Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

MARTINGALE A TEMPO DISCRETO ED ALCUNE APPLICAZIONI

Tesi di Laurea in probabilità*e statistica*

Relatore:
Prof.
IRENE CRIMALDI

Presentata da:
ROBERTO LUZI

I Sessione
Anno Accademico 20I0/2011

áe statistica1

ai miei genitori ...

Introduzione

La tesi é incentrata sulla teoria delle *martingale* a tempo discreto. Il concetto di martingala, ha acquistato un enorme importanza grazie alle numerose applicazioni che trova non solo in vari contesti della matematica, ma anche in altre discipline,come ad esempio la biologia e la finanza. La tesi é divisa in tre capitoli.

Nel primo capitolo viene introdotta la nozione di *speranza condizionale.* Attraverso il *teorema di Kolomogorov.* Dopo aver dimostrato questo teorema, vengono illustrate le numerose proprietà della speranza condizionale, molto importanti per i capitoli successivi.

Nel secondo capitolo, vien introdotte le nozioni di *martingala submartingala e supermartingala.* Vengono poi illustrati alcuni esempi e presentati alcuni risultati teorici, fra i quali il teorema di convergenza e il teorema di Doob.

Nel terzo ed ultimo capitolo viene dato un breve cenno ai *processi di diramzione.* In particolare viene illustrato come la teoria delle martingale può essere usata per studiare tali processi.

La presente tesi é essenzialmente basata sul testo di D. Williams [2].

Indice

Capitolo 1

Speranza condizionale

1.1 Definizioni preliminari

Prima di introdurre la nozione di speranza condizionale, richiamiamo alcune definizioni di base.

Definizione 1.1. La terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ denota lo spazio di probabilità, ossia Ω é un insieme diverso dal vuoto, $\mathcal{F}$ é una σ-algebra, cioè una famiglia di sottoinsiemi di Ω con le proprietà

1. $\emptyset$ e $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_i \in \mathcal{F} \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

e P é una *misura di probabilità* su $\mathcal{F}$, cioé un' applicazione $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ tale che

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$
- $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

Definizione 1.2. Una variabile aleatoria reale X su $(\Omega, \mathcal{F})$ é una funzione $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile rispetto a $\mathcal{F}$ e alla σ-algebra $\mathcal{B}$ dei *boreliani* di $\mathbb{R}$,

ossia tale che $\forall B \in \mathcal{B}\ X^{-1}(B) = \{X \in B\} \in \mathcal{F}$.
Una variabile aleatoria é detta *integrabile* se vale $E(|X|) = \int |X| dP < \infty$.

1.2 Teorema fondamentale di Kolomogorov

Teorema 1.2.1. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità ed X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F})$ integrabile. Sia $\mathcal{G}$ una sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$. Allora esiste una variabile aleatoria Y su $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che*

1. *Y é $\mathcal{G}$-misurabile*

2. *$E(|Y|) < \infty$*

3. *$\forall G \in \mathcal{G}$ vale*
$$\int_G Y dP = \int_G X dP$$

*Inoltre se $\tilde{Y}$ é un' altra variabile aleatoria con queste stesse proprietà, allora $\tilde{Y} = Y$ quasi certamente(q.c.), ossia $P(Y = \tilde{Y}) = 1$. Una variabile aleatoria Y con le proprietà 1),2) e 3) é detta **versione della speranza condizionale di X rispetto a $\mathcal{G}$** . Viene usata la notazione $Y = E(X|\mathcal{G})q.c.$*

A volte $E(X|\sigma(Z))$ viene denotata semplicemente con $E(X|Z)$.

1.3 Speranza condizionale ed errore quadratico medio

La speranza condizionale di una variabile aleatoria X di un quadrato integrabile ($E(|X^2|) < \infty$) ha anche essa quadrato integrabile. Si dimostra che la speranza condizionale di X rispetto ad una sotto-σ-algebra $\mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$ é la miglior stima di X con una variabile aleatoria $\mathcal{G}$-misurabile di quadrato integrabile nel senso seguente.

Teorema 1.3.1. *Per ogni variabile aleatoria Z $\mathcal{G}$-misurabile di quadrato integrabile, si ha*
$E[|X-Z|^2] = E[|(X-E(X|\mathcal{G})|^2] + E[|E(X|\mathcal{G}) - Z|^2]$.
In particolare, si ha
$inf_{Z\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{G},P)} E[|X-Z|^2] = E[|X-E(X|\mathcal{G})|^2]$.

Dim. Si ha
$E(|X-Z|^2) = E\Big[((X-E[X|\mathcal{G}]) + (E[X|\mathcal{G}]-Z))^2\Big]$
$= E\Big[(X-E[X|\mathcal{G}])^2\Big] + E\Big[(E[X|\mathcal{G}]-Z)^2\Big] +$
$+ 2E\Big[((X-E[X|\mathcal{G}])(E[X|\mathcal{G}]-Z))\Big]$.
L'ultimo membro dell'equazione é nullo e lo dimostreremo nel paragrafo 1.6 in cui sono elencate e dimostrate le proprietà della speranza condizionale.

1.4 Dimostrazione del teorema fondamentale

Il metodo standard di dimostrazione é attraverso il teorema di Radón-Nikodym. Tuttavia il capitolo precedente suggerisce un approccio più semplice. Divideremo la dimostrazione in tre passi:

- unicità quasi certa di $E(X|\mathcal{G})$
- esistenza di $E(X|\mathcal{G})$ per $X \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{G},P)$
- esistenza di $E(X|\mathcal{G})$ per $X \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{G},P)$

1.4.1 Unicità quasi certa

Supponiamo che $X \in \mathcal{L}^1$ e che $Y, \tilde{Y}$ siano versioni della speranza condizionale di X rispetto a $\mathcal{G}$. Allora $Y, \tilde{Y} \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{G},P)$ e vale
$E[(Y-\tilde{Y})I_G] = 0 \quad \forall G \in \mathcal{G}$. Supponiamo che Y e $\tilde{Y}$ non siano q.c. uguali. Possiamo, ad esempio, suppore che $P(Y > \tilde{Y}) > 0$. Poichè vale

$$\{Y > \tilde{Y} + \frac{1}{n}\} \uparrow \{Y > \tilde{Y}\} \tag{1.1}$$

abbiamo $P(Y - \tilde{Y} > \frac{1}{n}) > 0$ per un qualche n. D'altra parte l'insieme $\{Y > \tilde{Y} + \frac{1}{n}\}$ appartiene a $\mathcal{G}$, essendo Y e $\tilde{Y}$ $\mathcal{G}$-misurabili, e quindi otteniamo

$$0 = E[(Y - \tilde{Y})I_{\{Y-\tilde{Y})>\frac{1}{n}\}}) \geq \frac{1}{n}P(Y - \tilde{Y} > \frac{1}{n}) > 0. \qquad (1.2)$$

Questo é ovviamente un assurdo, per cui vale che $Y = \tilde{Y}$ q.c.

1.4.2 Esistenza nel caso di variabili aleatorie in $\mathcal{L}^2$

Supponiamo che $X \in \mathcal{L}^2$. Sia $\mathcal{G}$ una sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$ e sia $K = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$.Per il teorema della proiezione ortogonale, esiste $Y \in K$ tale che

1. $E[(X - Y)^2] = \mathit{inf}\{E[(X - W)^2] : W \in K\}$
2. $\langle X - Y, Z\rangle = 0 \quad \forall Z \in K$

Adesso, se $G \in \mathcal{G}$, allora $Z = I_G \in K$ e la precedente condizione (2) implica che vale

$$E[YI_G] = E[XI_G] \qquad (1.3)$$

ossia Y é una versione di $E[X|\mathcal{G}]$.

1.4.3 Esistenza nel caso di variabili aleatorie in $\mathcal{L}^1$

Scomponiamo la variabile aleatoria X come $X = X^+ - X_-$. É sufficiente quindi trattare solo il caso in cui $X \in (\mathcal{L}^1)^+$. Possiamo dunque scegliere una successione di variabili aleatorie limitate X_n tali che $0 \leq X_n \uparrow X$. Dal momento che ogni elemento della successione sta in $\mathcal{L}^2$, possiamo scegliere una versione Y_n di $E(X_n|\mathcal{G})$. Rimane da mostrare che vale che $0 \leq Y_n \uparrow$ q.c. rimandiamo la verifica di questo fatto alla fine della dimostrazione. Adesso, supposto vero, poniamo $Y(\omega) = \mathit{limsup}_n Y_n(\omega)$. Abbiamo quindi che Y é $\mathcal{G}$-misurabile e $Y_n \uparrow Y$ q.c. Grazie al teorema di convergenza monotona,

otteniamo $E[YI_G] = E[XI_G] \quad \forall G \in \mathcal{G}$.
Nella dimostrazione precedente abbiamo supposto che $0 \leq Y_n \uparrow$ q.c. Questa proprietà discende dal seguente fatto generale.

Proposizione 1.4.1. *Se U é una variabile aleatoria non-negativa,allora*

$$E(U|\mathcal{G}) \geq 0 \quad q.c.$$

Dim. Sia W una versione di $E(U|\mathcal{G})$. Se $P(W < 0) > 0$, allora per qualche n l'insieme $G := \{W < -n^{-1}\} \in \mathcal{G}$ ha probabilità positiva. Ne segue che $0 \leq E[UI_G] = E[WI_G] < -n^{-1}P(G) < 0$.

1.5 Il caso di variabili aleatorie con densità congiunta

Supponiamo di avere due variabili aleatoria X e Z con funzione di densità di probabilità congiunta $f_{X,Z}(x,z)$. Allora la *funzione di densità* di Z é

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Z}(x,z)dx.$$

Definiamo la funzione di densità di probabilità di X subordinata a Z come

$$f_{X|Z}(x|z) := \begin{cases} \frac{f_{X,Z}(x.z)}{f_Z(z)} & \text{se } f_Z(z) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia h una funzione boreliana su $\mathbb{R}$ tale che

$$E[h(X)] = \int |h(x)| f_X(x)dx < \infty$$

dove f_X indica la fuzione di densità di probabilità di X, ossia

$$f_X(x) = \int f_{X,Z}(x,z)dz.$$

Poniamo inoltre

$$g(z) = \int h(x) f_{X|Z}(x|z) dx.$$

Allora $Y := g(Z)$ é una versione di $E[h(X)|\sigma(Z)]$.

Dim. Un generico elemento di $\sigma(Z)$ ha la forma $\{\omega \in Z(\omega) \in B\}$, con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Quindi dobbiamo mostrare che $L := E[h(X)I_B(Z)]$ e $R := E[g(Z)I_B(Z)]$ sono uguali. D'altra parte, ciò discende dal teorema di Fubini. Infatti

$$L = \int \int h(x) I_B(z) f_{X,Z}(x,z) dx \quad \text{e} \quad R = \int g(z) I_B(z) f_Z(z) dz.$$

1.6 Proprietà principali

Proposizione 1.6.1. *La speranza condizionale gode delle seguenti proprietà:*

(i) se Y é una qualche versione di $E(X|\mathcal{G})$ allora $E(X) = E(Y)$

(ii) se X é $\mathcal{G}$-misurabile, allora $E(X|\mathcal{G}) = X$ q.c.

(iii) (linearità): $E(a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}) = a_1E(X_1|\mathcal{G}) + a_2E(X_2|\mathcal{G})$ q.c.

(iv) (positività): se $X \geq 0 \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) \geq 0$

(v) (convergenza monotona): se $0 \leq X_n \uparrow X$ allora $E(X_n|\mathcal{G}) \uparrow E(X|\mathcal{G})$ q.c.

(vi) (teorema di Fatou): se $X_n \geq 0$, allora
$E(liminf X_n|\mathcal{G}) \leq liminf E(X_n|\mathcal{G})$

(vii) *(convergenza dominata): se* $|X_n(\omega)| \leq V(\omega) \quad \forall n, \quad E[V] < \infty$ *e* $X_n \to X$ *q.c. allora* $E(X_n|\mathcal{G}) \to E(X|\mathcal{G})$

(viii) *(disuguaglianza di Jensen): se* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é convessa e* $E[c(X)] < \infty$ *allora vale*

$$E(c(X)|\mathcal{G}) \geq c(E(X|\mathcal{G})).$$

In particolare $\|E(X|\mathcal{G})\|_p \leq \|X\|_p$ *per* $p \geq 1$

(ix) *(proprietá della torre): sia* $\mathcal{H}$ *una sotto-*σ*-algebra di* $\mathcal{G}$ *allora*

$E[E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = E(X|\mathcal{H})$ *q.c.*

(x) *se* Z *é una variabile aleatoria* $\mathcal{G}$*-misurabile e limitata allora vale*

$E(ZX|\mathcal{G}) = ZE(X|\mathcal{G})$ *q.c.*

La precedente uguaglianza vale anche se $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $Z \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{G}, P)$ *ed anche se* X *é positiva* , Z *é* $\mathcal{G}$*-misurabile e positiva,* $E[X] < \infty$ *e* $E[XZ] < \infty$

(xi) *se* $\mathcal{H}$ *é indipendente da* $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$*, allora* $E[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = E[X|\mathcal{G}]$*.* *In particolare, se* X *é indipendente da* $\mathcal{H}$*, allora* $E[X|\mathcal{H}] = E[X]$ *q.c.*

La proprietà (i) segue da $E(Y; \Omega) = E(X; \Omega)$, essendo Ω un elemento di $\mathcal{G}$. La (ii) e la (iii) seguono direttamente dalla definizione di speranza condizionale; mentre la(iv) discende da quanto detto precedentemente.
Dim.(v) Se $0 \leq X_n \uparrow X$ allora, per la (iv), se Y_n é una versione di $E(X_n|\mathcal{G})$, allora $0 \leq Y_n \uparrow$ q.c.
Poniamo $Y := limsup Y_n$. Allora Y é $\mathcal{G}$-misurabile e $Y_n \uparrow Y$ q.c. Per il

teorema di convergenza monotona,segue $E(Y_n; G) = E(X_n; G) \quad \forall G \in \mathcal{G}$.
Dim.(viii) Consideriamo una successione di punti in $\mathbb{R}^2$ $\Big((a_n; b_n)\Big)$ tale che $c(x) = sup(a_n x + b_n) \quad x \in \mathbb{R}$. Per ogni n fissato, possiamo dedurre da (iv) e dal fatto che $c(X) \geq a_n X + b_n$ che quasi certamente

$$E[c(X)|\mathcal{G}] \geq a_n E[X|\mathcal{G}] + b_n.$$

Grazie alla numerabilità, possiamo dire che la precedente relazione vale q.c. contemporaneamente per tutti gli n, e quindi abbiamo q.c.

$$E[c(X)|\mathcal{G}] \geq sup(a_n E[X|\mathcal{G}] + b_n) = c(E[X|\mathcal{G}]). \tag{1.4}$$

In particolare, prendendo $c(X) = |x|^p$ con $p \geq 1$, otteniamo

$$E(|X|^p|\mathcal{G}) = |E(X|\mathcal{G})|^p \quad \text{q.c.}$$

Prendendo la speranza in entrambi i membri e usando (i) possiamo concludere.
Dim.(x) La linearità mostra che possiamo assumere $X \geq 0$. Fissata una versione Y di $E[X|\mathcal{G}]$ e fissato $G \in \mathcal{G}$, dobbiamo provare che, se Z é $\mathcal{G}$-misurabile e possiede le condizioni di integrabilitá appropriate, allora

$$E(ZX; G) = E(ZY; G) \tag{1.5}$$

Se Z é la funzione indicatrice di un insieme $\mathcal{G}$-misurabile, allora (1.5) é vera per definizione di speranza condizionale. La linearità mostra poi che (1.5) vale per gli $Z \in SF^+(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Infine la proprietá di convergenza monotona mostra che (1.5) é vera per $Z \in (m\mathcal{G})^+$. Inoltre $E(|ZX|) < \infty$, perchè Z é limitata e $X \in \mathcal{L}^1$, oppure, grazie alla disuguaglianza di Holder, se $X \in \mathcal{L}^p$ e $Z \in \mathcal{L}^q$, $p > 1$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Dim.(xi) Possiamo assumere che $X \geq 0$ ed integrabile. Per $G \in \mathcal{G}$ e $H \in \mathcal{H}$, XI_G e H sono indipendenti e quindi vale

$$E(X; G \cap H) = E[(XI_G)I_H] = E(XI_G)P(H),$$

Se $Y = E(X|G)$,essendo Y $\mathcal{G}$-misurabile, YI_G é indipendente da $\mathcal{H}$ e quindi

$$E[YI_GI_H] = E(YI_G)P(H)$$

da cui segue $E(X; G \cap H) = E(Y; G \cap H)$. Le due misure misure $F \mapsto E(X; F) \quad F \mapsto E(Y; F)$ su $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ hanno la stessa massa totale e coincidono sugli insiemi della forma $G \cap H$ con $G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$ e quindi sono identiche.

1.7 Alcuni esempi

Sotto ipotesi di independenza

Supponiamo che X_1, X_2 siano due variabili aleatorie indipendenti con legge λ_1, λ_2 rispettivamente. Se h é boreliana e limitata,poniamo

$$\gamma^h(x_1) = E[h(x_1, X_2)] = \int h(x_1, x_2)\Lambda_2(dx_2)$$

Allora $\gamma^h(X_1)$ é una versione della speranza condizionale $E[h(X_1, X_2)|X_1]$. Infatti per il teorema di Fubini, abbiamo

$$\int\int h(x_1, x_2)I_B(x_1)(\Lambda_1 \times \Lambda_2)(dx_1dx_2) = \int \gamma^h(x_1)I_B(x_1)\Lambda_1)(dx_1)$$

Uso di simmmetria

Supponiamo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ siamo variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti ed identicamente distribuite) tali che $E(|X|) < \infty$. Sia $S_n = X_1 + X_2 + \ldots +$

X_n e $\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots) = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$
Osserviamo che $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, ...)$ é indipendente da $\sigma(X_1, S_n)$. Ne segue che $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1|\mathcal{G}_n) = E(X_1|S_n)$. Se Λ denota la legge delle X_i, allora

$$E[X_1; S_n \in B] = \int ... \int_{\{S_n \in B\}} x_1 \Lambda(dx_1)\Lambda(dx_2)\ldots\Lambda(dx_n) =$$
$$= E[X_2; S_n \in B] = \ldots = E[X_n; S_n \in B]$$

da cui $E[X_i|S_n] = n^{-1}E[S_n|S_n] = n^{-1}S_n$.

Capitolo 2

Martingale

2.1 Definizioni preliminari

Come nel capitolo precedente,cominciamo con il dare alcune definizioni.

Definizione 2.1. Si chiama *spazio filtrato* la quaterna $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ dove $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é uno spazio di probabilità e $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ é una **filtrazione**, ovvero una famiglia crescente di sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$. Poniamo $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$.

La filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}$ é detta *filtrazione naturale* del processo stocastico W=(W$_n$: $n \in \mathbb{Z}^+$) se $\mathcal{F}_n = \sigma(W_0, W_1, ..., W_n)$.

Definizione 2.2. Un processo $X := (X_n : n \geq 0)$ é detto *adattato ad una filtrazione* $\{\mathcal{F}_n\}$, se $\forall n$,X_n é $\mathcal{F}_n$-misurabile.

Intuitivamente, possiamo dire che X_n é adattato se il valore di $X_n(\omega)$ é noto al tempo n.

2.2 Definizione di martingala

Definizione 2.3. Un processo X si chiama **martingala** relativa a $(\{\mathcal{F}_n\}, P)$ se :

(i) X é un processo stocastico adattato a $\{\mathcal{F}_n\}$

(ii) $E(|X_n|) < \infty \quad \forall n$

(iii) $E[X|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$ q.c. per $(n \geq 1)$

Un processo X si chiama **supermartingala** relativa a $(\{\mathcal{F}_n\}, P)$ se valgono (i) e (ii) e vale

(iii) $E[X|\mathcal{F}_{n-1}] \leq X_{n-1}$ q.c. per $(n \geq 1)$

Un processo si chiama **submartingala** relativa a $(\{\mathcal{F}_n\}, P)$ se valgono (i) e (ii) e vale

(iii) $E[X|\mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1}$ q.c. per $(n \geq 1)$

Notiamo che X é una supermartingala se e solo se $-X$ é una submartingala. In particolare X é una martingala se e solo se X é al tempo stesso sia supermartingala che submartingala. Inoltre notiamo che un processo X per il quale $X_0 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ é una martingala (rispettivamente supermartigala e submartingala) se e solo se il processo $X - X_0 = (X_n - X_0 : n \in \mathbf{Z}^+)$ lo é. Se per esempio, X é una supermartingala, allora la *proprietà della torre* ((ix) capitolo precedente) implica che, per $m < n$, abbiamo
$\mathrm{E}[\mathrm{X}_n|\mathcal{F}_m] = E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}|\mathcal{F}_m] \leq E[X_n|\mathcal{F}_m] \leq \cdots \leq X_m$, q.c.

2.3 Alcuni esempi

La teoria delle martingala (supermartingala e submartingala) é importante perchè trova numerose applicazioni. Illustriamo alcuni esempi facili.

2.3.1 Variabili aleatorie indipendenti con media zero

Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie indipendenti integrabile con $\quad E(X_k) = 0 \quad \forall k$.

Poniamo $\mathcal{S}_0 := 0, \quad \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{S}_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad$ e $\quad \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Allora per $n \geq 1$ abbiamo (q.c.)

$$E(\mathcal{S}_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(\mathcal{S}_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) + E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{S}_{n-1} + E(X_n) = \mathcal{S}_{n-1}.$$

La prima uguaglianza segue dalla proprietà di linearità (proprietá (iii)). Poichè $\mathcal{S}_{n-1}$ é $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile, abbiamo grazie alla proprietà (ii), che $E(\mathcal{S}_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{S}_{n-1}$ (q.c.), ed essendo X_n indipendente da $\mathcal{F}_{n-1}$ abbiamo $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n)$ q.c. (proprietà (xi)).

2.3.2 Prodotto di variabili aleatorie indipendenti non negative con media 1

Sia $X_1, X_2, ...$ una successione di variabili aleatorie indipendenti non negative con
$E(X_k) = 1 \quad \forall k$. Poniamo $\mathcal{M}_0 := 1, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{M}_n := X_1X_2...X_n$ e $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Allora, per $n \geq 1$, abbiamo(q.c.)

$$E(\mathcal{M}_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(\mathcal{M}_{n-1}X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{M}_{n-1}E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{M}_{n-1}E(X_n) = \mathcal{M}_{n-1}$$

Ancora una volta abbiamo utilizzato le proprietà della speranza condizionata: in particolare, la proprietà (x) per poter dire che $E(\mathcal{M}_{n-1}X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{M}_{n-1}E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})$ ed, essendo X_n indipendente da $\mathcal{F}_{n-1}$, abbiamo $\mathcal{M}_{n-1}E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{M}_{n-1}E(X_n)$ (q.c.) per la proprietà (xi).

2.3.3 Schema d'urna

Un'urna inizialmente contiene una pallina bianca ed una rossa.Si pesca una pallina a caso e si rimette nell'urna insieme ad una pallina dello stesso colore.Si ripete l'esperimento moltissime volte, diciamo all'infinito... Sia X_n la frazione di palline rosse ed Y_n il numero di palline rosse presenti nell'urna dopo l'n-esimo esperimento. Chiaramente $Y_0 = 1$ e $Y_n = (n + 2)X_n$

$$P\{Y_{n+1} = j | Y_n = k\} = \begin{cases} \frac{k}{n+2} & \text{se } j = k+1 \\ \left(1 - \frac{k}{n+2}\right) & \text{se } j = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La speranza di Y_{n+1} secondo la probabilitá condizionata $P\{\cdot | Y_n = k\}$ é pertanto

$$(k+1)P\{Y_{n+1} = k+1 | Y_n = k\} + kP\{Y_{n+1} = k | Y_n = k\} =$$

$$\frac{k(k+1)}{n+2} + \frac{k(n+2-k)}{n+2} = \frac{k(n+3)}{n+2}$$

e perciò

$$E[Y_{n+1} | \sigma(Y_n)] = \frac{n+3}{n+2} Y_n.$$

Ne segue che la successione $(X_n)_{n \geq 0}$ definita come

$$X_n = \frac{Y_n}{n+2}$$

é una martingala rispetto alla filtrazione naturale. In particolare,

$$E[X_n] = E[E[X_n | \sigma(X_0)]] = E[X_0] = \frac{1}{2}.$$

2.3.4 Gioco equo e non-equo

Supponiamo ora che $X_n - X_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$ sia la *vincita netta* di un giocatore A conseguente alla partita n in una successione di partite.
Allora si possono distinguere due casi.

(a) *Il caso martingala* in cui vale $\mathrm{E}[\mathrm{X}_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$. In tal caso il gioco si dice equo.

(b) *Il caso supemartingala* in cui vale $\mathrm{E}[\mathrm{X}_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq 0$. In tal caso il gioco si dice non-equo.

2.4 Processi prevedibili e strategie di gioco

Definizione 2.4. Chiamiamo *prevedebile* rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$ un processo $C = (C_n : n \in \mathbb{N})$ tale che C_n é $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile ($\forall n \geq 1$).

Dobbiamo pensare C_n come la puntata sull' n-esima partita, il cui valore deve essere deciso in base alla storia delle partite precedenti (compresa quella al tempo $n-1$). Questo é il significato principale della prevedibilitá di C. La vincita conseguente all'n-esima partita é $C_n(X_n - X_{n-1})$ mentre la vincita totale al tempo n é

$$Y_n = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k(X_k - X_{k-1}) =: (C \bullet X)_n.$$

Poniamo $(C \bullet X)_0 = 0$ e $\mathrm{Y}_n - Y_{n-1} = C_n(X_n - X_{n-1})$.

Teorema 2.4.1. *(i) Sia C un processo prevedibile limitato non-negativo tale che per qualche $K \in [0, \infty)$, $|C_n(\omega)| \leq K$ per ogni n e per ogni ω.Sia X una supermartingala(rispettivamente martingala). Allora $C \bullet X$ é una supermatingala(rispettivamente martingala) nulla al tempo* 0.

(ii) Se C é un processo prevedibile limitato e X é una martingala, allora $(C \bullet X)$é una martingala nulla al tempo 0.

(iii) In (i) e anche in (ii), la condizione di limitatezza di C può essere sostituita dalla condizione che $C_n \in \mathcal{L}^2$, $\forall n$, a patto che anche $X_n \in \mathcal{L}^2 \quad \forall n$.

Dim.(i) Scriviamo Y al posto di $(C \bullet X)$. Poiché C_n é limitata non-negativa e $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile , per la proprietà (x) della speranza condizionata posso scrivere

$$E[Y_n - Y_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = C_n E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq 0.$$

Le dimostrazioni di (ii) e di (iii) sono analoghe.

2.5 Tempi d'arresto

Definizione 2.5. Data un'applicazione $T : \Omega \longrightarrow \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ é chiamata *tempo d'arresto* rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}$ se,

(a) $\{T \leq n\} = \{\omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \qquad \forall n \leq \infty$

equivalentemente

(b) $\{T = n\} = \{\omega : T(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n, \qquad \forall n \leq \infty$

Notiamo che T può essere anche ∞.

Se T ha la proprietà (a), allora

$$\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\} \quad \in \mathcal{F}_n.$$

Se invece T ha la proprietà (b), allora, per $k \leq n$, vale $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$ e $\{T \leq n\} = \bigcup_{0 \leq k \leq n} \{T = k\} \in \mathcal{F}_n$.

Esempio Supponiamo che (A_n) sia un processo stocastico adattato e che $B \in \mathcal{B}$. Sia $T = inf\{n \geq 0 : A_n \in B\}$ = istante del primo ingresso di A in B. Per convenzione, $inf(\emptyset) = \infty$, cosí che $T = \infty$ se A non entra mai in B. Ovviamente, abbiamo $\{T \leq n\} = \bigcup_{k \leq n} \{A_k \in B\} \in \mathcal{F}_n$ e quindi T é un tempo di arresto.

2.6 Supermartingale arrestate

Sia X una supermartingala e sia T un tempo d'arresto.Consideriamo il processo $C^{(T)}$, $n \in \mathbb{N}$, definito come $C_n^{(T)} = I_{\{n \leq T\}}$, ossia

$$C_n^{(T)}(\omega) := \begin{cases} 1 \text{ se } n \leq T(\omega) \\ 0 \quad \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $(\mathrm{C}^{(T)} \bullet X)_n = X_{T \wedge n} - X_0$.
Se X^T denota il processo X arrestato al tempo T, ossia $\mathrm{X}_n^T(\omega) := X_{T(\omega) \wedge n}(\omega)$, allora $\mathrm{C}^{(T)} \bullet X = X^T - X_0$.
Il processo C^T é chiaramente limitato (da 1) e non-negativo, inoltre é anche prevedibile in quanto sappiamo che può essere solo 0 o 1 e per $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\{C^{(T)} = 0\} = \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Applicando il risultato precedente, otteniamo che $C^{(T)}$ é una supermartingala. Più precisamente vale il seguente teorema.

Teorema 2.6.1. *Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) Se X é una supermartingala e T é un tempo di arresto, allora il ***processo arrestato*** *$X^T = (X_{T \wedge n} : n \in \mathbb{Z}^+)$ é una supermartingala.In particolare E($X_{T \wedge n}$) $\leq E(X_0)$, $\quad \forall n$*

(ii) Se X é una martingala e T é un tempo di arresto, allora X^T é una martingala.In particolare E($X_{T \wedge n}$) $= E(X_0)$, $\quad \forall n$

Un altro importante risultato é il seguente *teorema di Doob*.

Teorema 2.6.2 (Teorema d'arresto di Doob)**.** *Valgono le seguenti affermazioni:*

(a) Sia T un tempo di arresto. Sia X una supermartingala. Allora X_T é integrabile e $E(X_T) \leq E(X_0)$ in ciascuna delle seguenti situazioni :

(i) T é limitato (per qualche $N \in \mathbb{N}, T(\omega) \leq N, \quad \forall \omega$);

(ii) X é limitata (per qualche $K \in \mathbb{R}^+, \quad |X_n(\omega)| \leq K$ per ogni n ed ω) e T é finito (q.c);

(iii) $E(T) < \infty$ e per qualche $K \in \mathbb{R}^+$ si ha $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq K, \quad \forall (n, \omega)$

(b) Vale una delle condizioni (i)-(iii) ed X é una martingala, allora $E(X_T) = E(X_0)$.

Dim.

(a) Sappiamo che $X_{T\wedge n}$ é integrabile, e $\mathrm{E}(\mathrm{X}_{T\wedge n} - X_0) \leq 0$.
Per (i) possiamo prendere $n = N$. Per (ii) possiamo mandare $n \longrightarrow \infty$. Per la (iii), osserviamo che

$$|X_{T\wedge n} - X_0| = |\sum_{k=1}^{T\wedge n} (X_k - X_{k-1})| \leq KT$$

ed $E(KT) < \infty$. Ció ci permette di mandare $n \longrightarrow \infty$.
(b) Basta applicare (a) sia ad X sia a $-X$.

Corollario 2.6.3. *Supponiamo che M sia una martingala, con incrementi $M_n - M_{n-1}$ limitati da una costante K_1. Sia C un processo prevedibile limitato da una costante K_2 e sia T un tempo d'arresto tale che $E(T) < \infty$. Allora*

$$E(C \bullet M)_T = 0.$$

Corollario 2.6.4. *Se X é una supermartingala non negativa e T é un tempo di arresto q.c. finito, allora $E[X_T] \leq E[X_0]$.*

2.7 Upcrossings

Definizione 2.6. Il numero $U_N[a, b](\omega)$ di *upcrossing dell' intervallo* $[a, b]$ fatti da $n \mapsto X_n(\omega)$,fino all' istante N, é definito come il più grande $k \in \mathbb{Z}^+$

tale che
$0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \ldots \leq s_k \leq t_k \leq N$ con
$\mathrm{X}_{s_i}(\omega) < a, \quad X_{t_i}(\omega) < b \qquad (1 \leq i \leq k)$

Poniamo $Y = C \bullet X$. Allora vale

$$Y_N \geq (b-a)U_N[a,b](\omega) - [X_N(\omega) - a]^-,$$

da cui discende il seguente lemma.

Lemma 2.7.1. *Sia X una supermartingala. Allora vale*

$$(b-a)EU_N[a,b] \leq E[(X_N - a)^-]$$

Dim. Il processo C é prevedibile, limitato e non-negativo, e Y=C$\bullet X$. Quindi Y é una supermartingala e $E(Y_N) \leq 0$. Dalla precedente disuguaglianza, segue la tesi.

Corollario 2.7.2. *Sia X una supermartingala limitata in $\mathcal{L}^1$ ossia tale che $sup_n E(|X_n|) < \infty$. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Allora, se $U_\infty[a,b] :=\uparrow lim_N U_N[a,b]$, abbiamo*

$$(b-a)EU_\infty[a,b] \leq |a| + sup_n E(|X_n|) < \infty$$

così che $P(U_\infty[a,b] = \infty) = 0$.

Dim. Dal lemma precedente ricaviamo che per $N \in \mathbb{N}$, vale
(b-a)E$\mathrm{U}_N[a,b] \leq |a| + E(|X_N|) \leq |a| + sup_n E(|X_n|)$.
La tesi segue usando la proprietà di convergenza monotona della speranza condizionale.

2.8 Teorema di convergenza di Doob

Teorema 2.8.1. *Sia X una supermartingala limitata in $\mathcal{L}^1$, ovvero $sup_n E(|X_n|) < \infty$. Allora, $(X_n)_n$ converge quasi certamente verso una variabile aleatoria X_∞, $\mathcal{F}_\infty$-misurabile ed integrabile.*

Dim. Poniamo
$\Lambda := \{\omega : X_n(\omega)$ non converge ad un limite in $[-\infty, \infty]\} =$
$= \{\omega : liminf X_n(\omega) < limsup X_n(\omega)\} =$
$= \bigcup_{\{a,b \in \mathbb{Q}: a<b\}} \{liminf X_n(\omega) < a < b < limsup X_n(\omega)\} =$
$=: \bigcup \Lambda_{a,b}$.
Poichè $\Lambda_{a,b} \subseteq \{\omega : U_\infty[a,b](\omega) = \infty\}$, per il corollario precedente, otteniamo $P(\Lambda_{a,b}) = 0$. Essendo Λ unione numerabile degli insiemi $\Lambda_{a,b}$, ricaviamo che $P(\Lambda) = 0$. Ne segue che $X_\infty := lim X_n$ esiste q.c. in $[-\infty, \infty]$. Applicando il *lemma di Fatou*, otteniamo

$$E(|X_\infty|) = E(liminf|X_n|) \leq liminf E(|X_n|) \leq sup E(|X_n|) < \infty$$

e quindi $P(X_\infty$ é finita $) = 1$.

Come vedremo nel caso dei processi di diramazione, non é detto che $X_n \longrightarrow X_\infty$ in $\mathcal{L}^1$.

Corollario 2.8.2. *Se X é una supermartingala non-negativa, allora $(X_n)_n$ converge quasi certamente verso una variabile aleatoria X_∞, $\mathcal{F}_\infty$-misurabile ed integrabile.*

Dim. X é ovviamente limitata in $\mathcal{L}^1$ in quanto $\mathrm{E}[|X_n|] = E[X_n] \leq E[X_0]$.

2.9 Martingale in $\mathcal{L}^2$

Sia $M = (M_n : n \geq 0)$ una martingala in $\mathcal{L}^2$, ossia tale che $E(M_n^2) < \infty$, $\forall n$. Allora per $s, t, u, v \in \mathbb{Z}^+$, con $s \leq t \leq u \leq v$, abbiamo $\mathrm{E}(\mathrm{M}_v|\mathcal{F}_u) = M_u$ (q.c.), cioé $\mathrm{M}_v - M_u$ é ortogonale a $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_u)$. In particolare, $\langle M_t - M_s, M_v - M_u \rangle = 0$. Vale quindi la formula

$$E(M_n^2) = E(M_0^2) + \sum_{k=1}^{n} E[(M_k - M_{k-1})^2]$$

Teorema 2.9.1. *Sia M una martingale tale che $M_n \in \mathcal{L}^2 \quad \forall n$. Allora M é limitata in $\mathcal{L}^2$ se e solo se*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[(M_k - M_{k-1})] < \infty.$$

Se ciò accade, allora (M_n) converge verso M_∞ quasi certamente e in $\mathcal{L}^2$.
Dim. La prima affermazione é ovvia.
Supponiamo ora che valga la condizione $\sum E[(M_k - M_{k-1})] < \infty$.
Allora M é limitata in $\mathcal{L}^2$ e quindi anche in $\mathcal{L}^1$. Per il teorema di convergenza di Doob, esiste quasi certamente $M_\infty := limM_n$. Applicando la formula di Pitagora, otteniamo
$E[(M_{n+r} - M_n)^2] = \sum_{k=n+1}^{n+r} E[(M_k - M_{k-1})^2]$.

Mandando $r \longrightarrow \infty$, per il lemma di Fatou, otteniamo

$$E[(M_\infty - M_n)^2] \leq \sum_{k \geq n+1} E[(M_k - M_{k-1})^2].$$

Né segue che $lim_n E[(M_\infty - M_n)^2] = 0$.

Capitolo 3

Cenni ai processi di diramazione

Nel presente capitolo introduciamo la nozione di processo di diramazione.

3.1 Funzione generatrice

Sia X una variabile aleatoria a valori interi che rappresenta il numero di figli di una specie animale. Assumiamo che $P(X = 0) > 0$.

Definizione 3.1. Si chiama *funzione generatrice* f *di* X la funzione f:[0,1]$\longrightarrow [0, 1]$, definita come $f(\theta) := E(\theta^X) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^+} \theta^k P(X = k)$.

Segue che $f'(\theta) := E(X\theta^{X-1}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} k\theta^{k-1} P(X = k)$ e $\mu := E(X) = f'(1) = \sum kP(X = k) \leq \infty$.

3.2 Dimensione della n-esima generazione

Sia $\{ \mathrm{X}_r^{(m)}, \quad r, m \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di variabili aleatorie IID,ossia indipendenti ed identicamente distribuite, con funzione generatrice f. Supponiamo che, per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ ed $r \in \mathbb{N}$ la variabile $X_r^{(n+1)}$ rappresenti il numero di figli che appartengono alla generazione $(n+1)$ dell' r-esimo individuo della n-esima generazione. La dimensione della $(n+1)$-esima generazione é data quindi da

$$Z_{n+1} = X_1^{(n+1)} + \ldots + X_{Z_n}^{(n+1)} \tag{3.1}$$

Assumiamo $Z_0 = 1$. Calcoliamo la *funzione generatrice* di Z_n:

$$f_n(\theta) := E(\theta^{Z_n}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^+} \theta^k P(Z_n = k).$$

Per $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\theta \in [0, 1]$ vale

$$f_{n+1}(\theta) = f_n(f(\theta)) \quad \text{e quindi} \quad f_n = f \circ f \circ \ldots \circ f.$$

Per verificare la precedente relazione, usiamo la proprietá della torre della speranza condizionale:
se $U = \theta^{Z_{n+1}}$ e $V = Z_n$, allora vale

$$f_{n+1}(\theta) = E(\theta^{Z_{n+1}}) = EE(\theta^{Z_{n+1}}|Z_n) = E(\theta^{X_1^{(n+1)}+\ldots+X_{Z_n}^{(n+1)}}|Z_n).$$

D'altra parte Z_n é data dalle variabili aleatorie $X_s^{(r)}$, $r \le n$, e quindi é indipendente dalle variabili aleatorie $X_k^{(n+1)}$.
Ne segue che
$E[\theta^{X_1^{(n+1)}+\ldots+X_{Z_n}^{(n+1)}}|Z_n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}^+} E[\theta^{X_1^{(n+1)}+\ldots+X_k^{(n+1)}}]P(Z_n = k) =$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}^+} f(\theta)^k P(Z_n = k) = E[f(\theta)^{Z_n}] = f_n(f(\theta)) = f_n \circ f(\theta).$

3.3 Probabilitá di estinzione

Sia $\pi_n := P(Z_n = 0)$. Allora $\pi_n = f_n(0)$ e quindi $\pi_{n+1} = f(\pi_n)$. .
La probabilità di estinzione é

$$\pi := P(Z_m = 0 \quad \text{per qualche} \quad m) =\uparrow lim_n \pi_n$$

Essendo f una funzione continua, allora $\pi = f(\pi)$.
Inoltre la funzione f é analitica in $(0,1)$, convessa, non-decrescente e tale che

$$f(1) = 1, \quad f(0) = P(X = 0) > 0$$

e la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto 1 é $\mu = E(X)$.
Segue quindi il teorema

Teorema 3.3.1. *Se $E(X) > 1$, allora la probabilità di estinzione π é l'unica soluzione dell'equazione $\pi = f(\pi)$ che appartiene a (0,1).*
Se $E(X) \leq 1$, allora $\pi = 1$.

3.4 Una martingala

Ricordiamo che $Z_{n+1} = X_1^{(n+1)} + \ldots + X_{Z_n}^{(n+1)}$ dove le variabili aleatorie $X_k^{(n+1)}$ sono indipendenti dai valori di $Z_1, \ldots, Z_n$. Allora é chiaro che

$$P(Z_{n+1} = j | Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n) = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i_n),$$

da cui segue
$E(Z_{n+1}|Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n) = \sum_j jP(Z_{n+1} = j|Z_n = i_n) =$
$E(Z_{n+1}|Z_n = i_n) = E[X_1^{(n+1)} + \ldots + X_{i_n}^{(n+1)}|Z_n = i_n] = \mu i_n.$

ciò significa

$$E(Z_{n+1}|Z_0, \ldots, Z_n) = E(Z_{n+1}|Z_n) = \mu Z_n.$$

Poniamo $M_n = \dfrac{Z_n}{\mu^n}, \quad n \geq 0.$ Allora $E(M_{n+1}|Z_0, Z_1, \ldots, Z_n) = M_n,$
ossia M é una martingala rispetto alla filtrazione naturale del processo Z. Poiché M é non-negativa, il **teorema di convergenza** visto, implica che,quasi certamente

$$M_\infty := lim_n M_n \quad \text{esiste.}$$

3.5 Convergenza delle medie

Sappiamo che se $\mu \leq 1$, il processo quasi certamente si estinguerà e quindi sarà $M_n = 0$ definitivamente. Vale il seguente teorema.

Teorema 3.5.1. *Se $\mu \leq 1$, allora $M_\infty = 0$ (q.c.) e*

$$0 = E(M_\infty) \neq limE(M_n) = 1.$$

Il caso $\mu > 1$ é piú complicato e lo tralasciamo.

3.6 Osservazione sulla distribuzione di M_∞

Poichè $M_n \longrightarrow M_\infty$ (q.c.), é ovvio che per $\lambda > 0$,

$$e^{-(\lambda M_n)} \longrightarrow e^{-(\lambda M_\infty)} \quad \text{(q.c.)}$$

Poichè sappiamo che $M_n \geq 0$, la successione $e^{-(\lambda M_n)}$ é limitata dalla costante 1. Il teorema di covergenza dominata implica

$$Ee^{-(\lambda M_\infty)} = limEe^{-(\lambda M_n)}.$$

Poichè

$$M_n = \frac{Z_n}{\mu^n} \quad \text{e} \quad E(\theta^{Z_n}) = f_n(\theta),$$

abbiamo

$$Ee^{-(\lambda M_n)} = f_n(e^{-\frac{\lambda}{\mu^n}}) \tag{3.2}$$

Ricordiamo che, se Y é una variabile aleatoria non-negativa, allora la distribuzione di Y é completamente determinata dalla funzione $\lambda \mapsto Ee^{-\lambda Y}$ su $(0, \infty)$. In teoria, possiamo quindi trovare la distribuzione di M_∞. Il problema però é riuscire a determinare

$$L(\lambda) = Ee^{-\lambda M_\infty}.$$

Grazie alla (3.2) e per il fatto che $f_{n+1} = f_n(f(\theta))$, usando la continuità di L, che discende dal teorema di convergenza dominata, otteniamo

$$L(\lambda\mu) = f(L(\lambda)).$$

3.7 Un esempio concreto

Sia X una variabile aleatoria, che rappresenta il numero di figli, con distribuzione geometrica traslata:

$$P(X = k) = pq^k \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad 0 < p < 1, \quad q = (1 - p).$$

Allora, abbiamo

$$f(\theta) = \frac{p}{1 - q\theta}, \quad \mu = \frac{q}{p} \quad \text{e}$$

$$\pi = \begin{cases} \frac{p}{q} & \text{se} \quad q > p \\ 1 & \text{se} \quad q \leq p. \end{cases}$$

Per calcolare $f \circ f \circ \cdots \circ f$, usiamo il seguente risultato. Se

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

é una matrice 2x2 invertibile, possiamo definire la seguente trasformazione

$$G(\theta) = \frac{g_{11}\theta + g_{12}}{g_{21}\theta + g_{22}}$$

Se H é un' altra siffatta matrice,allora vale G(H(θ)) = $(GH)(\theta)$.
Supponiamo che $p \neq q$. Allora la n-esima potenza della matrice corrispondente ad f é

$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ -q & 1 \end{pmatrix}^n = (q - p)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

così che

$$f_{n+1}(\theta) = \frac{p\mu^n(1 - \theta) + q\theta - p}{q\mu^n(1 - \theta) + q\theta - p}. \tag{3.3}$$

Se $\mu = \frac{q}{p} \leq 1$, allora $lim_n f_n(\theta) = 1$, che corrisponde al fatto che il processo si estinguerà.
Supponiamo ora che $\mu > 1$, allora abbiamo per $\lambda > 0$,

$$L(\lambda) = Ee^{-\lambda M_\infty} = lim_n f_n(e^{-\frac{\lambda}{\mu^n}})$$
$$= \frac{p\lambda + q - p}{q\lambda + q - p} = \pi e^{-\lambda 0} + \int_0^\infty (1-\pi)^2 e^{-\lambda x} e^{-(1-\pi)x} dx,$$

da cui deduciamo che $P(M_\infty = 0) = \pi$

$$P(M_\infty > x) = (1-\pi)e^{-(1-\pi)x} \quad \text{per} \quad (x > 0).$$

Supponiamo che $\mu < 1$. In questo caso, abbiamo

$$E(\theta^{Z_n}|Z_n \neq 0) = \frac{f_n(\theta) - f_n(0)}{1 - f_n(0)} = \frac{\alpha_n \theta}{1 - \beta_n \theta},$$

dove

$$\alpha_n = \frac{p-q}{p - q\mu^n}, \qquad \beta_n = \frac{q - q\mu^n}{p - q\mu_n}.$$

Osserviamo che $0 < \alpha_n < 1$ e $\alpha_n + \beta_n = 1$. Per $n \longrightarrow \infty$,otteniamo

$$\alpha_n \to 1 - \mu, \qquad \beta_n \to \mu,$$

da cui ricaviamo

$$lim_{n\to\infty} P(Z_n = k|Z_n \neq 0) = (1-\mu)\mu^{k-1}, \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{3.4}$$

Supponiamo che $\mu = 1$. Procedendo per induzione, otteniamo

$$f_n(\theta) = \frac{n - (n-1)\theta}{(n+1) - n\theta}.$$

Inoltre, otteniamo che, per $n \to \infty$,

$$E(e^{\frac{-\lambda Z_n}{n}}|Z_n \neq 0) \to \frac{1}{(1+\lambda)},$$

da cui segue

$$P(\frac{Z_n}{n} > x|Z_n \neq 0) \to e^{-x}, \quad x > 0.$$

Bibliografia

[1] Francesca Biagini e Massimo Campanino-*Elementi di probabilitá e statistica*- Springer-Verlag Italia, Milano 2006

[2] Franco Fagnola-*Processi stocastici*-Politecnico di Milano, Milano 2009.

[3] David Williams-*Probability with martinagales*-Cambridge University,Cambridge 1991.

Ringraziamenti

Finalmente anche per me sono arrivati i momenti dei ringraziamenti. Innanzitutto ringrazio i miei genitori e la mia famiglia, che mi hanno permesso di arrivare fino qui, aiutandomi a superare anche i momenti piú difficili senza mai avermi messo fretta e avermi fatto mancare qualcosa. Ringrazio anche la paziente e disponibile prof.ssa Crimaldi, che mi ha molto aiutato a prepare la tesi. Infine, ma non per importanza, vorrei ringraziare tutti gli amici con i quali ho passato uno dei periodi più belli: i coinquilini di via delle lame, viale Aldini, agli amici della trave e anche a tutti gli altri amici conosciuti qui a Bologna.