r B_r \cdot u_y^r + F_x^K = 0 \quad (1.5)$$

$$C_p \cdot u_y^p + \sum_r C_r \cdot u_y^r + D_p \cdot u_x^p + \sum_r D_r \cdot u_x^r + F_y^K = 0 \quad (1.6)$$

dove $A_p, A_r, B_p, B_r, C_p, C_r, D_p, D_r$ sono coefficienti funzione della geometria della cella e delle proprietà elastiche del materiale, con $r=1,2,\dots,8$, percorrendo le otto celle circostanti adiacenti alla P .

FIGURA 1.3: GRIGLIA PER IL *FINITE VOLUME METHOD* (JING, 2003)

Il FVM è di tipo *cell-centred scheme* se si utilizzano come variabili gli spostamenti dei centri delle celle e di tipo *vertex-centered scheme* se invece si adottano gli spostamenti nodali.

Come sottolineato da Bailey (1995) e Fallah (2000), il *Finite Volume Method* presenta numerose somiglianze con il FEM tanto da essere considerato alla stregua di un ponte tra il FDM ed il FEM; permette infatti di superare la mancanza di flessibilità del FDM tradizionale nella modellazione di griglie irregolari, di condizioni al contorno complesse o di materiali disomogenei. Permangono comunque notevoli difficoltà nel simulare sistemi discontinui che non consentono la continuità tra punti vicini della mesh.

1.3 Il metodo degli elementi finiti FEM

1.3.1 I concetti di base

Il Metodo degli Elementi Finiti (*Finite Element Method* - FEM), proposto per la prima volta da Clough nel 1960, è uno dei procedimenti numerici più popolari nelle scienze ingegneristiche. Il concetto di base su cui si fonda è la schematizzazione di una struttura continua come un insieme di regioni di volume finito e forma semplice, che non si compenetrano, connesse tra loro in un numero finito di punti detti nodi. Si ipotizza inoltre che gli spostamenti di un punto interno ad un elemento siano funzioni degli spostamenti nodali tramite opportune funzioni del punto dette funzioni di spostamento (Brauer, 1988).

Il problema elastico del continuo considerato, la cui esatta formulazione conduce a sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali definiti da opportune condizioni

al contorno, viene così discretizzato e ricondotto in via approssimata alla soluzione di un sistema di equazioni lineari (Cesari, 2002).

Per compiere un'analisi FEM sono quindi necessari tre passaggi fondamentali:

- la discretizzazione del dominio: consiste nella suddivisione del dominio in un numero finito di elementi tra loro contigui, di forma regolare (triangoli, quadrilateri, ...), definiti da un numero fissato di nodi (figura 1.4);

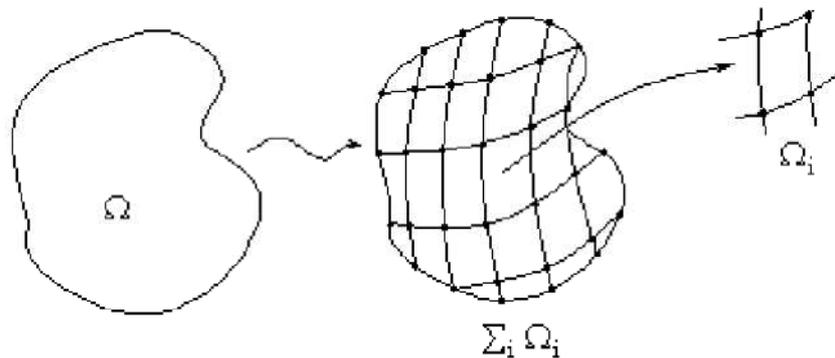


FIGURA 1.4: SUDDIVISIONE DEL DOMINIO DI INTEGRAZIONE Ω IN SOTTODOMINI Ω_i (JING, 2003)

- l'approssimazione locale: si ipotizza che la funzione incognita u_i^e (ad esempio lo spostamento) possa essere approssimata per ciascun elemento mediante una funzione nodale u_i^j che, dovendo soddisfare le PDEs, assume la forma (Cesari, 2002):

$$u_i^e = \sum_{j=1}^M N_{ij} \cdot u_i^j \quad (1.7)$$

dove i termini N_{ij} sono chiamate funzioni forma (o funzioni di interpolazione) ed M è il numero degli elementi. In questo modo è possibile legare gli spostamenti generici dentro all'elemento a quelli nodali. Le funzioni di forma hanno un ruolo importante poiché rappresentano il polinomio che approssima il valore esatto degli spostamenti e quindi determinano la convergenza del metodo;

- l'assemblaggio e la soluzione dell'equazione matriciale globale: usando le funzioni forma, le PDEs "originali" del problema sono sostituite da un sistema di equazioni algebriche che assumono la seguente forma (Cesari, 2002):

$$\sum_{i=1}^N [K_{ij}^e] \cdot \{u_i^e\} = \sum_{i=1}^N (f_i^e) \quad (1.8)$$

$$\text{oppure } [K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (1.9)$$

dove $[K_{ij}^e]$ è la matrice di rigidezza, $\{u_j^e\}$ è il vettore dei valori nodali della variabile incognita, ad esempio lo spostamento e $\{f_i^e\}$ è il vettore che contiene le forze interne all'elemento, che tiene conto delle condizioni iniziali e di quelle al contorno.

La matrice K è a bande ed è simmetrica.

1.3.2 Vantaggi e limiti del metodo FEM

La vasta diffusione del Metodo degli Elementi Finiti, testimoniata dall'ampia disponibilità di software di calcolo in commercio, è in gran parte legata alla sua flessibilità nel tener conto della disomogeneità dei materiali e della loro anisotropia, di condizioni al contorno anche complesse e di problemi dinamici.

La precisione ottenuta dipende principalmente dalla dimensione dell'intervallo di suddivisione utilizzato per la mesh: la riduzione che si ottiene sull'errore compiuto è proporzionale alla distanza reciproca tra i nodi della griglia, più sono ravvicinati i nodi migliore è la significatività dei risultati. Per questo motivo, per geometrie complesse si ricorre generalmente a mesh raffittite con passo non costante, che aumenta nelle zone di maggiore interesse (Cesari, 2002).

Lo svantaggio principale di questa tecnica numerica rimane la scarsa capacità di rappresentare il comportamento tenso-deformativo di sistemi soggetti a rottura in quanto, essendo un metodo al continuo, non ammette la separazione reciproca tra gli elementi infinitesimi. A tal proposito Goodman (1968), assumendo che le tensioni di contatto ed i relativi spostamenti lungo le fratture di spessore teorico nullo seguissero una relazione lineare con le rigidezze normale e tangenziale, propose un *element joint* che potesse essere direttamente incorporato in un processo FEM con un'equazione di equilibrio globale data da (figura 1.5):

$$k^G \cdot u^G = f^G \quad (1.10)$$

dove k^G è una matrice simmetrica i cui elementi sono definiti rispettivamente dalla rigidezza normale e tangenziale, dalla lunghezza dell'elemento e dal suo

orientamento rispetto al sistema di riferimento globale. Il vettore u^G è il vettore degli spostamenti nodali dei quattro nodi (i, j, k, l) che lo definiscono.

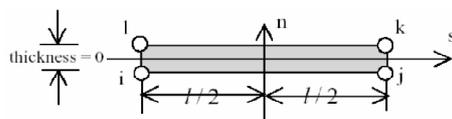


FIGURA 1.5: ELEMENT JOINT SECONDO GOODMAN (JING, 2003)

Per consentire il completo distacco dell'*element joint* da quelli adiacenti, caratteristica non ammessa nella formulazione di Goodman, Zienkiewicz (1970) propose una nuova tipologia di *element joint* a sei nodi, due dei quali aggiuntivi nella sezione di mezzeria (figura 1.6 a destra).

Nel 1973 Ghaboussi presentò inoltre un nuovo *element joint*, di spessore finito (t), basato sulla teoria della plasticità, ricorrendo agli spostamenti relativi tra le due facce opposte di una frattura come sistemi incogniti indipendenti (figura 1.6 a sinistra).

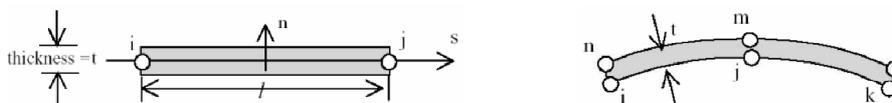


FIGURA 1.6: ELEMENT JOINT SECONDO GHABOUSSI (SINISTRA) E ZIENKIEWICZ (DESTRA) (JING, 2003)

Nonostante questi miglioramenti, lo studio delle fratture e dei loro meccanismi di propagazione resta ancor oggi il fattore maggiormente limitativo nell'applicazione del FEM allo studio della meccanica dei domini analizzati.

1.4 Il metodo degli elementi al contorno BEM

1.4.1 I concetti di base

Al contrario del FEM e del FDM, il Metodo degli Elementi di Contorno (*Boundary Element Method* – BEM) adotta una discretizzazione non su tutto il dominio ma solo sul contorno e ne determina una soluzione attraverso un'equazione integrale basata sui teoremi di Betti e di Somigliana. Per un dominio Ω con confine Γ avente versore normale uscente n_i e con forza applicata costante f_i l'equazione diventa:

$$c_{ij} \cdot u_j + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot u_j \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot t_j \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.11)$$

dove u_j e t_j sono i vettori spostamento sul contorno Γ , i termini u_{ij}^* e t_{ij}^* sono chiamati nuclei spostamento e c_{ij} è detto termine libero, determinato dalla geometria locale della superficie di confine ($c_{ij} = 1$ quando il punto è interno al dominio).

La risoluzione dell'equazione sopra descritta richiede i seguenti passi:

- discretizzazione del confine Γ con un numero finito di elementi di contorno: nei problemi 2D gli elementi sono segmenti di linea, che possono avere un nodo al centro dell'elemento (elemento costante), due nodi ai due estremi (elemento lineare) o tre nodi di cui due di estremità ed uno centrale (elemento quadratico). Definito con N il numero totale degli elementi di bordo si può scrivere:

$$c_{ij} \cdot u_j + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot u_j \cdot d\Gamma = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot t_j \cdot d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.12)$$

- approssimazione delle funzioni in prossimità degli elementi di bordo mediante funzioni di forma (N_k), analogamente a ciò che accade nel FEM. Le funzioni spostamento per i vari elementi sono espresse come la somma dei valori nodali:

$$u_i = \sum_{k=1}^m N_k u_i^k \quad (1.13)$$

$$t_i = \sum_{k=1}^m N_k t_i^k \quad (1.14)$$

dove m è l'ordine dell'elemento (1, 2 o 3 per i problemi 2D) ed u_i^k e t_i^k sono i valori degli spostamenti nodali nel nodo k .

Ponendo:

$$T_{ij} = \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot N_j \cdot d\Gamma \quad (1.15)$$

$$U_{ij} = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot N_j \cdot d\Gamma \quad (1.16)$$

$$B_i = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.17)$$

$$\text{L'equazione } c_{ij} \cdot u_j + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot u_j \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot t_j \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.18)$$

può essere scritta in forma matriciale come:

$$[T_{ij}(l, k)]\{u_j(k)\} = [U_{ij}(l, k)]\{t_j(k)\} + \{B_i(k)\} \quad (1.19)$$

dove $i, j = 1, 2$ per i problemi 2D e 1, 2, 3 per i problemi 3D, $l, k = 1, 2, \dots, N$ e

$$T_{ij}(l, k) = c_{ij} \cdot \delta_{l,k} + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot N_j \cdot d\Gamma \quad (1.20)$$

- valutazione degli integrali T_{ij} , U_{ij} e B_i ;
- imposizione delle condizioni al contorno ottenendo come forma finale della (1.19) l'equazione:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (1.21)$$

dove la matrice globale $[A]$ deriva da T_{ij} ed U_{ij} , il vettore incognito $\{x\}$ è costituito dagli spostamenti incogniti ed il vettore noto $\{b\}$ è la somma del vettore delle forze agenti sul corpo $\{B_i\}$ e dei prodotti di T_{ij} con gli spostamenti noti. L'equazione risultante, a differenza delle matrici sparse e simmetriche tipiche del FEM, è solitamente asimmetrica e fornisce i valori degli spostamenti incogniti nei nodi;

- valutazione degli spostamenti e delle tensioni all'interno del dominio in funzione di quelli nodali noti.

1.4.2 Vantaggi e limiti del metodo BEM

Il Metodo degli Elementi al Contorno comporta generalmente una riduzione della dimensione del modello computazionale rispetto al FEM o al FDM, in quanto richiede una discretizzazione solo sul contorno del dominio invece che su tutta la sua estensione. Grazie alla sua formulazione integrale diretta, a parità di livello di discretizzazione, il BEM fornisce una precisione dei risultati maggiore rispetto a quella ottenuta con tecniche FEM o FDM.

In generale, però, il BEM non è efficiente come il FEM nel tener conto dell'eterogeneità dei materiali, perché non è caratterizzato da tanti sottodomini quanti sono gli elementi infinitesimi del FEM. Inoltre non è funzionale quanto quest'ultimo nel simulare il comportamento non lineare dei materiali, motivo per cui è più adatto ad analizzare corpi elastici, lineari ed omogenei (Jing, 2003).

Analogamente agli altri metodi precedentemente esaminati anche il BEM manifesta qualche difficoltà nel simulare il comportamento tenso-deformativo di un sistema dotato di discontinuità.

Per superare questa difficoltà, sono state proposte diverse tecniche.

1. La prima, presentata da Blandford nel 1981, consiste nel dividere il dominio in sottodomini multipli con fratture lungo le interfacce ottenendo così diverse matrici di rigidezza nei vari sottodomini (figura 1.7 a). Tale tecnica richiede però la conoscenza del percorso compiuto dalla frattura e del suo gradiente di crescita e si applica con difficoltà a quei problemi che non presentano condizioni di simmetria geometrica.
2. Altrimenti è possibile utilizzare il Dual Boundary Element Method (DBEM), proposto da Portela nel 1993, il quale consiste nell'applicare separatamente l'equazione iniziale agli elementi che costituiscono le due facce opposte della frattura (figura 1.7 b).

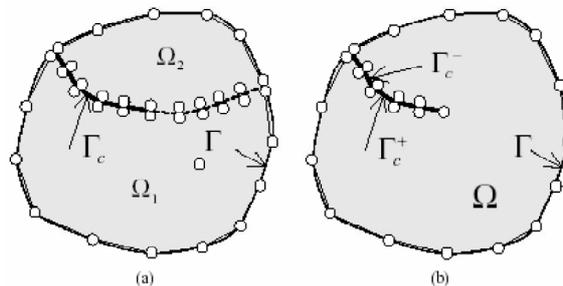


FIGURA 1.7: ANALISI DELLE DISCONTINUITÀ NEL BEM (JING, 2003)

1.5 Il metodo degli elementi discreti DEM

1.5.1 I concetti di base

Il Metodo degli Elementi Discreti (DEM) è relativamente nuovo se confrontato con quelli citati precedentemente; le sue origini risalgono al 1971 quando Cundall lo applicò ad un problema di meccanica delle rocce e al 1979 quando Cundall e Strack lo applicarono ad un'analisi del terreno.

Inizialmente questo metodo fu utilizzato per studiare il comportamento dei materiali granulari attraverso test matematici eseguiti su un campione contenente centinaia di particelle. Successivamente il complesso comportamento costitutivo dei materiali fu simulato associando ad ogni singolo contatto tra particelle un modello

costitutivo semplificato; la rigidità normale e tangenziale, l'attrito statico e scorrevole e la coesione interparticellare fanno parte dei più semplici modelli di contatto che si possono impiegare (You e Dai, 2007).

Il metodo DEM è un metodo discontinuo che schematizza il sistema come un insieme di corpi indipendenti che interagiscono tra loro attraverso i punti di reciproco contatto, i quali sono i responsabili della trasmissione delle forze all'interno del mezzo. L'interazione tra gli elementi è considerata come un processo dinamico che raggiunge l'equilibrio quando le sollecitazioni interne al sistema sono bilanciate. Le forze e gli spostamenti del mezzo si ricavano tracciando i movimenti dei singoli corpi che lo compongono, i quali sono il risultato della propagazione all'interno del terreno di cause di disturbo che hanno origine ai confini del modello (Choi, 1992).

In particolare, si applica la seconda legge di Newton agli elementi e la legge forza-spostamento ai punti di contatto. La prima è utilizzata per determinare il moto delle singole unità causato dalle sollecitazioni agenti su esse; la seconda serve per aggiornare le forze di contatto conseguenti (Jing, 2003).

Per ottenere una soluzione del modello DEM conforme alla realtà da simulare, cinque sono i passi fondamentali da seguire:

1. suddivisione del dominio del problema ed identificazione della tipologia di elementi con cui suddividere il sistema;
2. rappresentazione della deformazione dei singoli blocchi (che possono essere rigidi o deformabili);
3. sviluppo di un algoritmo per l'identificazione dei contatti;
4. formulazione delle equazioni del moto del sistema;
5. integrazione delle equazioni del moto ed aggiornamento dei contatti tra i blocchi, che variano in conseguenza dei movimenti e delle deformazioni cui è soggetto il sistema.

1.5.2 Vantaggi e limiti del metodo DEM

La differenza fondamentale tra il Metodo degli Elementi Discreti e quelli precedentemente citati risiede nel fatto che, mentre in questi ultimi i contatti fra unità elementari rimangono invariati indipendentemente dalla risposta del modello, nel DEM sono aggiornati ad ogni iterazione in base alla posizione ed al movimento relativo

dei singoli elementi. La definizione della mesh e dei modelli costitutivi dei materiali è sostituita dalla determinazione della distribuzione e delle dimensioni degli elementi che compongono il sistema e dalla descrizione del comportamento dei contatti (Calvetti, 2003). Nel DEM lo stato tensionale di partenza non può essere specificato in modo indipendente dalla distribuzione iniziale delle singole unità, dato che dalla loro posizione relativa dipendono le forze di contatto (Lin et al., 1997).

É inoltre possibile indagare l'evoluzione della risposta del sistema in condizioni di equilibrio stabile, equilibrio limite ed a rottura, oltre la quale, a differenza dei metodi al continuo, ammette la separazione del dominio in blocchi che continuano a risentire delle sollecitazioni agenti. Per questo motivo il DEM è particolarmente indicato per modellare fenomeni di interazione fra oggetti discreti soggetti a grandi deformazioni o a processi di frattura.

1.6 Le tipologie di DEM

In particolare sono disponibili tre tipologie del metodo in esame:

- il DEM esplicito, basato su una discretizzazione del sistema secondo uno schema FVM;
- il DEM implicito, detto anche *Discontinuous Deformation Analysis Method* (DDA), basato su una discretizzazione del sistema secondo uno schema FEM;
- il DEM particellare, il quale schematizza gli elementi che compongono il sistema come particelle rigide circolari; caratteristica che lo rende particolarmente indicato per la modellazione del comportamento dei materiali granulari.

1.6.1 Il DEM esplicito

Questo metodo si basa su una discretizzazione del sistema secondo uno schema FVM che rappresenta i singoli blocchi componenti il dominio come poligoni concavi o convessi suddivisi in un numero finito di triangoli in 2D e di tetraedri in 3D (figura 1.8).

Per la rappresentazione delle deformazioni si ricorre ad una formulazione Lagrangiana esplicita, mentre i contatti sono determinati cinematicamente sulla base della più piccola distanza tra due blocchi contigui.

Il comportamento dinamico del sistema è rappresentato numericamente attraverso un algoritmo che procede per step successivi durante i quali le velocità e le

accelerazioni sono assunte costanti. Il DEM ipotizza che ogni time-step sia tanto piccolo che al suo interno le perturbazioni possano propagarsi soltanto da una particella a quelle immediatamente vicine.

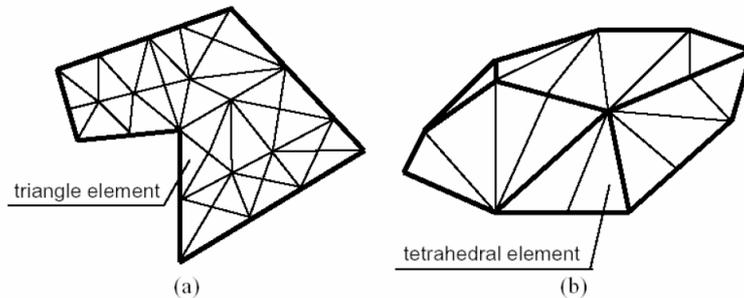


FIGURA 1.8: SCHEMATIZZAZIONE DELLA MESH PREVISTA DAL DEM IN 2D (A) E 3D (B) (JING, 2003)

In ogni istante le forze risultanti su un qualsiasi elemento sono determinate esclusivamente dalla sua interazione con quelli cui è a contatto. La velocità di propagazione dipende dalle proprietà fisiche del mezzo discreto considerato.

L'interazione tra due blocchi è schematizzata attraverso:

- un modello di rigidità che fornisce una relazione tra la forza di contatto ed il relativo spostamento (figura 1.9):

$$F_n = k_n \cdot U_n \tag{1.22}$$

$$F_t = -k_t \cdot U_t \tag{1.23}$$

dove F_n è la forza di contatto in direzione normale, F_t è la forza di contatto in direzione tangenziale, k_n è la rigidità normale, k_t è la rigidità tangenziale, U_n è lo spostamento totale in direzione normale al piano di contatto fra due particelle e U_t è lo spostamento totale in direzione tangenziale al piano di contatto fra due particelle.

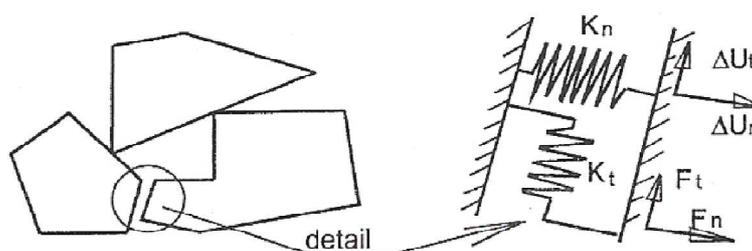


FIGURA 1.9: DEFINIZIONE DEI CONTATTI NEL DEM ESPlicito (JING, 2003)

- un modello di slittamento che è una proprietà intrinseca delle entità a contatto. La condizione di slittamento si ha quando la componente tangenziale della forza (F_t^i) eguaglia il valore massimo ammissibile della forza di contatto tangenziale (F_t^{\max}). Questo valore è dato dal coefficiente di attrito minimo tra le entità a contatto (μ) moltiplicato per il modulo della componente normale di compressione della forza (F_n^i).

La condizione di slittamento si può quindi esprimere come (figura 1.10):

$$F_t^i \geq F_t^{\max} = \mu \cdot |F_n^i| \quad (1.24)$$

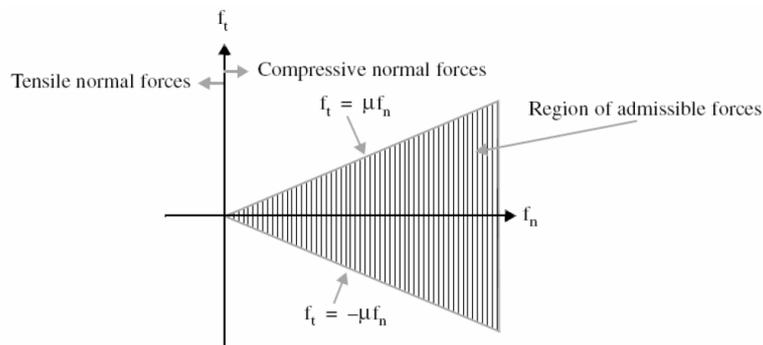


FIGURA 1.10: MODELLO DI SLITTAMENTO (KRUYT, 1993)

- un modello di contatto, che a seconda del comportamento lungo la direzione normale al moto può essere di tipo (Cundall et al., 1992):
 - *soft contact*, se caratterizzato da un valore finito della rigidità normale. Si assume che la forza di contatto sia nulla nel punto di intersezione iniziale dei due corpi e poi proporzionale agli spostamenti dei contatti stessi. Le forze di contatto quindi si generano in seguito alla compenetrazione dei due elementi adiacenti;
 - *hard contact*, se non ammette la compenetrazione tra particelle vicine.

La scelta del tipo di modello da adottare deve essere effettuata sulla base di considerazioni fisiche piuttosto che numeriche. È possibile infatti che uno stesso sistema espliciti diversi comportamenti a seconda delle circostanze (Cundall, 1988): se è caratterizzato da un coefficiente di attrito quasi nullo e da un livello tensionale molto basso, è preferibile una schematizzazione *soft contact*; in caso contrario si addice maggiormente uno schema *hard contact*.

Per integrare le equazioni del moto si ricorre a uno schema esplicito alle differenze centrali in opposizione all'approccio implicito usato negli altri metodi numerici al continuo. Le variabili incognite (forze di contatto) di ciascun blocco sono determinate localmente ad ogni *time step* a partire da quelle note degli elementi immediatamente vicini (Hart et al., 1988).

Considerando il blocco *i*-esimo del sistema, la seconda legge di Newton può essere scritta nella forma (Jing, 2003):

$$\frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{F}{m} \quad (1.25)$$

dove \dot{u} è la velocità, t è il tempo, m è la massa del blocco e F sono le forze applicate all'elemento.

Applicando uno schema esplicito alle differenze centrali il primo termine dell'equazione precedente diventa:

$$\frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{\dot{u}^{(t+\Delta t/2)} - \dot{u}^{(t-\Delta t/2)}}{\Delta t} \quad (1.26)$$

Sostituendo tale equazione nella (1.25) si ottiene:

$$\dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} = \dot{u}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left[g_i + \frac{\sum F_i^{(t)}}{m} \right] \cdot \Delta t \quad (1.27)$$

dove \dot{u}_i è la velocità del blocco *i*-esimo, g_i è l'accelerazione di gravità, m è la massa del blocco e F_i è la forza risultante applicata all'elemento.

Analogamente in termini di velocità angolari si ottiene:

$$\dot{\theta}_i^{(t+\Delta t/2)} = \dot{\theta}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left[g_i + \frac{\sum M_i^{(t)}}{I} \right] \cdot \Delta t \quad (1.28)$$

dove $\dot{\theta}_i$ è la velocità angolare del blocco *i*-esimo, I è il momento d'inerzia dell'elemento e M_i è il momento risultante applicato all'elemento.

Le velocità così calcolate permettono di aggiornare gli spostamenti (u_i) e la rotazione (θ_i) del blocco:

$$u_i^{(t+\Delta t)} = u_i^{(t)} + \dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} \cdot \Delta t \quad (1.29)$$

$$\theta_i^{(t+\Delta t)} = \theta_i^{(t)} + \dot{\theta}_i^{(t+\Delta t/2)} \cdot \Delta t \quad (1.30)$$

1.6.2 Il DEM implicito: il DDA

Il *Discontinuous Deformation Analysis Method* (DDA), proposto nel 1985 da Shi e Goodman, si origina da un algoritmo di *back analysis* finalizzato alla determinazione della migliore approssimazione della configurazione deformata di un sistema di blocchi a partire da spostamenti e deformazioni note; esso si fonda sulla minimizzazione dell'energia totale dell'insieme di elementi in reciproca interazione (Cravero et al, 2003).

La prima formulazione ricorreva ad una semplice rappresentazione del moto e delle deformazioni dei blocchi con sei variabili base (tre relative al moto del corpo rigido e tre di deformazione costante) poco adatta per blocchi di forma irregolare. Lo sviluppo fondamentale si è avuto con l'introduzione della discretizzazione in elementi FEM la quale prevede la schematizzazione di ogni singolo elemento discreto in elementi finiti (Cheng et al., 1998 e 2002).

Dalla seconda legge della termodinamica un sistema soggetto a carichi esterni e/o interni si muove o si deforma nella direzione che produce il minimo dell'energia totale (E), la quale è pari alla somma dell'energia potenziale (U), di quella cinetica (K) e di quella dissipata (W) secondo la formula (Jing, 1998):

$$E = U + K - W \quad (1.31)$$

Minimizzando la formula rispetto allo spostamento (d) si ricava l'equazione del moto del blocco corrispondente (Jing, 1998):

$$\frac{\partial E}{\partial d} = \frac{\partial U + \partial K - \partial W}{\partial d} = 0 \quad (1.32)$$

Svolgendo lo stesso procedimento per tutti gli elementi del dominio, si ottiene un sistema di equazioni algebriche da risolvere secondo la tecnica FEM. Considerando un dominio costituito da N blocchi, aventi ognuno m_i nodi ($i = 1, 2, \dots, N$) dotati di una componente di spostamento normale (u) e tangenziale (v), ad esempio, indicando con $m_1 + m_2 + \dots + m_N = M$ il numero totale di nodi, la minimizzazione dell'energia totale produce un sistema di $2M \times 2M$ equazioni schematizzabili in forma matriciale come di seguito indicato (Langston et al., 2004):

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & k_{N2} & k_{N3} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_N \end{Bmatrix} \text{ oppure } [K] \cdot \{D\} = \{F\} \quad (1.33)$$

dove $[K]$ è la matrice di rigidità del sistema, $\{D\}$ è la matrice dei vettori spostamento degli N blocchi e $\{F\}$ è la matrice delle forze risultanti agenti sul sistema.

Per rappresentare ed aggiornare i contatti si utilizzano dei modelli di slittamento e rigidità analogamente a quanto previsto dal DEM esplicito (Ke et al., 1995).

1.6.3 Il DEM particellare

1.6.3.1 Il ciclo di calcolo

Il Metodo degli Elementi Distinti Particellari, proposto da Cundall e Strack nel 1979, si basa su principi analoghi a quelli del DEM tradizionale, a differenza del quale schematizza i blocchi costituenti il sistema come particelle rigide di forma circolare. Grazie a quest'ultima caratteristica si propone come una valida metodologia per lo studio del comportamento tenso-deformativo dei materiali granulari.

L'algoritmo di calcolo richiede ad ogni ciclo l'aggiornamento dei contatti in base alla posizione ed al movimento relativo delle particelle (figura 1.11). Ad ogni contatto è applicata la legge forza-spostamento al fine di valutarne l'entità delle forze. A ciascun elemento invece è applicata la seconda legge di Newton per determinarne la velocità e la posizione sulla base delle forze e dei momenti applicati (Cook et al., 2002).

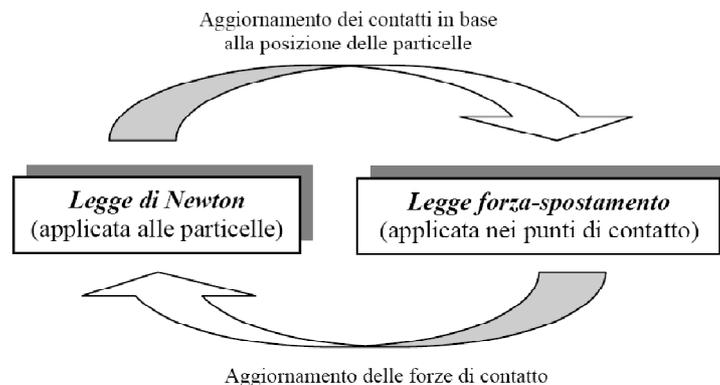


FIGURA 1.11: CICLO DI CALCOLO DEL DEM PARTICELLARE (ITASCA, 2002)

Per illustrare come sono determinate forze e spostamenti durante un ciclo di calcolo, si esamini il caso riportato in figura 1.12 a, utilizzato da Cundall e Strack per spiegare i principi basilari del metodo. Si considerino due dischi, privi di peso, indicati con x e y, schiacciati tra due pareti rigide in movimento l'una verso l'altra con velocità costante v .

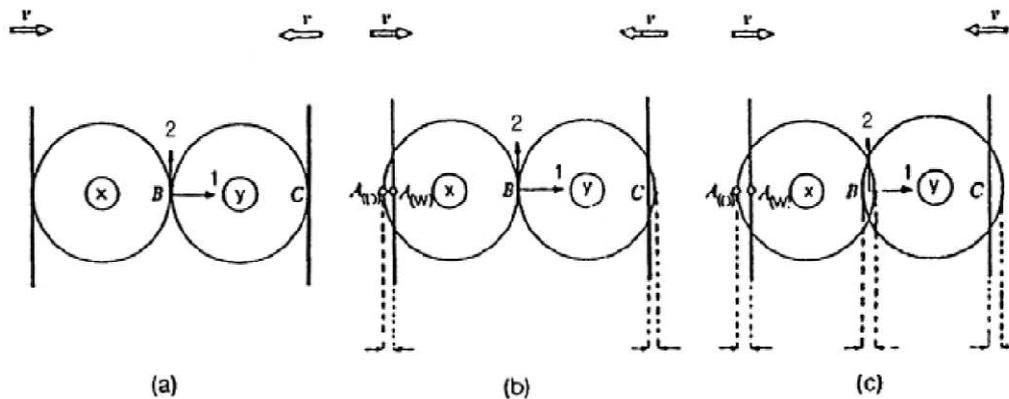


FIGURA 1.12: DISCHI COMPRESI TRA LE PARETI RIGIDE (CUNDALL E STRACK, 1979)

Inizialmente, al tempo $t = t_0$, le pareti ed i dischi entrano in contatto, ma non nasce alcuna forza. Dopo un intervallo di tempo Δt , le pareti si sono spostate verso l'interno di una quantità pari a $v\Delta t$. Ipotizzando che le perturbazioni non possano propagarsi oltre un singolo disco durante ciascun intervallo di tempo, si assume che entrambi i dischi mantengano la loro posizione iniziale durante l'intervallo di tempo tra $t = t_0$ e $t = t_0 + \Delta t$. La sovrapposizione si verificherà quindi all'istante $t_1 = t_0 + \Delta t$ nei punti di contatto A e C e la sua entità sarà pari a $\Delta n = v \cdot \Delta t$ (figura 1.12 b).

I punti $A_{(D)}$ e $A_{(W)}$ sono rispettivamente i punti del disco e della parete che giacciono sulla linea perpendicolare alla stessa e passante per il centro del muro; il contatto A è definito come il punto mediano tra $A_{(D)}$ e $A_{(W)}$. Con $(\Delta n_{(A)})_{t_1}$ si indica lo spostamento relativo di $A_{(D)}$ rispetto al punto $A_{(W)}$ che si verifica in un singolo incremento di tempo.

Gli spostamenti relativi che si hanno nei punti di contatto A e C al tempo $t_1 = t_0 + \Delta t$ sono inseriti nella legge forza-spostamento per il calcolo delle forze di contatto:

$$\Delta F_n = k_n \cdot (\Delta n)_{t_1} = k_n \cdot v \cdot \Delta t \quad (1.34)$$

dove k_n è la rigidità normale e ΔF_n rappresenta l'incremento della forza normale.

Definendo positiva la direzione 1 che va dal disco x al disco y (figura 1.12 b), le risultanti delle forze $F_{(x)1}$ e $F_{(y)1}$ per i dischi x ed y al tempo $t_1 = t_0 + \Delta t$ saranno:

$$F_{(x)1} = k_n \cdot (\Delta_n)_{t1} \quad (1.35)$$

$$F_{(y)1} = -k_n \cdot (\Delta_n)_{t1} \quad (1.36)$$

Queste forze sono utilizzate per determinare le nuove accelerazioni facendo ricorso alla seconda legge di Newton:

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_{(x)1}}{m_{(x)}} \quad (1.37)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{F_{(y)1}}{m_{(y)}} \quad (1.38)$$

dove \ddot{x}_1 ed \ddot{y}_1 indicano le accelerazioni dei dischi x ed y nella direzione 1 ed $m_{(x)}$ e $m_{(y)}$ le rispettive masse.

Le accelerazioni così trovate sono assunte costanti nell'intervallo di tempo da $t_1 = t_0 + \Delta t$ a $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ e possono essere integrate in modo tale da ricavare le velocità:

$$[\dot{x}_1] = \left[\frac{F_{(x)1}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.39)$$

$$[\dot{y}_1] = \left[\frac{F_{(y)1}}{m_{(y)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.40)$$

Gli incrementi di spostamento relativo nei contatti A, B e C all'istante $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ si determinano attraverso le seguenti relazioni:

$$(\Delta n_{(A)})_{t2} = \left\{ v - \left[\frac{F_{(x)1}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \right\} \cdot \Delta t \quad (1.41)$$

$$(\Delta n_{(B)})_{t2} = \left\{ \left[\frac{F_{(x)1}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t - \left[\frac{F_{(y)1}}{m_{(y)}} \right] \cdot \Delta t \right\} \cdot \Delta t \quad (1.42)$$

$$(\Delta n_{(C)})_{t2} = \left\{ \left[\frac{F_{(y)1}}{m_{(y)}} \right] \cdot \Delta t - [-v] \right\} \cdot \Delta t \quad (1.43)$$

dove $\Delta n_{(A)}$, $\Delta n_{(B)}$ e $\Delta n_{(C)}$ sono considerati positivi se di compressione.

Il ciclo di calcolo prevede dapprima l'applicazione della legge forza-spostamento a tutti i contatti di ogni elemento, al fine di determinarne la forza risultante. In questo modo attraverso la seconda legge di Newton si calcolano prima le nuove accelerazioni, poi di nuovo gli spostamenti dei singoli dischi.

1.6.3.2 La legge forza-spostamento

La legge forza-spostamento, come anticipato, è applicata ai punti di contatto allo scopo di determinare le forze di contatto derivanti dai rispettivi spostamenti.

Si considerino i due dischi x ed y di figura 1.13 in contatto reciproco. Le coordinate dei centri si indicano con $x_i = (x_1, x_2)$ ed $y_i = (y_1, y_2)$, dove gli indici 1 e 2 si riferiscono agli assi del sistema di riferimento cartesiano rappresentato in figura. Le componenti dei vettori velocità dei due dischi sono rispettivamente $\dot{x}_i = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ ed $\dot{y}_i = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$, mentre le velocità angolari sono $\dot{\theta}_{(x)}$ e $\dot{\theta}_{(y)}$, considerate positive se antiorarie. I punti $P_{(x)}$ e $P_{(y)}$ sono definiti come i punti per intersezione della linea che collega i centri dei dischi x ed y i quali hanno raggio pari a $R_{(x)}$ e $R_{(y)}$ e masse pari ad $m_{(x)}$ e $m_{(y)}$.

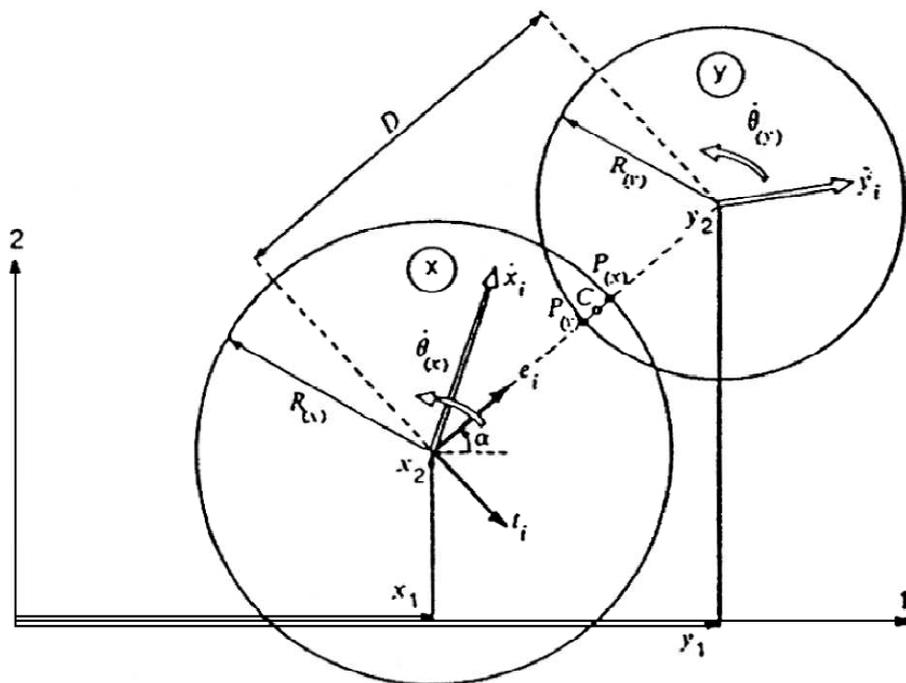


FIGURA 1.13: LEGGE FORZA-SPOSTAMENTO (CUNDALL E STRACK, 1979)

Due dischi si considerano in contatto solo se la distanza D tra i loro centri risulta essere minore della somma dei loro raggi:

$$D < R_{(x)} + R_{(y)} \quad (1.44)$$

Se si verifica questa condizione, lo spostamento relativo del punto di contatto C si determina integrando la velocità relativa, definita come la velocità del punto $P_{(x)}$ rispetto al punto $P_{(y)}$.

Si introducono il versore normale $e_i = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ con direzione che va dal centro del disco x al centro del disco y , tale che:

$$e_i = \frac{y_i - x_i}{D} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (1.45)$$

ed il versore tangenziale t_i ottenuto attraverso una rotazione di 90° di e_i :

$$t_i = (e_2 - e_1) \quad (1.46)$$

La velocità relativa \dot{X}_i del punto $P_{(x)}$ rispetto a $P_{(y)}$ può essere espressa come:

$$\dot{X}_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) - (\dot{\theta}_{(x)} R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} R_{(y)}) \cdot t_i \quad (1.47)$$

Le componenti normali (\dot{n}) e tangenziali (\dot{s}) delle velocità relative si calcolano come le proiezioni di \dot{X}_i rispettivamente lungo e_i e t_i :

$$\dot{n} = \dot{X}_i \cdot e_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \cdot t_i \cdot e_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i \quad (1.48)$$

$$\dot{s} = \dot{X}_i \cdot t_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \cdot t_i \cdot t_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \quad (1.49)$$

L'integrazione rispetto al tempo della componente della velocità relativa fornisce le componenti Δn e Δs dell'incremento dello spostamento relativo:

$$\Delta n = (\dot{n}) \cdot \Delta t = \{(\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i\} \cdot \Delta t \quad (1.50)$$

$$\Delta s = (\dot{s}) \cdot \Delta t = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \cdot \Delta t \quad (1.51)$$

Questi incrementi di spostamento relativo sono utilizzati nella legge forza-spostamento con lo scopo di calcolare gli incrementi delle forze normali e tangenziali ΔF_n e ΔF_s :

$$\Delta F_n = k_n \cdot (\Delta n) = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i \cdot k_n \cdot \Delta t \quad (1.52)$$

$$\Delta F_s = k_s \cdot \Delta s = k_s \cdot \{(\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)})\} \cdot \Delta t \quad (1.53)$$

dove k_n e k_s rappresentano rispettivamente le rigidzze normale e tangenziale.

ΔF_n e ΔF_s sono aggiunti ad ogni intervallo di tempo alla somma di tutti gli incrementi delle forze determinati nei precedenti intervalli:

$$(F_n)_N = (F_n)_{N-1} + \Delta F_n \quad (1.54)$$

$$(F_s)_N = (F_s)_{N-1} + \Delta F_s \quad (1.55)$$

dove gli indici N e $N-1$ si riferiscono ai tempi t_N e t_{N-1} , di modo che $t_N - t_{N-1} = \Delta t$.

F_n e F_s sono considerate positive se dirette in verso opposto ai versori e_i e t_i (figura 1.14).

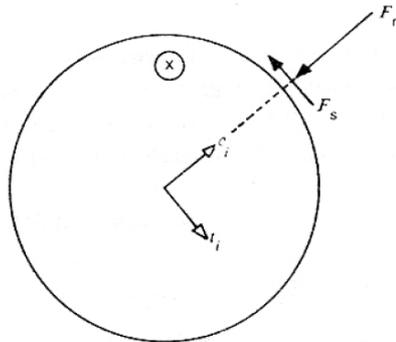


FIGURA 1.14: CONVENZIONI SUI SEGNI DI FN E FS (CUNDALL E STRACK, 1979)

Per quanto riguarda lo scorrimento tra i due dischi, l'entità della forza tangenziale F_s sopra calcolata è confrontata con il valore massimo ammissibile $(F_s)_{\max}$ definito come:

$$(F_s)_{\max} = F_n \cdot \tan \phi_\mu + c \quad (1.56)$$

dove ϕ_μ è il più piccolo angolo di attrito dei due dischi a contatto e c la coesione.

Una volta determinate le forze normali e tangenziali per ciascun contatto di un disco, per esempio quello x , esse vengono scomposte nelle due componenti lungo le direzioni 1 e 2. La somma di tali componenti fornisce le forze risultanti $\sum F_{(x)1}$ e $\sum F_{(x)2}$.

Il momento risultante agente sul disco x , $\sum M_{(x)}$, è considerato positivo se agisce in senso antiorario ed è dato da:

$$\sum M_{(x)} = \sum F_s \cdot R_{(x)} \quad (1.57)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i contatti del disco.

Le forze ed i momenti risultanti agenti sul disco x sono successivamente inseriti nella seconda legge di Newton allo scopo di determinare le nuove accelerazioni \ddot{x}_i e $\ddot{\theta}_{(x)}$.

1.6.3.3 Le equazioni del moto

Le velocità \dot{x}_i e $\dot{\theta}_{(x)}$ riportate nelle equazioni si valutano, come indicato da Cundall e Strack, , assumendo che la risultante della forza e del momento al tempo t_N agisca sul disco x nell'intervallo Δt da $t_{N-1/2}$ a $t_{N+1/2}$. La seconda legge di Newton applicata al disco x diventa:

$$m_{(x)} \cdot \ddot{x}_i = \sum F_{(x)i} \quad (1.58)$$

$$I_{(x)} \cdot \ddot{\theta}_{(x)} = \sum M_{(x)} \quad (1.59)$$

dove $I_{(x)}$ rappresenta il momento di inerzia del disco x .

Considerando \ddot{x}_i e $\ddot{\theta}_{(x)}$ costanti nell'intervallo di tempo Δt , dalle equazioni precedenti si ricavano le seguenti espressioni delle velocità:

$$(\dot{x}_i)_{N+1/2} = (\dot{x}_i)_{N-1/2} + \left[\sum \frac{F_{(x)i}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.60)$$

$$(\dot{\theta}_{(x)})_{N+1/2} = (\dot{\theta}_{(x)})_{N-1/2} + \left[\sum \frac{M_{(x)i}}{I_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.61)$$

Queste equazioni sono applicate alla rotazione ad ogni disco; i valori delle velocità così ottenuti possono essere inseriti nella legge forza-spostamento ed il ciclo può essere ripetuto per un nuovo incremento di tempo.

I nuovi valori delle velocità sono utilizzati anche per aggiornare le posizioni e le rotazioni dei dischi per mezzo di un'ulteriore integrazione numerica:

$$(x_i)_{N+1} = (x_i)_N + (\dot{x}_i)_{N+1/2} \cdot \Delta t \quad (1.62)$$

$$(\theta_{(x)})_{N+1} = (\theta_{(x)})_N + (\dot{\theta}_{(x)})_{N+1/2} \cdot \Delta t \quad (1.63)$$

Nel modello possono essere incorporate anche forze di massa, come ad esempio quelle gravitazionali. In tal caso si aggiunge il termine $m_{(x)} \cdot g_i$ alla sommatoria delle forze $\sum F_{(x)i}$ che compare nell'equazione della velocità, dove $g_i = (g_1, g_2)$ rappresenta le due componenti del vettore accelerazione dovute alla forza di massa.

1.6.3.4 La legge dello smorzamento

Lo smorzamento entra in gioco durante lo slittamento tra due dischi quando il valore della forza tangenziale in corrispondenza di ogni contatto risulta pari ad $(F_s)_{\max}$.

Tenendo conto dell'effetto dello smorzamento le equazioni della velocità diventano:

$$(\dot{x}_i)_{N+1/2} = (\dot{x}_i)_{N-1/2} + \left\{ \sum \frac{[F_{(x)i} + D_{(x)i}]}{m_{(x)}} \right\}_N \cdot \Delta t \quad (1.64)$$

$$(\dot{\theta}_{(x)})_{N+1/2} = (\dot{\theta}_{(x)})_{N-1/2} + \left\{ \sum \frac{M_{(x)}}{I_{(x)}} \right\}_N \cdot \Delta t \quad (1.65)$$

dove $\sum D_{(x)i}$ rappresenta la somma delle componenti delle forze di smorzamento. Per valutarla si considerano le componenti normale (D_n) e tangenziale (D_s) come segue:

$$(D_n)_N = c_n \cdot \dot{n} = c_n \cdot [\dot{x}_i - \dot{y}_i]_{N-1/2} \cdot e_i \quad (1.66)$$

$$(D_s)_N = c_s \cdot \dot{s} = c_s \cdot \left[(\dot{x}_i - \dot{y}_i)_{N-1/2} \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)})_{N-1/2} \right] \quad (1.67)$$

dove i coefficienti di smorzamento in direzione normale (c_n) e tangenziale (c_s) si assumono proporzionali alle rigidità k_n e k_s con β costante:

$$c_n = \beta \cdot k_n \quad (1.68)$$

$$c_s = \beta \cdot k_s \quad (1.69)$$

La valutazione dei coefficienti di smorzamento rappresenta una delle maggiori difficoltà del metodo.

1.6.3.5 L'intervallo di tempo critico

Il Metodo degli Elementi Distinti Particellari integra le equazioni del moto utilizzando uno schema alle differenze finite; la soluzione così calcolata risulta stabile

solo se l'intervallo di tempo Δt non supera il valore critico. Per la sua determinazione si considera un sistema ad una dimensione composto da una massa (m) e da una molla di rigidezza k (figura 1.15).

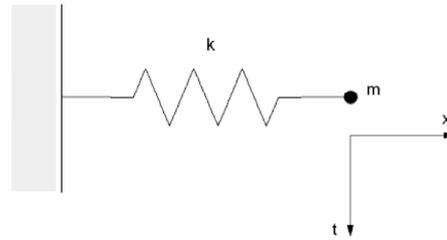


FIGURA 1.15: SISTEMA COMPOSTO DA MASSA E MOLLA (CUNDALL E STRACK, 1979)

Il moto del punto in cui si concentra la massa è governato dalla seguente equazione differenziale:

$$-kx = m\ddot{x} \quad (1.70)$$

Indicando con T il periodo del sistema, l'intervallo di tempo critico (t_{crit}) diventa:

$$t_{crit} = \frac{T}{\pi} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}}{\pi} \quad (1.71)$$

Si consideri ora una serie infinita di masse e di molle (figura 1.16 a). Il più piccolo periodo di questo sistema si avrà quando le masse si muovono in sincronia opponendosi al moto, in modo da evitare il movimento nel centro di ogni molla.

Il moto di ogni singolo punto in cui si suppongono concentrate le masse può essere descritto attraverso i due sistemi equivalenti di figura 1.16 b che caratterizzano il moto di traslazione. L'intervallo di tempo critico per questo sistema sarà:

$$t_{crit} = 2\sqrt{\frac{m}{4k}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.72)$$

Il moto di rotazione è caratterizzato dagli stessi due sistemi di figura 1.16 b nei quali si inserisce al posto di m e di k rispettivamente il momento d'inerzia I di una particella di dimensioni finite e la sua rigidezza alla rotazione (k_{rotaz}). Le equazioni generali dell'intervallo di tempo critico diventano:

$$t_{crit} = \sqrt{\frac{m}{k_{trasl}}} \quad (\text{moto di traslazione}) \quad (1.73)$$

$$t_{crit} = \sqrt{\frac{I}{k_{rotaz}}} \quad (\text{moto di rotazione}) \quad (1.74)$$

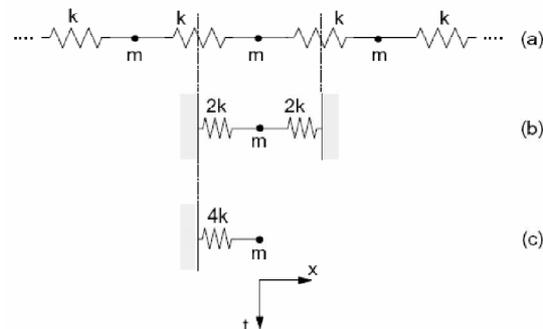


FIGURA 1.16: SISTEMA MULTIPLO DI MASSE E MOLLE (CUNDALL E STRACK, 1979)

1.6.3.6 Vantaggi e limiti del DEM particellare

La discretizzazione di un sistema in particelle circolari adottata nel Metodo degli Elementi Distinti Particellari può apparire una schematizzazione semplicistica rispetto a quella a blocchi di forma irregolare prevista dal DEM tradizionale. In realtà questa caratteristica rappresenta la maggiore potenzialità di questa tecnica rispetto agli altri procedimenti DEM, in quanto la rende particolarmente indicata per la modellazione dei materiali granulari, il cui comportamento è fortemente condizionato dalla natura delle singole particelle che lo compongono (Masson et al., 2003; Asmar et al., 2002; Issa et al., 1992).

Risulta quindi possibile considerare il suo carattere discreto attraverso un approccio di tipo microscopico, così da comprendere i processi fisici di base che ne determinano la risposta tenso-deformativa macroscopica.

LA MODELLAZIONE DEM DEL CONGLOMERATO

BITUMINOSO

2.1 Introduzione

Il conglomerato bituminoso è un materiale multifase composto da una miscela di aggregati di varia granulometria legati da bitume, contenente una certa quantità di vuoti d'aria (figura 2.1).

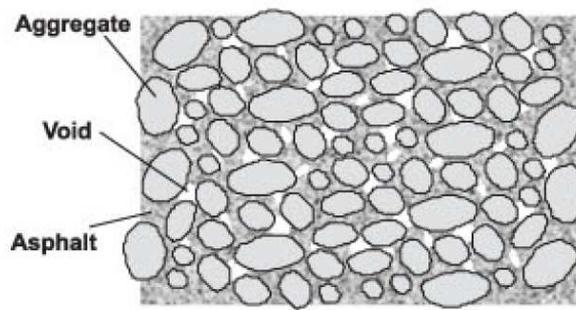


FIGURA 2.1: COMPOSIZIONE DEL CONGLOMERATO BITUMINOSO (YOU E DAI, 2007)

Il conglomerato bituminoso è quindi un materiale eterogeneo, il cui comportamento meccanico è fortemente influenzato dalle proprietà delle fasi che lo costituiscono; in particolare dalle caratteristiche dell'aggregato (forma, tessitura superficiale, struttura dello scheletro, modulo, etc.), dalle proprietà del bitume (modulo complesso, coesione, etc.) e dalle loro reciproche interazioni (adesione, assorbimento, interazioni fisico-chimiche).

L'aggregato è un materiale che possiede molteplici forme, tessiture superficiali e orientamenti, senza dimenticare che in una miscela tipica la dimensione dell'aggregato varia da un minimo di 0.075 mm ad un massimo di 37.5 mm. Il bitume è anch'esso un materiale con proprietà complesse che dipendono dalla temperatura e dalla frequenza di carico; la struttura del conglomerato bituminoso è quindi molto articolata, il che rende la previsione delle prestazioni, quali rigidità e resistenza a trazione un problema altrettanto difficile. Impiegando qualche semplificazione è comunque

possibile costruire modelli matematici che permettano un'adeguata approssimazione delle proprietà fisiche del conglomerato.

Negli anni molti ricercatori hanno sviluppato modelli microscopici che prevedono le proprietà fondamentali delle miscele basandosi su quelle delle fasi costituenti.

La figura 2.2 illustra uno schema semplificato di una modellazione micromeccanica del conglomerato bituminoso e delle pavimentazioni stradali.

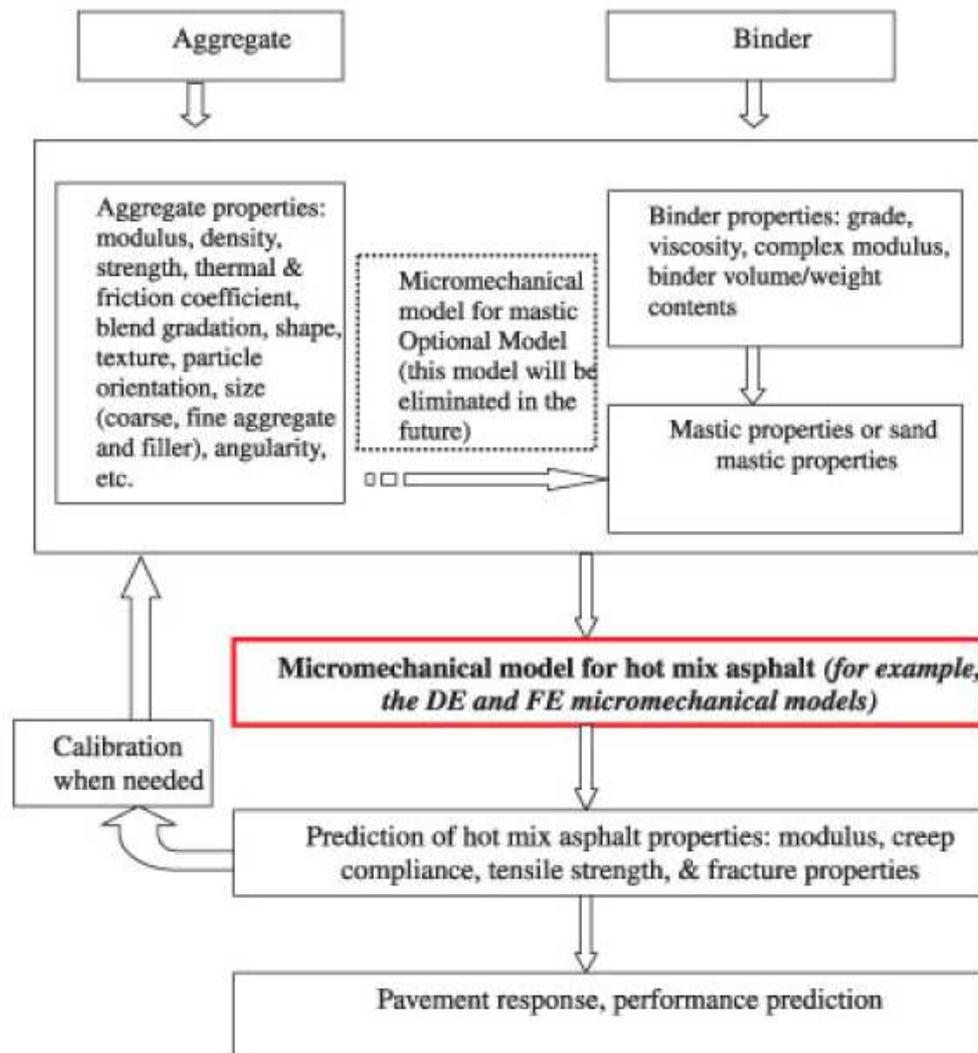


FIGURA 2.2: SCHEMATIZZAZIONE DELL'APPROCCIO MICROMECCANICO PER IL C.B.

(YOU E DAI, 2007)

Tale approccio permette il calcolo delle proprietà del materiale in esame, quali modulo di resistenza, resistenza al creep, resistenza a trazione e proprietà a rottura. Infine è anche possibile prevedere la risposta deformativa e le prestazioni della pavimentazione stradale nel suo complesso.

Buttlar and You (2001) classificarono i differenti modelli micromeccanici in diverse categorie: modelli che non prevedevano l'interazione tra le particelle e modelli che al contrario la prevedevano, modelli empirici, modelli agli elementi finiti e discreti.

Si procede quindi con una breve trattazione riguardante i modelli noti in letteratura adatti alla simulazione del comportamento del conglomerato bituminoso.

2.2 I modelli di simulazione bidimensionali

Il comportamento meccanico del conglomerato è determinato dalla mutua interazione fra le varie fasi eterogenee che lo compongono. Tuttavia, anche nei metodi di calcolo più evoluti, questo materiale è schematizzato mediante uno strato di caratteristiche omogenee equivalenti.

Solo recentemente l'utilizzo della micromeccanica è stato oggetto di crescente interesse in quanto offre la possibilità di prevedere accuratamente il comportamento a rottura del conglomerato bituminoso e relazionarlo a particolari parametri quali le proprietà del bitume, la granulometria dell'aggregato e il grado di compattazione (Dai et al., 2005).

La figura 2.3 riporta un breve schema riassuntivo dei modelli elaborati in letteratura e dei rispettivi autori.

Tali modelli posseggono il beneficio di ridurre o addirittura eliminare costosi test di caratterizzazione del conglomerato per il progetto di pavimentazioni stradali.

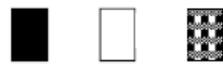
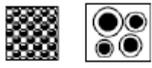
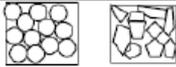
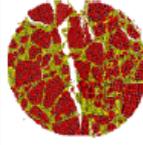
Model Category and Schematic(s)		Sample of Related Literature	
		Model Developers	Applications to Asphalt Mastics and Mixtures
Non-interacting particles, geometry not specified		Einstein [1] Hashin [2]	Schapery and Lytton [3] Buttlar and Roque [4,5]
Non-interacting particles, geometry specified		Hashin and Shtrikman [6] Christensen and Lo [7]	Buttlar and Roque [4,5] Buttlar et al. [8] Shashidhar and Shenoy [9]
Particle interaction allowed	Simplified geometry specification 	FEM	Chang and Meegoda [14,15] Rothenburg et al. [16] Kose et al. [17]
	Complex geometry specification 	MDEM	Discrete Element Method: Cundall [10,11,12] Finite Element Method: Summary of Literature Provided by Cook, Malkus, and Plesha [13] MDEM: Described Herein

FIGURA 2.3: EVOLUZIONE DEI MODELLI MICROMECCANICI (BUTTLAR E YOU, 2001)

Le prime due categorie, in cui non è ammessa l'interazione tra le particelle, forniscono scarsi risultati nella modellazione del conglomerato, a causa dell'eccessiva semplificazione del modello nel simulare i contatti tra gli elementi e la trasmissione di sforzi attraverso lo scheletro litico (Buttlar e Roque, 1996-1997). Tuttavia, questi modelli hanno comunque fornito risultati spendibili nello studio di particolari miscele e dei *mastici*, col cui nome si intende un composto di aggregati, sabbia e particelle fini immerse in una matrice bituminosa (Buttlar et al., 1999; Shashidhar e Shenoy, 2000).

I modelli che non prevedono l'interazione tra le particelle sono semplici ed efficienti, ma non hanno l'accuratezza necessaria per essere applicati ai conglomerati bituminosi, in cui è di fondamentale importanza l'interazione che si verifica tra gli aggregati.

2.2.1 La modellazione FEM del conglomerato bituminoso

La modellazione FEM permette lo studio dell'interazione tra particelle, tuttavia non è in grado di simulare le variazioni geometriche ai contatti, come lo scorrimento tra gli aggregati o l'apertura di fratture.

Un recente perfezionamento dell'approccio agli elementi finiti per lo studio del conglomerato bituminoso è rappresentato dallo studio di Dai e Sadd (2004), che hanno proposto il *Finite Element Network Model* (FENM).

Il conglomerato bituminoso è schematizzato come un materiale multifase che contiene aggregati, bitume, particelle fini e vuoti d'aria, così come mostrato in figura 2.4.a.

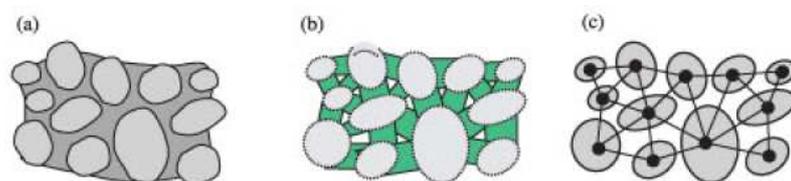


FIGURA 2.4: CONCETTO FENM PER CONGLOMERATO BITUMINOSO (DAI E SADD, 2004)

Il trasferimento del carico che avviene tra gli aggregati gioca un ruolo fondamentale nel determinare la capacità portante e il carico a rottura di un materiale così complesso.

Al fine di sviluppare un modello micromeccanico che simuli correttamente il materiale in oggetto, devono essere condotte appropriate semplificazioni sulle fasi costituenti il conglomerato bituminoso.

L'aggregato risulta normalmente molto più compatto del bitume e per tale motivo viene trattato come un insieme di particelle rigide di forma ellittica e dimensione variabile; contrariamente il bitume è un materiale con proprietà elastiche, plastiche ed ha un comportamento che dipende dal trascorrere del tempo.

Si assume inoltre che il trasferimento di carico micromeccanico che ha luogo tra ogni coppia di aggregati adiacenti avvenga attraverso un'effettiva zona di legante rappresentata da una fascia rettangolare, come mostrato in figura 2.4.b.

La forza risultante che si scambiano le particelle in contatto reciproco può quindi essere scomposta nelle componenti normale F_n , tangenziale F_t e nel momento M (figura 2.5).

Il modello FEM utilizza un *equivalent lattice network approach*, per mezzo del quale il trasferimento di carico interparticellare viene simulato attraverso una rete di elementi finiti i cui centri sono interconnessi tra loro, come mostrato in figura 2.4.c; il vettore che connette i centri di due particelle adiacenti prende il nome di *branch vector* e rappresenta appunto la risultante delle forze di contatto e dei momenti.

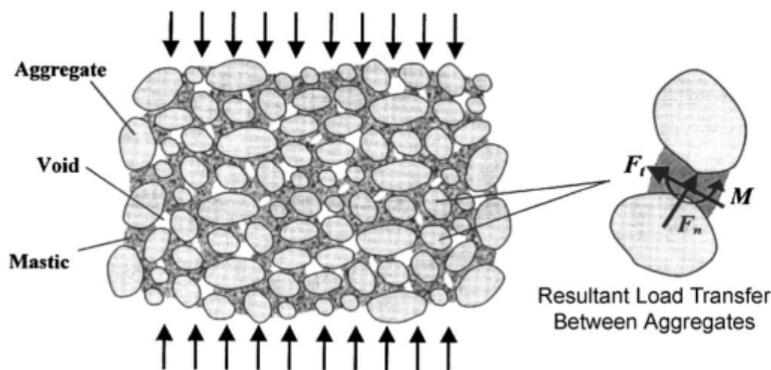


FIGURA 2.5: TRASMISSIONE DEI CARICHI NELL'AGGREGATO (DAI ET AL., 2005)

Si osservi che la fascia rettangolare precedentemente discussa risulta parallela al *branch vector*; infatti la geometria delle fasce dipende dalla dimensione delle particelle vicine, dal loro orientamento e dalla lunghezza del vettore suddetto (Sadd e Dai, 2004).

Un esempio di implementazione di tale approccio fu condotto su un provino standard di 102 mm di diametro eseguendo un test di trazione indiretta (figura 2.6).

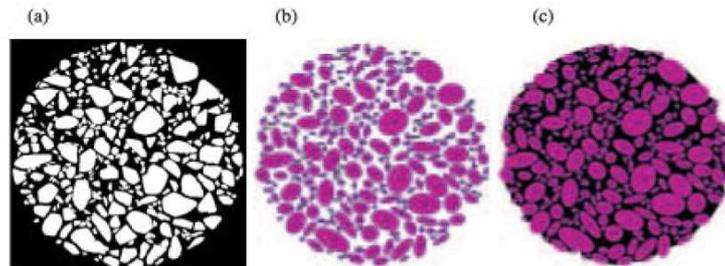


FIGURA 2.6: ESEMPIO DI APPLICAZIONE FENM (DAI E SADD, 2004)

La figura 2.6.a mostra la sezione del conglomerato. Un apposito algoritmo ai minimi quadrati setacciò digitalmente ed etichettò singolarmente gli aggregati, in modo da poter essere selezionati per approssimarne il loro contorno con l'ellisse più adatta (figura 2.6.b).

Una volta riempito lo spazio tra le ellissi con mastice di cemento, il provino per la simulazione fu implementato in *Matlab* come mostrato in figura 2.6.c; fu infine possibile implementare il modello agli elementi finiti per condurre la simulazione del carico.

L'approccio FENM riesce a cogliere il carattere microstrutturale della miscela e l'interazione aggregato-bitume. L'utente ha libertà di scegliere differenti modelli costitutivi per il bitume e definire diversi criteri di rottura. Il FENM è un approccio flessibile e dotato di buona velocità computazionale nella modellazione micromeccanica del conglomerato bituminoso (You a Dai, 2007).

Sadd et al. (2004) presentarono un modello micromeccanico che simulava il comportamento a rottura di un conglomerato bituminoso, nel caso bidimensionale.

La microstruttura della miscela fu simulata come nel caso precedente con un *equivalent lattice network approach*, modellando la coppia di particelle legate mediante elementi bi-nodali a tre gradi di libertà: due spostamenti nodali e una rotazione.

Nei nodi fu definita una matrice di rigidezza 6x6 per la trasformazione delle grandezze cinematiche, relative alla singola particella, nelle corrispondenti grandezze dinamiche.

Il comportamento a rottura non elastico osservato nel conglomerato fu poi simulato incorporando una particolare teoria di rottura con il modello interparticellare agli elementi finiti.

A tal proposito furono eseguiti test uniassiali di trazione che fornirono un diagramma sforzo-deformazione descritto da una curva gaussiana (figura 2.7) il cui ramo crescente è caratteristico di un comportamento di tipo *softening*, mentre il ramo discendente è caratteristico di un criterio di rottura.

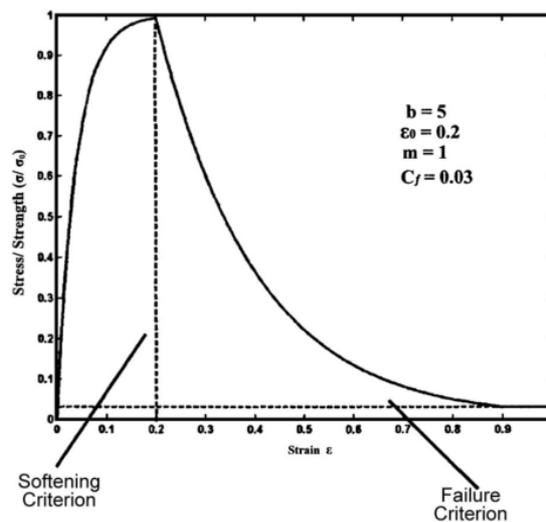


FIGURA 2.7: MODELLO A ROTTURA TEST UNIASSIALE (DAI ET AL., 2005)

Il fenomeno del *softening* dipende dagli spostamenti relativi che si verificano tra coppie di particelle adiacenti. Si osserva che in corrispondenza della resistenza critica media si ha immediatamente la rottura, senza che si esibisca una fase plastica; ci si aspetta che ogni elemento abbia un differente criterio *softening* a seconda della propria microstruttura.

Il ramo discendente è invece il risultato delle imperfezioni del mastice bituminoso che portano alla separazione delle coppie di particelle, quindi ad aumento della deformazione con corrispondente caduta della resistenza.

Durante le prove di compressione si osservò che lo spazio tra coppie di particelle occupato da bitume decresce all'aumentare del carico. Giunti alla totale assenza di spazio tra le particelle la rigidità degli elementi deve essere modificata per considerare questo cambio di stato fisico; infatti la rigidità aggregato-aggregato è significativamente maggiore della rigidità elastica del mastice interparticellare. Per

supportare questo fatto il modello utilizza una rigidità al contatto tre ordini di grandezza superiore a quella elastica.

Questa formulazione teorica fu infine implementata nel codice di calcolo agli elementi finiti *ABAQUS* per determinare la forza di trazione e compressione in ogni elemento ed eseguire il calcolo della rottura in direzione normale e tangenziale.

La comparazione tra il modello e i risultati sperimentali fu in grado di dimostrare la bontà del suddetto di predire i criteri di rottura osservati. Tuttavia i modelli bidimensionali si limitano alle ipotesi di comportamento uniforme attraverso lo spessore del campione; questa assunzione non risulta chiaramente accurata e si necessita di modelli tridimensionali che considerino anche questa particolarità (Dai et al., 2005).

2.2.2 La modellazione DEM del conglomerato bituminoso

L'approccio agli elementi discreti DEM permette di simulare correttamente il comportamento meccanico di una miscela di conglomerato bituminoso studiando l'interazione che si verifica tra le particelle costituenti l'aggregato.

Le singole fasi del materiale in oggetto (aggregato e bitume) sono modellate come un insieme di corpi discreti e distinti che interagiscono tra loro nei reciproci punti di contatto, i quali sono responsabili della trasmissione delle forze nel materiale.

Diversi studi hanno dimostrato che il modulo di resistenza del conglomerato è fortemente influenzato dall'interazione che sussiste tra le particelle; a tal proposito nel seguito del paragrafo verranno cronologicamente elencate alcune applicazioni di questo moderno approccio che sostengono il concetto in esame.

Rothenburg et al. (1992) svilupparono un modello micromeccanico con lo scopo di investigare il fenomeno della rottura per fatica di una pavimentazione stradale. Una particolarità piuttosto innovativa di questa ricerca fu dettata dal fatto che l'autore considerò sia l'interazione tra le particelle in presenza del bitume che la loro reciproca interazione.

Note le proprietà dell'aggregato (modulo di Young, indice di Poisson, rigidità normale e tangenziale, angolo d'attrito) e quelle del bitume (viscosità, modulo elastico, contenuto di bitume) fu possibile prevedere le proprietà della miscela di conglomerato (You e Dai, 2007).

Per le particelle fu definito un legame costitutivo di tipo elastico, mentre per il legante, trattato come un fluido *Newtoniano* incomprimibile, fu ipotizzato un legame viscoelastico (figura 2.8).

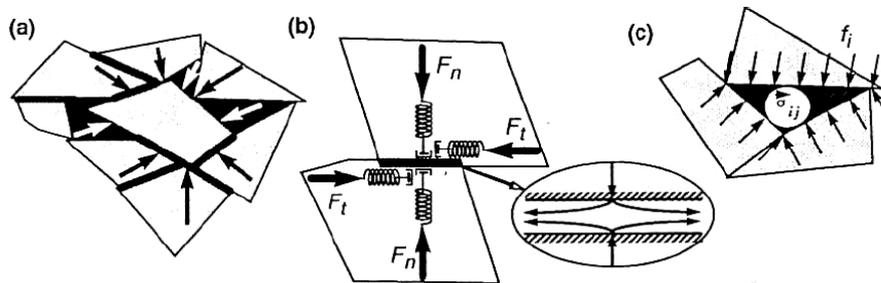


FIGURA 2.8: A) FORZE AGENTI SULLE PARTICELLE, B) INTERAZIONE TRA PARTICELLE, C) INTERAZIONE PARTICELLA-BITUME (ROTHENBURG, 1992)

Furono eseguite delle simulazioni bidimensionali del *creep test*, che evidenziarono la correlazione esistente tra il fenomeno macroscopico del *creep* ed il numero di contatti nei quali le particelle sono coese per mezzo del legante.

Fu quindi dimostrato come la deformazione del materiale sotto carico costante si sviluppa in presenza di un numero di contatti inferiore ad un valore minimo, innescando progressivamente l'ormaiamento della pavimentazione. Tuttavia le simulazioni eseguite furono solo bidimensionali e non fu effettuata nessuna calibrazione con dati di laboratorio.

Chang e Meegoda (1997, 1999) svilupparono il modello di contatto interparticellare *Asbal* per la rappresentazione microscopica del comportamento viscoelastico del bitume mediante la modifica del modello *Trubal* di Cundall (1971, 1978).

Il modello costitutivo *Asbal* prevedeva un insieme di particelle cilindriche connesse tra loro attraverso una combinazione di legami aggregato-aggregato e aggregato-bitume. Tale modello simulava il comportamento viscoelastico del legante mediante l'inserimento, nei punti di contatto interparticellari, di una coppia di elementi in serie molla-ammortizzatore (modello di Voigt) disposti lungo le direzioni normali e tangenziali (figura 2.9).

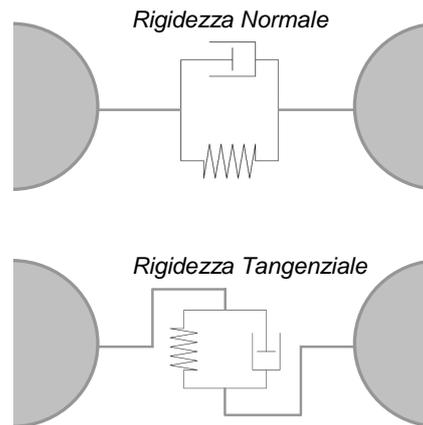


FIGURA 2.9: APPLICAZIONE DEL MODELLO VISCOELASTICO DI VOIGT

I ricercatori eseguirono delle simulazioni numeriche con modelli *Asbal* formati da 152 particelle di forma sferica, sollecitate con forze monoassiali statiche o cicliche applicate a velocità costante. Tali simulazioni furono effettuate al solo scopo di studiare l'influenza sui risultati di importanti parametri contenuti nel sistema di equazioni non-lineari. I due ricercatori, per una più verosimile rappresentazione microscopica del comportamento viscoelastico del bitume, sostituirono nei punti di contatto il modello costitutivo di Voigt con quello di *Burger*, ottenuto combinando due coppie di elementi molla-ammortizzatori rispettivamente in serie ed in parallelo.

Fu poi sviluppato un modello microscopico per l'*Hot Mix Asphalt (HMA)* sfruttando il modello *Asbal*; furono simulate diverse prove di tipo statico e dinamico studiando la risposta del modello al variare dei parametri microscopici. Le simulazioni di provini *HMA* caricati con forza statica evidenziarono un comportamento non-lineare tipico dei test di laboratorio, mentre quelle realizzate con modelli caricati ciclicamente svilupparono, in analogia al caso reale, una deformazione permanente nel materiale.

Tra le esperienze positive nel campo della modellazione particellare del conglomerato bituminoso si ricorda anche quella riportata da Buttlar e You (2001), costituita da un'analisi MDEM (*Microfabric Discrete Element Modeling*), implementando un codice DEM in cui le diverse fasi del conglomerato bituminoso (mastice e aggregati) furono modellate attraverso *clusters*, ovvero un insieme di piccoli elementi uniti tra loro. Durante l'implementazione del codice, gli autori decisero di semplificare le proprietà viscoelastiche del bitume e del mastice considerandole con legami elastici lineari.

L'MDEM risulta avere tutti i pregi del DEM, ovvero simula correttamente la propagazione della frattura e il provino di laboratorio, inclusa la sua creazione e compattazione, gestisce complesse variazioni di geometria, tenendo conto degli spostamenti che avvengono tra gli aggregati del provino quindi tra i loro contatti.

Introducendo l'uso di *clusters* fu inoltre possibile modellare accuratamente le forme complesse degli aggregati. Inizialmente la simulazione prevede l'elaborazione di un provino sintetico di forma circolare, costituito da 130 cilindri di diametro costante pari a 12.5 mm, distribuiti secondo un impacchettamento esagonale e caricati diametralmente per riprodurre un test IDT (figura 2.10).

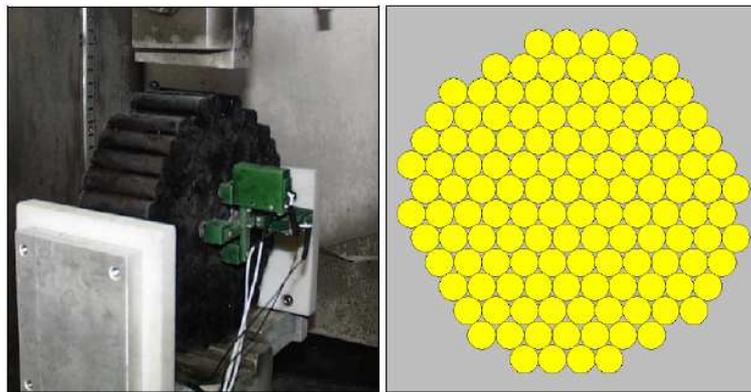


FIGURA 2.10: PROVINO PER IDT E MODELLO NUMERICO (BUTTLAR E YOU, 2001)

Per gli elementi fu fissato un idoneo coefficiente di attrito statico, mentre la rigidità del legame *parallel-bond* risultò pari a 8.84×10^8 Pa.

La validazione del modello numerico avvenne riproducendo in laboratorio un provino con aggregati prefabbricati di forma cilindrica, immersi in un mastice di bitume e filler disposti in modo da formare un campione analogo a quello numerico.

La miscela fu testata alla temperatura di -15°C , simulando pertanto un comportamento prettamente elastico e fragile.

In un secondo tempo fu testata e modellata una miscela di *Stone Mastic Asphalt* (SMA), la cui distribuzione degli inerti fu appositamente scansionata tramite uno scanner ottico ad alta risoluzione e riprodotta nel modello numerico. La scelta dello *Stone Mastic* fu propedeutica alla modellazione numerica a causa dell'elevato fenomeno dell'*interlocking* che si sviluppò tra gli aggregati, dovuto all'assenza della pezzatura intermedia. Il modello fu anch'esso realizzato secondo logica *cluster*, con la

tecnica dell'*up-scaling* e fu caratterizzato da elevato coefficiente di attrito interparticellare, resistenza degli aggregati pari a 5.60 MPa, resistenza del mastice pari a 1.40 MPa e rigidità del mastice pari a 3.44 GPa, dedotto tramite una relazione empirica.

La modalità di rottura evidenziata in figura dal modello numerico mostra una frattura all'interfaccia mastice-inerti e attraverso almeno uno degli aggregati rappresentati (figura 2.11).

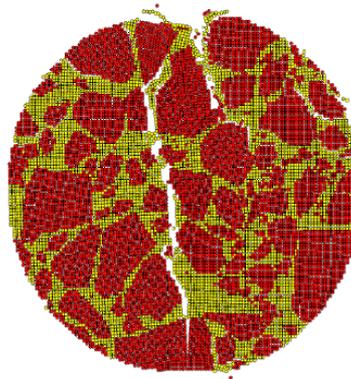


FIGURA 2.11: SIMULAZIONE DEL TEST DI TRAZIONE INDIRETTA (BUTTLAR E YOU, 2001)

Lo studio condotto sempre da Buttlar e You nel 2005, poi proseguito da You et al. (2006), portò alla stima del modulo complesso E^* su miscele *Sand Mastic* e su una miscela *Hot-Mix Asphalt* (HMA); tale parametro fu utilizzato come dato di input del modello DEM secondo logica *cluster* con lo scopo di valutare e calibrare il modello numerico.

I due materiali furono quindi testati secondo un range di frequenze definite (0.1, 1, 5 e 10 Hz) e di temperature relativamente basse (-20, -10, 0°C).

La morfologia bidimensionale del provino di conglomerato fu ottenuta anche in questo caso attraverso uno scanner ottico ad alta risoluzione. Attraverso tecniche avanzate di elaborazione delle immagini si ottenne un insieme di elementi discreti rappresentativi della forma delle particelle dell'aggregato, i cui bordi furono convertiti in poligoni attraverso il software *Image Pro Plus*.

Il software di calcolo modellò quindi due fasi distinte: aggregato e mastice, il secondo dei quali fu assunto essere combinazione di bitume e aggregati fini con una

dimensione inferiore a 2.36 mm; tale soglia fu stabilita in base alla capacità del software di modellare ed elaborare le immagini.

Al termine del processo fu quindi calcolato il modulo complesso con la seguente equazione:

$$E^* = \frac{\sigma_t + \mu \cdot p}{\epsilon_t} \quad (2.1)$$

dove σ_t è lo sforzo di trazione, ϵ_t è la relativa deformazione, p è la pressione interna e μ è l'indice di Poisson.

Una comparazione tra i risultati ottenuti dalla simulazione e quelli misurati mise in evidenza la bontà del metodo DEM con elementi *clusters*.

Dallo studio di You et al. (2006) emerse inoltre che quando il degrado dei contatti tra le particelle aumenta, il modello prevede generalmente un valore maggiore del modulo del materiale; si osservò inoltre che il modulo dell'aggregato influenza notevolmente il modulo del conglomerato attraverso un legame direttamente proporzionale.

Kim, Wagoner e Buttlar (2006, 2008) simularono il *disk-shaped compact tension test* con un modello bidimensionale ad elementi distinti particellari; investigarono l'influenza dei parametri macroscopici sulla meccanica della frattura di un materiale eterogeneo come il conglomerato bituminoso, concentrando l'attenzione su un modello di rottura bilineare di tipo coesivo.

Il modello agli elementi finiti fu implementato assegnando un concetto di "rigidezza" alle particelle, caratteristica che si attiva quando le particelle entrano in contatto fino a sovrapporsi o quando al contrario quelle legate si separano.

Il modello costitutivo usato per il presente studio si compone di tre parti: modello lineare, modello di contatto e *bonding model*. Il primo modello è definito dalla rigidezza normale e tangenziale delle due entità a contatto: aggregato-aggregato e aggregato-muro. La rigidezza normale e quella tangenziale sono date da:

$$K^n = \frac{k_n^{[A]} k_n^{[B]}}{k_n^{[A]} + k_n^{[B]}} \quad (2.2)$$

$$K^s = \frac{k_s^{[A]} k_s^{[B]}}{k_s^{[A]} k_s^{[B]}} \quad (2.3)$$

I restanti due modelli descrivono il comportamento costitutivo che governa la risposta dei punti di contatto tra le particelle. Il modello di contatto è una proprietà intrinseca delle due entità a contatto ed è definito dal coefficiente di attrito al contatto. Il *bonding model* unisce le particelle nei punti di contatto e governa la rigidità del materiale in apertura e al taglio.

Il modello bilineare *Cohesive Zone* simula numericamente la propagazione della frattura; il suddetto permette il calcolo dell'energia coesiva ϕ in funzione della forza di coesione σ_{\max} e dello spostamento δ_{sep} (figura 2.12).

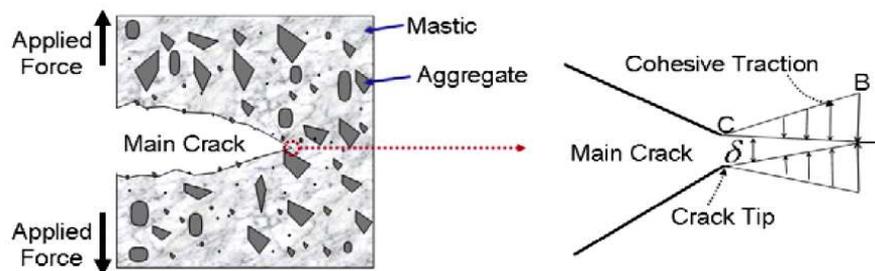


FIGURA 2.12: MECCANISMO DI ROTTURA E CONCETTO DI FRATTURA COESIVA (KIM ET AL., 2006)

I due parametri sono connessi al potenziale d'energia coesiva attraverso la relazione:

$$\phi = \int_0^{\delta_{sep}} \sigma(\delta) d\delta \quad (2.4)$$

L'energia coesiva è equivalente al lavoro di fessurazione locale del materiale (Γ) compiuto dalla tensione di coesione $\sigma(\delta)$ nel conferire a coppie di particelle in reciproco contatto uno spostamento relativo δ . La forza di coesione si ottiene per mezzo di esperimenti di laboratorio, mentre lo spostamento rimane il parametro più difficile da ottenere.

Come si osserva in figura 2.13, quando la forza al contatto supera la resistenza dello stesso si innesca la fase di *softening*, che si manifesta con una caduta di tensione tra le particelle e conseguente separazione dei contatti.

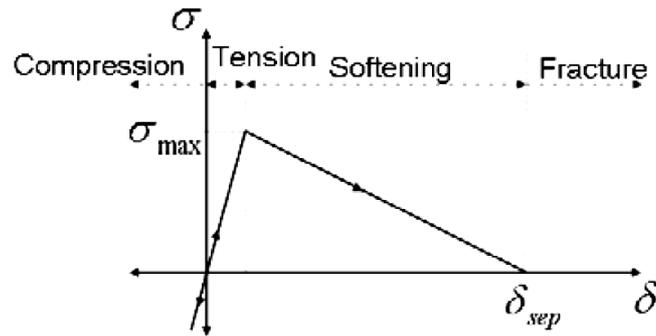


FIGURA 2.13: MODELLO BILINEARE DI FRATTURA COESIVA (KIM ET AL. 2006)

Per catturare il carattere microscopico del provino fu utilizzato un linguaggio di programmazione *Visual Basic* in grado di localizzare la posizione e la forma degli aggregati, supportato da uno scanner ad alta risoluzione per l'elaborazione digitale delle immagini (figura 2.14).

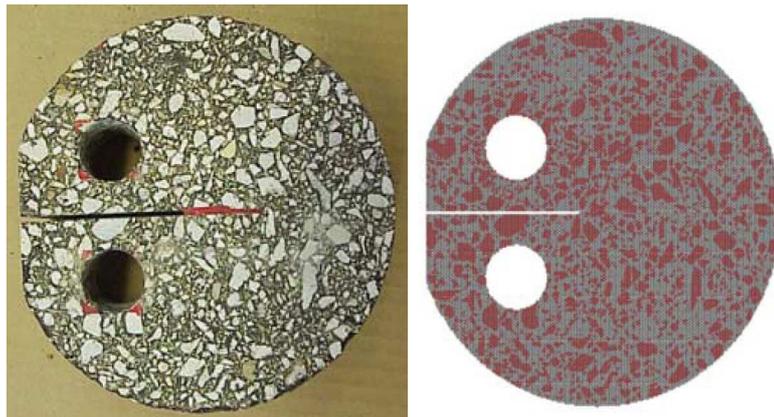


FIGURA 2.14: A) PROVINO PER IL *DISK-SHAPED COMPACT TENSION TEST*, B) IMMAGINE DIGITALE ELABORATA SECONDO LOGICA CLUSTER (KIM ET AL., 2006)

I parametri microscopici dei modelli costitutivi, per le diverse fasi della miscela, furono quindi calibrati in base a parametri macroscopici ottenuti in laboratorio con prove di compressione monoassiale, di trazione indiretta e di *disk-shaped compact tension*.

L'immagine digitale venne poi proiettata in una mesh di elementi discreti come mostrato in figura 2.15. La scelta della forma della mesh può essere dettata dal caso, tuttavia in questo studio venne scelta una forma esagonale in quanto la forma casuale avrebbe complicato l'assegnazione delle proprietà di legame ai contatti.

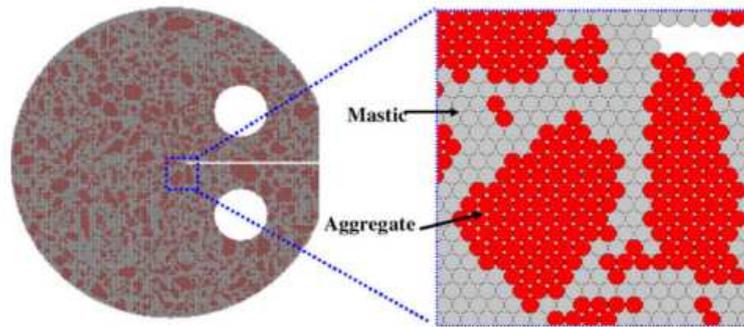


FIGURA 2.15: MESH CON ELEMENTI ESAGONALI (KIM E BUTTLAR, 2009)

Il provino cilindrico intagliato lungo il piano diametrico orizzontale, fu schematizzato mediante un modello formato da 38'700 particelle con disposizione esagonale e diametro uniforme, interagenti reciprocamente attraverso 115'000 punti di contatto.

Poiché il conglomerato bituminoso è considerato un materiale eterogeneo, nel modello vennero considerate tre fasi distinte: aggregato, mastice e interfaccia aggregato-mastice. Come illustrato in figura 2.16, lo studio di ogni fase impone diversi parametri da definire chiamati modulo di Young (E), resistenza a trazione (f_t) ed energia di frattura (G_f).

Fu assunto quindi un legame elastico lineare senza *softening* per le particelle costituenti il singolo grano di aggregato, un legame elastico non lineare con *softening* coesivo per il mastice ed infine un legame elastico non lineare con *softening* adesivo per l'interfaccia tra i due.

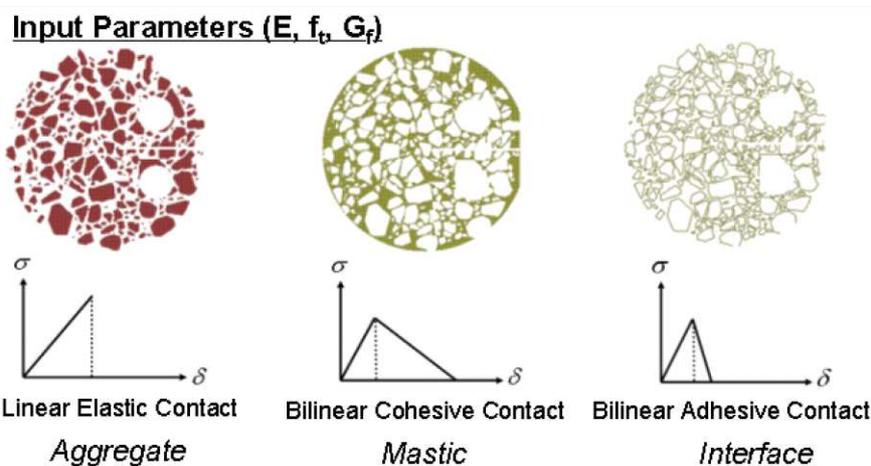


FIGURA 2.16: GEOMETRIE E MODELLI ASSUNTI PER LE FASI COSTITUENTI (KIM ET AL., 2006)

Un certo numero di esperimenti condotti sugli aggregati, sui mastici e su miscele, combinati con tipici valori ottenuti dalla letteratura, permisero la determinazione dei parametri più comuni, come i tre nominati in precedenza. Per i restanti parametri furono usate analisi inverse per calibrare i valori assunti inizialmente.

Le simulazioni quindi sottolinearono un innesco della fessurazione lungo il piano diametrico orizzontale del provino, per stati deformativi superiori al picco di forza, individuando conseguentemente zone di frattura, di *softening*, di trazione e di compressione (figura 2.17).

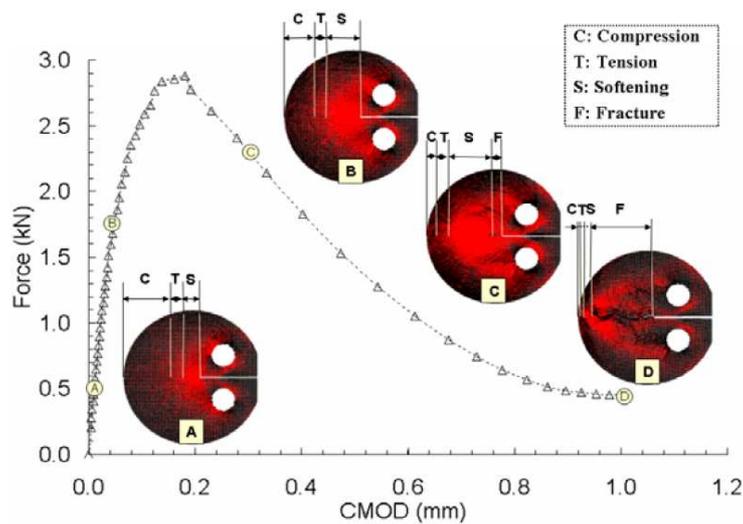


FIGURA 2.17: SVILUPPO DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA NEL MODELLO DEM

(KIM ET AL., 2006)

L'analisi dei risultati ottenuti mise in evidenza che l'energia di frattura all'interfaccia non influenza la rigidità iniziale del materiale, ma porta ad un aumento del carico di picco e della risposta *softening*. Un aumento della forza di coesione porta ad un aumento del carico di picco e dell'area sottoscritta alla curva e ad un lieve aumento della pendenza del ramo di rammollimento dopo il picco.

Nella zona di *softening*, con estensione decrescente in base alla lunghezza della frattura stessa, il materiale subisce una diminuzione delle tensioni di trazione a causa della fessurazione.

Kim infine investigò l'influenza dei singoli parametri sulla risposta macroscopica del modello, osservando una forte correlazione tra la meccanica della frattura e le resistenze dell'aggregato e dell'interfaccia aggregato-mastice.

La modellazione ad elementi distinti particellari ha permesso di dimostrare come la zona di *softening*, la forza di trazione massima ed il meccanismo della frattura siano condizionati dalla resistenza dell'aggregato, diversamente dall'energia di fessurazione funzione del solo legame definito all'interfaccia.

2.2.2.1 La schematizzazione della prova Marshall

Dondi e Bragaglia (2005) schematizzarono la prova Marshall mediante un codice di calcolo agli elementi distinti, PFC^{2D}, trattando le modalità di generazione dei diversi modelli e la successiva definizione di un legame semplificato visco-elastico tra le particelle al contatto al fine di una corretta rappresentazione del comportamento del conglomerato bituminoso.

Affinché un modello DEM sia verosimile si deve innanzitutto individuare il grado di affinamento della rappresentazione granulometrica dell'aggregato dipendente dal numero minimo e dalle dimensioni delle particelle. Riprodurre correttamente l'assortimento dell'aggregato significa ottenere quindi per il modello una curva granulometrica rappresentativa della realtà fisica.

Una volta definita l'area di contenimento delle particelle mediante un anello con diametro pari a 101.6 mm, fu riprodotta la curva granulometrica reale con due diversi metodi di generazione: il primo basato sulla creazione progressiva delle particelle partendo da quelle di dimensione maggiore, ed il secondo fondato sulla tecnica *up-scaling* della curva granulometrica reale.

Con il primo metodo furono creati sei modelli numerici, generando per *step* successivi le particelle trattenute al crivello di 10 mm e successivamente quelle trattenute a crivelli e setacci di dimensione inferiore.

Nei modelli con circa 58'000 e 20'000 particelle, una volta terminato il processo di generazione, a quelle di diametro inferiore a 0.01 mm fu applicato il metodo dell'espansione del raggio; l'incremento delle dimensioni lasciò quindi inalterata la relativa curva granulometrica ma portò le particelle in contatto con quelle adiacenti pur rimanendo passanti al setaccio di 0.18 mm.

In figura 2.18 si riporta il modello con 58'000 particelle ed il relativo anello di confinamento, evidenziato col colore rosso.

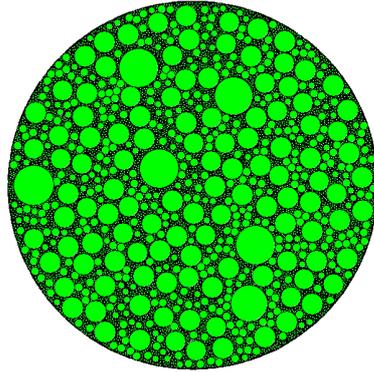


FIGURA 2.18: MODELLO CON 58'000 PARTICELLE (DONDI E BRAGAGLIA, 2005)

La tecnica dell'*up-scaling* della curva granulometrica reale portò a moltiplicare il diametro delle sfere per un fattore S pari a 10. La curva granulometrica così ottenuta presentava il medesimo andamento di quella reale, ma risultava traslata verso destra di un valore pari a:

$$\Delta D = (S - 1) \cdot D_{iniziale} \quad (2.5)$$

In tale formula ΔD è il modulo del vettore spostamento, S è il fattore di *up-scaling* e $D_{iniziale}$ è la dimensione media della curva granulometrica reale.

Il diametro dell'anello laterale fu moltiplicato per $S/2$ diventando pari a 508 mm. Nel caso specifico il numero delle sfere diminuisce con notevole vantaggio dei tempi di calcolo. Il legame tra il numero di particelle del modello in *up-scaling* e di quello non modificato è fornito dalla relazione:

$$N_f = \frac{N_i}{4} \quad (2.6)$$

I termini N_f ed N_i rappresentano i numeri di particelle rispettivamente del modello in *up-scaling* e di quello non modificato. Il modello generato conteneva circa 20'000 particelle.

Nella definizione delle caratteristiche del legame di contatto tra le particelle fu simulato il comportamento visco-elasto-plastico del conglomerato bituminoso secondo il *Burger's model*, che simula lo spostamento relativo della singola coppia di particelle come il lavoro di deformazione di un sistema formato da una prima coppia molla-ammortizzatore in serie associata ad una seconda coppia molla-ammortizzatore in parallelo (figura 2.19).

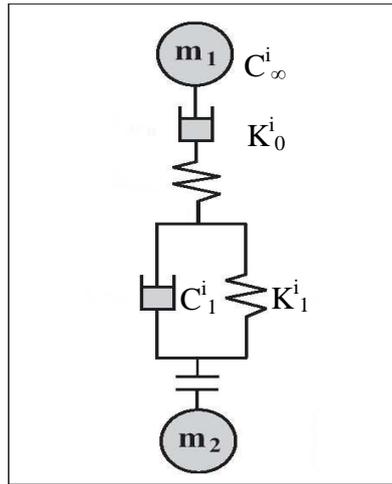


FIGURA 2.19: SCHEMATIZZAZIONE DEL MODELLO DI *BURGER* (DONDI E BRAGAGLIA, 2005)

Alle resistenze normale b_n e tangenziale b_s furono assegnati valori pari a 10^{10} N che risultarono maggiori delle sollecitazioni massime indotte nei modelli durante le simulazioni; tali valori evitano la rottura dei legami di contatto e permettono quindi al generico modello di esplicitare il comportamento visco-elastico semplificato in tutte le sue fasi.

Le rigidezze di contatto normale k_n e tangenziale k_s sono espresse in funzione del tempo di carico t secondo la seguente formula generale:

$$k_i = \left[\frac{1}{K_0^i} + \frac{t}{C_\infty^i} + \frac{1}{K_1^i} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau^i}} \right) \right]^{-1} \quad (2.7)$$

$$\tau^i = \frac{C_1^i}{K_1^i} \quad (2.8)$$

dove i è la direzione presa in esame (normale n o tangenziale s), K_i è la rigidezza di contatto lungo la direzione i , K_0^i è la costante elastica della molla in serie per la rigidezza K_i , K_1^i è la costante elastica della molla in parallelo, C_∞^i è la costante di smorzamento viscoso dell'ammortizzatore in serie, C_1^i è la costante di smorzamento viscoso dell'ammortizzatore in parallelo, τ^i è il tempo di rilascio e t è il tempo di carico.

I parametri del legame di contatto visco-elastico furono determinati calcolando per ciascun modello con le equazioni (2.9) e (2.10) le rigidezze k_n e k_s in funzione dei valori posseduti rispettivamente dal modulo di deformazione volumica K' , dal modulo

di elasticità tangenziale G' e dal coefficiente di Poisson ν negli istanti iniziali della prova, durante i quali il provino presentava un comportamento all'incirca lineare.

$$k_n = K' \frac{4\pi\Sigma R^2}{(1-n)\Sigma R\Sigma L} \quad (2.9)$$

$$k_s = G' \frac{8\pi\Sigma R^2}{(1-n)\Sigma R\Sigma L} - k_n \quad (2.10)$$

Nelle equazioni precedenti, oltre alle grandezze già definite, figurano la porosità n ed i termini ΣL , ΣR , ΣR^2 , sommatorie rispettivamente della distanza L tra i centri di due sfere in contatto e del raggio R della generica particella.

Calcolati i valori dei coefficienti di rigidezza nei diversi istanti temporali esaminati, mediante l'equazione (2.7) furono individuati quei valori dei parametri del modello di *Burger* che hanno permesso di ottenere la simulazione più aderente al caso sperimentale.

Il provino fu realizzato con bitume normale 50/70 avente temperatura di rammollimento di circa 55°C, inferiore alla temperatura di riferimento della prova Marshall; durante tale prova il legante, che tende a rammollire, non presenta una rottura vera e propria.

Tra le particelle a diversa granulometria costituenti ciascun modello fu definito un coefficiente di attrito microscopico μ_b di circa 0.8 corrispondente ad un angolo di attrito interno macroscopico (ϕ) di circa 35°, effettivamente posseduto dall'aggregato lapideo calcareo del conglomerato bituminoso.

Le ganasce furono modellate servendosi di elementi *boundary* ai quali furono conferiti un attrito acciaio-particelle nullo ed opportuni valori delle rigidezze di contatto normale k_n e tangenziale k_s , al fine di ottenere come modulo del materiale quello tipico dell'acciaio (figura 2.20).

Durante le simulazioni furono inseriti dei cerchi di misura con raggio pari a 2.5 mm, ciascuno dei quali rilevava il valor medio degli stati tensionale e deformativo delle particelle appartenenti alla corrispondente area.

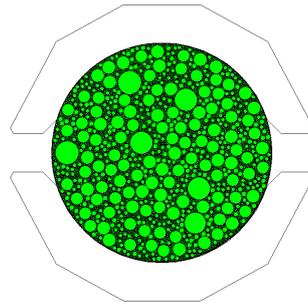


FIGURA 2.20: SCHEMATIZZAZIONE DELLE PIASTRE MEDIANTE ELEMENTI *BOUNDARY*
(DONDI E BRAGAGLIA, 2005)

Tali cerchi furono disposti in doppia fila lungo i diametri rispettivamente orizzontale e verticale, con la funzione di determinare lo stato tensionale normale generato dalle piastre all'interno del provino in corrispondenza di tali direzioni (figura 2.21).

Ciascuna fila di cerchi misuratori fu stata sovrapposta a quella speculare di 1/5 di raggio in modo tale da costituire una fascia continua a cavallo della direzione in esame; ogni fascia conteneva quindi tutti i punti di contatto prossimi a quel diametro e calcolava il valor medio della tensione normale nell'area d'impronta di ciascun cerchio.

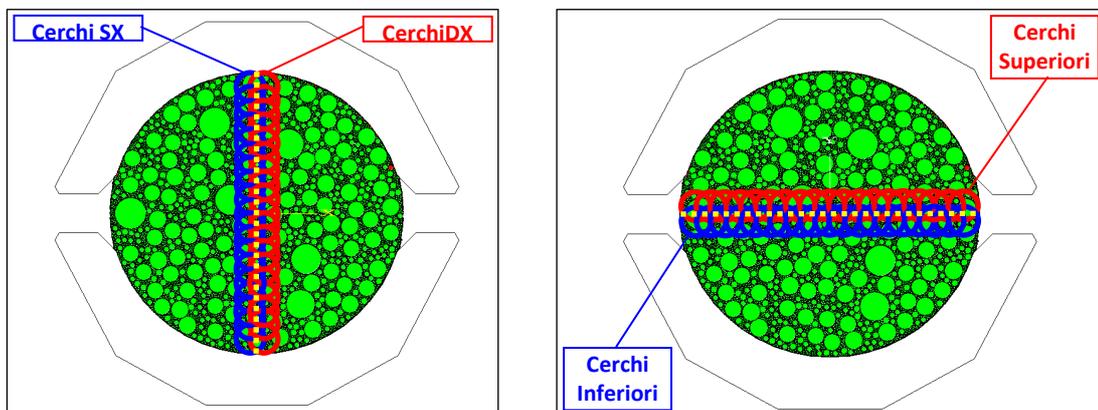


FIGURA 2.21: CERCHI MISURATORI POSIZIONATI NEI DIAMETRI VERTICALE E ORIZZONTALE DEL GENERICO PROVINO (DONDI E BRAGAGLIA, 2005)

Durante la modellazione della prova furono conferite alle ganasce velocità uguali e contrarie con modulo pari a 0.425 mm/sec, al fine di ottenere il medesimo spostamento relativo caratterizzante il provino nel corso della prova; infatti mentre la

piastra inferiore rimaneva ferma quella superiore si muoveva verso il basso con una velocità di 0.85 mm/sec.

Al termine di ogni ciclo di calcolo furono determinate la forza verticale trasmessa dalla piastra superiore e la relativa deformazione verticale del modello. La prima fu valutata come sommatoria della componente verticale degli sforzi esercitati dalle particelle a contatto con la ganascia superiore; lo schiacciamento del provino fu ottenuto invece analizzando lo spostamento delle sfere localizzate agli estremi del diametro verticale.

Nel corso della simulazione, per ciascun modello, furono monitorati inoltre l'andamento delle forze puntuali di contatto ed i valori del carico massimo verticale e del corrispondente scorrimento.

Durante la prova Marshall la forza esercitata in un generico istante temporale dalla ganascia superiore sul provino, induce nel conglomerato bituminoso uno stato tensionale che si propaga istantaneamente in tutti i punti del corpo.

Nel corso della simulazione le piastre, comprimendo il modello, generano invece uno stato tensionale che si diffonde con velocità finita dalle particelle a contatto con gli elementi *boundary* fino ad interessare quelle appartenenti al piano orizzontale di simmetria.

L'onda tensionale si sviluppa quindi nel modello con una velocità dipendente dalle funzioni che definiscono la rigidità ai contatti e dalla velocità di traslazione delle ganasce.

Le componenti di tale velocità lungo le direzioni rispettivamente normale e tangenziale al piano di contatto di una generica coppia di particelle si ottengono derivando nel tempo le equazioni della legge forza-spostamento ed esprimendo il tempo t in funzione della velocità v e dello spazio s .

La componente della velocità dell'onda $v_{onda,i}$ nella direzione i -esima si determina mediante la relazione (2.11).

$$v_{onda,i} = \frac{\Delta F_i}{\Delta s_{r,i}} = k_i \cdot \Delta l = \left[\frac{1}{K_0^i} + \frac{v_{r,i}}{s_{r,i} \cdot C_\infty^i} + \frac{1}{K_1^i} \cdot \left(1 - e^{-\frac{v_{r,i}}{s_{r,i} \cdot \tau^i}} \right) \right]^{-1} \cdot s_{r,i} \quad (2.11)$$

Nell'equazione sopra indicata oltre ai termini definiti nella (2.7) compaiono lo spostamento relativo $s_{r,i}$ e la velocità relativa $v_{r,i}$ della generica coppia di particelle nella direzione i -esima presa in esame.

Al fine di individuare per ciascun modello quel valore dello scorrimento in corrispondenza del quale la risultante degli sforzi di compressione nel piano orizzontale è pari al valore della stabilità, fu teorizzato un modello analitico che si fonda sulle seguenti ipotesi semplificative:

- il modello si considera formato da particelle distribuite uniformemente nell'area aventi tutte il medesimo valore del diametro;
- la componente verticale della velocità di traslazione delle particelle è pari a quella delle piastre lungo la corona e decresce linearmente verso il piano orizzontale di simmetria, in corrispondenza del quale si annulla;
- la componente verticale dello spostamento della generica particella è pari anch'essa a quella delle piastre lungo la corona e decresce linearmente verso il piano orizzontale di simmetria, in corrispondenza del quale si annulla;
- si determinano le grandezze cinematiche e dinamiche relative alla coppia di particelle prossima all'intersezione tra i piani diametrali rispettivamente orizzontale e verticale;
- il prodotto della forza verticale al contatto per il numero medio di particelle disposte lungo il piano orizzontale di simmetria fornisce il valore della risultante delle tensioni di compressione agenti in corrispondenza di tale piano.

Lo scorrimento in esame venne calcolato quindi per ciascun modello ponendo la risultante delle forze verticali nel piano diametrale orizzontale pari al valore della stabilità e risalendo attraverso l'equazione (2.11) al valore della traslazione effettiva delle piastre.

In figura 2.22 è rappresentata la curva esponenziale che approssima, per ciascun modello, il legame esistente tra il ritardo dell'onda tensionale ed il corrispondente numero di particelle. Tale diagramma mette in evidenza come il ritardo dell'onda tensionale, misurato a partire dalla stabilità, cresca fino ad un valore massimo pari a 11.40 mm per modelli con meno di 5000 particelle; successivamente cala progressivamente nel caso di modelli che riproducono le principali frazioni

dell'aggregato (filler escluso) fino ad assestarsi, per il G-58000, ad un valore pari a 2 mm.

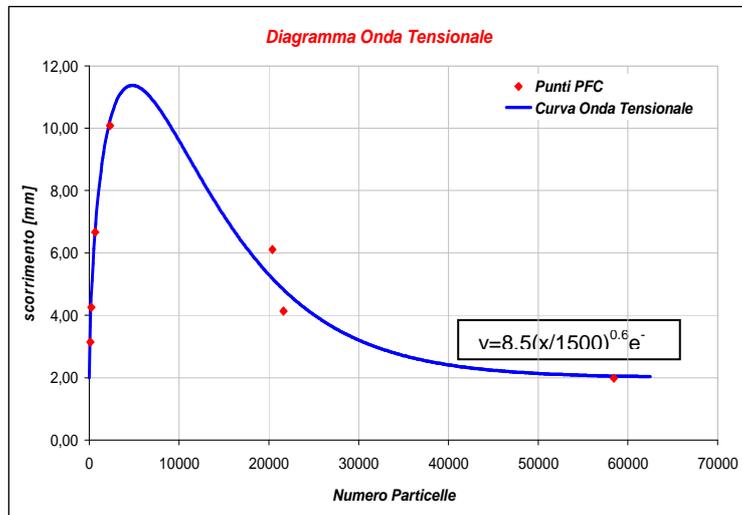


FIGURA 2.22: CURVA DEL RITARDO DELL'ONDA TENSIONALE (DONDI E BRAGAGLIA, 2005)

Per ciascun modello realizzato col PFC^{2D} furono tracciati, in funzione dei corrispondenti valori dello scorrimento, gli sforzi di compressione agenti lungo il piano diametrale orizzontale e quelli di trazione agenti lungo il piano diametrale verticale.

Si riportano in figura 2.23 e 2.24 i grafici relativi al modello G-58000.

Nel modello G-58000 furono misurati gli stati tensionali lungo i piani diametrali per valori dello scorrimento pari a circa 1/7, 1/4 e 1/3 della deformazione verticale che sottende la stabilità, in corrispondenza dei quali questo manifesta un comportamento elastico-lineare.

Gli stati tensionali così determinati furono successivamente comparati con quelli di un modello bidimensionale agli elementi finiti realizzato con il FLAC^{2D} formato da un conglomerato ideale la cui legge costitutiva fu definita in base ai valori delle grandezze ρ , ν , K' , E' , e G' che caratterizzano in campo elastico il comportamento del provino testato in laboratorio.

Si confrontarono quindi per i modelli G-58000 ed agli elementi finiti, in corrispondenza di uno stesso valore del carico verticale, i diagrammi della tensione di compressione agente sul piano diametrale orizzontale e di quella di trazione agente sul piano diametrale verticale.

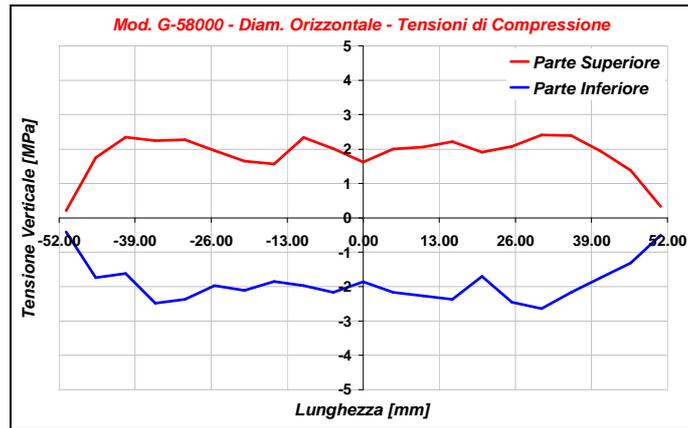


FIGURA 2.23: TENSIONI DI COMPRESIONE NEL PIANO MEDIO ORIZZONTALE (DONDI E BRAGAGLIA, 2005)

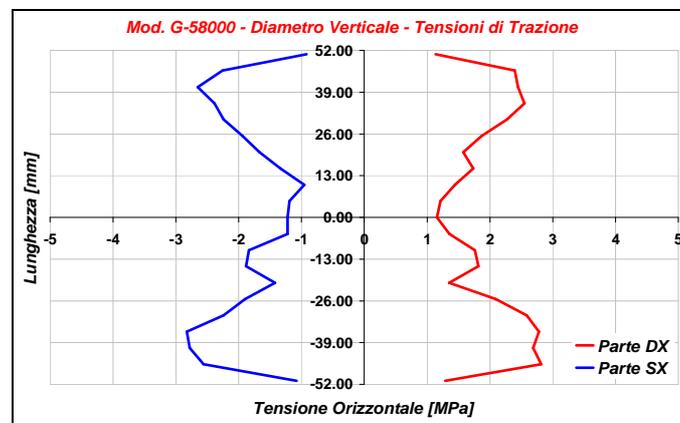


FIGURA 2.24: TENSIONI DI TRAZIONE NEL PIANO MEDIO ORIZZONTALE (DONDI E BRAGAGLIA, 2005)

I risultati ottenuti vennero espressi in uno stesso diagramma unitamente a quella del provino testato in laboratorio al fine di studiare l'andamento delle curve stabilità-scorrimento dei modelli (figura 2.25).

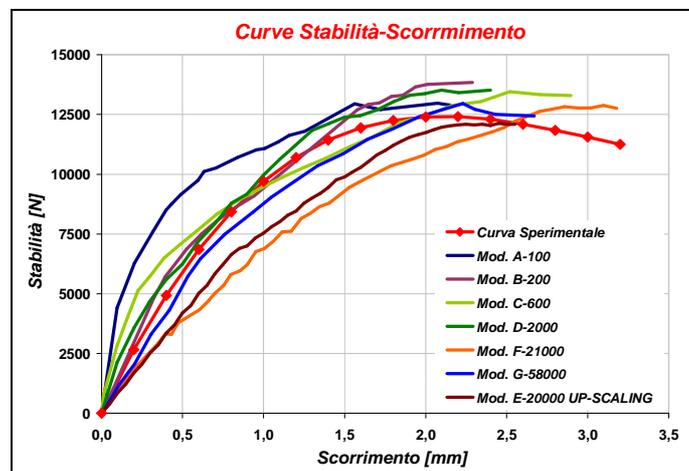


FIGURA 2.25: CURVE STABILITÀ-SCORRIMENTO (DONDI E BRAGAGLIA, 2005)

Le curve dei modelli, indipendentemente dal valore della stabilità, presentavano il medesimo andamento qualitativo: in esse si osservava infatti un primo tratto elastico-lineare nel quale la forza verticale esercitata dalla ganascia superiore sulle particelle era direttamente proporzionale alla deformazione verticale del provino ed un secondo ramo visco-elastico, più o meno marcato a seconda del modello, nel quale il carico verticale aumentava in modo meno che proporzionale al crescere dello scorrimento; i modelli, raggiunta la stabilità, non manifestavano un comportamento visco-plastico poiché il legame ai contatti adottato nelle simulazioni non prevedeva un terzo tratto nel quale il carico verticale decresce al variare della relativa deformazione.

Per stabilire quale tra i modelli presi in esame approssimava al meglio la curva stabilità-scorrimento del provino si valutarono le seguenti grandezze:

- errore relativo $\Delta E'$ del modulo del tratto elastico-lineare della curva del generico modello rispetto a quello del provino;
- errore relativo $\Delta \text{tg}(\alpha)_{\text{media}}$ sull'inclinazione media del tratto visco-elastico della curva del generico modello rispetto a quella del provino;
- errore relativo ΔF_{media} dello scostamento medio del tratto visco-elastico della curva del generico modello rispetto a quella del provino;
- errore relativo ΔF_{max} sulla stabilità;
- errore relativo $\Delta s(F_{\text{max}})$ sullo scorrimento.

I valori degli errori relativi sono raggruppati per modello nell'istogramma di figura 2.26.

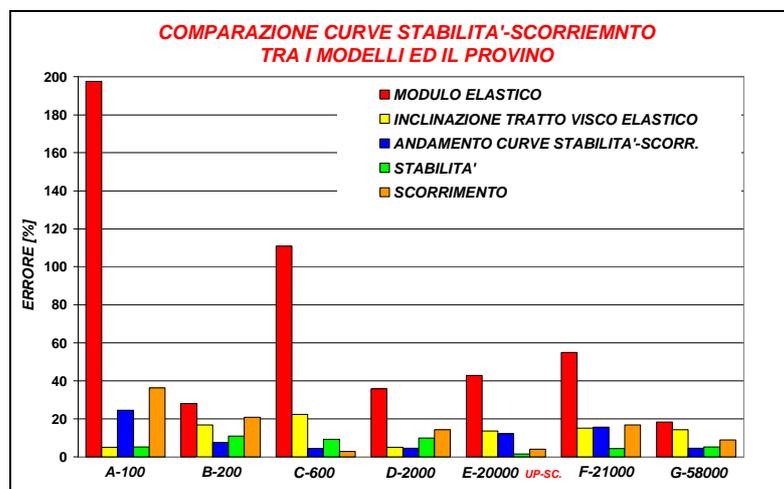


FIGURA 2.26: COMPARAZIONE TRA LE CURVE STABILITÀ-SCORRIMENTO DEI MODELLI E QUELLA DEL PROVINO (DONDI E BRAGAGLIA, 2005)

Tra i modelli esaminati in precedenza quelli che possedevano una curva stabilità-scorrimento la quale, tenuto conto delle variazioni rispettivamente del modulo elastico, dell'inclinazione del tratto visco-elastico, dello scostamento medio tra le curve e del punto di picco, approssimava al meglio quella reale furono il G-58000 e l'E-20000.

Le curve stabilità-scorrimento del modello G-58000 e del modello agli elementi finiti con legame elasto-plastico sono riportati in figura 2.27.

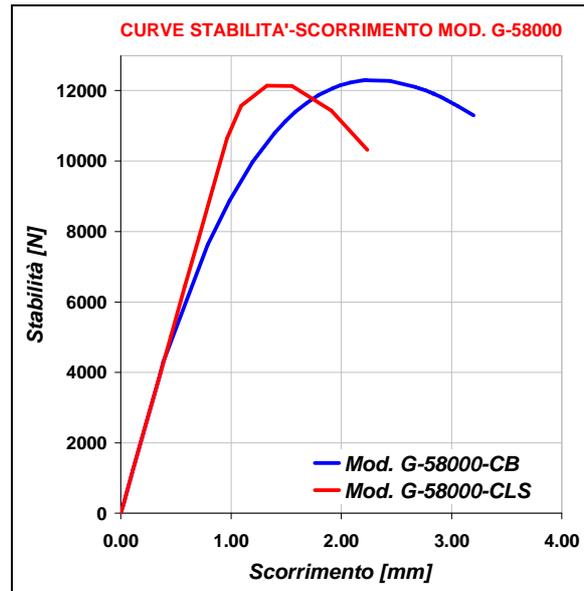


FIGURA 2.27: CURVE STABILITÀ–SCORRIMENTO PER I MODELLI G-58000 E FEM
(DONDI E BRAGAGLIA, 2005)

Il confronto delle curve stabilità-scorrimento mette in evidenza il comportamento viscoso, superata la prima fase di deformazione elastica, del modello G-58000 rispetto al comportamento perfettamente elastico del modello agli elementi finiti; entrambi i modelli fino ad un valore dello scorrimento pari a 0.5 mm presentavano inoltre il medesimo modulo elastico E e le loro curve sono quindi coincidenti.

La comparazione dei modelli permise di validare i risultati ottenuti col PFC^{2D} mediante l'uso di un codice di calcolo FEM, il FLAC^{2D}, la cui attendibilità è comprovata da tempo; inserendo in entrambi i programmi gli stessi valori dei parametri di input si ottennero due curve stabilità-scorrimento coincidenti nel tratto elastico-lineare. Questo risultato legittima anche un calcolo elastico della pavimentazione.

In conclusione, la simulazione della prova con un modello DEM portò allo studio dell'influenza delle dimensioni e del numero delle sfere sulla stabilità. Fu osservato che quando le particelle sono presenti in un numero maggiore di 40000 hanno dimensioni tali da schematizzare la maggior parte dell'assortimento granulometrico dell'aggregato. Modelli formati da più di 40000 particelle mostravano curve stabilità-scorrimento che approssimavano al meglio quella reale, individuando un valore di picco all'incirca uguale a quello reale. La difficoltà maggiore fu riscontrata nel determinare il valore corretto dei parametri microscopici a causa della mancanza di misure attendibili di alcune variabili locali come ad esempio quelle legate alle forze di contatto. Mediante modelli di questo tipo appare però possibile, per una determinata miscela di aggregati, studiare numericamente le curve che legano la stabilità, lo scorrimento e la percentuale dei vuoti alla percentuale di bitume in modo tale da stabilire la percentuale ottima del legante, e ridurre di conseguenza il numero di provini da sottoporre in laboratorio a test di ottimizzazione.

Un altro risvolto applicativo importante è rappresentato dalla possibilità di realizzare, previa taratura dei parametri caratteristici del conglomerato bituminoso con test di laboratorio a cicli ripetuti, modelli tridimensionali finalizzati allo studio del comportamento in sito come ad esempio la verifica dei fenomeni di ormaimento e rottura per fatica che possono instaurarsi nelle pavimentazioni stradali.

2.2.2.2 Conclusioni

Con lo scopo di prevedere il comportamento del conglomerato bituminoso, la modellazione agli elementi discreti possiede evidenti benefici: permette di gestire le complessità quali la geometria dei contatti, i grandi spostamenti e la propagazione della rottura, così come fornisce la possibilità di simulare accuratamente la creazione del provino.

Schematizzando infatti gli aggregati mediante una *mesh* di elementi discreti, è possibile modellare forme complesse e simulare, durante un test di trazione, la propagazione della rottura sul contorno dell'aggregato e all'interno dello stesso.

Nell'approccio agli elementi discreti il comportamento di un materiale complesso quale il conglomerato bituminoso può essere semplificato combinando semplici

modelli costitutivi al contatto, tra cui ricordiamo la rigidità normale e tangenziale, l'attrito e la coesione tra le particelle, con più accurate caratteristiche geometriche.

I parametri utilizzati in una modellazione DEM possono risultare davvero complicati a seconda del modello di contatto scelto e della composizione delle fasi del materiale. Le proprietà dell'aggregato, quali modulo di compressibilità, modulo di elasticità, indice di Poisson, densità, rigidità normale e tangenziale, angolo d'attrito possono essere inizialmente assunte basandosi sulla valutazione del materiale usato per gli aggregati del conglomerato stesso. Alcune proprietà risultano in ogni modo ben note, quali il modulo, la densità e la forza di trazione, mentre altre, come l'indice di Poisson, non ci si aspetta siano significative nello studio della risposta del materiale. Altri parametri, come l'angolo d'attrito, fanno parte integrante del modello di calibrazione mentre altri ancora necessitano di prove di laboratorio per essere determinati, come le proprietà del mastice di bitume e quelle del conglomerato.

Una volta note tutte queste proprietà, si può condurre un test di simulazione biassiale con lo scopo di calcolare i moduli del materiale in esame (You e Dai, 2007).

2.2.3 Metodi a confronto

Nel 2007 gli autori You Z. e Dai Q. misero a confronto i principali metodi di modellazione del conglomerato bituminoso (DEM, FEM, FENM), paragonando la capacità dei modelli di rappresentare la reale microstruttura della miscela di aggregati, la velocità computazionale, la capacità di simulare fratture e la possibilità di simulazioni tridimensionali.

Dall'esperienza degli autori, è possibile osservare che l'approccio FENM può simulare la reale microstruttura del conglomerato e le fratture, creare modelli tridimensionali con velocità di calcolo soddisfacenti. Il metodo DEM eccelle per quanto riguarda la capacità di rappresentare la microstruttura e la simulazione di fratture, inoltre può creare con semplicità modelli tridimensionali, anche se rimane molto lento nel calcolo.

L'approccio FEM rappresenta la microstruttura del materiale, se il modello include la forma e la dimensione dell'aggregato.

Le caratteristiche sono riassunte in tabella 2.1.

	<i>Rappresentazione della microstruttura</i>	<i>Velocità computazionale</i>	<i>Simulazione di fratture</i>	<i>Possibilità modelli 3D</i>
FEMM	Buona	Elevata	Semplice	Sì
DEM	Eccellente	Molto lenta	Molto semplice	Sì
FEM	Eccellente	Lenta	Non semplice	Sì

TABELLA 2.1: PARAGONE TRA I VARI APPROCCI (YOU E DAI, 2007)

Come possiamo notare, il DEM può essere considerato il metodo dotato di migliori potenzialità escluso il suo unico difetto, ovvero la velocità computazionale. Questa carenza in futuro potrà essere superata, grazie allo sviluppo in materia di calcolatori, che forniranno prestazioni sempre più elevate.

Nonostante il metodo degli elementi distinti particellari sia applicato da oltre trent'anni per lo studio della risposta macroscopica del materiale granulare non legato in base alla struttura microscopica ed alle proprietà dei componenti, non è ancora diffusamente utilizzato per l'analisi del comportamento meccanico del conglomerato bituminoso (Bragaglia, 2007).

Mediante modelli di questo tipo appare possibile, per una determinata miscela di aggregati, studiarne numericamente le proprietà fisiche al fine di individuare la percentuale ottima del legante e ridurre così il numero di provini da sottoporre in laboratorio a test di ottimizzazione.

Un altro risvolto applicativo importante è rappresentato dalla possibilità di realizzare, previa taratura dei parametri caratteristici del conglomerato bituminoso con test di laboratorio, modelli tridimensionali finalizzati allo studio del comportamento in sito come ad esempio la verifica dei fenomeni di ormaiamento e rottura per fatica che possono instaurarsi nelle pavimentazioni stradali.

In definitiva, dunque, le analisi e gli studi condotti permettono di affermare che il metodo agli elementi distinti particellari può essere visto come un interessante approccio per la modellazione numerica in alternativa alla modellazione tradizionale al continuo, essendo in grado di cogliere il carattere discreto della miscela bituminosa attraverso un processo microscopico che consente di studiare i processi fisici e le

variabili (proprietà aggregato e bitume) che determinano la risposta tenso-deformativa macroscopica.

2.3 La modellazione tridimensionale

Recenti studi hanno dimostrato che i tradizionali modelli bidimensionali di simulazione micromeccanica non descrivono correttamente un materiale complesso come il conglomerato bituminoso.

Nell'ottica di un'evoluzione di tali criteri è necessario considerare la composizione discreta del conglomerato bituminoso. A tal fine può essere adottato il metodo degli Elementi Distinti Particellari (DEM-P), che schematizza il materiale granulare, assai realisticamente, come un insieme di particelle indipendenti che interagiscono nei punti di reciproco contatto secondo appropriate leggi costitutive (Bragaglia, 2006).

Collop et al. (2004) dimostrarono che le proprietà dei contatti interparticellari dipendono dallo spessore del film di bitume che separa due particelle, il che vuol dire che tali proprietà dipendono dal movimento reciproco che si instaura tra le particelle durante la simulazione.

Gli autori videro quindi la necessità di riuscire a modellare anche il fenomeno dell'*interlocking* che si sviluppa tra gli aggregati, eventualmente sfruttando l'utilizzo di *clump*, ovvero un gruppo di sfere che mantengono una fissa distanza tra loro e si comportano come un unico corpo rigido.

A tal proposito, vengono nel seguito presentate due esperienze di simulazione tridimensionale svolte presso la Facoltà di Ingegneria di Bologna.

2.3.1 Modellazione con il metodo DEM-P della prova ITSM

Obiettivo dello studio condotto da Dondi e Bragaglia (2006) è stato la modellazione del test ITSM con un codice di calcolo ad elementi distinti particellari (PFC^{3D}), che schematizza il provino di conglomerato bituminoso con un insieme formato da un numero finito di sfere il cui raggio dipende dalla distribuzione granulometrica dell'aggregato lapideo.

Il test ITSM è una prova di laboratorio non distruttiva che si esegue su provini cilindrici di conglomerato bituminoso con spessore compreso tra 30 mm e 80 mm e diametro rispettivamente di 100 mm, 150 mm o 200 mm.

La prova viene effettuata alla temperatura di 20° C, inserendo il provino in una apparecchiatura composta da una piastra di carico superiore e da una base d'appoggio inferiore, da un telaio orizzontale con quattro morsetti per il fissaggio del campione e due trasduttori elettrici, posti diametralmente uno di fronte all'altro, per misurarne la deformazione diametrica orizzontale (figura 2.28).

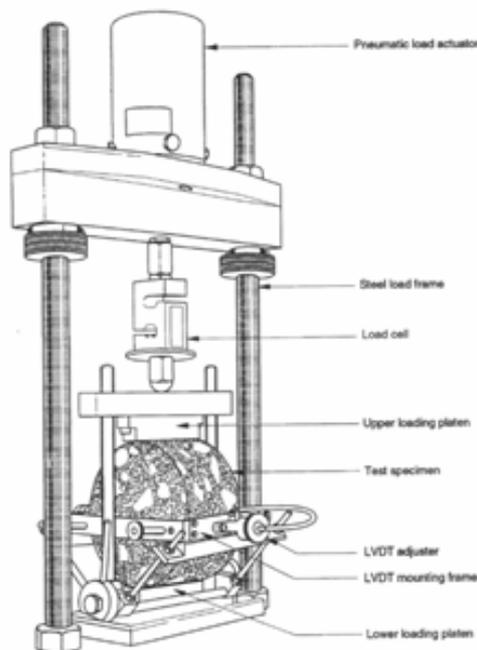


FIGURA 2.28: APPARECCHIATURA ITSM (DONDI E BRAGAGLIA, 2006)

La prova ITSM permette di determinare in laboratorio il valore di un modulo di rigidezza che è maggiormente rappresentativo, rispetto alla stabilità Marshall ed al modulo complesso ottenuto col *Creep test*, del comportamento della miscela in condizioni di esercizio sottoposta all'azione di carichi veicolari.

Fu scelto un provino di forma cilindrica con diametro di 150 mm e spessore pari a 55 mm, costituito da una miscela con bitume 70/100 di tenore 4.6 % ed aggregato con curva granulometrica della potenza dello 0.45 tipica di uno strato di base.

Si riproduse la distribuzione granulometrica dell'inerte con la tecnica *explosive repulsion* all'interno di un solido cilindrico formato da elementi *boundary* ed avente le stesse dimensioni del provino.

Tale tecnica consiste nella generazione di un numero finito di elementi appartenenti al solido di confinamento e nel progressivo incremento del loro raggio fino a quando tutte le particelle non entrano reciprocamente in contatto.

Con la tecnica *explosive repulsion* fu realizzato un modello formato da 2'500 elementi (figura 2.29). La piastra di carico superiore e la base d'appoggio inferiore furono modellate con elementi *boundary* dotati di un coefficiente di attrito acciaio-particelle nullo e di opportuni valori delle rigidezze nei punti di contatto rappresentativi della resistenza caratteristica dell'acciaio (figura 2.29).

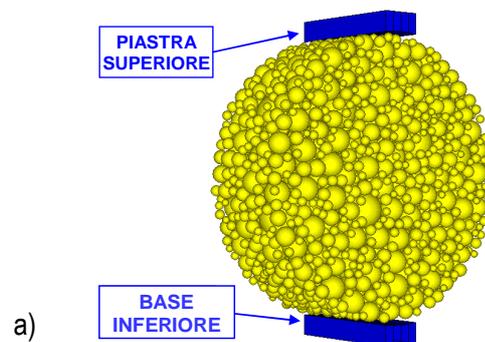


FIGURA 2.29: SCHEMATIZZAZIONE DELLE PIASTRE CON ELEMENTI *BOUNDARY*
(DONDI E BRAGAGLIA, 2006)

Il comportamento visco-elastico del conglomerato bituminoso fu modellato definendo nei punti di contatto il *Burger's model*, che come già detto simula lo spostamento relativo della singola coppia di particelle come il lavoro di deformazione di un sistema formato da una prima coppia molla-ammortizzatore in serie associata ad una seconda coppia molla-ammortizzatore in parallelo.

I valori delle resistenze normale b_n e tangenziale b_s furono assunti pari a 10^{10} N, per garantire la conservazione dei legami di contatto e permettere al modello di sviluppare il comportamento visco-elastico semplificato sia nelle fasi di carico che in quelle di scarico.

La simulazione della prova fu eseguita conferendo alla piastra superiore una velocità diretta verticalmente verso il basso con modulo tale da sviluppare ad ogni

ciclo, in un intervallo temporale di circa 124 ms, quel valore del carico impulsivo che causa nel provino una deformazione diametrale orizzontale di 5 μm .

Lo spostamento relativo della piastra superiore rispetto al modello, genera un'onda tensionale che si propaga attraverso i punti di contatto dal semicilindro superiore a quello inferiore con velocità finita, a differenza del provino nel quale lo stato tensionale indotto dalla forza verticale si sviluppa istantaneamente in tutti i punti del sistema.

Tale fenomeno è imputabile al tempo di implementazione delle equazioni da parte del solutore del codice di calcolo e cresce all'aumentare del numero di elementi costituenti il modello.

Al fine di ottenere lo stato tensionale effettivamente indotto in tutti i punti del sistema dalla forza verticale massima, il modello in ciascun ciclo di carico fermo restando il *peak load* fu confinato lateralmente con elementi *boundary* così disposti: una coppia di piani adiacenti alle basi più un anello laterale nella prima fase, una coppia di piani verticali a contatto col piano diametrale orizzontale in sostituzione degli elementi *boundary* laterali nella seconda fase (figure 2.30.a e 2.30.b).

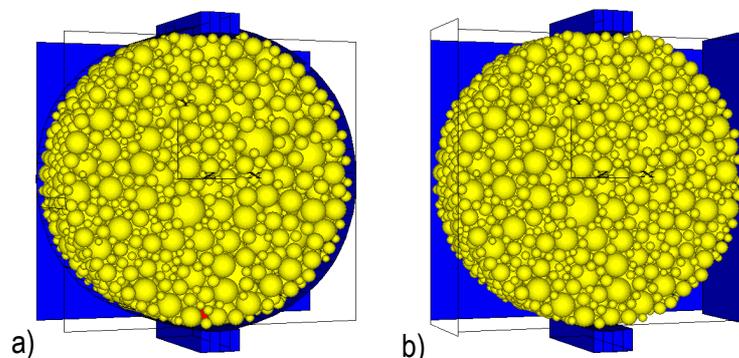


FIGURA 2.30: A) COPPIA DI PIANI VERTICALI CON ANELLO LATERALE, B) DOPPIA COPPIA DI PIANI VERTICALI
(DONDI E BRAGAGLIA, 2006)

Il primo box di confinamento permise, durante la propagazione dell'onda tensionale dalla piastra superiore a quella inferiore, la conservazione della deformazione iniziale in tutte le direzioni e l'incremento della forza sulla seconda piastra fino al 85% del valore di quella agente sulla prima.

Il secondo box di confinamento consentì invece, nella fase finale di propagazione di tale onda, di vincolare la deformazione diametrale orizzontale fino al

raggiungimento per il modello di una condizione di equilibrio rappresentata dall'uguaglianza tra la forza verticale agente sulla piastra inferiore e quella risultante sulla piastra superiore.

Tale procedimento, previa cancellazione del confinamento laterale, consentì di tracciare per ciascun ciclo di carico in corrispondenza del *peak load* la distribuzione delle forze di contatto interne al sistema, suddivise rispettivamente in nere di compressione e rosse di trazione (figura 2.31).

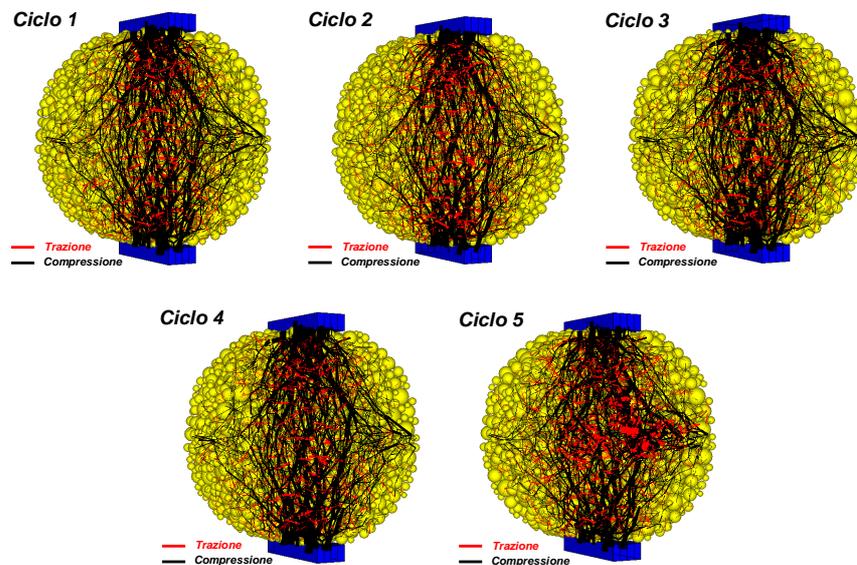


FIGURA 2.31: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO NEL MODELLO DEM
(DONDI E BRAGAGLIA, 2006)

Furono quindi inseriti nel modello nove parallelepipedi misuratori disposti in doppia fila sul piano diametrale orizzontale e su quello verticale per poter determinare l'andamento delle corrispondenti tensioni normali, di compressione sulla prima giacitura e di trazione sulla seconda.

La tensione, applicata nel baricentro della base del generico elemento misuratore, fu calcolata come rapporto tra la sommatoria delle componenti normali alla giacitura delle forze di contatto contenute nel generico parallelepipedo e l'area della sua base maggiore.

I valori puntuali di tali sforzi, prodotti nel piano diametrale dalle forze di contatto caratterizzanti uno dei semicilindri del modello, furono interpolati con una curva tridimensionale per studiarne l'andamento nello spazio; fu inoltre calcolato il

coefficiente di determinazione R^2 indicativo del grado di regressione esistente tra i valori calcolati coi parallelepipedi e quelli corrispondenti spiegati dalla curva.

Per l'interpolazione dei vettori di compressione agenti sul piano diametrale orizzontale fu adottata una curva funzione esponenziale di due variabili (figura 2.32.a) mentre per l'interpolazione dei vettori di trazione agenti sul piano diametrale verticale fu usata una curva a sella (figura 2.32.b).

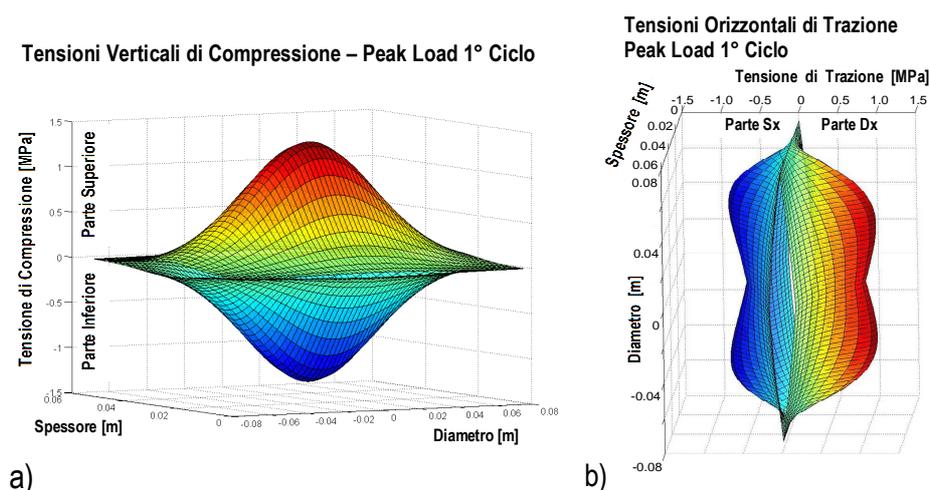


FIGURA 2.32: A) CURVE ESPONENZIALI PER SFORZI DI COMPRESSIONE, B) CURVE A SELLA PER SFORZI DI TRAZIONE (DONDI E BRAGAGLIA, 2006)

Per ciascun ciclo di carico i coefficienti della generica famiglia di curve furono modificati procedendo per tentativi fino all'individuazione di quelle curve che rendono massimo il valore del coefficiente di determinazione, ossia approssimano al meglio i risultati della modellazione numerica.

Per l'analisi dei risultati della simulazione furono tracciati i diagrammi della forza verticale e della deformazione diametrale orizzontale in funzione del tempo di carico per la simulazione e per la prova di laboratorio (figura 2.33).

La figura 2.33.a mostra come il modello durante ciascuna fase presenti curve di carico con andamento crescente in modo meno che proporzionale fino al valore di picco, simili a quelle ottenute in laboratorio; le curve di deformazione diametrale orizzontale del modello presentano invece un andamento lineare fino al raggiungimento del valore massimo pari a circa $5 \mu\text{m}$.

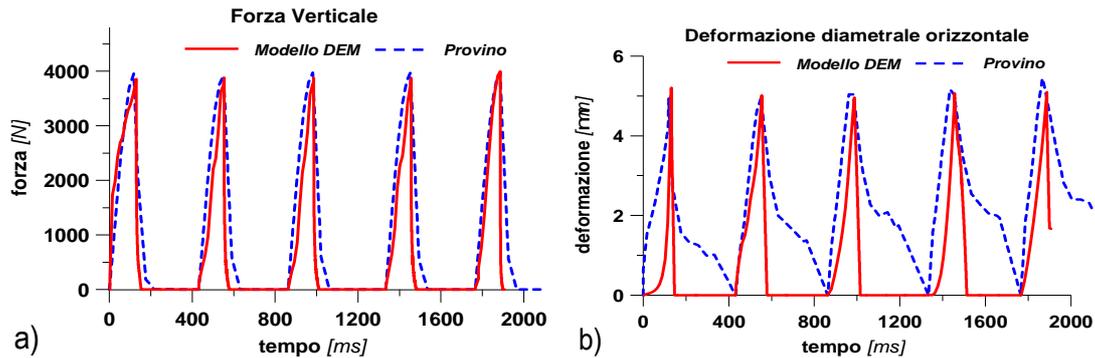


FIGURA 2.33: A) FORZA VERTICALE, B) DEFORMAZIONE DIAMETRALE ORIZZONTALE

(DONDI E BRAGAGLIA, 2006)

In conclusione, il modello utilizzato presenta curve di forza verticale e di deformazione diametrale orizzontale che approssimano al meglio quelle reali, individuando valori di picco all'incirca uguali a quelli ottenuti con la prova di laboratorio.

La simulazione permise di investigare lo stato tenso-deformativo caratterizzante il modello mettendone in evidenza, per ciascun ciclo di carico in corrispondenza del *peak load*, la distribuzione delle forze di contatto e l'andamento spaziale delle tensioni normali agenti rispettivamente sulla giacitura diametrale orizzontale ed in quella verticale.

Mediante modelli di questo tipo appare inoltre possibile, per una determinata miscela di aggregati, studiare numericamente la variazione del modulo di rigidezza a trazione indiretta in funzione della percentuale di vuoti della miscela e della percentuale di bitume al fine di individuare la percentuale ottima del legante, e ridurre così il numero di provini da sottoporre in laboratorio a test di ottimizzazione.

Un altro risvolto applicativo importante è rappresentato dalla possibilità di realizzare, previa taratura dei parametri caratteristici del conglomerato bituminoso con test di laboratorio a cicli ripetuti, modelli tridimensionali finalizzati allo studio del comportamento in sito come ad esempio la verifica dei fenomeni di ormaiamento e rottura per fatica che possono instaurarsi nelle pavimentazioni stradali.

2.3.2 Comportamento a fatica di una pavimentazione flessibile

Sebbene il DEM-P (Cundall et al., 1979) sia stato largamente impiegato nello studio dei terreni, in letteratura sono disponibili pochi riferimenti riguardanti

applicazioni su materiali legati a bitume (Chang et al., 1997; Buttlar et al., 2001; Collop et al., 2004; Dondi et al., 2005 e 2006). Questi ultimi, in particolare, confermano le potenzialità del metodo nel riprodurre l'effettivo comportamento del materiale durante test di laboratorio condotti su provini di piccole dimensioni e non prendono in considerazione la risposta complessiva di una pavimentazione stradale.

Per questo motivo gli autori Dondi et al. (2007) svilupparono un modello 3D di sovrastruttura flessibile ed indagarono le potenzialità del metodo nel riprodurre l'effettivo comportamento visco-elastico del conglomerato bituminoso. I risultati ottenuti, in particolare, risultarono compatibili con quelli ricavati dal codice BISAR e fornirono numerose informazioni aggiuntive sulla dispersione dei valori massimi delle forze di contatto.

Partendo da questi risultati, Dondi et al. (2008) approfondirono la risposta ai carichi veicolari di una pavimentazione flessibile, con particolare attenzione all'innesco ed alla propagazione del fenomeno fessurativo ed indagarono l'influenza della forma e delle dimensioni dei grani costituenti l'aggregato sul comportamento complessivo del sistema.

La modellazione fu articolata in due fasi distinte:

- la prima, nella quale fu indagata l'affidabilità della tecnica *up-scaling* di generazione delle particelle, che consiste nel moltiplicare il diametro iniziale delle sfere ($D_{iniziale}$) per un fattore amplificativo (S), ottenendo così una curva granulometrica con lo stesso andamento di quella reale e traslata verso destra di un valore (ΔD) pari a (Dondi et al., 2005):

$$\Delta D = (S - 1) \cdot D_{iniziale} \quad (2.12)$$

A tal fine fu ripreso il modello 3D di sovrastruttura flessibile precedentemente studiato (Dondi et al., 2007), di seguito denominato "modello A", nel quale, per ottimizzare i tempi di calcolo, fu utilizzata questa procedura, e fu messo a confronto con un nuovo modello, di seguito denominato "modello B", nel quale gli strati della sovrastruttura flessibile furono generati non mediante la tecnica *up-scaling*, ma attraverso particelle di diametro costante pari a quello medio della curva granulometrica corrispondente.

- la seconda, nella quale fu indagato l'andamento delle forze di contatto in corrispondenza delle interfacce tra gli strati della pavimentazione, ottenendo

così indicazioni sull'innesco e sulla propagazione del fenomeno fessurativo all'interno della sovrastruttura in esame.

Il modello A, con dimensioni pari a $2.00 \times 2.00 \times 0.68 \text{ m}^3$, fu costituito da uno strato superficiale in conglomerato bituminoso (che schematizza gli strati legati), da una fondazione in stabilizzato granulometrico e da un sottofondo in materiale granulare di spessore pari rispettivamente a 0.23 m, 0.30 m e 0.05 m (figura 2.34) (Dondi et al., 2007).

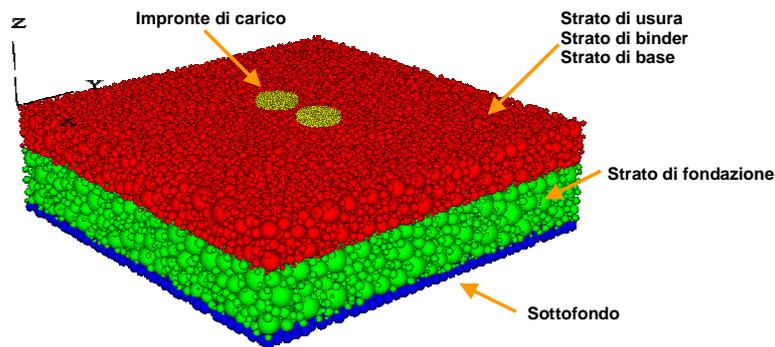


FIGURA 2.34: MODELLO A (DONDI ET AL., 2007)

La validità della procedura di generazione del sistema fu indagata confrontando le curve granulometriche ottenute dal modello numerico con quelle sperimentali. In base a tali curve fu utilizzata la tecnica dell'*up-scaling* per generare gli strati della pavimentazione; in questo modo lo strato superficiale in conglomerato bituminoso e la fondazione furono simulati rispettivamente attraverso 16800 ed 11100 particelle, il sottofondo, invece, fu generato attraverso sfere di raggio costante pari a 0.025 m.

Il comportamento visco-elastico del conglomerato bituminoso fu schematizzato attraverso il modello di *Burger*, che consente di valutare le rigidzze di contatto normale (k_n) e tangenziale (k_s) in funzione dei seguenti parametri (Collop et al., 2004): tempo di carico, coefficiente di Poisson (η), densità (γ), modulo elastico (E'), modulo di deformazione volumetrica (K') e di taglio (G') del conglomerato bituminoso, raggio medio (R), indice dei vuoti (V_v) e numero medio dei contatti (C_v) delle particelle che compongono il sistema.

Per la definizione dei contatti che schematizzano la fondazione ed il sottofondo, entrambi incoerenti, furono introdotti modelli di legame. Il comportamento del mezzo risulta quindi governato dalle rigidzze normale (k_n) e tangenziale (k_s) e dalle proprietà

d'attrito (μ). Quest'ultimo, in particolare, fu valutato partendo dall'angolo d'attrito macroscopico delle miscele ($\phi = 35^\circ$) ed assunto pari a 0.8.

La pavimentazione fu sollecitata mediante un unico ciclo di carico attraverso due impronte circolari che inducono ciascuna sulla sovrastruttura una forza verticale costante pari a 30 kN.

Il modello B, invece, con forma cilindrica di raggio pari a 0.32 m fu costituito dagli stessi strati del modello A, in termini sia di spessore sia di tipologia di materiale (figura 2.35). Questi ultimi, però, furono generati non mediante la tecnica dell'*up-scaling* ma attraverso particelle di diametro costante, pari a quello medio della curva granulometrica corrispondente. La pavimentazione fu sollecitata mediante un unico ciclo di carico attraverso un'impronta circolare uguale a quella del modello A, che induce sulla sovrastruttura una forza verticale costante pari a 30 kN.

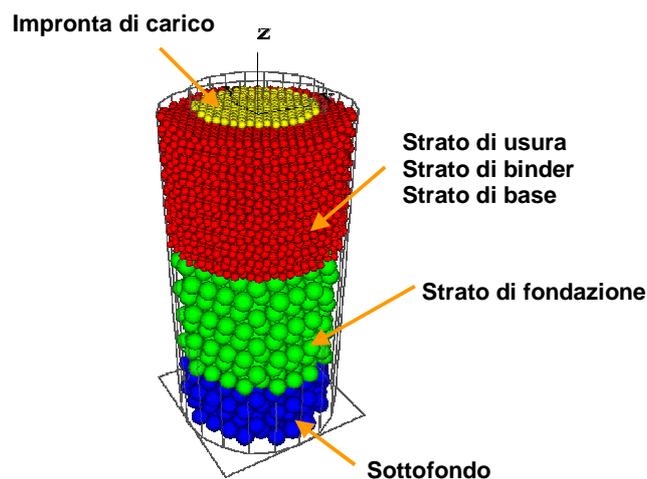


FIGURA 2.35: MODELLO B (DONDI ET AL. 2008)

Fu analizzata la distribuzione delle forze di contatto all'interno del modello A: la figura 2.36 mostra come al termine del processo di carico, queste ultime risultino prevalentemente di compressione e diffondendosi radialmente all'interno del sistema interessino prima lo strato superficiale in conglomerato bituminoso, poi la fondazione ed il sottofondo.

In corrispondenza delle interfacce degli strati che costituiscono la pavimentazione (figura 2.37), in particolare, fu analizzato l'andamento delle forze di contatto. Al fine di ottenere un confronto significativo tra i due modelli, queste ultime furono comparate introducendo opportuni fattori correttivi (F_C).

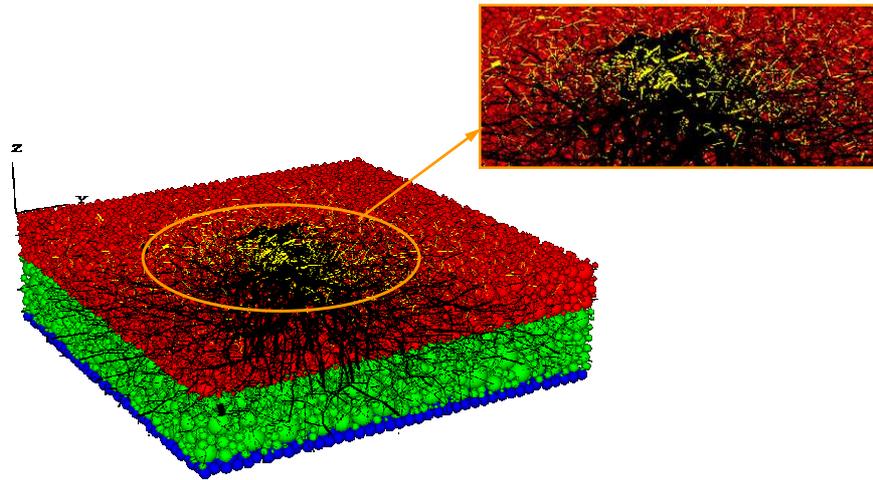
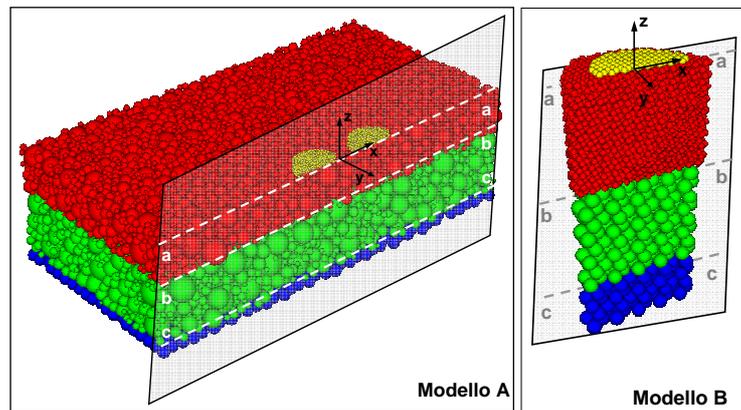


FIGURA 2.36: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO ALL'INTERNO DEL MODELLO A (FORZE DI COMPRESSIONE IN NERO, FORZE DI TRAZIONE IN GIALLO) (DONDI ET AL. 2008)



Legenda:
a-a interfaccia pneumatici-pavimentazione
b-b interfaccia base-fondazione
c-c interfaccia fondazione-sottofondo

FIGURA 2.37: INTERFACCE PER LA MISURA DELLE F_z (DONDI ET AL. 2008)

Per il modello A, F_c tiene conto del fatto che gli strati in conglomerato bituminoso e la fondazione, essendo stati generati con la tecnica dell'*up-scaling*, sono formati da particelle di diametro amplificato rispetto a quello della curva granulometrica reale. Per la sua valutazione, in particolare, fu calcolato il numero medio di contatti che si generano tra le particelle di diametro reale che sono contenute all'interno di un grano in *up-scaling*, nelle configurazioni di addensamento massimo e minimo (figura 2.38).

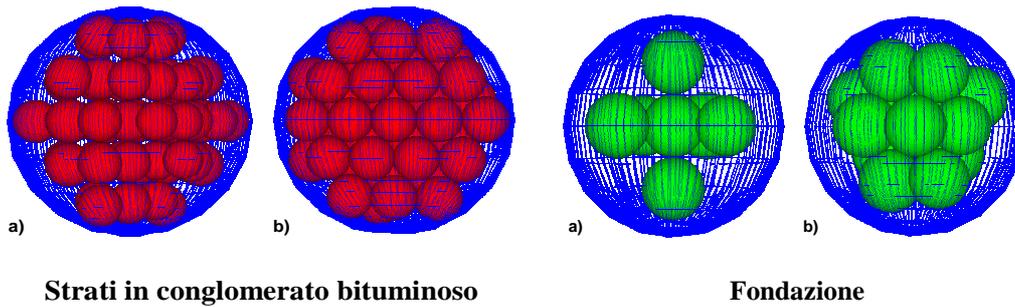


FIGURA 2.38: MODELLO A: PARTICELLE DI DIAMETRO REALE CONTENUTE ALL'INTERNO DI UN GRANO IN UP-SCALING, PER GLI STRATI IN CONGLOMERATO BITUMINOSO E PER LA FONDAZIONE, NELLE CONFIGURAZIONI DI ADDENSAMENTO MINIMO (A) E MASSIMO (B) (DONDI ET AL. 2008)

Per il modello B, invece, F_c tiene conto del confinamento laterale che l'elemento cilindrico di contorno esercita sulla diffusione della perturbazione indotta dal carico all'interno della pavimentazione.

In entrambi i modelli le forze di contatto (F_2) manifestarono un massimo sotto le impronte di carico ed una progressiva diminuzione procedendo verso il contorno del modello. Il confronto tra i valori di picco, in particolare, confermò le potenzialità della tecnica *up-scaling* nella generazione delle particelle.

Note le forze di contatto massime in corrispondenza del piano viabile e dell'interfaccia tra lo strato di base e la fondazione, per il modello A furono investigate le modalità con cui si innescano e si diramano le fessurazioni. A tal fine fu utilizzata la legge di *Paris-Erdogan* in forma integrale, la quale consente di determinare il numero di cicli di carico (N_f) necessari all'innescò di una fessura di lunghezza c_0 , in funzione del fattore di concentrazione degli sforzi (*stress intensity factor*, ΔK_{cr}) e delle costanti del materiale A ed n (Dondi, 1993):

$$N_f = \frac{1}{A \cdot (\Delta K_{cr})^n} \cdot (c_0 - 0) \quad (2.13)$$

Per i conglomerati bituminosi n si assume pari a 4 (Dondi, 1993), mentre il parametro A si valuta dalla seguente espressione (Dondi, 1993):

$$n = -0.92 - 0.42 \cdot \log A \quad (2.14)$$

Di complessa determinazione, invece, risulta essere lo *stress intensity factor*, in quanto dipende dalle condizioni geometriche e da quelle di contorno del modello, nonché dal tipo di frattura. Per il modello A, ΔK_{cr} si valutò secondo l'espressione (2.15)

in funzione del modulo elastico del materiale (E) e dell'energia per unità di superficie assorbita in seguito all'innescò della frattura (γ_s) (Dondi, 1993):

$$\Delta K_{cr} = \sqrt{2 \cdot \gamma_s \cdot E} \quad (2.15)$$

Per la valutazione di γ_s si impose il bilancio energetico del sistema in funzione dell'energia di deformazione elastica (W_{el}) e di quella superficiale assorbita (W_s):

$$W_{tot} = W_{el} - W_s = W_{el} - 2 \cdot c_0 \cdot \gamma_s = 0 \quad (2.16)$$

$$\gamma_s = \frac{W_{el}}{2 \cdot c_0} \quad (2.17)$$

In corrispondenza sia del piano viabile sia dell'interfaccia tra lo strato di base e la fondazione, fu graficato l'andamento dell'energia elastica di deformazione per unità di lunghezza (W_{el}), al fine di individuare il corrispondente valore di picco da inserire nella (2.17).

La lunghezza iniziale della frattura (c_0), invece, fu definita come la quota del punto a massima energia elastica, misurata rispetto alla giacitura di riferimento; da tale analisi si evidenziò che i requisiti prestazionali della pavimentazione modellata iniziano a decadere dopo $1.19 \cdot 10^7$ cicli di carico. Le fratture, in particolare, si innescano in corrispondenza sia del piano viabile sia dell'interfaccia tra lo strato di base e la fondazione.

I risultati ottenuti furono confrontati con quelli ricavati mediante la legge di fatica dell'*AASHTO Road Test*, la quale lega la deformazione di rottura alla base dei conglomerati bituminosi (ϵ) al numero di applicazioni di carico (N). Per la valutazione di ϵ fu utilizzato il codice di calcolo *BISAR*. Per il sottofondo elastico, in particolare fu utilizzato un materiale con modulo di Young e coefficiente di Poisson molto alti, al fine di schematizzare il piano orizzontale inferiore di contenimento previsto dal modello DEM.

Il confronto, in particolare, fu eseguito per l'interfaccia base-fondazione (tabella 2.2).

	Interfaccia	
	Piano viabile	Base-fondazione
Legge di Paris-Erdogan – DEM-P (2)	$1.68 \cdot 10^7$	$1.19 \cdot 10^7$
Legge di fatica dell'AASHTO Road Test	---	$7.81 \cdot 10^8$

TABELLA 2.2: NUMERO DI CICLI DI CARICO CHE PORTANO A ROTTURA IL MODELLO A

(DONDI ET AL. 2008)

Dall'analisi dei risultati ottenuti si evidenziò che la legge di fatica di *Paris-Erdogan* specializzata con il Metodo degli Elementi Distinti Particellari fornisce un valore del numero di cicli di carico inferiore a quello valutato con la formulazione classica. Questo risultato può essere imputabile a diversi fattori: in primo luogo al fatto che per alcuni parametri, quali ad esempio lo *stress intensity factor*, sono necessari opportuni approfondimenti sperimentali; in secondo luogo alla forma delle particelle utilizzate nei modelli, in quanto le sfere adottate consentono uno sviluppo parziale dell'ingranamento tra gli elementi dell'inerte.

Per risolvere il problema, può essere conveniente introdurre parametri, quali forma e dimensioni dei grani dell'aggregato, per ora trascurati a causa di limiti computazionali. A tal fine fu creato un nuovo modello, di seguito denominato "modello C", costituito dagli stessi strati del modello B, sia in termini di spessore sia di tipologia di materiale, ma generato attraverso la logica *clump*. Quest'ultima, in particolare, consente di creare elementi di forma generica, dotati di comportamento rigido, ottenuti assemblando particelle circolari. Per il modello C furono definiti quattro tipi di *clump*, due per gli strati legati a bitume e due per la fondazione, caratterizzati da forma e dimensioni diverse (tabelle 2.3 e 2.4).

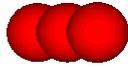
Numero di particelle del <i>clump</i>	3	5
Raggio delle particelle che compongono il <i>clump</i>	Ball n. 1: $(R_1/2)$ Ball n. 2: $(R_1/2)$ Ball n. 3: $(R_1/2)$	Ball n. 1: $(R_1/2)$ Ball n. 2: $(R_1/2)$ Ball n. 3: $(R_1/2)$ Ball n. 4: $(R_1/2)$ Ball n. 5: $(R_1/2)$
Descrizione del <i>clump</i>		

TABELLA 2.3: MODELLO C, *CLUMP* UTILIZZATI PER LO STRATO DI FONDAZIONE (R_1 È IL RAGGIO MEDIO DEL GRANO REALE DELLA FONDAZIONE) (DONDI ET AL. 2008)

Il modello fu sollecitato mediante un unico ciclo di carico attraverso un'impronta circolare uguale a quella del modello B, che induce sulla sovrastruttura una forza verticale costante pari a 30 kN (figura 2.39).

Numero di particelle del <i>clump</i>	3	5
Raggio delle particelle che compongono il <i>clump</i>	Ball n. 1: $(R_2/2)$ Ball n. 2: $0.85 \cdot (R_2/2)$ Ball n. 3: $0.85 \cdot (R_2/2)$	Ball n. 1: $(R_2/2)$ Ball n. 2: $0.75 \cdot (R_2/2)$ Ball n. 3: $0.75 \cdot (R_2/2)$ Ball n. 4: $0.75 \cdot (R_2/2)$ Ball n. 5: $0.75 \cdot (R_2/2)$
Descrizione del <i>clump</i>		

TABELLA 2.4: MODELLO C, *CLUMP* UTILIZZATI PER GLI STRATI LEGATI (R_2 È IL RAGGIO MEDIO DEL GRANO REALE DEGLI STRATI LEGATI A BITUME) (DONDI ET AL. 2008)

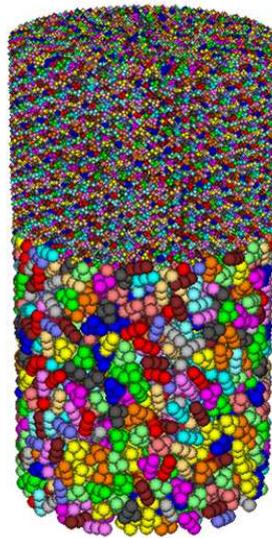


FIGURA 2.39: MODELLO C (DONDI ET AL. 2008)

In corrispondenza delle interfacce degli strati che costituiscono la pavimentazione fu analizzato l'andamento delle forze di contatto. Al fine di ottenere un confronto significativo tra i modelli B e C, queste ultime furono comparate introducendo un fattore correttivo che tiene conto del confinamento laterale che l'elemento cilindrico di contorno esercita sulla diffusione della perturbazione indotta dal carico all'interno del sistema.

Dall'analisi dei risultati ottenuti si evidenziò che il modello C è caratterizzato da valori di picco delle forze di contatto diversi da quelli del modello B, superiori in modulo. Tenendo in conto di parametri quali la forma e le dimensioni dei grani dell'inerte, quindi, fu possibile individuare nuovi punti in corrispondenza dei quali possono innescarsi le fratture.

Dal presente studio si può concludere che la tecnica *up-scaling*, consentendo l'aumento del diametro delle particelle, garantisce una notevole riduzione dei tempi di calcolo; il Metodo degli Elementi Distinti Particellari, fornendo i valori di picco delle forze e degli spostamenti a cui è soggetto il sistema, consente una rappresentazione del modello molto fedele alla realtà fisica e si propone quindi come una valida evoluzione delle teorie tradizionali basate, invece, sui valori medi delle grandezze indagate.

Per lo studio del comportamento a fatica, in particolare, è possibile ottenere indicazioni sia sul numero di cicli di carico che la portano a rottura, operazione questa già possibile con le tecniche classiche, sia soprattutto sulla localizzazione del punto d'innescò della frattura. Diventa così possibile studiare la propagazione di fenomeni fessurativi di tipo *bottom-up* e *top-down*, tenendo in considerazione anche la sovrapposizione degli effetti conseguente alla loro interazione all'interno dello strato.

2.3.3 Conclusioni

Mediante modelli tridimensionali appare pertanto possibile l'introduzione di parametri, quali la forma e le dimensioni dei grani dell'aggregato, allo scopo di ottenere un modello più rispondente alla realtà fisica, che permette anche di approfondire il comportamento a fatica del sistema individuando nuovi punti in corrispondenza dei quali possono innescarsi le fratture.

Si è dimostrato quanto sia importante la possibilità di realizzare modelli tridimensionali finalizzati allo studio del comportamento in sito come ad esempio la verifica dei fenomeni di ormaiamento e rottura per fatica che possono instaurarsi nelle pavimentazioni stradali.

Tale tecnica rappresenta quindi una valida evoluzione dei modelli tradizionali a due dimensioni, nonostante necessiti lunghi tempi di calcolo che possono comunque essere superati con processori di calcolo di ultima generazione.

Sviluppi futuri vedranno test di ricerca atti a migliorare la relazione che lega i parametri microscopici del modello con quelli macroscopici derivanti dalla letteratura o da test di laboratorio.

LA MODELLAZIONE DEM DI UNA PROVA TRIASSIALE

3.1 Introduzione

Il test triassiale è probabilmente il test di laboratorio più diffuso nell'ingegneria civile per determinare le caratteristiche della risposta di un terreno.

Si ricorda che nella prova triassiale il provino cilindrico è racchiuso lateralmente da una sottile membrana in gomma fermata alle estremità da anelli elastici; è separato dalla base e dalla sommità di carico mediante piastre rigide porose ed è confinato lateralmente da un liquido in pressione.

Inizialmente il provino è consolidato sotto l'azione di una pressione isotropa (portando in pressione il liquido) ed in seguito viene applicata la sollecitazione assiale tramite il movimento a velocità costante della piastra superiore.

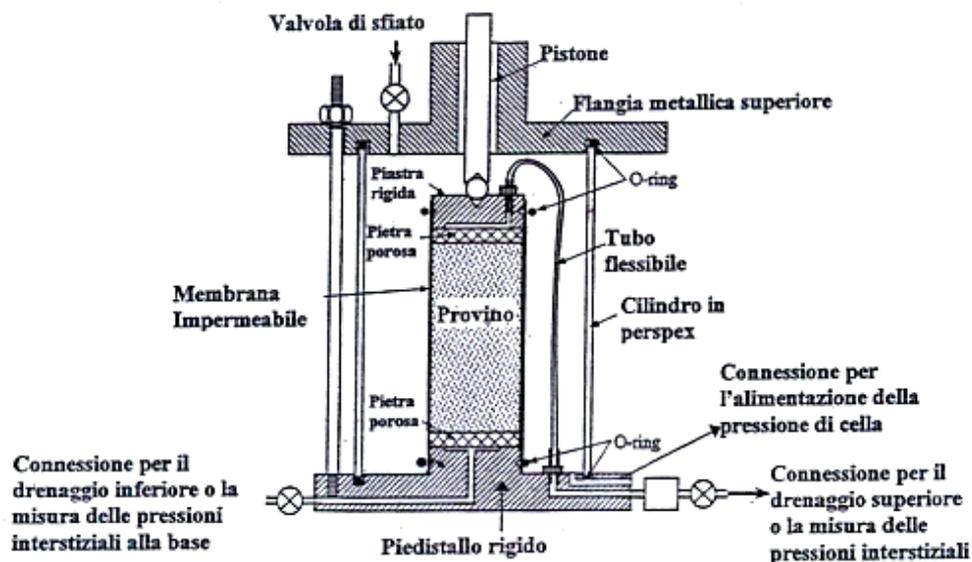


FIGURA 3.1: L'ATTREZZATURA DI PROVA

In figura 3.1 si può osservare l'apparato di prova il quale comprende le seguenti parti principali:

- cella triassiale, costituita da una camera cilindrica a tenuta alle cui estremità sono montati il pistone di carico (al tetto) e le opportune connessioni idrauliche (alla base);
- sistema per la regolazione e la misura della pressione di cella e di quella interstiziale;
- pressa per la compressione assiale del provino;
- strumenti di misura.

3.2 Il comportamento di un materiale a grana grossa

3.2.1 Introduzione

In un materiale caratterizzato da una granulometria grossolana la permeabilità è elevata e qualunque variazione di pressione dell'acqua, rispetto alla pressione iniziale, si dissipa in tempi molto brevi, qualunque sia la causa che la provochi. Pertanto per queste miscele lo studio del comportamento del materiale può avvenire in condizioni drenate.

Consideriamo il comportamento di due provini, uno caratterizzato da densità elevata (denso) e l'altro da densità bassa (sciolto), a parità di tensione di confinamento.

Si riportano a titolo d'esempio gli andamenti dello sforzo deviatorico e dell'indice dei vuoti, all'aumentare della deformazione assiale, per una sabbia densa ed una sciolta, a parità di tensione di confinamento (figura 3.2).

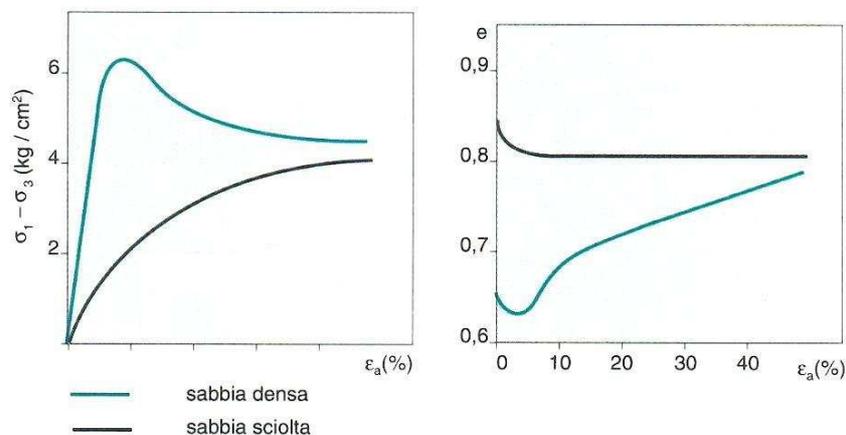


FIGURA 3.2: COMPORTAMENTO DILATANTE ED INCRUDENTE (COLOMBO E COLLESELLI, 1994)

Il materiale sciolto sottoposto a sforzo deviatorico tende ad aumentare di densità prima di giungere a rottura. I grani si spostano per raggiungere una configurazione più stabile, l'indice di vuoti iniziale si riduce fino a raggiungere un valore critico ed un corrispondente stato ultimo oltre il quale il materiale continua a deformarsi senza variazione di volume e di resistenza. Si dice allora che la curva sforzo-deformazione è corrispondente ad un materiale *includente*.

Il materiale denso, invece, presenta al crescere della deformazione assiale ϵ_a una curva di resistenza con un massimo accentuato, corrispondente alla condizione di rottura, ed un valore residuo, per grandi deformazioni, pressoché eguale al valore di resistenza mostrato dal provino di sabbia sciolta; presenta inoltre un'iniziale, piccola diminuzione di volume (e quindi di indice dei vuoti), seguita da un'inversione di tendenza per cui l'indice dei vuoti supera il valore iniziale e tende allo stesso valore d'indice dei vuoti critico e_{crit} .

Di conseguenza per arrivare a rottura occorre energia sia per il lavoro dovuto all'attrito legato agli spostamenti relativi delle particelle (traslazioni e rotazioni) sia per il lavoro svolto per permettere l'aumento di volume contrastato dalle componenti normali (tensione di confinamento).

La resistenza per arrivare alla rottura per un materiale denso è maggiore di quella per un materiale sciolto; la curva sforzo-deformazione è corrispondente ad un materiale *rammollente* o *dilatante* e nella curva è chiaramente individuato un valore massimo detto di rottura.

In sostanza, il provino di sabbia densa, rispetto a quello di sabbia sciolta:

- è più rigido;
- ha una maggiore resistenza di picco;
- ha eguale resistenza residua;
- aumenta di volume per grandi deformazioni, mentre il provino di sabbia sciolta diminuisce di volume;
- ha lo stesso indice dei vuoti critico, ovvero la stessa densità relativa per grandi deformazioni.

Si può osservare, inoltre, che superata la rottura si ha una diminuzione di resistenza attribuibile alla diminuzione del grado di incastro e l'indice dei vuoti aumenta tendendo per grandi deformazioni verso il valore critico, cioè a quel valore

che non varia con il procedere delle deformazioni (quindi senza variazioni di volume e di resistenza).

Quanto finora esposto sottolinea la primaria importanza della densità (o dell'indice dei vuoti o della porosità) sui valori dell'angolo di attrito di picco.

Con riferimento alle prove triassiali si può rappresentare (figura 3.3) la compressibilità attraverso il modulo tangente, che indica la pendenza di una linea retta tangente ad un particolare punto della curva sforzo-deformazione, o mediante il modulo secante che indica la pendenza della retta che collega due punti della curva sforzo-deformazione. Così si considera il modulo tangente iniziale riferito come tangente alla curva nell'origine o il modulo secante corrispondente alla retta passante per l'origine e per il punto corrispondente allo sforzo deviatorico, pari al 50% di quello a rottura.

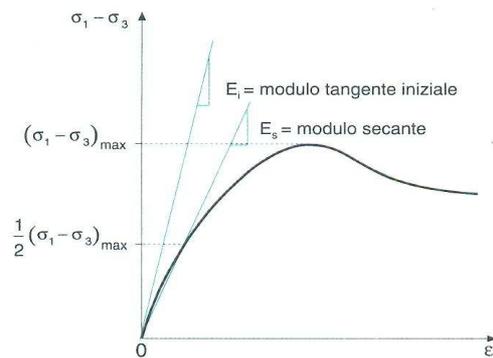


FIGURA 3.3: I MODULI TANGENTE E SECANTE (COLOMBO E COLLESELLI, 1994)

3.2.2 Caratteristiche di resistenza e circoli di Mohr

La resistenza al taglio che si verifica sulle aree di contatto tra i grani è proporzionale alla forza che li spinge l'uno contro l'altro e la si può pertanto considerare una forza di attrito.

Coulomb nel 1773 propose, per i mezzi granulari, la relazione tra la tensione di taglio e la tensione normale:

$$\tau = \sigma \tan \Phi \quad (3.1)$$

nella quale $\tan \Phi$ esprime il coefficiente di attrito.

Per i mezzi coerenti Coulomb propose che ad equilibrare il taglio oltre all'attrito figurasse anche una resistenza detta coesione, che si manifesta anche a tensione normale nulla. La relazione precedente assume quindi la forma:

$$\tau = c + \sigma \tan \Phi \quad (3.2)$$

La svolta decisiva nello studio della resistenza al taglio ebbe inizio con la scoperta da parte di Terzaghi del principio della pressione effettiva e con la modifica della relazione di Coulomb nella forma:

$$\tau = c' + (\sigma - u) \tan \Phi' = c' + \sigma' \tan \Phi' \quad (3.3)$$

nella quale c' e Φ' sono espressi in termini di pressioni effettive. In questa nuova forma la relazione di Coulomb-Terzaghi ha assunto validità per una grande varietà di materiali e di condizioni di carico.

Questa situazione di rottura è rappresentata nel piano τ, σ' da una retta i cui punti indicano stati tensionali di rottura; i punti al di sotto della retta rappresentano situazioni di parziale sicurezza rispetto alla rottura e quelli al di sopra situazioni irrealizzabili.

Il problema venne ulteriormente chiarito associando alla relazione di Coulomb il criterio di rottura di *Mohr* $\tau = f(\sigma)$ secondo cui si verifica la rottura quando la tensione di taglio sul piano di rottura diventa una funzione della tensione normale a quel piano.

Questo criterio è espresso dalla relazione:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \quad (3.4)$$

che indica che la rottura ha luogo quando il raggio del cerchio di *Mohr* delle tensioni $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ è funzione della semisomma delle tensioni principali maggiore e minori $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$, cioè della distanza del centro di questo cerchio dall'origine.

La condizione di rottura perciò può essere definita in termini di curva involuppo di *Mohr*, cioè di curva tangente ai cerchi di rottura (figura 3.4).

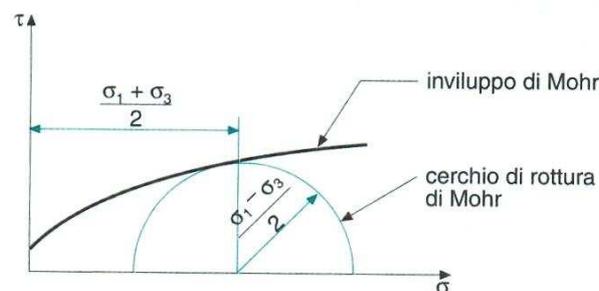


FIGURA 3.4: L'INVILUPPO DI *MOHR* (COLOMBO E COLLESELLI, 1994)

In pratica l'involuppo di *Mohr* è valido all'interno di un certo campo di pressioni normali e quindi può assumere la forma dell'equazione di Coulomb, dando luogo alla *legge di rottura di Mohr-Coulomb*. Considerando ancora la relazione della retta di rottura $\tau = c' + \sigma' \tan \Phi'$ essa può anche essere scritta in termini di tensioni principali effettive (figura 3.5):

$$\frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) = \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} + c' \cot \Phi' \right) \sin \Phi' \quad (3.5)$$

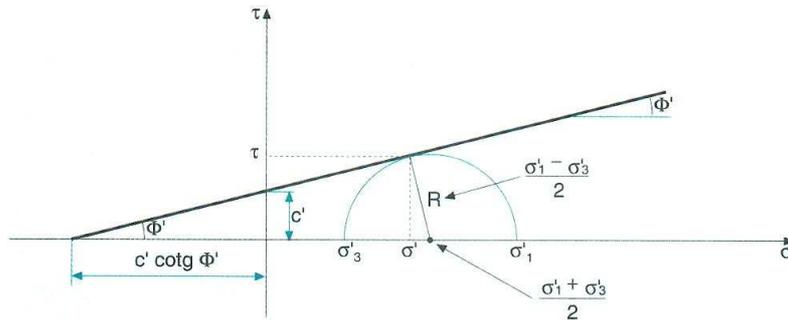


FIGURA 3.5: L'INVILUPPO DI *MOHR* IN TERMINI DI TENSIONI PRINCIPALI EFFETTIVE
(COLOMBO E COLLESELLI, 1994)

Grazie ai test triassiali è possibile ricavare varie combinazioni di tensioni σ_1 e σ_3 , ed è quindi possibile disegnare i cerchi di *Mohr* e ottenere l'involuppo sui cerchi in modo da ricavare l'angolo di resistenza al taglio (figura 3.6).

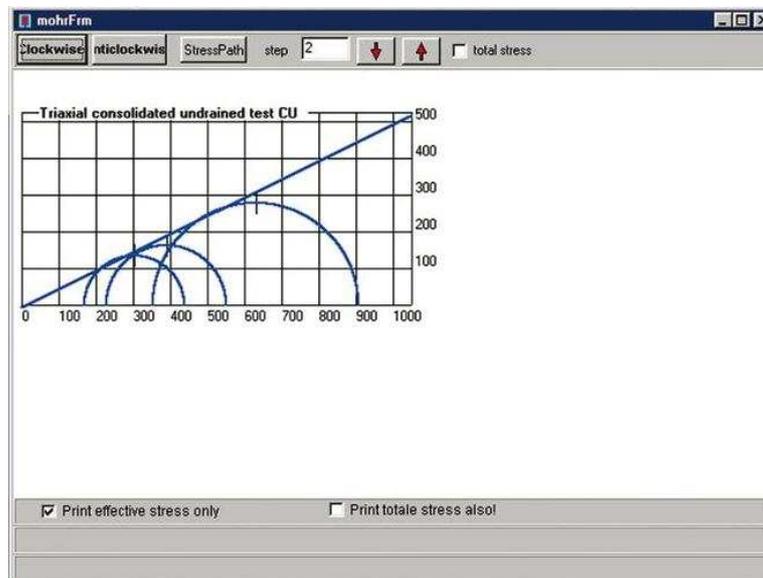


FIGURA 3.6: RAPPRESENTAZIONE DEI CIRCOLI DI *MOHR* (TECNOTEST S.R.L.)

3.3 La modellazione DEM di una prova triassiale

La modellazione DEM di una prova triassiale prevede due fasi distinte:

- la schematizzazione della cella triassiale, simulata attraverso un elemento cilindrico, chiuso superiormente ed inferiormente da due pareti che riproducono le piastre di carico (figura 3.7);
- la definizione dei parametri microscopici delle particelle che compongono il provino.

Quest'ultimo, in particolare, ha diametro pari a 0.1 m ed altezza pari a 0.2 m.

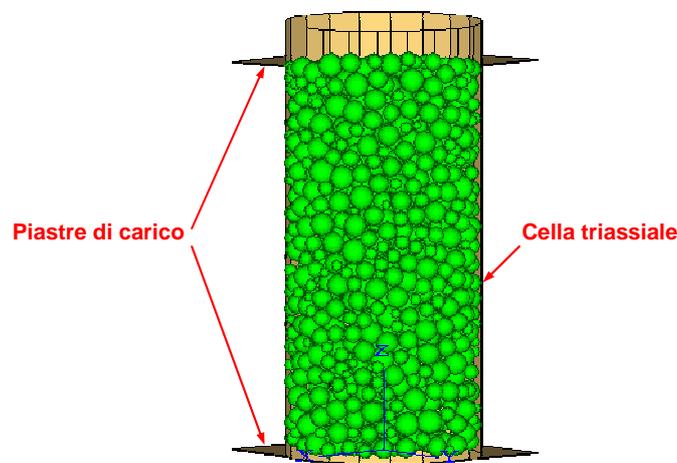


FIGURA 3.7: MODELLAZIONE DELLA CELLA TRIASSIALE E DEL PROVINO

La prova, di tipo consolidato drenato, è modellata in due fasi distinte (figura 3.8):

- quella iniziale di compressione isotropa, nella quale il campione viene lasciato consolidare sotto l'azione della pressione di cella;
- quella di rottura, nella quale il provino è sottoposto ad uno sforzo di compressione assiale.

La prova, come avviene in realtà, è svolta in controllo di deformazione, specificando la velocità delle pareti superiore ed inferiore della cella.

Durante tutte le fasi del test, la velocità radiale del muro cilindrico di confinamento è controllata automaticamente utilizzando un servo-meccanismo, che mantiene una tensione di confinamento costante all'interno del campione.

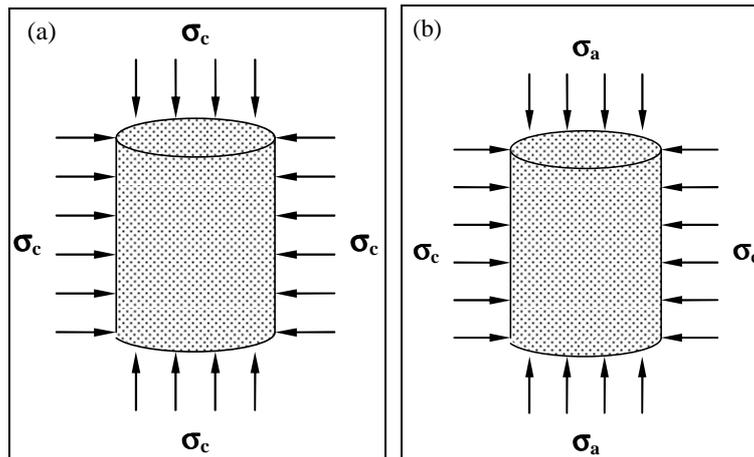


FIGURA 3.8: PROVA TRIASSIALE A) FASE DI COMPRESSIONE ISOTROPA, B) FASE DI ROTTURA

Inizialmente, oltre ad annullare eventuali velocità e rotazioni residue dalle fasi precedenti, per simulare un confinamento “soft” come accade nella realtà, è stata ridotta la rigidità del muro laterale utilizzando la funzione *cws*, ad un valore pari ad 1/10 della rigidità delle sfere (Itasca, 2003).

```

def cws ; change lateral wall stiffnesses
command
wall type cylinder id 1 kn=w_stiff
end_command
end
;
SET w_stiff= 1e7 ; make lateral wall stiffness=1/10 of ball stiffness
cws
cyc 5000

set log on

macro zero 'ini xvel 0 yvel 0 zvel 0 xspin 0 yspin 0 zspin 0'
zero
    
```

Successivamente viene anche inserita la funzione *macro zero*, che ha lo scopo di annullare le velocità e le accelerazioni delle particelle.

Al fine di realizzare la prova triassiale, sono state richiamate le funzioni *fish servo* e *get_gain*, con le quali si attiva un servo-meccanismo numerico che mantiene costante la tensione di confinamento durante tutto il processo di carico. La funzione *servo* viene attivata una volta per ciclo, e richiama la funzione *get_ss* in modo da determinare le tensioni, e attraverso l'utilizzo di un sistema *servo-control* corregge la velocità dei muri, in modo da ridurre la differenza tra i valori di tensione misurati e quelli richiesti.

```
def servo
while_stepping
get_ss
udr = gr * (wsrr - srrreq)
w_radvel(wadd1) = -udr
if z_servo = 1
udz = gz * (wszz - szzreq)
w_zvel(wadd5) = udz
w_zvel(wadd6) = -udz
end_if
end
```

```
def get_gain
alpha = 0.5
count = 0
avg_stiff = 0
cp = contact_head
loop while cp # null
if c_gobj2(cp) = wadd1
count = count + 1
avg_stiff = avg_stiff + c_kn(cp)
end_if
cp = c_next(cp)
end_loop
avg_stiff = avg_stiff / count
gr = alpha * height * pi * rad_cy * 2.0 / (avg_stiff * count * tdel)
count = 0
avg_stiff = 0
cp = contact_head
loop while cp # null
if c_gobj2(cp) = wadd5
count = count + 1
avg_stiff = avg_stiff + c_kn(cp)
end_if
if c_gobj2(cp) = wadd6
count = count + 1
avg_stiff = avg_stiff + c_kn(cp)
end_if
cp = c_next(cp)
end_loop
ncount = count / 2.0
avg_stiff = avg_stiff / count
gz = alpha * pi * rad_cy^2.0 / (avg_stiff * ncount * tdel)
end
```

```
def get_ss
new_rad = w_radend1(wadd1)
rdif = new_rad - rad_cy
zdif = w_z(wadd6) - w_z(wadd5)
new_height = height + zdif
wsrr = -w_radfob(wadd1) / (new_height * 2.0 * pi * new_rad)
wszz = 0.5 * (w_zfob(wadd5) - w_zfob(wadd6)) / (pi * new_rad^2.0)
werr = 2.0 * rdif / (rad_cy + new_rad)
wezz = 2.0 * zdif / (height + new_height)
wevol = wezz + 2.0 * werr
end
```

La funzione *iterate* viene utilizzata per far proseguire il processo di calcolo, tramite *step* da 100 cicli, prima di raggiungere lo stato tensionale richiesto, che deve ricadere all'interno del valore di tolleranza indicato.

```

def iterate
loop while 1 # 0
get_gain
if abs((wsrr - srrreq)/srrreq) < sig_tol then
if abs((wszz - szzreq)/szzreq) < sig_tol then
exit
end_if
end_if
command
cycle 100
end_command
end_loop
end

```

Attraverso la funzione *accel_platens* è possibile incrementare, in modo controllato, la velocità delle piastre di carico superiore e inferiore, definendo così le seguenti variabili:

```

def conf
devi = wszz - wsrr ; DEVIATORIC STRESS
deax = wezz - wezz_0 ; AXIAL STRAIN
devol = wevol - wevol_0 ; VOLUMETRIC STRAIN
conf = wsrr ; CONFINING STRESS
end

```

Tale velocità incrementa fino a raggiungere quella *_vfinal* in un numero predefinito di *step*, indicato con *_nstep*.

Le tensioni assiale e di confinamento sono state valutate come il valor medio di quelle che agiscono rispettivamente sulle superfici di base e sulle due semicirconferenze laterali individuate dal provino, dividendo la forza totale applicata per l'area relativa.

Le deformazioni assiali si determinano in funzione dell'altezza iniziale (L_0) e finale (L) del provino utilizzando la seguente relazione:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{\frac{1}{2} \cdot (L_0 + L)} \quad (3.6)$$

Quelle volumetriche si valutano in funzione del raggio iniziale (R_0) e finale (R) del cilindro sfruttando la seguente equazione:

$$\varepsilon = \frac{R - R_0}{\frac{1}{2} \cdot (R_0 + R)} \quad (3.7)$$

La pressione di confinamento (σ_c) è mantenuta costante mediante una funzione che adatta la velocità radiale della parete cilindrica (\dot{u}_w) in modo da conservare la

tensione misurata ($\sigma^{measured}$) entro uno scarto dell'1% da quella richiesta ($\sigma^{required}$) secondo la formula:

$$\dot{u}_w = G \cdot (\sigma^{measured} - \sigma^{required}) = G \cdot \Delta\sigma \quad (3.8)$$

Il parametro G si determina valutando l'incremento della tensione applicata alla parete cilindrica ($\Delta\sigma_w$) che si genera in un singolo *timestep* (Δt) secondo la formula (Itasca, 2002):

$$\Delta\sigma_w = \frac{k_{n_w} \cdot N_c \cdot \dot{u}_w \cdot \Delta t}{A} \quad (3.9)$$

dove \dot{u}_w è la velocità radiale della parete cilindrica, N_c è il numero di contatti particella-muro, k_{n_w} è la rigidità normale di questi contatti e A è l'area della parete.

Per la significatività del test è necessario che si verifichi la condizione:

$$|\Delta\sigma_w| < |\Delta\sigma| \quad (3.10)$$

Sostituendo la 3.8 e la 3.9 nella 3.10 si ottiene:

$$\frac{k_{n_w} \cdot N_c \cdot G \cdot |\Delta\sigma| \cdot \Delta t}{A} < |\Delta\sigma| \quad (3.11)$$

da cui:

$$G = \frac{A}{k_{n_w} \cdot N_c \cdot \Delta t} \quad (3.12)$$

Per ogni ciclo di calcolo sono stati monitorati:

- le forze di contatto interne al provino, che aumentano all'avanzare del test (figura 3.9);
- la tensione di confinamento (σ_c);
- la tensione assiale (σ_a);
- la tensione deviatorica ($\sigma_d = \sigma_a - \sigma_c$);
- la deformazione assiale (ϵ_a);
- la deformazione volumetrica (ϵ_v);
- l'andamento della tensione deviatorica ($\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3$) in funzione della deformazione assiale (ϵ_a);
- l'andamento della variazione volumetrica del campione ($\Delta V/V$) in funzione della deformazione assiale (ϵ_a).

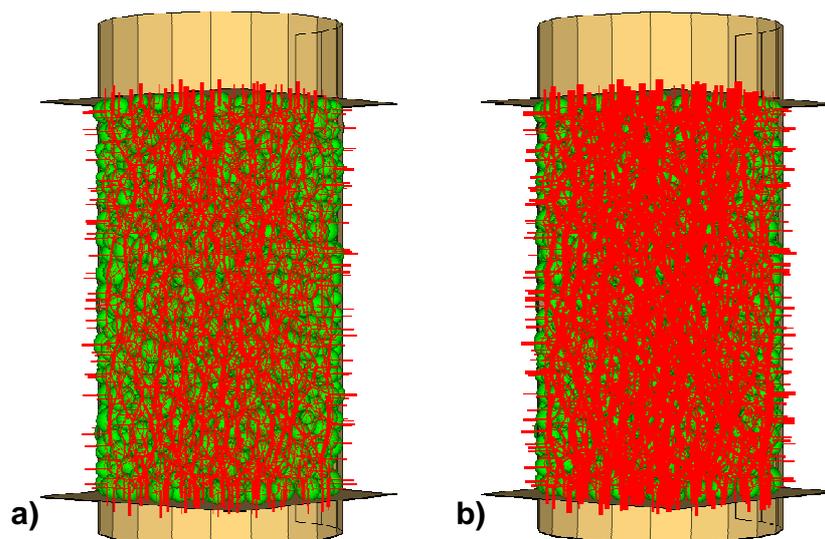


FIGURA 3.9: ANDAMENTO DELLE FORZE DI CONTATTO ALL'INIZIO (A) E ALLA FINE (B) DELLA FASE DI ROTTURA

3.4 I parametri significativi nella modellazione DEM di un test triassiale

Per riprodurre un test triassiale mediante la metodologia DEM è indispensabile conoscere quali sono i parametri del materiale che condizionano sia la significatività della modellazione, sia il risultato finale del test.

A tal fine di seguito si riportano i principali risultati bibliografici differenziati in funzione del parametro di riferimento.

3.4.1 Andamenti delle curve al variare della pressione di confinamento

È possibile stimare gli effetti della variazione della σ_3 , che ricordiamo essere pari alla σ_3' in un test drenato, andando ad eseguire una serie di test su provini che possiedono lo stesso indice dei vuoti ma diversa pressione di confinamento. Ci si aspetta quindi che lo sforzo di taglio aumenti all'aumentare della σ_3 .

Un modo conveniente per evidenziare graficamente la tensione principale è quello di normalizzarla calcolando il rapporto σ_1/σ_3 che, per un test drenato come abbiamo già detto risulta uguale a σ_1'/σ_3' .

In fase di rottura risulta quindi:

$$\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)_{\max} = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} = \tan^2 \left(45 + \frac{\phi'}{2}\right) \quad (3.13)$$

dove ϕ' è l'angolo efficace d'attrito interno.

La differenza tra le tensioni principali è relazionata al rapporto tra le stesse grandezze nel seguente modo:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_3 \left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'} - 1 \right) = \sigma_1' - \sigma_3' \quad (3.14)$$

La stessa relazione, a rottura, viene espressa come:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \sigma_{3f}' \left[\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'} \right)_{\max} - 1 \right] \quad (3.15)$$

Risultati tipici di un test triassiale drenato sono riportati in figura 3.10, in cui si evidenzia il rapporto tra le tensioni principali a confronto con la deformazione assiale, per diverse pressioni effettive di confinamento σ'_{3c} .

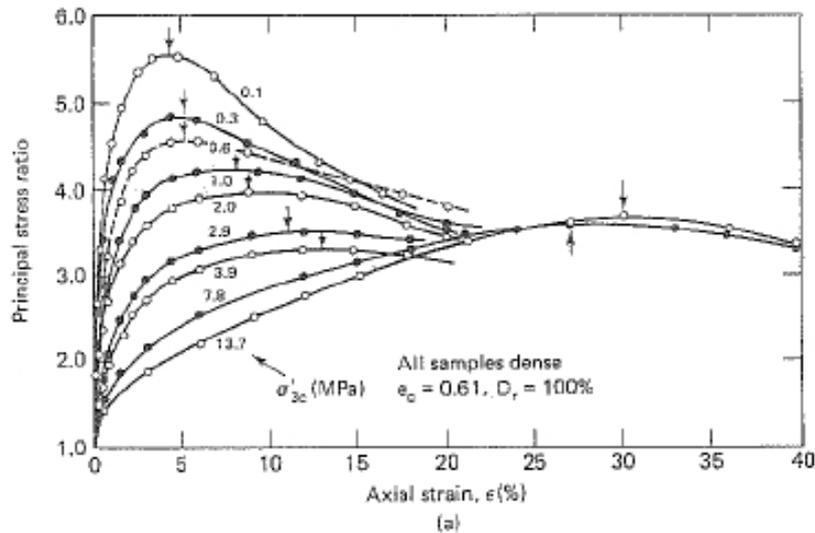


FIGURA 3.10: ANDAMENTO DEL RAPPORTO TRA LE TENSIONI PRINCIPALI IN FUNZIONE DELLA DEFORMAZIONE ASSIALE (HOLTZ E KOVACS)

Le curve riportate fanno riferimento a provini che possiedono la stessa densità relativa e lo stesso indice dei vuoti, che nel particolare può essere ricondotto a quello di una sabbia densa.

Dal punto di vista qualitativo le curve possiedono tutte lo stesso andamento, riconducibile a quello di una curva a campana tipica di un materiale dilatante; esse si distinguono solo per la lunghezza del tratto pendente e per i valori di picco e residuo.

Al fine di valutare l'effetto della variazione della tensione di confinamento, si osserva che un aumento di tale parametro comporta una diminuzione del valore di

picco del rapporto tra le due tensioni principali, mentre il valore residuo manifesta uno spostamento verso destra in direzione secondo la direzione dell'asse x.

È interessante inoltre osservare la variazione della deformazione volumetrica in funzione della deformazione assiale, come mostrato in figura 3.11, per diversi valori della pressione di confinamento.

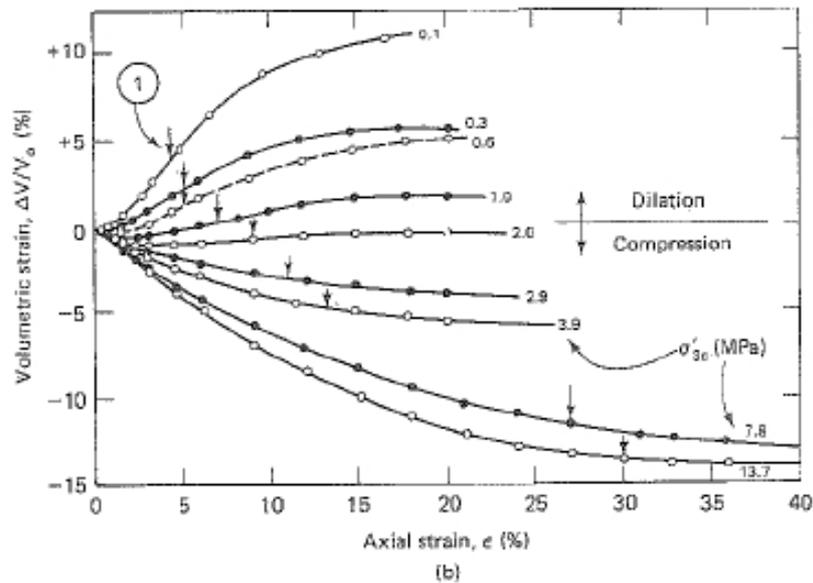


FIGURA 3.11: ANDAMENTO DELLA VARIAZIONE VOLUMETRICA IN FUNZIONE DELLA DEFORMAZIONE ASSIALE (HOLTZ E KOVACS)

Dall'analisi del grafico si osserva che all'aumentare della tensione, la deformazione volumetrica diminuisce, assumendo addirittura valori negativi tipici di un comportamento di tipo compressivo. Per bassi valori della pressione di confinamento la deformazione volumetrica è positiva pertanto il materiale mostra un comportamento dilatante; ciò significa che in fase iniziale una sabbia sciolta si comporta come una sabbia densa, ovvero dilata se σ'_{3c} è sufficientemente basso.

3.4.2 Variazione delle proprietà geotecniche

Testando diversi provini che possiedono lo stesso indice dei vuoti o la stessa densità ma diverse pressione effettive di consolidamento, è possibile determinare la relazione tra la deformazione volumetrica e l'indice dei vuoti o la densità.

In figura 3.12 si mostra l'andamento della deformazione volumetrica a rottura in funzione dell'indice dei vuoti al termine della consolidazione.

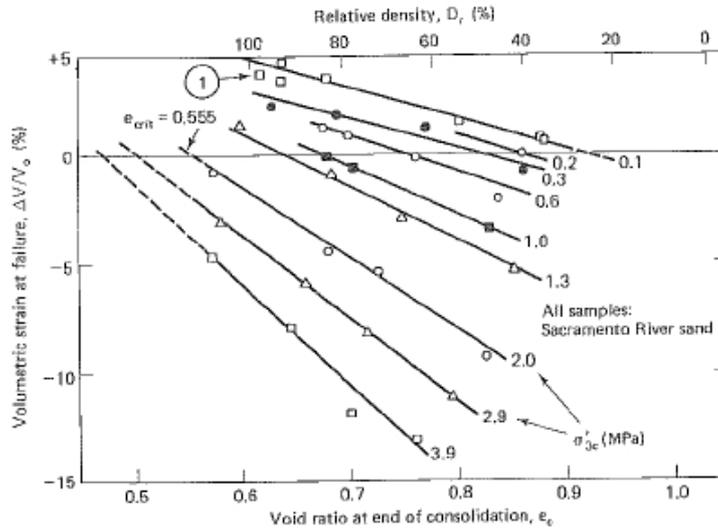


FIGURA 3.12: DEFORMAZIONE VOLUMETRICA IN FASE DI ROTTURA IN FUNZIONE DELL'INDICE DEI VUOTI AL TERMINE DELLA CONSOLIDAZIONE (HOLTZ E KOVACS)

Dall'analisi dell'andamento delle curve si può osservare che, per un dato valore della pressione di confinamento, la deformazione volumetrica diminuisce divenendo sempre più negativa al diminuire della densità (quindi all'aumentare dell'indice dei vuoti). Pertanto in accordo con la definizione, l'indice dei vuoti critico (e_{crit}) è l'indice dei vuoti a rottura ovvero quando la deformazione volumetrica è pari a zero.

3.4.3 Fattori che incidono sulla resistenza al taglio

Dal momento che la sabbia è un materiale che possiede attrito ci si aspetta che i fattori che producono un aumento della resistenza all'attrito producano anche un aumento dell'angolo d'attrito interno.

I fattori che influenzano il suddetto angolo ϕ sono:

1. indice dei vuoti o densità relativa;
2. forma dei grani;
3. distribuzione granulometrica;
4. scabrezza dei grani;
5. presenza d'acqua;
6. dimensione dei grani;

3.4.3.1 Influenza dell'indice dei vuoti

L'indice dei vuoti è il più importante parametro che influenza la resistenza delle sabbie. In generale, per test drenati sia in sforzo di taglio diretto che in apparti triassiali, più basso è l'indice dei vuoti e più alta sarà la resistenza al taglio. I circoli di *Mohr* per il test triassiale sono rappresentati in figura 3.13 per diversi valori della pressione di confinamento.

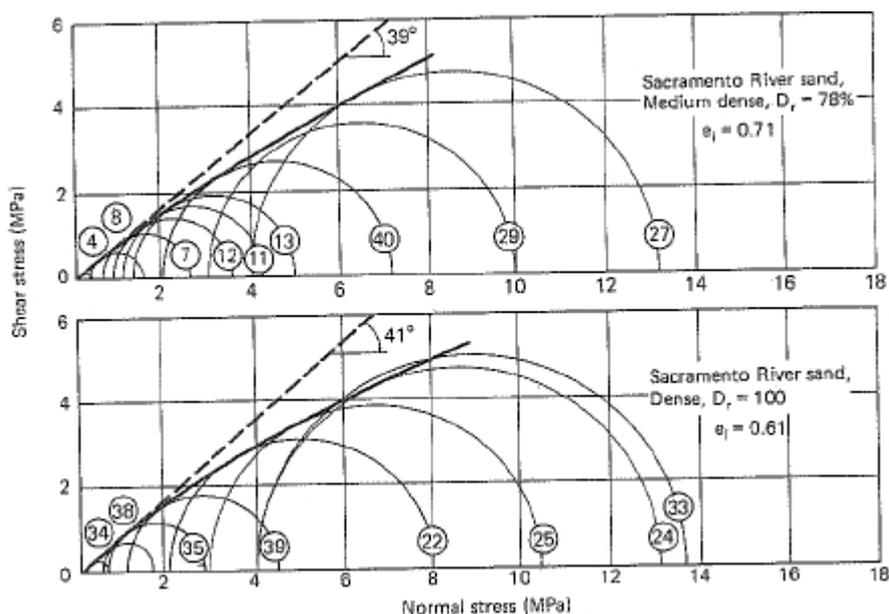


FIGURA 3.13: EFFETTI DELLA VARIAZIONE DELL'INDICE DEI VUOTI SULLA RESISTENZA AL TAGLIO
(HOLTZ E KOVACS)

Si può osservare che al diminuire dell'indice dei vuoti (o all'aumentare della densità) l'angolo d'attrito interno aumenta, pertanto una sabbia densa mostrerà una resistenza al taglio maggiore rispetto ad una sabbia sciolta.

L'influenza della variazione della densità relativa, della forma e della dimensione dei grani, così come della distribuzione granulometrica sull'angolo ϕ furono studiati da Casagrande e riassunti in tabella 3.1.

3.4.3.2 Influenza della forma dei grani

In generale si osserva che passando da una particella arrotondata ad una sempre più spigolosa, aumenta il valore dell'angolo considerato.

No.	General Description	Grain Shape	D_{10} (mm)	C_u	Loose		Dense	
					e	ϕ (deg)	e	ϕ (deg)
1	Ottawa standard sand	Well rounded	0.56	1.2	0.70	28	0.53	35
2	Sand from St. Peter sandstone	Rounded	0.16	1.7	0.69	31	0.47	37†
3	Beach sand from Plymouth, MA	Rounded	0.18	1.5	0.89	29	—	—
4	Silty sand from Franklin Falls Dam site, NH	Subrounded	0.03	2.1	0.85	33	0.65	37
5	Silty sand from vicinity of John Martin Dam, CO	Subangular to subrounded	0.04	4.1	0.65	36	0.45	40
6	Slightly silty sand from the shoulders of Ft. Peck Dam, MT	Subangular to subrounded	0.13	1.8	0.84	34	0.54	42
7	Screened glacial sand, Manchester, NH	Subangular	0.22	1.4	0.85	33	0.60	43
8‡	Sand from beach of hydraulic fill dam, Quabbin Project, MA	Subangular	0.07	2.7	0.81	35	0.54	46
9	Artificial, well-graded mixture of gravel with sands No. 7 and No. 3	Subrounded to subangular	0.16	68	0.41	42	0.12	57
10	Sand for Great Salt Lake fill (dust gritty)	Angular	0.07	4.5	0.82	38	0.53	47
11	Well-graded, compacted crushed rock	Angular	—	—	—	—	0.18	60

TABELLA 3.1: ANGOLO D'ATTRITO INTERNO PER DIVERSI TERRENI (HOLTZ E KOVACS)

3.4.3.3 Influenza della distribuzione granulometrica

Dall'analisi della curva granulometrica di un terreno è possibile derivarne il tipo e il grado di assortimento delle particelle, cioè quanto le particelle che compongono il campione presentano eterogeneità di dimensioni.

A questo proposito solitamente si considera un coefficiente di uniformità C_u definito come il rapporto tra il diametro delle particelle corrispondenti al 60% di passante e il diametro di particelle cui si ha il 10% di passante.

$$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}} \quad (3.16)$$

Naturalmente tale coefficiente assume un valore pari a 1 nel caso di terreno perfettamente uniforme, mentre terreni molto assortiti presentano coefficienti di uniformità pari ad alcune decine o più.

Più elevato è il coefficiente di uniformità, maggiore sarà la resistenza al taglio che possiede il terreno.

3.4.3.4 Influenza della scabrezza dei grani

La scabrezza della superficie dei grani è un parametro molto difficile da misurare; in ogni modo si è osservata una relazione direttamente proporzionale tra i due

parametri: un aumento della rugosità comporta una crescita nel valore dell'angolo d'attrito interno.

3.4.3.5 Influenza data dalla presenza d'acqua

La presenza d'acqua ovviamente produce una diminuzione del valore dell'angolo d'attrito interno e quindi una calo generale della resistenza al taglio.

3.4.3.6 Influenza della dimensione dei grani

La dimensione delle particelle sembra invece non influenzare particolarmente il parametro considerato, a parità d'indice dei vuoti. Quindi una sabbia fine ed una sabbia grossa che possiedono lo stesso indice dei vuoti, avranno probabilmente lo stesso angolo d'attrito interno.

Tutti i fattori considerati sono riassunti in tabella 3.2.

Fattore	Effetto
Indice dei vuoti (e)	$\uparrow e, \downarrow \phi$
Coeff. di forma (A)	$\uparrow A, \uparrow \phi$
Distribuzione granulometrica	$\uparrow C_w, \uparrow \phi$
Scabrezza della superficie (R)	$\uparrow R, \uparrow \phi$
Acqua (W)	$\uparrow W, \downarrow \phi$ moderatamente
Dimensione delle particelle (S)	Nessun effetto

TABELLA 3.2: SINTESI DEI FATTORI CHE INFLUENZANO LA RESISTENZA AL TAGLIO

3.5 La validazione con provini costituiti da sfere d'acciaio

Per la stesura di questo paragrafo si sono prese in considerazione le principali esperienze riportate in letteratura relativamente alla validazione di modelli DEM con l'utilizzo di sfere d'acciaio [Cui et al. (2007), O'Sullivan et al., O'Sullivan e Bray (2003), O'Sullivan et al. (2004)].

Le sfere di acciaio costituiscono un "aggregato ideale", in grado di fornire un confronto significativo tra i risultati numerici e quelli sperimentali in virtù del fatto che sono ben riproducibili con il metodo DEM particellare. Infatti:

- la geometria delle sfere in acciaio è facilmente modellabile in termini sia di diametro, sia di sfericità;

- la superficie delle sfere è uniforme ed è nota la relativa tolleranza di fabbricazione.

Di seguito, in particolare, si descrivono soltanto gli studi condotti da Cui, O'Sullivan e O'Neill (2007), i quali sono stati utilizzati come confronto per la sperimentazione condotta in questa tesi.

3.5.1 Materiale utilizzato e specifiche di prova

Tutti i test di laboratorio furono eseguiti utilizzando sfere di acciaio al cromo ad elevata resistenza avente una densità pari a $7'800 \text{ kg/m}^3$ ed un coefficiente di Poisson pari a 0.28.

Furono confezionati due differenti tipi di provini:

- il primo costituito da una miscela omogenea di sfere di raggio 2.5 mm;
- il secondo costituito da una miscela omogenea di sfere di raggio 2 mm, 2.5 mm e 3 mm con un rapporto pari a 1:1:1.

In laboratorio i provini, di diametro ed altezza pari rispettivamente a 101 mm e 203 mm, furono confezionati lasciando cadere le sfere all'interno del provino attraverso un imbuto allo scopo di ridurre al minimo l'altezza di caduta. La pressione di confinamento fu assunta pari a 80 kPa.

Nella modellazione DEM le particelle furono generate con il procedimento per espansione dei raggi (*generation by radius expansion*) che consiste nel creare un insieme iniziale di particelle di piccolo raggio, successivamente dilatate fino al raggiungimento della densità prevista, sotto controllo della pressione di confinamento.

Tale metodo risultò essere il più semplice ed affidabile, in quanto mantiene le dimensioni iniziali del sistema ed, espandendo le particelle dello stesso fattore in tutte le direzioni, gli conferisce proprietà uniformi ed isotrope. In questo modo furono creati due provini costituiti rispettivamente da 15'382 e 15'420 sfere, con indice dei vuoti pari a 0.615 e 0.612.

Durante la fase di taglio, i provini furono sottoposti a compressione muovendo il piatto superiore ad un tasso pari a 0.0083%/s.

Per il coefficiente d'attrito gli autori si basarono sugli studi condotti da O'Sullivan et al. (2004) ed assunsero quindi un valore pari a 0.096.

3.5.2 Analisi dei risultati

I risultati ottenuti furono ordinati in modo da indagare l'influenza sul comportamento del sistema dei seguenti parametri:

- angolo di attrito interparticellare tra gli elementi e tra un elemento e le condizioni al contorno;
- distribuzione delle tensioni all'interno del campione;
- distribuzione delle forze di contatto all'interno del provino.

3.5.2.1 Influenza dell'angolo d'attrito interparticellare

I risultati illustrati in figura 3.14 mostrano un aumento dello sforzo iniziale all'aumentare del coefficiente d'attrito interparticellare f_{bb} (figura 3.14.a); in merito al coefficiente d'attrito particella-confine f_{bd} non si evidenziarono invece notevoli differenze (figura 3.14.b).

Il valore di picco del rapporto di stress aumenta moderatamente se il valore f_{bb} aumenta; mentre per il secondo caso, il suddetto valore aumenta leggermente per poi allinearsi intorno ad un valore pressoché costante.

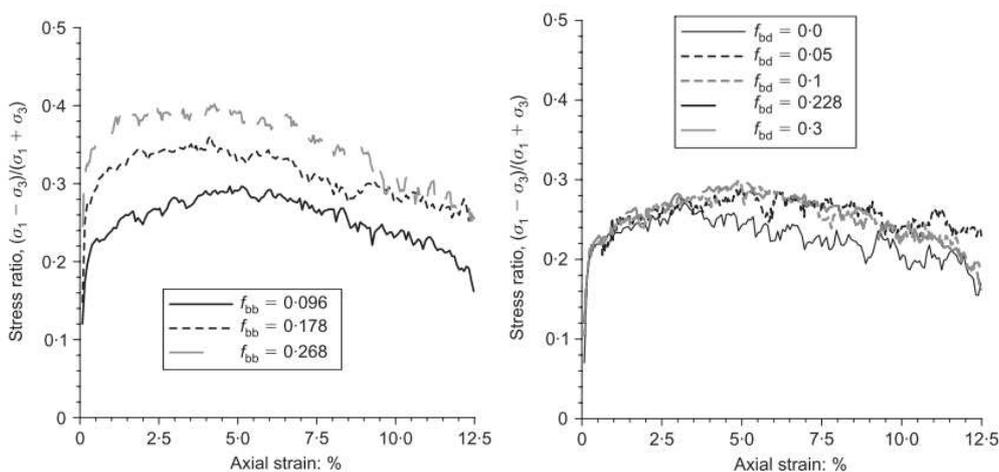


FIGURA 3.14: RISPOSTA ALLA VARIAZIONE DEL COEFFICIENTE D'ATTRITO: A) PARTICELLA-PARTICELLA, B) PARTICELLA-CONFINE (CUI ET AL., 2007)

3.5.2.2 Considerazioni sulla forma del provino

Il coefficiente f_{bd} influenza la deformata del provino e, di conseguenza, il valor medio dell'area della sezione trasversale. Come illustrato in figura 3.15, assumendo $f_{bd}=0$ si osserva un rigonfiamento del campione in prossimità della base. All'aumentare

del coefficiente particella-confine, il rigonfiamento si sposta verso l'alto, per poi rimanere all'incirca nella stessa posizione per un valore del coefficiente f_{bd} superiore a 1.0.

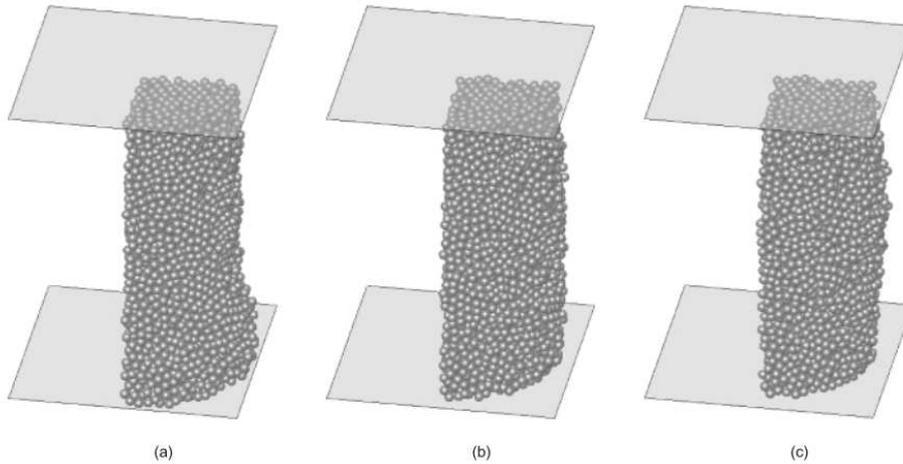


FIGURA 3.15: PROVINO DEFORMATO: A) $F_{BD}=0.0$, B) $F_{BD}=0.05$, C) $F_{BD}=0.1$ (CUI ET AL., 2007)

3.5.2.3 Analisi delle tensioni

Gli autori analizzarono quindi la risposta microscopica del campione durante la simulazione concentrando il loro studio sul campione contenente sfere di uguale diametro.

Fu condotta a tal proposito un'analisi sul valor medio dello sforzo interno considerando il campione suddiviso in tre zone teoriche: una zona bassa (1), una zona media (2) ed una alta (3) evidenziate in figura 3.16.

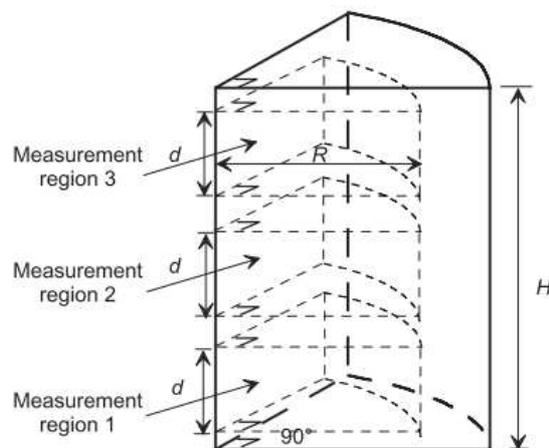


FIGURA 3.16: VOLUME UTILIZZATO PER I CALCOLI (CUI ET AL., 2007)

Il parametro cercato poté quindi essere calcolato considerando il numero totale di contatti N_c contenuti in un certo volume V con la seguente formula:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^{N_c} l_i^c f_j^c \quad (3.17)$$

in cui l_i^c è il *branch vector* (unisce i centri di due sfere a contatto) e f_j^c è la forza di contatto.

Dal diagramma sforzo-deformazione si evinse una non uniformità dello sforzo interno lungo lo sviluppo dell'altezza del provino. Esso risultò maggiore nella zona centrale piuttosto che alle due estremità così come rispetto al valore sul confine, riflettendo quindi la non uniformità delle tensioni σ_1 e σ_3 . Tale fatto è dovuto ad una sorta di azione di contenimento che si sviluppa nel confine superiore ed inferiore. Il valore di picco dello stress si mobilita invece per differenti valori di sforzo assiale nelle diverse regioni.

La tensione agente sul contorno, calcolata considerando le forze che si trasmettono attraverso l'intero provino, risultò inferiore a quella calcolata nella zona interna, intesa come una regione di raggio pari a 40 mm.

Per ragioni geometriche, la percentuale di vuoti tende ad esser inferiore vicino al confine e questo influenza la tendenza della catena di forza ad essere concentrata in prossimità del centro del provino, mentre le sollecitazioni misurate nella stessa zona saranno superiori alla media complessiva delle stesse (figura 3.17).

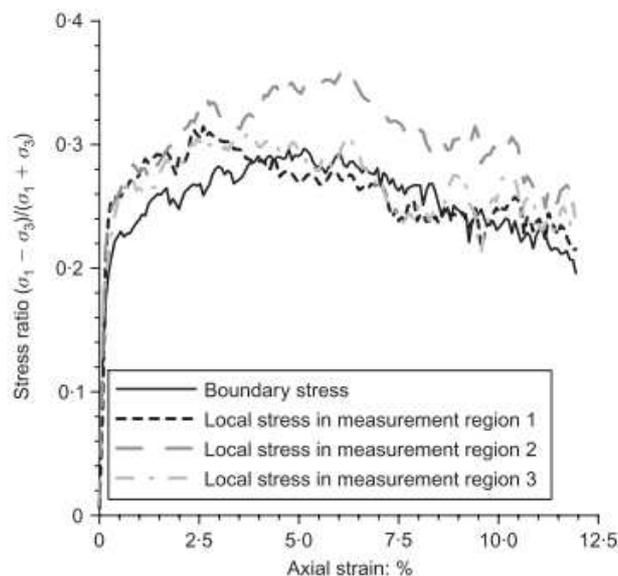


FIGURA 3.17: CONFRONTO TRA RAPPORTO DI STRESS E SFORZO ASSIALE (CUI ET AL., 2007)

3.5.2.4 Distribuzione delle forze di contatto

In merito alle forze di contatto interparticellari, rappresentate in un grafico mediante segmenti di linea con larghezza proporzionale all'intensità della forza normale di contatto, si evinse una distribuzione delle stesse prevalentemente verticale. Si osservò inoltre la presenza di un gran numero di forze con una componente orizzontale significativa, in prossimità della zona inferiore del provino.

Come rappresentato sul piano x-z della figura 3.18, la rete delle forze di contatto mostrò un orientamento prevalentemente verticale che rifletteva quello della tensione σ_1 . Si osservò inoltre che un gran numero di forze in prossimità del confine inferiore e della zona centrale, possedevano una significativa componente orizzontale. Poiché la forza orizzontale media è simile in entrambe le zone, si poté concludere che un numero inferiore di forze più grandi si presentava nella zona intermedia.

Fu altresì evidente che le catene di forza che trasmettevano il carico deviatorico attraverso il campione tendevano ad essere concentrate verso il centro dello stesso.

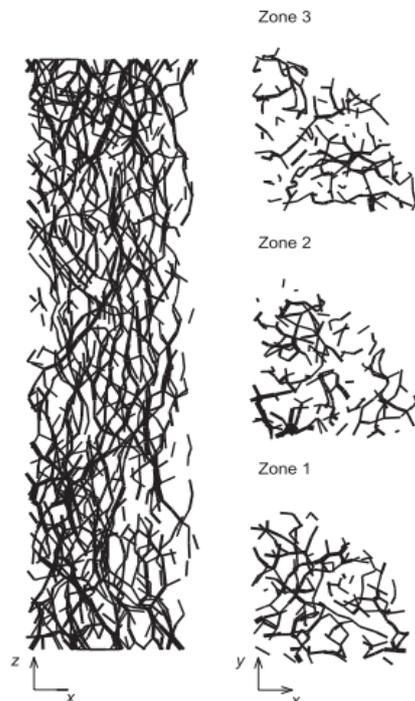


FIGURA 3.18: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO NELLE TRE ZONE (CUI ET AL., 2007)

3.5.2.5 Movimenti delle particelle

I risultati confermarono quanto ci si aspettava, ovvero che la massima rotazione e la massima tensione si verificano nello stesso punto.

4.1 Introduzione

Nei metodi di simulazione agli elementi discreti è impiegato un codice commerciale di calcolo prodotto da Itasca Consulting Group, chiamato *Particle Flow Code* e brevemente indicato con la sigla PFC, così come descritto da Cundall e Strack (1979), che rappresenta il sistema come un insieme di particelle circolari che interagiscono tra loro solo in caso di reciproco contatto (Vignali, 2006).

Il comportamento meccanico del mezzo è descritto tracciando i movimenti dei singoli elementi che lo compongono e l'andamento delle forze che si sviluppano nei punti di contatto, applicando la seconda legge di Newton alle particelle e la legge forza-spostamento ai punti di contatto. La prima è utilizzata per determinare il moto delle singole unità causato dalle sollecitazioni agenti su esse; la seconda serve per aggiornare le forze di contatto conseguenti.

Infatti, mentre nei metodi al continuo i contatti fra unità elementari rimangono invariati indipendentemente dalla risposta del modello, in PFC vengono aggiornati ad ogni iterazione in base alla posizione ed al movimento relativo dei singoli elementi.

La definizione della *mesh* e dei modelli costitutivi dei materiali è sostituita dalla determinazione della distribuzione e delle dimensioni delle particelle che compongono il sistema e dalla descrizione del comportamento dei contatti. In PFC lo stato tensionale di partenza non può essere specificato in modo indipendente dalla distribuzione iniziale dei singoli elementi, poiché dalla loro posizione relativa dipendono le forze di contatto.

Le ipotesi su cui si basa il software sono le seguenti (Itasca, 2002):

- le particelle sono sferiche e vengono trattate come corpi rigidi, quindi non deformabili;
- i contatti tra le particelle avvengono su un'area infinitesima;
- le particelle possono sovrapporsi l'una all'altra solo nei punti di contatto (*soft contacts*). Tale sovrapposizione rappresenta la deformazione della particella;

- l'entità della sovrapposizione è correlata alla forza di contatto stessa tramite il modello di contatto ed è piccola in rapporto alle dimensioni delle particelle;
- possono esistere vincoli di resistenza al contatto tra i dischi.

La prima grande semplificazione riguarda la forma sferica con cui viene rappresentata la particella. Tale assunzione appare ragionevole se le particelle reali che si intendono rappresentare sono molto arrotondate, come ad esempio le sabbie marine, ma produce notevoli limitazioni nel momento in cui si desidera passare a sabbie angolose o elongate.

Gli ultimi aspetti sono ragionevolmente corretti se la rigidità al contatto è sufficientemente elevata; ciò significa che il metodo agli elementi discreti non è indicato per materiali particellari eccessivamente deformabili al contatto. Solitamente si considera accettabile una deformazione al contatto inferiore al 5% della dimensione della particella.

Il limite più importante dei modelli agli elementi discreti è l'elevato onere computazionale dell'algoritmo di calcolo che dipende sia dall'elevato numero di particelle da rappresentare che dalla complessità dell'algoritmo di ricerca dei contatti (*contact-detection* o *collision-detection*). Un grande passo in avanti per quanto riguarda le velocità di calcolo è stato compiuto in seguito alla diffusione delle tecniche di parallelizzazione che risultano essere molto efficaci rispetto a quelle applicate con i metodi agli elementi finiti. Infatti gran parte dell'algoritmo DEM può essere potenzialmente parallelizzabile (grazie a interazioni tra le particelle di tipo *short-range*) mentre solo una piccola parte rimane in forma sequenziale.

Il dominio spaziale discreto, con una opportuna procedura di ordinamento, può essere facilmente suddiviso in celle indipendenti ognuna delle quali è gestita da un processore. L'integrazione del moto di ciascuna particella può essere eseguita contemporaneamente ("parallelamente") ed autonomamente su ciascuna cella (ciascun processore) e la comunicazione tra celle adiacenti (molto dispendiosa in termini di tempo macchina) è limitata ai bordi di queste celle, preventivamente definiti, e può avvenire con minor frequenza (Carillo et al., 1996).

Il metodo utilizzato, evoluzione del DEM teorizzato da Cundall e Strack, permette la rappresentazione numerica dello spostamento e della rotazione delle particelle, il

completo distacco tra gli elementi ed il riconoscimento dei nuovi punti di contatto (Cundall e Hart, 1992).

Il software simula quindi il comportamento meccanico di un sistema formato da particelle che occupano una quantità finita di spazio, si spostano indipendentemente le une dalle altre ed interagiscono tra loro solo in caso di reciproco contatto.

Le particelle di forma sferica sono denominate *balls*, mentre con il termine *walls* si indicano gli elementi *boundary* di confinamento (figura 4.1); quest'ultimi si utilizzano per definire i confini del sistema e per agevolare la generazione e la compattazione del sistema. Essi possono essere soggetti solo a velocità e non a forze; inoltre non sono ammessi contatti muro-muro ma soltanto particella-muro.

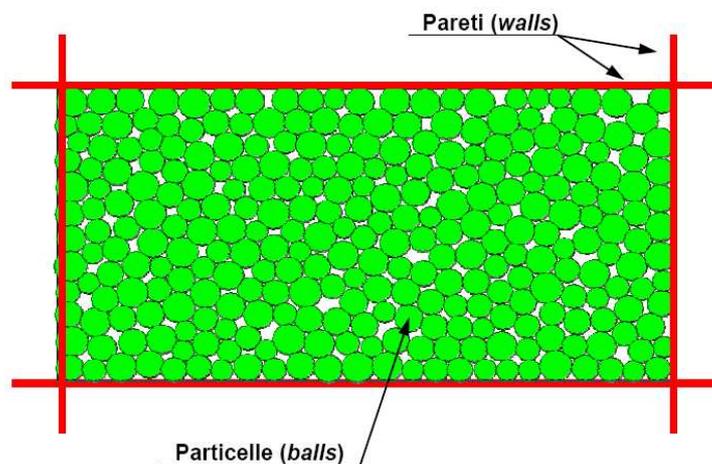


FIGURA 4.1: ELEMENTI FONDAMENTALI DI PFC (ITASCA, 2002)

È possibile assegnare alle particelle sia le grandezze cinematiche sia quelle dinamiche, mentre per gli elementi *boundary* è possibile definire le sole velocità di traslazione e rotazione.

Con PFC può infine essere simulato il fenomeno del rammollimento della miscela, mediante la definizione del legame *contact bond* nei punti di interazione tra le particelle ed il successivo annullamento per forze di contatto che superano localmente la resistenza ultima.

Gli elementi di forma sferica sviluppano infatti sollecitazioni di trazione responsabili dell'innesco di micro-fratture, riproducendo così un comportamento macroscopico complesso governato dai fenomeni di rammollimento e rottura.

4.2 I cicli di calcolo

L'algoritmo di calcolo richiede ad ogni ciclo l'aggiornamento dei contatti in base alla posizione e al movimento relativo delle particelle. Nei punti di interazione è definita la legge forza-spostamento per valutare l'entità delle forze di contatto, mentre la seconda legge di Newton è applicata alle particelle per determinare le velocità e gli spostamenti in base alle forze e ai movimenti applicati (Itasca, 2002).

Il ciclo di calcolo si può schematizzare in alcuni passi successivi:

- inizialmente si stabiliscono i contatti attraverso la definizione della posizione delle particelle e delle pareti;
- basandosi poi sul moto relativo tra le due entità a contatto e il modello costitutivo dello stesso, si applica la legge forza-spostamento ad ogni contatto per trovare le forze che agiscono;
- successivamente viene applicata la legge del moto ad ogni particella per determinare la sua velocità e la sua posizione, basandosi sulla risultante delle forze e dei momenti derivanti dalle forze di contatto e dalle forze che agiscono su ogni particella;
- la posizione delle pareti viene infine determinata basandosi sulla velocità di parete specificata.

4.2.1 La legge forza-spostamento

La legge forza-spostamento mette in relazione lo spostamento relativo tra due particelle adiacenti e la forza di contatto che si genera nel loro punto di sovrapposizione (approccio *soft contact*). Si applica in particolare nel punto $x_i^{[C]}$ che giace sul piano di contatto individuato dal versore normale n_i (Potyondy et al., 2004) (figura 4.2).

La forza di contatto si può così suddividere nelle due componenti normali, che agiscono nella direzione di n_i , e nella componente tangenziale, che si esplica sul piano di contatto. Per le due sfere A e B di figura 4.2, indicando con U_n la loro sovrapposizione, il versore n_i diventa (Cheng et al., 2000):

$$n_i = \frac{x_i^{[B]} - x_i^{[A]}}{d} \quad (4.1)$$

dove $x_i^{[A]}$ ed $x_i^{[B]}$ sono i vettori posizione dei centri delle due particelle e d è la loro distanza reciproca così definita:

$$d = |x_i^{[B]} - x_i^{[A]}| = \sqrt{(x_i^{[B]} - x_i^{[A]}) \cdot (x_i^{[B]} - x_i^{[A]})} \quad (4.2)$$

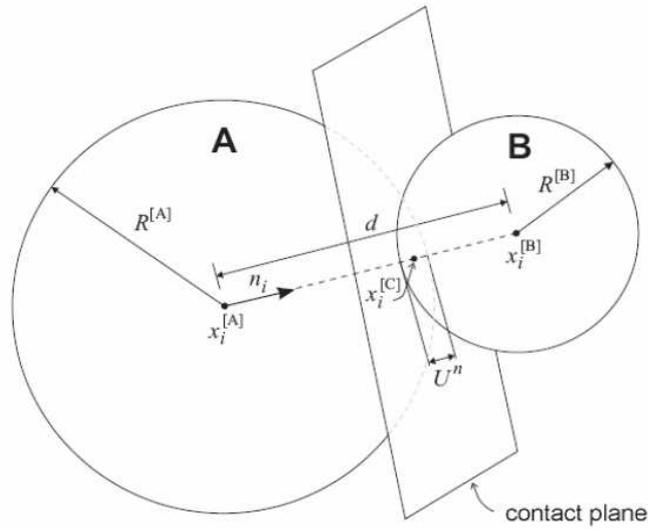


FIGURA 4.2: LEGGE FORZA-SPOSTAMENTO PER UN CONTATTO PARTICELLA-PARTICELLA (ITASCA, 2002)

Per un contatto particella-parete come quello rappresentato in figura 4.3, d è pari alla minor distanza tra la ball b ed il muro w ed n_i è diretto lungo la stessa.

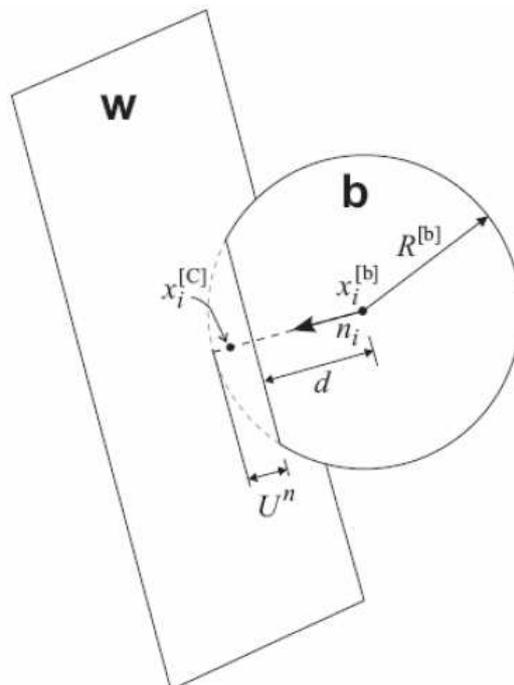


FIGURA 4.3: LEGGE FORZA-SPOSTAMENTO PER UN CONTATTO PARTICELLA-PARETE (ITASCA, 2002)

Noti i raggi delle particelle ($R^{[A]}, R^{[B]}, R^{[b]}$), la sovrapposizione U_n , definita come lo spostamento relativo del contatto nella direzione normale, è data da:

$$U_n = R^{[A]} + R^{[B]} - d \quad (\text{contatto particella-particella}) \quad (4.3)$$

$$U_n = R^{[b]} - d \quad (\text{contatto particella-parete}) \quad (4.4)$$

La posizione del punto di contatto ($x_i^{[C]}$) è pari a:

$$x_i^{[C]} = x_i^{[A]} + \left(R^{[A]} - \frac{1}{2} \cdot U_n \right) \cdot n_i \quad (\text{contatto particella-particella}) \quad (4.5)$$

$$x_i^{[C]} = x_i^{[b]} + \left(R^{[b]} - \frac{1}{2} \cdot U_n \right) \cdot n_i \quad (\text{contatto particella-parete}) \quad (4.6)$$

Il vettore forza di contatto rappresenta l'azione della particella A sulla particella B nel caso di due particelle e l'azione che la particella esercita sulla parete per il caso particella-parete; il suddetto può essere scomposto nelle componenti normale e tangenziale rispetto al piano di contatto:

$$F_i = F_i^n + F_i^s \quad (4.7)$$

La componente normale (F_i^n) della forza di contatto si valuta in funzione di U_n e della rigidità normale al contatto k_n secondo la formula (Elata et al., 1996):

$$F_i^n = k_n \cdot U_n \cdot n_i \quad (4.8)$$

dove la rigidità normale si determina attraverso il modello di rigidità al contatto utilizzato.

La componente tangenziale (F_i^s) si valuta in modo incrementale: partendo dal valore nullo nell'istante di formazione del contatto, aumenta ad ogni incremento di spostamento. Per la sua determinazione si studia il moto del contatto attraverso la sua velocità (V_s), che dipende dalle velocità di traslazione (\dot{x}_i) e di rotazione (ω) delle due entità a contatto, secondo la formula:

$$V_s = (\dot{x}_i^{[B]} - \dot{x}_i^{[A]}) \cdot t_i - \omega_3^{[B]} |x_k^{[C]} - x_k^{[B]}| - \omega_3^{[A]} |x_k^{[C]} - x_k^{[A]}| \quad (\text{contatto particella-particella}) \quad (4.9)$$

$$V_s = (\dot{x}_i^{[w]} - \dot{x}_i^{[b]}) \cdot t_i - \omega_3^{[w]} |x_k^{[C]} - x_k^{[w]}| - \omega_3^{[b]} |x_k^{[C]} - x_k^{[b]}| \quad (\text{contatto particella-parete}) \quad (4.10)$$

dove $t_i = \{-n_2, n_1\}$

La componente tangenziale dello spostamento del punto di contatto (ΔU_s) diventa quindi:

$$\Delta U_s = V_s \cdot \Delta t \quad (4.11)$$

da cui si ricava la componente tangenziale della forza di contatto (ΔF_s) in funzione della rigidezza tangenziale (k_s):

$$\Delta F_s = -k_s \cdot \Delta U_s \quad (4.12)$$

La nuova forza di contatto tangenziale viene calcolata effettuando la somma del vecchio vettore della forza tangenziale e il vettore incremento della forza elastica tangenziale:

$$F_i^s \leftarrow F_i^s + \Delta F_i^s \quad (4.13)$$

I valori delle forze di contatto normale e tangenziale così calcolati vengono aggiustati per soddisfare le relazioni costitutive dei contatti.

4.2.2 La legge del moto

Il movimento di una particella rigida è determinato dalla risultante delle forze e dei momenti che agiscono su di essa e può essere descritto in termini di moto di traslazione e di rotazione. Il primo è definito dalla posizione (x_i), dalla velocità (\dot{x}_i) e dall'accelerazione (\ddot{x}_i) del centro della particella; il secondo dalla velocità angolare ($\dot{\omega}_i$) e dall'accelerazione angolare ($\ddot{\omega}_i$).

L'equazione del moto può essere espressa con due equazioni vettoriali: una mette in relazione la risultante delle forze con il moto di traslazione, l'altra la risultante dei momenti con il moto di rotazione.

Indicando con F_i la risultante delle forze applicate all'elemento e con g_i il vettore accelerazione di gravità, l'equazione del moto di traslazione di una particella di massa m diventa (Fortin, 2005):

$$F_i = m \cdot (\ddot{x}_i - g_i) \quad (4.14)$$

Il moto di rotazione invece può essere descritto dall'equazione:

$$M_i = I \cdot \ddot{\omega}_i \quad (4.15)$$

dove M_i è la risultante dei momenti agenti sulla particella ed I il suo momento d'inerzia.

4.3 Lo smorzamento

L'energia cinetica che si genera nel sistema in seguito all'interazione tra le particelle è dissipata attraverso i relativi slittamenti. Nel caso in cui questi ultimi non siano sufficienti a far raggiungere al modello uno stato di equilibrio, entra in gioco il fattore di smorzamento (*local damping*) che applica ad ogni elemento una forza di smorzamento (*damping force*) proporzionale alla corrispondente forza non bilanciata (*unbalanced force*).

Quest'ultima è un parametro che permette di controllare se il modello ha raggiunto l'equilibrio statico; il sistema, infatti, si considera in equilibrio quando la massima forza non bilanciata è piccola rispetto a quelle applicate. Se l'*unbalanced force* si attesta ad un valore costante non nullo (seppur piccolo) significa che, probabilmente, si stanno verificando rotture o deformazioni plastiche all'interno del modello (Jensen et al., 1999 e 2001).

Il fattore di smorzamento si introduce nell'equazione del moto come segue (Hazard, 2000):

$$F_i + F_{id} = m \cdot (\ddot{x}_i - g_i) \quad (4.16)$$

dove F_{id} rappresenta la forza di smorzamento valutabile in funzione della velocità della particella (\dot{x}_i) mediante la seguente equazione:

$$F_{id} = -\alpha \cdot F_i \cdot \dot{x}_i \quad (4.17)$$

Il coefficiente di smorzamento α varia tra 0 ed 1; di default è pari a 0,7.

4.4 Le condizioni iniziali

Le condizioni iniziali, così come quelle aggiuntive, vengono specificate per le particelle e per le pareti attraverso precisi comandi; per ogni particella, oltre alla velocità di traslazione e di rotazione iniziale, si possono applicare forze e momenti utilizzando il comando *initial*. Per le pareti si possono definire le velocità di traslazione e di rotazione, senza poter applicare delle forze; le velocità delle pareti vengono fornite attraverso il comando *wall* definendo tre parametri: la velocità di traslazione ($x_i^{[w]}$), la velocità di rotazione ($x_3^{[w]}$) e il centro di rotazione ($x_i^{[w]}$).

4.5 La creazione del modello

4.5.1 Introduzione

Un modello di PFC^{3D} è costituito da particelle sferiche; il più piccolo modello che si può analizzare con questo programma consiste in una singola *ball*. L'altro elemento del modello è la parete che viene utilizzata per definire i confini del sistema e per agevolare la generazione e la compattazione delle particelle.

Le sfere sono generate all'interno di una regione di spazio definita attraverso le coordinate globali. Tutti i centri delle *balls* e i punti di contatto vengono localizzati attraverso il loro vettore posizione (x, y, z). Le pareti sono definite nelle coordinate globali dai segmenti che le compongono. Ogni particella e ogni parete viene rappresentata e richiamata attraverso un numero identificativo (*ID*).

Per la definizione di un modello è necessario specificare:

- la distribuzione e le dimensioni delle particelle che compongono il sistema;
- il comportamento dei contatti e le proprietà dei materiali, che dettano il tipo di risposta del mezzo quando è sottoposto ad una causa perturbatrice;
- le condizioni al contorno e quelle iniziali, che definiscono la situazione in situ, cioè prima dell'introduzione della perturbazione.

La procedura generale di soluzione prevede la valutazione dello stato di equilibrio iniziale del sistema, l'applicazione delle alterazioni al sistema ed il calcolo della risposta del modello dopo una serie di cicli di calcolo (figura 4.4).

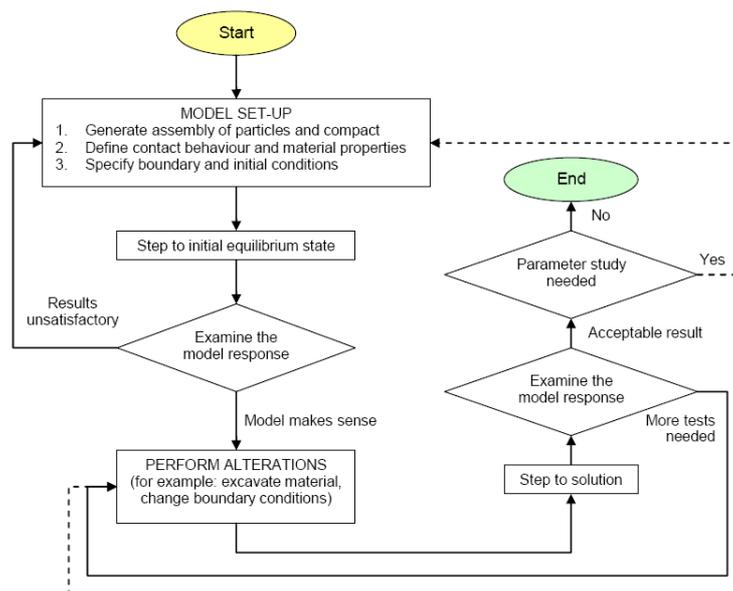


FIGURA 4.4: PROCEDURA DI SOLUZIONE GENERALE DI PFC (ITASCA, 2002)

4.5.2 La generazione delle particelle

Gli elementi che compongono il sistema possono essere generati attraverso due procedure distinte (Jiang et al., 2003):

- quella semplice, che prevede la creazione di una particella per volta definendone il raggio, la posizione ed il numero identificativo (*ID number*). Sulla base delle informazioni ricevute il software inserisce l'elemento nella posizione fissata, sovrapponendolo ad eventuali altri già esistenti. La sovrapposizione al momento della generazione può creare tensioni e forze di repulsione iniziali molto elevate, ragione per cui questa procedura non si utilizza frequentemente;
- quella generale, che consiste nel creare un insieme iniziale di particelle specificandone le dimensioni dell'area occupata, l'intervallo di variazione del raggio (*rmin* ed *rmax*) e la relativa distribuzione granulometrica. Il software provvede a creare queste *balls* disponendole in modo casuale all'interno dello spazio fissato non permettendo però la sovrapposizione tra particelle o tra particelle ed elementi al contorno. Questa procedura è quella più utilizzata in quanto consente di generare sistemi formati da molti elementi in tempi di calcolo ragionevoli.

Una volta create le particelle, le si compatta utilizzando diverse modalità (Dolezalova, 2002):

- per spostamento delle pareti: consiste nell'avvicinamento reciproco dei confini del sistema fino al raggiungimento della densità desiderata. Questo tipo di approccio presenta notevoli problemi in quanto:
 - andando a spostare le pareti, si perde la geometria iniziale del modello;
 - la convergenza all'equilibrio è molto lenta, in quanto il disturbo che si genera ai confini deve propagarsi all'interno;
 - la distribuzione di particelle ottenuta non è uniforme;
- per espansione dei raggi (*generation by radius expansion*): consiste nel creare un insieme iniziale di particelle di piccolo raggio, successivamente dilatate fino al raggiungimento della densità prevista. È il metodo più semplice ed affidabile, in quanto mantiene le dimensioni iniziali del sistema e, espandendo le particelle dello stesso fattore in tutte le direzioni, gli conferisce proprietà uniformi ed isotrope (figura 4.5);

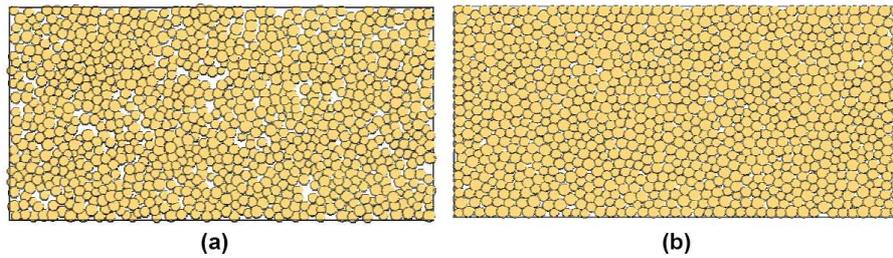


FIGURA 4.5: ISTANTE INIZIALE (A) E FINALE (B) DEL PROCEDIMENTO DI GENERAZIONE PER ESPANSIONE
(ITASCA, 2002)

- per repulsione esplosiva (*generation by explosive repulsion*): consiste nel creare un insieme iniziale di particelle di raggio tale da raggiungere la porosità desiderata. Queste ultime sono disposte casualmente all'interno del sistema con conseguenti sovrapposizioni (figura 4.6) ed elevate forze di repulsione che possono raggiungere valori tali da permettere ad alcune ball di sfuggire attraverso le pareti del sistema.

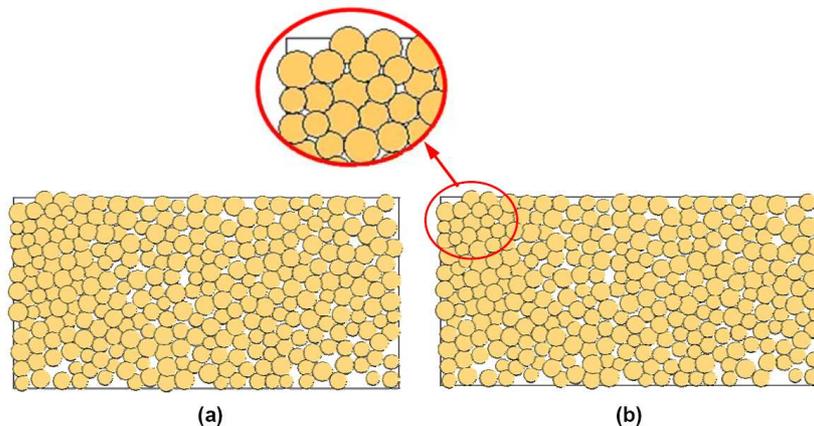


FIGURA 4.6: ISTANTE INIZIALE (A) E FINALE (B) DEL PROCEDIMENTO DI GENERAZIONE PER ESPLOSIONE
(ITASCA, 2002)

Sfruttando la logica *clump* e quella *cluster*, il software prevede inoltre la possibilità di modellare elementi di forma generica ottenuti assemblando particelle circolari che mantengono la stessa posizione reciproca durante l'intera simulazione (figure 4.7 e 4.8). L'unità così formata può essere dotata di comportamento rigido (*clump*) o deformabile (*cluster*). In questo modo è possibile quindi ottenere una rappresentazione molto fedele alla realtà fisica.



FIGURA 4.7: ELEMENTI *CLUMP* O *CLUSTER* (KONIETZKY, 2003)

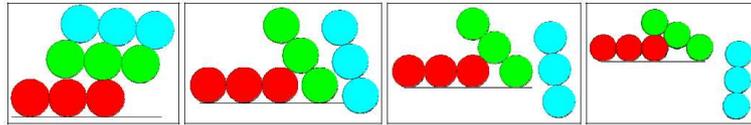


FIGURA 4.8: INTERAZIONE TRA ELEMENTI *CLUMP* COSTITUITI DA TRE PARTICELLE (THOMAS ET AL., 1997)

4.5.3 I modelli di contatto

Il termine *contatto* viene usato per denotare l'interazione reciproca tra particelle oppure quella tra particelle e pareti attraverso forze che si sviluppano nei loro punti di sovrapposizione.

Un modello di contatto descrive il comportamento fisico che si ha nel punto di contatto; anche se un sistema di particelle ha un comportamento costitutivo non lineare molto complesso, questo può essere descritto attraverso modelli di contatto relativamente semplici.

Un modello di contatto si compone in generale di tre parti (Itasca, 2002):

- un modello di rigidità;
- un modello di slittamento;
- un modello di legame.

4.5.3.1 Il modello di rigidità

Il modello di rigidità fornisce una relazione tra le componenti normale (F_n) e tangenziale (F_s) della forza di contatto ed i relativi spostamenti (U_n, U_s):

$$F_n = k_n \cdot U_n \quad (4.18)$$

$$F_s = -k_s \cdot U_s \quad (4.19)$$

dove k_n e k_s sono rispettivamente le rigidità normale e tangenziale.

Il software in particolare ne prevede due tipologie: il modello lineare e quello di Hertz-Mindlin.

Il modello lineare, molto diffuso per la sua semplicità, ipotizza una relazione lineare tra le forze e gli spostamenti. Note due particelle A e B in reciproco contatto, k_n e k_s si valutano mediante le equazioni di seguito riportate (Cundall, 1988):

$$k_n = \frac{k_n^A \cdot k_n^B}{k_n^A + k_n^B} \quad (4.20)$$

$$k_s = \frac{k_s^A \cdot k_s^B}{k_s^A + k_s^B} \quad (4.21)$$

Il modello di Hertz-Mindlin è di tipo elastico non lineare e valuta le rigidezze k_n e k_s in funzione del modulo di taglio (G) e del coefficiente di Poisson (ν) di due particelle A e B a contatto mediante le equazioni di seguito riportate (Mindlin, 1953):

$$k_n = \left(\frac{2 \cdot \langle G \rangle \cdot \sqrt{2 \cdot \tilde{R}}}{3 \cdot (1 - \langle \nu \rangle)} \right) \cdot \sqrt{U_n} \quad (4.22)$$

$$k_s = \left(\frac{2 \cdot (3 \cdot \langle G \rangle^2 \cdot (1 - \langle \nu \rangle) \cdot R^{1/3})}{(2 - \langle \nu \rangle)} \right) \cdot |F_i^n|^{1/3} \quad (4.23)$$

dove U_n è la sovrapposizione tra le due particelle a contatto e $|F_i^n|$ è la forza di contatto in direzione normale.

Indicando con $R^{[A]}$ ed $R^{[B]}$ i raggi delle due sfere a contatto, i termini delle precedenti formule si valutano secondo quelle di seguito indicate (Di Renzo et al., 2004):

- contatto particella-particella:

$$\tilde{R} = \frac{2 \cdot R^{[A]} \cdot R^{[B]}}{R^{[A]} + R^{[B]}} \quad (4.24)$$

$$\langle G \rangle = 0,5 \cdot (G^{[A]} + G^{[B]}) \quad (4.25)$$

$$\langle \nu \rangle = 0,5 \cdot (\nu^{[A]} + \nu^{[B]}) \quad (4.26)$$

- contatto particella-parete:

$$\tilde{R} = R^{[ball]} \quad (4.27)$$

$$\langle G \rangle = G^{[ball]} \quad (4.28)$$

$$\langle \nu \rangle = \nu^{[ball]} \quad (4.29)$$

4.5.3.2 Il modello di slittamento

Il modello di slittamento è una proprietà intrinseca delle entità a contatto: particella-particella o particella-elemento al contorno. La condizione di slittamento si ha quando la componente tangenziale della forza (F_t^i) eguaglia il valore massimo ammissibile della forza di contatto tangenziale (F_t^{\max}). Questo valore è dato dal coefficiente di attrito minimo tra le entità a contatto (μ) moltiplicato per il modulo della componente normale di compressione della forza (F_n^i).

Il modello è sempre attivo, eccetto quando è presente un legame di contatto: in questo caso il modello di legame prende il posto a quello di slittamento.

Questi due tipi di legame descrivono il comportamento costitutivo di due elementi a contatto in un punto; il legame di contatto parallelo invece descrive il comportamento costitutivo quando il contatto non avviene su una superficie di dimensioni finite.

La condizione affinché si abbia slittamento si può quindi esprimere come:

$$F_t^i \geq F_t^{\max} = \mu \cdot |F_n^i| \quad (4.30)$$

4.5.3.3 Il modello di legame

PFC prevede due diverse tipologie di modello di legame:

- il legame di contatto (*contact bond*), riproduce l'effetto d'adesione che si esplica nel punto di contatto e può essere visto come un insieme di due molle elastiche con rigidità normale e tangenziale costanti agenti nel punto di sovrapposizione (figura 4.9). È definito dalle componenti normale (n_bond) e tangenziale (s_bond) della forza di contatto. Preclude lo scorrimento reciproco degli elementi adiacenti e non ne impedisce la rotazione, che può essere causata da un momento agente nel punto di sovrapposizione (figura 4.10).

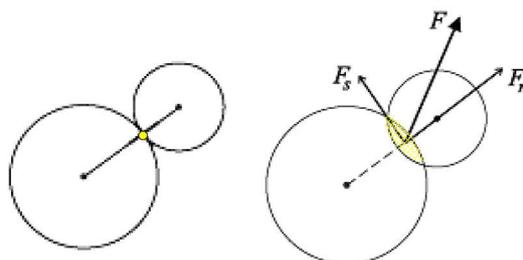


FIGURA 4.9: CONTACT BOND (ITASCA, 2002)

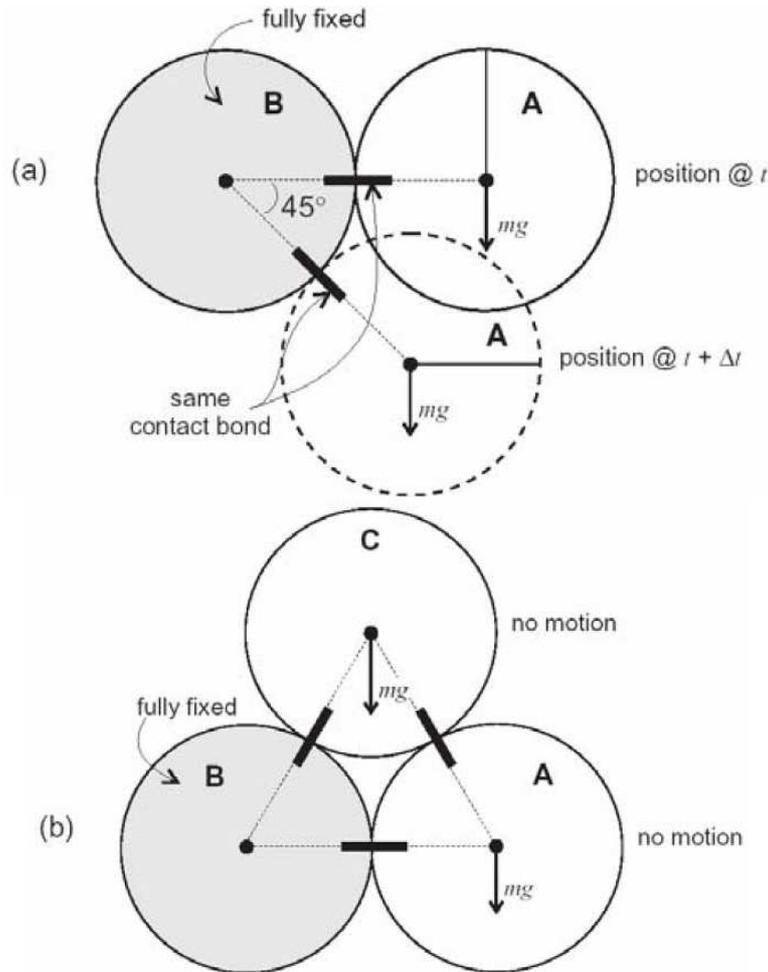


FIGURA 4.10: ROTAZIONE SENZA SCORRIMENTO PERMESSA DAL CONTACT BOND TRA DUE (A) E TRE (B) PARTICELLE (ITASCA, 2002)

- il legame parallelo (*parallel bond*), riproduce l'effetto d'adesione di un materiale aggiuntivo depositatosi dopo che le particelle sono giunte a contatto, la cui rigidezza agisce in parallelo con quella di contatto (da qui il nome del modello) (figura 4.11). Può essere visto come un insieme di molle elastiche con rigidezze normale e tangenziale costanti, uniformemente distribuite su una sezione trasversale circolare o rettangolare situata nel piano di contatto e centrata nel punto di contatto. Ogni carico aggiuntivo applicato alle due particelle, dopo che si è instaurato il legame parallelo, è suddiviso in modo proporzionale tra la molla del contatto e quella del legame stesso che può trasmettere sia forze che momenti tra le particelle. Questo legame si utilizza generalmente per modellare materiali coesivi ed è definito dalla componente normale della forza di contatto

($pb_nstrength$), da quella tangenziale ($pb_sstrength$) e dalle rigidezze normale (pb_kn) e tangenziale (pb_ks).

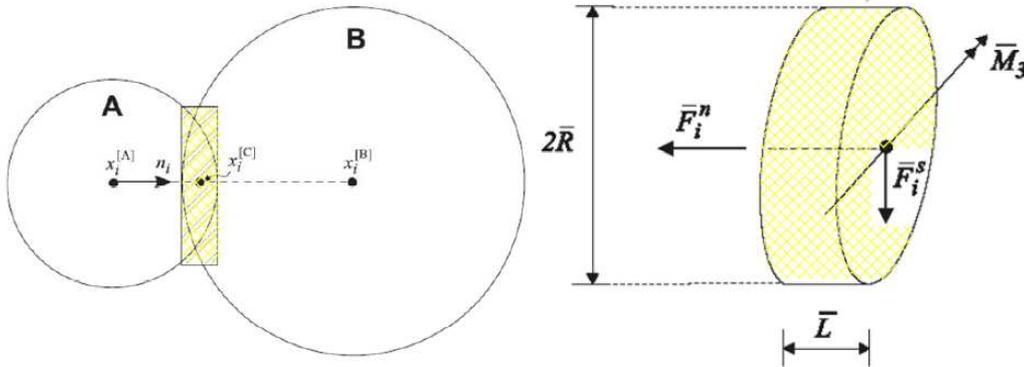


FIGURA 4.11: PARALLEL BOND (ITASCA, 2002)

Le risultanti delle forze e dei momenti che si generano nel punto di contatto si valutano componendoli nelle direzioni normale (n) e tangenziale (s) al piano di contatto. Per la prima si ottiene (figura 4.11):

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i^n + \bar{F}_i^s \quad (4.31)$$

Queste risultanti assumono valore nullo nell'istante in cui si forma il contatto ed aumentano ad ogni *time step* successivo in funzione degli spostamenti e delle rotazioni subite dalle due entità a contatto.

L'incremento subito nell'intervallo Δt si valuta secondo le seguenti espressioni:

$$\Delta \bar{F}_i^n = (k_n \cdot \Delta U_n \cdot \pi \cdot \bar{R}^2) \cdot n_i \quad (4.32)$$

$$\Delta \bar{F}_i^s = (k_s \cdot \Delta U_s \cdot \pi \cdot \bar{R}^2) \quad (4.33)$$

$$\Delta \bar{M}_3 = (k_n \cdot \Delta \theta_3 \cdot I) = k_n \cdot I \cdot (\omega_3^{[B]} - \omega_3^{[A]}) \cdot \Delta t \quad (4.34)$$

dove \bar{R} è il raggio dell'area di contatto e I è il momento d'inerzia.

Si ottiene pertanto:

$$\bar{F}_i^n \leftarrow \bar{F}_i^n + \Delta \bar{F}_i^n \quad (4.35)$$

$$\bar{F}_i^s \leftarrow \bar{F}_i^s + \Delta \bar{F}_i^s \quad (4.36)$$

$$\bar{M}_3 \leftarrow \bar{M}_3 + \Delta \bar{M}_3 \quad (4.37)$$

Il valore massimo degli sforzi di flessione (σ_{\max}) e di taglio (τ_{\max}) nel contatto è pari a (Kruyt, 1993):

$$\sigma_{\max} = \frac{\bar{F}_i^n}{\pi \cdot R^2} + \frac{\bar{M}_3}{I} \quad (4.38)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\bar{F}_i^s}{\pi \cdot R^2} \quad (4.39)$$

Nel primo modello la rigidità al contatto si mantiene attiva anche dopo la rottura del legame, fino a quando le particelle rimangono in contatto; ciò implica il fatto che nel modello CB la rottura non interessa le proprietà macroscopiche. Al contrario nel secondo modello alla rigidità contribuiscono sia i contatti che i legami pertanto una rottura del legame porta immediatamente ad una riduzione della rigidità che incide sulle particolarità macroscopiche dell'insieme.

Tale concetto è illustrato in figura 4.12 ed in questo senso il modello PB risulta più realistico per i materiali rocciosi in cui i legami possono rompersi sotto sforzi tensionali o di taglio portando ad una notevole riduzione della rigidità.

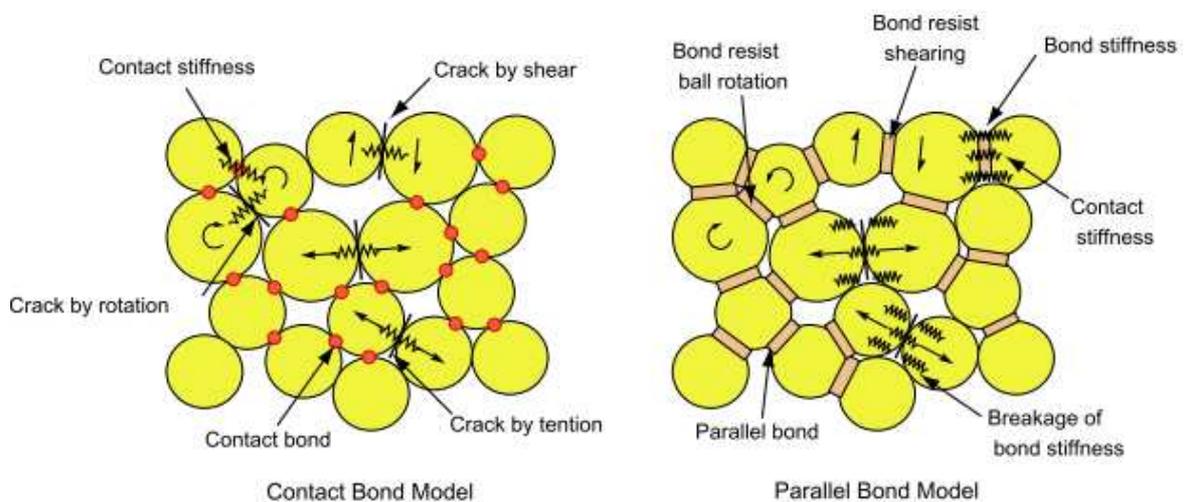


FIGURA 4.12: MODELLI DI LEGAME A CONFRONTO (CHO ET AL., 2007)

4.5.4 Applicazione delle condizioni iniziali ed al contorno

Dopo aver generato e compattato il sistema si applicano le condizioni iniziali e quelle al contorno alle particelle ed alle pareti. Alle prime è possibile applicare velocità di traslazione e di rotazione, forze e momenti; le seconde, invece, possono essere soggette solo a velocità e non a forze. Le sollecitazioni così applicate rimangono costanti durante tutta la simulazione.

4.5.5 L'interpretazione dei risultati

I parametri di controllo dei risultati ottenuti si valutano all'interno di un'area circolare detta cerchio di misura (*measurement circle*) specificata dall'utente. Al suo interno è possibile valutare i seguenti indici:

- numero di coordinazione (C_n): è definito come il numero medio di contatti per particella e si valuta con la seguente espressione (Itasca, 2002):

$$C_n = \frac{\sum_{N_b} n_c^{(b)}}{N_b} \quad (4.40)$$

dove N_b è il numero di particelle il cui centro è interno al cerchio di misura ed $n_c^{(b)}$ è il numero di contatti della particella (b). I sistemi caratterizzati da un elevato valore di C_n sono in grado di esplicitare buone resistenze meccaniche (O'Sullivan et al., 2004).

- frazione dei contatti in scorrimento: valuta la frazione di contatti interni al cerchio che hanno subito scorrimento; si assume che ci sia scorrimento di contatto se non vi sono legami di contatto, mentre quando è presente il legame di contatto non si ha scorrimento, a prescindere dal valore della forza di contatto;
- porosità (n): è definita come il rapporto tra l'area totale dei vuoti all'interno del cerchio di misura (A_v) e l'area dello stesso (A_c) secondo la formula (Itasca, 2002):

$$n = \frac{A_v}{A_c} = \frac{A_c - A_p}{A_c} = 1 - \frac{A_p}{A_c} \quad (4.41)$$

dove A_p è l'area del cerchio occupata dalle particelle così calcolata:

$$A_p = \sum_{N_p} A^{(p)} - A_s \quad (4.42)$$

con N_p è il numero di particelle che intersecano il cerchio di misura, $A^{(p)}$ è l'area della particella (p) contenuta nel cerchio e A_s è l'area delle sovrapposizioni tra le particelle interne al cerchio.

Se si utilizza la procedura di compattazione per espansione, è possibile valutare il coefficiente moltiplicatore dei raggi (m) per variare la porosità del sistema dal valore

iniziale n_0 a quello finale n . Indicando con R_0 il raggio iniziale di una particella del sistema e con R quello finale, si ottiene (Itasca, 2002):

$$R = m \cdot R_0 \quad (4.43)$$

Semplificando la 4.41:

$$n \cdot A_c = A_c - \sum \pi \cdot R^2 \quad (4.44)$$

$$\sum R^2 = \frac{A_c \cdot (1-n)}{\pi} \quad (4.45)$$

Si ottiene pertanto:

$$\frac{\sum R^2}{\sum R_0^2} = \frac{1-n}{1-n_0} \quad (4.46)$$

Sostituendo la 4.43 nella 4.46 risulta:

$$m = \sqrt{\frac{1-n}{1-n_0}} \quad (4.47)$$

4.6 Le applicazioni di PFC

Il software in oggetto trova applicazione in diversi campi ingegneristici, tra i quali ricordiamo:

- la stabilità dei pendii e dei muri di sostegno: il programma è in grado di studiare l'interazione che avviene tra il terreno e il manufatto; confrontando tra loro il comportamento di diversi sistemi è quindi possibile scegliere quello che meglio soddisfa le specifiche esigenze (Pohl et al., 2004). È possibile quindi analizzare l'influenza dei diversi parametri, simulare il collasso del sostegno, il cedimento del terreno di fondazione e lo slittamento del pendio (Mizumoto et al., 2004; Hainbuchner et al., 2003);

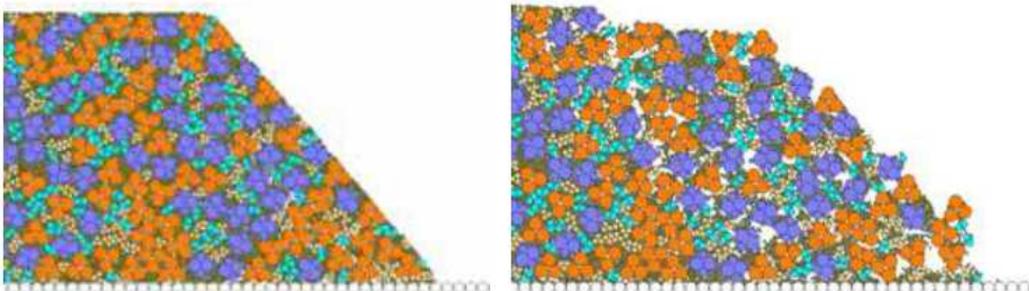


FIGURA 4.13: STABILITÀ DI UN PENDIO (DELUZARCHE ET AL., 2003)

- il sostegno strutturale del terreno, nel particolare la simulazione del fenomeno dell'*interlocking* in terreni rinforzati con geogriglie (Konietzky et al., 2004; Chareyre et al., 2003);

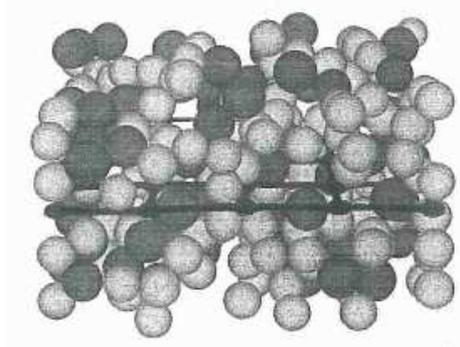


FIGURA 4.14: GEOGRIGLIA ED AGGREGATO

- il comportamento a rottura delle rocce: la simulazione può avvenire in presenza o meno di pressione idrostatica applicando una pressione di confinamento al provino con lo scopo di determinare i parametri che maggiormente influenzano la forza di taglio (Sakakibara et al., 2004; Lei et al., 2004; Aoki et al., 2004; Park et al., 2004; Sainsbury et al., 2003; Tomiczek, 2003);

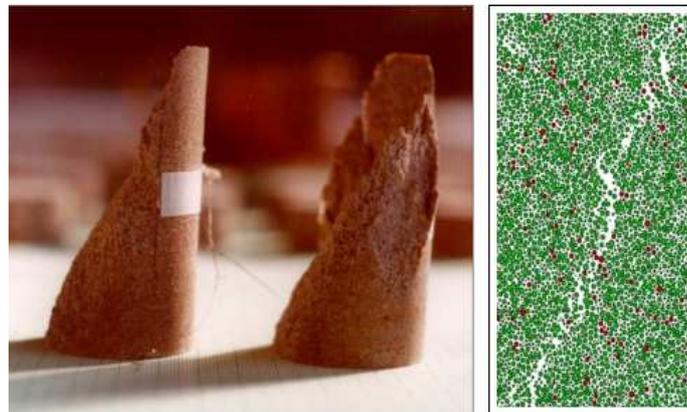


FIGURA 4.15: TEST DI ROTTURA SU UN CAMPIONE DI ROCCIA (TOMICZEK, 2003)

- applicazioni industriali come lo studio del flusso di materiali granulari all'interno del sistema di alimentazione di un altoforno (Ferellec et al., 2004), di un mulino a rotazione (Sarracino et al., 2004) ed in generale in tubi, sili e tramogge (Kleier et al., 2003; Niessen et al., 2003; Iwashita et al., 2003; Iverson, 2003).

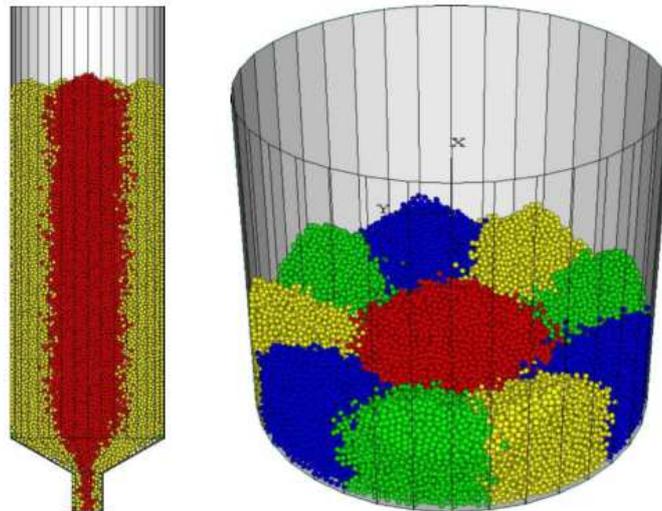


FIGURA 4.16: FLUSSO DI MATERIALI GRANULARI ALL'INTERNO DI SILI E TRAMOGGE
(NIESSEN ET AL., 2003)

- flusso di scorrimento inteso come percolazione in vie preferenziali di piccoli frammenti di roccia (Pierce, 2004; Kishino, 2004);
- aspetti generali di geologia, come ad esempio la rappresentazione della foliazione magmatica (Park et al., 2004), le cinture orogeniche (Lee et al., 2004), i prismi di accrezione (Yamada et al., 2004) l'evoluzione tettonica (Imre, 2004);
- in idraulica per riprodurre l'interazione solido-fluido che avviene negli ammassi rocciosi ed eventualmente per prevedere (Okura et al., 2004; Li et al., 2004; Shimizu, 2004; Aoki et al., 2004; Cook et al., 2004);
- il comportamento sotto carico del ballast ferroviario (Lim et al., 2005);
- la risposta sismica ed il collasso delle strutture (Chang et al., 1991; Sadd et al., 2000; Tsuji, 2000; Lin et al., 2003; Hainbuchner et al., 2002; Hazzard et al., 2004).

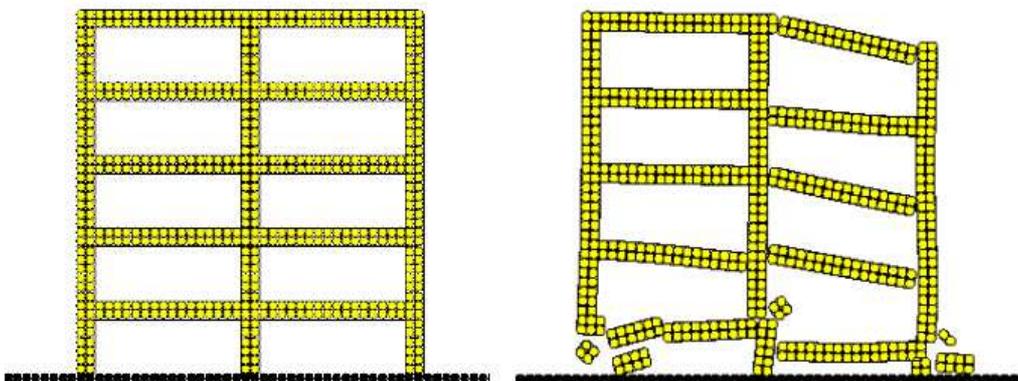


FIGURA 4.16: RISPOSTA SISMICA DI UNA STRUTTURA (HAZZARD ET AL., 2004)

LA SPERIMENTAZIONE EFFETTUATA

5.1 Introduzione

La sperimentazione condotta e descritta nella presente tesi si inserisce nell'ambito di un progetto di ricerca PRIN (Programmi di ricerca scientifica di Rilevante Interesse Nazionale), dal titolo "*Modellazione e progettazione avanzata di pavimentazioni stradali perpetue*", conclusosi nel 2010, al quale partecipano le seguenti università italiane:

- Politecnico di Torino (Coordinatore);
- Università di Bologna;
- Università Politecnica delle Marche;
- Università di Parma;
- Università di Pisa.

Ad oggi, infatti, il patrimonio stradale nazionale è prevalentemente costituito da pavimentazioni flessibili e semirigide, la cui richiesta di manutenzione si fa ogni giorno sempre più gravosa in termini sia economici sia di risorse richieste. Di conseguenza si sta affermando il concetto delle cosiddette pavimentazioni perpetue, ossia di pavimentazioni in grado di garantire una vita utile dell'ordine dei 50 anni, ben superiore ai limiti massimi generalmente considerati nella progettazione (e riscontrati nella pratica) dell'ordine dei 20-25 anni.

Il progetto si propone di sviluppare strumenti specifici per la valutazione preventiva delle pavimentazioni perpetue per ciò che riguarda sia le indagini sperimentali sia la modellazione.

All'unità del Politecnico di Torino, in particolare, è assegnato il compito di verificare le caratteristiche di progressivo degrado di alcune pavimentazioni perpetue mediante prove simulative di laboratorio in vera grandezza.

Il tema delle pavimentazioni perpetue rinforzate con reti, invece, è sviluppato presso le Unità di Ancona e Parma. Le attività dell'Unità di Parma, in particolare, si concentrano sulla progettazione razionale del rinforzo per quel che riguarda sia la

scelta del tipo di rete sia il suo posizionamento all'interno degli strati della pavimentazione. Le attività dell'Unità di Ancona, invece, vertono su aspetti maggiormente legati all'interazione tra le reti di rinforzo e gli strati in conglomerato bituminoso.

L'attività di ricerca svolta dall'Unità di Bologna verte sulla modellazione avanzata del comportamento sotto carico delle pavimentazioni perpetue. In tal senso, per superare i limiti intrinseci delle metodologie di verifica tradizionali si utilizzano tecniche numeriche avanzate basate sull'utilizzo di metodi di calcolo agli elementi distinti particellari (DEM-3D).

Infine, per quel che riguarda l'attività di ricerca dell'Unità di Pisa, verrà sviluppato un sistema esperto di supporto alle decisioni per la scelta e la progettazione degli interventi di rinforzo e di ricostruzione delle pavimentazioni della viabilità ordinaria orientato alla realizzazione di pavimentazioni perpetue.

5.2 Descrizione della ricerca dell'unità operativa di Bologna

L'attività di ricerca svolta dall'unità operativa di Bologna ha riguardato lo studio avanzato del comportamento a fatica di pavimentazioni stradali per la definizione di nuovi criteri di progettazione e di verifica di sovrastrutture tradizionali ed a lunga durata.

Per raggiungere questi risultati è necessario superare i criteri classici di calcolo a fatica delle pavimentazioni stradali flessibili basati su condizioni medie ripetute nel tempo e su un processo di accumulo del danno di tipo continuo. Questi ultimi, infatti, ipotizzano che tutti i carichi producano necessariamente un danno, che i tassi di incremento del danno su strada siano direttamente proporzionali a quelli ottenuti in laboratorio, che l'effetto di auto-riparazione del conglomerato non risulti significativo e che i materiali in opera presentino un comportamento omogeneo. Nasce, quindi, la necessità di prendere in considerazione non più le condizioni medie, ma quelle critiche, fondate su uno sviluppo del danno di tipo discontinuo.

Per raggiungere questi obiettivi l'attività di ricerca svolta dall'unità operativa di Bologna ha previsto l'utilizzo di tecniche numeriche avanzate in grado di prendere in considerazione il fatto che il conglomerato bituminoso, essendo un materiale multifase caratterizzato da una complessa natura intrinseca disomogenea ed anisotropa e

fortemente influenzata dalle condizioni ambientali, esplica un comportamento meccanico difficilmente schematizzabile.

Per indagarne la risposta tenso-deformativa si utilizzano generalmente metodi numerici al continuo che incorporano la sua natura particellare all'interno di leggi costitutive elasto-plastiche, per cui lo studio può essere condotto a livello fenomenologico anziché a livello "atomico". A giustificare l'approccio continuo c'è da un lato il vantaggio di poter disporre di metodologie analitiche e numeriche ben consolidate, e dall'altro l'evidenza sperimentale che ne prova l'efficacia e la significatività almeno da un punto di vista fenomenologico.

Spesso, però, esso risulta riduttivo e carente: è ormai noto, infatti, che i mezzi granulari esplicano un comportamento meccanico nettamente diverso da quello degli altri materiali e questa differenza è imputabile proprio alla loro natura particellare. Diventa, quindi, indispensabile ricorrere ad un approccio di tipo discontinuo, in grado di prendere in considerazione il carattere discreto del sistema ed analizzare i processi microscopici di base che ne determinano il comportamento tenso-deformativo macroscopico (figura 5.1).

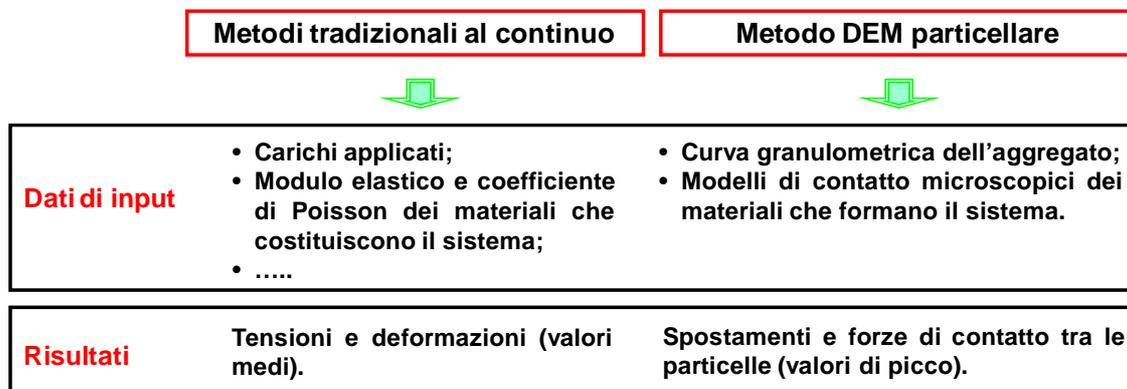


FIGURA 5.1: CONFRONTO TRA METODI AL CONTINUO E DISCONTINUI

Tra i metodi discontinui disponibili in letteratura, in particolare, si utilizza quello degli Elementi Distinti Particellari, poiché, schematizzando il sistema come un insieme di particelle di forma circolare, si presta particolarmente allo studio del comportamento meccanico di un materiale granulare (figura 5.2).

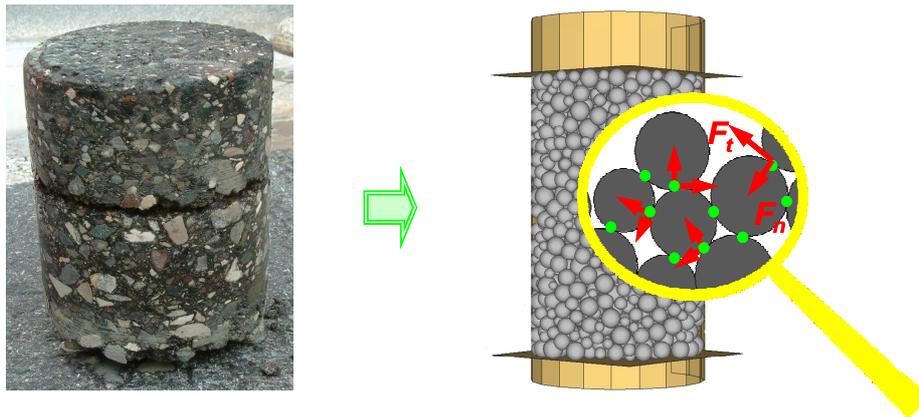


FIGURA 5.2: METODO DEGLI ELEMENTI DISTINTI PARTICELLARI

Tecniche numeriche	Metodo degli Elementi Finiti (FEM).
	Metodo degli Elementi Distinti Particellari (DEM-P).
Dati di input	Carichi applicati, temperatura, modulo elastico e coefficiente di Poisson dei materiali che costituiscono il sistema.
	Curva granulometrica dell'aggregato, modelli di contatto microscopici dei materiali che costituiscono il sistema
Risultati	Tensioni e deformazioni - valori medi.
	Spostamenti e forze di contatto tra le particelle - valori di picco.
Condizioni della pavimentazione	Condizioni omogenee (lo stato della miscela non varia).
	Condizioni eterogenee (lo stato della miscela può variare).
Studio della fatica, dell'ormaiamento, delle fessurazioni alle basse temperature	L'innesco e la propagazione del fenomeno sono di tipo continuo. Il metodo fornisce in output il numero di cicli di carico che portano a rottura la pavimentazione.
	L'innesco e la propagazione del fenomeno si sviluppano per step successivi. Si riesce quindi a modellare la rottura microscopica, ottenendo in output il numero di cicli di carico che portano a rottura la pavimentazione e la posizione del punto in cui si localizza la frattura.
Studio dell'healing del conglomerato bituminoso	Non è possibile modellare il fenomeno.
	E' possibile modellare il fenomeno.
Studio del bonding tra gli strati di una sovrastruttura	Solo in corrispondenza delle interfacce tra gli strati.
	Su tutti i piani orizzontali passanti per la pavimentazione.

TABELLA 5.1: CONFRONTO TRA L'APPROCCIO TRADIZIONALE (IN GRIGIO) E QUELLO DISCONTINUO NELLA PROGETTAZIONE DI UNA PAVIMENTAZIONE FLESSIBILE (BIRGISSON ET AL., 2007)

I risultati ottenuti in precedenti studi ne hanno confermato le potenzialità nel riprodurre l'effettivo comportamento visco-elastico del conglomerato bituminoso sia durante test di laboratorio condotti su provini di piccole dimensioni, sia all'interno di una pavimentazione stradale flessibile. Nell'ambito dello studio del comportamento a

fatica di quest'ultima, in particolare, hanno evidenziato che con questa metodologia è possibile ottenere indicazioni sia sul numero di cicli di carico che la portano a rottura, operazione questa già possibile con le tecniche classiche, sia, soprattutto, sulla localizzazione del punto d'innescio della frattura. Si riesce, così, a studiare la propagazione di fenomeni fessurativi di tipo *bottom-up* e *top-down*, tenendo in considerazione anche la sovrapposizione degli effetti conseguente alla loro interazione all'interno dello strato.

Il confronto tra i risultati numerici e quelli ottenuti dalle leggi di fatica tradizionali, inoltre, ha mostrato che l'introduzione di parametri quali la forma e le dimensioni dei grani dell'aggregato permette non solo di ottenere un modello più rispondente alla realtà fisica, ma anche di approfondire il comportamento a fatica del sistema individuando nuovi punti in corrispondenza dei quali possono innescarsi le fratture. Nasce, quindi, l'esigenza di indagare ulteriormente questi parametri. A tal fine un utile strumento è rappresentato dal confronto tra i risultati numerici e quelli sperimentali ottenuti da modelli formati da sfere reali.

5.3 Obiettivo e programma di lavoro

Lo studio eseguito dall'unità operativa di Bologna ha previsto le seguenti attività:

- la scelta della metodologia di modellazione più opportuna al fine di simulare l'aggregato reale in modo significativo e la calibrazione dei relativi parametri microscopici;
- l'indagine dell'influenza della forma e delle dimensioni dei grani dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo del sistema.

Relativamente alla prima attività, partendo dai risultati disponibili in letteratura, è stato necessario:

- selezionare il materiale costituente le sfere: è stato scelto l'acciaio poiché costituisce un "aggregato ideale", in grado di fornire un confronto significativo tra i risultati numerici e quelli sperimentali in virtù del fatto che è ben riproducibile con il metodo DEM particellare. Infatti:
 - la geometria delle sfere in acciaio è facilmente modellabile in termini sia di diametro, sia di sfericità;

- la superficie delle sfere è uniforme ed è nota la relativa tolleranza di fabbricazione.
- definire il test di laboratorio da modellare: è stato scelto quello triassiale poiché:
 - fornisce risultati significativi sul fenomeno fisico studiato;
 - è facile e veloce da svolgere;
 - è facile da modellare con il metodo DEM particellare.

La calibrazione dei parametri microscopici con cui schematizzare le sfere di acciaio è stata ottenuta dalla modellazione 3D di una prova triassiale, confrontando i risultati del modello numerico con quelli di laboratorio.

Per ottenere indicazioni sull'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo del sistema sono stati confrontati i risultati ottenuti da prove triassiali condotte in laboratorio e modellate numericamente, eseguite su diversi provini al variare del tipo di particella elementare.

Di seguito si riporta il diagramma di flusso complessivo della ricerca (figura 5.3).

MODELLAZIONE E PROGETTAZIONE AVANZATA DI PAVIMENTAZIONI STRADALI PERPETUE

Università di Torino

Università Politecnica
delle Marche

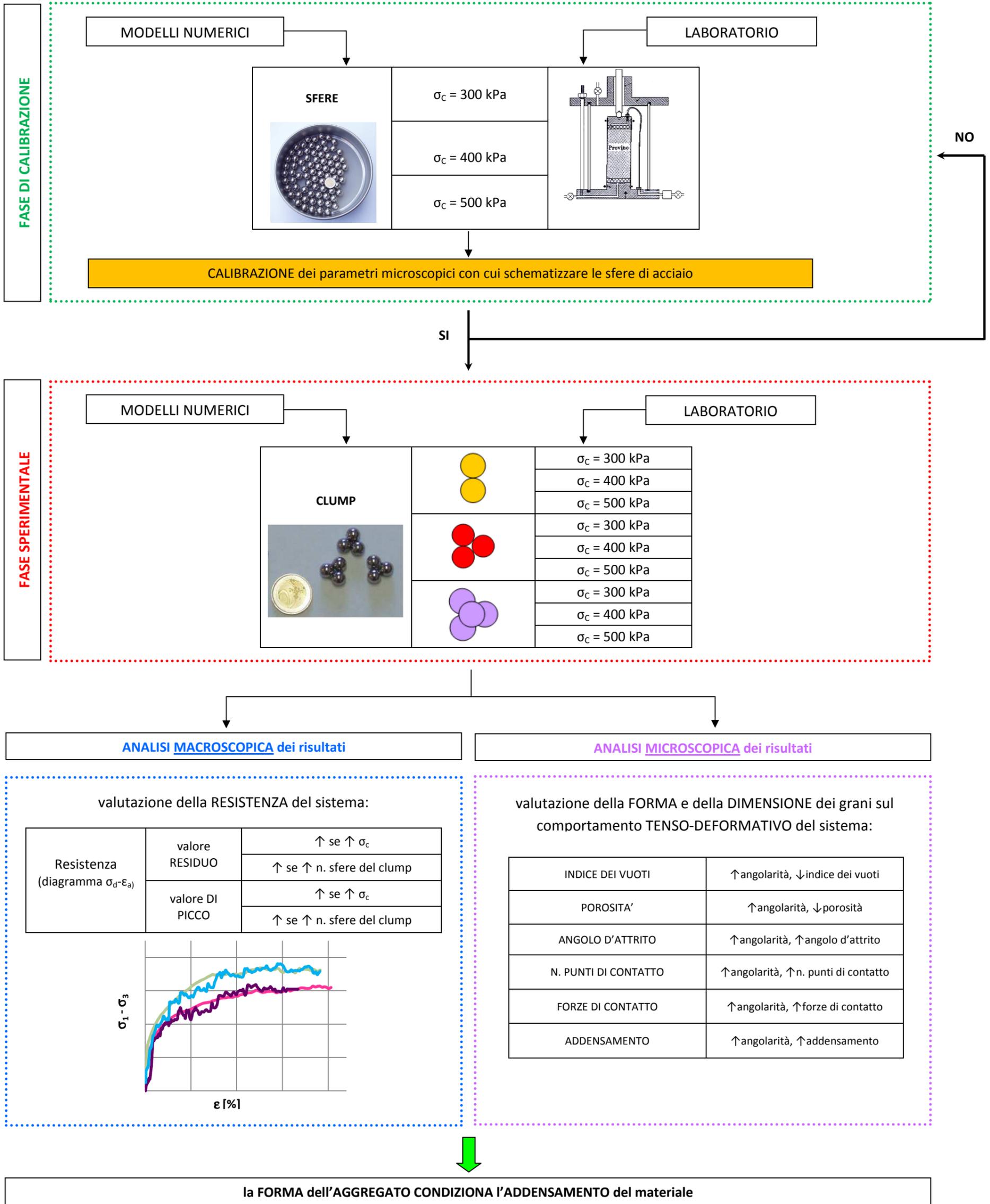
**UNIVERSITA' DI
BOLOGNA**

Università di Parma

Università di Pisa

STUDIO DEL COMPORTAMENTO TENSO-DEFORMATIVO DI UNA MISCELA IN CONGLOMERATO BITUMINOSO:

- indagine dei fattori che incidono significativamente sul COMPORTAMENTO MACROSCOPICO e MICROSCOPICO del materiale
- identificazione della METODOLOGIA NUMERICA più opportuna al fine di cogliere la NATURA PARTICELLARE del sistema
- indagine dell'influenza della forma e della dimensione dell'AGGREGATO LITICO



LA SPERIMENTAZIONE EFFETTUATA SU PROVINI

COSTITUITI DA SFERE

6.1 Introduzione

La sperimentazione eseguita ha previsto una prima fase di laboratorio e di modellazione condotta su provini formati esclusivamente da sfere. In particolare ha previsto diverse fasi:

- la scelta della metodologia di modellazione più opportuna al fine di simulare l'aggregato reale in modo significativo;
- la calibrazione dei parametri microscopici con cui schematizzare le sfere;
- analisi dei risultati ottenuti in termini di tensione deviatorica - deformazione assiale e deformazione volumetrica – deformazione assiale.

Partendo da un'ampia ricerca bibliografica che ha confermato la notevole importanza dell'aggregato sul comportamento complessivo di una pavimentazione stradale, è stato scelto un materiale oggetto di studio avente una curva granulometrica come quella indicata in figura 6.1.

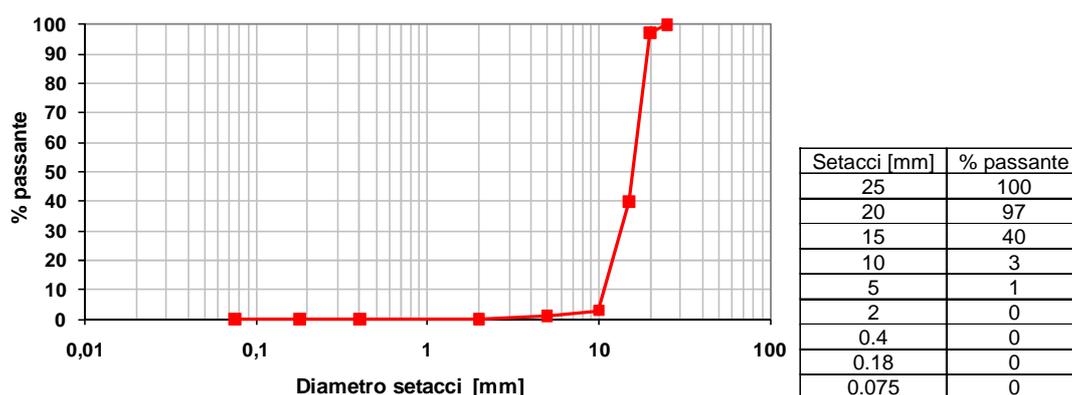


FIGURA 6.1: CURVA GRANULOMETRICA DELLA MISCELA REALE

6.2 La scelta delle modalità più opportune per simulare l'aggregato reale in modo significativo

Al fine di definire la metodologia più opportuna per simulare l'aggregato reale in modo significativo è stato necessario:

- definire il tipo di materiale costituente le sfere;
- definire il test di laboratorio da svolgere.

6.2.1 La scelta del materiale costituente le sfere

In commercio si avevano a disposizione l'acciaio, ma anche materiali plastici (polyamide, hostaform, polipropilene, poliuretano, teflon) e ceramici (ossido di allumina, rubino e zaffiro, ossido di zirconio, nitruro di silicio).

Partendo da un ampio studio bibliografico è stato ricercato un materiale che fosse ben riproducibile con il metodo DEM particellare e disponibile sul mercato a prezzi competitivi; è stato quindi scelto l'acciaio perché possiede buona inossidabilità, elevata durezza e media resistenza.

L'acciaio costituisce quindi un aggregato ideale, in grado di fornire un confronto significativo tra i risultati numerici e quelli sperimentali in virtù del fatto che:

- la geometria delle sfere in acciaio è facilmente modellabile sia in termini di diametro che di sfericità;
- la superficie delle sfere è uniforme ed è nota la relativa tolleranza di fabbricazione.

Le sfere costituenti i campioni, che a livello industriale vengono impiegate per la produzione di cuscinetti ed altre applicazioni, sono in *acciaio inox AISI 420C DRY* le cui specifiche compositive sono riassunte in tabella 6.1.

ACCIAIO/ STEEL	ANALISI/COMPOSITION							DUREZZA/ HARDNESS				
								SECONDO/ACCORDING TO DIN5401:2002-08			SECONDO/ ACCORDING TO ANSI/ABMA Std.10A-2001	
	C%	Si%	Mn%	P%	S%	Co%	Cr%	oltre/ over	fino a / up to			
INOX AL 13% 420 C <small>3168</small>	0.43 0.50	1.00 max	1.00 max	0.040 max	0.015 max	- -	12.50 14.50	- 12.7	12.7 100	580/700 HV10 54/60 HRC	N.A.	

TABELLA 6.1: SPECIFICHE COMPOSITIVE ACCIAIO (MARTIN & C. SRL)

La fornitura del materiale è stata affidata alla ditta Torinese *Martin*, la quale fornisce un prodotto che viene realizzato attraverso un percorso che si divide in cinque passaggi successivi: lo stampaggio, la sgrossatura, la tempra, la rettifica e la lappatura.

Dopo la verifica di idoneità effettuata attraverso il collaudo di accettazione, la materia prima, precedentemente certificata dal fornitore, viene lavorata su stampatrici

ad altissima velocità. La seconda fase della lavorazione consiste nel passaggio dei pezzi tra dischi a gole concentriche al fine di eliminare i testimoni di stampaggio e conferire la corretta rotondità alla sfera.

Il trattamento termico, dove necessario, conferisce la massima durezza possibile e quindi le migliori caratteristiche ottenibili in relazione ai materiali impiegati. Accurati e ripetuti processi di rettifica con mole di ceramica determinano quindi una maggiore precisione dimensionale predisponendo le sfere per la successiva operazione di lappatura finale.

Questa fase conferisce alla sfera una superficie perfettamente lucida, compatta ed esente da difetti, una rugosità ed ondulosità superficiali bassissime, di gran lunga inferiori a quelle previste dalle norme ISO 3290.

Tutte le caratteristiche del materiale in esame vengono controllate durante la produzione e ricontrollate prima della spedizione, al termine del ciclo di lavoro, per assicurarne e garantirne la massima qualità. Ogni lotto di sfere viene controllato su sofisticate macchine che eseguono verifiche sullo stato superficiale della sfera e sulla sua integrità, scartando eventuali pezzi difettosi.

La granulometria della miscela ideale di acciaio è stata definita semplificando quella del materiale reale, togliendo le frazioni di passante poco significative (figura 6.2). In questo modo è stato possibile ottenere un mix di elementi di diametro compreso tra 2.778 mm e 20 mm, caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- assenza di problemi di effetto scala rispetto alle dimensioni del provino, di diametro ed altezza pari rispettivamente a 10 e 20 cm;
- buona maneggevolezza nel trattamento delle singole sfere, ottenuto evitando diametri troppo piccoli.

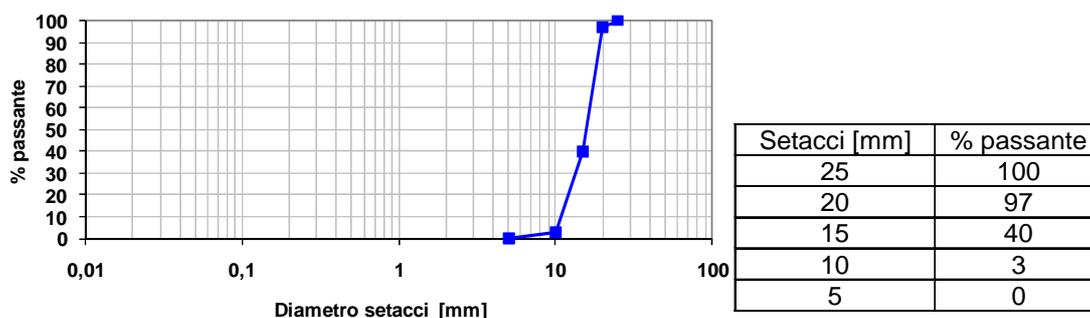


FIGURA 6.2: CURVA GRANULOMETRICA DELLA MISCELA IDEALE DI ACCIAIO

6.2.2 La scelta del test triassiale

L'influenza della forma e delle dimensioni dei grani dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo di una pavimentazione flessibile è stato indagato confrontando i risultati numerici e quelli di laboratorio ottenuti in numerosi test triassiali.

Partendo dai risultati disponibili in letteratura, è stata scelta quella triassiale poiché:

- fornisce risultati significativi sul fenomeno fisico studiato;
- è facile e veloce da svolgere;
- è facile da modellare con il metodo DEM particellare.

6.3 La calibrazione dei parametri microscopici con cui schematizzare le sfere di acciaio

6.3.1 Introduzione

La calibrazione dei parametri microscopici con cui schematizzare le sfere di acciaio è stata ottenuta dal confronto tra risultati numerici e sperimentali di test triassiali condotti su un provino formato interamente da sfere.

Il provino, in particolare, ha un'altezza ed una larghezza pari rispettivamente a 200 e 100 mm, ed è formato da 32'886 elementi di diametro compreso tra 2.77 mm e 18 mm (figura 6.3).



FIGURA 6.3: SFERE DI DIAMETRO PARI A 2.77, 11 E 18 MM

Di seguito, in figura 6.4 viene riportata la curva granulometrica della miscela descritta.

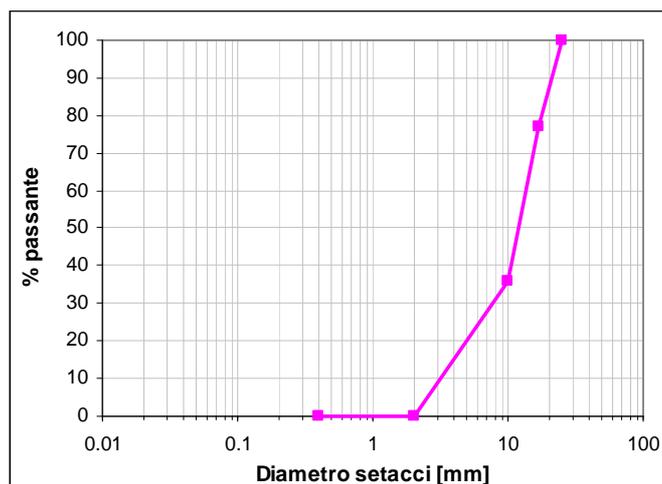


FIGURA 6.4: CURVA GRANULOMETRICA DELLA MISCELA

Per ogni diametro è stato quindi determinato il numero di elementi necessari per riprodurre la percentuale in peso sul totale (tabella 6.2).

Diametri [mm]	Numero di sfere
2.77	32'204
11	605
18	77

TABELLA 6.2: NUMERO DI SFERE CONTENUTE NEL PROVINO

La presenza di materiale fine è dettata dalla presenza della membrana in lattice; quest'ultima in aderenza al provino è soggetta alla pressione di confinamento dell'acqua: se la membrana non ha una superficie d'appoggio per quanto possibile piana, è spinta ad includersi nel provino rischiando di lacerarsi, non assolvendo più al suo compito di isolamento e compromettendo l'esito della prova.

6.3.2 Fase di laboratorio

La fase di laboratorio ha previsto la definizione delle modalità di creazione del provino triassiale e la successiva esecuzione dei test.

Relativamente al primo punto, noto che il test triassiale nasce per lo studio delle terre, è stato necessario adottare opportuni accorgimenti per confezionare provini in acciaio che, a differenza di quelli in terreno, non posseggono caratteristiche di auto sostentamento (figura 6.5).

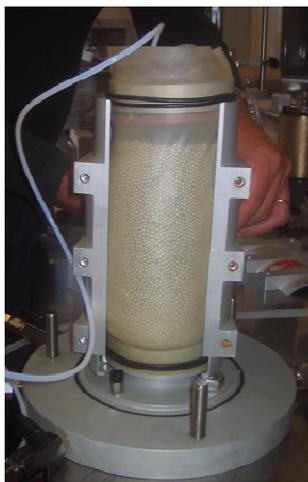


FIGURA 6.5: IL CAMPIONE COLLASSA NON APPENA VIENE TOLTO L'ANELLO METALLICO DI CONTENIMENTO

A tal fine è stato utilizzato un rinforzo costituito da un foglio di carta da filtro, interposto tra le sfere e la membrana, il quale, da secco, offre la rigidità opportuna per sostenere il provino e, da bagnato, perde consistenza senza fornire contributi resistenti durante il test.

Per raggiungere una resistenza maggiore, il foglio suddetto è stato incollato tramite Loctite[®], ovvero una colla che si scioglie in acqua (figura 6.6).



FIGURA 6.6: RINFORZO COSTITUITO DA UN CILINDRO DI CARTA

Il cilindro di carta da filtro dapprima è stato racchiuso all'interno di un cilindro metallico di contenimento, utilizzato solo durante l'inserimento del materiale all'interno del campione (figura 6.7), poi è stato riempito di sfere.



FIGURA 6.7: MONTAGGIO DELL'ANELLO DI CONTENIMENTO METALLICO

Il campione è stato confezionato disponendo alle estremità del provino sfere di diametro pari a 2.77 mm, in modo da avere uno strato uniforme a diretto contatto con le pietre porose. Nella parte centrale, invece, le sfere sono state introdotte in modo casuale e sono state poi opportunamente compattate mediante un pestello (figura 6.8).



FIGURA 6.8: COMPATTAZIONE DEL PROVINO

Questo procedimento prosegue fino al totale riempimento della fustella (figura 6.9).

Quando il cilindro è pieno, viene rimossa la struttura di alluminio e vengono posizionate sulla sommità la piastra porosa e quella metallica; una volta messi in sede gli *o-ring* che bloccano la membrana, finalmente il provino può essere posizionato dentro la cella, che viene riempita d'acqua (figura 6.10).



FIGURA 6.9: COMPLETO RIEMPIMENTO DELLA FUSTELLA



FIGURA 6.10: PROVINO INSERITO TRA LE PIETRE POROSE E NELLA CELLA TRIASSIALE

Le fasi successive consistono nell'imporre prima la *back pressure* per saturare il provino (possiamo leggere dal manometro il valore 100 kPa) (figura 6.11), poi la pressione di confinamento, in modo da effettuare la fase di consolidazione.



FIGURA 6.11: SATURAZIONE DEL PROVINO E MANOMETRO CHE MISURA LA *BACK PRESSURE*

A consolidazione avvenuta la cella viene posizionata nell'apposito vano sulla pressa (figura 6.12).



FIGURA 6.12: PRESSA CON PROVINO IN SEDE

A questo punto, una volta resettati i vari sensori e strumenti di misura, può iniziare la deformazione assiale del campione, che viene fatta proseguire oltre la rottura (figura 6.13).



FIGURA 6.13: IL CAMPIONE AL TERMINE DELLA PROVA

Al termine della prova, nel campione prelevato dalla cella triassiale è stato possibile constatare che la carta da filtro, dopo il contatto con l'acqua, inizia un

processo di disfacimento, validando così l'ipotesi di una mancanza di un contributo resistente da parte del suddetto cilindro di contenimento.

Al contrario il foglio di carta fornisce un sostegno alle particelle, durante la fase di creazione del campione, confermando la necessità di cui si è parlato inizialmente.

Durante il test possono essere monitorate la tensione deviatorica, la variazione volumetrica, l'andamento dell'indice dei vuoti e le varie pressioni. Il tutto è permesso grazie ad un sistema di sensori collegati a terminali elettronici che permettono di memorizzare tutti i dati su un computer dotato di apposito software *Tecnotest Data Acquisition* (figura 6.14).

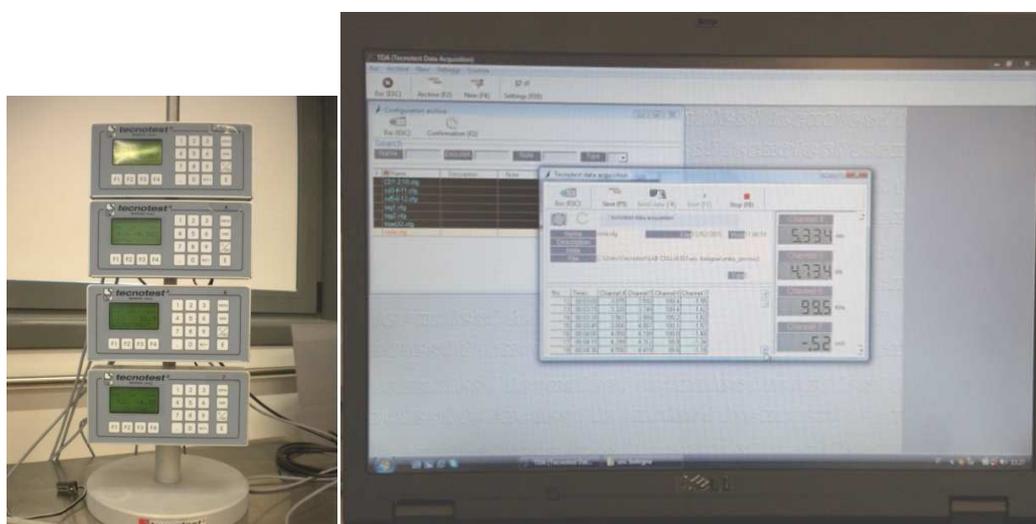


FIGURA 6.14: APPARECCHIATURA PER IL CONTROLLO NUMERICO

Nel laboratorio della Tecnotest Srl di Modena, i test sono stati eseguiti usando una macchina del tipo "a tre vani". La pressa possiede una forza di 50 kN.

La velocità costante di discesa del pistone può variare tra 0.00001 e 12 mm/min; quella utilizzata è stata pari a 1mm/min.

Per ogni test è stato analizzato con sistema a controllo numerico:

1. l'andamento della tensione deviatorica ($\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3$) in funzione della deformazione assiale (ε_a);
2. l'andamento della variazione volumetrica del campione ($\Delta V/V$) in funzione della deformazione assiale (ε_a);
3. l'andamento dell'indice dei vuoti in funzione della deformazione assiale (ε_a).

Le prove triassiali realizzate sono state del tipo TxCD (consolidate drenate).

6.3.3 Fase di modellazione

La modellazione numerica, che è possibile effettuare con il software PFC^{3D}, permette di realizzare dei modelli al fine di simulare dei problemi fisici. L'utilizzo del termine modelli vuole sottolineare la necessità di creare una sequenza di comandi che definiscono le condizioni del problema con le quali giungere, in seguito, alla soluzione numerica.

Gli strumenti principali, come già analizzato nel capitolo 4, utilizzati per realizzare un sistema discontinuo sono (Vignali, 2006):

- le sfere (*ball*): definite come l'entità geometrica fondamentale per il metodo degli elementi distinti. I modelli vengono creati attraverso la generazione di un insieme di sfere all'interno della regione fisica analizzata;
- i muri (*wall*): sono delle superfici delle quali vengono definite, arbitrariamente, le proprietà riguardanti i contatti per l'interazione con le particelle. Questi muri possiedono solo un lato attivo che può interagire con le sfere.

Per la realizzazione del campione, è stata utilizzata una procedura definita appunto *generale*, con la quale è possibile generare un insieme di particelle, che il software provvederà a distribuire in modo casuale all'interno dello spazio prefissato.

L'utente deve scegliere un sistema di unità di misura coerente alle grandezze in gioco e mantenerlo per tutta la durata della sperimentazione in quanto PFC^{3D} non calcola equivalenze. In tabella 6.3 si presentano i sistemi di unità ammessi dal programma per il Sistema Internazionale, la colonna in evidenza segnala le unità di misura che sono state utilizzate (Itasca, 2002).

	Sistema Internazionale SI			
Lunghezza	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>
Densità	<i>kg/m³</i>	<i>10³ kg/m³</i>	<i>10⁶ kg/m³</i>	<i>10⁶ g/cm³</i>
Forza	<i>N</i>	<i>kN</i>	<i>MN</i>	<i>Mdynes</i>
Tensione	<i>Pa</i>	<i>kPa</i>	<i>MPa</i>	<i>bar</i>
Gravità	<i>m/s²</i>	<i>m/s²</i>	<i>m/s²</i>	<i>cm/s²</i>
Rigidità sfere	<i>N/m</i>	<i>kN/m</i>	<i>MN/m</i>	<i>Mdynes/m</i>
Rigidità contatti	<i>Pa/m</i>	<i>kPa/m</i>	<i>MPa/m</i>	<i>bar/cm</i>

TABELLA 6.3: LE UNITÀ DI MISURA DEL SI

Una volta definito il sistema di misura utilizzato, è possibile elencare le grandezze in gioco che interessano il problema in studio. I valori che verranno riportati qui di seguito si riferiscono alle dimensioni geometriche ed alle proprietà fisiche del provino, delle singole particelle e dei *clump*.

Il cilindro, che rappresenta il dominio del sistema, è generato con un'altezza di 0.2 m ed un diametro di 0.1 m. Inoltre la rigidità dei muri viene impostata a 1 e 8 N/m.

Le particelle costituenti la miscela possiedono le seguenti proprietà fisiche:

- densità: 7750 kg/m^3 ;
- k_n : 10^8 N/m ;
- k_s : 10^8 N/m ;
- μ : 0.42.

Il FISH è un linguaggio di programmazione incorporato all'interno di PFC^{3D} che permette all'utente di definire nuove variabili e funzioni. Queste funzioni possono essere utilizzate per estendere l'utilità di PFC^{3D} o aggiungere nuove configurazioni definite dall'utente.

Le funzioni FISH sono semplicemente integrate in un normale file di dati, iniziano con la parola chiave *define* e terminano quando viene rilevata la parola chiave *end*.

Una funzione FISH può richiamare altre funzioni, che a loro volta possono richiamarne altre; l'ordine in cui le funzioni sono definite non importa, purché siano tutte definite prima di essere utilizzate. Dato che il listato di una funzione FISH è contenuto nella memoria del software, il comando *save* salva la funzione ed il valore corrente delle variabili associate.

Si riportano ora i listati creati per la generazione dei *wall* e delle sfere.

6.3.3.1 Il listato per la generazione dei wall

La prima fase, comune ai due provini, consiste nel creare i muri (*wall*) che riproducono la cella triassiale.

Il muro cilindrico, contrassegnato dall'ID 1, è l'equivalente della membrana in lattice, mentre le piastre contrassegnate dagli ID 5 e 6 confinano il provino sopra e sotto ed andranno a simulare la sollecitazione assiale, una volta messe in movimento.

È importante ricordare che nel PFC i muri non interagiscono tra loro, ma interagiscono solo con le sfere (figura 6.15).

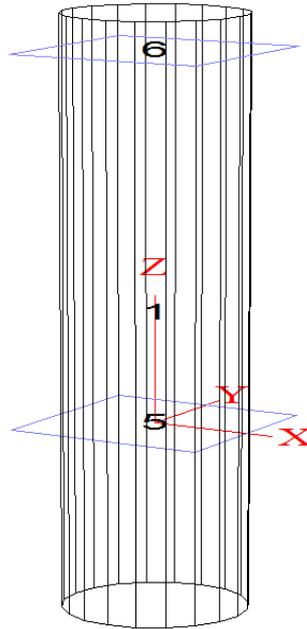


FIGURA 6.15: IL SISTEMA CARTESIANO DEI WALL

Il sistema di coordinate cartesiane ha gli assi x ed y posizionati sulla piastra di base, l'asse z è verticale e corrisponde all'asse del cilindro.

Come si può notare dall'immagine, i muri sono stati creati tenendo conto di estensioni (*extend*) addizionali, allo scopo di evitare l'uscita delle sfere nella successiva prova triassiale: quando i muri superiori ed inferiori iniziano a muoversi per caricare il provino, il muro cilindrico tenderà a dilatarsi.

```
def make_walls
w_stiff= 1e8
extend = 0.1
rad_cy = 0.5*width
_z0 = -extend
_z1 = height*(1.0 + extend)
command
wall type cylinder id=1 kn=w_stiff end1 0.0 0.0 _z0 end2 0.0 0.0 _z1 rad rad_cy rad_cy
end_command
_x0 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_y0 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_z0 = 0.0
_x1 = rad_cy*(1.0 + extend)
_y1 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_z1 = 0.0
_x2 = rad_cy*(1.0 + extend)
_y2 = rad_cy*(1.0 + extend)
_z2 = 0.0
_x3 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_y3 = rad_cy*(1.0 + extend)
```

```

_z3 = 0.0
command
wall id=5 kn=w_stiff face (_x0,_y0,_z0) (_x1,_y1,_z1) (_x2,_y2,_z2) (_x3,_y3,_z3)
end_command
_x0 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_y0 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_z0 = height
_x1 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_y1 = rad_cy*(1.0 + extend)
_z1 = height
_x2 = rad_cy*(1.0 + extend)
_y2 = rad_cy*(1.0 + extend)
_z2 = height
_x3 = rad_cy*(1.0 + extend)
_y3 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_z3 = height
command
wall id=6 kn=w_stiff face (_x0,_y0,_z0) (_x1,_y1,_z1) (_x2,_y2,_z2) (_x3,_y3,_z3)
end_command
end
set height=0.2 width=0.1
make_walls

```

Ultimato questo listato il software è in grado di generare il dominio del sistema (figura 6.16).

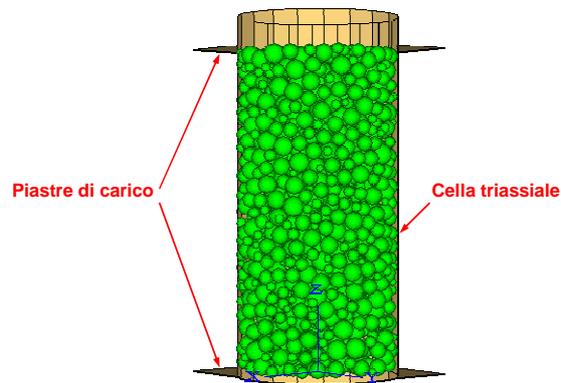


FIGURA 6.16: IL DOMINIO DEL SISTEMA

A questo punto si passa alla fase di inserimento delle particelle all'interno del provino distinguendo due listati differenti per contraddistinguere la simulazione eseguita sulle singole sfere da quella eseguita sui *clump*.

6.3.3.2 Il listato per la generazione delle sfere

Le sfere, ciascuna contrassegnata da un proprio ID, possono essere create con due metodologie:

1. generazione di gruppi di particelle definendo l'ID, le dimensioni, le proprietà fisiche e la posizione;

2. generazione di un insieme di particelle di piccolo raggio e successiva espansione al fine di occupare un volume definito dai *walls* e raggiungere una determinata densità, assegnando un intervallo di variazione per il raggio (r_{min} , r_{max}).

La seconda tecnica rappresenta il metodo più pratico, in quanto comporta tempi di calcolo abbastanza ridotti; inoltre, espandendo le particelle dello stesso fattore in tutte le direzioni, conferisce proprietà uniformi ed isotrope al provino. Nel nostro caso, abbiamo utilizzato la prima tecnica, avendo il raggio ed il numero delle particelle assegnato.

Il listato, riportato nelle pagine seguenti, è stato creato al fine di generare un numero di sfere pari a 32'886, di cui 32'204 con diametro pari a 2.77 mm, 605 con diametro 11 mm e 77 con diametro 18 mm. Ad ogni singola sfera è stato associato un valore ID, che chiaramente varia tra 1 e 32'886.

È stato creato cercando di riprodurre nel modo più fedele possibile la tecnica utilizzata in laboratorio, definendo per *step* successivi il numero identificativo degli elementi, il loro raggio e le coordinate del volume all'interno del quale sono creati. Successivamente, grazie all'applicazione della forza di gravità, questi ultimi si depositano sul fondo del provino in modo casuale, senza sovrapposizione tra particelle o tra particelle ed elementi al contorno. Il volume sopracitato, viene costruito attraverso degli intervalli di valori delle coordinate x , y , z , che ne definiscono la conformazione.

Non è possibile però generare tutte le particelle con un unico comando, quindi si è reso necessario suddividere il listato in 50 fasi, all'interno delle quali si producevano 650 sfere da 2.77 mm, 12÷13 sfere da 11 mm e 1÷2 sfere da 18mm.

Ad ogni fase è associato un numero di cicli, che si può considerare come una successione di istanti, con i quali è possibile generare gruppi di *balls* corrispondenti ciascuno ad un raggio (*rad*) fissato. Il valore *cyc* ha un andamento crescente e varia tra 450'000 e 800'000 ed il numero di sfere costituenti il gruppo è individuato dall'intervallo dell'ID.

Il numero delle sfere generate ad ogni fase è circa costante, questo fa sì che la granulometria sia ben distribuita.

gen id=1,650 rad 0.001385 0.001385 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.2
gen id=32205,32217 rad 0.0055 0.0055 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.2
gen id=32810,32811 rad 0.009 0.009 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.2

```

prop dens = 7750 kn = 1e8 ks = 1e8 fric = 0.42
set grav 0 0 -9.81

cyc 450000

save prov1.sav

restore prov1.sav

gen id=651,1300 rad 0.001385 0.001385 x=-0.035,0.035 y=-0.035,0.035 z=0,0.2
gen id=32218,32230 rad 0.0055 0.0055 x=-0.035,0.035 y=-0.035,0.035 z=0,0.2
gen id=32812,32812 rad 0.009 0.009 x=-0.035,0.035 y=-0.035,0.035 z=0,0.2

prop dens = 7750 kn = 1e8 ks = 1e8 fric = 0.42
set grav 0 0 -9.81

cyc 460000

save prov2.sav
.
.
restore prov49.sav

gen id=31851,32204 rad 0.001385 0.001385 x=-0.035,0.035 y=-0.035,0.035 z=0,0.35
gen id=32803,32809 rad 0.0055 0.0055 x=-0.035,0.035 y=-0.035,0.035 z=0,0.35
gen id=32886,32886 rad 0.009 0.009 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.35

prop dens = 7750 kn = 1e8 ks = 1e8 fric = 0.42
set grav 0 0 -9.81

cyc 800000

save prov50.sav

```

Il coefficiente d'attrito interparticellare ($\mu = 0.42$) è stato valutato in funzione di quello macroscopico ($\phi = 23^\circ$) secondo la seguente espressione:

$$\mu = \text{tg} \phi \tag{6.1}$$

L'accelerazione gravitazionale assegnata lungo l'asse z comporta la decantazione al fondo del provino delle sfere generate, come si può vedere nell'immagine 6.17.

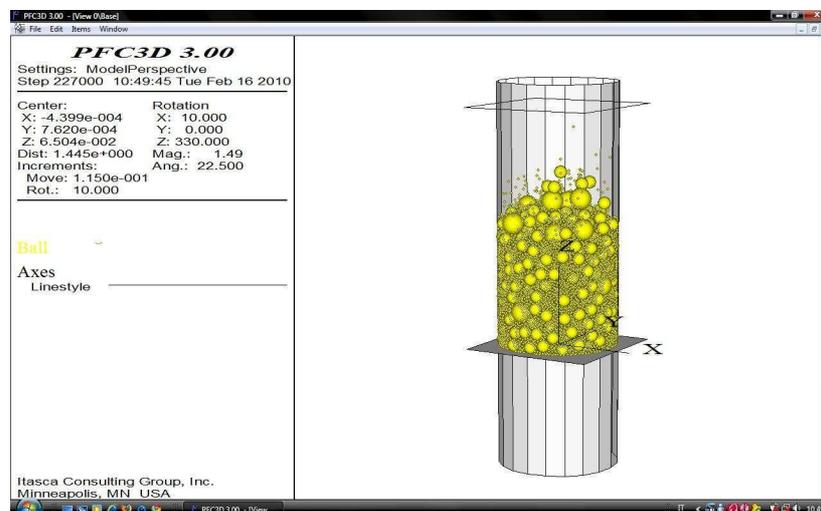


FIGURA 6.17: DECANTAZIONE DELLE SFERE ALL'INTERNO DEL PROVINO

Il numero dei cicli (*cyc*) per ciascuna fase è regolato appunto in base al tempo di decantazione; l'obiettivo è quello di liberare il volume di generazione delle sfere per la fase successiva. A questo scopo un numero di cicli molto elevato è una garanzia, ma chiaramente i tempi di calcolo si allungano.

Se il volume non è libero, il numero delle sfere generate in quello spazio potrebbe essere troppo elevato ed il programma si blocca segnalando l'errore '*Fewer balls generated than specified*'.

È per questo stesso motivo che il listato è stato suddiviso in cinquanta fasi, in modo da generare le sfere in un numero massimo consentito dal programma per quel volume. Paradossalmente, creare le sfere in un'unica fase avrebbe richiesto un volume di generazione molto ampio, maggiore delle dimensioni della cella stessa.

Il software permette di monitorare l'andamento delle velocità delle sfere nonché le catene di forze che si creano, come possiamo vedere nelle immagini 6.18 e 6.19.

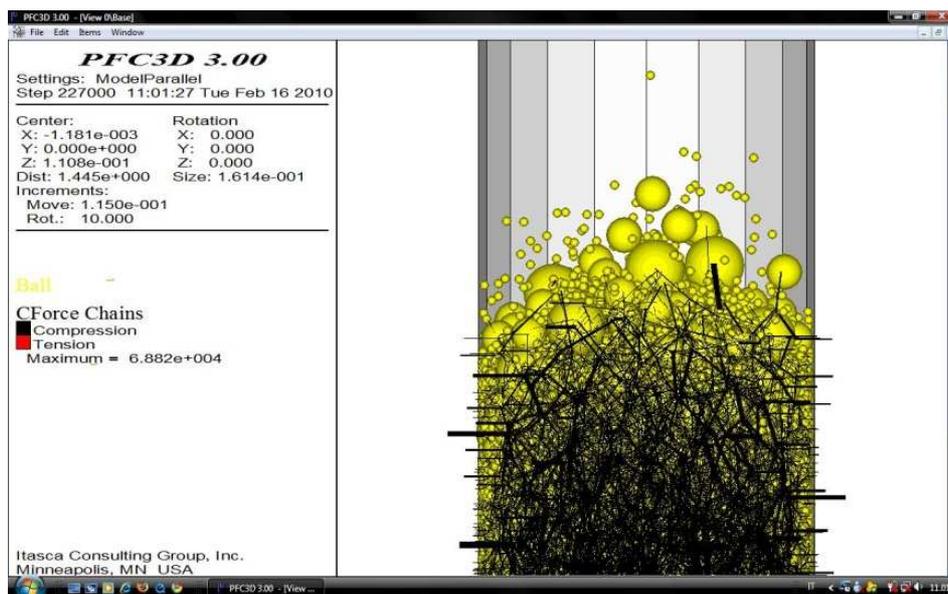


FIGURA 6.18: SFERE E FORZE DI CONTATTO

Il provino è stato creato in modo da riprodurre fedelmente quello utilizzato nella prova triassiale di laboratorio, infatti il numero delle sfere e le proprietà fisiche sono le stesse.

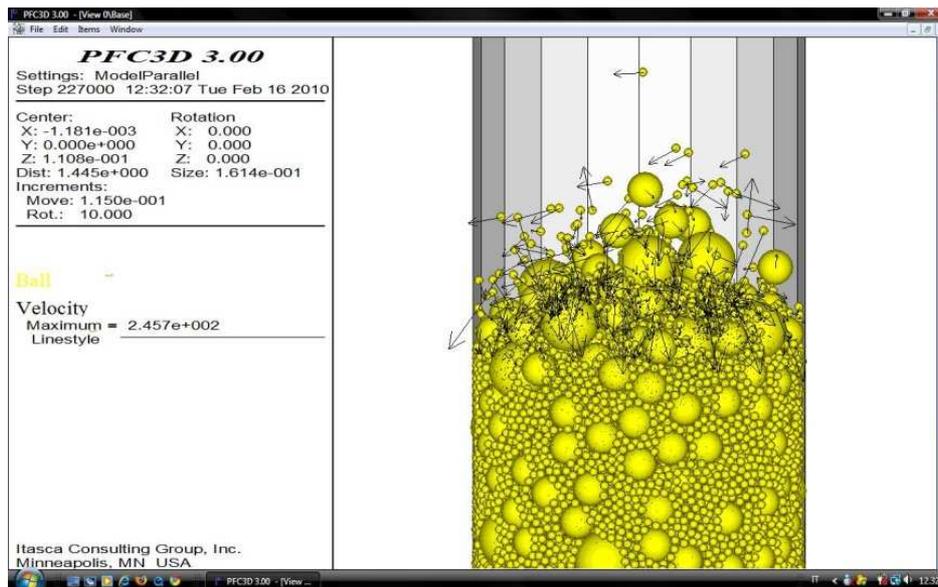


FIGURA 6.19: SFERE E VETTORI VELOCITÀ

Nella figura 6.20 è possibile notare l'evoluzione della procedura di riempimento del campione.

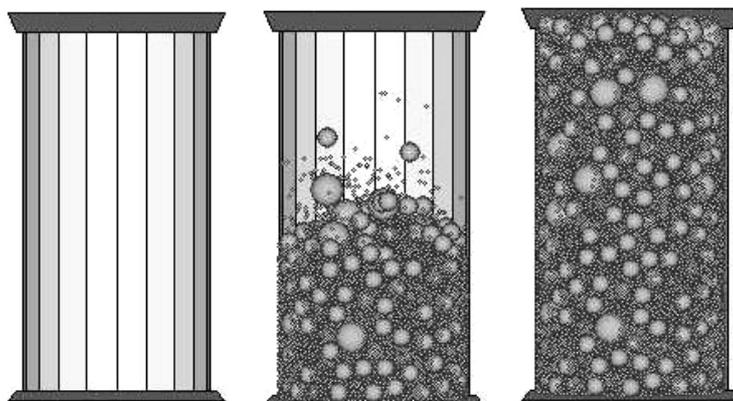


FIGURA 6.20: FASI DI CREAZIONE DEL PROVINO CON SFERE (INIZIO, METÀ, FINE TEST)

Poiché il terreno da modellare è incoerente, nella definizione delle caratteristiche dei contatti non sono introdotti modelli di legame. Il comportamento del mezzo è quindi governato unicamente dalle rigidzze normale (k_n) e tangenziale (k_s) (secondo un modello di rigidzza lineare) e dalle proprietà d'attrito (μ) (tabella 6.4).

Densità [kg/m ³]	7'750
Rigidezza normale (k_n) [N/m]	10 ⁸
Rigidezza tangenziale (k_s) [N/m]	10 ⁸
Rigidezza degli elementi al contorno (k_w) [N/m]	10 ⁸
Coefficiente di attrito particella-particella (μ)	0.42
Coefficiente di attrito particella-elemento al contorno (μ_w)	0

TABELLA 6.4: CARATTERISTICHE DEL MODELLO DI CONTATTO

6.3.4 I test svolti

I provini, generati attraverso i listati precedenti, verranno sottoposti alla simulazione della prova triassiale, utilizzando con tensione di confinamento 300, 400 e 500 kPa.

Come per il test di laboratorio in generale possiamo distinguere la fase di consolidazione, seguita da quella di rottura, dovuta al movimento dei *walls* superiore ed inferiore. La prova, come nella realtà, è svolta in controllo di deformazione, attraverso la definizione della velocità delle pareti superiore ed inferiore della cella. Durante tutte le fasi del test, la velocità radiale del muro cilindrico di confinamento è controllata automaticamente utilizzando un servo-meccanismo, che mantiene una tensione di confinamento costante all'interno del campione.

Inizialmente, oltre ad annullare eventuali velocità e rotazioni residue dalle fasi precedenti, per simulare un confinamento “*soft*” come accade nella realtà, è stata ridotta la rigidezza del muro laterale utilizzando la funzione *cws*, ad un valore pari ad 1/10 della rigidezza delle sfere (Itasca, 2003).

Le modalità di modellazione del test sono quelle riportate nel paragrafo 3.3.

Le prove triassiali, di tipo consolidato drenato in controllo di deformazione, sono state condotte ad una velocità pari a 1 mm/min, secondo quanto indicato in tabella 6.5.

Nome test	Tensione di confinamento [kPa]	Back pressure [kPa]
1_S	300	100
2_S	400	100
3_S	500	100

TABELLA 6.5: TEST SVOLTI

6.4 Analisi macroscopica dei risultati ottenuti

6.4.1 Andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale

Si presentano ora le curve tensione-deformazione in cui è rappresentata sulle ascisse la deformazione assiale ϵ_a , espressa come variazione percentuale dell'altezza del provino rispetto al valore iniziale, mentre sulle ordinate si rappresenta la tensione deviatorica σ_d espressa in kPa (figura 6.21).

Il comportamento dei campioni può essere suddiviso in tre fasi:

- fase iniziale nella quale le deformazioni sono molto piccole e la tensione deviatorica cresce velocemente in modo monotono;
- fase intermedia che si presenta quando il campione incomincia a rompersi. Tale fase comprende il raggiungimento del valore di picco ovvero il valore massimo raggiunto dalla tensione deviatorica, a cui segue una diminuzione della resistenza;
- fase finale nella quale la resistenza si mantiene costante.

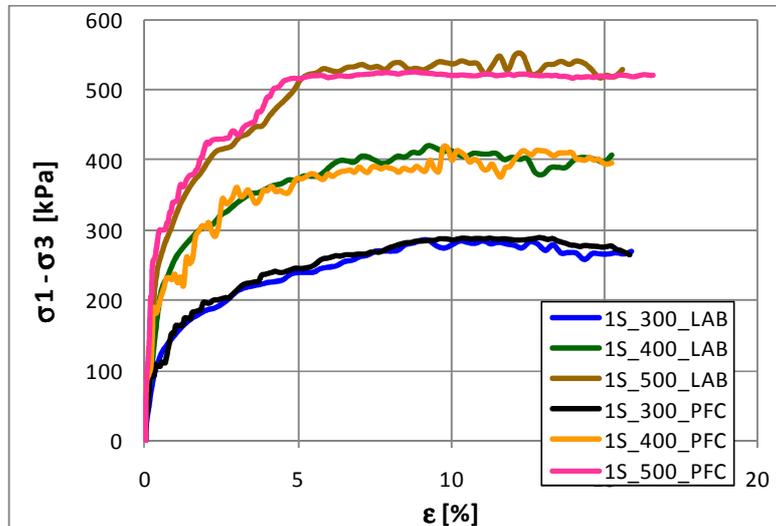


FIGURA 6.21: SFERE - DIAGRAMMA $\sigma_d - \epsilon_a$, CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI

All'aumentare della tensione di confinamento, inoltre, crescono sia la resistenza ultima sia quella residua e questo andamento vale sia per i provini di laboratorio sia per quelli modellati. In termini numerici, infatti, si nota una quasi perfetta coincidenza tra i risultati numerici e quelli di laboratorio (figura 6.22).

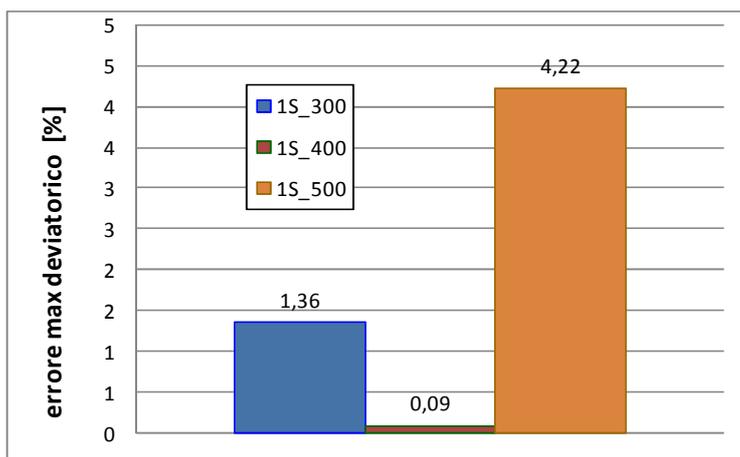


FIGURA 6.22: VALORE MASSIMO DELL'ERRORE DELLA TENSIONE DEVIATORICA, CONFRONTO TRA I RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI

6.4.2 Andamento della deformazione volumetrica in funzione della deformazione assiale

Oltre all'analisi del comportamento della tensione deviatorica, risulta essere interessante analizzare anche la variazione di volume $\Delta V/V$ rispetto alla deformazione assiale ϵ_a .

Per quanto riguarda la variazione volumetrica in funzione della deformazione assiale si assiste inizialmente ad una diminuzione di volume poi, superato un certo livello di deformazione assiale, ad un'inversione di tendenza con aumento del volume del provino (figura 6.23).

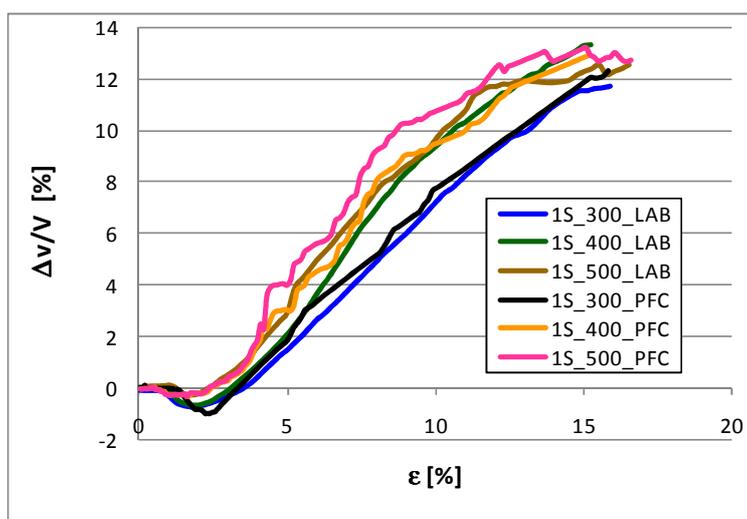


FIGURA 6.23: SFERE - DIAGRAMMA $\Delta V/V - \epsilon_a$, CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI

Il materiale, quindi, sotto l'azione dello sforzo deviatorico all'inizio subisce una contrazione di volume dovuta al fatto che le particelle sono spinte ad assumere un arrangiamento più stretto, poi, dopo la rottura del provino, siccome le particelle non possono più serrarsi ulteriormente, si assiste ad una dilatazione. Si nota, quindi, che il materiale esplica un comportamento dilatante, tipico dei materiali addensati, che aumenta al crescere della tensione di confinamento.

In termini numerici, inoltre, si nota una quasi perfetta coincidenza tra i risultati numerici e quelli di laboratorio (figura 6.24).

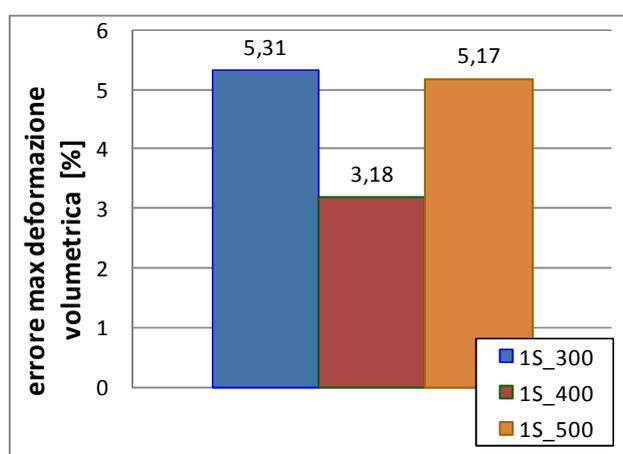


FIGURA 6.24: VALORE MASSIMO DELL'ERRORE DELLA DEFORMAZIONE VOLUMETRICA, CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI

Indipendentemente dal valore della tensione di confinamento il provino a fine test mostra una configurazione a botte dovuta ad un abbassamento di altezza con conseguente deformazione centrale radiale. La carta da filtro ha perso la sua consistenza, confermando lo scarso contributo resistente durante il test.

LA SPERIMENTAZIONE EFFETTUATA SU PROVINI COSTITUITI DA CLUMP

7.1 Introduzione

L'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento a fatica di una sovrastruttura stradale flessibile è stata indagata tramite il confronto tra risultati numerici e sperimentali di test triassiali condotti su provini formati da sfere di diametro pari a 2.77 mm e da particelle di forma generica (*clump*) (tabella 7.1).

Nome test	Tensione di confinamento [kPa]	Elementi costituenti il provino			
		Sfere	Clump a 2 elementi	Clump a 3 elementi	Clump a 4 elementi
2_C	400	X	X		
2_C	500	X	X		
3_C	400	X		X	
3_C	500	X		X	
4_C	400	X			X
4_C	500	X			X

TABELLA 7.1: FASE DI INDAGINE DELL'INFLUENZA DELLA FORMA DELL'AGGREGATO, TEST SVOLTI

I *clump* sono elementi ottenuti assemblando particelle circolari in un unico elemento dotato di comportamento rigido ma con un confine deformabile; il legame che lo costituisce non si rompe mai, a prescindere dalle forze che su di esso agiscono.

Nel presente studio, in particolare, si utilizzano, in particolare, *clump* aventi un diametro totale pari a quello delle sfere singole utilizzate nella fase di calibrazione dei parametri microscopici (tabella 7.2), al fine di ottenere un confronto significativo tra il modello a sfere e quello a *clump* (figura 7.1).

Il *clump* costituito da sfere da 5.5 mm di diametro ha la dimensione massima pari al diametro della sfera da 11 mm, allo stesso modo il *clump* costituito da sfere di 9 mm di diametro ha la dimensione massima pari al diametro della sfera da 18 mm:

l'obiettivo è quello di studiare l'influenza della forma, mantenendo la stessa granulometria.

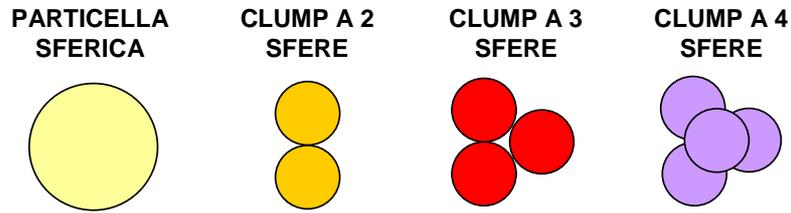


FIGURA 7.1: CLUMP UTILIZZATI NELLO STUDIO SVOLTO

Nome test	Tensione di confinamento [kPa]	Elementi costituenti il provino		
		Sfere Φ 2.77 mm	Clump Φ 11 mm	Clump Φ 18 mm
2_C	400	32'204	2'420	308
2_C	500	32'204	2'420	308
3_C	400	32'204	1'613	205
3_C	500	32'204	1'613	205
4_C	400	32'204	1'210	154
4_C	500	32'204	1'210	154

TABELLA 7.2: PROVINO FORMATO DA SFERE E CLUMP

I provini, in particolare, hanno un'altezza ed una larghezza pari rispettivamente a 200 e 100 mm, e sono formati dagli elementi indicati in tabella 7.2 i quali consentono di mantenere costante in ogni provino il volume totale dei pieni (figura 7.2).

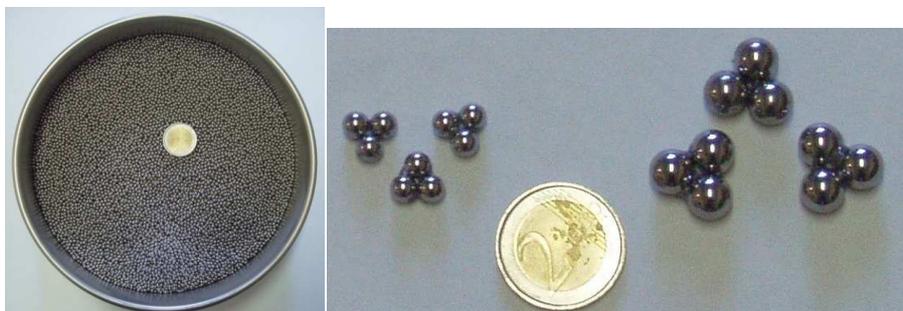


FIGURA 7.2: SFERE DI DIAMETRO PARI A 2.77MM, CLUMP DI DIAMETRO PARI A 11 E 18 MM

7.2 Fase di laboratorio

La fase di laboratorio ha previsto dapprima la definizione delle modalità più opportune al fine di creare particelle di acciaio di forma non sferica, poi la realizzazione del provino triassiale e la successiva esecuzione dei test.

Relativamente al primo punto, sono stati svolti diversi test al fine di capire quale fosse il collante migliore con cui unire le sfere che compongono un *clump*. Sono state prese in considerazione diverse possibilità, tenendo in considerazione vari aspetti quali:

- il vincolo dettato dalla dimensione delle sfere che schematizzano l'aggregato fine della miscela;
- la richiesta di elevata resistenza affinché i *clump* non si disgreghino durante il test triassiale;
- la facilità di utilizzo del collante;
- l'assenza di residui tossici del collante.

Alla luce di queste considerazioni si adotta come collante l'acciaio liquido (tabella 7.3).

Tipo di processo	Pregi	Difetti
Saldatura a filo		Il diametro delle sfere della frazione fine della miscela è troppo piccolo per consentire la saldatura
Colla	Facilità di utilizzo	Scarsa resistenza
Silicone	Facilità di utilizzo	Scarsa resistenza
Resina ipossidica	Facilità di utilizzo	Tossicità
<u>Acciaio liquido</u>	Facilità di utilizzo, buona resistenza, scarsa tossicità	

TABELLA 7.3: SCELTA DEL TIPO DI COLLANTE PER REALIZZARE I *CLUMP* D'ACCIAIO

Il vantaggio maggiore di tale pasta adesiva è rappresentato dalla buona lavorabilità dovuta ad un tempo d'essiccazione non immediato; inoltre, data la pastosità del prodotto, è possibile andare a chiudere il foro che fisicamente si crea tra le sfere, creando un corpo unico ed estendendo la resistenza dell'assemblaggio oltre i soli punti di contatto tra le sfere.

L'acciaio liquido Pattex (figura 7.3), prodotto dalla Henkel Loctite Adesivi s.r.l., è una pasta adesiva epossidico/metallica a due componenti di colore acciaio naturale. Viene utilizzata per la saldatura di parti metalliche e su materiali come il vetro, la ceramica, la muratura, il legno e nella maggior parte delle materie plastiche. Può essere impiegata per la stuccatura di fori e fessure su superfici metalliche e per la ricostruzione di piccoli particolari.



FIGURA 7.3: CONFEZIONE DI ACCIAIO LIQUIDO PATTEX

Il collante è contenuto all'interno dell'apposita siringa "spingi-prodotto", con la quale è possibile estrarre i due componenti, parte A e parte B, che verranno successivamente miscelati in uguali quantità (rapporto di miscelazione 1:1). Il componente A è costituito da resina epossidica, cariche e pigmenti; il componente B da polimercaptano e cariche.

Il fenomeno della presa si realizza in circa 4-6 minuti, mentre la fase di indurimento si svolge nelle successive 24 ore. I valori si riferiscono a condizioni termiche che si aggirano attorno a 20 °C.

Successivamente alle fasi di presa e di indurimento il prodotto presenta un'alta resistenza meccanica e chimica fino alla temperatura di 100 °C (sito Henkel).

La procedura di creazione dei *clump* (figura 7.4) mediante incollaggio delle sfere è avvenuta cercando di realizzare elementi che fossero:

- resistenti;
- uniformi, in quanto è essenziale che a parità di diametro i *clump* siano tutti uguali;
- lisci, cioè senza bordi esterni o filamenti di collante, per evitare che durante la prova triassiale i *clump* sotto pressione rompano la membrana del provino.



FIGURA 7.4: CREAZIONE DI UN *CLUMP* A TRE SFERE

7.2.1 L'incollaggio delle sfere

In seguito alla scelta della pasta adesiva si è passati alla fase vera e propria della realizzazione delle particelle di forma non sferica.

La procedura si basa sull'utilizzo di lamiera, al di sotto delle quali vengono poste delle calamite, che creano delle zone di attrazione in cui poter vincolare una tripletta di sfere di acciaio (figura 7.5).

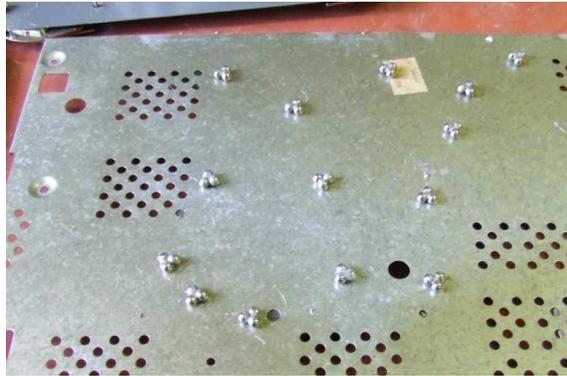


FIGURA 7.5: LAMIERA CON CALAMITE

A questo punto viene miscelato il collante, successivamente inserito tra i contatti delle particelle in modo da creare un corpo rigido.

Si procede poi con la rimozione dei *clump* che hanno fatto presa dalla lamiera calamitata con l'aiuto di una spatola metallica; i *clump* sono stati disposti per file (figura 7.6), nell'attesa del completo indurimento e per facilitarne il conteggio.



FIGURA 7.6: *CLUMP* INCOLLATI

Al fine di aumentare la resistenza, una volta completata la fase di incollaggio alle lamiere sopra descritta, è stato aggiunto ulteriore acciaio liquido sul lato opposto al precedente (figura 7.7), ottenendo così un prodotto di adeguata resistenza.



FIGURA 7.7: CLUMP RINFORZATI

Nonostante la praticità della tecnica utilizzata, in totale i tempi necessari sono molti lunghi, a causa dell'alto numero di *clump* necessario per riempire un provino.

Possiamo considerare in media, contando anche la disposizione delle sfere sulle lamiere e la preparazione della miscela bicomponente, la produzione di circa un *clump* al minuto, incollato su un solo lato.

In questi termini, per la creazione di un solo provino sono necessarie circa 50 ore di lavoro.

7.3 Fase di modellazione

La fase di modellazione ha previsto dapprima la definizione delle modalità più opportune al fine di simulare particelle di acciaio di forma non sferica, poi la creazione del provino triassiale e la successiva simulazione dei test.

Dall'analisi dei risultati disponibili in letteratura [Cho et al. (2007), Thomas et al. (1999), Cambou et al. (2004), Jensen et al. (1999)], in particolare, le modalità più diffuse e consolidate per simulare con il metodo DEM particelle grani di forma non sferica sono gli elementi *clump* e quelli *cluster*, ottenuti assemblando particelle circolari, aventi rispettivamente comportamento rigido e non. In tabella 7.4 è riportato un confronto tra le modalità di modellazione di particelle non sferiche riportate in letteratura, al fine di indagare la migliore per il caso in esame.

Tipologia di modellazione dell'aggregato	Vantaggi	Svantaggi
Particelle poligonali	Rappresentazione fedele dell'aggregato reale	Lunghi tempi computazionali provocati dall'algoritmo di identificazione dei contatti a causa dell'elevato numero di contatti del sistema e della presenza di diversi tipi di contatto (vertice-vertice, vertice-lato, lato-lato)
Particelle ellissoidiche	Rappresentazione fedele dell'aggregato reale	Lunghi tempi computazionali provocati dall'algoritmo di identificazione dei contatti. Quest'ultimo, comunque, è più veloce di quello per particelle poligonali
Cluster	Rappresentazione fedele dell'aggregato reale; l'algoritmo di identificazione dei contatti è più veloce di quello per particelle poligonali ed ellissoidiche	La rotazione reciproca delle particelle che compongono il cluster aumenta i tempi di modellazione e, se la si pone nulla, la resistenza di picco del materiale è molto maggiore rispetto a quella reale
<u>Clump</u>	L'algoritmo di identificazione dei contatti è più veloce di quello per particelle poligonali ed ellissoidiche; Consente di tenere in conto delle rotazioni interparticellari senza causare elevati oneri computazionali	

TABELLA 7.4: CONFRONTO TRA LE MODALITÀ DI MODELLAZIONE DI PARTICELLE NON SFERICHE RIPORTATE

IN LETTERATURA

Nel presente studio, in particolare, si adottano *clump* aventi un diametro totale pari a quello delle sfere singole utilizzate nella fase di calibrazione dei parametri microscopici (tabella 6.2), al fine di ottenere un confronto significativo tra il modello a sfere e quello a *clump*.

Per la creazione del provino triassiale e la successiva simulazione dei test sono stati utilizzati gli stessi parametri microscopici (tabella 6.4) e le stesse modalità descritte nel capitolo precedente.

Per riprodurre nel modo più fedele possibile la tecnica utilizzata in laboratorio, le coordinate dei *clump* sono state introdotte in serie nel listato, procedendo per strati successivi.

7.3.1 I listati per la generazione del provino

Anche in questo caso ad ogni singola sfera è stato associato un valore ID e le caratteristiche fisiche sono pari a quelle riportate precedentemente, tenendo in

considerazione il valore della densità, della rigidità normale k_n , della rigidità di taglio k_s e del coefficiente di attrito della superficie delle particelle.

Il processo di generazione dei *clump* risulta essere molto più complicato rispetto a quello utilizzato per le sfere. Infatti se per le singole particelle era sufficiente un'unica stringa di comandi per generarne fino a 650, per i *clump* sono necessarie quattro stringhe per crearne uno.

La procedura per generare i *clump*, ognuno identificato dal proprio ID, è più lunga e complessa: bisogna descriverne uno alla volta, indicando la configurazione tramite le coordinate dei centri delle sfere che lo compongono. Si riporta a titolo d'esempio lo stralcio di listato per la generazione di un *clump*.

```
ball id=1 x -0.01175  y 0.028763  z 0.12 rad 0.00275
ball id=2 x -0.009   y 0.024    z 0.12 rad 0.00275
ball id=3 x -0.0145  y 0.024    z 0.12 rad 0.00275
clump id=4 range id=1,3
```

Nella prima riga, viene prodotta la prima sfera definendone la dimensione e la posizione all'interno dello spazio del dominio. Analogamente alla prima stringa, anche la seconda e la terza svolgono lo stesso ruolo. Infine con la quarta si fornisce l'istruzione per la realizzazione del *clump*.

In questo piccolo processo sono stati necessari quattro valori ID, ma considerando il lavoro nel suo complesso è stato necessario digitare oltre 5'000 ID.

Come per il listato della miscela contenente solamente singole sfere, anche per quella composta da *clump* si è utilizzata la tecnica di applicazione della gravità per far depositare le particelle all'interno del provino.

Il listato, questa volta, è stato suddiviso in 54 fasi, dove per ognuna venivano generate 595 sfere, 20 *clump* con sfere da 5.5 mm e 6 *clump* con sfere da 9 mm.

Solamente le singole particelle sono realizzate all'interno del volume predefinito, mentre per i *clump* si è utilizzato AutoCAD per costruire uno schema geometrico della loro disposizione, e dal quale ricavare le relative coordinate. Questo tipo di procedura assegna una posizione d'origine fissa al *clump*; è importante non sovrapporre il *clump* ad altri o ad altre sfere, perché verrebbero a crearsi delle forze di repulsione altissime.

A questo fine, nelle varie fasi, sono stati simultaneamente generati gruppi di *clump* e sfere disposti a livelli z distinti. Per ricavare le coordinate x ed y delle sfere, è

stato disegnato un modello vettoriale con origine degli assi coerentemente disposta al centro (figura 7.8).

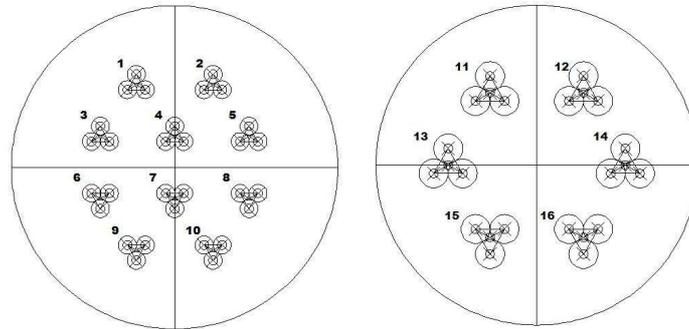


FIGURA 7.8: LA DISPOSIZIONE DEI CLUMP

A seguire viene riportato il listato utilizzato per lo svolgimento di un'unica fase delle 54 e le immagini del provino in due istanti differenti (figura 7.9).

```

;generazione primo strato di clump sotto
ball id=1 x -0.01175 y 0.028763 z 0.12 rad 0.00275
ball id=2 x -0.009 y 0.024 z 0.12 rad 0.00275
ball id=3 x -0.0145 y 0.024 z 0.12 rad 0.00275
clump id=4 range id=1,3
.
.
ball id=37 x 0.01175 y -0.028763 z 0.12 rad 0.00275
ball id=38 x 0.0145 y -0.024 z 0.12 rad 0.00275
ball id=39 x 0.009 y -0.024 z 0.12 rad 0.00275
clump id=40 range id=37,39

;generazione secondo strato di clump centrale
ball id=41 x -0.0145 y 0.027794 z 0.14 rad 0.0045
ball id=42 x -0.01 y 0.02 z 0.14 rad 0.0045
ball id=43 x -0.019 y 0.02 z 0.14 rad 0.0045
clump id=44 range id=41,43
.
.
ball id=61 x 0.0145 y -0.027794 z 0.14 rad 0.0045
ball id=62 x 0.019 y -0.02 z 0.14 rad 0.0045
ball id=63 x 0.01 y -0.02 z 0.14 rad 0.0045
clump id=64 range id=61,63

;generazione terzo strato di clump sopra
ball id=65 x -0.01175 y 0.028763 z 0.16 rad 0.00275
ball id=66 x -0.009 y 0.024 z 0.16 rad 0.00275
ball id=67 x -0.0145 y 0.024 z 0.16 rad 0.00275
clump id=68 range id=65,67
.
.
ball id=101 x 0.01175 y -0.028763 z 0.16 rad 0.00275
ball id=102 x 0.0145 y -0.024 z 0.16 rad 0.00275
ball id=103 x 0.009 y -0.024 z 0.16 rad 0.00275
clump id=104 range id=101,103

prop dens = 7750 kn = 1e8 ks = 1e8 fric = 0.42
set grav 0 0 -100000

cyc 10000
    
```

save prov1.sav

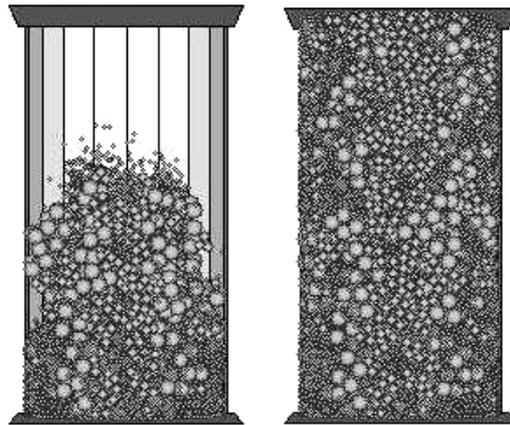


FIGURA 7.9: L'EVOLUZIONE DEL PROVINO CON CLUMP

Una volta rilevate le coordinate dei centri delle sfere, è stato predisposto il listato, in modo da riprodurre in PFC la stessa configurazione (figura 7.10).

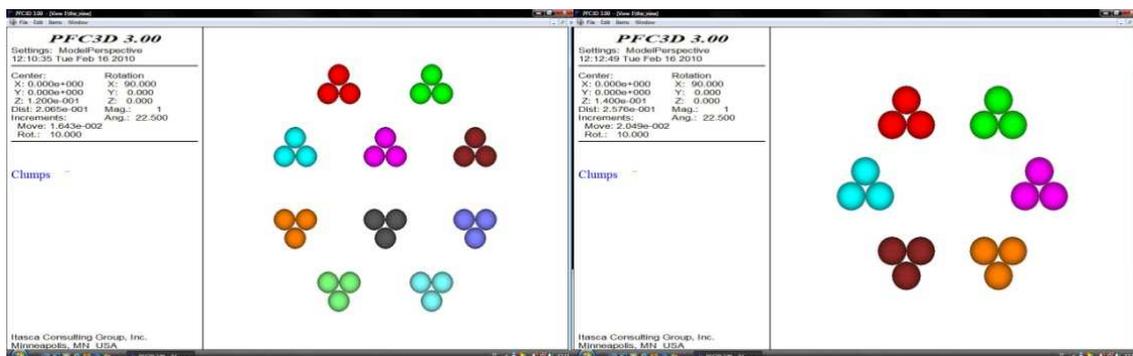


FIGURA 7.10: DISPOSIZIONE DEI CLUMP

Questa configurazione regolare non comporta considerevoli problemi in quanto, una volta fatte cadere le particelle da un certo livello z , grazie all'interazione con le altre provvedono a distribuirsi automaticamente, andando a creare un modello con una disposizione di sfere e *clump* abbastanza mescolata (figura 7.11).

Le particelle, avendo una forma che aiuta l'ingranamento, durante la generazione del provino tendono ad accumularsi le une sulle altre non consentendo un buon riempimento.

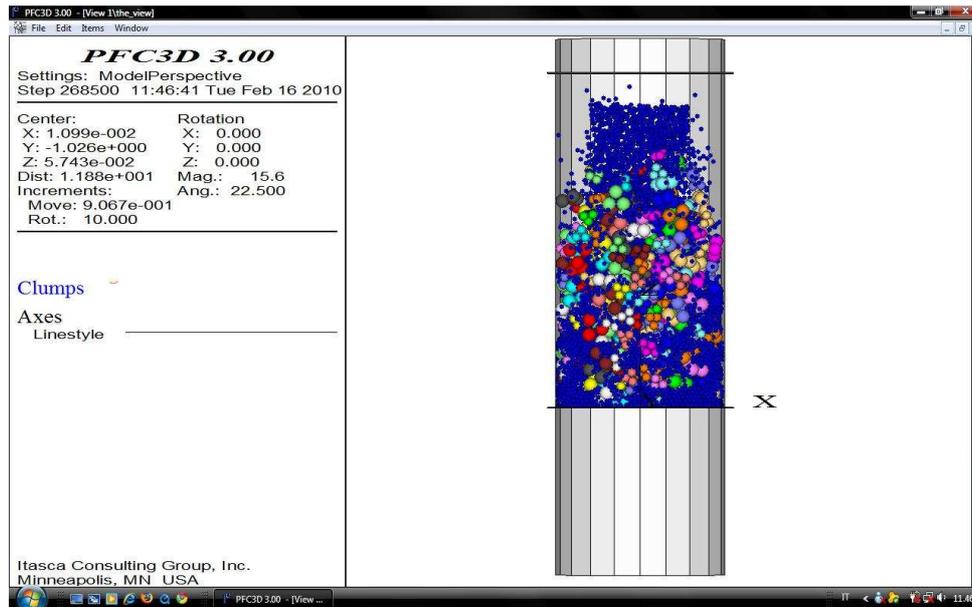


FIGURA 7.11: FASE INTERMEDIA DI CREAZIONE DEL PROVINO COSTITUITO DA CLUMP

La creazione di questo provino ha richiesto tempi simili a quello precedente, nell'ordine di 60 ore. Il nuovo svantaggio è rappresentato dalla stesura del listato che, contenendo la descrizione di ogni singolo *clump*, è molto più articolato e ha richiesto molte ore di lavoro.

Si riporta l'immagine del provino a creazione ultimata (figura 7.12).

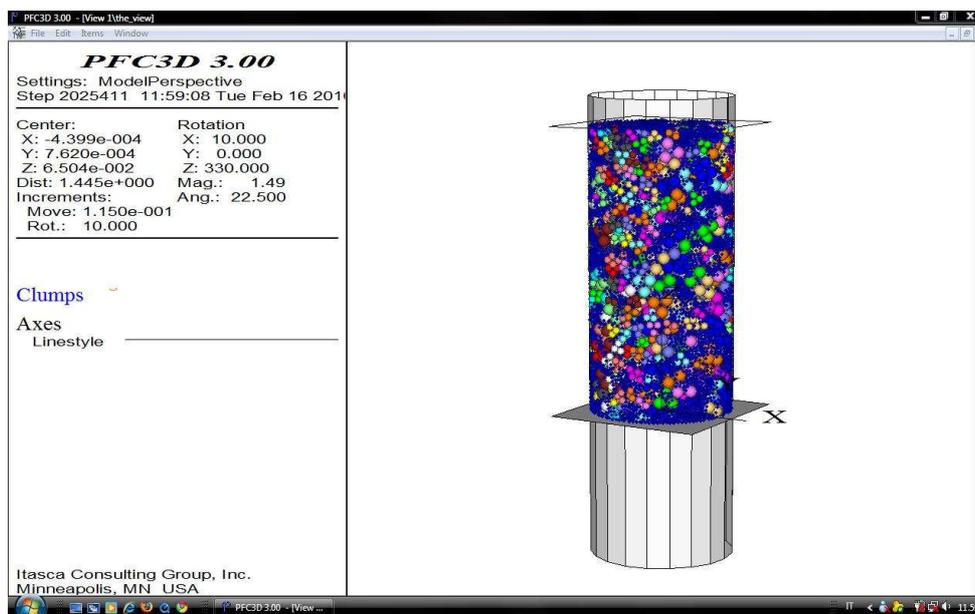


FIGURA 7.12: PROVINO COSTITUITO DA SFERE E CLUMP

7.4 I risultati ottenuti

Per ottenere indicazioni sull'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo del sistema sono stati confrontati i risultati ottenuti al variare del tipo di particella elementare.

7.4.1 Configurazione del provino alla fine della prova

Al termine della prova triassiale tutti i provini manifestano una configurazione a botte, dovuta ad un abbassamento di altezza con conseguente deformazione centrale radiale. La carta da filtro ha perso la sua consistenza, confermando lo scarso contributo resistente durante il test.

7.4.2 Valutazione della percentuale di clump rotti

La valutazione del numero di *clump* che si sono rotti è stata effettuata al termine di ogni test al fine di verificare l'efficacia dell'acciaio liquido come collante. I risultati ottenuti evidenziano che il prodotto scelto è efficace (tabella 7.5, figura 7.13).

Nome test	Tensione di confinamento [kPa]	Elementi rotti a fine test		
		Sfere Φ 2.77 mm	Clump Φ 11 mm	Clump Φ 18 mm
2_C	400	/	105	51
2_C	500	/	199	56
3_C	400	/	14	9
3_C	500	/	23	15
4_C	400	/	68	11
4_C	500	/	99	19

TABELLA 7.5: VALUTAZIONE DEL NUMERO DI CLUMP ROTTI

Si nota inoltre che a parità di diametro, il numero di *clump* rotti aumenta all'aumentare della tensione di confinamento. Probabilmente a causa della minor area di contatto creata dal collante, inoltre, a parità di tensione di confinamento i *clump* piccoli si rompono di più di quelli grandi ed il numero di *clump* rotti aumenta passando dalla configurazione a due elementi, a quattro ed a tre elementi (figure 7.14, 7.15 e 7.16).

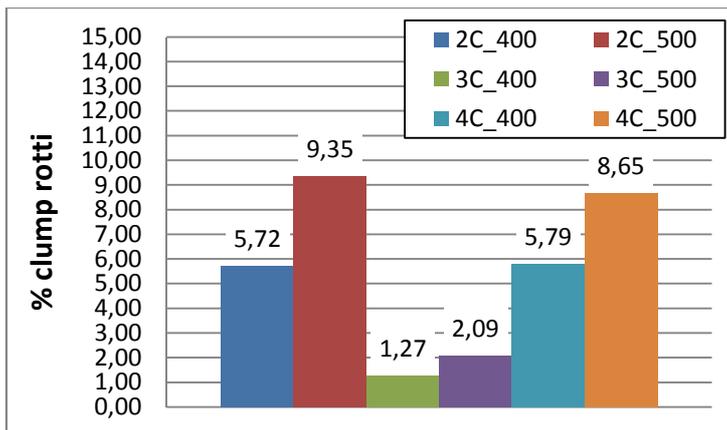


FIGURA 7.13: PERCENTUALE DI CLUMP ROTTI

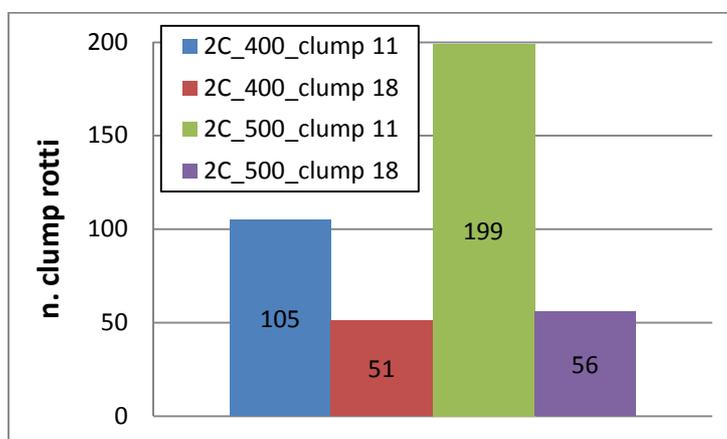


FIGURA 7.14: CLUMP A DUE ELEMENTI - NUMERO DI CLUMP ROTTI A FINE TEST

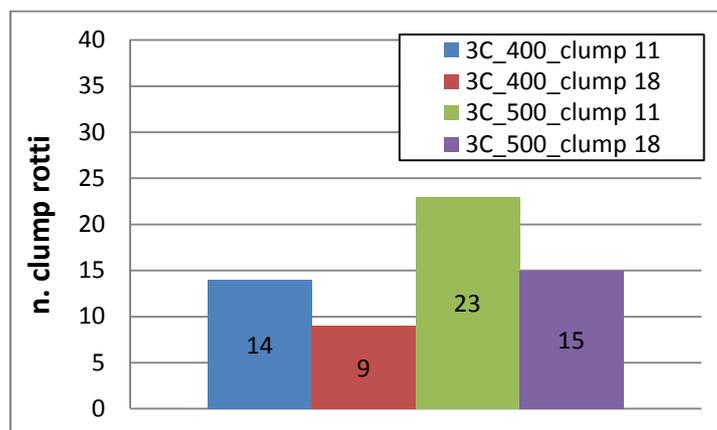


FIGURA 7.15: CLUMP A TRE ELEMENTI - NUMERO DI CLUMP ROTTI A FINE TEST

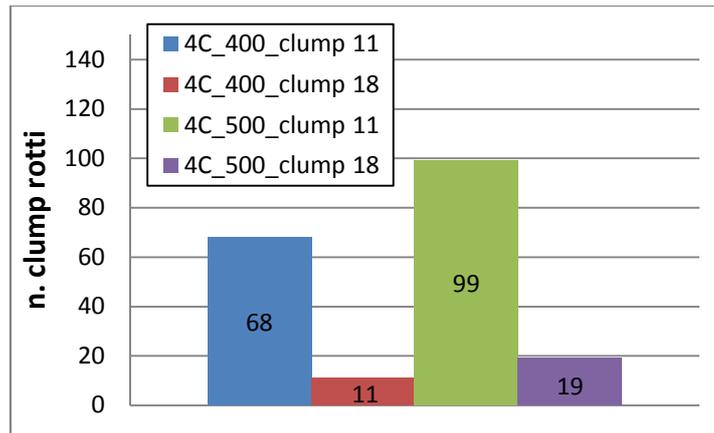


FIGURA 7.16: CLUMP A QUATTRO ELEMENTI - NUMERO DI CLUMP ROTTI A FINE TEST

7.4.3 Andamento della tensione di confinamento

Per ogni test è stata monitorata la tensione di confinamento, il cui andamento è rappresentato da una linea pressoché orizzontale (figura 7.17).

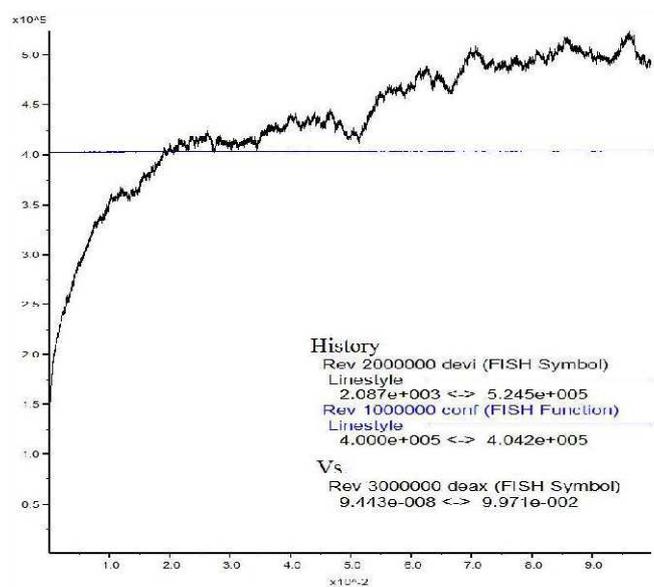


FIGURA 7.17: ANDAMENTO DELLA TENSIONE DI CONFINAMENTO DURANTE IL TEST

7.4.4 Andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale

I provini modellati manifestano un andamento della curva $\sigma_d - \epsilon_a$ che, dopo una fase iniziale nella quale la tensione deviatorica cresce in modo monotono, arriva a rottura in corrispondenza del punto di picco della curva, oltre il quale la resistenza

diminuisce. All'aumentare della tensione di confinamento crescono sia la resistenza ultima sia quella residua.

Per ogni valore di sollecitazione di confinamento, inoltre, i valori di picco delle curve aumentano al crescere della complessità della forma delle particelle che compongono il provino, poiché, aumentando l'ingranamento reciproco tra queste ultime, la resistenza complessiva del sistema diventa più elevata. Una tendenza opposta, invece, si osserva per la pendenza del ramo iniziale del grafico.

Si osservano nel seguito (figura 7.18, figura 7.20, figura 7.22) i diagrammi $\sigma_d - \epsilon_a$ relativi ai *clump* a due, tre e quattro elementi rispettivamente, per ognuno dei quali viene graficato (figura 7.19, figura 7.21, figura 7.23) il massimo scostamento tra i valori assunti dalla tensione deviatorica nelle prove di laboratorio e nei test eseguiti in PFC.

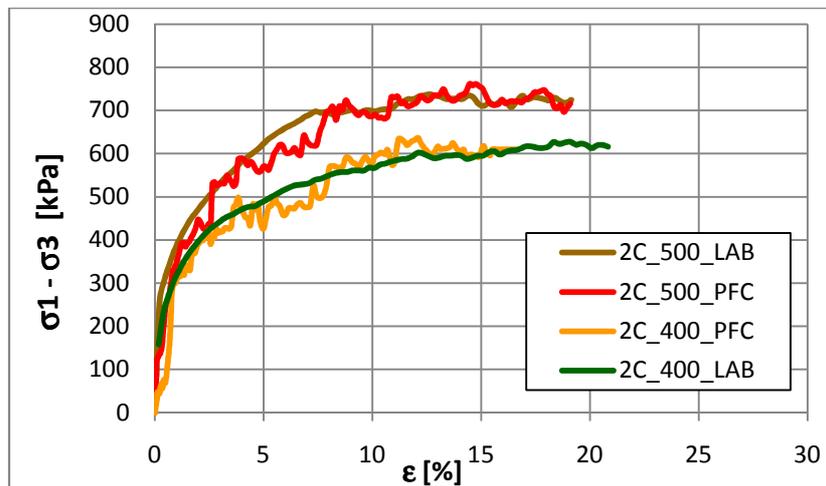


FIGURA 7.18: *CLUMP* A DUE ELEMENTI - DIAGRAMMA $\sigma_d - \epsilon_a$, CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI

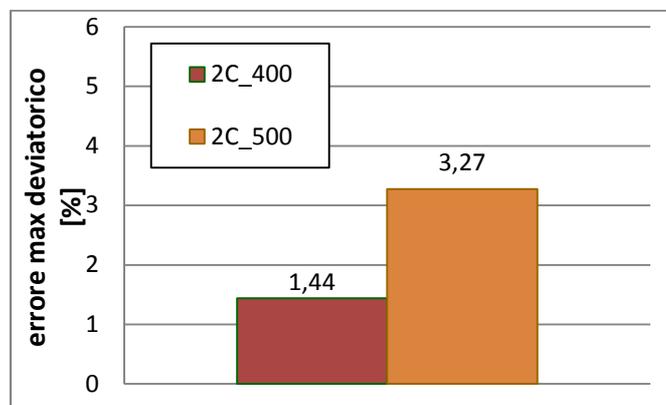


FIGURA 7.19: *CLUMP* A DUE ELEMENTI - MASSIMO ERRORE DELLA TENSIONE DEVIATORICA

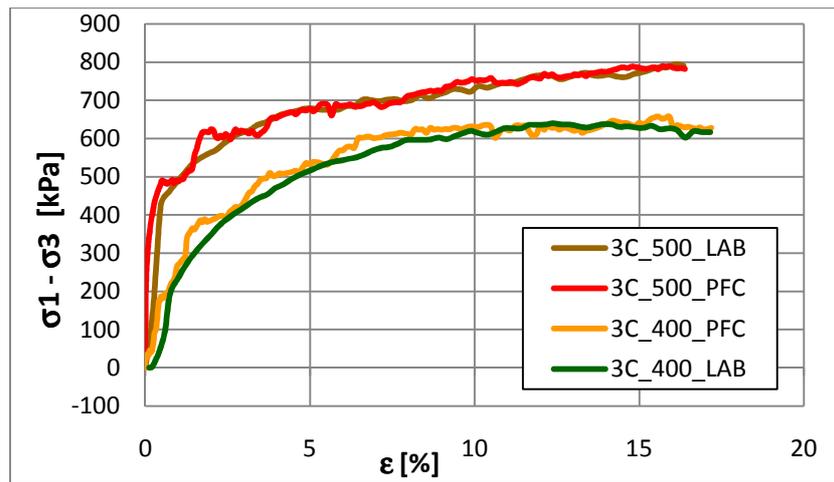


FIGURA 7.20: CLUMP A TRE ELEMENTI - DIAGRAMMA $\sigma_d - \epsilon_a$, CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI

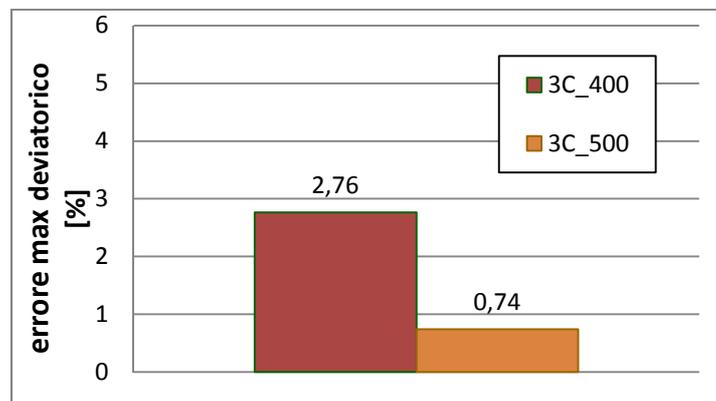


FIGURA 7.21: CLUMP A TRE ELEMENTI - MASSIMO ERRORE DELLA TENSIONE DEVIATORICA

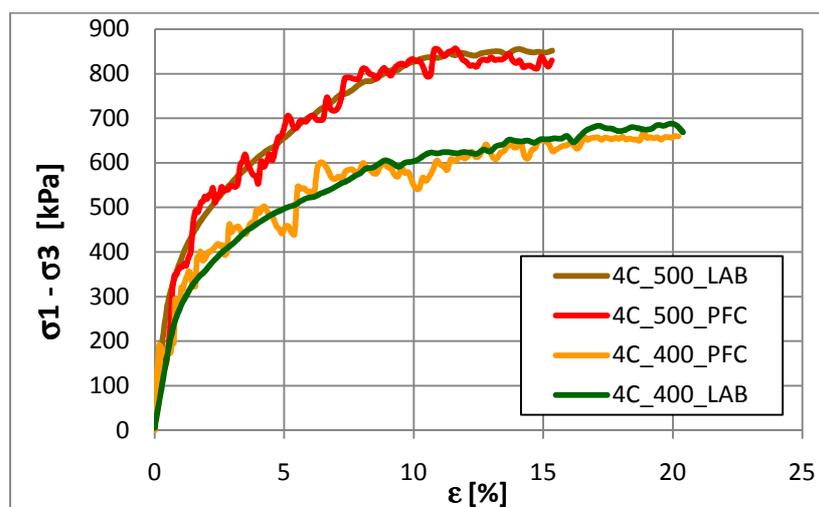


FIGURA 7.22: CLUMP A QUATTRO ELEMENTI - DIAGRAMMA $\sigma_d - \epsilon_a$, CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI

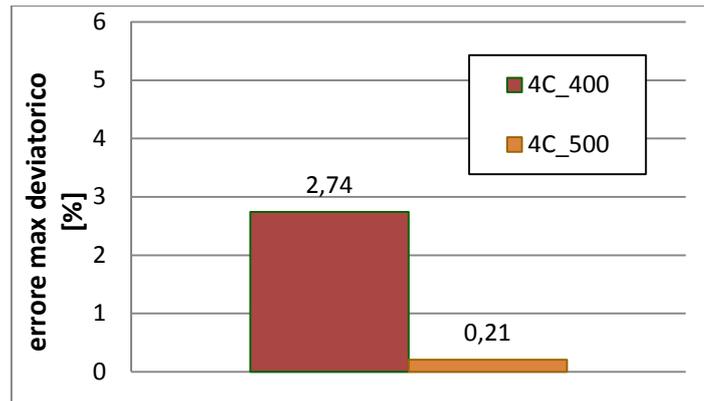


FIGURA 7.23: CLUMP A QUATTRO ELEMENTI - MASSIMO ERRORE DELLA TENSIONE DEVIATORICA

Infine in figura 7.24 si possono osservare in un unico grafico gli andamenti delle curve $\sigma_d - \epsilon_a$ dei *clump* a due, tre e quattro elementi. La tendenza conferma le precedenti osservazioni, ovvero che all'aumentare della complessità dei *clump* costituenti il provino e della tensione di confinamento le curve si spostano verso l'alto ed il sistema manifesta una resistenza maggiore.

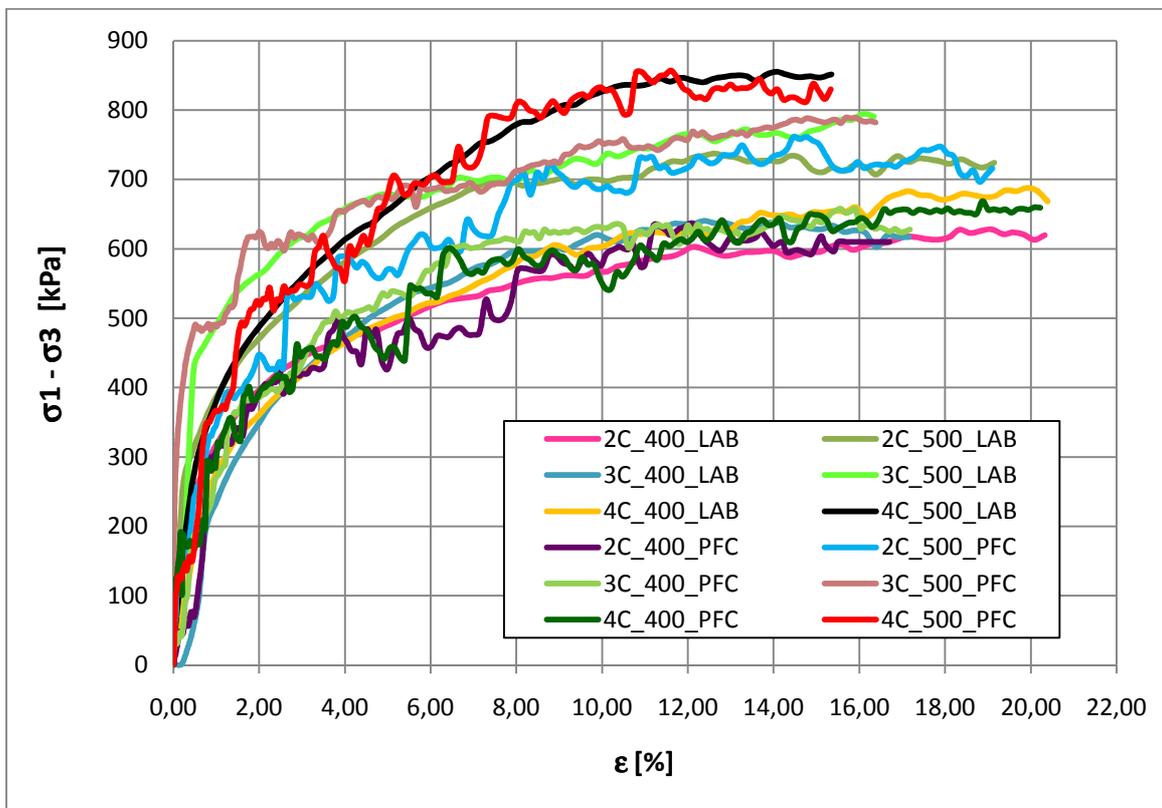


FIGURA 7.24: CLUMP - DIAGRAMMA $\sigma_d - \epsilon_a$

ANALISI DEI RISULTATI: IL CONFRONTO TRA SFERE E

CLUMP

8.1 Introduzione

L'obiettivo del presente studio è stato quello di valutare l'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo del sistema.

I risultati sono di seguito stati analizzati concentrando l'attenzione su tre parametri distinti:

- caratteristiche geotecniche, quindi l'angolo d'attrito e l'indice dei vuoti;
- caratteristiche di resistenza;
- caratteristiche microscopiche ovvero le forze di contatto.

Per le caratteristiche geotecniche e quelle microscopiche l'analisi si è concentrata sui risultati ottenuti dalle simulazioni in PFC poiché tali parametri non erano ricavabili da prove triassiali di laboratorio.

In merito al secondo caso invece, l'analisi dei risultati ha avuto come scopo principale quello di valutare l'efficacia della modellazione eseguita col software PFC andando quindi a confrontare il comportamento del provino manifestato in laboratorio e quello simulato dal programma.

8.2 Analisi della resistenza massima del sistema

La valutazione di tale parametro ha permesso un confronto significativo tra i risultati ottenuti dalle prove di laboratorio e quelli ottenuti dalle simulazioni in PFC. Infatti dall'analisi del grafico rappresentante i provini contenenti elementi sferici si osserva che essi manifestano tutti lo stesso andamento, suddivisibile in tre stadi successivi:

1. stadio iniziale nel quale le deformazioni sono molto piccole e la tensione deviatorica cresce in modo monotono;
2. secondo stadio che si verifica quando il campione comincia a rompersi; tale *step* include il raggiungimento del punto di picco della curva, che rappresenta il valore massimo della tensione deviatorica dopo il quale la resistenza diminuisce;

3. fase finale nella quale la resistenza si mantiene all'incirca costante

A parità di tipo di elemento, all'aumentare della tensione di confinamento aumenta sia la resistenza residua che quella di picco (figura 8.1).

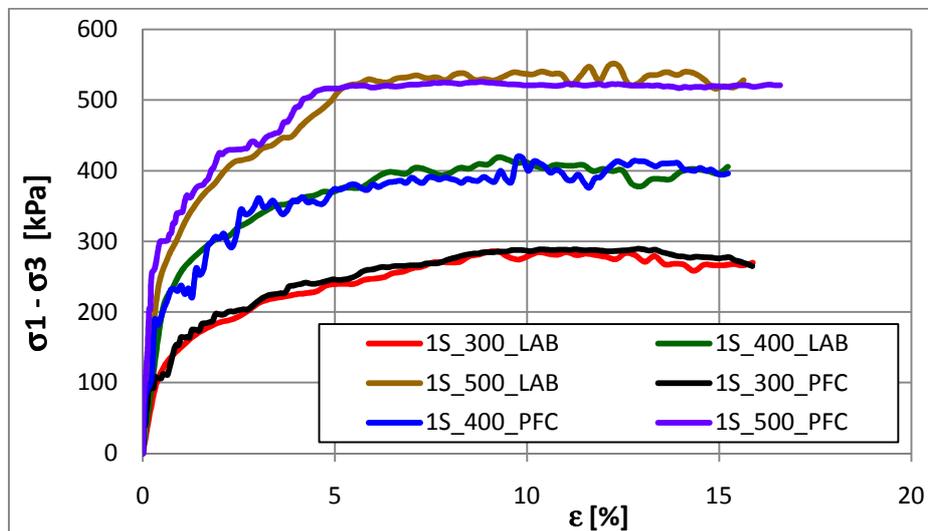


FIGURA 8.1: SFERE - VALUTAZIONE DELLA RESISTENZA MASSIMA

Nei provini contenenti elementi *clump* si osservano andamenti simili nelle diverse curve: dopo una fase iniziale nella quale la tensione deviatorica cresce in modo monotono, si arriva a rottura in corrispondenza del punto di picco della curva, oltre il quale la resistenza diminuisce.

A parità di tipo di elemento, all'aumentare della tensione di confinamento aumenta sia la resistenza di picco che quella residua. Ed inoltre, la resistenza di picco e quella residua aumentano nel passaggio dai *clump* a 2 elementi piuttosto che a 4.

Pertanto all'aumentare dell'angolarità della particella, aumentano la resistenza di picco e quella residua del provino quindi le proprietà di resistenza del sistema in generale (figura 8.2); ciò è imputabile al fatto che i *clump* assicurano un ingranamento reciproco tra le particelle superiore a quello fornito dalle sfere.

I risultati ottenuti dalla modellazione sono pertanto qualitativamente e quantitativamente paragonabili a quelli di laboratorio.

L'errore, in valore assoluto (figura 8.3), risulta accettabile ed ancora una volta si conferma il fatto che in termini di resistenza meccanica si manifestano dei miglioramenti andando ad aumentare l'angolarità delle particelle.

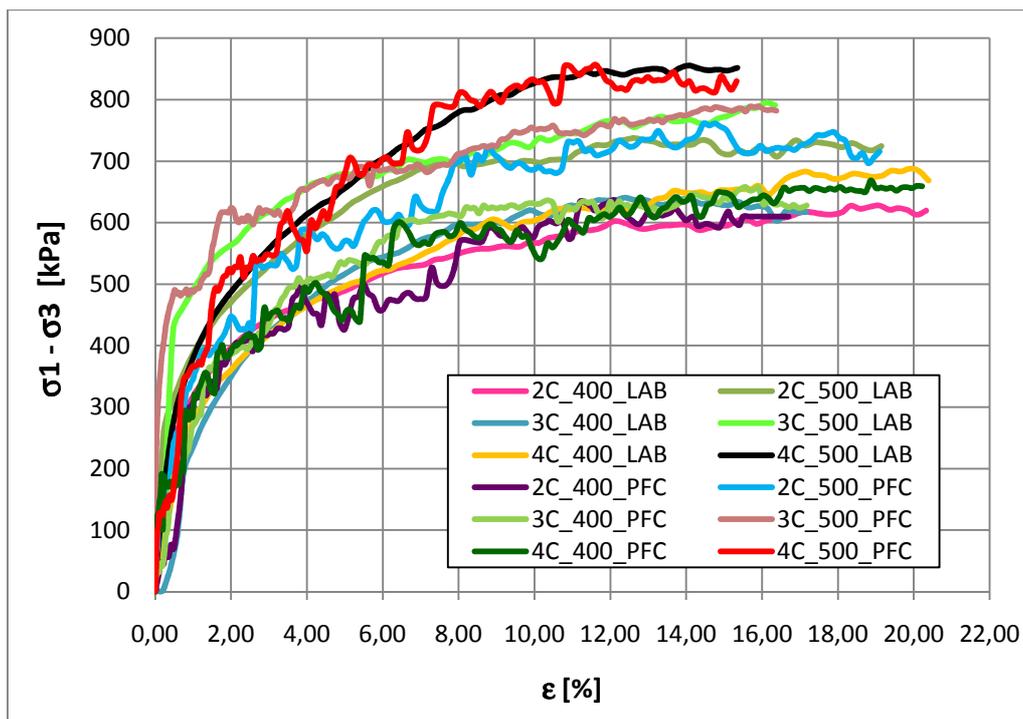


FIGURA 8.2: CLUMP - VALUTAZIONE DELLA RESISTENZA MASSIMA

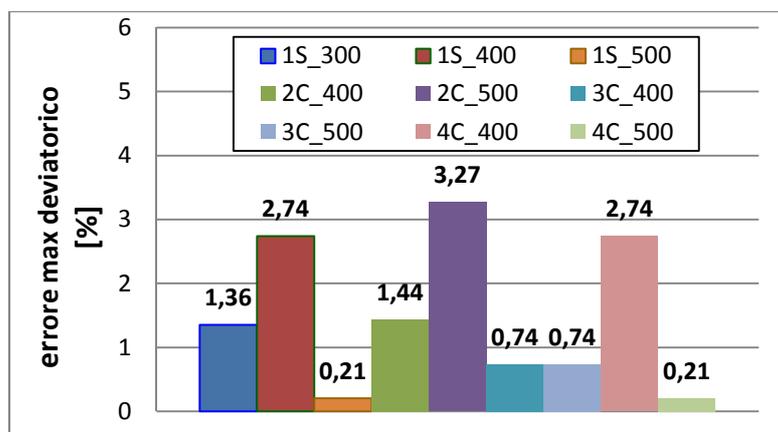


FIGURA 8.3: VALUTAZIONE DELL'ERRORE MASSIMO DEVIATORICO

8.3 Analisi delle caratteristiche geotecniche

8.3.1 Angolo d'attrito di picco

All'aumentare dell'angolarità della forma della particella aumenta il valore dell'angolo d'attrito (figura 8.4).

Come si evince dalla tabella 8.1 l'angolo d'attrito interparticellare mobilitato a livello microscopico è inferiore rispetto a quello mobilitato a livello macroscopico (figura 8.5) poiché quest'ultimo dipende dall'ingranamento delle particelle. Questa

tendenza aumenta all'aumentare del numero di sfere che compongono il *clump* perché aumenta l'ingranamento reciproco che si sviluppa tra le particelle.

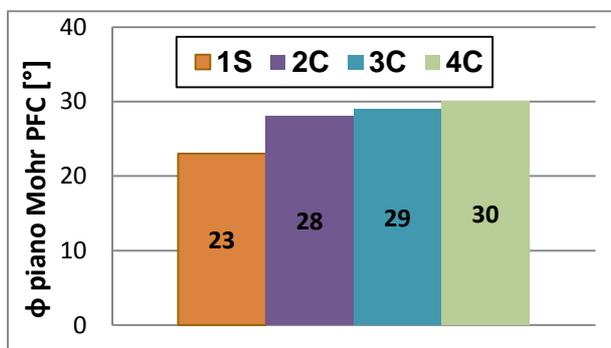


FIGURA 8.4: ANGOLO D'ATTRITO

	Sfere	Clump a 2 elementi	Clump a 3 elementi	Clump a 4 elementi
$\mu = \tan \phi$ [°]	0.42	0.42	0.42	0.42
ϕ piano Mohr PFC [°]	23	28	29	30
$\tan \phi$ piano Mohr PFC [°]	0.42	0.53	0.55	0.58

TABELLA 8.1: VALUTAZIONE DEL ϕ DI PICCO

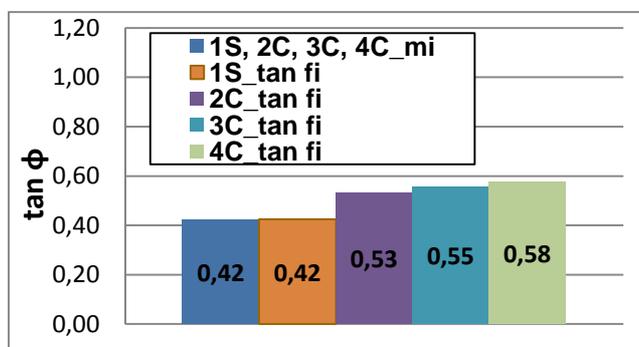


FIGURA 8.5: ANGOLO D'ATTRITO INTERPARTICELLARE A LIVELLO MACROSCOPICO

La resistenza dei conglomerati bituminosi può essere definita in funzione delle tensioni che si sviluppano in corrispondenza del picco della curva tensione-deformazione.

Un metodo per rappresentare la resistenza è quello di utilizzare i cerchi di *Mohr*, ovvero disegnando dei cerchi che rappresentano appunto gli stati tensionali in corrispondenza dei picchi che tengono conto quindi della condizione di rottura. Viene poi costruita una linea tangente a tali cerchi detta *inviluppo di rottura di Mohr*.

Attraverso questa costruzione diventa semplice valutare lo stato tensionale di un campione, si possono infatti verificare tre condizioni distinte:

- se il cerchio di *Mohr* che rappresenta lo stato tensionale del sistema si trova al di sotto della curva di involuppo di rottura, allora il conglomerato bituminoso sarà stabile sotto questo stato tensionale;
- se il cerchio è tangente alla curva, il conglomerato bituminoso ha raggiunto il limite di resistenza e si formerà una superficie di rottura;
- la condizione in cui il cerchio risulta secante alla curva di involuppo non può verificarsi in nessun caso poiché ciò corrisponderebbe a una deformazione indefinita quindi ad una situazione irrealizzabile.

Se si costruiscono i cerchi di *Mohr* delle prove effettuate (figura 8.6, figura 8.7, figura 8.8, figura 8.9) si ottengono delle linee di involuppo che definiscono gli angoli di attrito. Tali angoli possono essere considerati pari agli attriti mobilitati a livello macroscopico. Si può notare che i valori di questi angoli sono diversi da quelli microscopici come osservato precedentemente.

Per le prove eseguite su provini costituiti da sfere, ad un angolo di attrito interparticellare $\mu=0.42$ corrisponde un angolo di attrito mobilitato a livello macroscopico pari a 23° .

Per le prove effettuate con *clump*, ad un angolo di attrito interparticellare di $\mu=0.42$ corrisponde un angolo di attrito mobilitato a livello macroscopico rispettivamente di 28° (*clump* a due elementi), 29° (*clump* a tre elementi) e 30° (*clump* a quattro elementi).

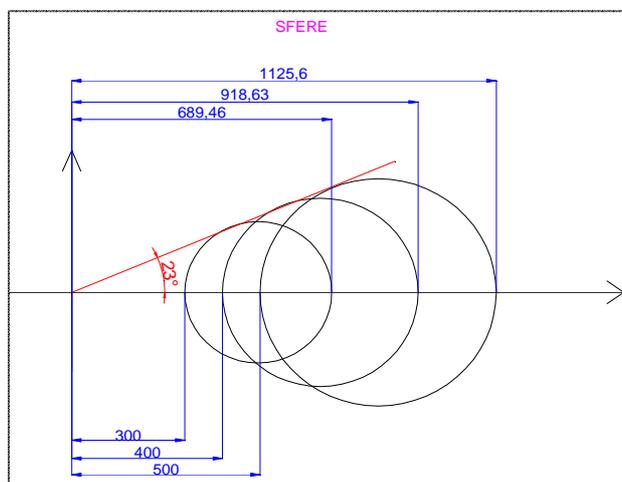


FIGURA 8.6: SFERE – PIANO DI *MOHR*

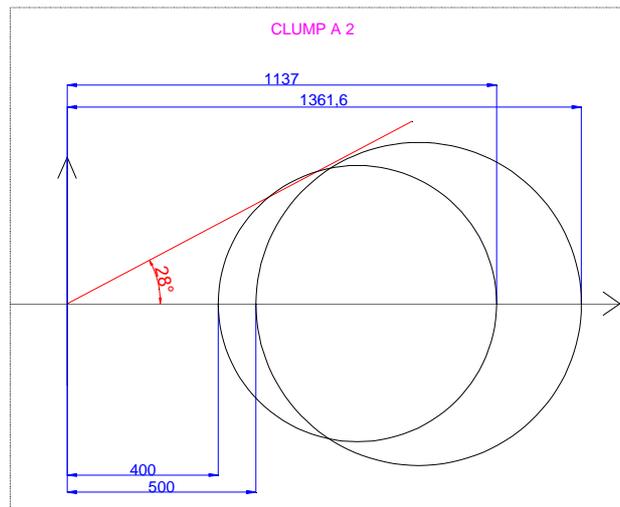


FIGURA 8.7: CLUMP A DUE ELEMENTI – PIANO DI MOHR

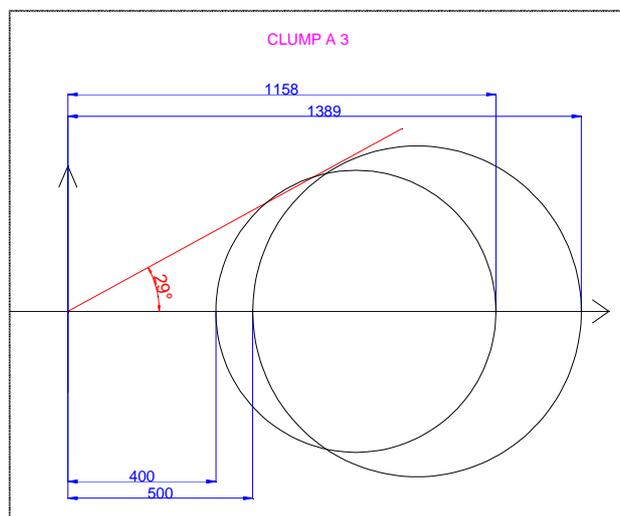


FIGURA 8.8: CLUMP A TRE ELEMENTI – PIANO DI MOHR

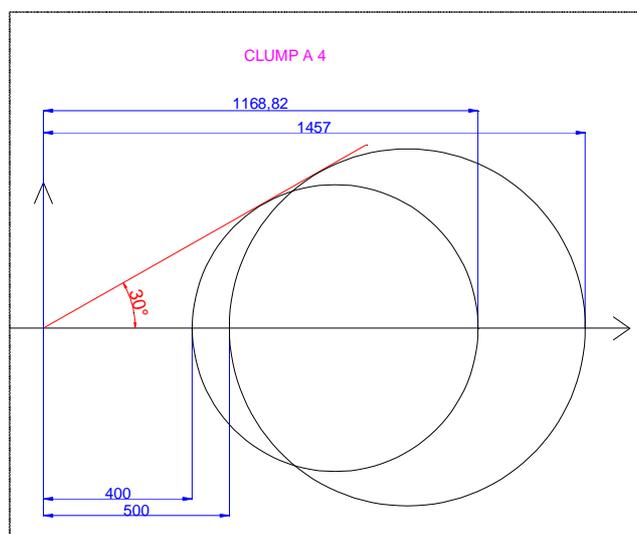


FIGURA 8.9: CLUMP A QUATTRO ELEMENTI – PIANO DI MOHR

8.3.2 Angolo d'attrito residuo

Confrontando i dati della tabella 8.1 con la tabella 8.2 si osserva che il ϕ residuo è sempre minore del ϕ di picco ma di poco; questa fatto è dettato dalle tempistiche con cui si è deciso di arrestare le prove. L'angolo d'attrito interparticellare è quasi sempre inferiore a quello mobilitato a livello macroscopico (figura 8.10), dato che quest'ultimo dipende dall'ingranamento delle particelle.

Come accade per il valore di picco, questa tendenza aumenta all'aumentare del numero di sfere che compongono il *clump*.

All'aumentare dell'angolarità della forma della particella aumenta il valore dell'angolo d'attrito (figura 8.11).

	Sfere	Clump a 2 elementi	Clump a 3 elementi	Clump a 4 elementi
$\mu = \tan \phi$ [°]	0.42	0.42	0.42	0.42
ϕ piano Mohr PFC [°]	22	27	28	29
$\tan \phi$ piano Mohr PFC [°]	0.40	0.51	0.53	0.55

TABELLA 8.2: VALUTAZIONE DEL ϕ RESIDUO

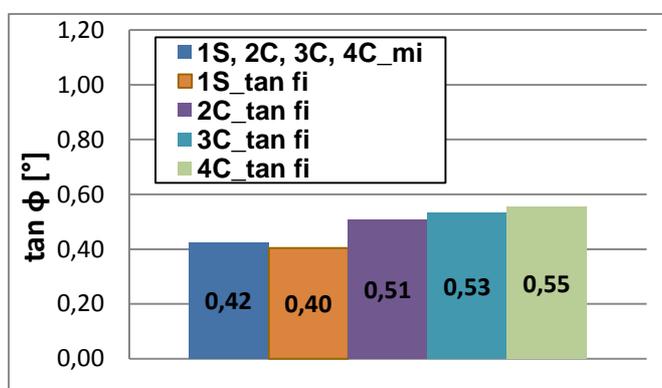


FIGURA 8.10: ANGOLO D'ATTRITO INTERPARTICELLARE A LIVELLO MACROSCOPICO

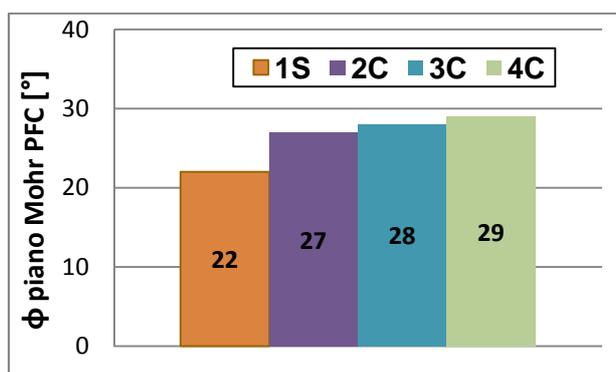


FIGURA 8.11: ANGOLO D'ATTRITO

Così come per il valore di picco dell'angolo d'attrito, al fine di rappresentare la resistenza del materiale si riportano nel seguito i circoli di *Mohr* per le sfere ed i *clump* a diversi elementi (figura 8.12, figura 8.13, figura 8.14, figura 8.15).

Per le prove eseguite su provini costituiti da sfere, ad un angolo di attrito interparticellare $\mu=0.42$ corrisponde un angolo di attrito mobilitato a livello macroscopico pari a 22° .

Per le prove effettuate con *clump*, ad un angolo di attrito interparticellare di $\mu=0.42$ corrisponde un valore dell'angolo di attrito mobilitato a livello macroscopico rispettivamente di 27° (*clump* a due elementi), 28° (*clump* a tre elementi) e 29° (*clump* a quattro elementi).

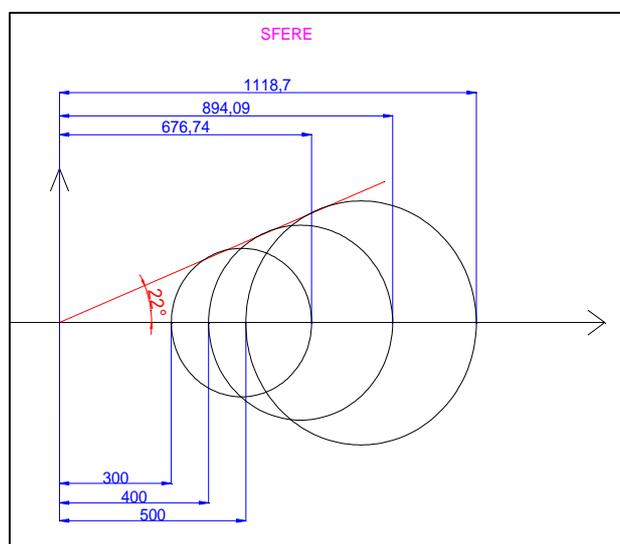


FIGURA 8.12: SFERE – PIANO DI MOHR

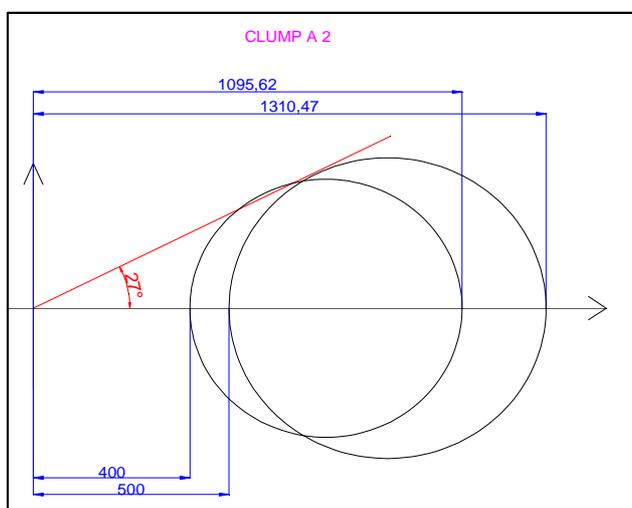


FIGURA 8.13: CLUMP A DUE ELEMENTI – PIANO DI MOHR

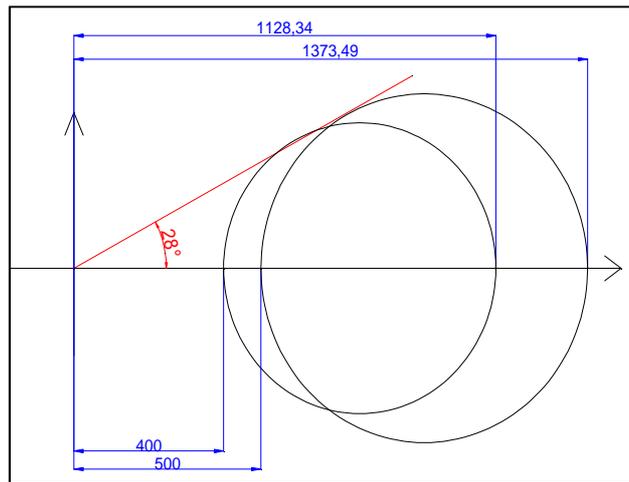


FIGURA 8.14: CLUMP A TRE ELEMENTI – PIANO DI MOHR

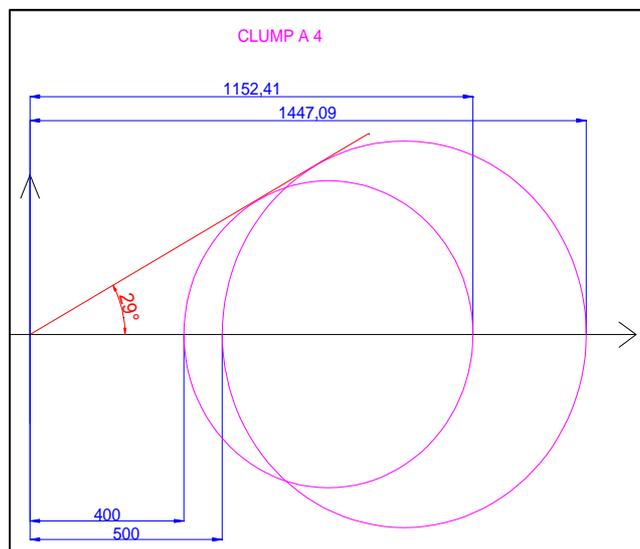


FIGURA 8.15: CLUMP A QUATTRO ELEMENTI – PIANO DI MOHR

8.3.3 Indice dei vuoti e porosità

L'analisi di questo parametro ha come obiettivo quello di classificare il materiale, che esso sia ghiaia oppure una sabbia.

L'indice dei vuoti viene notoriamente calcolato con la seguente formula:

$$e = \frac{V_v}{V_p} \quad (8.1)$$

dove V_v rappresenta il volume dei vuoti e V_p il volume dei pieni quindi occupato dalla fase solida.

Tale parametro è legato alla porosità mediante la relazione:

$$e = \frac{n}{1-n} \quad (8.2)$$

Valori tipici a seconda del tipo di terreno si possono osservare in figura 8.16, da cui si deduce che le sfere di acciaio hanno valori di porosità ed indice dei vuoti pari a quella di una ghiaia grossa (tabella 8.3).

Terreno	<i>n</i> (%)	<i>e</i>
Ghiaia	25-40	0.3-0.67
Sabbia	25-50	0.3-1.00
Limo	35-50	0.5-1.00
Argilla tenera	40-70	0.7-2.3
Argilla compatta	30-50	0.4-1.0
Torba	75-95	3-19

FIGURA 8.16: VALORI TIPICI PER I VARI TERRENI

	Sfere	Clump a 2 elementi	Clump a 3 elementi	Clump a 4 elementi
indice dei vuoti (<i>e</i>)	0,59	0,58	0,57	0,56
porosità [%] (<i>n</i>)	36,95	36,55	36,38	35,98

TABELLA 8.3: INDICE DEI VUOTI E POROSITÀ'

Sia l'indice dei vuoti, sia la porosità diminuiscono all'aumentare del numero di sfere che compongono il *clump*.

Più bassi sono l'indice dei vuoti e la porosità, maggiore è la resistenza di picco e l'angolo di attrito che risultano dalla prova triassiale, maggiore è il numero di particelle che compongono il *clump* quindi l'ingranamento che si sviluppa tra queste.

8.3.4 Addensamento

Il numero di contatti totale, indice della densità relativa del provino, aumenta all'aumentare della tensione di confinamento (figura 8.17); pertanto la densità del provino aumenta all'aumentare del numero di sfere che compongono il *clump*.

La densità relativa aumenta invece al diminuire dell'indice dei vuoti.

Il numero di contatti totale, a parità di tensione di confinamento, aumenta passando dalle sfere, ai *clump* a 2, a quelli a 3 ed a quelli a 4 perché maggior è il numero di particelle che compongono il *clump* più è difficile per il *clump* muoversi dentro al provino durante la prova. Maggior è il numero di particelle che compongono il *clump*, più questo risulta bloccato dentro al provino e minore è l'assestamento reciproco che si sviluppa tra i grani e quindi il numero di contatti totale.

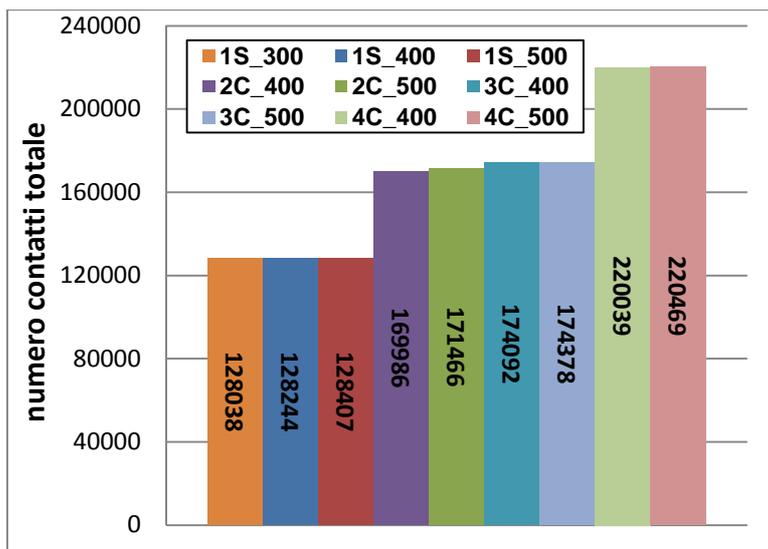


FIGURA 8.17: NUMERO TOTALE DEI CONTATTI

L'*interlocking* che si sviluppa tra gli elementi aumenta passando dalle sfere, ai *clump* a 2, a quelli a 3, ed a quelli a 4 (figura 8.18). Il numero di contatti totale medio (figura 8.19) aumenta passando dalle sfere ai *clump* a 2, a quelli a 3 ed a quelli a 4.

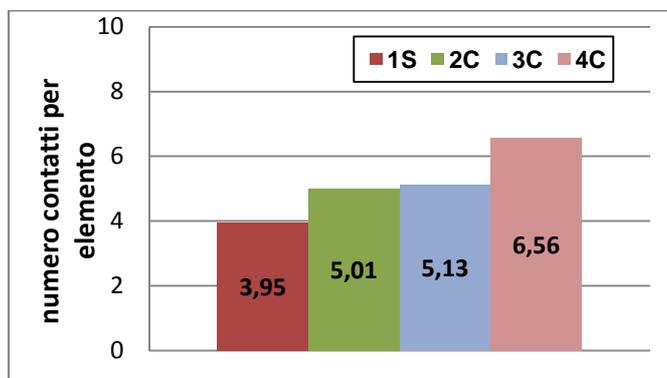


FIGURA 8.18: NUMERO CONTATTI PER ELEMENTO

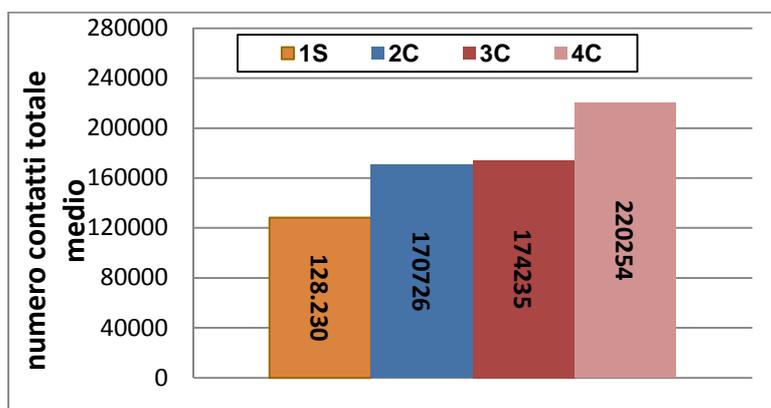


FIGURA 8.19: NUMERO MEDIO TOTALE DEI CONTATTI

8.4 Analisi delle caratteristiche microscopiche

8.4.1 Le forze di contatto

I valori di picco delle forze tangenziali e normali evidenziati in figura 8.20 e figura 8.21 mostrano come le forze di contatto normali siano sempre maggiori di quelle tangenziali così come il valore assunto dalle forze di contatto nei *clump* è sempre maggiore rispetto a quello assunto dalle forze di contatto nelle sfere.

A parità di tipo di elemento le forze di contatto sia normali, sia tangenziali aumentano all'aumentare della tensione di confinamento.

A parità di tensione di confinamento, le forze di contatto sia normali, sia tangenziali aumentano con la complessità della forma della particella quindi passando dalle sfere, ai *clump* a 2, 3 e 4 elementi.

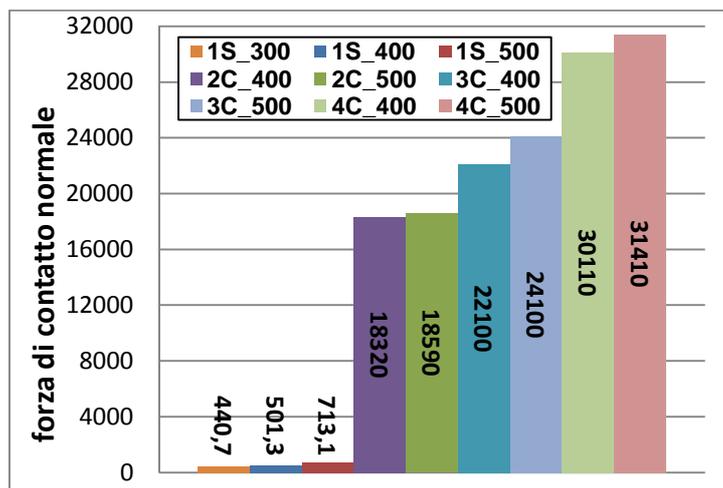


FIGURA 8.20: VALORI DI PICCO DELLA FORZA DI CONTATTO NORMALE

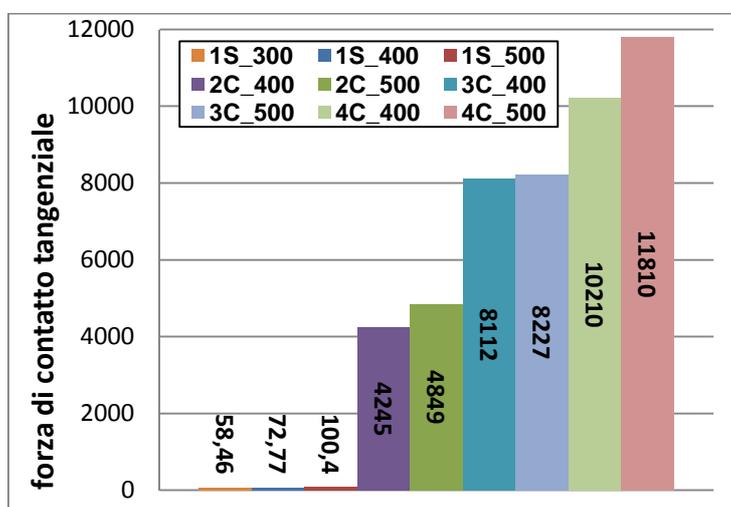


FIGURA 8.21: VALORI DI PICCO DELLA FORZA DI CONTATTO TANGENZIALE

8.4.2 Il numero di coordinazione

Il numero di coordinazione è un parametro che si valuta nella fase finale del test mediante la seguente relazione:

$$\text{numero di coordinazione} = \frac{N_c}{E_c} \quad (8.3)$$

dove N_c è il numero dei contatti ed E_c rappresenta il numero di elementi.

Il numero di coordinazione pertanto varia in maniera proporzionale al numero di contatti ed un suo aumento porta ad un aumento dell'addensamento del provino; esso inoltre, se valutato a fine test, aumenta passando dalla testa al fondo del provino (figura 8.22).

A parità di tipo di elemento, se aumenta la tensione di confinamento, aumenta il numero di coordinazione.

A parità di pressione di confinamento, il numero di coordinazione aumenta passando dalle sfere, ai *clump* a 2, a quelli a 3 ed a quelli a 4.

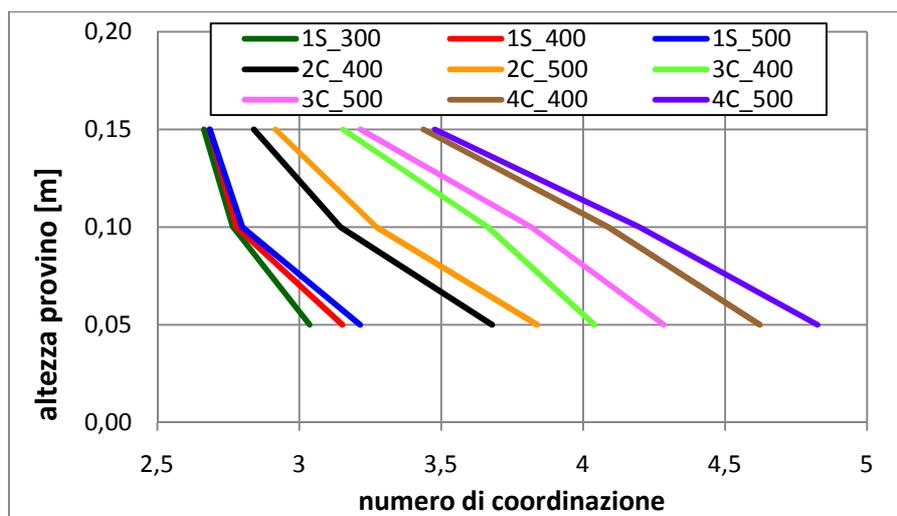


FIGURA 8.22: NUMERO DI COORDINAZIONE

Il lavoro di ricerca presentato ha avuto come scopo quello di affrontare mediante la modellazione numerica particellare, l'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo di una miscela in conglomerato bituminoso. A tale scopo è stato utilizzato il Metodo degli Elementi Discreti, nel quale un aggregato non è visto come un mezzo continuo, ma si tiene conto della sua reale natura particellare.

La discretizzazione di un sistema in particelle circolari adottata nel Metodo degli Elementi Distinti Particellari può apparire una schematizzazione semplicistica rispetto alle metodologie tradizionali. In realtà questa caratteristica rappresenta la maggiore potenzialità di questa tecnica, in quanto la rende particolarmente indicata per la modellazione dei materiali granulari, il cui comportamento è fortemente condizionato dalla natura delle singole particelle che li compongono.

Questi risultati prefigurano interessanti sviluppi sia nel campo della ricerca sia in quelli applicativi che, però, potranno essere affrontati una volta risolte le attuali difficoltà che si possono così riassumere:

- lunghi tempi di calcolo che, utilizzando gli attuali processori, costringono ad adottare sistemi di dimensioni ridotte o formati da un numero limitato di particelle;
- individuazione dei parametri microscopici da utilizzare nella modellazione, assai diversi da quelli macroscopici derivanti dalla letteratura o dai test di laboratorio;
- individuazione di leggi di interazione fra le particelle, specifiche per i materiali analizzati.

Mentre il primo aspetto potrà essere risolto in breve tempo adottando processori più efficienti, gli altri richiedono un'intensa attività di ricerca sperimentale. Quest'ultima, in particolare, deve prevedere l'utilizzo di modelli in vera grandezza e di campi prova in sito, i quali siano in grado di fornire chiare correlazioni tra parametri microscopici e macroscopici. I modelli numerici, infatti, si rivelano strumenti particolarmente efficaci e vantaggiosi ma necessitano di essere affiancati da sperimentazioni in scala reale che permettano di stimare accuratamente i parametri di input.

Il superamento del concetto continuo di tensione che si opera utilizzando questo metodo, infatti, fa emergere la carenza di misure attendibili di alcune variabili, come, ad esempio, quelle legate alle forze di contatto, la cui valutazione risulta faticosa. Risolte queste difficoltà “iniziali”, il metodo degli Elementi Distinti Particellari costituisce una valida alternativa a quelli tradizionali al continuo al fine di ottenere una rappresentazione dei fenomeni maggiormente fedele alla realtà fisica.

Per valutare l’influenza della forma dei grani sul comportamento tenso-deformativo del materiale sono stati confrontati i risultati numerici ottenuti mediante l’utilizzo del software PFC^{3D} (*Particle Flow Code in Three Dimensions*) e quelli di laboratorio ottenuti in numerosi test triassiali, a differenti valori di tensioni di confinamento.

Partendo dai risultati disponibili in letteratura, è stata scelta la prova triassiale poiché:

- fornisce risultati significativi sul fenomeno fisico studiato;
- è facile e veloce da svolgere;
- è facile da modellare con il metodo DEM particellare.

Le sfere utilizzate per la modellazione in laboratorio rappresentano una miscela ideale di sfere d’acciaio; si è scelto proprio questo materiale poiché in ottica di eventuali prove in laboratorio, è quello che possiede le migliori caratteristiche di durabilità e di resistenza. Esse costituiscono un “aggregato ideale”, in grado di fornire un confronto significativo tra i risultati numerici e quelli sperimentali in virtù del fatto che sono ben riproducibili con il metodo DEM particellare. Infatti:

- la geometria delle sfere in acciaio è facilmente modellabile in termini sia di diametro, sia di sfericità;
- la superficie delle sfere è uniforme ed è nota la relativa tolleranza di fabbricazione.

Per analizzare l’influenza della forma sulla deformazione del provino, è stata utilizzata la logica del *clump*, preferendo all’elemento *cluster* perché nel *clump* le sfere che lo compongono sono “incollate” tra loro a formare un elemento che si comporta come un corpo rigido, che è quindi più adatto a rappresentare il comportamento di una particella.

Il confronto tra i risultati ottenuti da prove triassiali in laboratorio e da test eseguiti con il software di simulazione è avvenuto a due livelli distinti: il livello macroscopico e quello microscopico.

Per quanto riguarda il primo, l'analisi si è concentrata sulla resistenza massima del sistema, in termini di valore sia residuo sia di picco. Si è osservato che all'aumentare dell'angolarità della particella aumentano le proprietà di resistenza del sistema in generale; ciò è imputabile al fatto che i *clump* assicurano un ingranamento reciproco tra le particelle superiore a quello fornito dalle sfere.

I risultati ottenuti dalla modellazione sono qualitativamente e quantitativamente paragonabili a quelli di laboratorio; infatti, l'errore in valore assoluto è risultato accettabile.

A livello microscopico i risultati ottenuti confermano l'elevata influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo di una miscela in conglomerato bituminoso. All'aumentare dell'angolarità delle particelle, infatti, si assiste ad un maggior ingranamento reciproco del campione, testimoniato da un aumento della resistenza sia di picco sia residua, dalla diminuzione sia dell'indice dei vuoti sia della porosità, e da un aumento dell'angolo di attrito interparticellare. All'aumentare del numero di particelle che compongono il *clump*, quindi, cresce l'addensamento del materiale al quale corrisponde un maggior numero di punti di contatto ed un miglior grado di mutuo incastro.

È possibile concludere quindi che l'addensamento è il parametro che maggiormente condiziona la resistenza totale del sistema pertanto in sito sarà fondamentale verificare che lo strato si addensi a seguito dell'ingranamento reciproco che si sviluppa tra i grani e non a causa della rottura degli stessi.

Durante il ciclo di produzione sarà fondamentale ad ogni passaggio verificare lo stato di conservazione dei grani: nell'impianto di produzione si dovranno preferire inerti angolari, puliti e soprattutto resistenti che sappiano quindi conservare le loro proprietà durante le fasi successive.

Durante il trasporto del conglomerato bituminoso ed in fase di miscelazione sarà importante non portare a frantumazione l'aggregato così come durante la fase di stesa e compattazione sarà necessario scegliere macchinari con adeguate caratteristiche che sappiano incrementare l'*interlocking* che si sviluppa tra gli elementi.

Sviluppi futuri

Dalla presente ricerca derivano numerosi sviluppi futuri. I più importanti sono sicuramente:

- un'accurata analisi statistica della distribuzione dei contatti all'interno del materiale, sapendo che in corrispondenza delle zone in cui si verifica una maggior concentrazione di contatti si verificherà la rottura del materiale;
- un ulteriore sviluppo della modellazione numerica utilizzata in direzione del cosiddetto "laboratorio virtuale". Confermando le potenzialità dell'utilizzo delle sfere di acciaio poiché sono perfettamente riproducibili con il DEM particellare, infatti, diventa possibile indagare i fenomeni macroscopici osservati in laboratorio analizzando ciò che accade a livello microscopico all'interno del sistema. La modellazione numerica, quindi, può diventare una possibile alternativa ai test di laboratorio, riducendo o addirittura eliminando i costi per lo svolgimento di test di caratterizzazione sperimentali.

- [1] Aoki K., Mito Y., Matsouka T., Kondoh D. (2004) – ***Design of Gas Storage Rock Cavern by the Hydro-Mechanical Coupled Discrete Model*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 289-299;
- [2] Aoki K., Mito Y., Mori T. & Maejima T. (2004) – ***Evaluation of Behavior of EDZ around Rock Cavern by AE Measurements and PFC Simulation*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 73-83;
- [3] Asmar B. N., Langston P. A., Matchett A. J. & Walters J. K. (2002) – ***Validation Tests on a Distinct Element Model of Vibrating Cohesive Particle Systems*** – Computers and Chemical Engineering, vol. 26, pg. 785-802;
- [4] Bailey C. & Cross M. (1995) – ***A Finite Volume Procedure to Solve Elastic Solid Mechanics Problems in Three-Dimensions on an Unstructured Mesh*** – International Journal of Numerical Methods , vol. 38, pg. 1757-1776;
- [5] Bashir Y. M., and Goddard J. D. (1991) - ***Simulation of the Quasi-Static Deformation of 2D Assemblage of Rigid Discs*** - Mechanics Computing in 1990's and beyond, vol. 2, pg. 1264-1268;
- [6] Bianchi M. - ***Criteri di Calcolo delle Pavimentazioni Stradali Flessibili: i Metodi Particellari*** -;
- [7] Blandford G. E., Ingraffea A. R. & Liggett J. A. (1981) – ***Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method*** – International Journal of Numerical Method in Engineering, vol. 17, pg. 387-406;
- [8] Bragaglia M. (2007) - ***Studio del Comportamento Visco-Elastico del Conglomerato Bituminoso con il Metodo degli Elementi Distinti Particellari*** - Università degli Studi di Bologna, Facoltà di Ingegneria, Dottorato di Ricerca in Ingegneria Civile;
- [9] Brauer J. (1988) – ***Finite Element Analysis*** – Marcel Dekker, New York;

-
- [10] Buttlar W. G., Bozkurt D., Al-Khateeb G. G., Waldhoff A. S. (1999) - ***Understanding Asphalt Mastic Behavior Through Micromechanics*** - Journal of The Transportation Research Board, n. 1681, pg. 157-169;
- [11] Buttlar W. G., Roque R. (1996) - ***Evaluation of Empirical and Theoretical Models to Determine Asphalt Mixture Stiffness at Low Temperatures*** - Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists, pg. 99-141;
- [12] Buttlar W. G., Roque R. (1997) - ***Micromechanical Modeling to Predict the Stiffness of Asphalt Concrete*** - Fifth Pan American Congress on Applied Mechanics, Applied Mechanics in the Americas, San Juan, Puerto Rico, L. A. Godoy, M. Rysz, L. E. Suarez, eds., vol. 4, pg. 175-178;
- [13] Buttlar W. G., You Z. (2001) - ***Discrete Element Modelling of Asphalt Concrete: a Microfabric Approach*** - Transportation Research Record, vol. 1757, n. 1, pg. 111-118;
- [14] Calvetti F. (2003) - ***Limitations and Perspectives of the Micromechanical Modelling of Granular Materials*** - Mathematical and Computer Modelling, vol. 37, pg. 485-495;
- [15] Carrillo A. R., Horner D. A., Peters J. F., West J. E. (1996) - ***Design of a Large Scale Discrete Element Soil Model for High Performance Computing Systems*** - Proc. Of the 1996 ACM/IEEE Conference on Supercomputing;
- [16] Cavallari M. - ***Il Calcolo delle Sovrastrutture Stradali Flessibili: l'Approccio Particolare;***
- [17] Cesari F. (2002) - ***Introduzione al Metodo degli Elementi Finiti*** - Pitagora Editrice, Bologna;
- [18] Chang G. K., Meegoda N. J. (1993) - ***Simulation of the Behaviour of Asphalt Concrete Using Discrete Element Method*** - 2nd International Conference on Discrete Element Methods, M.I.T.;
- [19] Chang G. K., Meegoda N. J. (1997) - ***Micromechanical Simulation of Hot Mix Asphalt*** - Journal of Engineering Mechanics, vol. 123, n. 5, pg. 495-503;
- [20] Chareyre B., Villard P. (2003) - ***Discrete Element Modeling of Curved Geosynthetic Anchorages with Known Macro-Properties*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 197-203;

- [21] Cheng Y. F., Guo S. J. & Lai H. Y. (2000) - ***Dynamic Simulation of Random Packing of Spherical Particles*** – Powder Technology, vol. 107, pg. 123-130;
- [22] Cheng Y. M. & Zhang Y. H. (2002) – ***Coupling of FEM and DDA Methods*** – The International Journal of Geomechanics, vol. 2, pg. 503-517;
- [23] Cho N., Martin C. D., Segol D. C. (2007) - ***A Clumped Particle Model for Rock*** – International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, vol. 44, pg. 997-1010;
- [24] Choi S. K. (1992) – ***Application of the Distinct Element Method for Rock Mechanics Problems*** – Engineering Computations, vol. 9, pg. 225-233;
- [25] Collop A. C., McDowell G. R., Lee Y. (2004) - ***Use of the Distinct Element Method to Model the Deformation Behavior of an Idealized Asphalt Mixture*** - The International Journal of Pavement Engineering, vol. 5, n. 1, pg. 1-7;
- [26] Cook B. & Jensen R. (2002) – ***Discrete Element Methods – Numerical Modelling of Discontinua*** – Proceedings of the 3rd International Conference, Santa Fe, New Mexico, September 23-25, Geotechnical Special Publication n. 117, ASCE;
- [27] Cook B. K., Boutt D. F., Strack O. E., Williams J. R., Johnson S. M. (2004) - ***DEM-Fluid Model Development for Near-Wellbore Mechanics*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 301-309;
- [28] Cravero M., Iabichino G. & Oreste P. (2003) – ***Metodi per l'Analisi di Stabilità dei Pendii in Rocca*** – Atti delle Conferenze di Geotecnica di Torino, XIX ciclo, vol. 19.04, 4-6 Novembre;
- [29] Cui L., O'Sullivan C., O'Neill S. (2007) - ***An Analysis of the Triaxial Apparatus Using a Mixed Boundary Three-Dimensional Discrete Element Model*** - Geotechnique, vol. 57, n. 10, pg. 831-844;
- [30] Cundall P. A. (1971) - ***A Computer Model for Simulating Progressive, Large-scale Movement in Blocky Rock System*** – Proc. Symp. Int. Soc. Rock Mech. Nancy;

- [31] Cundall P. A. (1988) – **Formulation of a Three-Dimensional Distinct Element Model – Part I. A Scheme to Detect and Represent Contacts in a System Composed of many Polyhedral Blocks** – International Journal of Rock & Mining Sciences, vol. 25, pg. 107-116;
- [32] Cundall P. A. (1989) - **Numerical Experiments on Localization of Frictional Materials** – Ingenieur Archiv, n. 59, pg. 148-159;
- [33] Cundall P. A., Hart R. (1992) - **Numerical Modelling of Discontinua** – Journal of Engineering Computations, n. 9, pg. 101-113;
- [34] Cundall P. A., Strack O. D. L. (1979) - **The Development of Constitutive Laws for Soil Using the Distinct Element Method** – 3rd International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen;
- [35] Cundall P. A., Strack O. D. L. (1979) – **A Discrete Element Model for Granular Assemblies** – Geotechnique, vol. 29, n. 1, pg. 47-65;
- [36] Dai Q., Sadd M. H. (2004) - **Parametric Model Study of Microstructure Effects on Damage Behavior of Asphalt Samples** - International Journal of Pavement Engineering, pg. 19-30;
- [37] Dai Q., Sadd M. H., Parameswaran V. & Shukla A. (2005) – **Prediction of Damage Behaviors in Asphalt Materials Using a Micromechanical Finite-Element Model and Image Analysis** – Journal of Engineering Mechanics, vol. 131, n. 7, pg. 668-677;
- [38] Deluzarche R., Dedecker F., Fry J. J. (2003) – **Static and Dynamic Analysis of Stability of Rocky Slopes via Particle Methods** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 125-131;
- [39] Di Renzo A. & Di Maio F. P. (2004) – **Comparison of Contact-Force Models for the Simulation of Collisions in DEM-Based Granular Flow Codes** – Chemical Engineering Science, vol. 59, pg. 525-541;
- [40] Dolezalova M. & Koran P. (2002) - **Micromechanical Modelling of a Dump Material** - International Journal of Geomechanics, vol. 2, pg 47-74;
- [41] Dondi G., Bragaglia M. & Vignali V. (2005) - **Bituminous Mixtures Simulation with Distinct Particle Elements Method** - III International SIIV Congress, Bari, 22-24 September;

- [42] Dondi G., Bragaglia M. (2005) - **Modellazione dei Conglomerati Bituminosi con il Metodo degli Elementi Distinti Particellari;**
- [43] Dondi G., Bragaglia M. (2006) - **Modellazione ad Elementi Distinti Particellari della Prova ITSM** – XVI Convegno Nazionale SIVV, 20-22 Settembre;
- [44] Dondi G., Bragaglia M., Vignali V. (2007) – **Flexible Pavement Simulation with Distinct Particle Element Method** – 4th International SIVV Congress, Palermo, 12-14 September;
- [45] Dondi G., Bragaglia M., Vignali V. (2008) - **Evoluzione dei Criteri di Calcolo delle Pavimentazioni Flessibili: i Modelli Particellari** – XVII Convegno Nazionale SIVV;
- [46] Dondi G., Vignali V., Bragaglia M. (2006) - **Modellazione Mediante Elementi Distinti Particellari delle Prove sui Materiali Granulari** - XVI Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, Bologna, 26-28 Giugno;
- [47] Elata D. & Berryman J. D. (1996) - **Contact Force-Displacement Laws and the Mechanical Behavior of Random Packs of Identical Spheres** – Mechanics of Materials, vol. 24, pg. 229-240;
- [48] Fallah N. A., Bailey C., Cross M. & Taylor G. A. (2000) – **Comparison of Finite Element and Finite Volume Methods Application in Geometrically Nonlinear Stress Analysis** – Applied Mathematical Modelling, vol. 24, pg. 439-455;
- [49] Ferrellec J. F., Mochizuki C., Hirata A. (2004) – **DEM Simulation of Bulk Material Flow in a Feeding System of Blast Furnace** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 103-110;
- [50] Fortin J., Millet O. & Saxcè G. (2005) - **Numerical Simulation of Granular Materials by an Improved Discrete Element Method** – International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 62, pg. 639-663;
- [51] Goodman R. E., Taylor R. L. & Brekke T. L. (1968) – **A Model for the Mechanics of Jointed Rock** – Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, vol. 94, pg. 637-659;

- [52] Hainbuchner E., Potthoff S., Konietzky H., Kamp te L. (2003) – **Particle Based Modeling of Shear Box Tests and Stability Problems for Shallow Foundations in Sand** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 151-156;
- [53] Hart R., Cundall P. A. & Lemos J. (1988) – **Formulation of a Three-Dimensional Distinct Element Model – Part II. Mechanical Calculations for Motion and Interaction of a System Composed of Many Polyhedral Blocks** – International Journal of Rock & Mining Sciences, vol. 25, pg. 117-125;
- [54] Hazzard J. F., Young R. P., Maxwell S. C. (2000) – **Micromechanical modeling in Cracking and Failure of Brittle Rocks** – Journal Geophysical Research, n. 105 (B7), pg. 16683-16697;
- [55] Holtz R. D., Kovacs W. D. – **An Introduction to Geotechnical Engineering**;
- [56] Hudson J. A. (2001) – **Rock Engineering Case Histories: Key Factors, Mechanisms and Problems** – Proceeding of the ISRM Regional Symposium EUROCC2001, Finland, 4-7 June;
- [57] Imre B. (2004) - **The Particle Flow Code, PFC^{2D}, Applied in Planetary Studies to Model the Tectonic Evolution of Chasma Walls on Mars** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 199-206;
- [58] Issa J.A. & Nelson R. B. (1992) – **Numerical Analysis of Micromechanical Behavior of Granular Materials** – Engineering Computations, vol. 9, pg. 211-223;
- [59] Itasca (2002) – **PFC2D (Particle Flow Code in 2 Dimensions) Manual Version 3.0** – Itasca Consulting Group;
- [60] Itasca (2003) – **PFC3D (Particle Flow Code in 3 Dimensions) Manual Version 3.0** – Itasca Consulting Group;
- [61] Iverson S. R. (2003) – **Investigation of Bulk Solids Engineering Properties and Application of PFC^{2D} to Ore Pass Flow Problems** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 251-258;
- [62] Iwashita K., oda M. (2003) - **Numerical Simulation of Granular Materials Flow in Silo by Modified Distinct Element Method** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 53-59;

- [63] Jensen R. P., Bosscher P. J., Plesha M. E., Edil T. B. (1999) - **DEM Simulation of Granular Media-Structure Interface: Effects of Surface Roughness and Particle Shape** - International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics, vol. 23, pg. 531-547;
- [64] Jensen R. P., Edil T. B., Bosscher P. J., Plesha M. E., Kahla N. B. (2001) - **Effect of Particle Shape on Interface Behavior of DEM-Simulated Granular Materials** – The International Journal of Geomechanics, vol. 1, n. 1;
- [65] Jiang M. J., Konrad J. M. & Leroueil S. (2003) - **An Efficient Technique for Generating Homogeneous Specimens for DEM Studies** – Computers and Geotechnics, vol. 30, pg. 579-597;
- [66] Jing L. (1998) – **Formulation of Discontinuous Deformation Analysis (DDA) - An implicit Discrete Element Model for Block Systems** – Engineering Geology, vol. 49, pg. 371-381;
- [67] Jing L. (2003) – **A Review of Techniques, Advances and Outstanding Issues in Numerical Modelling for Rock Mechanics and Rock Engineering** – International Journal of Rock & Mining Sciences, vol. 40, pg. 283-353;
- [68] Katzenbach R., Schmitt A. (2004) – **Micromechanical Modelling of Granular Materials Under Triaxial and Odometer Loading** – Proceeding of the 2nd International PFC Symposium, 28-20 October, Kyoto, Numerical Modelling in Micromechanics via Particle Methods;
- [69] Ke T. & Bray J. (1995) – **Modelling of Particulate Media Using Discontinuous Deformation Analysis** – Journal of Engineering Mechanics, vol. 121, n. 11, pg. 1234-1242;
- [70] Kim H., Buttlar W. G. (2009) – **Discrete Fracture Modeling of Asphalt Concrete** – International Journal of Solids and Structures, n. 46, pg. 2593-2604;
- [71] Kim H., Wagoner M. P., Buttlar W. G. (2006) - **Fracture Behavior of Asphalt Mixtures Using the Disk-Shaped Compact Tension Test and Discrete Element Method** – 10th International Conference on Asphalt Pavements, Quebec City, Canada;

- [72] Kim H., Wagoner M. P., Buttlar W. G. (2006) - ***Toward Realistic Heterogeneous Fracture Modeling of Asphalt Mixture Using Disk-Shaped Compact Tension Test Based on Discontinuum Approach*** – 85th Annual Meeting of the Transportation Research Board, Washington, D. C.;
- [73] Kim H., Wagoner M. P., Buttlar W. G. (2008) - ***Simulation of Fracture Behavior in Asphalt Concrete Using a Heterogeneous Cohesive Zone Discrete Element Model*** – Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 20, n. 8, pg. 552-563;
- [74] Kishino Y. (2004) – ***GEM Simulation of Shear Flows in Granular Media*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 143-148;
- [75] Kleier A. J., Kleinschrodt H.-D. (2003) - ***Discontinuous Mechanical Modeling of Granular Solids by Means of PFC and LS-Dyna*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 37-43;
- [76] Konietzky H., Kamp L., Bertrand G. (2003) - ***Modelling of Cyclic Fatigue Under tension with PFC*** – Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, The Netherlands, pg. 101-105;
- [77] Konietzky H., Kamp L., Groeger T., Jenner C. (2004) - ***Use of DEM to Model the Interlocking Effect of Geogrids under Static and Cyclic Loading*** – Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 3-11;
- [78] Kose S., Guler M., Bahia H. U., Masad E. (2000) - ***Distribution of Strains within Asphalt Binders in HMA Using Imaging and Finite Element Techniques*** – Journal of the Transportation Research Board, n. 1728, pg. 21-27;
- [79] Kruyt N. P. (1993) - ***Toward Micro Mechanical Constitutive Relations for Granular Material Based on two Dimensional Discrete Element Simulation*** – Modern Approaches to Plasticity;
- [80] Lanciotti M. - ***Metodi Numerici Avanzati nello Studio delle Sovrastrutture Stradali Flessibili*** -;
- [81] Langston P., Al-Awamleh A., Fraige F. & Asmar B. (2004) – ***Distinct Element Modeling of Non-Spherical Frictionless Particle Flow*** – Chemical Engineering Science, vol. 59, pg. 425-435;

- [82] Lee C., Park Y., Kwon S. (2004) - ***Simulation of a Two-Dimensional 'Thin-Skinned' Orogenic Wedge Using PFC*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 181-186;
- [83] Lei S., Kaitkay P., Shen X. (2004) – ***Simulation of Rock Cutting Using Distinct Element Method – PFC^{2D}*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 63-72;
- [84] Li L., Holt R. M. (2004) - ***A Study on the Calculation of Particle Volumetric Deformation in a Fluid Coupled PFC Model*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 273-279;
- [85] Lin X., Ng T.T. (1997) – ***A Three Dimensional Discrete Element Model Using Arrays of Ellipsoids*** – Geotechnique, vol. 47, n. 2, pg. 319–329;
- [86] Masson S., Martinez J., Baylac B. & Ferrellec J. (2003) – ***Discrete Numerical Simulation of Granular Materials*** – Mecanique & Industries, vol. 4, pg. 497-504;
- [87] Matsushima T. (2005) - ***Effect of Irregular Grain Shape on Quasi-Static Shear Behavior of Granular Assembly*** - Powders and Grains 2005, pg. 1319-1323;
- [88] Mindlin R. D. & Deresiewicz H. (1953) – ***Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces*** – Journal of Applied Mechanics, vol. 20, pg. 327-344;
- [89] Mizumoto M., Cao G. Q. (2004) - ***Evaluation of Castle Stone Wall Stability with the Particle Flow Code*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 57-60;
- [90] Morchen N., Walz B. (2003) - ***Model Generation and Calibration for a Pile Loading in the Particle Flow Model, in Numerical Modelling in Micromechanics via Particle Methods*** - Ed. H. Konietzky, Rotterdam: A. A. Balkema, pg. 189-195;
- [91] Ng T. (2004) - ***Triaxial Test Simulations with Discrete Element Method and Hydrostatic Boundaries*** - Journal of Engineering Mechanics, vol. 130, n. 10, pg. 1188-1194;
- [92] Ng T. T., Wang C. (2001) - ***Comparison of a 3-D DEM Simulation with MRI Data*** - International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 25, n. 5, pg. 495-507;

- [93] Niessen H. F., Mitchell M. N. (2003) – **Formation of Loading Cones in the PBMR-Core** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 45-51;
- [94] O’Sullivan C., Bray J. & Riemer M. (2004) – **Examination of the Response of Regularly Packed Specimens of Spherical Particles Using Physical Tests and Discrete Element Simulations** – Journal of Engineering Mechanics, vol. 130, n. 10, pg. 1140-1150;
- [95] O’Sullivan C., Bray J. (2003) – **Relating the Response of Idealized Analogue Particles and Real Sands** – Numerical Modeling in Micromechanics via Particles Methods, Balkema Publisher;
- [96] O’Sullivan C., Cui L. (2009) – **Micromechanics of Granular Material Response During Load Reversals: Combined DEM and Experimental Study** – Powder Technology, n. 193, pg. 289-302;
- [97] O’Sullivan, Bray J. D., Riemer M. F. – **3-D DEM Validation Using Steel Balls with Regular Packing Arrangements;**
- [98] Okura Y., Ochiai H., Cundall P. A., Shimizu Y. (2004) – **Fluid Coupling in PFC^{3D} Using the Measurement Spheres** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 257-264;
- [99] O’Sullivan C., Bray J. D., Riemer M. F. (2002) - **The Influence of Particle Shape and Surface Friction Variability on the Response of Rod-Shaped Particulate Media** - ASCE Journal of Engineering Mechanics;
- [100] Park E.-S., Martin Derek C., Christiansson R. (2004) - **Numerical Simulation of the Mechanical Behavior of Discontinuous Rock Masses** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 85-91;
- [101] Park Y., Lee C., Ree J.-H. (2004) – **Simulation of Magmatic Fabrics Using PFC** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 175-179;
- [102] Perrone N. & Kao R. (1975) – **A General Finite Difference Method for Arbitrary Meshes** – Computers and Structures, vol. 5, pg. 45-58;
- [103] Pierce M. E. (2004) – **PFC^{3D} Modeling of Inter-Particle Percolation in Caved Rock Under Draw** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 149-156;

- [104] Pohl M., Pulsfort M. & Walz B. (2004) – ***Application of PFC^{3D} for Determination of Soil Properties and Simulation of the Excavation Process in front of Sheet Pile Wall Constructions*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 35-44;
- [105] Portela A., Aliabadi M. H. & Rooke D. P. (1993) – ***Dual Boundary Element Incremental Analysis of Crack Propagation*** – International Journal of Numerical Method in Engineering, vol. 46, pg. 237-284;
- [106] Potyondy D. O. & Cundall P. A. (2004) - ***A Bonded-Particle Model for Rock*** – International Journal of Rock & Mining Sciences, vol. 41, pg. 1329-1364;
- [107] Potyondy D. O., Cundall P. A. (2004) - ***A Bonded-Particle Model for Rock*** – International Journal of Rock & Mining Sciences, vol. 41, pg. 1329-1364;
- [108] Robertson D., Bolton M.D. (2001) - ***DEM Simulations of Crushable Grains and Soils*** – 4th International Conference on Micromechanics of Granular Media (Powders & Grains 2001), Sendai, May, pg. 623-626;
- [109] Rothenburg L. et al. (1992) - ***Micromechanical Modelling of Asphalt Concrete in Connection with Pavement Rutting Problems*** - 7th International Conference on Asphalt Pavements, vol. 1, pg. 230-245;
- [110] Rothenburg L., Bathurst R. J. (1992) - ***Micromechanical Features of Granular Assemblies with Planar Elliptical Particles*** – Geotechnique, n. 42, pg. 79-95;
- [111] Sadd M. H., Dai Q. (2004) – ***A Comparison of Micro-Mechanical Modeling of Asphalt Materials Using Finite Elements and Doublet Mechanics*** – Mechanics of Materials, n. 37(2005), pg. 641-662;
- [112] Sainsbury D. P., Cai Y., Hebblewhite B. K. (2003) – ***Numerical Investigation of Crown Pillar Recovery Beneath Stabilized Rockfill*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 225-231;
- [113] Salot C., Gotteland P., Villard P. (2009) - ***Influence of Relative Density on Granular Materials Behavior: DEM Simulations of Triaxial Tests*** – Granular Matter;
- [114] Sarracino R. S., McBride A. T., Powell M. S. (2004) - ***Using Particle Flow Code to Investigate Energy Dissipation in a Rotary Grinding Mill*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 111-118;

- [115] Shashidhar N., Shenoy A. (2000) – ***On Using Micromechanical Models to Describe Dynamic Mechanical Behavior of Asphalt Mastics*** – Transportation Research Board, 79th Annual Meeting, Washington, D. C.;
- [116] Shimizu Y. (2004) – ***Fluid Coupling in PFC^{2D} and PFC^{3D}*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 281-287;
- [117] Sinibaldi L. - ***Impiego di Metodi Numerici Avanzati nello Studio delle Pavimentazioni Stradali Flessibili*** -;
- [118] Thomas P. & Bray J. D. (1997) – ***Capturing Nonspherical Shape of Granular Media with Disk Clusters*** – Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, vol. 25, pg. 169-178;
- [119] Thomas P., Bray J. D. (1999) - ***Capturing Nonspherical Shape of granular Media with Disk Clusters*** – Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, vol. 125, pg. 169-178;
- [120] Thornton C. (1979) - ***The Conditions for Failure of a Face-Centred Cubic Array of Uniform Rigid Spheres*** – Geotechnique, vol. 29, n. 4, pg. 441-459;
- [121] Thornton C. (2000) - ***Numerical Simulations of Deviatoric Shear Deformation of Granular Media*** - Geotechnique 50, n. 1, pg. 43-53;
- [122] Ting J. M., Khwaja M., Meachum L. R. and Rowell J. D. (1993) – ***An Ellipse-Based Discrete Element Model for Granular Materials*** – Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 17, pg. 603-623;
- [123] Tomiczek K. (2003) - ***Modeling of sandstone Rock Samples Using PFC^{2D} Code*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 233-239;
- [124] Tsunekawa H., Iwashita K. (2001) - ***Numerical Simulation of Triaxial Test Using Two and Three Dimensional DEM*** - Powders and Grains, Ed. Balkema;
- [125] Vignali V. (2006) – ***Impiego di Metodi Numerici Avanzati nello Studio della Spinta delle Terre*** – Tesi di dottorato in Ingegneria dei Trasporti, Università di Bologna;
- [126] Walton O. R., Braun R. L. (1993) – ***Simulation of Rotary-Drum and Repose Tests for Frictional Spheres and Rigid Sphere Clusters*** – Joint DOE/NSF Workshop on Flow of Particulates and Fluids;

- [127] Wheel M. A. (1996) – ***A Geometrically Versatile Finite Volume Formulation for Plane Elastostatic Stress Analysis*** – Journal of Strain Analysis, vol. 31, pg. 111-116;
- [128] Yamada Y., Ueda S., Matsuoka T. (2004) - ***Simulation of Accretionary Prisms by Distinct Element Method*** - Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, pg. 187-190;
- [129] You Z., Adhikari S. & Dai Q. (2008) – ***Three-Dimensional Discrete Element Models for Asphalt Mixtures*** - Journal of Engineering Mechanics, vol. 134, n. 12, pg. 1053-1063;
- [130] You Z., Buttlar W. G. & Dai Q. (2006) - ***Aggregate Effect on Asphalt Mixture Properties by Modeling Particle-to-Particle Interaction*** – Analysis of Asphalt Pavement Materials and Systems;
- [131] You Z., Buttlar W. G. (2005) – ***Application of Discrete Element Modeling Techniques to Predict the Complex Modulus of Asphalt-Aggregate Hollow Cylinders Subjected to Internal Pressure*** – Journal of the Transportation Research Board, n. 1929, pg. 218-226;
- [132] You Z., Buttlar W. G. (2006) – ***Micromechanical Modeling Approach to Predict Compressive Dynamic Moduli of Asphalt Mixtures Using the Distinct Element Method*** - Journal of the Transportation Research Board, n. 1970, pg. 73-83;
- [133] You Z., Dai Q. (2007) – ***Review of Advances in Micromechanical Modeling of Aggregate-Aggregate Interactions in Asphalt Mixtures*** – Canadian Journal of Civil Engineering, vol. 34, pg. 239-252;
- [134] Zienkiewicz O., Best B., Dullage C. & Stagg K. (1970) – ***Analysis of Nonlinear Problems in Rock Mechanics with Particular Reference to Jointed Rock System*** – Proceeding of the 2nd International Congress on Rock Mechanics, Belgrade;