

**ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA**

---

**SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA**

*Dipartimento di Ingegneria Industriale*

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Energetica

**TESI DI LAUREA**

in

Tecniche di Modellistica e Simulazione per l'Energetica

**Modellazione numerica dell'operatore laplaciano frazionario  
con applicazioni ai moti quasi-geostrofici superficiali.**

Candidato:

DARIO CAPACCI

Relatore:

Prof. Ing. SANDRO MANSERVISI

Correlatori:

Prof. Ing. RUBEN SCARDOVELLI

Dott. Ing. ANDREA CHIERICI

Dott. Ing. LEONARDO CHIRCO

Dott. Ing. VALENTINA GIOVACCHINI

Dott. Ing. GIACOMO BARBI

---

**Anno Accademico 2019/2020**

**III Sessione**



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Elementi Finiti</b>	<b>9</b>
1.1 Fondamenti di Analisi Funzionale . . . . .	10
1.1.1 Lo spazio $C^k(\Omega)$ . . . . .	12
1.1.2 Gli spazi $L^p(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ . . . . .	14
1.1.3 Gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e $H^k(\Omega)$ . . . . .	16
1.2 Formulazione debole e variazionale . . . . .	18
1.3 Il Metodo agli Elementi Finiti (FEM) . . . . .	20
1.3.1 Sottospazi di spazi di Hilbert di funzioni in una variabile . . . . .	21
1.3.2 Sottospazi di spazi di Hilbert di funzioni di più variabili . . . . .	27
1.4 Integrazione con il metodo di quadratura di Gauss . . . . .	39
<b>2 Laplaciano Frazionario</b>	<b>43</b>
2.1 Laplaciano Frazionario di Riesz . . . . .	46
2.1.1 Spazi di Sobolev Frazionari $W^{s,p}(\Omega)$ . . . . .	46
2.1.2 Laplaciano frazionario come operatore non locale . . . . .	47
2.2 Equazione di diffusione stazionaria non locale . . . . .	48
2.2.1 Forma debole del problema di diffusione non locale . . . . .	49
2.2.2 Approssimazione FEM . . . . .	50
2.2.3 Implementazione numerica sul software FEMuS . . . . .	52
<b>3 Moti quasi-geostrofici superficiali</b>	<b>57</b>
3.1 Equazioni di conservazione . . . . .	57
3.1.1 Conservazione della massa . . . . .	58

3.1.2	Conservazione della quantità di moto . . . . .	59
3.1.3	Equazioni di Navier-Stokes . . . . .	61
3.2	Equazioni quasi-geotrofiche superficiali . . . . .	63
3.2.1	Energia cinetica ed elicità . . . . .	70
3.3	Discretizzazione e sistema numerico . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Simulazioni numeriche</b>	<b>75</b>
4.1	Diffusione stazionaria non locale . . . . .	76
4.1.1	Sorgente unitaria . . . . .	77
4.1.2	Sorgente sinusoidale . . . . .	79
4.1.3	Sorgente gaussiana . . . . .	80
4.2	Equazione del calore non locale . . . . .	82
4.2.1	Vortice singolo . . . . .	82
4.2.2	Vortice doppio . . . . .	85
4.3	Equazioni quasi-geotrofiche superficiali . . . . .	87
4.3.1	Gaussiana . . . . .	87
4.3.2	Doppia gaussiana . . . . .	90
4.3.3	Vortice multiplo . . . . .	92
4.3.4	Ottimizzazione numerica . . . . .	95
	<b>Conclusioni</b>	<b>101</b>
	<b>Elenco delle figure</b>	<b>103</b>
	<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>109</b>

# Introduzione

In questa tesi verranno studiate le tecniche numeriche che permettono lo studio e l'applicazione degli operatori non locali ai moti quasi-geostrofici superficiali (SQG), che sono una classe di moti atmosferici che avvengono ad alte latitudini dove l'effetto della forza di Coriolis non è trascurabile. Per movimenti geostrofici dei flussi atmosferici si intendono i movimenti del vento che risulterebbero da un esatto equilibrio tra la forza di Coriolis e le forze del gradiente di pressione orizzontale. Per movimento quasi-geostrofico intendiamo invece quel modello che considera i flussi atmosferici in cui la forza di Coriolis e le forze del gradiente di pressione sono quasi in equilibrio sotto l'effetto della forza di inerzia. Più precisamente, i flussi atmosferici e oceanografici avvengono su scale di lunghezza orizzontale che sono molto grandi rispetto alla loro scala di lunghezza verticale, e quindi possono essere descritte utilizzando le cosiddette ben note *shallow water equations*. Queste sono caratterizzate dal numero di Rossby che è un numero adimensionale che caratterizza la forza di inerzia rispetto alla forza di Coriolis. Le equazioni quasi-geostrofiche possono essere considerate approssimazioni delle shallow water equations nel limite del piccolo numero di Rossby, in modo che le forze inerziali siano un ordine di grandezza inferiore alle forze di Coriolis e di pressione. Questi moti sono ben rappresentati dagli operatori non locali che sono spesso studiati nell'ambito del cosiddetto calcolo frazionario. Il calcolo frazionario spesso utilizza operatori matematici non locali, ovvero operatori il cui valore in un punto non dipende solo dai valori dei punti vicini ma dipende da tutti i punti del dominio considerato. Il campo di applicazione della teoria frazionaria spazia tra la meccanica quantistica, la teoria ondulatoria, lo studio dei polimeri e tanti altri settori. La storia di questa teoria matematica risale al diciassettesimo secolo quando nel 1695 Leibnitz descrisse la derivata di ordine  $s = 1/2$ . Da allora, la teoria è diventata sempre più utilizzata

da matematici, fisici, biologi, ingegneri ed economisti. Negli ultimi anni, il calcolo frazionario ha ricevuto particolare attenzione in quanto può essere applicato a svariati ambiti.

La tesi è stata sviluppata in collaborazione con il Dipartimento di Matematica della Texas Tech University. Nel Capitolo 1 vengono introdotti i concetti base dell'analisi funzionale, settore della matematica che studia gli spazi vettoriali di funzioni come gli spazi di Banach, gli spazi di Sobolev e gli spazi di Hilbert. Tali spazi vettoriali risultano essere di dimensione infinita, serve quindi approssimarli con sottospazi di dimensione finita in modo da poter essere implementati di un codice di calcolo numerico. Questo approccio di approssimazione numerica prende il nome di Metodo agli Elementi Finiti (FEM).

Nel Capitolo 2 vengono introdotti i concetti di Laplaciano Frazionario di Riesz e di operatori non locali come conseguenza del teorema della traccia. Tale teorema collega la struttura dello spazio funzionale delle funzioni definite su un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  alla struttura dello spazio funzionale della restrizione di tali funzioni sulla frontiera del dominio  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . L'approssimazione numerica di problemi differenziali classici con operatori locali viene ridotta alla risoluzione di un sistema lineare a matrice sparsa. Quando il problema differenziale da risolvere numericamente è di tipo non-locale, il sistema lineare che segue l'approssimazione è a matrice densa, con conseguente aumento della difficoltà e del costo computazionale. In questo ambito, particolare attenzione verrà posta all'implementazione numerica di questi operatori, e verrà illustrato l'algoritmo implementato in un codice agli elementi finiti.

Nel Capitolo 3 vengono ricavate le equazioni di conservazione di un fluido visto come corpo continuo, vengono derivate le equazioni di Navier-Stokes e vengono applicate al caso dei moti quasi-geostrofici superficiali. La dinamica dei moti atmosferici e oceanici è spesso interpretata attraverso la grandezza vorticità potenziale, quantità che si conserva nei moti quasi-geostrofici. Tale approssimazione permette lo studio di questa classe di moti tramite l'analisi della sola temperatura mossa da un geopotenziale che è funzione della temperatura potenziale stessa. Tali moti, essendo la restrizione su una superficie, richiedono l'utilizzo dell'operatore Laplaciano frazionario. In particolare, il laplaciano frazionario del geopotenziale corrisponde alla temperatura potenziale e la temperatura potenziale varia per convezione con velocità pari al gradiente ortogonale

del geopotenziale e per diffusione in modo non locale tramite un secondo laplaciano frazionario.

Nel Capitolo 4 vengono esposti i risultati delle simulazioni numeriche effettuate con il codice open-source "FEMuS" sviluppato presso il Laboratorio di Montecuccolino del Dipartimento di Ingegneria Industriale dell'Università di Bologna. Tali simulazioni riguardano una validazione preliminare del modello frazionario implementato. Successivamente, vengono effettuate simulazioni numeriche dell'equazione del calore con termine diffusivo frazionario, ed infine la simulazione delle equazioni relative a moti quasi-geostrofici superficiali. Data la natura non locale di tali problemi, e gli elevati costi computazionali connessi, vengono infine esposte delle tecniche di ottimizzazione numerica atte alla diminuzione del costo e dei tempi di calcolo. In particolare, verrà implementato e testato un algoritmo parallelo, ed una tecnica basata su metodi predictor-corrector.



# Capitolo 1

## Elementi Finiti

Trovare le soluzioni di un'equazione differenziale alle derivate parziali in modo analitico è possibile solo per determinate condizioni al contorno e determinate geometrie, in tutti gli altri casi è possibile al massimo garantire l'esistenza e l'unicità di tali soluzioni sotto determinate condizioni iniziali e condizioni al contorno. Si consideri, ad esempio, la

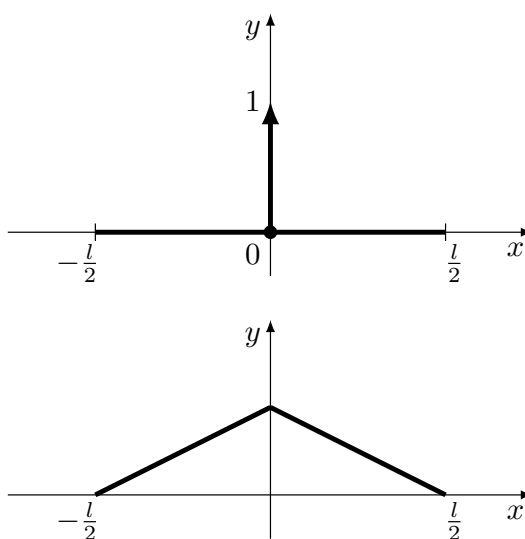


Figura 1.1: Soluzione dell'equazione elastica (1.1)

modellazione di un filo elastico di lunghezza  $l$  e dominio  $[-l/2, l/2]$ , fissato agli estremi con tensione unitaria soggetto ad una forza concentrata al centro di esso ( $F(x) = \delta(x)$ ). La modellazione matematica di tale problema fisico si può rappresentare mediante la seguente equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \delta(x) \quad (1.1)$$

con condizioni al contorno  $y(-\frac{l}{2}) = 0$  e  $y(\frac{l}{2}) = 0$ . La soluzione a questo problema è rappresentata in Figura 1.1. La soluzione ottenuta però non rispetta l'equazione di partenza in quanto non è possibile calcolarne la derivata seconda in senso classico in quanto la derivata prima è una funzione discontinua.

Efficaci strumenti per la risoluzione approssimata di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) sono definiti all'interno dell'analisi numerica. Esistono vari metodi per la soluzione numerica delle PDE, ad esempio il metodo degli elementi finiti, il metodo dei volumi finiti, ed il metodo delle differenze finite. Nel nostro caso il metodo che verrà utilizzato per la risoluzione delle equazioni differenziali riferite ai problemi di Computational Fluid Dynamic (CFD) trattati è quello degli elementi finiti. In questo capitolo si procederà ad una analisi di tale metodo. Per formalizzare questi concetti è necessario introdurre alcuni fondamenti di *Analisi Funzionale*.

## 1.1 Fondamenti di Analisi Funzionale

L'Analisi Funzionale studia gli spazi di funzioni e si basa sul concetto matematico di *vettore* (d'ora in poi ci si riferirà ai vettori con l'uso del grassetto). Un insieme  $\mathbf{V}$  si dice *Spazio Vettoriale* sul campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$  se dati due elementi dell'insieme  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$  detti *vettori*, ed uno scalare  $a \in \mathbb{R}$ , l'operazione di *somma tra vettori* (+) e l'operazione di *prodotto di un vettore per uno scalare* devono valere le seguenti proprietà.

- La somma di due vettori è anch'essa un vettore

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{V} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}.$$

- Un vettore moltiplicato per uno scalare è anch'esso un vettore

$$a\mathbf{x} \in \mathbf{V} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$$

Con queste due proprietà è possibile dimostrare che, dati uno spazio vettoriale  $\mathbf{V}$  di dimensione  $n$  e un insieme di vettori linearmente indipendenti  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in \mathbf{V}$  chiamato *base di  $\mathbf{V}$* , è possibile esprimere qualsiasi altro vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$  come combinazione lineare di vettori della base di  $\mathbf{V}$ , tramite opportuni coefficienti reali  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}_k \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$$

Si può notare che vari oggetti matematici comunemente utilizzati sono riconducibili a vettori:

- I numeri reali  $a \in \mathbb{R}$  sono vettori di dimensione 1.
- Le  $n$ -uple di numeri reali  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  ed i polinomi di grado  $n$ ,  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , sono vettori di dimensione  $n$ .
- le funzioni  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  sono vettori di dimensione infinita in quanto non è possibile trovare una base finita di vettori che possa rappresentare una funzione qualunque tramite combinazioni lineari.

Per comprendere meglio quest'ultimo concetto si pensi agli sviluppi in serie di Taylor di una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$  attorno ad un punto  $x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x_0} (x - x_0)^n$$

La funzione  $y = f(x)$  è stata quindi rappresentata come polinomio di grado infinito, tale polinomio è un vettore di uno spazio vettoriale di dimensione infinita, quindi anche la funzione è un vettore di dimensione infinita.

Gli elementi di uno spazio vettoriale non godono di una relazione d'ordine, non è quindi possibile stabilire chi sia il vettore successivo ad un'altro. Per poter confrontare i vettori si introduce l'operazione di *norma*. Dato uno spazio vettoriale  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$  e  $a \in \mathbb{R}$  si definisce *norma di un vettore* l'operatore  $\|\mathbf{x}\| : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,
- $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ ,
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (disuguaglianza triangolare).

Uno spazio vettoriale nel quale è definita l'operazione di norma è chiamato *spazio vettoriale normato*. Dati due vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$  è possibile definire il concetto di *distanza* tra due vettori l'operatore  $d : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ . Si noti che  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

Un'altra importante operazione tra vettori è quella di *prodotto scalare*. Essa definisce il concetto di ortogonalità tra due vettori ed è utile per poter definire basi di vettori

ortogonali. Dati  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$  spazio vettoriale e  $a, b \in \mathbb{R}$ , si definisce prodotto scalare l'operatore  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tale operatore gode delle seguenti proprietà

- Positività:  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$
- Simmetria:  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$
- Bilinearità:  $\langle a\mathbf{x} + \mathbf{y}, b\mathbf{z} \rangle = ab \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + ab \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ .

Quando il prodotto scalare tra due vettori non nulli è uguale a zero allora i due vettori sono ortogonali. Un prodotto scalare può indurre una norma sul campo vettoriale nel quale è definito, si parla allora di *norma indotta*. Dato  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$  spazio vettoriale si definisce norma indotta l'operazione  $\|\mathbf{x}\| : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ :  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ .

La teoria degli elementi finiti si basa sulle proprietà degli spazi vettoriali infinito-dimensionali di funzioni. Gli spazi di funzioni più comuni sono:

- Lo spazio  $\mathbf{C}^k(\Omega)$  delle funzioni  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  continue con derivata parziale continua fino all'ordine  $k$  nel dominio  $\Omega$ .
- Lo spazio  $\mathbf{L}^p(\Omega)$  delle funzioni  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  integrabili sul dominio  $\Omega$ .
- Lo spazio di Sobolev  $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$  delle funzioni  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  le cui derivate fino all'ordine  $k$  appartengono allo spazio  $\mathbf{L}^p(\Omega)$ .

Per maggiori informazioni si veda [1].

### 1.1.1 Lo spazio $\mathbf{C}^k(\Omega)$

Lo spazio  $\mathbf{C}^k(\Omega)$  delle funzioni  $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue con derivata parziale continua fino all'ordine  $k$  è definito nel seguente modo:

$$\mathbf{C}^k(\Omega) = \left\{ \frac{\partial^l f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_j^{\alpha_j}} \in \mathbf{C}^{k-l}(\Omega) \left| \sum_h \alpha_h = l, \forall l \in [0, k], i \in [1, m], j \in [1, n] \right. \right\},$$

del quale fanno parte gli insiemi delle funzioni continue  $\mathbf{C}^0(\Omega)$  e le funzioni continue con derivata continua per tutti gli ordini possibili  $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ . Lo spazio  $\mathbf{C}^k(\Omega)$  è uno spazio vettoriale, in quanto qualsiasi combinazione lineare di funzioni appartenenti a tale insieme appartiene anch'essa all'insieme. Un sottoinsieme importante è l'insieme

delle funzioni che si annullano sulla frontiera del dominio  $\mathbf{C}_0^k(\Omega)$ . Si può definire la seguente norma come *norma infinito*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_\infty = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{f}(x)|.$$

Si può dimostrare che questa norma non è indotta da alcun prodotto scalare e che quest'ultimo non è definito nell'insieme. Costruiamo ora una particolare successione di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  appartenente a  $\mathbf{C}^k(\Omega)$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ 2^n x & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{2^n}, \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{2^n}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Dalla Figura 1.2, ci si accorge facilmente che  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = H(x)$  dove  $H(x)$  rappresenta la funzione a gradino unitario

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

La funzione  $y = H(x)$  non è una funzione appartenente a  $\mathbf{C}^k(\Omega)$  in quanto non è

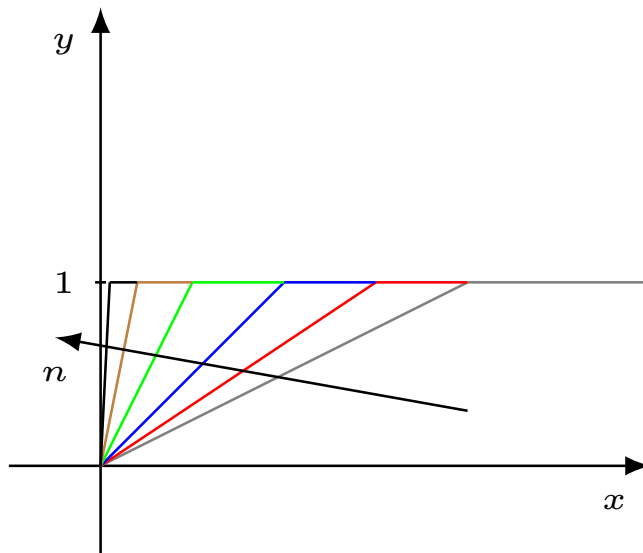


Figura 1.2: Rappresentazione della successione (1.2).

continua. Essendo pertanto possibile costruire delle successioni di funzioni appartenenti a  $\mathbf{C}^k(\Omega)$  ma con il limite non appartenente a tale insieme si dice che  $\mathbf{C}^k(\Omega)$  non è un

insieme completo. Un insieme completo è un insieme nel quale tutte le successioni convergono ad elementi dello stesso insieme. Definiamo inoltre *spazio di Banach* uno spazio normato completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

### 1.1.2 Gli spazi $L^p(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$

Introduciamo ora gli spazi delle funzioni integrabili. Lo spazio  $\mathbf{L}^p(\Omega)$  delle funzioni a potenza p-esima integrabili ed è definito come

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = \left\{ \mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \int_{\Omega} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^p d\mathbf{x} < \infty \right\}. \quad (1.3)$$

Molto importante è lo spazio  $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{L}^p(\Omega)$  delle funzioni a quadrato integrabile

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \left\{ \mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \int_{\Omega} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x} < \infty \right\}. \quad (1.4)$$

Tale insieme è uno spazio vettoriale data la linearità dell'operazione di integrazione. Date due funzioni  $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  si può definire l'operazione di prodotto scalare come

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Tale prodotto scalare induce una norma del tipo

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}^2} = \sqrt{\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle} = \sqrt{\int_{\Omega} (\mathbf{f}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}}.$$

Questo spazio vettoriale è completo, quindi  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  è uno spazio di Banach. Quando in uno spazio vettoriale di Banach il prodotto scalare induce una norma, tale spazio viene chiamato *spazio di Hilbert*. Ad esempio,  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  è uno spazio di Hilbert. Uno spazio di Hilbert è quindi uno spazio vettoriale infinito dimensionale di funzioni in cui l'operazione di prodotto scalare è ben definita. È quindi possibile rappresentare qualunque funzione  $\mathbf{f}(x)$  appartenente a tale spazio come combinazione lineare di una sua base  $\mathbf{e}_n$ . La base di uno spazio di Hilbert è un insieme infinito di funzioni tali che possano rappresentare qualsiasi altra funzione tramite opportuni coefficienti calcolati come prodotto scalare tra la funzione e la base stessa

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n \quad (1.5)$$

Prendiamo ad esempio lo spazio delle funzioni  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  e la base fatta da funzioni periodiche:

$$e_n^1 = \cos(nx), \quad e_n^2 = \sin(nx) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definendo il prodotto scalare come  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ , si ha che la base è ortogonale in quanto

$$\begin{aligned} \langle e_n^1, e_m^1 \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \pi \delta_n^m, \\ \langle e_n^1, e_m^2 \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0, \\ \langle e_n^2, e_m^2 \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \pi \delta_n^m. \end{aligned}$$

Una qualunque funzione  $f(x)$  è rappresentabile quindi come:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \right) \cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \right) \sin(nx).$$

Tale sviluppo non è altro che uno sviluppo in serie di Fourier non normalizzato nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ . Tramite la nozione di spazio di Hilbert, fissata una base una qualsiasi funzione  $f(x)$  è univocamente determinata dalle proiezioni della funzione sulla base tramite il prodotto scalare. Risulta opportuno trattare una funzione come fosse all'interno di un integrale calcolato sul dominio  $\Omega$  della funzione  $f$  moltiplicata per un'altra funzione  $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  che viene chiamata *funzione test* ed è una funzione che è diversa da zero solo nel dominio  $\Omega$  e derivabile infinite volte

$$f \rightarrow F(\phi(x)) : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad | \quad F(\phi(x)) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx.$$

Tale operatore  $F$  è chiamato *funzionale* ed è un operatore che associa ad ogni funzione  $\phi(x)$  un numero reale. Tramite la nozione di funzionale è possibile estendere il concetto ordinario di funzione ad uno più generalizzato. Si possono infatti rappresentare funzioni tramite funzionali non rappresentabili come funzioni ordinarie. Un esempio classico è quello della *delta di Dirac*  $\delta(x)$  definita come

$$\delta(x) \quad \text{tale che} \quad \int_{\Omega} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0) \quad \forall \phi(x) \in C_0^\infty(\Omega).$$

L'unica funzione che rispetta tale condizione è la Delta di Dirac.

### 1.1.3 Gli spazi di Sobolev $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ e $\mathbf{H}^k(\Omega)$

Lo spazio di Sobolev  $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni  $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  la cui derivata fino all'ordine  $k$  appartiene allo spazio  $\mathbf{L}^p(\Omega)$  ed è definito come

$$\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) = \left\{ \frac{\partial^l f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_j^{\alpha_h}} \in \mathbf{L}^p(\Omega) \left| \sum_h \alpha_h = l, \forall l \in [0, k], i \in [1, m], j \in [1, n] \right. \right\}.$$

Molto importanti sono gli spazi di Sobolev in cui  $p = 2$ , definiti come  $\mathbf{H}^k(\Omega) \subset \mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ . Essi rappresentano spazi di funzioni  $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  la cui derivata fino all'ordine  $k$  appartiene allo spazio  $\mathbf{L}^2(\Omega)$

$$\mathbf{H}^k(\Omega) = \left\{ \frac{\partial^l f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_j^{\alpha_h}} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \left| \sum_h \alpha_h = l, \forall l \in [0, k], i \in [1, m], j \in [1, n] \right. \right\}.$$

L'operatore di derivata presente nella definizione di questo spazio funzionale non è quello classico. Tramite il concetto di funzionale è infatti possibile estendere il concetto di funzione a quello di *funzione generalizzata*. Pertanto è possibile fare lo stesso con l'operatore di derivata definendo così la *derivata generalizzata*. Supponiamo di dover calcolare la derivata prima di una funzione  $f(x)$  e di pensarla come funzionale:  $\int_{\Omega} f'(x)\phi(x)dx$ . Effettuando un'integrazione per parti e ricordando che le funzioni  $\phi(x)$  sono nulle all'esterno del dominio e derivabili infinite volte si ottiene:

$$\int_{\Omega} f'(x)\phi(x)dx = - \int_{\Omega} f(x)\phi'(x)dx \quad \forall \phi(x) \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (1.6)$$

Tramite tale operatore è possibile calcolare le derivate delle funzioni ordinarie e queste coincideranno con le derivate trovate in modo classico. Sarà anche possibile calcolare le derivate di funzioni non derivabili in senso classico e anche delle funzioni generalizzate: tale operatore è chiamato anche *derivata debole*. In uno spazio di Sobolev, date  $f(x), g(x) \in H^k(\Omega)$  è possibile definire l'operazione di prodotto scalare nel seguente modo

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=0}^k \frac{d^i \mathbf{f}}{dx^i} \cdot \frac{d^i \mathbf{g}}{dx^i} \right) dx.$$

Tale operatore induce una norma del tipo

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}^k} = \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{i=0}^k \left\| \frac{d^i \mathbf{f}}{dx^i} \right\|^2 dx}.$$

Uno spazio di Sobolev è quindi anche uno spazio di Hilbert. Molto importante nello studio delle PDE è lo spazio  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  delle funzioni con derivata parziale prima appartenente a  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  definito come:

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \quad \forall i \in [0, m], j \in [0, n]; i, j \in \mathbb{N} \right\},$$

con norma

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}^1} = \sqrt{\int_{\Omega} [\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 + \|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2] d\mathbf{x}}.$$

Grazie all'introduzione degli spazi  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  e  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  sarà possibile trovare le soluzioni approssimate delle PDE in quanto tali soluzioni potranno essere non derivabili due volte in senso classico (vedi Figura 1.3). Infatti come si vede in Figura 1.3 la derivata prima

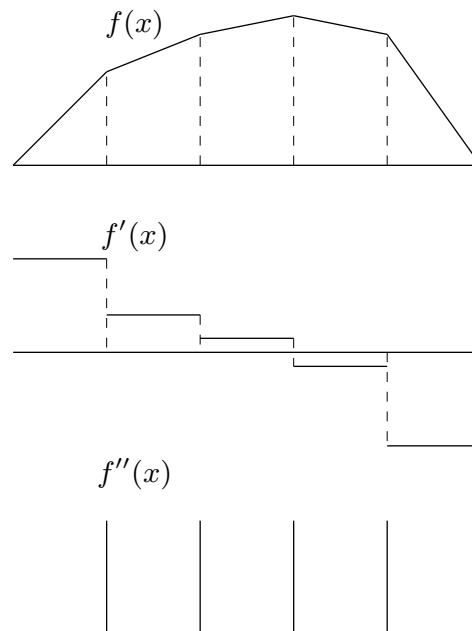


Figura 1.3: Soluzione numerica  $f(x)$ , derivata prima discontinua  $f'(x)$  e derivata seconda  $f''(x)$  funzione generalizzata.

non è continua e presenta discontinuità. La soluzione sopra riportata non appartiene allo spazio  $C^1$  ma appartiene allo spazio  $H^1$ . È perciò naturale investigare tali soluzioni in questi spazi che le comprendono mediante il concetto di derivata generalizzata.

## 1.2 Formulazione debole e variazionale

Data una funzione dipendente dallo spazio tridimensionale e dal tempo  $f : (\Omega, t) \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  si definisce Equazione Differenziale Alle Derivate Parziali (PDE) di ordine  $k$  di incognita  $f(\mathbf{x}, t)$  una relazione del tipo:

$$F\left(\mathbf{x}, t, f(\mathbf{x}, t), \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}, \dots, \frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}, \frac{\partial^k f}{\partial t^k}\right) = 0. \quad (1.7)$$

Si considerano d'ora in poi PDE fino al secondo ordine. La soluzione di una PDE del secondo ordine, quando essa esiste, non è unica e lo diventa solo se vengono imposte una condizione iniziale e delle coerenti condizioni al contorno. La condizione iniziale è lo stato del sistema ad un certo istante di tempo considerato iniziale:

$$f(\mathbf{x}, t = 0) = f_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Le condizioni al contorno, ovvero imposte sulla frontiera del dominio  $\partial\Omega = \cup_{i=1}^n \partial\Omega_i$ , possono essere di tre tipi:

- Condizioni di Dirichlet:  $f(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_i, \forall t > 0,$
- Condizioni di Neumann:  $\mathbf{n} \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_i, \forall t > 0,$
- Condizioni di Robin:  $h_i f(\mathbf{x}, t) + \eta_i \mathbf{n} \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_i, \forall t > 0.$

**Formulazione debole.** Si definisce (informalmente) *soluzione classica* o *soluzione forte* di una PDE di ordine  $k$  una funzione continua e derivabile con continuità fino all'ordine  $k$ , ovvero  $f(\mathbf{x}, t) \in C^k(\Omega)$ . La PDE che viene risolta da una soluzione forte è detta in *forma forte*. Tuttavia, come nell'esempio ad inizio capitolo, non sempre è possibile trovare una soluzione che sia derivabile  $k$  volte, ci si accontenta allora di una soluzione che non sia derivabile con continuità. Prendiamo ancora il sistema (1.1). Si moltiplica ora l'equazione differenziale per una funzione test  $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  e si integra su tutto il dominio  $\Omega = [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$  ottenendo

$$\int_{\Omega} \frac{d^2 y}{dx^2} \phi(x) dx = \int_{\Omega} \delta(x) \phi(x) dx.$$

Integrando per parti il primo membro si ottiene

$$\left[ \frac{dy}{dx} \phi(x) \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} - \int_{\Omega} \frac{dy}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx = \int_{\Omega} \delta(x) \phi(x) dx.$$

Avendo scelto la funzione test  $\phi(x) \in C_0^\infty[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$  il termine  $\left[\frac{dy}{dx}\phi(x)\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$  si annulla, ottenendo così un'equazione nella quale sono già state definite le condizioni al contorno. L'ordine di derivazione è sceso e ora alla soluzione è richiesta solo la derivabilità sul dominio, ciò equivale a cercare le soluzioni  $f(x) \in H_0^1[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$  e di conseguenza anche le funzioni test  $\phi(x)$  apparterranno allo stesso spazio

$$-\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dy}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \delta(x)\phi(x) dx \quad \forall f(x), \phi(x) \in H_0^1\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]. \quad (1.8)$$

**Formulazione variazionale.** È possibile ottenere la forma debole di un'equazione differenziale mediante la minimizzazione di un funzionale. Il concetto di minimizzazione di un funzionale è stato introdotto per risolvere dei problemi nei quali serviva trovare una funzione che rendesse minimo un certo integrale. Uno degli esempi più celebri è quello di trovare il percorso che minimizzi il tempo di caduta di un punto materiale nel campo gravitazionale terrestre tra due punti non allineati verticalmente o orizzontalmente. Dato un funzionale  $F(y) : V \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione infinita di funzioni, si può definire il concetto di derivata applicato a tale spazio  $V$  come estensione della derivata direzionale nello spazio ordinario  $\mathbb{R}^n$ . La derivata direzionale di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in direzione  $\mathbf{d}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  si può calcolare come

$$\frac{Df}{D\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{d}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})}{h} = \nabla f \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}).$$

In uno spazio di dimensione finita  $n$  è quindi possibile calcolare la derivata direzionale come prodotto scalare tra il gradiente della funzione  $\nabla f$  e la direzione  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ . Si considera ora un funzionale  $F(y) : V \rightarrow \mathbb{R}$  e una direzione, chiamata anche *variazione*  $\delta y \in V$  e calcoliamone la derivata direzionale in modo analogo al precedente

$$\frac{DF}{Dy} \cdot \delta y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(y + h\delta y) - F(y)}{h}.$$

Essendo lo spazio  $V$  di dimensione infinita non è possibile spezzare tale derivata direzionale come prodotto scalare del gradiente della funzione e il vettore della direzione di derivazione. Si dimostra ora che la forma debole dell'esempio si ottiene anche dalla minimizzazione del seguente funzionale

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\delta(x) \right] dx,$$

la cui derivata direzionale si può scrivere come

$$\begin{aligned}
\frac{DF}{Dy} \cdot \delta y &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{d(y + h\delta y)}{dx} \right)^2 + 2(y + h\delta y)\delta(x) - \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2y\delta(x) \right] dx \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + h^2 \left( \frac{d(\delta y)}{dx} \right)^2 + 2h \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx} + 2y\delta(x) + 2h\delta y\delta(x) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2y\delta(x) \right] dx \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\Omega} \left[ h^2 \left( \frac{d(\delta y)}{dx} \right)^2 + 2h \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx} + 2h\delta y\delta(x) \right] dx \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ h \left( \frac{d(\delta y)}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx} + 2\delta y\delta(x) \right] dx \\
&= \int_{\Omega} \left[ \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx} + \delta y\delta(x) \right] dx.
\end{aligned}$$

Per calcolare il minimo di una funzione classica si pone la derivata prima uguale a zero, per trovare il minimo di un funzionale si pone la derivata variazionale uguale a zero

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx} + \delta y\delta(x) \right] dx = 0,$$

che equivale a

$$- \int_{\Omega} \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx} dx = \int_{\Omega} \delta y\delta(x) dx.$$

Si nota che quest'ultima equazione è identica alla formulazione debole (1.8) avendo posto le funzioni test  $\phi(x)$  uguali alle variazioni  $\delta y$ .

### 1.3 Il Metodo agli Elementi Finiti (FEM)

Nei paragrafi precedenti si è visto come possa essere conveniente studiare le soluzioni delle PDE negli spazi di Hilbert, in particolare negli spazi  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  e  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  per poter sfruttare la scomposizione nei vettori base. Nella realtà andare a scomporre una funzione in una base hilbertiana non è possibile, in quanto essa sarebbe costituita da infinite funzioni. Pertanto, serve approssimare uno spazio di Hilbert infinito dimensionale attraverso alcuni sottoinsiemi di dimensione finita; naturalmente più sarà alta la dimensione di tali sottospazi, più l'approssimazione sarà corretta. La qualità della soluzione non dipende solo dal numero di dimensioni con cui si approssima uno spazio di Hilbert, ma anche dal tipo di base scelta e dalla geometria del problema.

Utilizzando come base delle funzioni costanti a tratti si ottiene quello che comunemente viene chiamato Metodo dei Volumi Finiti (FVM). Utilizzando invece funzioni costanti a tratti ma centrate sugli elementi del dominio discretizzato si ottiene il Metodo delle Differenze Finite (FDM). Infine, utilizzando funzioni che ammettono derivata generalizzata appartenenti a  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  o  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  si ottiene il Metodo degli Elementi Finiti (FEM) [2] che è quello utilizzato in questo lavoro di tesi.

### 1.3.1 Sottospazi di spazi di Hilbert di funzioni in una variabile

Approssimare uno spazio di Hilbert infinito dimensionale con un suo sottoinsieme finito dimensionale significa trovare una base finita di funzioni che generino tale sottoinsieme. Le funzioni che formano la base di tali sottospazi vengono chiamate *funzioni di forma*. Nei prossimi paragrafi verranno esposte quelle che sono le funzioni di forma per sottospazi di spazi di Hilbert ad una variabile spaziale; successivamente verranno esposte anche quelle nei casi a due e tre variabili spaziali.

#### Il sottospazio $S_h^0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ delle funzioni costanti a tratti EDGE 1(FVM)

Le funzioni di forma più semplici, anche da un punto di vista computazionale, sono i polinomi. Il polinomio più semplice è il polinomio unitario di grado zero. Si considera uno spazio di Hilbert di funzioni reali di una sola variabile reale  $f : \Omega = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e una partizione del dominio  $[a, b]$  in  $N$  elementi con conseguenti  $N + 1$  nodi, ogni elemento sarà quindi un intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  con  $i = 0, 1, \dots, N$  con  $x_0 = a, x_N = b$ . Notiamo che le derivate di tali funzioni sono discontinue. Si chiama  $S_h^0[a, b] \subset L^2[a, b]$  lo spazio vettoriale di dimensione  $N$  che ha come base l'insieme delle funzioni di forma  $\phi_i^0(x)$  unitarie a tratti, dove lo zero indica il grado del polinomio utilizzato e il pedice  $h$  indica che la discretizzazione utilizzata è ad intervalli. Tali funzioni, riportate in Figura 1.4, sono definite come

$$\phi_i^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_i \vee x > x_{i+1}, \\ 1 & \text{se } x_i \leq x \leq x_{i+1}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Utilizzando queste funzioni di forma come base, lo spazio  $S_h^0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  è definito

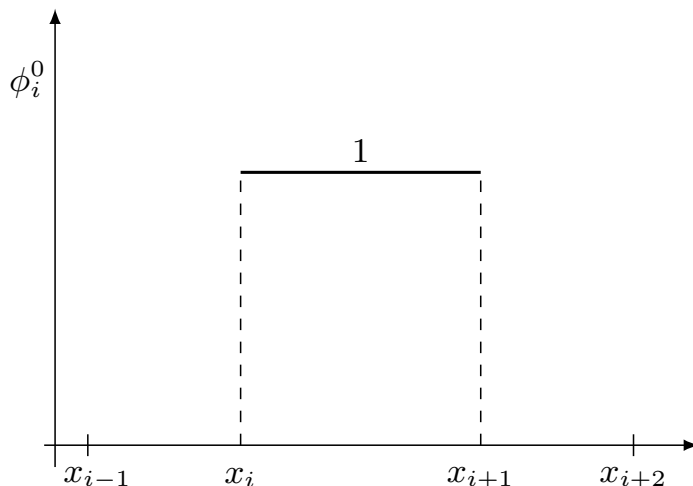


Figura 1.4: Funzioni di forma locali  $\phi_i^0(x)$

come

$$S_h^0(\Omega) = \left\{ f_h(x) \in L^2(\Omega) \mid f_h(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \phi_i^0(x) \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.10)$$

I coefficienti  $\alpha_i$  sono le proiezioni della funzione  $f_h(x)$  sulle funzioni base definite dal prodotto scalare:  $\alpha_i = \langle f_h(x), \phi_i^0(x) \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_h(x) \phi_i^0(x) dx$ . Le funzioni  $\phi_i^0(x)$  sono chiamate EDGE1 perchè necessitano di un solo nodo per essere ben definite. Il limite di  $N$  che tende ad infinito genera lo spazio  $L^2(\Omega)$ . Identificare ciascun elemento e ciascun nodo rispetto all'intero dominio non è sempre agevole, soprattutto quando si utilizzano molti elementi. Risulta invece essere più agevole identificare ciascun elemento attraverso una mappa, ed in particolare indicando con un apice  $e$  ogni elemento. Inoltre, si indica ogni nodo sinistro con il pedice 1, ed ogni nodo destro con il pedice 2, ottenendo così degli intervalli  $\Omega_e = [x_1^e, x_2^e]$   $e = 0, 1, \dots, N - 1$ . Questo modo di identificare gli elementi ed i nodi viene chiamato *rappresentazione locale*, al contrario di quella precedente detta *rappresentazione globale*. Le funzioni di forma in forma locale si indicano con  $\phi_i^{0,e}(x)$  e la funzione  $f_h(x)$  è può essere rappresentata come  $f_h^e(x) = \sum \alpha_i \phi_i^{0,e}(x)$  con  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Gli elementi  $\alpha_i$  sono da calcolare tramite degli integrali sugli elementi  $\Omega_e$  variabili da elemento a elemento. Per facilitare il calcolo di tali integrali si può effettuare un cambio di variabile tale per cui l'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  viene trasformato nell'intervallo  $[-1, 1]$  per poi calcolare gli integrali tramite il metodo di quadratura di

Gauss. Un cambio di variabile possibile che rispetti questa richiesta è

$$\xi(x) = 2 \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} - 1. \quad (1.11)$$

Osserviamo che la funzione  $\xi(x)$  è lineare e  $\xi(x_1^e) = -1, \xi(x_2^e) = 1$ . Effettuando il

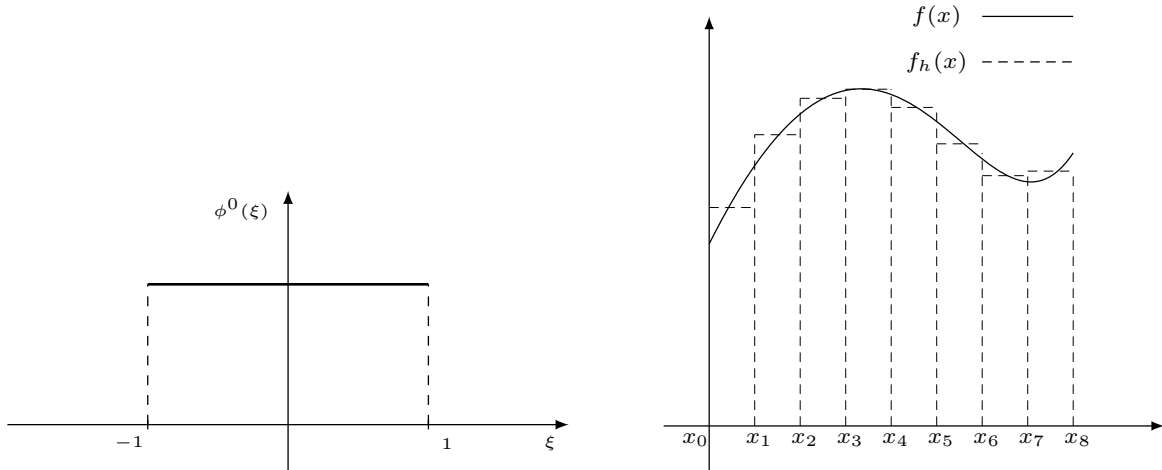


Figura 1.5: Funzioni di forma canoniche costanti a tratti  $\phi_i^0(x)$  (sinistra). Approssimazione di una curva con funzioni di forma costanti a tratti  $\phi_i^0(x)$  (destra).

cambio di variabile alla funzione  $\phi_i^{0,e}(x)$  si ottiene la funzione in *forma canonica*

$$\phi^0(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < -1 \vee \xi > 1, \\ 1 & \text{se } -1 \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Approssimare una curva con queste funzioni di forma genera una semplificazione notevole che non sempre è accettabile (si veda la Figura 1.5 sulla destra).

### Il sottospazio $X_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ delle funzioni lineari a tratti EDGE2 (FEM)

Si introduce ora l'utilizzo di funzioni di forma polinomiali utilizzando polinomi di grado 1, ovvero funzioni lineari  $y = Ax + B$ . Si considera uno spazio di Hilbert di funzioni reali di una sola variabile reale  $f : \Omega = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e una partizione del dominio  $[a, b]$  in  $N$  elementi con conseguenti  $N+1$  nodi. Come precedentemente introdotto, ogni elemento sarà quindi un intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  con  $i = 0, 1, \dots, N$  con  $x_0 = a; x_N = b$ . Le derivate prime di tali funzioni appartengono ad  $L^2(\Omega)$  mentre le derivate seconde no, di conseguenza questa base approssima lo spazio  $H^1(\Omega)$ . Chiamiamo  $X_h^1[a, b] \subset H^1[a, b]$  lo spazio vettoriale di dimensione  $N + 1$  che ha come base l'insieme delle funzioni di

forma  $N_i^1(x)$  lineari a tratti (si veda in Figura 1.6) definite come

$$N_i^1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_{i-1} \vee x > x_{i+1}, \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}} & \text{se } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_{i-1}} & \text{se } x_i \leq x \leq x_{i+1}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Utilizzando queste funzioni di forma come base, lo spazio  $X_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  è definito

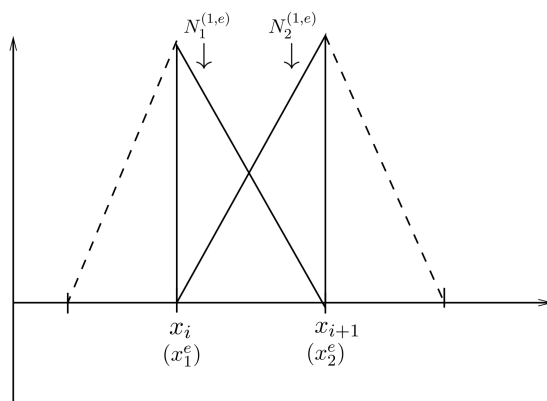


Figura 1.6: Funzioni di forma locali lineari a tratti  $\phi_i^1(x)$

come

$$X_h^1(\Omega) = \left\{ f_h(x) \in H^1(\Omega) \mid f_h(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \phi_i^1(x) \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.14)$$

Anche in questo caso i coefficienti  $\alpha_i$  sono le proiezioni della funzione  $f_h(x)$  sulle funzioni base definite dal prodotto scalare:  $\alpha_i = \langle f_h(x), \phi_i^1(x) \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f_h(x) \phi_i^1(x) dx$ . Il limite di  $N$  che tende ad infinito genera lo spazio  $H^1(\Omega)$ . Si considera ora un sistema di riferimento locale dove l'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  viene identificato con  $\Omega_e = [x_1^e, x_2^e]$ ,  $\forall e = [0, 1, \dots, N-1]$

$$N_1^{1,e}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_1^e \vee x > x_2^e, \\ \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} & \text{se } x_1^e \leq x \leq x_2^e, \end{cases} \quad N_2^{1,e}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_1^e \vee x > x_2^e, \\ \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} & \text{se } x_1^e \leq x \leq x_2^e. \end{cases}$$

In ciascun elemento  $e$  la funzione  $f_h(x)$  è rappresentata come combinazione lineare delle due funzioni di forma locali:  $f_h^e(x) = \sum_{j=1}^2 f_h^e(x_j^e) N_j^{1,e}(x)$  con  $f_h^e \in \mathbb{R}$ . Definiamo come nel caso precedente una trasformazione lineare che trasformi l'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  nell'intervallo  $[-1, 1]$  per facilitare il calcolo dei coefficienti  $\alpha_i$  tramite l'integrazione

di Gauss. Utilizzando la trasformazione  $\xi(x)$  vista in precedenza si ottiene la forma canonica delle funzioni di forma lineari:

$$N_1^1(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < -1 \vee \xi > 1 \\ \frac{1-\xi}{2} & \text{se } -1 \leq \xi \leq 1 \end{cases}, \quad N_2^1(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < -1 \vee \xi > 1 \\ \frac{1+\xi}{2} & \text{se } -1 \leq \xi \leq 1 \end{cases}. \quad (1.15)$$

I coefficienti  $\alpha_i$  si calcolano quindi come integrali sull'elemento canonico

$$\alpha_i = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} f_h(x) \phi_i^2(x) dx = \int_{-1}^1 f_h(\xi) N_i^1(\xi) \left| \frac{dx}{d\xi} \right| d\xi.$$

Se nell'equazione compaiono delle derivate, effettuando il cambio di coordinate serve

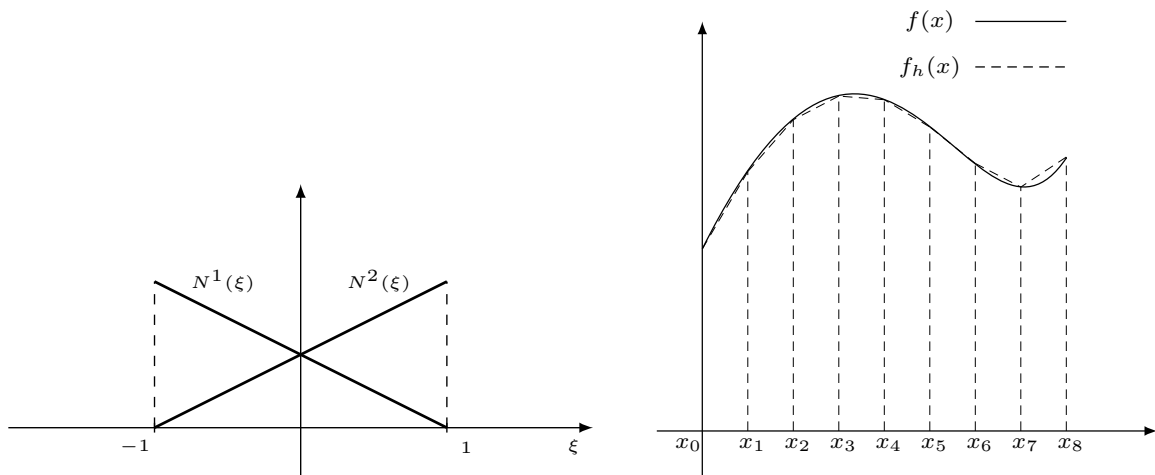


Figura 1.7: Funzioni di forma canoniche lineari a tratti  $N^1(x)$  (sinistra). Approssimazione di una curva con funzioni di forma lineari a tratti  $N_i^1(\xi)$  (destra).

trasformare queste derivate nelle coordinate canoniche. Ad esempio  $\int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} \frac{df_h}{dx} dx = \int_{-1}^1 \frac{df_h}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \left| \frac{dx}{d\xi} \right| d\xi$  dove  $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}}$ . Approssimando una curva con queste funzioni di forma si commette un errore minore del caso precedente delle funzioni di forma costanti a tratti (si veda Figura 1.7 sulla destra).

### Il sottospazio $X_h^2(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ delle funzioni lineari a tratti EDGE2 (FEM)

Come ultimo caso, analizziamo le funzioni di forma polinomiali di secondo grado ovvero delle funzioni paraboliche a tratti. Si considera uno spazio di Hilbert di funzioni reali di una sola variabile reale  $f : \Omega = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e una partizione del dominio  $[a, b]$  in  $N$  elementi con conseguenti  $2N + 1$  nodi. Si considera, come in precedenza, il generico elemento formato dall'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  con  $i = 0, 1, \dots, 2N$ . Tale elemento è

costituito da tre nodi: due estremi ed uno centrale. Si considerano le funzioni di forma quadratiche  $\phi_i^2(x)$ , definite come

$$\phi_i^2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_{i-2} \vee x > x_{i+2} \\ \frac{(x-x_{i-2})(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})} & \text{se } x_{i-2} < x < x_i \\ \frac{(x-x_{i+2})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+2})(x_i-x_{i+1})} & \text{se } x_i < x < x_{i+2} \end{cases} \quad \forall i = [0, 2, 4, \dots], \quad (1.16)$$

$$\phi_i^2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_{i-1} \vee x > x_{i+1} \\ \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} & \text{se } x_{i-1} < x < x_{i+1} \end{cases} \quad \forall i = [1, 3, 5, \dots]. \quad (1.17)$$

Le derivate prime e seconde di tali funzioni appartengono ad  $L^2(\Omega)$  di conseguenza questa base approssima lo spazio  $H^2(\Omega)$ . Chiamiamo  $X_h^2[a, b] \subset H^2[a, b]$  lo spazio vettoriale di dimensione  $2N + 1$  che ha come base l'insieme delle funzioni di forma  $\phi_i^2(x)$  quadratiche a tratti

$$X_h^2(\Omega) = \left\{ f_h(x) \in H^2(\Omega) \quad \left| \quad f_h(x) = \sum_{i=0}^{2N} \alpha_i \phi_i^2(x) \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \right. \right\}. \quad (1.18)$$

Anche in questo caso i coefficienti  $\alpha_i$  sono le proiezioni della funzione  $f_h(x)$  sulle funzioni base definite dal prodotto scalare:  $\alpha_i = \langle f_h(x), \phi_i^2(x) \rangle = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} f_h(x) \phi_i^2(x) dx$ . Le funzioni  $\phi_i^2(x)$  sono chiamate EDGE3 perchè necessitano di tre nodi per essere ben definite. Come anticipato precedentemente, il limite di  $N$  che tende ad infinito genera lo spazio  $H^2(\Omega)$ . Passiamo ora ad un sistema di riferimento locale dove l'intervallo  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$  viene identificato con l'intervallo  $\Omega_e = [x_1^e, x_2^e]$  per ogni  $e = [0, 1, \dots, N - 1]$ . Si ricorda che dove è presente anche il nodo centrale  $x_3^e$ . In ciascun elemento  $e$  la funzione  $f_h(x)$  è rappresentata come combinazione lineare delle tre funzioni di forma locali  $f_h^e(x) = \sum_{j=1}^3 f_h^e(x_j^e) N_j^{2,e}(x)$ . Definiamo come nel caso precedente una trasformazione lineare che trasformi l'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  nell'intervallo  $[-1, 1]$  per facilitare il calcolo dei coefficienti  $\alpha_i$  tramite l'integrazione di Gauss. Utilizzando la trasformazione  $\xi(x)$  vista in precedenza, notando che nel nodo centrale  $\xi(x_3^e) = \xi(\frac{x_1^e + x_2^e}{2}) = 0$  si ottiene la forma canonica delle funzioni di forma quadratiche

$$\begin{cases} N_1^2(\xi) = -\xi \frac{1-\xi}{2} \\ N_2^2(\xi) = \xi \frac{1+\xi}{2} \\ N_3^2(\xi) = (1-\xi)(1+\xi) \end{cases} \quad \forall \xi \in [-1, 1]. \quad (1.19)$$

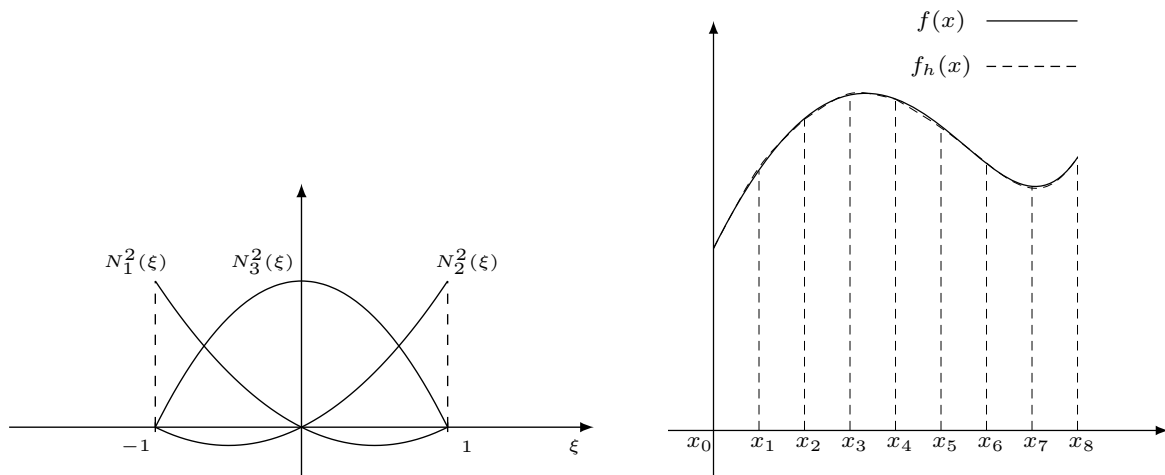


Figura 1.8: Funzioni di forma canoniche quadratiche a tratti  $N^2(\xi)$  (sinistra). Approssimazione di una curva con funzioni di forma lineari a tratti  $N_i^2(\xi)$  (destra).

I coefficienti  $\alpha_i$  si calcolano quindi come integrali sull'elemento canonico

$$\alpha_i = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} f_h(x) \phi_i^2(x) dx = \int_{-1}^1 f_h(\xi) N_i^2(\xi) \left| \frac{dx}{d\xi} \right| d\xi.$$

Se nell'equazione compaiono delle derivate, effettuando il cambio di coordinate serve trasformare queste derivate nelle coordinate canoniche. Ad esempio  $\int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} \frac{df_h}{dx} dx = \int_{-1}^1 \frac{df_h}{d\xi} \left| \frac{dx}{d\xi} \right| d\xi$  dove  $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}}$ . Approssimando una curva con queste funzioni di forma si commette un errore ancora minore dei due casi precedenti a discapito di un aumento del costo computazionale (Figura 1.8 sulla destra).

### 1.3.2 Sottospazi di spazi di Hilbert di funzioni di più variabili

Nelle applicazioni raramente i problemi da modellizzare richiedono funzioni di una sola variabile spaziale, più spesso serve modellare superfici bidimensionali o corpi tridimensionali i quali richiedono equazioni differenziali le quali incognite sono funzioni di due o tre variabili spaziali. Servirà quindi definire dei sottospazi finiti dimensionali di spazi di Hilbert di funzioni in più variabili. In domini bidimensionali  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  la discretizzazione (MESH) può avvenire in più modi, le più diffuse sono quelle a quadrilateri e a triangoli. In domini tridimensionali  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  vengono utilizzate discretizzazioni a esaedri e tetraedri.

Approssimando una curva con queste funzioni di forma si commette un errore ancora minore dei due casi precedenti a discapito di un aumento del costo computazionale (Figura 1.8 sulla destra).

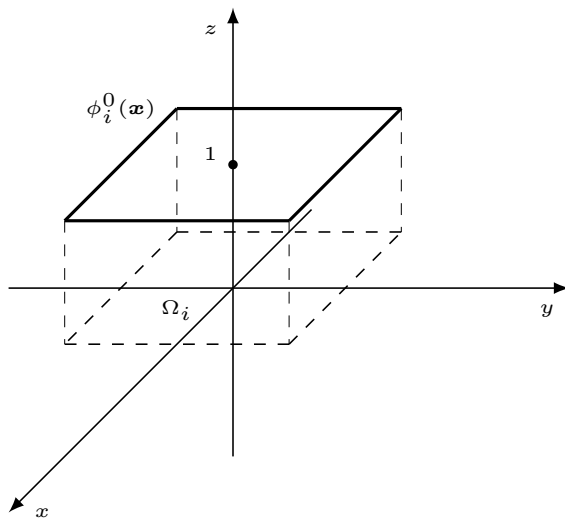


Figura 1.9: Funzione di forma bidimensionale QUAD1.

### Il sottospazio $\mathbf{S}_h^0(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ delle funzioni costanti a tratti QUAD1 (FVM)

Si considera uno spazio di Hilbert di funzioni reali di due o tre variabili reale  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e una partizione del dominio in  $N$  elementi  $\Omega = \cup_{i=0}^{N-1} \Omega_i$  di forma qualsiasi.

Si considerano le funzioni costanti unitarie sul dominio  $\phi_i^0(\mathbf{x})$ :

$$\phi_i^0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega_i \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_i \end{cases} \quad (1.20)$$

Notiamo che le derivate di tali funzioni non appartengono a  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  quindi saranno corrette per l'approssimazione dello spazio di Hilbert  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Una rappresentazione grafica di tali funzioni di forma è presente in Figura 1.9. Definiamo ora lo spazio  $\mathbf{S}_h^0(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ , ovvero lo spazio delle funzioni  $f_h(\mathbf{x})$  definite come combinazioni lineari delle funzioni di forma

$$\mathbf{S}_h^0(\Omega) = \left\{ f_h(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \left| f_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \phi_i^0(\mathbf{x}) \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \right. \right\}, \quad (1.21)$$

dove gli  $\alpha_i$  sono le proiezioni della funzione  $f_h(\mathbf{x})$  sulle funzioni base  $\phi_i^0(\mathbf{x})$  tramite il prodotto scalare  $\alpha_i = \langle f_h(\mathbf{x}), \phi_i^0(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega_i} f_h(\mathbf{x}) \phi_i^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

**Il sottospazio  $\mathbf{X}_h^1(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$  degli elementi QUAD4** Si considera uno spazio di Hilbert di funzioni reali di due variabili reali  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (ma le proprietà che verranno introdotte valgono anche per il caso a tre variabili reali) e una partizione del dominio in  $N$  elementi  $\Omega = \cup_{i=0}^{N-1} \Omega_i$  a forma di quadrilatero. La trattazione globale e locale per i casi bidimensionali e tridimensionali risulta complessa e poco utile, si preferisce in questi casi partire dalla forma canonica delle funzioni di forma per poi definire le trasformazioni che portano l'elemento canonico negli elementi reali. Si considera un elemento canonico  $\Omega_c = [-1, 1] \times [-1, 1]$  con quattro nodi rispettivamente  $x_1 = (-1, -1)$ ,  $x_2 = (1, -1)$ ,  $x_3 = (1, 1)$ ,  $x_4 = (-1, 1)$ . Definiamo le coordinate canoniche  $(\xi, \eta)$  e definiamo le funzioni di forma bidimensionali QUAD4  $N_j^1(\xi, \eta)$  come prodotto tra le funzioni di forma monodimensionali lineari tali che  $N_j^1(\xi, \eta) = 1$  nel nodo  $j$  e  $N_j^1(\xi, \eta) = 0$  in tutti gli altri. Le funzioni di forma canoniche, riportate in Figura 1.10, saranno quindi definite come

$$\begin{cases} N_1^1(\xi, \eta) = N_1^1(\xi)N_1^1(\eta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2}, \\ N_2^1(\xi, \eta) = N_2^1(\xi)N_1^1(\eta) = \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2}, \\ N_3^1(\xi, \eta) = N_2^1(\xi)N_2^1(\eta) = \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2}, \\ N_4^1(\xi, \eta) = N_1^1(\xi)N_2^1(\eta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2}. \end{cases} \quad (1.22)$$

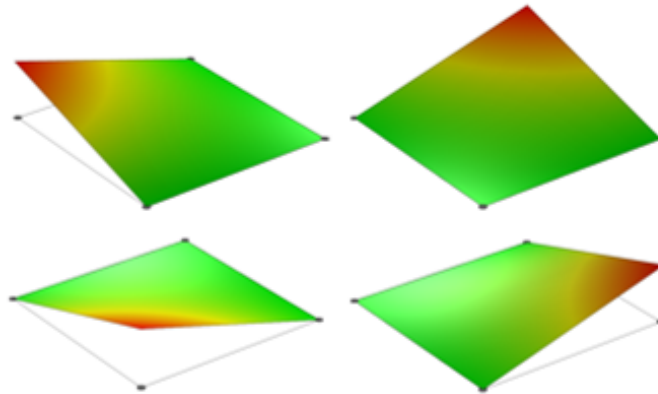


Figura 1.10: Funzione di forma bidimensionale QUAD4

Definiamo ora una trasformazione lineare  $\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi, \eta)$  che permetta il passaggio

dalle coordinate canoniche a quelle locali e viceversa:

$$\mathbf{x}^e(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^4 \mathbf{x}_j^e N_j^1(\xi, \eta) \rightarrow \begin{cases} x^e = \sum_{j=1}^4 x_j^e N_j^1(\xi, \eta), \\ y^e = \sum_{j=1}^4 y_j^e N_j^1(\xi, \eta), \end{cases} \quad (1.23)$$

dove  $(x_j^e, y_j^e)$  sono le coordinate dei vertici degli elementi locali a forma di quadrilatero. Chiamiamo  $\mathbf{X}_h^1(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$  lo spazio vettoriale di dimensione  $(N+1)(N+1)$  che ha come base l'insieme delle funzioni di forma  $N_j^{1,e}(x, y)$  lineari a tratti

$$\mathbf{X}_h^1(\Omega) = \left\{ f_h(x, y) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid f_h(x, y) = \sum_{e=0}^{N-1} f_h^e(x, y) = \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^4 f_h(x_j^e, y_j^e) N_j^{1,e}(x, y) \right\}, \quad (1.24)$$

dove  $f_h(x_i^e, y_i^e)$  è dato dal prodotto scalare dello spazio  $\mathbf{H}^1(\Omega)$

$$f_h(x_i^e, y_i^e) = \int_{\Omega} f_h(x, y) N_j^{1,e}(x, y) dx dy.$$

Il calcolo di questi integrali risulta semplificato se si effettua il cambio di variabile dalle coordinate locali a quelle canoniche con la trasformazione vista in precedenza  $\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi, \eta)$ . In questo modo si ottiene  $\int_{\Omega} f_h(x, y) N_j^{1,e}(x, y) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_h(\xi, \eta) N_j^1(\xi, \eta) |\mathbf{J}^e| d\xi d\eta$ . Il determinante della matrice Jacobiana  $|\mathbf{J}^e|$  si calcola come:

$$|\mathbf{J}^e| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^e}{\partial \xi} & \frac{\partial x^e}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y^e}{\partial \xi} & \frac{\partial y^e}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^4 x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^4 x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \eta} \\ \sum_{j=1}^4 y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^4 y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Se nell'equazione da risolvere compaiono delle derivate parziali è utile anche conoscere la matrice Jacobiana inversa

$$\mathbf{J}^{e-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x^e} & \frac{\partial \xi}{\partial y^e} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x^e} & \frac{\partial \eta}{\partial y^e} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}^e|} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^e}{\partial \eta} & -\frac{\partial x^e}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y^e}{\partial \xi} & \frac{\partial x^e}{\partial \xi} \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Da notare che  $\frac{\partial x^e}{\partial \eta}$  e  $\frac{\partial y^e}{\partial \xi}$  sono nulli se  $(x, y)$  e  $(\xi, \eta)$  sono paralleli. In tal caso sia la matrice Jacobiana sia la sua inversa sono diagonali. Prendiamo ad esempio  $\int_{\Omega} \left( \frac{\partial f_h}{\partial x} + \frac{\partial f_h}{\partial y} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \left( \frac{\partial f_h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f_h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial f_h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f_h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] |\mathbf{J}^e| d\xi d\eta$ .

**Il sottospazio  $\mathbf{X}_h^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^2(\Omega)$  degli elementi QUAD9** Nelle applicazioni pratiche, ed in particolare per la risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes, vengono richieste funzioni di forma quadratiche. Dato un elemento canonico  $\Omega_e = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , definiamo le coordinate canoniche  $(\xi, \eta)$  e le funzioni di forma bidimensionali QUAD9

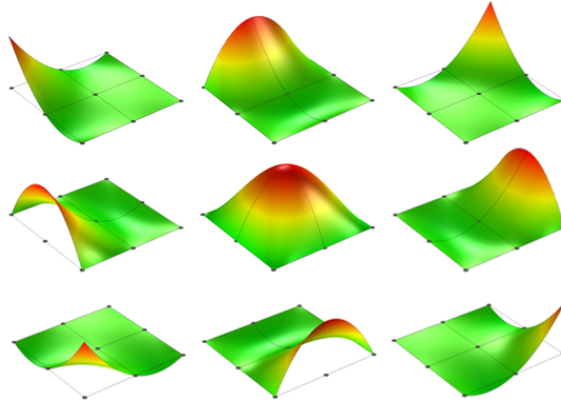


Figura 1.11: Funzioni di forma bidimensionali QUAD9

$N_j^2(\xi, \eta)$  come prodotto tra le funzioni di forma monodimensionali quadratiche tali che  $N_j^2(\xi, \eta) = 1$  nel nodo  $j$  e  $N_j^2(\xi, \eta) = 0$  in tutti gli altri. Le funzioni di forma canoniche, riportate in Figura 1.11, saranno quindi definite come

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1^2(\xi, \eta) = N_1^2(\xi)N_1^2(\eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1), \\ N_2^2(\xi, \eta) = N_2^2(\xi)N_1^2(\eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi + 1)\eta(\eta - 1), \\ N_3^2(\xi, \eta) = N_2^2(\xi)N_2^2(\eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi + 1)\eta(\eta + 1), \\ N_4^2(\xi, \eta) = N_1^2(\xi)N_2^2(\eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi - 1)\eta(\eta + 1), \\ N_5^2(\xi, \eta) = N_1^2(\xi)N_3^2(\eta) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(1 - \eta)(1 + \eta), \\ N_6^2(\xi, \eta) = N_3^2(\xi)N_1^2(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \xi)\eta(\eta - 1), \\ N_7^2(\xi, \eta) = N_2^2(\xi)N_3^2(\eta) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)(1 - \eta)(1 + \eta), \\ N_8^2(\xi, \eta) = N_3^2(\xi)N_2^2(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \xi)\eta(\eta + 1), \\ N_9^2(\xi, \eta) = N_3^2(\xi)N_3^2(\eta) = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta). \end{array} \right. \quad (1.27)$$

Definiamo una trasformazione quadratica  $\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi, \eta)$  che permetta il passaggio dalle coordinate canoniche a quelle locali e viceversa:

$$\mathbf{x}^e(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^9 \mathbf{x}_j^e N_j^2(\xi, \eta) \rightarrow \begin{cases} x^e = \sum_{j=1}^9 x_j^e N_j^2(\xi, \eta), \\ y^e = \sum_{j=1}^9 y_j^e N_j^2(\xi, \eta). \end{cases} \quad (1.28)$$

Dove  $(x_j^e, y_j^e)$  sono le coordinate dei vertici degli elementi locali a forma di quadrilatero. Chiamiamo  $\mathbf{X}_h^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^2(\Omega)$  lo spazio vettoriale di dimensione  $(2N + 1)(2N + 1)$  che

ha come base l'insieme delle funzioni di forma  $N_j^{2,e}(x, y)$  quadratiche a tratti:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h^2(\Omega) &= \left\{ f_h(x, y) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \mid f_h(x, y) = \sum_{e=0}^{N-1} f_h^e(x, y) = \right. \\ &= \left. \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^9 f_h(x_j^e, y_j^e) N_j^{2,e}(x, y) \right\}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

dove  $f_h(x_i^e, y_i^e)$  è dato dal prodotto scalare dello spazio  $\mathbf{H}^2(\Omega)$ ,

$$f_h(x_j^e, y_j^e) = \int_{\Omega} f_h(x, y) N_j^{2,e}(x, y) dx dy.$$

Per effettuare gli integrali sull'elemento canonico è necessario il calcolo del determinante della Matrice Jacobiana  $|\mathbf{J}^e|$  e per trasformare le derivate parziali spaziali in derivate nelle coordinate canoniche è necessario conoscere la matrice Jacobiana inversa  $\mathbf{J}^{e^{-1}}$ :

$$|\mathbf{J}^e| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^e}{\partial \xi} & \frac{\partial x^e}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y^e}{\partial \xi} & \frac{\partial y^e}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^9 x_j^e \frac{\partial N_j^2}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^9 x_j^e \frac{\partial N_j^2}{\partial \eta} \\ \sum_{j=1}^9 y_j^e \frac{\partial N_j^2}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^9 y_j^e \frac{\partial N_j^2}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

$$\mathbf{J}^{e^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x^e} & \frac{\partial \xi}{\partial y^e} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x^e} & \frac{\partial \eta}{\partial y^e} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}^e|} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^e}{\partial \eta} & -\frac{\partial x^e}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y^e}{\partial \xi} & \frac{\partial x^e}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

**Il sottospazio  $\mathbf{X}_h^1(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$  degli elementi HEX8** Tutti i ragionamenti fatti nei paragrafi precedenti si possono estendere anche al caso di funzioni in tre variabili spaziali. Si considera uno spazio di Hilbert di funzioni reali di due o tre variabili reali  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e una partizione del dominio in  $N$  elementi  $\Omega = \cup_{i=0}^{N-1} \Omega_i$  a forma di poligono a 6 facce. Si considera un elemento canonico  $\Omega_e = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  e definiamo le coordinate canoniche  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Inoltre definiamo le funzioni di forma tridimensionali HEX8  $N_j^1(\xi, \eta, \zeta)$  come prodotto tra le funzioni di forma monodimensionali lineari tali che  $N_j^1(\xi, \eta, \zeta)$  sia uguale a 1 nel nodo  $j$  e nulla in

tutti gli altri. Le funzioni di forma canoniche saranno quindi definite come

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1^1(\xi, \eta) = N_1^1(\xi)N_1^1(\eta)N_1^1(\zeta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2}, \\ N_2^1(\xi, \eta) = N_2^1(\xi)N_1^1(\eta)N_1^1(\zeta) = \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2}, \\ N_3^1(\xi, \eta) = N_2^1(\xi)N_2^1(\eta)N_1^1(\zeta) = \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2}, \\ N_4^1(\xi, \eta) = N_1^1(\xi)N_2^1(\eta)N_1^1(\zeta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2}, \\ N_5^1(\xi, \eta) = N_1^1(\xi)N_1^1(\eta)N_2^1(\zeta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2}, \\ N_6^1(\xi, \eta) = N_2^1(\xi)N_1^1(\eta)N_2^1(\zeta) = \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2}, \\ N_7^1(\xi, \eta) = N_2^1(\xi)N_2^1(\eta)N_2^1(\zeta) = \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2}, \\ N_8^1(\xi, \eta) = N_1^1(\xi)N_2^1(\eta)N_2^1(\zeta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2}. \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Definiamo una trasformazione lineare  $\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi, \eta, \zeta)$  che permetta il passaggio dalle coordinate canoniche a quelle locali e viceversa:

$$\mathbf{x}^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^8 \mathbf{x}_j^e N_j^1(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^e = \sum_{j=1}^8 x_j^e N_j^1(\xi, \eta, \zeta), \\ y^e = \sum_{j=1}^8 y_j^e N_j^1(\xi, \eta, \zeta), \\ z^e = \sum_{j=1}^8 z_j^e N_j^1(\xi, \eta, \zeta), \end{array} \right. \quad (1.33)$$

dove  $(x_j^e, y_j^e, z_j^e)$  sono le coordinate dei vertici degli elementi locali a forma di poligono a 6 facce. Chiamiamo  $\mathbf{X}_h^1(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$  lo spazio vettoriale di dimensione  $(N+1)(N+1)(N+1)$  che ha come base l'insieme delle funzioni di forma  $N_j^{1,e}(x, y, z)$  lineari a tratti

$$\mathbf{X}_h^1(\Omega) = \left\{ f_h(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid f_h(\mathbf{x}) = \sum_{e=0}^{N-1} f_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^8 f_h(\mathbf{x}_j^e) N_j^{1,e}(\mathbf{x}) \right\}, \quad (1.34)$$

dove  $f_h(\mathbf{x}_j^e) = f_h(x_j^e, y_j^e, z_j^e)$  è dato dal prodotto scalare dello spazio  $\mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow f_h(\mathbf{x}_j^e) = \int_{\Omega} f_h(\mathbf{x}) N_j^{1,e}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Per effettuare gli integrali sull'elemento canonico è necessario il calcolo del determinante della Matrice Jacobiana  $|\mathbf{J}^e|$ , e per trasformare le derivate parziali spaziali in derivate nelle coordinate canoniche è necessario conoscere la matrice Jacobiana inversa  $\mathbf{J}^{e-1}$

$$|\mathbf{J}^e| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^e}{\partial \xi} & \frac{\partial x^e}{\partial \eta} & \frac{\partial x^e}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y^e}{\partial \xi} & \frac{\partial y^e}{\partial \eta} & \frac{\partial y^e}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z^e}{\partial \xi} & \frac{\partial z^e}{\partial \eta} & \frac{\partial z^e}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^8 x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^8 x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \eta} & \sum_{j=1}^8 x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \zeta} \\ \sum_{j=1}^8 y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^8 y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \eta} & \sum_{j=1}^8 y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \zeta} \\ \sum_{j=1}^8 z_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^8 z_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \eta} & \sum_{j=1}^8 z_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

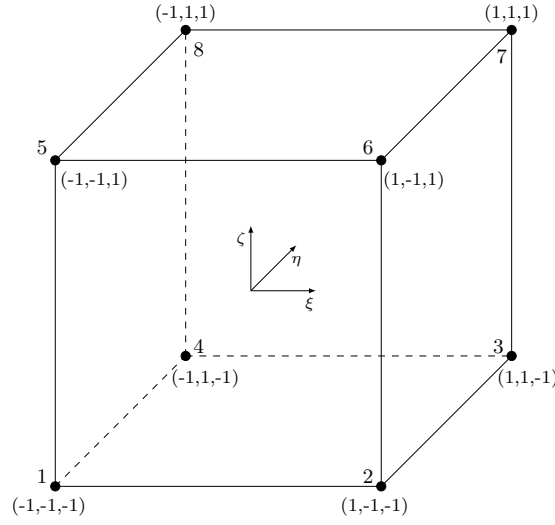


Figura 1.12: Elemento tridimensionale HEX8

$$\mathbf{J}^{e-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x^e} & \frac{\partial \xi}{\partial y^e} & \frac{\partial \xi}{\partial z^e} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x^e} & \frac{\partial \eta}{\partial y^e} & \frac{\partial \eta}{\partial z^e} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x^e} & \frac{\partial \zeta}{\partial y^e} & \frac{\partial \zeta}{\partial z^e} \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

**Il sottospazio  $\mathbf{X}_h^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^2(\Omega)$  degli elementi HEX27** Si consideri l'equivalente tridimensionale degli elementi bidimensionali QUAD9 che utilizza come base le funzioni di forma quadratiche. Si considera un elemento canonico  $\Omega_e = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  e definiamo le coordinate canoniche  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Definiamo inoltre le funzioni di forma tridimensionali HEX27  $N_j^2(\xi, \eta, \zeta)$  come prodotto tra le funzioni di forma monodimensionali quadratiche tali che  $N_j^2(\xi, \eta, \zeta)$  sia uguale a 1 nel nodo  $j$  e nulla in tutti gli altri. Definiamo una trasformazione lineare  $\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi, \eta, \zeta)$  che permetta il passaggio dalle coordinate canoniche a quelle locali e viceversa

$$\mathbf{x}^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^{27} \mathbf{x}_j^e N_j^2(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow \begin{cases} x^e = \sum_{j=1}^{27} x_j^e N_j^2(\xi, \eta, \zeta), \\ y^e = \sum_{j=1}^{27} y_j^e N_j^2(\xi, \eta, \zeta), \\ z^e = \sum_{j=1}^{27} z_j^e N_j^2(\xi, \eta, \zeta), \end{cases} \quad (1.37)$$

dove  $(x_j^e, y_j^e, z_j^e)$  sono le coordinate dei vertici degli elementi locali a forma di poligono a 6 facce. Chiamiamo  $\mathbf{X}_h^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^2(\Omega)$  lo spazio vettoriale di dimensione  $(2N+1)(2N+1)(2N+1)$  che ha come base l'insieme delle funzioni di forma  $N_j^{2,e}(x, y, z)$  lineari a

tratti

$$\mathbf{X}_h^2(\Omega) = \left\{ f_h(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \mid f_h(\mathbf{x}) = \sum_{e=0}^{N-1} f_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{27} f_h(\mathbf{x}_j^e) N_j^{2,e}(\mathbf{x}) \right\}, \quad (1.38)$$

dove  $f_h(\mathbf{x}_j^e) = f_h(x_i^e, y_i^e, z_j^e)$  è dato dal prodotto scalare dello spazio  $\mathbf{H}^2(\Omega) \rightarrow f_h(\mathbf{x}_j^e) = \int_{\Omega} f_h(\mathbf{x}) N_j^{2,e}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Per effettuare gli integrali sull'elemento canonico è necessario il

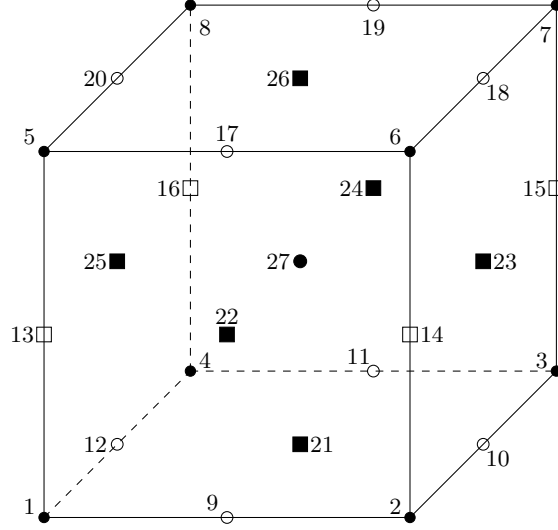


Figura 1.13: Elemento tridimensionale HEX8

calcolo del determinante della Matrice Jacobiana  $|\mathbf{J}^e|$  e per trasformare le derivate parziali spaziali in derivate nelle coordinate canoniche è necessario conoscere la matrice Jacobiana inversa  $\mathbf{J}^{e-1}$ :

$$|\mathbf{J}^e| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^e}{\partial \xi} & \frac{\partial x^e}{\partial \eta} & \frac{\partial x^e}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y^e}{\partial \xi} & \frac{\partial y^e}{\partial \eta} & \frac{\partial y^e}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z^e}{\partial \xi} & \frac{\partial z^e}{\partial \eta} & \frac{\partial z^e}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{27} x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^{27} x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \eta} & \sum_{j=1}^{27} x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \zeta} \\ \sum_{j=1}^{27} y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^{27} y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \eta} & \sum_{j=1}^{27} y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \zeta} \\ \sum_{j=1}^{27} z_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^{27} z_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \eta} & \sum_{j=1}^{27} z_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

$$\mathbf{J}^{e-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x^e} & \frac{\partial \xi}{\partial y^e} & \frac{\partial \xi}{\partial z^e} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x^e} & \frac{\partial \eta}{\partial y^e} & \frac{\partial \eta}{\partial z^e} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x^e} & \frac{\partial \zeta}{\partial y^e} & \frac{\partial \zeta}{\partial z^e} \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

**Il sottospazio  $\mathbf{X}_h^1(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$  degli elementi TRI3** Utilizzare una mesh di elementi a forma di quadrilatero non è sempre la scelta migliore, si pensi ad esempio di dover discretizzare un dominio circolare. Utilizzare invece elementi di forma triangolare risulta molto comodo in quanto i triangoli possono essere adattati a forme molto

complesse con alto grado di precisione. Per gestire al meglio figure triangolari vengono introdotte le coordinate triangolari o baricentriche  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Per ottenere le coordinate baricentriche si considera un punto qualunque  $(x, y)$  all'interno di un triangolo e si tracciano i segmenti che collegano il punto a ciascun vertice del triangolo ottenendo così 3 triangoli. Ciascuna coordinata baricentrica  $\lambda_j$  sarà uguale al rapporto fra l'area del triangolo  $A_j$  opposto al vertice  $j$  e l'area totale del triangolo. Tale passaggio di coordinate è definito dalla seguente trasformazione lineare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Dalla definizione di queste coordinate ne segue che  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ . Definiamo l'elemento canonico triangolare  $\Omega_c = [0, 0] \times [1, 0] \times [0, 1]$  e su di esso effettuiamo il passaggio in coordinate triangolari:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2, \\ y = \lambda_3. \end{cases} \quad (1.42)$$

Scegliamo delle funzioni di forma  $N_j^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  in modo che siano unitarie sul nodo

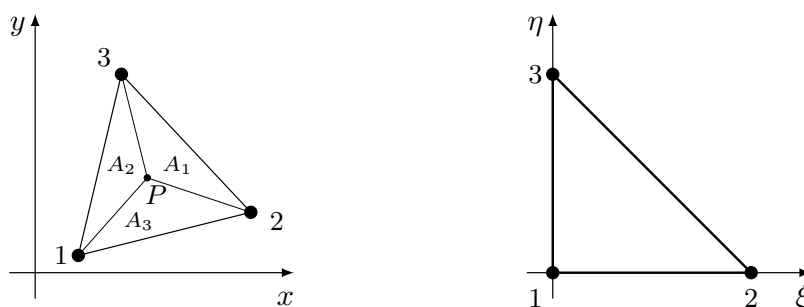


Figura 1.14: Elemento bidimensionale TRI3 locale (sinistra) e canonico (destra).

$j$  e nulle altrove. Utilizzando le coordinate baricentriche fare questo passaggio risulta molto semplice in quanto:

$$\begin{cases} N_1^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3, \\ N_2^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_2, \\ N_3^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_3. \end{cases} \quad (1.43)$$

Considerando il generico elemento  $e$  definiamo la trasformazione lineare che permetta il passaggio dalle coordinate locali  $(x^e, y^e)$  alle coordinate canoniche  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_j^e N_j^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (1.44)$$

Chiamiamo  $\mathbf{X}_h^1(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$  lo spazio vettoriale di dimensione  $N + 1$  che ha come base l'insieme delle funzioni di forma  $N_j^{1,e}(x, y)$  lineari a tratti

$$\mathbf{X}_h^1(\Omega) = \left\{ f_h(x, y) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \left| f_h(x, y) = \sum_{e=0}^{N-1} f_h^e(x, y) = \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^3 f_h(x_j^e, y_j^e) N_j^{1,e}(x, y) \right. \right\} \quad (1.45)$$

Dove  $f_h(x_j^e, y_j^e)$  è dato dal prodotto scalare dello spazio  $\mathbf{H}^1(\Omega)$

$$f_h(x_j^e, y_j^e) = \int_{\Omega} f_h(x, y) N_j^{1,e}(x, y) dx dy.$$

Per calcolare la matrice Jacobiana  $\mathbf{J}^e$  di questa trasformazione possiamo scegliere due delle tre coordinate triangolari in quanto una è linearmente dipendente dalle altre.

Scegliamo per comodità  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$\mathbf{J}^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^e}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial x^e}{\partial \lambda_3} \\ \frac{\partial y^e}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial y^e}{\partial \lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_2} & \sum_{j=1}^3 x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_3} \\ \sum_{j=1}^3 y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_2} & \sum_{j=1}^3 y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^e + x_2^e & -x_1^e + x_3^e \\ -y_1^e + y_2^e & -y_1^e + y_3^e \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

$$|\mathbf{J}^e| = (-x_1^e + x_2^e)(-y_1^e + y_3^e) - (-x_1^e + x_3^e)(-y_1^e + y_2^e)$$

$$\mathbf{J}^{e^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^e} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y^e} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^e} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial y^e} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}^e|} \begin{pmatrix} -y_1^e + y_3^e & x_1^e - x_3^e \\ y_1^e - y_2^e & -x_1^e + x_2^e \end{pmatrix}.$$

Il calcolo degli integrali sugli elementi viene effettuato passando alle coordinate canoniche:  $\int_{\Omega} f_h(x, y) N_j^{1,e}(x, y) dx dy = \int_{TRI3} f_h(\lambda_2, \lambda_3) N_j^1(\lambda_2, \lambda_3) |\mathbf{J}^e| d\lambda_2 d\lambda_3$ ; tale integrale sarà valutato con il metodo di quadratura di Gauss. Se nell'equazione sono presenti delle derivate serve effettuare il cambio di coordinate anche su di esse, ad esempio

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial f_h}{\partial x} + \frac{\partial f_h}{\partial y} \right) dx dy = \int_{TRI3} \left[ \left( \frac{\partial f_h}{\partial \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\partial x} + \frac{\partial f_h}{\partial \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial f_h}{\partial \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\partial y} + \frac{\partial f_h}{\partial \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\partial y} \right) \right] d\lambda_2 d\lambda_3.$$

**Il sottospazio  $\mathbf{X}_h^1(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$  degli elementi TETRA4** Il concetto delle coordinate triangolari esposto nel capitolo precedente è estendibile al caso tridimensionale quando si utilizza una mesh di poligoni a quattro facce. Si considera un punto  $(x, y, z)$  all'interno di un elemento della mesh e si tracciano i quattro segmenti che collegano

il punto ai vertici del poligono ottenendo così 4 poligoni a quattro facce. Ciascuna coordinata baricentrica  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  sarà uguale al rapporto fra il volume del solido  $V_j$  opposto al vertice  $j$  e il volume totale del poligono; tale passaggio di coordinate è definito dalla seguente trasformazione lineare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Dalla definizione di queste coordinate ne segue che  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ . Definiamo l'elemento canonico tetragonale  $\Omega_c = [0, 0, 0] \times [1, 0, 0] \times [0, 1, 0] \times [0, 0, 1]$  e su di esso effettuiamo il passaggio in coordinate triangolari

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2, \\ y = \lambda_3, \\ z = \lambda_4. \end{cases} \quad (1.48)$$

Scegliamo delle funzioni di forma  $N_j^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  in modo che siano unitarie sul nodo  $j$  e nulle altrove. Utilizzando le coordinate baricentriche fare questo passaggio risulta molto semplice in quanto

$$\begin{cases} N_1^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, \\ N_2^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_2, \\ N_3^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_3, \\ N_4^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_4. \end{cases} \quad (1.49)$$

Considerando il generico elemento  $e$  definiamo la trasformazione lineare che permetta il passaggio dalle coordinate locali  $(x^e, y^e, z^e)$  alle coordinate canoniche  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_j^e N_j^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \quad (1.50)$$

Chiamiamo  $\mathbf{X}_h^1(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$  lo spazio vettoriale di dimensione  $N + 1$  che ha come base l'insieme delle funzioni di forma  $N_j^{1,e}(x, y, z)$  lineari a tratti

$$\mathbf{X}_h^1(\Omega) = \left\{ f_h(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \left| f_h(\mathbf{x}) = \sum_{e=0}^{N-1} f_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{j=1}^4 f_h(\mathbf{x}_j^e) N_j^{1,e}(\mathbf{x}) \right. \right\}, \quad (1.51)$$

dove  $f_h(\mathbf{x}_j^e) = f_h(x_j^e, y_j^e, z_j^e)$  è dato dal prodotto scalare dello spazio  $\mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow f_h(\mathbf{x}_j^e) = \int_{\Omega} f_h(\mathbf{x}) N_j^{1,e}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Per calcolare la matrice Jacobiana  $\mathbf{J}^e$  di questa trasformazione

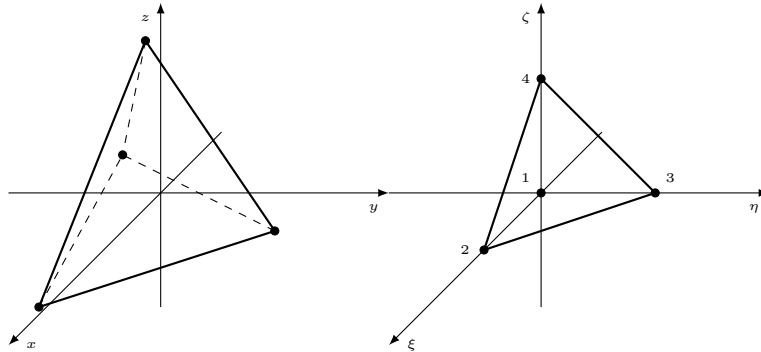


Figura 1.15: Elemento bidimensionale TRI3 (sinistra), ed elemento canonico (destra).

possiamo scegliere tre delle quattro coordinate triangolari in quanto una è linearmente dipendente dalle altre; scegliamo per comodità  $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

$$\mathbf{J}^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^e}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial x^e}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial x^e}{\partial \lambda_4} \\ \frac{\partial y^e}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial y^e}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial y^e}{\partial \lambda_4} \\ \frac{\partial z^e}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial z^e}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial z^e}{\partial \lambda_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^4 x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_2} & \sum_{j=1}^4 x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_3} & \sum_{j=1}^4 x_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_4} \\ \sum_{j=1}^4 y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_2} & \sum_{j=1}^4 y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_3} & \sum_{j=1}^4 y_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_4} \\ \sum_{j=1}^4 z_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_2} & \sum_{j=1}^4 z_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_3} & \sum_{j=1}^4 z_j^e \frac{\partial N_j^1}{\partial \lambda_4} \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{J}^{e^{-1}} = \frac{1}{|\mathbf{J}^e|} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^e} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y^e} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial z^e} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^e} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial y^e} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial z^e} \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial x^e} & \frac{\partial \lambda_4}{\partial y^e} & \frac{\partial \lambda_4}{\partial z^e} \end{pmatrix}.$$

Il calcolo degli integrali sugli elementi viene effettuato passando alle coordinate canoniche:  $\int_{\Omega} f_h(\mathbf{x}) N_j^{1,e}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{TETRA4} f_h(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) N_j^1(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) |\mathbf{J}^e| d\lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_4$ ; tale integrale sarà valutato con il metodo di quadratura di Gauss.

## 1.4 Integrazione con il metodo di quadratura di Gauss

Nei paragrafi precedenti è stato citato il metodo di quadratura di Gauss per il calcolo degli integrali sugli elementi canonici. Questo metodo di integrazione permette il calcolo di integrali di funzioni polinomiali senza il calcolo delle primitive delle funzioni stesse. Il valore dell'integrale dipenderà univocamente dai coefficienti del polinomio da integrare; questo approccio risulta molto efficiente dal punto di vista computazionale.

L'integrazione con il metodo di quadratura di Gauss si basa sul concetto di sviluppo in polinomi di Legendre. Data una funzione  $f : [-1, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \in L^2[-1, 1]$  i polinomi di Legendre  $L_n(x)$  costituiscono una base ortogonale di tale spazio; per ricavare tali polinomi ortogonali serve ricordare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt serve per trasformare una base di vettori  $\{\mathbf{v}_i\}$  non ortonormale in una sua equivalente ortonormale  $\{\mathbf{e}_i\}$  tramite il prodotto scalare. Per fare ciò si parte da uno qualsiasi dei vettori della base  $\mathbf{e}_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{\|\mathbf{v}_0\|} \mathbf{v}_0$ , il vettore successivo  $\mathbf{v}_1$  viene trasformato nel vettore  $\mathbf{e}_1$  imponendo il prodotto scalare tra i due vettori uguale a zero e modulo del risultante unitario  $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{e}_0 \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{e}_0 \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{v}_1 \rangle\|}$ . Ciascun vettore della base ortonormale sarà quindi calcolato come

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{e}_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{e}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{e}_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{e}_j \rangle\|}. \quad (1.53)$$

Considerando come base di vettori non ortonormali dello spazio  $L^2[-1, 1]$  le funzioni  $\{x^n\} = \{1, x, x^2, \dots\}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , il prodotto scalare  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$  e la norma indotta  $\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^1 f^2(x)dx}$ , si costruiscono i polinomi di Legendre  $L_n(x)$  ortonormalizzando la base  $\{x^n\}$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^1 1^2 dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ L_1(x) &= \frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} x dx}{\sqrt{\int_{-1}^1 \left[ x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} x dx \right]^2 dx}} = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \\ L_2(x) &= \frac{x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 dx - \sqrt{\frac{3}{2}} x \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} x \times x^2 dx}{\sqrt{\int_{-1}^1 \left[ x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 dx - \sqrt{\frac{3}{2}} x \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} x \times x^2 dx \right]^2 dx}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &\dots \\ L_n(x) &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{aligned}$$

Ogni funzione  $f \in L^2[-1, 1]$  potrà quindi esser scritta come combinazione lineare di opportuni coefficienti reali e dei polinomi  $L_n(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n L_n(x), \quad \alpha_n \in \mathbb{R}. \quad (1.54)$$

Per ricavare i coefficienti  $\alpha_n$  si moltiplica tale relazione per  $L_k(x)$  e si integra da  $-1$  e  $1$

$$\int_{-1}^1 f(x) L_k(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_{-1}^1 L_n(x) L_k(x) dx.$$

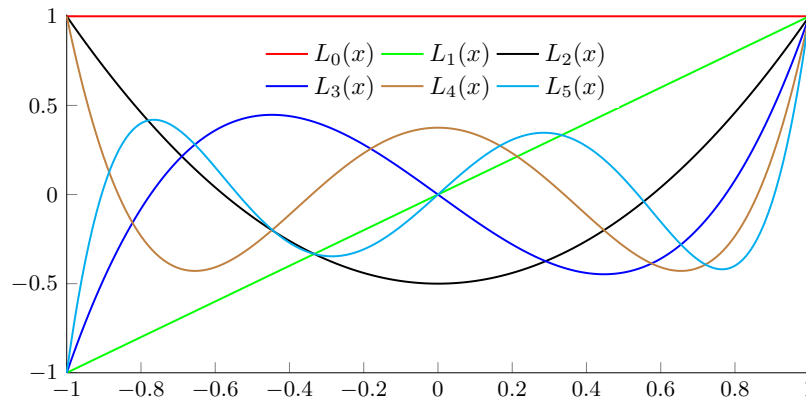


Figura 1.16: Polinomi di Legendre fino all'ordine 5

L'integrale  $\int_{-1}^1 L_n(x)L_k(x)dx$ , essendo i polinomi di Legendre ortogonali, soddisfa la seguente relazione di ortogonalità

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_k(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_k^n \rightarrow \int_{-1}^1 f(x)L_k(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{2}{2n+1}\delta_k^n. \quad (1.55)$$

I termini della sommatoria saranno tutti nulli tranne quello con  $k = n$

$$\int_{-1}^1 f(x)L_n(x)dx = \alpha_n \frac{2}{2n+1} \rightarrow \alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)L_n(x)dx. \quad (1.56)$$

Avendo definito i polinomi di Legendre si può dimostrare che l'integrale di un polinomio  $p(x)$  da  $-1$  a  $1$  è calcolabile esattamente tramite la sommatoria dei valori del polinomio calcolati negli zeri dei polinomi di Legendre  $\xi_g$  moltiplicati per opportuni pesi  $w_g$

$$\int_{-1}^1 p(x)dx = \sum_g w_g p(\xi_g). \quad (1.57)$$

Il numero di pesi da considerare dipende dal numero dei nodi dell'elemento sul quale si vuole integrare, ad esempio se si vuole integrare sull'elemento EDGE2 servono 2 nodi mentre sull'elemento EDGE3 ne serviranno 3. Definendo i polinomi di Legendre anche per domini bidimensionali e tridimensionali è possibile trovare formule di quadratura anche per gli elementi canonici QUAD4, QUAD9, TRI3, HEX8, HEX27, TETRA4. Nella tabella 1.1 sono riportati alcuni valori di  $\xi_g$  e i corrispondenti  $w_g$  per funzioni di una sola variabile. Prendiamo come esempio il polinomio  $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 4$  e

$n$	$\xi_g$	$w_g$
1	0	2
2	$\pm\sqrt{3}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{3/5}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{(3 - 2\sqrt{6/5})/7}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{(3 + 2\sqrt{6/5})/7}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

Tabella 1.1: Tabella rappresentativa di punti  $\xi_g$  e pesi  $w_g$  di Gauss fino al quarto ordine.

calcoliamone l'integrale da  $-1$  a  $1$  utilizzando  $n_g = 3$  nodi di Gauss

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 4) dx &= \frac{8}{9}p(0) + \frac{5}{9}p\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}p\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \\
 &= \frac{8}{9}(-4) + \frac{5}{9}\left[4\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 - 5\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + 6\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) - 4\right] + \\
 &+ \frac{5}{9}\left[4\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 - 5\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + 6\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) - 4\right] = -\frac{34}{3}.
 \end{aligned}$$

# Capitolo 2

## Laplaciano Frazionario

I concetti di derivata e integrale sono alla base di tutta l'analisi matematica [3, 4]. Data una qualunque funzione reale  $f$  a variabile reale  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f = f(x)$  è possibile definirne la derivata prima, o di ordine 1 come  $D^1 f = \frac{df}{dx}$ , e la derivata seconda o di ordine 2 come  $D^2 f = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx}$ , eccetera. Esiste un settore della matematica chiamato *calcolo frazionario* che si occupa di estendere i concetti di derivata e integrale ad un ordine arbitrario  $\alpha \in \mathbb{R}$  introducendo così i concetti di *derivata frazionaria*  $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$  e *integrale frazionario*  $J^\alpha f$  per qualsiasi valore di  $\alpha$ . Per  $J^\alpha f$  si intende

$$\begin{aligned} J^0 f(x) &= f(x), \\ J^1 f(x) &= \int_0^x f(x_1) dx_1, \\ J^2 f(x) &= \int_0^x \int_0^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2, \\ &\dots \\ J^k f(x) &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-t)^{k-1} f(t) dt \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

L'equazione (2.1) è chiamata *formula di Cauchy per integrazioni ripetute* e si dimostra applicando ricorsivamente la formula d'integrazione per parti [5]. Tramite la funzione Gamma di Eulero  $\Gamma(x)$  è possibile però estendere il concetto di fattoriale a qualsiasi numero reale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \forall x > 0. \tag{2.2}$$

Si può dimostrare che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $\Gamma(n+1) = n!$ . Utilizzando la funzione Gamma è quindi possibile estendere la formula di Cauchy (2.1) per ordini qualsiasi

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Tramite questa estensione è possibile calcolare integrali di qualsiasi ordine. Tuttavia, per generalizzare l'operazione di derivazione il procedimento è più complesso. Si considerano ad esempio le funzioni  $f(x) = x^n$  le cui derivate sono

$$\begin{aligned} D^0 f(x) &= x^n, \\ D^1 f(x) &= nx^{n-1}, \\ D^2 f(x) &= n(n-1)x^{n-2}, \\ &\dots \\ D^k f(x) &= \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Questa formula permette di calcolare le derivate di qualunque ordine a patto che  $k$  sia un numero naturale a causa dei fattoriali. È possibile riscrivere la derivata di ordine  $k$  (2.4) utilizzando la funzione  $\Gamma(x)$  come

$$D^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}. \quad (2.5)$$

Si consideri ad esempio la funzione  $y = x$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$  otteniamo la *derivata mezza*

$$D^{\frac{1}{2}} x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2})+1} x^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}},$$

essendo  $\Gamma(2) = 1! = 1$  e  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  vale che

$$D^{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Per dimostrare la consistenza delle derivate frazionarie introdotte serve che  $D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} x = D^1 x = 1$ , quindi

$$D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} x = D^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} D^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)} x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1.$$

Questa definizione di derivata frazionaria, valida solo per le potenze, è pertanto consistente ( si veda anche Figura 2.1). Utilizzando la formula d'integrazione generalizzata

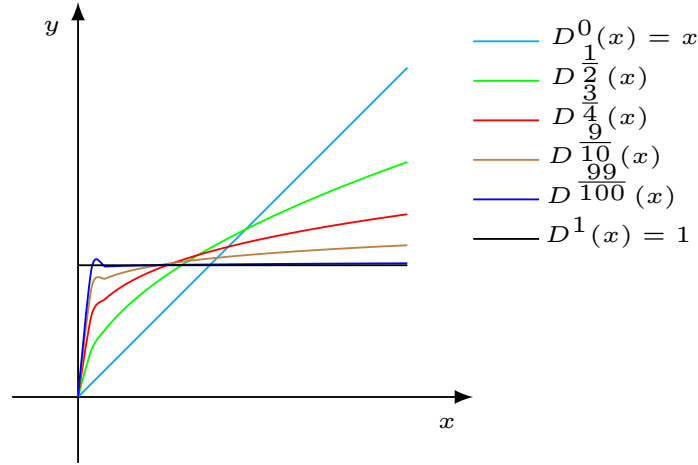


Figura 2.1: Grafici delle derivate frazionarie della retta  $y = x$  per  $x \in [0, 1]$ . Si nota che per  $\alpha \rightarrow 1$  le derivate frazionarie coincidono con la derivata prima della retta  $\frac{d}{dx}(x) = 1$ .

(2.3) è possibile costruire una formula valida per la derivata di ordine qualsiasi

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt. \quad (2.7)$$

Si può effettuare un ragionamento simile passando il concetto di trasformata di Laplace. La trasformata di Laplace  $\mathcal{L}$  di una funzione reale  $f(x)$  con  $x > 0$  è un'operatore che trasforma tale funzione in un'altra funzione  $f_{\mathcal{L}}(s)$  definita come

$$f_{\mathcal{L}}(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx. \quad (2.8)$$

La particolarità di questo operatore è che trasforma le operazioni di derivata e integrale in prodotti e divisioni, rispettivamente

$$\mathcal{L}[Df(x)] = s f_{\mathcal{L}}(s), \quad \mathcal{L}[D^2 f(x)] = s^2 f_{\mathcal{L}}(s), \quad \dots \quad \mathcal{L}[D^k f(x)] = s^k f_{\mathcal{L}}(s), \quad (2.9)$$

$$\mathcal{L}[Jf(x)] = \frac{1}{s} f_{\mathcal{L}}(s), \quad \mathcal{L}[J^2 f(x)] = \frac{1}{s^2} f_{\mathcal{L}}(s), \quad \dots \quad \mathcal{L}[J^k f(x)] = \frac{1}{s^k} f_{\mathcal{L}}(s). \quad (2.10)$$

Se si considera  $\alpha \in \mathbb{R}$  e si definisce un operatore integro-differenziale  $D^\alpha$  valido sia per  $\alpha$  positivi che negativi vale che

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(x)] = s^\alpha f_{\mathcal{L}}(s) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Con l'equazione (2.11) è possibile calcolare derivate e integrali di qualsiasi ordine nello spazio delle trasformate di Laplace, serve poi effettuare un'antitrasformata per ritornare allo spazio funzionale iniziale.

## 2.1 Laplaciano Frazionario di Riesz

Il calcolo frazionario è un settore dell'analisi matematica molto ampio e i matematici che hanno contribuito ad ampliare tale ramo hanno dato varie definizioni di derivate e integrali frazionari, come ad esempio l'integrale di Reimann-Liouville [6]

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt. \quad (2.12)$$

Serve poi estendere il calcolo frazionario al caso multidimensionale. L'esigenza di definire un operatore Laplaciano frazionario nasce da un noto teorema dell'analisi funzionale chiamato *Teorema della traccia* [7] che correla lo spazio di appartenenza di una funzione definita su un dominio  $\Omega$  allo spazio di appartenenza della restrizione di tale funzione alla frontiera del suo dominio  $\partial\Omega$ . In particolare è possibile dimostrare che se una funzione  $f \in H^1(\Omega)$  allora la sua restrizione alla frontiera del dominio sta in  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  dando così luogo agli spazi di Sobolev frazionari. In questo lavoro verrà usato il *Laplaciano frazionario di Riesz* e nei prossimi paragrafi verranno introdotte le basi per definire tale operatore partendo dagli spazi di Sobolev frazionari.

### 2.1.1 Spazi di Sobolev Frazionari $W^{s,p}(\Omega)$

Dato  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , per ogni  $s \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$  e per ogni  $p \in [1, +\infty) \subset \mathbb{N}$  si definisce spazio di Sobolev frazionario (o spazio di Slobodeckij [8])  $W^{s,p}(\Omega)$  come

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathbf{L}^p(\Omega) : \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}. \quad (2.13)$$

Si può considerare lo spazio  $W^{s,p}$  come uno spazio di Banach intermedio tra  $L^p$  e  $W^{1,p}$  la cui norma è definita come

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+sp}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.14)$$

Si definisce seminorma di Slobodeckij  $[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$  [8] il termine

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+sp}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.15)$$

In questo lavoro si considerano solo il caso di  $p = 2$ , di conseguenza  $W^{s,p}(\Omega) = H^s(\Omega)$  è uno spazio di Hilbert. Vale quindi che

$$H^1(\Omega) \subset H^s(\Omega). \quad (2.16)$$

Lo spazio  $H^s(\Omega)$  è quindi definito come

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{n}{2}+s}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\}. \quad (2.17)$$

### 2.1.2 Laplaciano frazionario come operatore non locale

Si considera d'ora in poi il caso di  $p = 2$ . Consideriamo come dominio  $\Omega$  l'intero spazio  $\mathbb{R}^n$ . Si definisce *Laplaciano frazionario* l'operatore  $(-\Delta)^s$  definito come

$$(-\Delta)^s u(\mathbf{x}) = C_{n,s} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y}, \quad 0 < s < 1, \quad (2.18)$$

dove *P.V.* sta per *Principal Value* [8] e  $C_{n,s}$  è un termine costante che dipende da  $s$  e da  $n$ . Il suo valore può essere valutato come

$$C_{n,s} = s 2^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2s}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1-s)}. \quad (2.19)$$

Nella definizione del Laplaciano frazionario è presente un integrale su tutto  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbf{y}$ , ciò significa che il Laplaciano frazionario calcolato in un generico punto  $\mathbf{x}$  è influenzato da tutti i valori della funzione  $u(\mathbf{x})$  nel dominio. Il fatto che il valore di  $(-\Delta)^s u(\mathbf{x})$  non dipenda solo da  $\mathbf{x}$  ma da tutti i valori della funzione nel dominio rende tale operatore un *operatore non locale*. Gli operatori non locali sono molto usati in problemi di diffusione in quanto tante grandezze risultano essere non locali, si pensi ad esempio ai materiali con memoria di forma. L'implementazione numerica degli operatori non locali non è banale. In seguito viene fatta un'introduzione a questo tipo di operatori.

**Operatori non locali** Recentemente, gli operatori non locali sono molto studiati per le loro molteplici applicazioni quali meccanica del continuo [9], equazioni cinetiche [10], transizioni di fase [11], problemi di conduzione del calore non locale, modelli di turbolenza, etc. In particolare, i modelli non locali sono usati in tutti quei settori dove i classici modelli "locali" non riescono a descrivere correttamente la fisica dei problemi studiati. Nei modelli classici, le PDE modellano l'interazione di due domini causata dal contatto di questi. Nei modelli non locali l'interazione può avvenire anche a distanza. In particolare, dato  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  si definisce un operatore di diffusione non locale  $\mathcal{L}$  applicato ad una funzione  $u(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$\mathcal{L}[u(\mathbf{x})] = 2 \int_{\mathbb{R}^n} (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.20)$$

dove il kernel  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una mappa simmetrica e non negativa [12]. Il Laplaciano frazionario può quindi essere visto come un caso particolare di operatore non locale. Nei prossimi paragrafi, si considera una semplice applicazione del Laplaciano frazionario al fine di introdurre la forma debole e discretizzazione in un sistema agli elementi finiti.

## 2.2 Equazione di diffusione stazionaria non locale

Si considera ora l'equazione del calore stazionaria. Classicamente l'equazione che descrive come la temperatura  $T$  in un sistema si distribuisce in funzione delle condizioni al contorno è l'equazione di Laplace ad esempio

$$\begin{cases} -k\Delta T = f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ T(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega_D, \\ \nabla T \cdot \mathbf{n} = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega_N, \end{cases}$$

dove  $k$  è la conducibilità termica,  $\partial\Omega_D$  e  $\partial\Omega_N$  sono le porzioni della frontiera del dominio alle quali sono applicate rispettivamente condizioni di Dirichlet e di Neumann. Se il problema fisico del quale si vuole risolvere l'equazione di diffusione fosse di tipo non locale si avrebbe il seguente problema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}[T] = f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ T(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega_l. \end{cases} \quad (2.21)$$

In questo tipo problemi le condizioni al contorno sono imposte in un volume d'interazione  $\Omega_l$  disgiunto da  $\Omega$ . In analisi numerica solitamente  $\Omega_l$  è un dominio finito che circonda  $\Omega$ . In particolare un dominio  $\Omega_l$  comunemente utilizzato è la circonferenza di raggio  $\delta$  indicata con  $B_\delta(x)$  (si veda [12]). In questo caso il dominio  $\Omega_l$  è definito come

$$\Omega_l = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \quad : \quad \mathbf{y} \in B_\delta(x) \text{ per alcuni } x \in \Omega \}. \quad (2.22)$$

Si può facilmente notare che il Laplaciano frazionario non è altro che un operatore non locale con un particolare kernel  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  definito come

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{C_{n,s}}{2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad 0 < s < 1. \quad (2.23)$$

L'operatore non locale risulta quindi essere pari al Laplaciano frazionario

$$-\mathcal{L}[u(\mathbf{x})] = (-\Delta)^s u(\mathbf{x}), \quad (2.24)$$

e il problema di diffusione non locale diventa

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega_l \end{cases}. \quad (2.25)$$

### 2.2.1 Forma debole del problema di diffusione non locale

Consideriamo una grandezza  $u(\mathbf{x})$  che si diffonde un modo stazionario in un dominio  $\Omega$  secondo l'equazione di diffusione non locale

$$(-\Delta)^s u(\mathbf{x}) = f(x). \quad (2.26)$$

Per ogni funzione test  $v \in H_{\Omega}^s(\mathbb{R}^n)$ , è possibile scrivere il problema (2.26) in forma debole come

$$\frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2s}} (v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{x})) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.27)$$

Si noti che il doppio integrale nel membro di sinistra calcolato su tutto  $\mathbb{R}^n$ . Tuttavia, in questo lavoro verranno considerati domini finiti, e pertanto occorre restringere le funzioni  $u(\mathbf{x})$  e  $v(\mathbf{x})$  al solo dominio del problema  $\Omega$ . Questo viene fatto ponendo

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}, \quad v(\mathbf{x}) = \begin{cases} v(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}. \quad (2.28)$$

La discretizzazione della forma debole permette di trovare soluzioni numeriche all'equazione non locale. Recentemente sono stati pubblicati vari lavori riguardo a questo [13, 14, 15]. In questo lavoro si ricaveranno soluzioni numeriche solo in caso di condizioni di Dirichlet omogenee sul dominio  $\Omega$  utilizzando, come detto in precedenza, il metodo di Riesz. Il doppio integrale presente a primo membro nella (2.27) può essere suddiviso come

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \cdot d\mathbf{y} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \cdot d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \cdot d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \\ &+ \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \cdot d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \cdot d\mathbf{y} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Considerando le due condizioni (2.28) è facile dimostrare che il quarto integrale è nullo, in quanto sono presenti al suo interno solo funzioni nulle

$$\frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2s}} (v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{x})) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = 0. \quad (2.30)$$

Allo stesso tempo, si può dimostrare che il secondo e il terzo integrale coincidono e sono pari a

$$\begin{aligned} & \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2s}} (v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{x})) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \\ & = \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2s}} (v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{x})) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \\ & = \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2s}} d\mathbf{y} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

L'equazione del calore stazionaria non locale in forma debole diventa quindi

$$\begin{aligned} & \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2s}} (v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})) d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \\ & + C_{n,s} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

per ogni  $v \in H_{\Omega}^s(\mathbb{R}^n)$ .

### 2.2.2 Approssimazione FEM

La funzione  $u(\mathbf{x})$  che risolve il problema in forma debole (2.32) è anch'essa appartenente allo spazio  $H_{\Omega}^s(\mathbb{R}^n)$  il quale è uno spazio funzionale di dimensione infinita. Affinché sia possibile risolvere numericamente questo problema serve approssimare la soluzione in uno spazio funzionale di dimensione finita tra quelli introdotti nel Capitolo 1. Per fare questo, si suddivide il dominio  $\Omega$  in  $N$  elementi disgiunti  $\Omega = \cup_{e=0}^{N-1} \Omega_e$ , ottenendo così

$$\begin{aligned} & \sum_{e=0}^{N-1} \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \frac{u^e(\mathbf{y}^e) - u^e(\mathbf{x}^e)}{|\mathbf{y}^e - \mathbf{x}^e|^{n+2s}} (v^e(\mathbf{x}^e) - v^e(\mathbf{y}^e)) d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e + \\ & + \sum_{e=0}^{N-1} C_{n,s} \int_{\Omega_e} u^e(\mathbf{x}^e) v^e(\mathbf{x}^e) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_e} \frac{1}{|\mathbf{x}^e - \mathbf{y}^e|^{n+2s}} d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e = \\ & = \sum_{e=0}^{N-1} \int_{\Omega_e} f^e(\mathbf{x}^e) v^e(\mathbf{x}^e) d\mathbf{x}^e. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Si considerano le funzioni test  $v^e = N_i^{2,e} \in X_h^2(\Omega)$ , basi dello spazio funzionale di dimensione finita delle funzioni di forma quadratiche. Di conseguenza si avrà per ogni

elemento  $\Omega_e$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \frac{u^e(\mathbf{y}^e) - u^e(\mathbf{x}^e)}{|\mathbf{y}^e - \mathbf{x}^e|^{n+2s}} (N_i^{2,e}(\mathbf{x}^e) - N_i^{2,e}(\mathbf{y}^e)) d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e + \\ & + C_{n,s} \int_{\Omega_e} u^e(\mathbf{x}^e) N_i^{2,e}(\mathbf{x}^e) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_e} \frac{1}{|\mathbf{x}^e - \mathbf{y}^e|^{n+2s}} d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e = \\ & = \int_{\Omega_e} f^e(\mathbf{x}^e) N_i^{2,e}(\mathbf{x}^e) d\mathbf{x}^e, \end{aligned} \quad (2.34)$$

con  $i \in [1, n]$ , dove  $n$  rappresenta il numero di nodi dell'elemento  $\Omega_e$ . Essendo l'insieme  $X_h^2(\Omega)$  uno spazio di Hilbert, qualsiasi funzione può essere espressa come combinazione lineare dei vettori della base di tale spazio

$$u^e(\mathbf{x}^e) = \sum_{j=1}^n u_j^e N_j^{2,e}(\mathbf{x}^e). \quad (2.35)$$

L'equazione è quindi esprimibile come

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \frac{u_j^e N_j^{2,e}(\mathbf{y}^e) - u_j^e N_j^{2,e}(\mathbf{x}^e)}{|\mathbf{y}^e - \mathbf{x}^e|^{n+2s}} (N_i^{2,e}(\mathbf{y}^e) - N_i^{2,e}(\mathbf{x}^e)) d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e + \\ & + \sum_{j=1}^n C_{n,s} \int_{\Omega_e} u_j^e N_j^{2,e}(\mathbf{x}^e) N_i^{2,e}(\mathbf{x}^e) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_e} \frac{1}{|\mathbf{x}^e - \mathbf{y}^e|^{n+2s}} d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e = \\ & = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_e} f^e(\mathbf{x}^e) N_i^{2,e}(\mathbf{x}^e) d\mathbf{x}^e, \end{aligned} \quad (2.36)$$

per ogni  $i \in [1, n]$ . Si è così ottenuta la *forma locale* del problema (2.25).

Il problema differenziale di diffusione stazionaria non locale (2.25) è diventato, tramite il passaggio in forma debole e la scomposizione secondo una base di uno spazio funzionale, un problema algebrico lineare in forma locale del tipo

$$A_{ij}^e u_j^e = \text{RHS}_i^e, \quad (2.37)$$

dove  $A_{ij}^e$  è chiamata *matrice locale* e rappresenta la fisica del problema

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \frac{N_j^{2,e}(\mathbf{y}^e) - N_j^{2,e}(\mathbf{x}^e)}{|\mathbf{y}^e - \mathbf{x}^e|^{n+2s}} (N_i^{2,e}(\mathbf{y}^e) - N_i^{2,e}(\mathbf{x}^e)) d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e + \\ & + C_{n,s} \int_{\Omega_e} N_j^{2,e}(\mathbf{x}^e) N_i^{2,e}(\mathbf{x}^e) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_e} \frac{1}{|\mathbf{x}^e - \mathbf{y}^e|^{n+2s}} d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Il vettore  $u_j^e$  è chiamato *vettore delle incognite locali* e rappresenta la soluzione dell'equazione nello spazio funzionale  $X_h^2(\Omega)$ , mentre il termine  $\text{RHS}_i^e$  è il vettore del termine forzante

$$\text{RHS}_i^e = \int_{\Omega_e} f^e(\mathbf{x}^e) N_i^{2,e}(\mathbf{x}^e) d\mathbf{x}^e. \quad (2.39)$$

Per poter calcolare comodamente tutti gli integrali che compongono  $A_{ij}^e$  e  $\text{RHS}_i^e$  risulta molto comodo effettuare un cambio di variabile tale per cui il dominio d'integrazione  $\Omega_e \in \mathbb{R}^n$  diventi l'elemento canonico  $\mathcal{Q} = \{[-1, 1], [-1, 1]\}$ . Questa trasformazione, già citata nel Capitolo 1, si può scrivere come

$$\begin{cases} \mathbf{x}^e(\boldsymbol{\xi}_x) = \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j^e N_{j,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x), \\ \mathbf{y}^e(\boldsymbol{\xi}_y) = \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j^e N_{j,y}^2(\boldsymbol{\xi}_y), \end{cases} \quad (2.40)$$

dove  $N_{j,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x)$  e  $N_{j,y}^2(\boldsymbol{\xi}_y)$  sono le funzioni di forma canoniche delle variabili canoniche  $\boldsymbol{\xi}_x$  e  $\boldsymbol{\xi}_y$ . Effettuando tale cambio di coordinate si ottiene

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathcal{Q}} \int_{\mathcal{Q}} \frac{N_{j,y}^2(\boldsymbol{\xi}_y) - N_{j,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x)}{|\mathbf{y}^e(\boldsymbol{\xi}_y) - \mathbf{x}^e(\boldsymbol{\xi}_x)|^{n+2s}} (N_{i,y}^2(\boldsymbol{\xi}_y) - N_{i,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x)) |\mathbf{J}_y^e(\boldsymbol{\xi}_y)| |\mathbf{J}_x^e(\boldsymbol{\xi}_x)| d\boldsymbol{\xi}_y d\boldsymbol{\xi}_x + \\ &+ C_{n,s} \int_{\mathcal{Q}} N_{j,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x) N_{i,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathbf{y}^e(\boldsymbol{\xi}_y) - \mathbf{x}^e(\boldsymbol{\xi}_x)|^{n+2s}} |\mathbf{J}_y^e(\boldsymbol{\xi}_y)| |\mathbf{J}_x^e(\boldsymbol{\xi}_x)| d\boldsymbol{\xi}_y d\boldsymbol{\xi}_x, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\text{RHS}_i^e = \int_{\mathcal{Q}} f^e(\mathbf{x}^e(\boldsymbol{\xi}_x)) N_{j,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x) |\mathbf{J}_x^e(\boldsymbol{\xi}_x)| d\boldsymbol{\xi}_x. \quad (2.42)$$

Per eseguire tutti gli integrali riportati, è possibile utilizzare le formule di quadratura di Gauss introdotte nel Capitolo 1. Calcolate le matrici locali  $A_{ij}^e$  e i vettori forzanti  $\text{RHS}_i^e$  per ogni elemento  $e$  serve riportarsi al problema globale tramite la connettività degli elementi, ottenendo così un problema algebrico del tipo

$$A_{ij} u_j = \text{RHS}_i,$$

dove  $A_{ij}$ ,  $u_j$  e  $\text{RHS}_i$  sono rispettivamente la matrice globale, il vettore delle incognite globali e il vettore forzante globale. Per ricavare la soluzione del problema occorre risolvere questo problema algebrico lineare. Si noti che, contrariamente a classici problemi fisici locali simulati numericamente, in questo caso la mappatura locale-globale delle matrici ottenute non è banale. Infatti, a causa del doppio integrale, occorre tenere in considerazione due diverse mappature. Nella prossima sezione verranno quindi introdotte alcune tecniche per l'implementazione numerica di equazioni non locali.

### 2.2.3 Implementazione numerica sul software FEMuS

Nella maggior parte dei problemi fisici di tipo locale, discretizzando secondo il metodo FEM si ottiene una matrice  $A_{ij}$  sparsa, ovvero con molti elementi nulli. Questo accade

perchè il valore dell'incognita in un nodo è influenzato solo dai nodi vicini ad esso. La risoluzione di sistemi lineari con matrici sparse è relativamente semplice in quanto sono stati studiati molti metodi di risoluzione [16], e possono essere utilizzate varie librerie per la risoluzione ottimizzata di tali sistemi lineari. Nel caso di problemi non locali la matrice  $A_{ij}$  è una matrice densa, in quanto il valore dell'incognita in un nodo è influenzato dai valori di tutti i nodi di tutti gli elementi del dominio. Risolvere un sistema lineare a matrice densa è un problema non banale e ha un costo computazionale molto elevato.

Per le simulazioni numeriche presentate in questo lavoro si è utilizzato il codice agli elementi finiti FEMuS, sviluppato dai ricercatori del laboratorio di Montecuccolino del Dipartimento di Ingegneria Industriale (DIN) dell'Università di Bologna. Esso si basa sull'utilizzo delle librerie openMPI per il calcolo parallelo, e delle librerie PETSc [17] per la risoluzione dei sistemi algebrici lineari.

La matrice  $A_{ij}^e$  (2.41) è stata pertanto implementata sul software FEMuS. Il primo integrale può essere splittato nella somma di quattro matrici `CClocal_··ij`

$$\begin{cases} \text{CClocalyy}_{ij} = \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathcal{Q}} \int_{\mathcal{Q}} \frac{N_{j,y}^2(\xi_y) N_{i,y}^2(\xi_y)}{|\mathbf{y}^e(\xi_y) - \mathbf{x}^e(\xi_x)|^{n+2s}} |\mathbf{J}_y^e(\xi_y)| |\mathbf{J}_x^e(\xi_x)| d\xi_y d\xi_x, \\ \text{CClocalyx}_{ij} = -\frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathcal{Q}} \int_{\mathcal{Q}} \frac{N_{j,y}^2(\xi_y) N_{i,x}^2(\xi_x)}{|\mathbf{y}^e(\xi_y) - \mathbf{x}^e(\xi_x)|^{n+2s}} |\mathbf{J}_y^e(\xi_y)| |\mathbf{J}_x^e(\xi_x)| d\xi_y d\xi_x, \\ \text{CClocalxy}_{ij} = -\frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathcal{Q}} \int_{\mathcal{Q}} \frac{N_{j,x}^2(\xi_x) N_{i,y}^2(\xi_y)}{|\mathbf{y}^e(\xi_y) - \mathbf{x}^e(\xi_x)|^{n+2s}} |\mathbf{J}_y^e(\xi_y)| |\mathbf{J}_x^e(\xi_x)| d\xi_y d\xi_x, \\ \text{CClocalxx}_{ij} = \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathcal{Q}} \int_{\mathcal{Q}} \frac{N_{j,x}^2(\xi_x) N_{i,x}^2(\xi_x)}{|\mathbf{y}^e(\xi_y) - \mathbf{x}^e(\xi_x)|^{n+2s}} |\mathbf{J}_y^e(\xi_y)| |\mathbf{J}_x^e(\xi_x)| d\xi_y d\xi_x. \end{cases} \quad (2.43)$$

Si noti che ciascuna delle quattro matrici dovrà essere assemblata nella matrice globale secondo differenti mappature. L'algoritmo di inizializzazione delle quattro matrici presentate è riportato nell'algoritmo 1. Come sottolineato nell'algoritmo, il kernel  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{C_{n,s}}{2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n+2s}}$  è singolare quando  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , serve quindi evitare questa situazione. Per fare ciò si può, in prima approssimazione, semplicemente non considerare il caso in cui  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Alternativamente si può considerare l'utilizzo di diversi ordini di quadratura gaussiana nei due integrali in  $\xi_x$  e  $\xi_y$ , in modo da non far coincidere i nodi di Gauss in  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Per il calcolo del secondo integrale della (2.41) occorre valutare l'integrazione al di fuori del dominio del problema, in quanto è presente un'integrazione su  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}$ . Come accennato in precedenza, la tecnica più comunemente usata consiste nel limitare

il dominio d'integrazione del Laplaciano frazionario ad una circonferenza di raggio  $\delta$  (una sfera in tre dimensioni)  $B_\delta \subset \mathbb{R}^n$  centrata nei nodi di Gauss  $\xi_g$  [18].

---

**Algorithm 1** Inizializzazione delle quattro matrici  $CC_{local} \cdot \cdot \cdot_{ij}$ .

---

```

1) Calcolo di jacobiano  $JxW_{g\_ie}$  funzioni di forma  $\phi_1[\ ]$  nei punti di Gauss  $qp$ .
2) Calcolo del denominatore  $denom = pow(dist\_xyz, (double)((nTdim/2.) + sFrac))$ .
3) Doppio ciclo sui punti di Gauss  $x\_g$  e  $y\_g$  sugli elementi  $el\_x$  e  $el\_y$ , rispettivamente.
for  $ig = 0, n_g(el\_x)$  do
  for  $ig = 0, n_g(el\_y)$  do
    4) Doppio ciclo sulle funzioni di forma.
    for  $i = 0, nDof1$  do
      for  $j = 0, nDof2$  do
        5) Inizializzazione delle quattro matrici
        if  $denom \neq 0$  then
           $CC_{localyy\_i+} = (C\_ns/2.) * \phi_1[j] * \phi_1[i] * JxW_{g\_i} * JxW_{g\_j}/denom$ 
           $CC_{localyx\_i+} = -(C\_ns/2.) * \phi_2[j] * \phi_1[i] * JxW_{g\_i} * JxW_{g\_j}/denom$ 
           $CC_{localxy\_i+} = -(C\_ns/2.) * \phi_1[j] * \phi_2[i] * JxW_{g\_i} * JxW_{g\_j}/denom$ 
           $CC_{localxx\_i+} = (C\_ns/2.) * \phi_2[j] * \phi_2[i] * JxW_{g\_i} * JxW_{g\_j}/denom$ 
        end if
      end for
    end for
  end for
end for

```

---

In questo lavoro verrà usato un approccio differente, simile a quello proposto in [19]. Tale approccio consiste nella valutazione dell'integrale tramite una continuazione analitica della funzione fuori dal dominio. Consideriamo solo l'integrale su  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.44)$$

Tale integrale verrà numericamente valutato per ogni lato di boundary di ogni elemento del ciclo sugli elementi  $el_y$ . Ogni faccia del contorno  $\partial\Omega$  considerata verrà suddivisa ulteriormente in  $N_{sub}$  sottoelementi  $\chi_i$ . L'integrale su  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  verrà pertanto ricondotto ad una somma degli integrali sulle aree  $A(\chi_i)$  all'esterno di  $\Omega$ . Ovviamente maggiore è

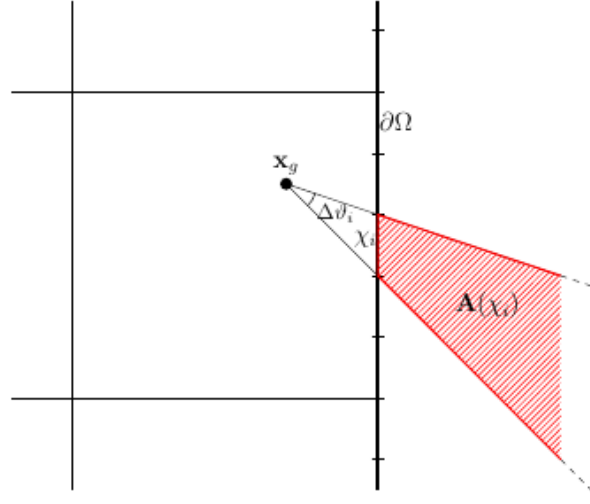


Figura 2.2: Calcolo dell'integrale su  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  tramite la (2.45)

$N_{sub}$  maggiore sarà la precisione di tale calcolo e maggiore sarà il costo computazionale. Vale quindi che

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N_{sub}} \int_{A(\chi_i)} \frac{1}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y}. \quad (2.45)$$

Si definisce  $\tilde{\mathbf{y}}_i$  il punto medio dell'elemento  $\chi_i$ , si definisce  $\Delta\theta_i$  l'angolo formato dalle rette che congiungono il nodo  $\mathbf{x}_g$  con gli estremi degli elementi  $\chi_i$  valutato come

$$\Delta\theta_i = \arccos \frac{\mathbf{x}_g \cdot \tilde{\mathbf{y}}_i}{|\mathbf{x}_g| |\tilde{\mathbf{y}}_i|} = \arccos \frac{x_g^x \tilde{y}_i^x + x_g^y \tilde{y}_i^y}{\sqrt{(x_g^x)^2 + (x_g^y)^2} \sqrt{(\tilde{y}_i^x)^2 + (\tilde{y}_i^y)^2}}. \quad (2.46)$$

Vale quindi che

$$\int_{A(\chi_i)} \frac{1}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y} \simeq \Delta\theta_i \int_{|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y}. \quad (2.47)$$

Effettuando il cambio di variabile  $t = \mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i$  tale integrale diventa monodimensionale nella sola variabile  $t$ , e può essere scritto come

$$\begin{aligned} \Delta\theta_i \int_{|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{y}|^{1+2s}} d\mathbf{y} &= \Delta\theta_i \int_{|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|}^{\infty} \frac{1}{|t|^{1+2s}} dt = \left[ -\frac{t}{|t|^{1+2s}} \right]_{|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|}^{\infty} = \\ &= \Delta\theta_i \frac{1}{2s} \frac{|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|}{|\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|^{1+2s}} = \frac{\Delta\theta_i}{2s |\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|^{2s}}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Il secondo integrale della matrice  $A_{ij}^e$  (2.41) diventa pertanto

$$\begin{aligned} C_{n,s} \int_Q N_{j,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x) N_{i,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x) \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q} \frac{1}{|\mathbf{y}^e(\boldsymbol{\xi}_y) - \mathbf{x}^e(\boldsymbol{\xi}_x)|^{n+2s}} |\mathbf{J}_y^e(\boldsymbol{\xi}_y)| |\mathbf{J}_x^e(\boldsymbol{\xi}_x)| d\boldsymbol{\xi}_y d\boldsymbol{\xi}_x \simeq \\ \simeq C_{n,s} \int_Q N_{j,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x) N_{i,x}^2(\boldsymbol{\xi}_x) \frac{\Delta\theta_i}{2s |\mathbf{x}_g - \tilde{\mathbf{y}}_i|^{2s}} |\mathbf{J}_x^e(\boldsymbol{\xi}_x)| d\boldsymbol{\xi}_x. \end{aligned} \quad (2.49)$$

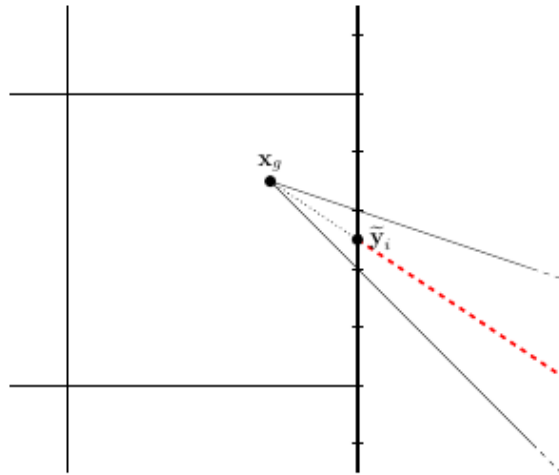


Figura 2.3: Calcolo dell'integrale su  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  tramite la (2.47)

Utilizzando le equazioni (2.43) e (2.48) assieme alle prescrizioni indicate, è stato implementato un solver efficace per la risoluzione dell'equazione di diffusione stazionaria non locale sul codice agli elementi finiti FEMuS.

# Capitolo 3

## Moti quasi-geostrofici superficiali

Un campo ingegneristico in cui è necessario l'utilizzo di operatori non locali, è quello riguardante i moti *quasi-geostrofici*. A differenza dei *moti geostrofici*, che si riferiscono a quella classe di moti atmosferici nei quali c'è un perfetto bilanciamento tra la forza di Coriolis e la forza derivante dal gradiente di pressione, i *moti quasi-geostrofici* (QG) si riferiscono a moti nei quali la forza di Coriolis e il gradiente di pressione sono *quasi* bilanciati, ma con effetti d'inerzia non trascurabili. La proprietà caratteristica dei sistemi quasi-geostrofici è la conservazione della vorticità potenziale nelle linee di flusso geostrofico [20, 21, 22]. Se, in aggiunta alla conservazione della vorticità potenziale, si aggiunge il galleggiamento superficiale, ovvero la conservazione della temperatura potenziale, si arriva alle equazioni dei *moti quasi-geostrofici superficiali* (SQG) [23, 24]. In questo capitolo verrà analizzato quest'ultimo caso partendo dalle equazioni di conservazione.

### 3.1 Equazioni di conservazione

I fluidi sono modellizzati tramite il concetto di *mezzo continuo* [25]. Si definisce mezzo continuo un qualunque corpo la quale dimensione caratteristica sia molto più grande del libero cammino medio delle particelle che lo compongono in modo tale che esso sia scomponibile in tanti sottovolumi arbitrariamente piccoli ma comunque contenenti un numero sufficientemente alto di particelle (dell'ordine del numero di Avogadro  $N_A = 6,022 \times 10^{23}$  particelle). Tramite questa ipotesi sarà possibile utilizzare i classici strumenti dell'analisi quali limiti, derivate e integrali considerando volumi infinitesimi

senza però considerare gli effetti quantistici delle singole particelle del corpo continuo. Si definisce *numero di Knudsen*  $K_n$  il rapporto tra il libero cammino medio delle particelle di un corpo continuo  $\lambda$  e la dimensione caratteristica di tale corpo  $L$ :  $K_n = \frac{\lambda}{L}$ . Affinchè valga l'ipotesi di mezzo continuo  $K_n \ll 1$ .

Lo studio del moto di un fluido si effettua partendo dai principi base della fisica quali *conservazione della massa* e *conservazione della quantità di moto* ovvero la seconda legge di Newton  $F = ma$ . Per ricavare tali leggi di conservazione applicate ai fluidi risulta utile richiamare il *teorema del trasporto di Reynolds* che descrive come una qualunque proprietà  $\Phi$  evolve nel tempo.

**Teorema del trasporto di Reynolds** Dato un continuo contenuto in un volume  $V(t) \subset \mathbb{R}^3$  racchiuso dalla sua frontiera  $\partial V(t)$  di normale  $\mathbf{n}(\mathbf{x}(t), t)$  che si muove a velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$  consideriamo una grandezza scalare o vettoriale estensiva  $\Psi(t)$  in un sistema di riferimento Lagrangiano esprimibile come integrale sul volume della sua corrispondente grandezza specifica  $\psi(\mathbf{x}(t), t)$  moltiplicata per la densità  $\rho(\mathbf{x}(t), t)$

$$\Psi(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}(t), t) \psi(\mathbf{x}(t), t) dV. \quad (3.1)$$

Il teorema del trasporto di Reynolds afferma che tale grandezza estensiva  $\Psi(t)$  evolve nel tempo come la somma della variazione temporale del prodotto  $\rho\psi$ , e ciò che entra ed esce dal volume di controllo espressa mediante la divergenza

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\psi\mathbf{u}) \right] dV. \quad (3.2)$$

A partire dalla (3.2) è possibile ricavarsi le equazioni di conservazione della massa e di conservazione della quantità di moto.

### 3.1.1 Conservazione della massa

Considerando il teorema del trasporto di Reynolds e volendolo applicare al bilancio della massa  $M = \int_V \rho dV$  di un continuo basta considerare la grandezza specifica  $\psi = 1$ . Considerando un sistema senza reazioni nucleari, la derivata temporale della massa deve essere sempre nulla  $\frac{dM}{dt} = 0$ , pertanto si ha

$$\frac{dM}{dt} = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) \right] dV = 0. \quad (3.3)$$

Dato che l'integrale deve essere nullo per ogni  $V(t)$ , deve essere nullo l'integrando

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.4)$$

Nel caso in cui il continuo sia un fluido incomprimibile la densità viene considerata uniforme nello spazio e costante nel tempo, ottenendo

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.5)$$

Per un fluido incomprimibile il campo di velocità è solenoidale, il che è ragionevole in quanto, senza variazioni di densità, non esistono sorgenti di fluido. Sfruttando il bilancio della massa si può ottenere una forma diversa del teorema del trasporto di Reynolds. Riprendendo l'equazione (3.2) ed esplicitando il termine  $\nabla \cdot (\rho \psi \mathbf{u})$  utilizzando la regola della divergenza di un prodotto si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\psi\mathbf{u}) \right] dV = \int_{V(t)} \left[ \rho \frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathbf{u}\nabla\psi + \psi\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) \right] dV = \\ &= \int_{V(t)} \left[ \rho \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\psi \right) + \psi \left( \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) \right) \right] dV. \end{aligned}$$

Utilizzando l'equazione di conservazione della massa il termine  $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0$  si ottiene

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_{V(t)} \left[ \rho \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\psi \right) \right] dV.$$

Ricordando la definizione di derivata totale  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  otteniamo il teorema del trasporto di Reynolds nella forma

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_{V(t)} \rho \frac{D\psi}{Dt} dV. \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Conservazione della quantità di moto

La quantità di moto  $\mathbf{p}$  di un corpo di massa  $M$  che si muove a velocità  $\mathbf{u}$  è una grandezza vettoriale data dal prodotto di massa e velocità:  $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ . Il secondo principio della dinamica afferma che la variazione nel tempo della quantità di moto di un corpo è pari alla risultante delle forze  $\mathbf{F}$  applicate a tale corpo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}. \quad (3.7)$$

Utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds per esprimere la conservazione della quantità di moto serve considerare come grandezza specifica  $\psi = \mathbf{u}$ , di conseguenza si ottiene

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \sum \mathbf{F}. \quad (3.8)$$

Consideriamo due tipi di forze applicate: forze di volume  $\mathbf{F}_b$  e forze di superficie  $\mathbf{F}_s$ . Le forze di volume sono forze date da campi esterni che agiscono direttamente sul corpo tramite la massa, come il campo gravitazionale o la forza di Coriolis, o sulla carica, come il campo elettromagnetico nel caso il fluido fosse sensibile ad esso. Le forze di volume  $\mathbf{F}_b$  possono essere espresse come integrale sul volume di un campo specifico  $\mathbf{f}_b$

$$\mathbf{F}_b = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f}_b dV.$$

Le forze di superficie  $\mathbf{F}_s$  sono forze dovute all'interazione delle particelle fluide con quelle circostanti. Risulta più comodo e comprensibile esprimere le relazioni che verranno introdotte in seguito in componenti di un sistema di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  utilizzando la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti. La componente  $i$ -esima delle forze di superficie  $F_{s,i}$  è esprimibile tramite il tensore delle tensioni  $\sigma_{ij}$

$$F_{s,i} = \int_{\partial V(t)} \sigma_{ij} n_j d\partial V,$$

dove  $\sigma_{ij}$  è un tensore simmetrico e può essere scomposto introducendo il concetto di pressione  $p$  come

$$p = \frac{1}{3} Tr(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3} \sigma_{ii},$$

e introducendo il tensore degli sforzi viscosi  $\tau_{ij}$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (3.9)$$

dove  $\delta_{ij}$  è la funzione delta di Kroneker tale che  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  altrimenti. Con questa definizione il tensore  $\tau_{ij}$  è simmetrico e di traccia nulla. Grazie al teorema della divergenza è possibile calcolare l'integrale di superficie delle forze di superficie come integrale di volume della divergenza dei tensori degli sforzi

$$F_{s,i} = \int_{\partial V(t)} \sigma_{ij} n_j d\partial V = \int_{V(t)} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_{V(t)} \left( -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV.$$

Il termine  $\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij}$  è diverso da 0 solo se  $j = i$ . Di conseguenza si ottiene

$$F_{s,i} = \int_{V(t)} \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV.$$

Ritornando alla formulazione della conservazione della quantità di moto si ottiene

$$\int_{V(t)} \rho \frac{Du_i}{Dt} dV = \int_{V(t)} \rho f_{b,i} dV + \int_{V(t)} \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV,$$

da cui si ricava

$$\int_{V(t)} \left[ \rho \frac{Du_i}{Dt} - \rho f_{b,i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] dV = 0.$$

Come nel caso della conservazione della massa, affinché tale integrale sia nullo per ogni  $V(t)$ , deve essere nullo l'integrando. Otteniamo così l'equazione di conservazione della quantità di moto

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{b,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (3.10)$$

Esplicitando la derivata totale si ottiene

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_{b,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (3.11)$$

che in forma vettoriale può essere scritto come

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f}_b - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (3.12)$$

Ora, esplicitando la derivata totale si ottiene l'equazione di conservazione della quantità di moto

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{f}_b - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (3.13)$$

### 3.1.3 Equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni di bilancio modellano il moto di un corpo continuo, senza considerare se questo sia un solido o un fluido. La differenza sostanziale tra solidi e fluidi sta nel legame costitutivo che viene imposto al corpo continuo. Il legame costitutivo che risulta più appropriato alla modellazione della maggior parte dei fluidi è il modello di *fluido Newtoniano*. Considerando un fluido in equilibrio rispetto ad un piano fisso e applicando al fluido uno sforzo di taglio  $\tau$  lungo la direzione  $i$ , si osserva che il fluido si muove come se fosse formato da singoli strati piani che scorrono gli uni sugli altri. A causa dell'attrito viscoso, le lamine non si muovono tutte alla stessa velocità, ma tale velocità varia lungo la direzione  $j$ . Per descrivere le proprietà del fluido si considera il tensore degli sforzi viscosi  $\tau_{ij}$  come proporzionale alla derivata della componente  $i$ -esima della velocità rispetto alla coordinata  $j$ -esima

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

dove  $\mu$  è una costante di proporzionalità chiamata *viscosità dinamica*. Ricordando che il tensore  $\tau_{ij}$  è simmetrico e di traccia nulla, la definizione appena data non è corretta in quanto genera un tensore non simmetrico e di traccia non nulla. Pertanto risulta ragionevole pensare al tensore  $\tau_{ij}$  come

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

In questo modo, il tensore diventa simmetrico ma non di traccia nulla. La traccia del tensore appena calcolato risulta infatti pari a

$$Tr(\tau_{ij}) = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 2\mu \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Pertanto, affinché  $\tau_{ij}$  abbia traccia nulla si deve avere che

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij}, \quad (3.14)$$

ottenendo così la forma definitiva del tensore degli sforzi viscosi.

L'equazione di bilancio della quantità di moto per un fluido Newtoniano diventa

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_{b,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \right],$$

da cui si ottiene

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_{b,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \delta_{ij}.$$

Come nel caso precedente, il termine con  $\delta_{ij}$  è diverso da zero solo se  $i = j$ , pertanto si ha

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_{b,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right).$$

Queste equazioni, assieme a quella di bilancio della massa, prendono il nome di *Equazioni di Navier-Stokes*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0, \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \rho f_{b,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

In forma vettoriale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \rho \mathbf{f}_b - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

## 3.2 Equazioni quasi-geotrofiche superficiali

Il modello quasi-geostrofico che descrive i moti atmosferici in larga scala fu introdotto da Charney [26] a partire dagli anni '40 del secolo scorso. Tale modello si basa sulla rettificazione della curvatura terrestre sul moto (che ha effettivamente un'influenza minore tranne che per moti su scala estremamente ampia), ma mantenendo la forza di Coriolis dipendente dalla latitudine. La forza di Coriolis è essenziale per la dinamica di tali moti in quanto la derivazione di tali equazioni si basa sul fatto di considerare il termine delle forze di volume  $f_{b_i}$  nelle equazioni di Navier-Stokes (3.15) pari alla somma tra la forza gravitazionale e la forza di Coriolis.

La forza di Coriolis  $\mathbf{F}_C$  è una forza apparente a cui risulta soggetto un corpo di massa  $m$  che si muove a velocità  $\mathbf{v}$  rispetto ad un sistema di riferimento che sia in moto rotatorio con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  rispetto a un sistema di riferimento inerziale [27]. La sua espressione matematica è derivabile dal secondo principio della dinamica e risulta essere pari a

$$\mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (3.17)$$

Il modulo di tale forza  $|\mathbf{F}_C|$  vale

$$|\mathbf{F}_C| = 2m|\boldsymbol{\omega}||\mathbf{v}|\sin(\varphi), \quad (3.18)$$

dove  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  è l'angolo tra i vettori  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{v}$ . Nel caso dei moti atmosferici  $\varphi$  è l'angolo tra l'asse di rotazione terrestre e il corpo, ovvero la latitudine. Si definisce *Numero di Rossby*  $\epsilon$  il parametro adimensionale

$$\epsilon = \frac{U}{f_0 L},$$

dove  $U$  è la velocità orizzontale,  $L$  è la lunghezza orizzontale,  $f_0$  è il parametro di Coriolis definito come il modulo del rapporto tra la forza di Coriolis e la quantità di moto

$$f_0 = \frac{|\mathbf{F}_C|}{m|\mathbf{v}|} = 2|\boldsymbol{\omega}|\sin(\varphi).$$

Inoltre,  $|\boldsymbol{\omega}|$  è la velocità angolare terrestre ( $|\boldsymbol{\omega}| \simeq 7,27 \times 10^{-5} \frac{rad}{s}$ ). L'approssimazione quasi-geostrofica è valida per  $\epsilon$  piccoli. Pertanto, nei casi considerati in questo lavoro,  $f_0$  deve essere sufficientemente grande. Questo implica che  $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ , ovvero si considerano latitudini elevate, distanti dall'equatore. Considerato un sistema di coordinate

cartesiane in cui la componente  $z$  indica la distanza dal suolo terrestre, si può introdurre un'ulteriore approssimazione, che consiste nel considerare le componenti orizzontali della velocità  $u$  e  $v$  indipendenti dalla distanza coordinata  $z$ , e la velocità lungo  $z$   $w$  trascurabile per  $z \rightarrow \infty$ . Si assume inoltre che il fluido sia incomprimibile.

Si considera ora un dominio rettangolare  $\Omega = [0, 2\pi L] \times [0, 2\pi L]$  e si scrivono le equazioni di bilancio: dal bilancio della massa segue che  $\mathbf{v}$  è un campo solenoidale  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Ricordando l'equazione di bilancio della quantità di moto (3.15), trascurando la viscosità, imponendo la condizione di fluido incomprimibile e dividendo per la densità  $\rho$  si ottiene

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_{b,i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (3.19)$$

Il termine delle forze di volume  $f_{b,i}$  è scomponibile in una componente gravitazionale e una componente di Coriolis

$$f_{b,i} = g_i - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})_i, \quad (3.20)$$

dove  $g_i$  è il campo gravitazionale terrestre  $\mathbf{g} = G \frac{M_T}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ , dove  $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$  è la costante di gravitazione universale,  $M_T = 5,972 \times 10^{24} kg$ ,  $r$  è la distanza dal centro della terra e  $\hat{\mathbf{r}}$  è versore direzionato verso il centro della terra. Per valutare il termine di Coriolis si considera un sistema di coordinate sferiche  $(\theta, \varphi)$  nel quale il vettore velocità angolare è diretto lungo l'asse  $z$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$  e  $\mathbf{v} = (|\mathbf{v}| \sin \varphi \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \varphi \sin \theta, |\mathbf{v}| \cos \varphi)$ . Di conseguenza si ha

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (-\omega |\mathbf{v}| \sin \varphi \sin \theta, \omega |\mathbf{v}| \sin \varphi \cos \theta, 0). \quad (3.21)$$

Si noti che i termini  $|\mathbf{v}| \sin \theta$  e  $|\mathbf{v}| \cos \theta$  sono le componenti  $u$  e  $v$  del vettore velocità. Pertanto, la (3.21) può essere semplificata come

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (-\omega v \sin \varphi, \omega u \sin \varphi, 0),$$

di conseguenza il termine delle forze di volume  $\mathbf{f}_b$  diventa

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{g} + (2\omega v \sin \varphi, -2\omega u \sin \varphi, 0). \quad (3.22)$$

L'equazione del bilancio della quantità di moto scomposta in componenti risulta quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= g_x + 2\omega v \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= g_y - 2\omega u \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Si introduce ora il concetto di *geopotenziale*  $\Psi$  come il lavoro necessario a vincere la forza di gravità e spostare verso l'alto, ad una determinata altezza, una massa unitaria d'aria, ovvero il potenziale gravitazionale terrestre ad una data altezza. Il geopotenziale solitamente è esprimibile tramite una serie di armoniche sferiche [28]. Risulta altrettanto utile legarlo al concetto di temperatura potenziale  $\theta$ . La temperatura potenziale di una particella di fluido alla pressione  $p$  è la temperatura che quella particella avrebbe se fosse portata, tramite uno spostamento adiabatico, ad una pressione standard di riferimento  $p_0$ . La relazione tra  $\Psi$  e  $\theta$  è di tipo idrostatico

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{g\theta}{\theta_{ref}}, \quad (3.24)$$

dove  $\theta_{ref}$  è la temperatura potenziale per  $z = 0$  e  $t = t_0 > 0$ . Si può dimostrare che le equazioni di bilancio della quantità di moto possono essere espresse introducendo il geopotenziale  $\Psi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - 2\omega v \sin \varphi &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + 2\omega u \sin \varphi &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= \frac{g\theta}{\theta_{ref}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Inoltre, la temperatura potenziale soddisfa la conservazione dell'energia in assenza di sorgenti termiche

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0. \quad (3.26)$$

Le equazioni dei moti quasi-geostrofici, introducendo il parametro di Coriolis  $f_0 = 2\omega \sin \varphi$  sono quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f_0 v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f_0 u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= \frac{g\theta}{\theta_{ref}}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Adimensionalizzazione** Per comprendere a pieno la relazione tra i parametri introdotti è utile effettuare un'adimensionalizzazione, ovvero un cambio di variabili effettuato in modo da generare grandezze prive di unità di misura. Tali grandezze,

verranno indicate con  $\hat{\cdot}$ . Si definisce  $L$  la scala delle lunghezze orizzontali,  $D$  la scala delle lunghezze verticali e  $U$  la scala delle velocità orizzontali. Si definiscono inoltre le coordinate adimensionali

$$\hat{\Omega} = \{ (\hat{x}, \hat{y}) : (x, y) \in \Omega \} = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi], \quad \text{con } \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{y} = \frac{y}{L}, \quad \hat{z} = \frac{z}{D},$$

$$\hat{t} = \frac{U}{L}t, \quad \hat{u} = \frac{u}{U}, \quad \hat{v} = \frac{v}{U}, \quad \hat{w} = \frac{L}{DU}w, \quad \hat{\Psi} = \frac{\Psi}{f_0UL}.$$

Per ipotesi, si considera la scala delle lunghezze verticali molto più piccola di quella delle lunghezze orizzontali  $D \ll L$ . Quest'ultima assunzione indica che la temperatura potenziale  $\theta$  compie piccole oscillazioni attorno alla sua posizione di equilibrio, pertanto è possibile scrivere  $\theta$  come somma del suo valore di equilibrio  $\theta_s(z)$  (con  $\theta_s(0) = \theta_{ref}$ ) e una piccola oscillazione

$$\theta = \theta_s(z)(1 + \epsilon F \hat{\theta}), \quad (3.28)$$

con  $F = \frac{f_0^2 L^2}{gD} = \left(\frac{L}{R}\right)^2$  e  $R = \frac{\sqrt{gD}}{f_0}$ , chiamato raggio di deformazione esterna di Rossby [22]. Procedendo con l'adimensionalizzazione delle equazioni (3.27), omettendo il simbolo  $\hat{\cdot}$  in quanto si considerano d'ora in poi solo grandezze adimensionali, si ottiene il seguente sistema per le equazioni quasi-geostrofiche adimensionalizzate

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.29)$$

$$\epsilon \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (3.30)$$

$$\epsilon \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{gD}{f_0UL} + \theta, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{w}{\epsilon F \theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} (1 + \epsilon F \theta). \quad (3.33)$$

**Piccole oscillazioni** Si considera  $\epsilon \ll 1$  e si considerano le variabili come oscillanti lungo  $z$  rispetto ad una posizione di equilibrio

$$\begin{aligned} u(x, y, \epsilon, t) &\simeq u_0(x, y, t) + \epsilon u_1(x, y, t), \\ v(x, y, \epsilon, t) &\simeq v_0(x, y, t) + \epsilon v_1(x, y, t), \\ w(x, y, \epsilon, t) &\simeq w_0(x, y, t) + \epsilon w_1(x, y, t), \\ \Psi(x, y, \epsilon, t) &\simeq \Psi_0(x, y, t) + \epsilon \Psi_1(x, y, t), \\ \theta(x, y, \epsilon, t) &\simeq \theta_0(x, y, t) + \epsilon \theta_1(x, y, t). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Si applicano ora le piccole oscillazioni introdotte alle equazioni (3.29)-(3.33). La prima (3.29) diventa

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} + \epsilon \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) = 0$$

segue che, per il termine di ordine zero vale

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad (3.35)$$

e per il termine di ordine 1 vale

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0. \quad (3.36)$$

La seconda (3.30) e la terza (3.31) equazione del sistema diventano

$$\begin{aligned} -v_0 + \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} + \epsilon \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - v_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right) + \epsilon^2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \\ \left. + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \epsilon^3 \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, \\ u_0 + \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} + \epsilon \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + u_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) + \epsilon^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \right. \\ \left. + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \epsilon^3 \left( u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Per i termini di ordine zero vale quindi

$$\begin{aligned} -v_0 + \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} = 0 & \rightarrow v_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial x}, \\ u_0 + \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} = 0 & \rightarrow u_0 = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dal teorema di Schawrtz deve valere l'uguaglianza delle derivate seconde miste di  $\Psi$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial u_0}{\partial x} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad (3.38)$$

e pertanto

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0.$$

Ne segue quindi che l'equazione (3.35) si riduce a

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0. \quad (3.39)$$

Sempre in riferimento alla seconda e alla terza equazione (3.30)-(3.31) del sistema, per i termini di ordine 1 vale

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - v_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + u_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Per eliminare il geopotenziale  $\Psi$  si deriva la prima equazione rispetto ad  $y$  e la seconda rispetto ad  $x$  e si sottraggono le due equazioni ottenute. Definendo inoltre la grandezza *vorticità*  $\zeta_0$  come

$$\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2}, \quad (3.41)$$

si ottiene l'equazione della vorticità

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right), \quad (3.42)$$

ed applicando l'equazione di continuità di ordine 1 (3.36) si ottiene

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = \frac{\partial w_1}{\partial z}. \quad (3.43)$$

Si considera ora l'equazione (3.32), che diventa

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} - \frac{gD}{f_0 UL} + \theta_0 + \epsilon \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + \theta_1 \right) = 0.$$

Considerandone solo il termine di ordine zero e inglobando la costante numerica  $\frac{gD}{f_0 UL}$  in  $\theta_0$  in modo tale che  $\theta'_0 = \frac{gD}{f_0 UL} + \theta_0$ , si ottiene

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = \theta'_0. \quad (3.44)$$

L'ultima equazione del sistema (3.33) (ricordando che si assume  $w_0 = 0$ ) diventa

$$\begin{aligned} \epsilon \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} - \frac{w_1}{F \theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \right) + \epsilon^2 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \right. \\ \left. + v_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} - \frac{w_1}{\theta_s} \theta_0 \right) + \epsilon^3 \left( \frac{w_1}{\theta_s} \theta_1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Considerando solo il termine di ordine 1 si ottiene

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} = \frac{w_1}{F \theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z}, \quad (3.46)$$

dalla teoria dello strato limite [28] si evince che la velocità verticale  $w_1$  è esprimibile tramite la vorticità  $\zeta_0$  e il numero di Ekman  $E_V$

$$w_1 = \frac{\sqrt{E_V}}{2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = \frac{\sqrt{E_V}}{2} \zeta_0 = \frac{\sqrt{E_V}}{2} \Delta_\Omega \Psi_0, \quad (3.47)$$

dove  $\Delta_\Omega$  indica il Laplaciano bidimensionale con  $\Delta_\Omega = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ . Il termine di ordine 1 dell'equazione (3.33) diventa quindi

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_0 = \frac{1}{F \theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \frac{\sqrt{E_V}}{2} \Delta_\Omega \Psi_0, \quad (3.48)$$

dove  $\mathbf{u} = (u_0, v_0) = \left( -\frac{\partial\Psi_0}{\partial y}, \frac{\partial\Psi_0}{\partial x} \right)$  indica una velocità convettiva, e può essere visto come il gradiente di  $\nabla\Psi_0$  ruotato di  $\pi/2$  in senso antiorario. Infatti tale rotazione è descritta dalla matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  che moltiplicata per  $\nabla\Psi_0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Psi_0}{\partial x} \\ \frac{\partial\Psi_0}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\Psi_0}{\partial y} \\ \frac{\partial\Psi_0}{\partial x} \end{pmatrix} = \nabla^\perp\Psi_0 = \mathbf{u}. \quad (3.49)$$

Il termine presente nella (3.48)  $\frac{1}{F\theta_s} \frac{\partial\theta_s}{\partial z} = S(z)$  prende il nome di *parametro di stratificazione*. Si introduce ora la grandezza *vorticità potenziale*  $\zeta = \zeta_0 + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\theta_0}{S(z)} \right)$  che può essere scritta in funzione del geopotenziale  $\Psi_0$  come

$$\zeta = \Delta_\Omega\Psi_0 + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{S(z)} \frac{\partial\Psi_0}{\partial z} \right). \quad (3.50)$$

Inserendo la vorticità potenziale  $\zeta$  nelle equazioni (3.43) e (3.46) si ottiene l'equazione di bilancio della vorticità potenziale

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\zeta = 0. \quad (3.51)$$

In particolare, considerando  $S(z) = S$  costante rispetto a  $z$  e riscalandolo tale coordinata per semplificare il parametro  $\frac{1}{S}$ , si ottiene

$$\zeta = \Delta\Psi_0. \quad (3.52)$$

Ci si riferisce a sistemi quasi-geostrofici superficiali (SQG) assumendo una vorticità potenziale nulla  $\zeta = 0$  [23, 29]. Questa semplificazione permette di studiare il moto solamente tramite la temperatura potenziale  $\theta_\Omega = \theta(x, y, 0, t)$  valutata sulla superficie  $\Omega$ . Si ottengono così le equazioni del moto quasi-geostrofico superficiale

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta_\Omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta_\Omega - \kappa(-\Delta_\Omega)\Psi_\Omega = 0, & \text{su } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{u} = \nabla^\perp\Psi_0, \\ \Delta\Psi_0 = 0, & \text{su } \Omega \times (0, \infty) \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial\Psi_0}{\partial z} = \theta_\Omega, & \text{su } \Omega \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (3.53)$$

dove  $\Psi_\Omega$  è la restrizione di  $\Psi_0$  sulla superficie  $\Omega$ . La diffusività  $\kappa$  è calcolata come  $\kappa = \frac{S\sqrt{E_V}}{2} \ll 1$  ed è costante nel tempo e uniforme nello spazio. Se si considerano

le funzioni  $\theta, \Psi_0 \in H^1[\Omega \times (0, \infty)]$ , la loro restrizione alla sola superficie  $\Omega$  si può dimostrare che  $H^{\frac{1}{2}}[\Omega]$  grazie al Teorema della Traccia [7], che non è altro che lo spazio di Sobolev frazionario introdotto nel Capitolo 2.1.1. Grazie a questa considerazione si ha quindi che  $\theta_\Omega, \Psi_\Omega \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ . Il sistema SQG diventa quindi un problema non locale sul dominio bidimensionale  $\Omega$ . Si dimostra che  $\Psi_\Omega$  risolve l'equazione

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\Psi_\Omega = -\theta_\Omega, \quad \text{su } \Omega, \quad (3.54)$$

dove l'operatore  $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$  è il Laplaciano frazionario introdotto nel Capitolo 2.1; una derivazione dettagliata di questi ultimi passaggi si può trovare in [30]. Il sistema di equazioni SQG generalizzato, omettendo il pedice  $\cdot_\Omega$  diventa quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta + \kappa(-\Delta)^s \theta = 0, & s \in [\frac{1}{2}, 1) \\ \mathbf{u} = \nabla^\perp \Psi, \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \Psi = -\theta, \end{cases} \quad (3.55)$$

con  $s \in [\frac{1}{2}, 1)$  e  $0 < \kappa \ll 1$ .

### 3.2.1 Energia cinetica ed elicità

L'energia cinetica  $\mathcal{K}(\theta)$  e l'Elicità  $\mathcal{H}(\theta)$  sono grandezze caratteristiche della fluidodinamica e verranno monitorate nelle simulazioni numeriche nel Capitolo 4. Tali grandezze sono definite come

$$\mathcal{K}(\theta) = \frac{1}{2} \int_\Omega \theta^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(\theta) = - \int_\Omega \Psi(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (3.56)$$

Per derivare l'energia cinetica  $\mathcal{K}$  si moltiplica la prima equazione del sistema (3.55) per  $\theta$  e si integra sul dominio  $\Omega$

$$\int_\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t} \theta d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta) \theta d\mathbf{x} + \int_\Omega \kappa(-\Delta)^s \theta \theta d\mathbf{x} = 0.$$

Il primo integrale si riconduce alla derivata temporale dell'energia cinetica in quanto

$$\int_\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t} \theta d\mathbf{x} = \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial \theta^2}{\partial t} d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_\Omega \theta^2 d\mathbf{x} = \frac{d\mathcal{K}}{dt},$$

il secondo integrale è nullo in quanto  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  per definizione. Si ha quindi che

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = -\kappa \int_\Omega [(-\Delta)^s \theta] \theta d\mathbf{x}. \quad (3.57)$$

Per ricavare l'elicità  $\mathcal{H}$  si moltiplica la prima equazione del sistema (3.55) per  $\Psi$ , si integra sul dominio  $\Omega$  e si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \kappa \int_{\Omega} (-\Delta)^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} \theta \, d\mathbf{x}. \quad (3.58)$$

Una derivazione esaustiva si può trovare in [31]. La particolarità di queste grandezze è la loro conservazione nel tempo nel caso di fluido inviscido  $\kappa = 0$  e la loro dissipazione nel caso di  $\kappa > 0$ .

### 3.3 Discretizzazione e sistema numerico

In questa sezione si illustreranno i passi principali per la discretizzazione del sistema di equazioni SGQ (3.55), al fine di implementare le equazioni studiate nel codice agli elementi finiti FEMuS. Per semplicità, verrà discretizzata solo la prima equazione del sistema considerando  $\mathbf{u}$  nota. L'equazione risultante da questa semplificazione verrà chiamata nel seguito *equazione del calore non locale*, e può essere scritta come

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta + \kappa (-\Delta)^s \theta = 0, \quad s \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right). \quad (3.59)$$

Per effettuare l'approssimazione FEM si porta l'equazione in forma debole considerando funzioni test  $\varphi \in H_{\Omega}^s(\mathbb{R}^n)$ , si moltiplica l'equazione per tali funzioni test e si integra sul dominio  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \varphi \, d\mathbf{x} + \kappa \int_{\Omega} (-\Delta)^s \theta \varphi \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.60)$$

Discretizzando la derivata temporale con il metodo di Eulero implicito [32] con un passo temporale  $\delta t$  si ottiene

$$\frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \theta_h^n \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_h^n \varphi \, d\mathbf{x} + \kappa \int_{\Omega} (-\Delta)^s \theta_h^n \varphi \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \theta^{n-1} \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (3.61)$$

Ricordando la forma debole del Laplaciano frazionario di Riesz (2.27) introdotta nel Capitolo 2.2.1

$$\int_{\Omega} (-\Delta)^s \theta_h^n \varphi \, d\mathbf{x} = \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta_h^n(\mathbf{y}) - \theta_h^n(\mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2s}} (\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x})) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x},$$

si ottiene la forma debole dell'equazione SQG

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \theta_h^n \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_h^n \varphi \, d\mathbf{x} + \kappa \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta_h^n(\mathbf{y}) - \theta_h^n(\mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2s}} (\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x})) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} = \\ = \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \theta^{n-1} \varphi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Serve ora approssimare lo spazio funzionale  $H_{\Omega}^s(\mathbb{R}^n)$  infinito dimensionale con lo spazio  $X_{\Omega}^2(\mathbb{R}^n)$  delle funzioni di forma quadratiche bidimensionali, e scegliere le funzioni test  $\varphi_i = N_i \in X_{h,\Omega}^2(\mathbb{R}^n)$  con  $i \in [1, 9]$ . Le soluzioni  $\theta$  vengono quindi approssimate con le funzioni  $\theta_h$ . Il Laplaciano frazionario in forma debole, essendo un integrale doppio su  $\mathbb{R}^n$ , può essere scomposto in due integrali doppi (2.32)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \theta_h^n N_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_h^n N_i \, d\mathbf{x} + \kappa \left[ \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\theta_h^n(\mathbf{y}) - \theta_h^n(\mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2s}} (v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \right. \\ & \left. + C_{n,s} \int_{\Omega} \theta_h^n(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} \, d\mathbf{y} d\mathbf{x} \right] = \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \theta_h^{n-1} N_i \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Si divide il dominio  $\Omega$  in  $N$  elementi rettangolari disgiunti  $\Omega = \cup_{e=0}^{N-1} \Omega_e$ . Per ogni elemento  $e \in [0, N-1]$  vale quindi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega_e} \theta_h^{n,e} N_i^e \, d\mathbf{x}^e + \int_{\Omega_e} \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_h^{n,e} N_i^e \, d\mathbf{x}^e + \\ & + \kappa \left[ \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \frac{\theta_h^{n,e}(\mathbf{y}^e) - \theta_h^{n,e}(\mathbf{x}^e)}{|\mathbf{y}^e - \mathbf{x}^e|^{n+2s}} (N_i^e(\mathbf{x}^e) - N_i^e(\mathbf{y}^e)) \, d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e + \right. \\ & \left. + C_{n,s} \int_{\Omega_e} \theta_h^{n,e}(\mathbf{x}) N_i^e(\mathbf{x}^e) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_e} \frac{1}{|\mathbf{x}^e - \mathbf{y}^e|^{n+2s}} \, d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e \right] = \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega_e} \theta_h^{n-1,e} N_i^e \, d\mathbf{x}^e. \end{aligned}$$

Essendo  $X_{\Omega}^2(\mathbb{R}^n)$  uno spazio di Hilbert, le soluzioni  $\theta_h^e$  possono essere espresse come combinazione lineare delle funzioni di forma  $\theta_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^9 \theta_j^e N_j^e(\mathbf{x})$ , dove  $\theta_j^e \in \mathbb{R}$  è la proiezione della soluzione sulle funzioni base  $N_j^e$ . Si ottiene quindi  $\forall j \in [1, 9]$

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_j^{n,e}}{\delta t} \int_{\Omega_e} N_j^e N_i^e \, d\mathbf{x}^e + \theta_j^{n,e} \int_{\Omega_e} \mathbf{u} \cdot \nabla N_j^e N_i^e \, d\mathbf{x}^e + \\ & + \kappa \theta_j^{n,e} \left[ \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \frac{N_j^e(\mathbf{y}^e) - N_j^e(\mathbf{x}^e)}{|\mathbf{y}^e - \mathbf{x}^e|^{n+2s}} (N_i^e(\mathbf{x}^e) - N_i^e(\mathbf{y}^e)) \, d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e + \right. \\ & \left. + C_{n,s} \int_{\Omega_e} N_j^e(\mathbf{x}) N_i^e(\mathbf{x}^e) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_e} \frac{1}{|\mathbf{x}^e - \mathbf{y}^e|^{n+2s}} \, d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e \right] = \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega_e} \theta_h^{n-1,e} N_i^e \, d\mathbf{x}^e. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Sulla base dell'equazione (3.62), si possono definire le matrici locali  $A_{ij}^e$  che rappresentano il sistema lineare che deve essere risolto come

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega_e} N_j^e N_i^e \, d\mathbf{x}^e + \int_{\Omega_e} \mathbf{u} \cdot \nabla N_j^e N_i^e \, d\mathbf{x}^e + \\ & + \kappa \left[ \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \frac{N_j^e(\mathbf{y}^e) - N_j^e(\mathbf{x}^e)}{|\mathbf{y}^e - \mathbf{x}^e|^{n+2s}} (N_i^e(\mathbf{x}^e) - N_i^e(\mathbf{y}^e)) \, d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e + \right. \\ & \left. + C_{n,s} \int_{\Omega_e} N_j^e(\mathbf{x}) N_i^e(\mathbf{x}^e) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_e} \frac{1}{|\mathbf{x}^e - \mathbf{y}^e|^{n+2s}} \, d\mathbf{y}^e d\mathbf{x}^e \right], \\ B_i^e &= \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega_e} \theta_h^{n-1,e} N_i^e \, d\mathbf{x}^e, \end{aligned} \quad (3.63)$$

Si noti che le matrici  $A_{ij}^e$  sono di dimensione  $9 \times 9$ ; si noti inoltre che il termine  $\theta_h^{n-1,e}$  è un valore noto. Si ottiene il sistema discretizzato in forma locale della prima equazione del sistema (3.55)

$$A_{ij}^e \theta_j^{n,e} = B_i^e \quad \forall i, j \in [1, 9] \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.64)$$

Affinchè si possano calcolare gli integrali dentro le matrici in modo agevole serve definire una trasformazione di coordinate che porti il dominio d'integrazione  $\Omega_e$  all'elemento canonico QUAD9. Tramite la connettività è possibile passare dalla forma locale alla forma globale

$$A_{ij} \theta_j^n = B_i, \quad (3.65)$$

dove la matrice  $A_{ij}$  rappresenta la fisica del problema ed il vettore  $\theta_j^n$  è il vettore delle incognite. Essendo il problema non stazionario, al membro di destra è presente la soluzione all'istante precedente, serve infatti definire una condizione iniziale  $\theta_j^0$ . La presenza del Laplaciano frazionario fa sì che la matrice  $A_{ij}$  sia una matrice densa, aumentando notevolmente il costo computazionale.

Per la simulazione numerica dei moti quasi-geostrofici, è stata effettuata la discretizzazione completa del sistema di equazioni (3.55), seguendo un procedimento analogo a quello utilizzato in questo paragrafo. I risultati numerici ottenuti dall'implementazione delle equazioni discretizzate nel codice agli elementi finiti FEMuS sono presentate nel prossimo capitolo.



# Capitolo 4

## Simulazioni numeriche

Nei capitoli precedenti sono stati formalizzati i concetti fisici e matematici alla base dell'analisi FEM e del calcolo frazionario e sono state esposte alcune applicazioni dell'utilizzo dell'operatore Laplaciano frazionario. In particolare, sono state analizzate l'equazione di diffusione stazionaria non locale e le equazioni quasi-geostrofiche superficiali. In questo capitolo verranno esposti i risultati delle simulazioni numeriche di tali problemi implementati nel software FEMuS per domini bidimensionali. Per i problemi differenziali classici, nei quali vengono utilizzate derivate ordinarie, i rispettivi sistemi algebrici discretizzati sono caratterizzati da matrici sparse, ovvero matrici con un'alta percentuale di elementi nulli. Tali matrici vengono risolte molto facilmente tramite la libreria PETSc di C++.

Per i problemi differenziali non locali, i rispettivi sistemi algebrici discretizzati sono caratterizzati da matrici dense, ovvero matrici con pochi elementi nulli. Risolvere problemi algebrici caratterizzati da matrici dense di dimensione molto elevata comporta un costo computazionale non indifferente. Per diminuire il tempo di calcolo occorre implementare nel codice la possibilità di utilizzare il calcolo parallelo, ovvero distribuire il problema su più processori; essendo il problema non locale, non è banale parallelizzarne la risoluzione.

In tutte le simulazioni verrà utilizzata una griglia quadrata con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee. Risultati teorici infatti dimostrano che l'esistenza della soluzione di un problema legato al Laplaciano frazionario con condizioni al contorno di Neumann non è assicurata. Per maggiori informazioni si veda, ad esempio, [19].

In quest capitolo, verranno presentati i risultati numerici relativi a

- **Diffusione stazionaria non locale**

$$(-\Delta)^s u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

- **Equazione del calore non locale**

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta + (-\Delta)^s \theta = 0,$$

- **Equazioni quasi-geostrofiche superficiali**

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta + (-\Delta)^s \theta = 0, \\ \mathbf{u} = \nabla^\perp \Psi, \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \Psi = \theta. \end{cases}$$

Ricordando la definizione di laplaciano frazionario di Riesz (2.18)

$$(-\Delta)^s u(\mathbf{x}) = C_{n,s} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2s}} d\mathbf{y}, \quad C_{n,s} = s2^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2s}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1-s)}, \quad (4.1)$$

considerando il dominio  $\Omega$  bidimensionale si ha che  $n = 2$ , di conseguenza

$$(-\Delta)^s u(\mathbf{x}) = s2^{2s} \frac{\Gamma(1+s)}{\pi \Gamma(1-s)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2+2s}} d\mathbf{y}.$$

## 4.1 Diffusione stazionaria non locale

In questa sezione verranno presentati alcuni risultati numerici dell'approssimazione FEM dell'equazione di diffusione stazionaria non locale. In particolare, questo tipo di equazione è stato ampiamente risolto, ed è possibile trovare numerosi benchmark in letteratura per la validazione del codice sviluppato. In particolare, viene usato [19] come benchmark di riferimento per i risultati numerici e per la validazione del codice sviluppato.

Si considera un dominio quadrato  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  sul quale risolvere l'equazione di diffusione non locale (2.25) con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Le simulazioni numeriche sono state fatte con tre tipi di sorgente:

- sorgente unitaria:  $f(\mathbf{x}) = 1$ ,
- sorgente sinusoidale:  $f(\mathbf{x}) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ ,
- sorgente gaussiana:  $f(\mathbf{x}) = e^{-x^2-y^2}$ .

#### 4.1.1 Sorgente unitaria

Si considera il caso di termine forzante costante unitario  $f(\mathbf{x}) = 1$ . In Figura 4.1 viene mostrato l'andamento della soluzione  $u(\mathbf{x})$  dell'equazione

$$(-\Delta)^s u = 1 \rightarrow s2^{2s} \frac{\Gamma(1+s)}{\pi\Gamma(1-s)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2+2s}} d\mathbf{y} = 1.$$

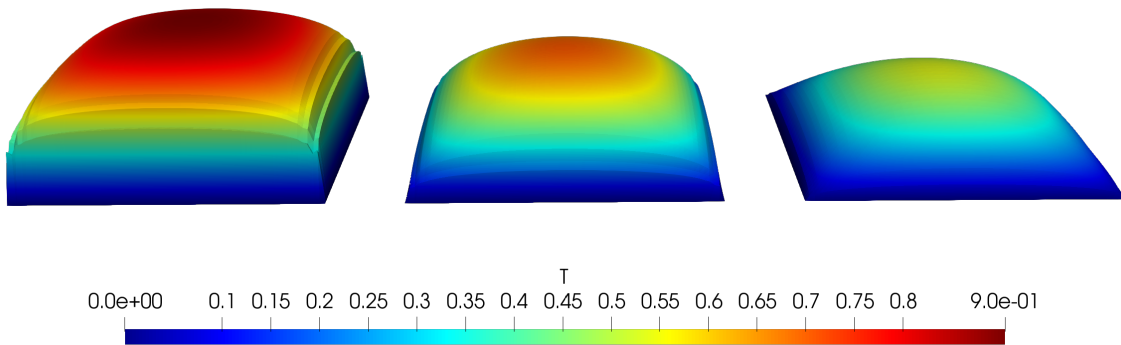


Figura 4.1: Andamento di  $u(\mathbf{x})$  con sorgente unitaria  $f(\mathbf{x}) = 1$  con  $s = 0.25$ ,  $s = 0.5$  e  $s = 0.75$  su una griglia  $32 \times 32$ .

Il comportamento anomalo della soluzione agli estremi, riscontrabile per valori bassi di  $s$ , è dovuto alla non coerenza tra la sorgente unitaria e le condizioni al contorno di Dirichlet omogenee. Dalle figure 4.1 e 4.2 si può notare come, al variare dell'ordine di derivazione  $s$ , la grandezza  $u$  si appiattisca passando da una configurazione più simile alla soluzione  $u(\mathbf{x}) = 1$  ad una più simile alla soluzione di un'equazione di diffusione ordinaria. In Figura 4.2 si può notare la convergenza della soluzione quando la griglia computazionale viene raffinata. In particolare, per il raffinamento del mesh è stata usata una tecnica multigriglia. Per maggiori informazioni sul metodo multigriglia, si veda [2, 33]. Si noti che al raffinarsi della griglia, le soluzioni tendono a convergere. In Figura, sono riportate le soluzioni a partire da una griglia  $2 \times 2$  raffinata fino a 4 volte (griglia  $32 \times 32$ ).

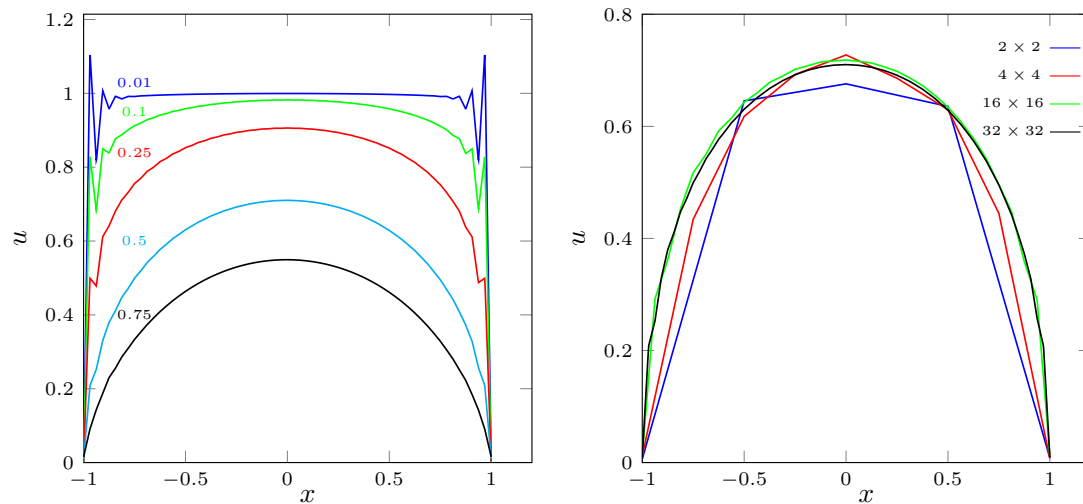


Figura 4.2: Sinistra: andamento di  $u(x,0)$  al variare di  $s$  con griglia  $32 \times 32$ . Destra: convergenza con la griglia di  $u(x,0)$  per  $s = 0.5$ .

In Figura 4.3, la soluzione ottenuta per  $s = 0.25$  è confrontata con i risultati del benchmark presente in [19]. La congruenza molto marcata tra le due soluzioni dimostra la corretta implementazione del codice sviluppato. Si noti che le coordinate  $x$  e  $y$  usate

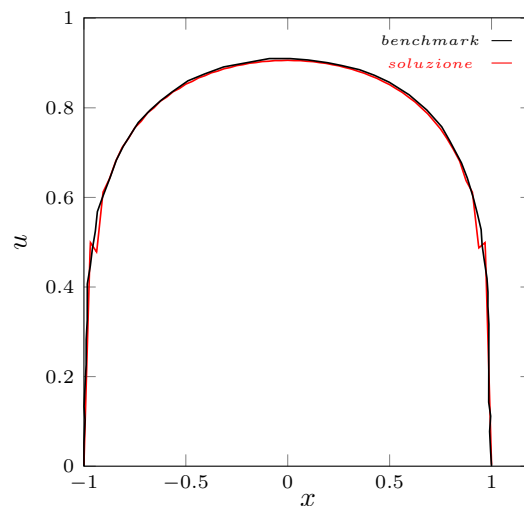


Figura 4.3: Confronto con il benchmark per  $s = 0.25$  su una griglia  $32 \times 32$ .

in questa sezione non sono da confondere con i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  utilizzati nel paragrafo precedente. In questa sezione  $x$  e  $y$  rappresentano le coordinate spaziali dei punti del dominio  $\Omega$ , mentre nel paragrafo precedente  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  erano vettori che indicavano le variabili di integrazione.

### 4.1.2 Sorgente sinusoidale

Per testare il codice con sorgenti non costanti nello spazio, si considera ora il caso di termine forzante di tipo sinusoidale  $f(\mathbf{x}) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ . In Figura 4.4 viene

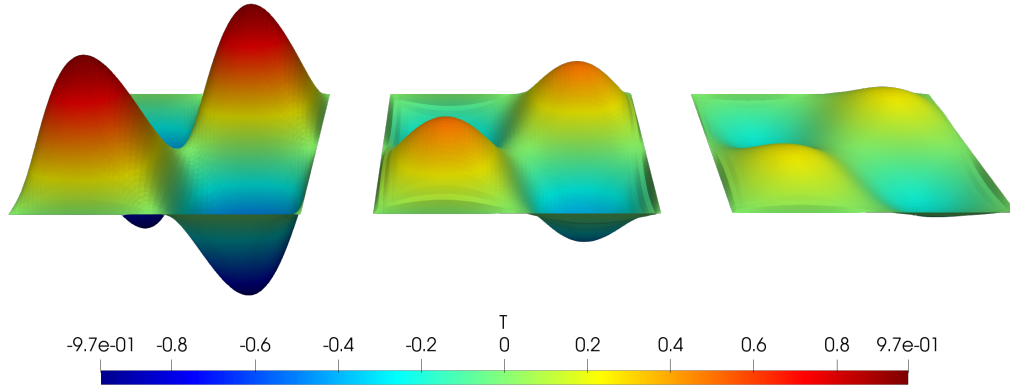


Figura 4.4: Andamento di  $u(\mathbf{x})$  con sorgente sinusoidale  $f(\mathbf{x}) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$  con  $s = 0.01$ ,  $s = 0.25$  e  $s = 0.5$  su una griglia  $32 \times 32$ .

mostrato l'andamento della soluzione  $u(\mathbf{x})$  dell'equazione

$$(-\Delta)^s u = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

A differenza della sorgente unitaria, la sorgente sinusoidale è stata costruita per essere coerente con le condizioni al contorno essendo nulla alla frontiera  $\partial\Omega$ . Questa coerenza porta ad avere delle soluzioni che non presentano le singolarità mostrate nel caso precedente quando  $s \rightarrow 0$ .

Dalle Figure 4.5 e 4.4 si può notare come all'aumentare dell'ordine di derivazione  $s$  la soluzione si appiattisca, crescendo le proprietà dissipative dell'operatore al crescere di  $s$ . In Figura 4.5 è riportata la convergenza in griglia della soluzione, che mostra nuovamente una convergenza della soluzione con la griglia.

Dalle Figure 4.5 e 4.4 si può notare come all'aumentare dell'ordine di derivazione  $s$  la soluzione si appiattisca. In [19] è presente una soluzione benchmark per una sorgente sinusoidale. In Figura 4.6 si può notare come la soluzione numerica e il benchmark siano, in buona approssimazione, congruenti.

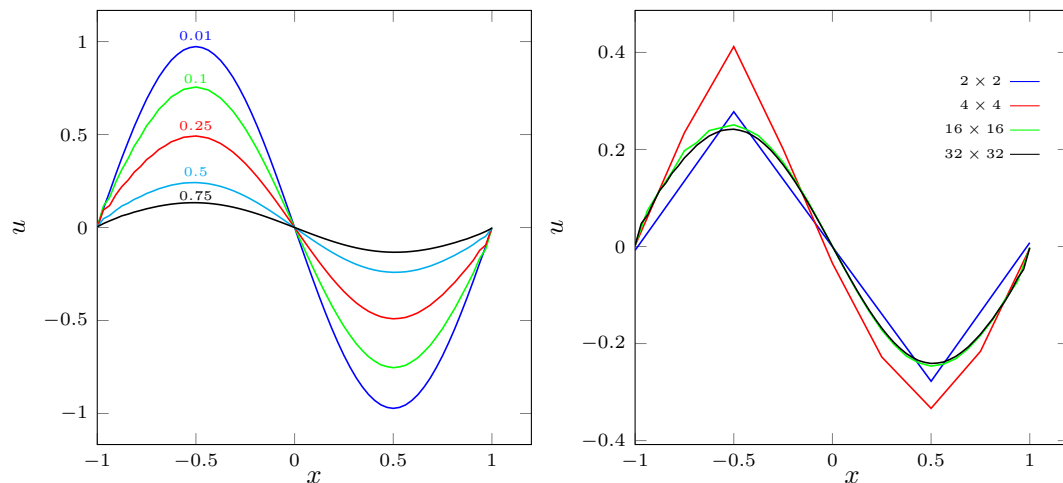


Figura 4.5: Sinistra: andamento di  $u(x,0)$  al variare di  $s$  con griglia  $32 \times 32$ . Destra: convergenza di griglia di  $u(x,0)$  per  $s = 0.5$ .

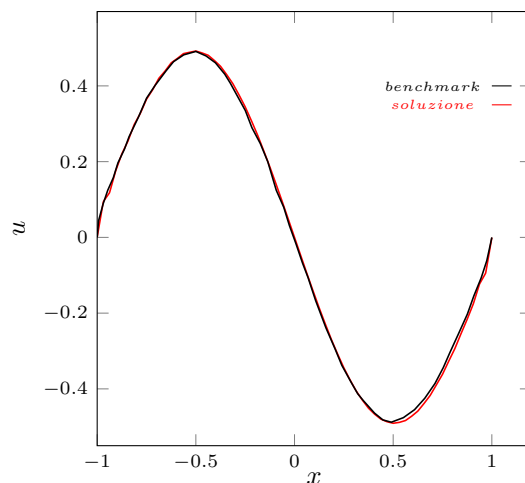


Figura 4.6: Confronto con il benchmark per  $s = 0.25$  su una griglia  $32 \times 32$ .

### 4.1.3 Sorgente gaussiana

Si considera il caso di termine forzante di tipo gaussiano  $f(\mathbf{x}) = e^{-x^2-y^2}$ . In Figura 4.7 viene mostrato l'andamento della soluzione  $u(\mathbf{x})$  dell'equazione

$$(-\Delta)^s u = e^{-x^2-y^2}.$$

Come nel caso di sorgente unitaria, anche la sorgente gaussiana non è coerente con le condizioni al contorno di Dirichlet omogenee nel caso  $s \rightarrow 0$ . Tuttavia, essendo la funzione gaussiana tendente a zero lontano dall'origine degli assi, la non coerenza è poco marcata come si può notare dalle Figure 4.7 e 4.8.

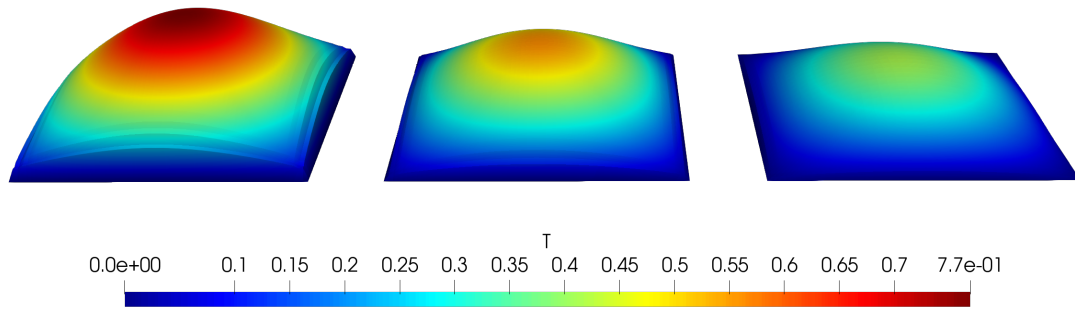


Figura 4.7: Andamento di  $u(\mathbf{x})$  con sorgente gaussiana  $f(\mathbf{x}) = e^{-x^2-y^2}$  con  $s = 0.25$  (sinistra),  $s = 0.5$  (centro) e  $s = 0.75$  (destra) su una griglia  $32 \times 32$ .

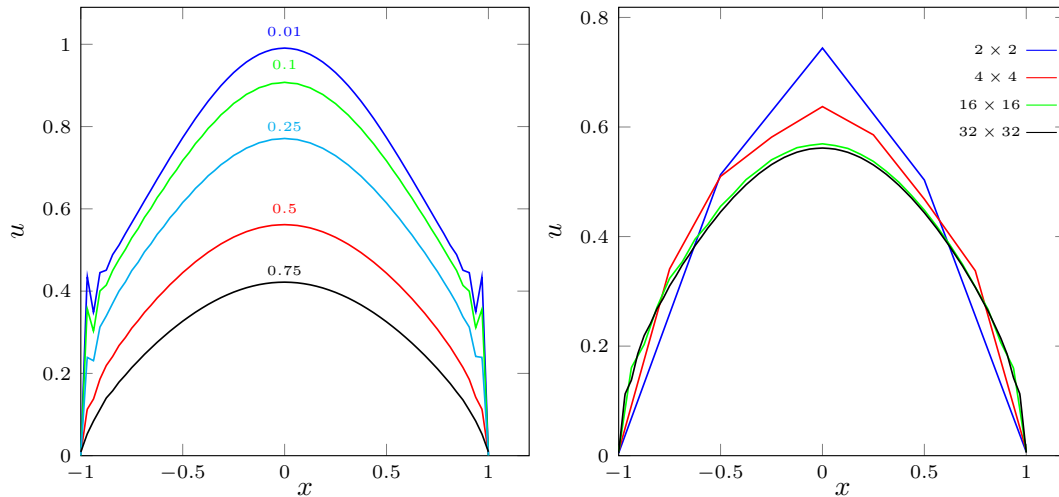


Figura 4.8: Sinistra: andamento di  $u(x, 0)$  al variare di  $s$  con griglia  $32 \times 32$ . Destra: convergenza di griglia di  $u(x, 0)$  per  $s = 0.5$ .

In particolare, dalle Figure 4.8 e 4.7 si può notare come all'aumentare dell'ordine di derivazione  $s$  la soluzione si appiattisca. In Figura 4.8 è riportata la convergenza in griglia della soluzione. Trovare soluzioni benchmark sul laplaciano frazionario di Riesz in letteratura non è semplice, ed un benchmark di riferimento per il caso con sorgente di tipo gaussiano è stato trovato.

Grazie a questi risultati numerici si può affermare che il codice implementato per la simulazione dell'equazione di diffusione non locale è correttamente funzionante, in quanto combacia con i risultati presi dalla letteratura. Ora che sono stati validati questi casi benchmark, si considera l'equazione del calore non locale prima di implementare le equazioni SQG.

## 4.2 Equazione del calore non locale

In questa sezione verranno presentati alcuni risultati numerici dell'approssimazione FEM dell'equazione del calore non locale. Non è stato possibile trovare risultati benchmark in letteratura, sono quindi stati effettuati dei test su casi semplici. Si considera un dominio quadrato  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  e una griglia uniforme  $32 \times 32$  sulla quale si risolve l'equazione del calore non locale (3.59) con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta + \kappa(-\Delta)^s \theta = 0, \quad s \in (0, 1),$$

dove il campo di velocità  $\mathbf{u}$  si considera noto. Sono stati effettuati due diversi tipi di simulazione, classificabili attraverso diversi campi di velocità  $\mathbf{u}$ , ordine di derivazione  $s$ , diffusività  $\kappa$  e condizioni iniziali  $\theta_0$ .

In particolare si considera un caso a *vortice singolo*, con

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (-y, x), \\ \theta_0 &= \begin{cases} 10 & \text{se } (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 < 0.2, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ \kappa &= 0.05. \end{aligned}$$

Si considera inoltre un caso a *vortice doppio*, con

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{cases} (-0.2y, x - 0.5) & \text{se } x > 0, \\ (-0.2y, x + 0.5) & \text{se } x < 0, \end{cases}, \\ \theta_0 &= \begin{cases} 10 & \text{se } (x - 0.6)^2 + y^2 < 0.05 \vee (x + 0.6)^2 + y^2 < 0.05, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ \kappa &= 0.05. \end{aligned}$$

### 4.2.1 Vortice singolo

Si analizza ora il test introdotto in precedenza riguardante un campo di velocità imposto pari ad un singolo vortice. L'obiettivo è quello di vedere come la condizione iniziale

$\theta_0$  venga trascinato dal campo di velocità  $\mathbf{u}$  al variare dell'ordine di derivazione  $s$ . In questa simulazione è stato scelto un timestep di  $\delta t = 0.1s$ . Il campo di velocità imposto è rappresentato in Figura 4.9.

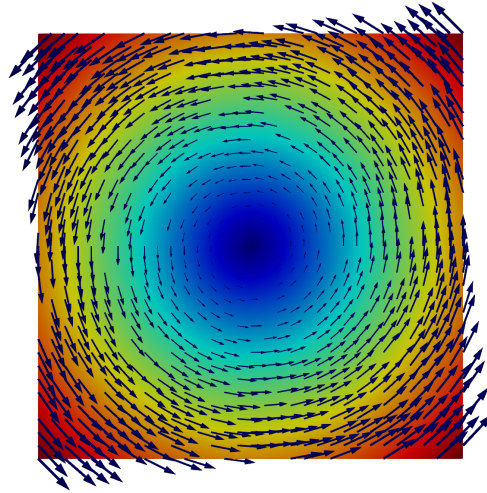


Figura 4.9: Campo di velocità  $\mathbf{u}$ .

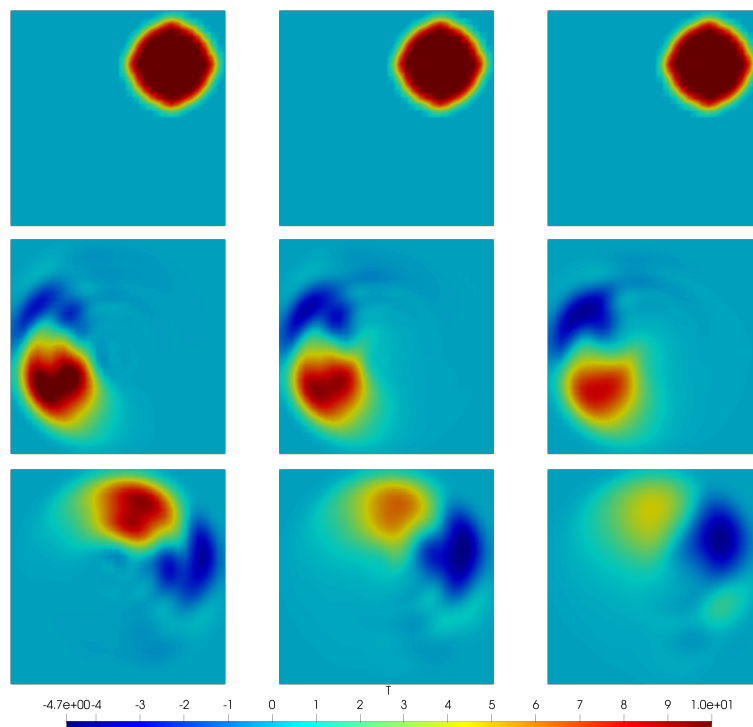


Figura 4.10: Soluzione  $\theta(x, y, t)$  singolo vortice per  $t = 0s$  (in alto),  $t = 3s$  (al centro),  $t = 7s$  (in basso) per  $s = 0.01$  (sinistra),  $s = 0.5$  (centro) e  $s = 0.75$  (destra).

La soluzione  $\theta$ , partendo dalla condizione iniziale  $\theta_0$ , evolve nel tempo seguendo il campo di velocità  $\mathbf{u}$  rotante in senso antiorario e diffondendo in modo non locale in tutto il dominio  $\Omega$ . In Figura 4.10 è rappresentata l'evoluzione temporale della variabile  $\theta(x, y, t)$  in vari istanti temporali per vari valori di  $s$ . In particolare, si rimarca che le immagini delle soluzioni relative allo stesso valore di  $s$  sono disposte verticalmente, per diversi istanti di tempo successivi ( $t = 0s$ ,  $t = 3s$  e  $t = 7s$ , rispettivamente). Si può notare come al variare di  $s$  la soluzione tenda a diffondere in maniera differente. Per valori bassi di  $s$  il laplaciano frazionario presenta basse caratteristiche diffusive, non influenzando i nodi del dominio vicini ad ogni nodo considerato, che viene sottoposto alla velocità imposta. Per valori di  $s$  più vicini all'unità, il laplaciano frazionario è più simile ad un laplaciano classico e presenta maggiori caratteristiche diffusive. Questa simulazione è perfettamente in linea con le aspettative, ed in tutti i test effettuati è possibile notare la coda del vortice (rappresentata da valori negativi della variabile  $\theta$ ) causata dalla traslazione del campo iniziale.

Nel grafico 4.11 è mostrato l'andamento dell'energia cinetica  $\mathcal{K}$  nel tempo. In riferimento a [34], non è possibile conservare l'energia cinetica anche nel caso inviscido a causa di un fenomeno numerico chiamato viscosità artificiale. Come si può notare, la dissipazione dell'energia cinetica sarà maggiore per valori di  $s$  vicini a 1, mentre è minima nel caso inviscido ( $\kappa = 0$ ).

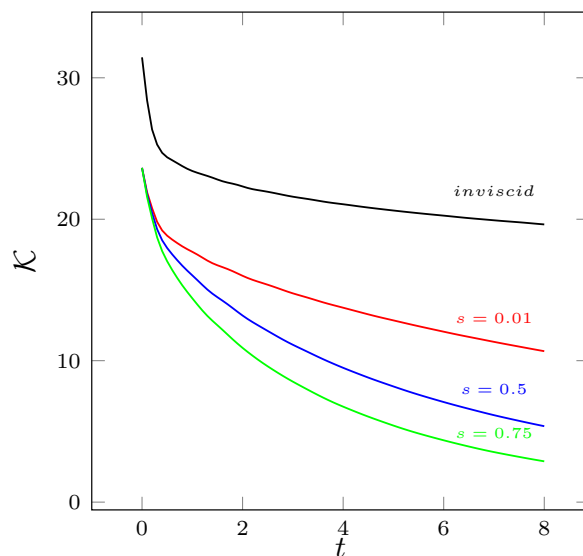


Figura 4.11: Energia cinetica  $\mathcal{K}$  in funzione del tempo.

### 4.2.2 Vortice doppio

Come nel caso precedente, l'obiettivo dei test numerici è quello di analizzare il trascinamento e la diffusione della condizione iniziale  $\theta_0$ . In questa simulazione è stato scelto un timestep di  $\delta t = 0.2s$ . Si utilizza un campo di velocità  $\mathbf{u}$  discontinuo, rappresentato in Figura 4.12, per verificare l'efficacia dell'algoritmo implementato in tali situazioni,

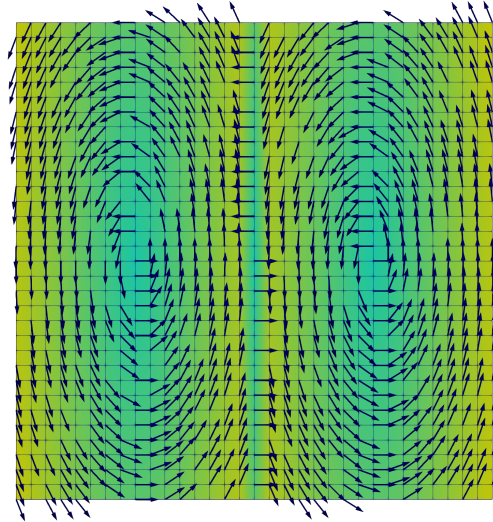


Figura 4.12: Campo di velocità  $\mathbf{u}$ .

In Figura 4.13 è mostrato l'andamento temporale della soluzione  $\theta(x, y, t)$  per vari istanti temporali e vari valori di  $s$ . Si rimarca nuovamente che le immagini delle soluzioni relative allo stesso valore di  $s$  sono disposte verticalmente, per diversi istanti di tempo successivi. In modo simile al caso del vortice singolo, si nota come all'aumentare dell'ordine di derivazione  $s$  la soluzione tenda a diffondere in tutto il dominio  $\Omega$ , rispettando comunque le condizioni di Dirichlet omogenee.

Nella Figura 4.14 è mostrato l'andamento dell'energia cinetica nel tempo per vari valori di  $s$ . Si può notare come la maggior dissipazione di energia cinetica la si ha per valori di  $s$  vicini all'unità, in quanto è maggiore la diffusività della soluzione. Anche in questo caso si può notare l'effetto della vorticosità data dal trascinamento della condizione iniziale che fa assumere a  $\theta$  valori negativi nelle code.

I risultati ottenuti in queste simulazioni, uniti a quelli della Sezione 4.1, possono considerarsi sufficienti per l'implementazione del codice delle equazioni SQG. Si rimarca che l'assenza di benchmark in letteratura su questo tipo di simulazioni non permette

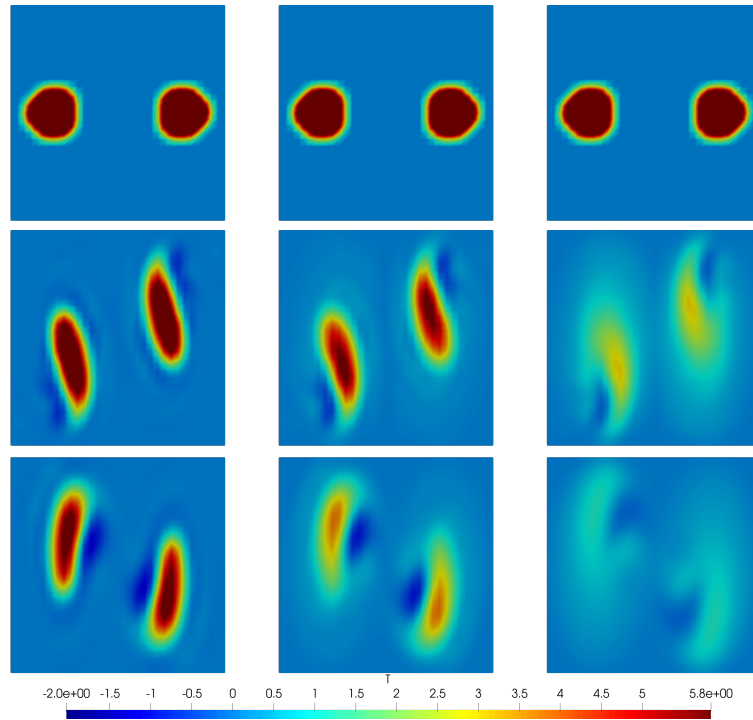


Figura 4.13: Soluzione  $\theta(x, y, t)$  doppio vortice per  $t = 0s$  (in alto),  $t = 3s$  (al centro),  $t = 7s$  (in basso) per  $s = 0.01$  sinistra,  $s = 0.25$  centro e  $s = 0.5$  destra.

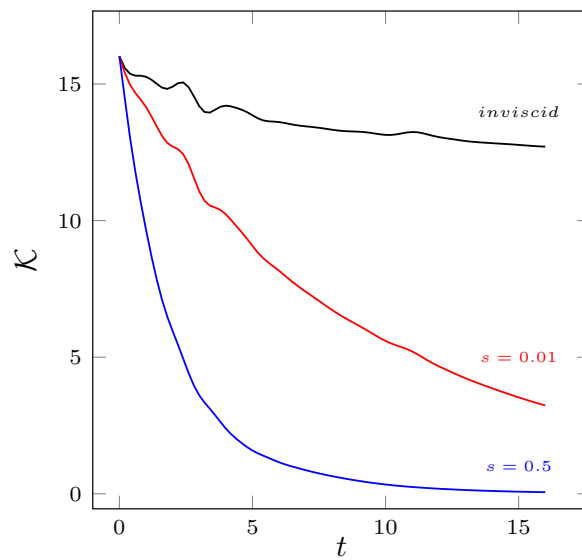


Figura 4.14: Energia cinetica  $\mathcal{K}$  in funzione del tempo.

ulteriori test di validazione. Tuttavia i risultati presentati sono qualitativamente in linea con i risultati attesi.

### 4.3 Equazioni quasi-geostrofiche superficiali

In questa sezione verranno mostrati i risultati numerici delle equazioni quasi-geostrofiche superficiali che obbediscono al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta + \kappa (-\Delta)^s \theta = 0, \\ \mathbf{u} = \nabla^\perp \Psi, \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \Psi = \theta. \end{cases}$$

Verranno prese in considerazione varie condizioni iniziali  $\theta_0$ . Essendo il geopotenziale  $\Psi$  uguale al gradiente ortogonale della temperatura adimensionale  $\theta$ , la soluzione di tali equazioni raggiungerà una condizione stazionaria solo nel caso di  $Psi$  costante. Per poter confrontare le soluzioni con i casi presentati in [34], si considera il dominio  $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ . Sono state scelte le seguenti condizioni iniziali

- Gaussiana (due casi considerati)

$$\theta_0(x, y) = e^{-4x^2 - 16y^2} \text{ e } \theta_0(x, y) = e^{-x^2 - 16y^2},$$

- Doppia gaussiana

$$\theta_0(x, y) = e^{-36(x-0.5)^2 - y^2} + e^{-36(x+0.5)^2 - y^2},$$

- Vortice multiplo

$$\theta_0(x, y) = \sin^2(x) \sin^2(y).$$

In letteratura (si veda [35, 24, 29, 36]) vengono spesso analizzati gli istanti temporali  $t \in [6, 20]$ . In questo lavoro verrà studiato l'andamento della soluzione  $\theta(x, y, t)$  con particolare attenzione all'intervallo temporale riportato. Si considerano inoltre  $\kappa = 0.001$  e  $s = 0.5$ .

#### 4.3.1 Gaussiana

La condizione iniziale Gaussiana raffigura un vortice rotante ad alta velocità tendente a formare filamenti di coda e può essere usato per la simulazione numerica di un ricircolo di un ciclone in atmosfera. Come anticipato in precedenza, verranno considerati due vortici ellittici di eccentricità diverse.

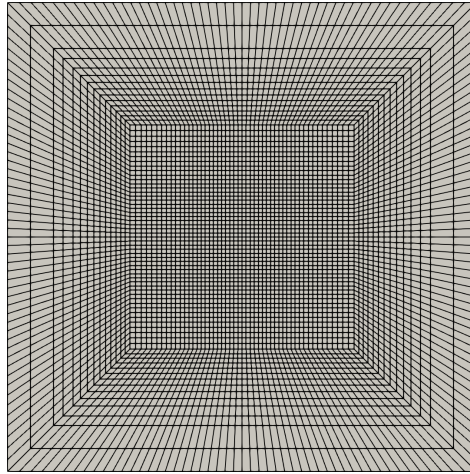


Figura 4.15: Mesh utilizzata per le simulazioni con condizione iniziale gaussiana.

Si considera  $\kappa = 0.001$ ,  $\delta t = 0.05s$  e la griglia mostrata in Figura 4.15. La griglia è stata scelta opportunamente in modo da essere fine al centro, dove si sviluppano i vortici causati dalla gaussiana imposta, e da essere meno fine ai bordi, dove non è necessaria una elevata precisione di calcolo.

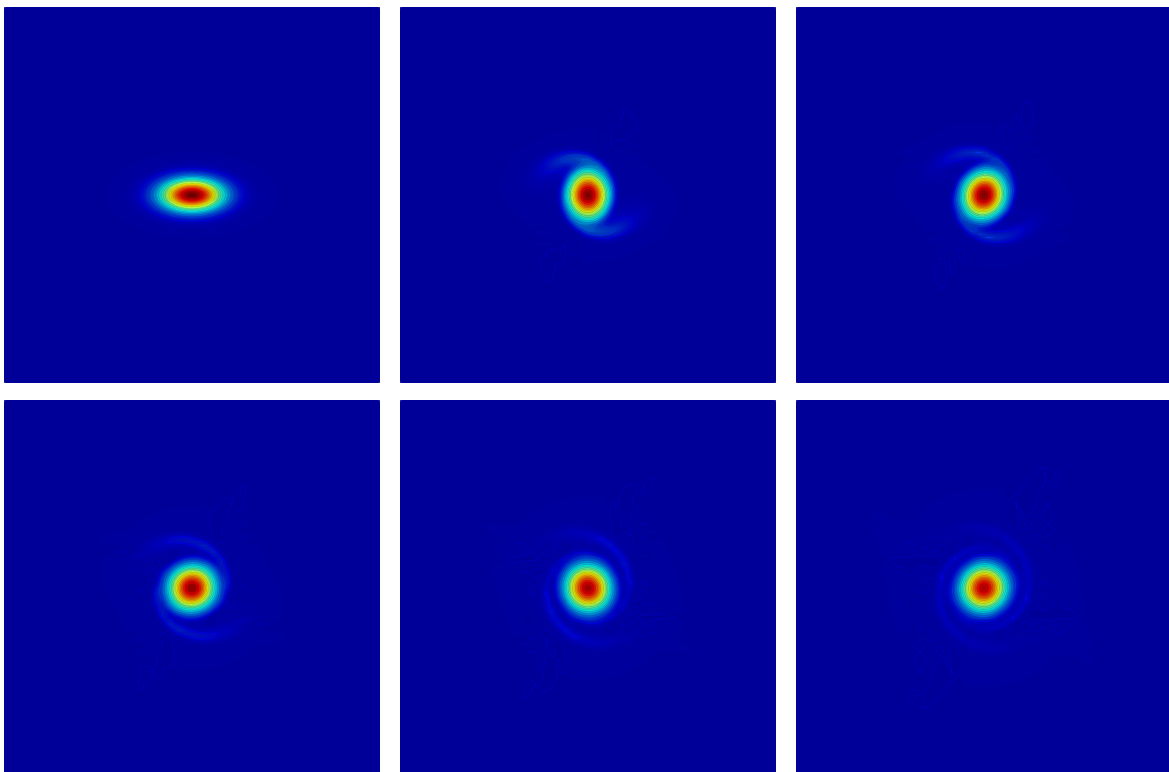


Figura 4.16: Evoluzione temporale della soluzione  $\theta(x, y, t)$  di condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{-4x^2 - 16y^2}$  per  $t = 0s$ ,  $t = 6s$ ,  $t = 8s$ ,  $t = 11s$ ,  $t = 16s$ ,  $t = 21s$ .

In Figura 4.16 sono rappresentate le soluzioni per vari istanti temporali utilizzando come condizione iniziale la gaussiana di eccentricità minore  $\theta_0(x, y) = e^{-4x^2-16y^2}$ . Si noti che l'evoluzione temporale avviene, nell'ordine, da sinistra a destra e dall'alto in basso, a partire da  $t = 0s$  (in alto a sinistra) fino a  $t = 21s$  (in basso a destra).

In Figura 4.17 sono rappresentate le soluzioni per vari istanti temporali utilizzando come condizione iniziale la gaussiana di eccentricità maggiore  $\theta_0(x, y) = e^{-x^2-16y^2}$ . Queste simulazioni sono in linea con i risultati di [23, 37]. Si nota come la maggiore

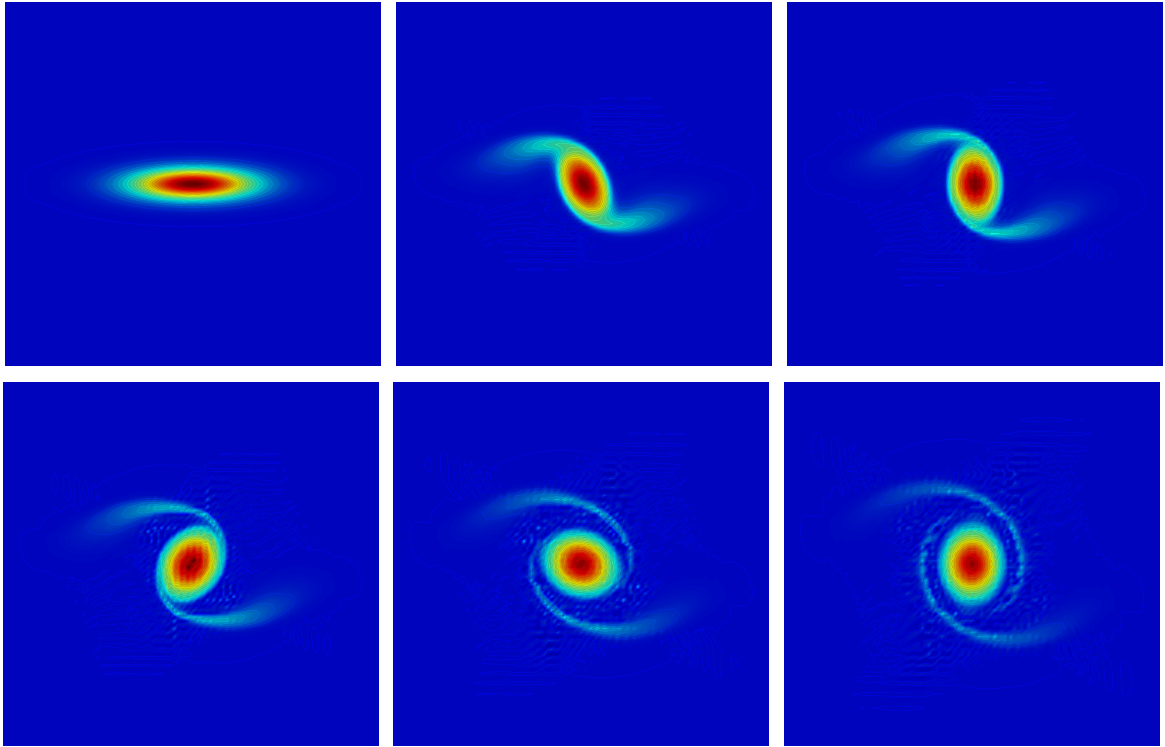


Figura 4.17: Evoluzione temporale della soluzione  $\theta(x, y, t)$  di condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{-x^2-16y^2}$  per  $t = 0s$ ,  $t = 6s$ ,  $t = 8s$ ,  $t = 11s$ ,  $t = 16s$ ,  $t = 21s$ .

eccentricità della gaussiana rende più marcate le due code formate dalla rotazione del vortice. Questo fenomeno è in linea con le aspettative in quanto la velocità di convezione è  $\mathbf{u} = \nabla^\perp \Psi$ , con  $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \Psi = \theta$ . Di conseguenza maggiore sarà la disuniformità di  $\theta$ , maggiore sarà la velocità  $\mathbf{u}$ . Nel caso limite di condizione iniziale perfettamente circolare non si formerebbe alcuna coda.

Nella Figura 4.18 vengono graficate l'energia cinetica e l'elicità al variare del tempo per le due gaussiane. Si può notare come energia cinetica e l'elicità vengano dissipate

rispettivamente dell'1.55% e 5.5% nel caso della gaussiana ad eccentricità minore e 1.79% e 6.1% nel caso della gaussiana di eccentricità maggiore.

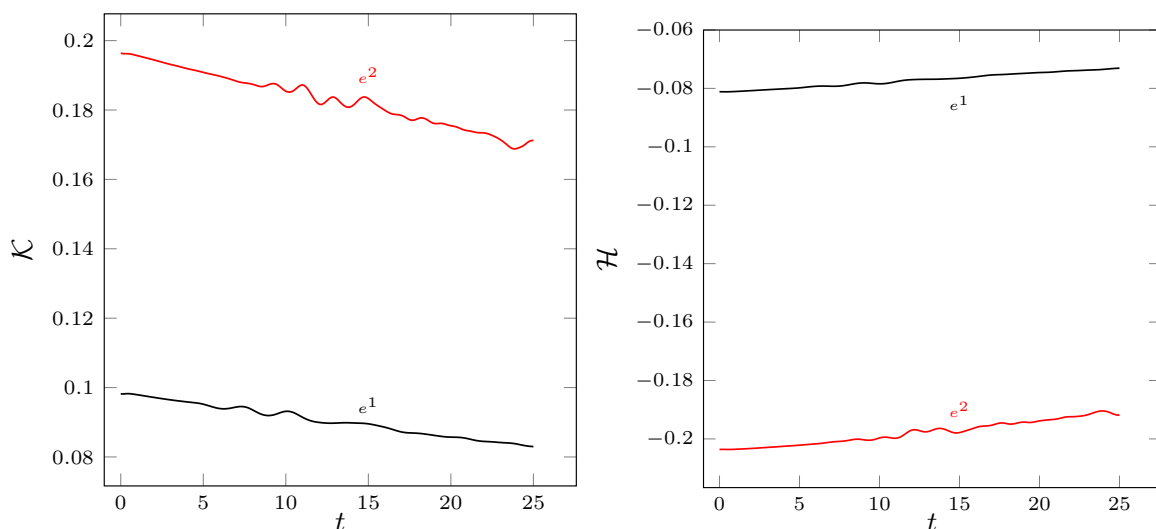


Figura 4.18: Sinistra: Energia cinetica  $\mathcal{K}(t)$ . Destra: Elicità  $\mathcal{H}(t)$  con condizioni iniziali  $\theta_0(x, y) = e^{-4x^2-16y^2}(e^1)$  e  $\theta_0(x, y) = e^{x^2-16y^2}(e^2)$ .

### 4.3.2 Doppia gaussiana

Si considera ora un caso con la condizione iniziale, introdotta in precedenza, che prevede l'introduzione di due gaussiane. Tali curve daranno vita a due vortici che interagiranno tra loro. La complessità è maggiore rispetto al caso precedentemente introdotto, dal momento che la velocità  $\mathbf{u}$  dipende dall'interazione tra i due vortici. Il problema fisico rappresentato può essere utilizzato per la rappresentazione numerica di due ricircoli atmosferici che si formano l'uno nelle vicinanze dell'altro. Come griglia computazionale si utilizza nuovamente la mesh presente in Figura 4.15. Si considera  $\kappa = 0.001$  e  $\delta t = 0.05s$ .

In Figura 4.19 viene rappresentata la soluzione  $\theta(x, y, t)$  in vari istanti temporali utilizzando come condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{-36(x-0.5)^2-y^2} + e^{-36(x+0.5)^2-y^2}$ , che non è altro che la somma di due gaussiane traslate. Anche se l'intensità dello strato che separa i due vortici decresce con il tempo, i due vortici non si uniranno mai completamente, continuando una rotazione reciproca. Si veda [31] per ulteriori dettagli.

In Figura 4.20 vengono rappresentate l'energia cinetica  $\mathcal{K}$  e l'elicità  $\mathcal{H}$  al variare del tempo. Si può notare come energia cinetica ed elicità vengano dissipate rispettiva-

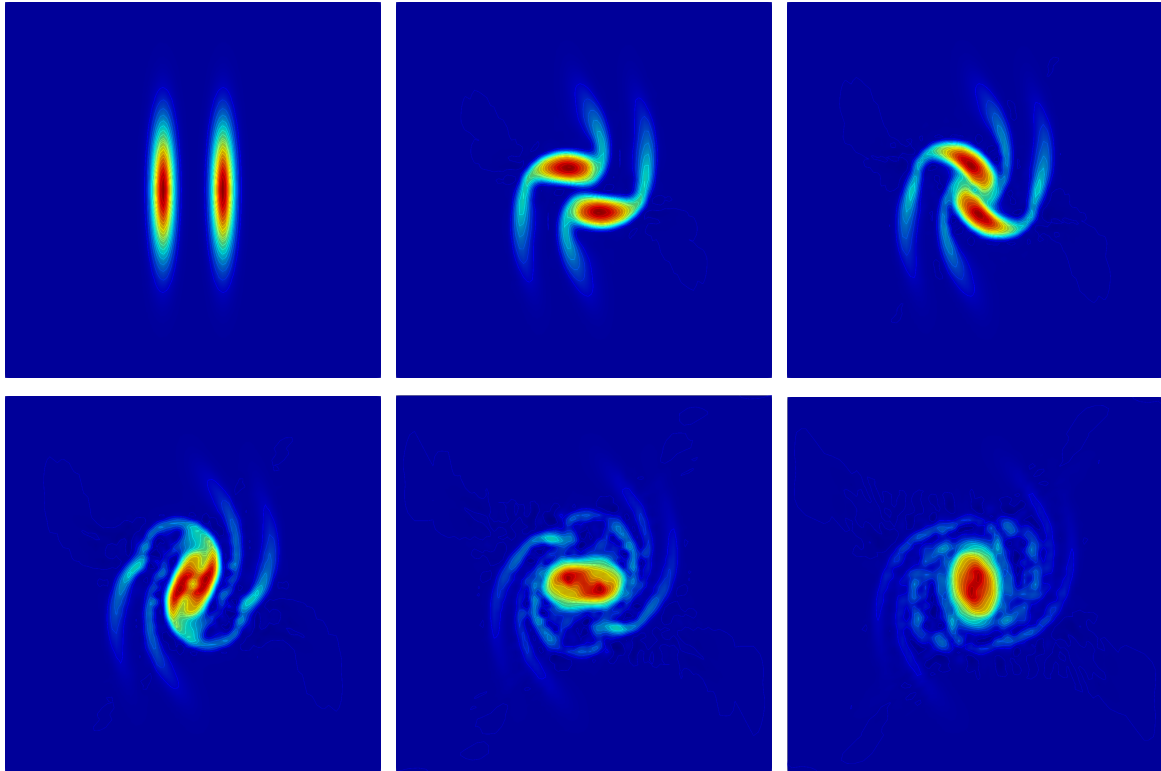


Figura 4.19: Evoluzione temporale della soluzione  $\theta(x, y, t)$  di condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{-36(x-0.5)^2 - y^2} + e^{-36(x+0.5)^2 - y^2}$  per  $t = 0s, t = 6s, t = 8s, t = 11s, t = 16s, t = 21s$ .

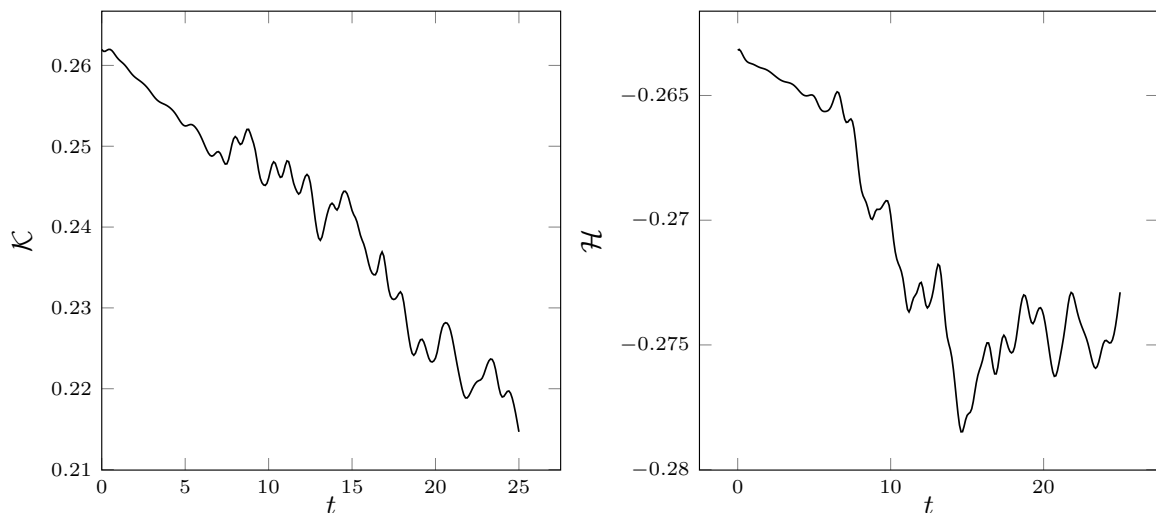


Figura 4.20: Sinistra: Energia cinetica  $\mathcal{K}(t)$ . Destra: Elicità  $\mathcal{H}(t)$  per condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{-36(x-0.5)^2 - y^2} + e^{-36(x+0.5)^2 - y^2}$ .

mente del 18% e 3.56%. La maggiore dissipazione di energia cinetica rispetto al caso precedente è dovuta dell'avvicinarsi dei due vortici.

### 4.3.3 Vortice multiplo

In questa sezione si considera una condizione iniziale del tipo

$$\theta_0(x, y) = \sin^2(x) \sin^2(y).$$

In particolare, la funzione considerata dà luogo a quattro picchi, che inizialmente si trovano nei punti  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ ,  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$  e  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . I picchi formano altrettanti vortici nel dominio computazionali. Dal momento che i quattro vortici sono centrati vicino al bordo esterno della griglia, per questa simulazione sono state usate due griglie differenti: la prima (detta *mesh 1*) più grossolana ai bordi e più fine al centro, la seconda (detta *mesh 2*) più fine ai bordi e più grossolana al centro, come riportato in Figura 4.21. Successivamente verranno confrontate energia cinetica  $\mathcal{K}$  ed elicità  $\mathcal{H}$  al variare della griglia.

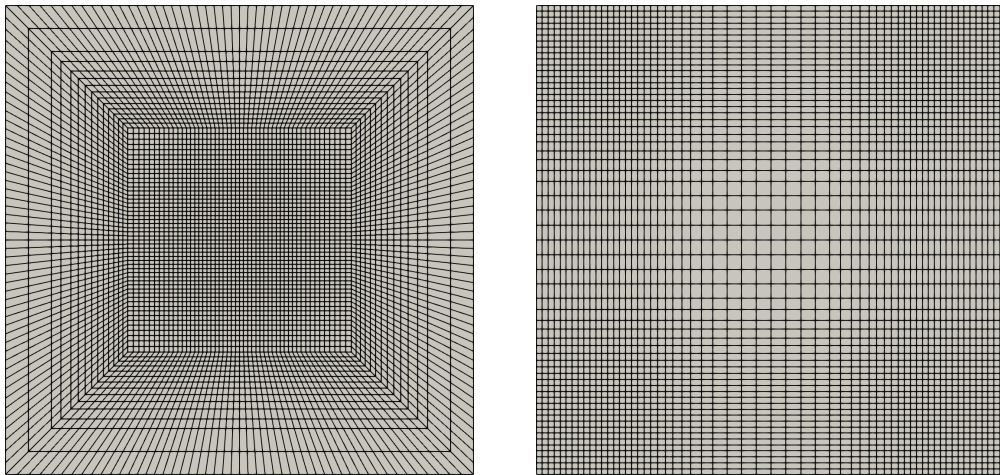


Figura 4.21: Mesh utilizzate per il caso vortice multiplo. Sinistra: *mesh 1*. Destra: *mesh 2*.

In Figura 4.22 sono riportate alcune curve di livello della soluzione  $\theta(x, y, t)$  per vari istanti di tempo, che vengono riportati nello stesso ordine dei casi precedenti. Si può notare come i quattro vortici tendano a ruotare su se stessi ed attorno al centro in senso orario senza mai unirsi. Questo fenomeno si manifesta sempre a causa del legame tra la velocità di convezione, geopotenziale e temperatura potenziale  $\mathbf{u} = \nabla^\perp \Psi$ , dove  $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \Psi = \theta$ .

In Figura 4.23 è mostrato il campo di velocità  $\mathbf{u}$  in alcuni istanti temporali. Si può notare come nella parte interna dei vortici tale velocità sia ortogonale ai vortici gene-

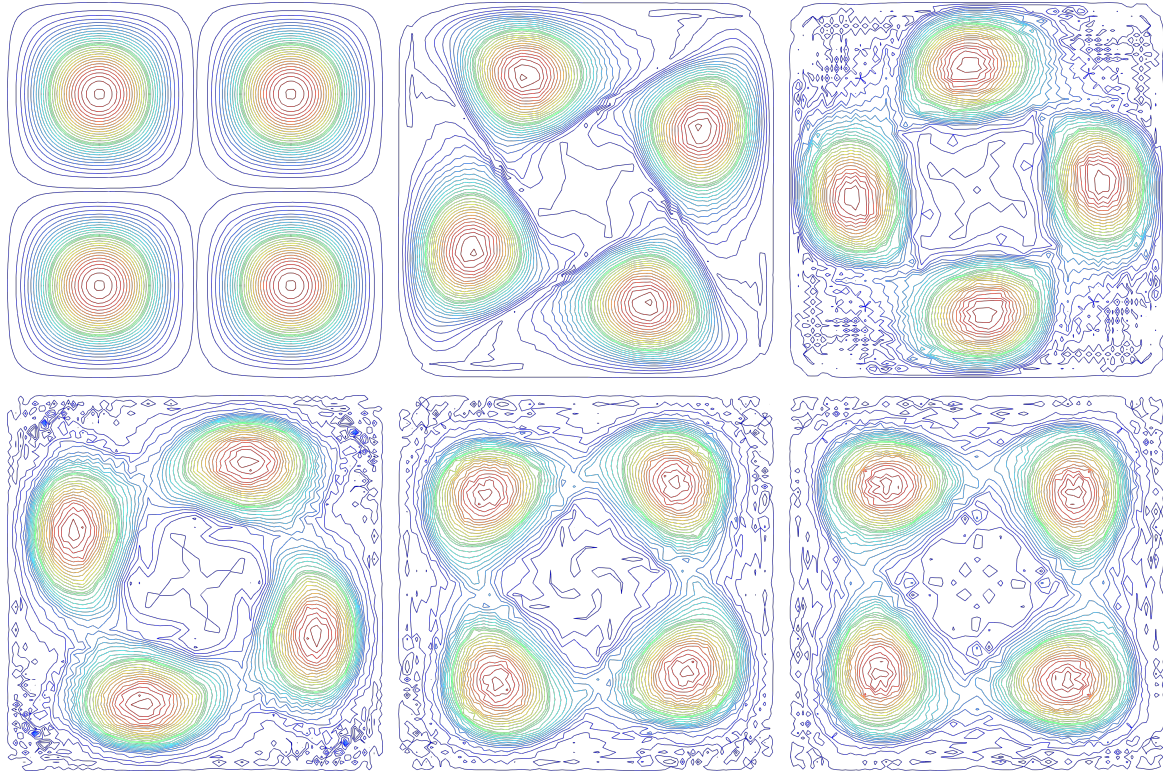


Figura 4.22: Iso-linee della soluzione  $\theta(x, y, t)$  con condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = \sin^2(x) \sin^2(y)$  per  $t = 0s, t = 6s, t = 12s, t = 18s, t = 23s, t = 25s$ , sulla *mesh 2*.

rando così la rotazione attorno a loro stessi, mentre nelle periferie dei vortici il campo di velocità punta verso il vortice immediatamente a destra, generando così la rotazione attorno al centro del dominio. Essendo tutte le velocità bilanciate e la diffusività  $\kappa = 0.001$  molto bassa, i quattro vortici tenderanno a continuare il proprio moto senza interferire reciprocamente. Si noti che la velocità  $\mathbf{u}$ , e pertanto il gradiente ortogonale della quantità  $\Psi$ , ha una importanza fondamentale nella definizione di questo tipo di moto, in quanto determina l'avvezione del campo incognito  $\theta$ .

Dalla Figura 4.24 si nota come per l'energia cinetica e l'elicità il range di variazione sia circa lo stesso per entrambe le griglie variando però nel tempo in maniera molto differente. Le due curve diventano asintotiche per  $t$  molto grandi. Tra le due curve si può notare che il comportamento più regolare è assunto dai risultati numerici relativi alla *mesh2*. Questo è dovuto al maggior raffinamento nei bordi esterni della griglia utilizzata, che aumenta la precisione nelle zone di maggiore interesse.

Tutte le simulazioni numeriche riportate nella presente sezione richiedono un elevato costo computazionale, dovuto alla doppia equazione frazionaria (una per ricavare  $\Psi$ ,

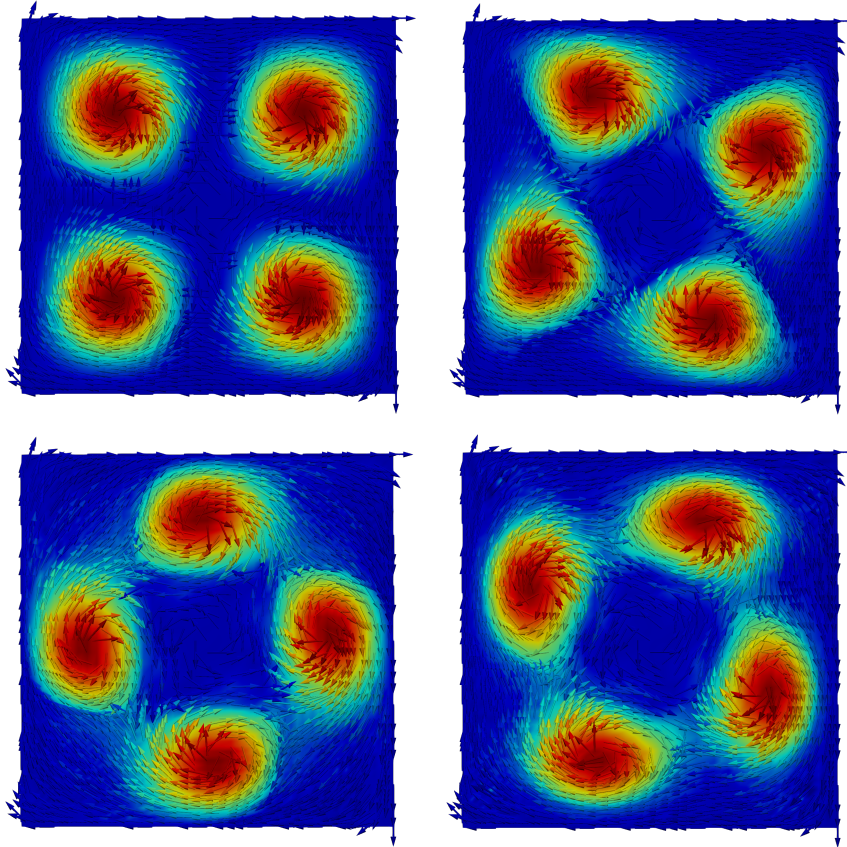


Figura 4.23: Campo di velocità  $\mathbf{u}$  per  $t = 0.1s$  (in alto a sinistra),  $t = 6s$  (in alto a destra),  $t = 12s$  (in basso a sinistra),  $t = 18s$  (in basso a destra).

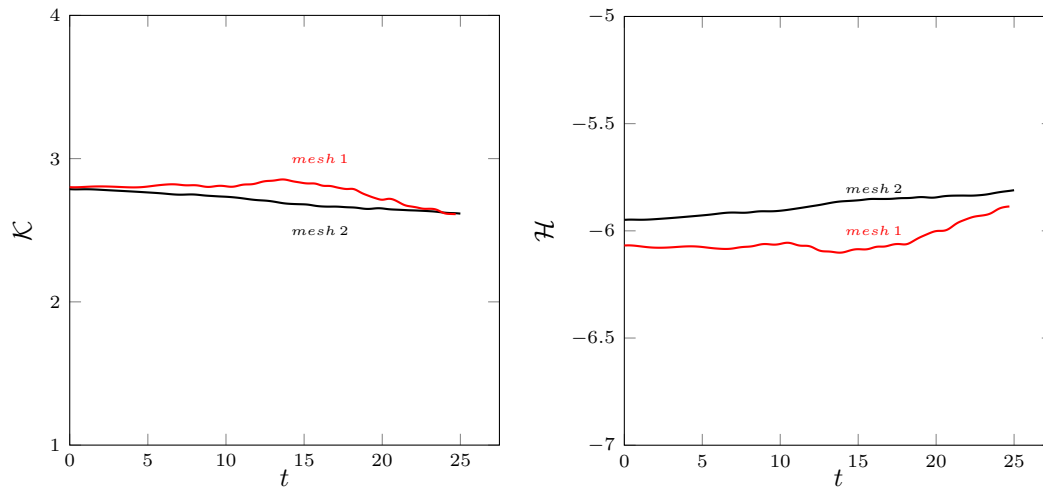


Figura 4.24: Sinistra: Energia cinetica  $\mathcal{K}(t)$ . Destra: Elicità  $\mathcal{H}(t)$  per la condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = \sin^2(x) \sin^2(y)$ .

l'altra per ricavare  $\theta$ ) non locale che deve essere risolta. Si rende dunque necessario l'utilizzo di tecniche per la riduzione dei tempi necessari ad eseguire le simulazioni

presentate.

#### 4.3.4 Ottimizzazione numerica

In questa sezione verranno espone alcune tecniche numeriche per la diminuzione del tempo e del costo computazionale del codice atto alla risoluzione del sistema SQG. Utilizzando le griglie in Figura 4.21 e condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{x^2 - 16y^2}$  il tempo di calcolo per singola iterazione è di circa 800s utilizzando un singolo processore. Risulta quindi essenziale la parallelizzazione dell'algoritmo implementato per la diminuzione dei tempi di calcolo.

Un'altra tecnica per la riduzione del costo computazionale del problema numerico è l'utilizzo di metodi *predictor-corrector*. Il sistema SQG infatti richiede la risoluzione di due operatori laplaciano frazionario. Utilizzando tali metodi si può ridurre la simulazione numerica alla risoluzione di un solo laplaciano frazionario. Nell'ultimo paragrafo verrà pertanto esposta l'implementazione di tale metodo per la risoluzione del sistema SQG, con conseguente diminuzione dei costi e tempi di calcolo.

**Implementazione in parallelo.** Per calcolo parallelo si intende l'esecuzione simultanea di uno o più software su più processori o su più core di uno stesso microprocessore. Lo scopo di tali implementazioni è quello di diminuire i tempi di calcolo distribuendo il lavoro su più processori che lavorano individualmente su una singola parte di software. Il rapporto tra il tempo impiegato utilizzando un singolo processore  $t_1$  e il tempo impiegato utilizzando  $n$  processori  $t_n$  è chiamato *speed-up*  $su_n$ , ed è definito come

$$su_n = \frac{t_1}{t_n} \geq 1. \quad (4.2)$$

Lo speed-up ideale varia linearmente al variare del numero di processori, secondo una legge  $su_n = n$ , e maggiore sarà lo speed-up, più il software sarà scalabile. Ottenere un codice perfettamente scalabile è un compito arduo in quanto lo speed-up dipende da tanti fattori quali la fisica stessa del problema, il numero totale di processori, il tipo di processore, il tipo di macchina e il codice implementato. Per implementare il calcolo parallelo alla risoluzione del sistema SQG è necessario distribuire gli elementi della mesh a tutti i processori in modo tale che ciascuno risolva la sua parte di mesh per

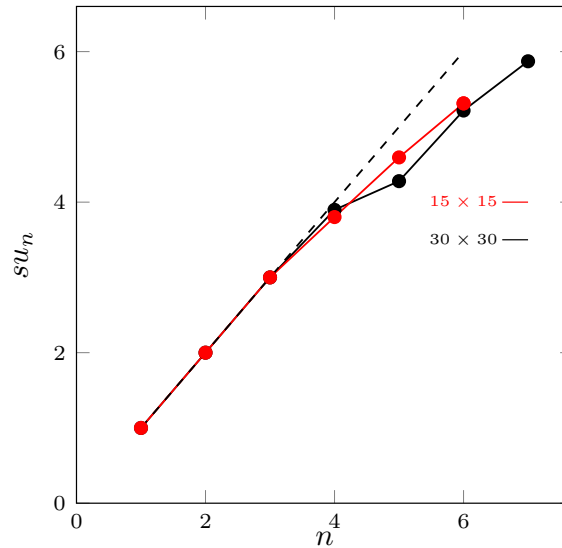


Figura 4.25: Speedup del software utilizzando la condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{x^2-16y^2}$  per due griglie uniformi  $15 \times 15$  e  $30 \times 30$ . La linea tratteggiata rappresenta la retta  $su_n = n$ .

poi riunire tutto alla fine del calcolo. Essendo l'operatore laplaciano frazionario di tipo non locale, per implementare il calcolo parallelo in modo efficiente ed efficace serve che ogni singolo processore abbia comunque accesso ai dati di tutti gli altri processori, in quanto il valore della soluzione dipende dai valori di tutti i punti della griglia. Questo aspetto sarà cruciale nella scalabilità del codice in quanto questa comunicazione tra processori farà aumentare il tempo di risoluzione. In Figura 4.25 viene mostrato un risultato preliminare con limitato numero di processori, riguardante lo speed-up della simulazione su un dominio quadrato  $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  utilizzando come condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{x^2-16y^2}$  girata su due mesh uniformi  $15 \times 15$  e  $30 \times 30$ . Dalla Figura, si nota come il codice implementato scali perfettamente fino a  $n = 3$  per poi discostarsi dalla linearità, ma mantenendo sempre ottime proprietà di *scaling*. Il codice parallelo implementato si può quindi utilizzare in maniera efficace per ridurre i tempi delle simulazioni effettuate.

**Predictor-corrector.** In questo paragrafo verrà mostrato un metodo numerico per diminuire il costo computazionale della risoluzione del sistema SQG nel caso di fluido inviscido  $\kappa = 0$ . Tale algoritmo si basa su un metodo di Eulero implicito (si veda [34]). Dato un timestep  $\delta t > 0$  e una condizione iniziale  $\theta_0(x, y)$  si cerca un'approssimazione

di  $\theta^{n+1}$  passando per uno step intermedio  $\theta^{n+\frac{1}{2}}$ . Il sistema da risolvere diventa quindi

$$\begin{aligned}\theta^{n+\frac{1}{2}} &= \theta^n - \delta t(-\Delta)^s \theta^n = 0, \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \Psi^{n+\frac{1}{2}} &= \theta^{n+\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} &= (-\partial \Psi^{n+\frac{1}{2}} y, \partial \Psi^{n+\frac{1}{2}} x), \\ \theta^{n+1} + \delta t \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \nabla \theta^{n+1} &= \theta^{n+\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Verrà analizzata, a titolo di esempio, la prima iterazione ( $n = 0$ ). Data la condizione iniziale  $\theta_0(x, y)$  la si inserisce nella prima equazione e si ricava algebricamente  $\theta^{\frac{1}{2}}$ . La seconda è un'equazione di diffusione non locale che viene risolta con i metodi spiegati nella Sezione 2.2.3. Viene poi ricavato  $\mathbf{u}^{\frac{1}{2}}$  come gradiente ortogonale di  $\Psi^{\frac{1}{2}}$  infine serve risolvere l'ultima equazione con approssimazione FEM. Si considera quindi l'equazione

$$\theta^1 + \delta t \mathbf{u}^{\frac{1}{2}} \nabla \theta^1 = \theta^{\frac{1}{2}},$$

si scelgono le funzioni test  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , si moltiplica l'equazione per tali funzioni e si integra su tutto il dominio  $\Omega$ . A questo punto si risolve la seguente equazione

$$\int_{\Omega} \theta^1 \varphi \, d\mathbf{x} + \delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{\frac{1}{2}} \nabla \theta^1 \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \theta^{\frac{1}{2}} \varphi \, d\mathbf{x}.$$

Il procedimento introdotto si ripete poi per tutti gli istanti temporali considerati.

Per validare il metodo introdotto, si considera un dominio quadrato  $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ , una mesh uniforme  $15 \times 15$ , condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{x^2 - 16y^2}$  e si confrontano i risultati delle simulazioni utilizzando il predictor-corrector con i risultati del codice senza predictor-corrector (Figura 4.26).

Si può notare che utilizzando il predictor-corrector la soluzione rimane più nitida, ma non presenta differenze sostanziali in confronto alla soluzione presentata nelle sezioni precedenti. Questo è un ottimo risultato dal momento che il costo computazionale delle simulazioni con predictor corrector è circa la metà di quello senza l'utilizzo di tale tecnica.

Le differenze tra le soluzioni dei due metodi utilizzati sono talmente limitate che non sono facilmente desumibili dalle figure riportate. Per questo motivo, per analizzare in maniera più precisa le differenze tra i risultati, si riportano in Figura 4.27 gli andamenti della soluzione lungo l'asse  $y$ , ovvero il segmento congiungente i punti  $(0, -\pi)$  e  $(0, \pi)$ , per  $t = 12.5s$   $\theta(0, y, 12.5)$  in presenza (linea rossa) ed in assenza (linea nera) del

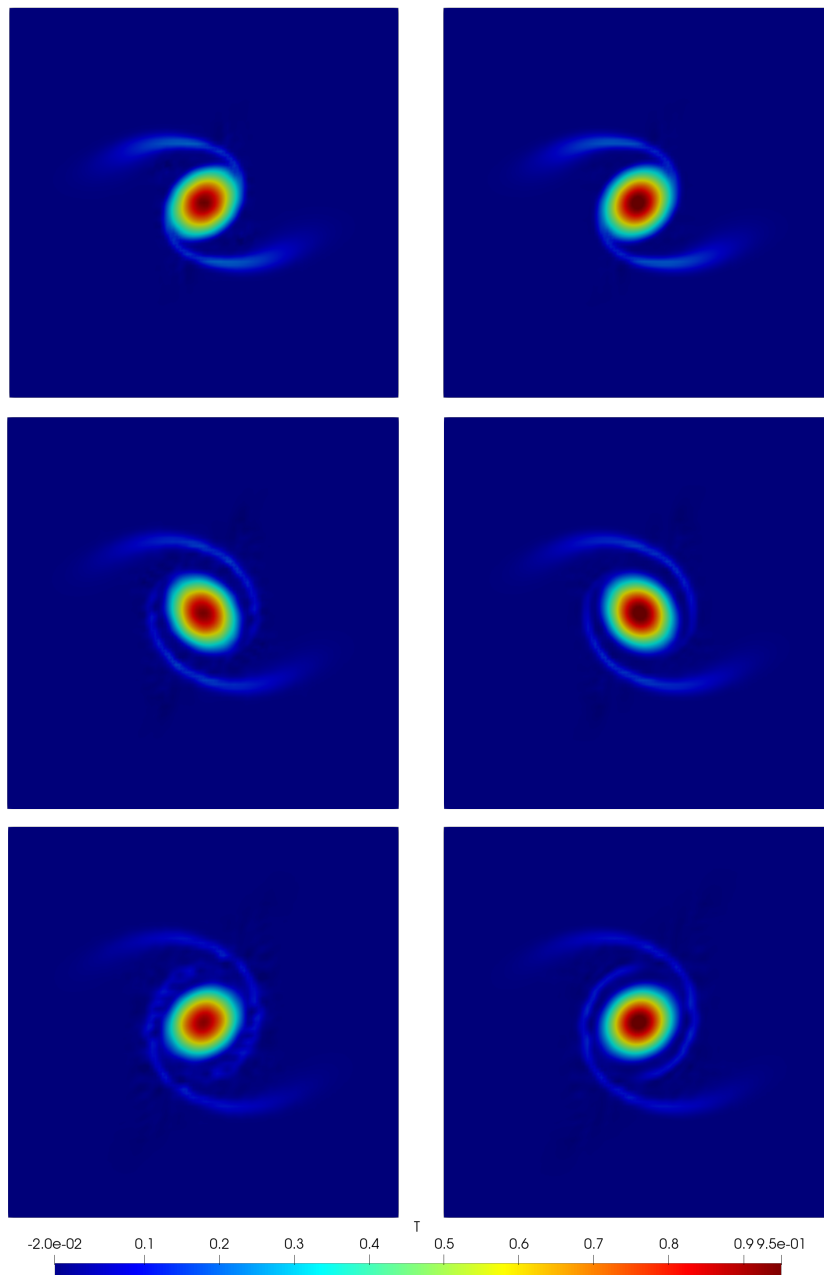


Figura 4.26: Sinistra: soluzione  $\theta(x, y, t)$  senza predictor-corrector. Destra: soluzione  $\theta(x, y, t)$  con predictor-corrector. Le soluzioni sono state considerate per  $t = 6s$  (in alto),  $t = 8s$  (al centro),  $t = 12.5s$  (in basso).

metodo predictor corrector. Si può nuovamente notare che le soluzioni ottenute con i due metodi differiscono minimamente, dimostrando che il modello implementato può essere un utile strumento per ridurre i costi computazionali senza compromettere la precisione della soluzione.

Come presentato in questa sezione, tutti i metodi numerici per la riduzione dei

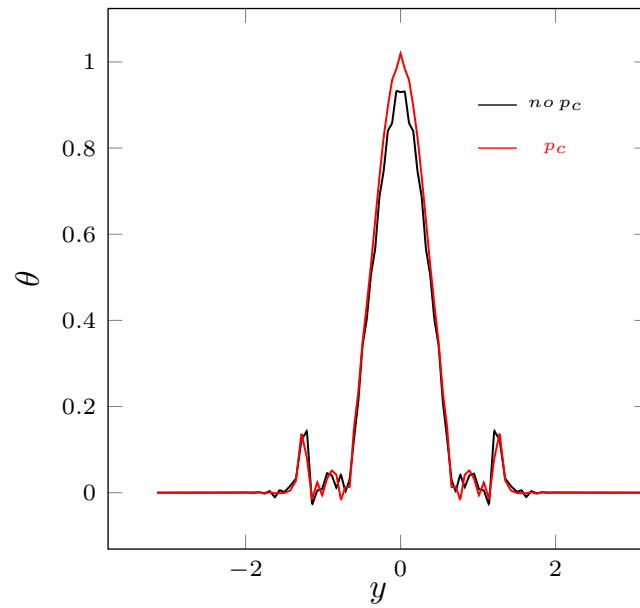


Figura 4.27: Confronto tra andamento di  $\theta(0, y, 12.5)$  in presenza e in assenza di predictor corrector.

costi computazionali sono stati implementati in modo soddisfacente, e possono essere combinati per aumentare significativamente la velocità delle simulazioni effettuate.



# Conclusioni

Questo lavoro si è incentrato sullo sviluppo e sull'implementazione di modelli matematici atti alla risoluzione di problemi differenziali non locali attraverso l'utilizzo dell'operatore laplaciano frazionario, con particolare attenzione alla risoluzione delle equazioni quasi-geostrofiche superficiali. Sono state introdotte e spiegate le basi dell'approssimazione agli elementi finiti FEM, e sono state poi ricavate le equazioni di conservazione di un fluido per poi applicarle ai sistemi quasi-geostrofici superficiali. È stato quindi implementato un algoritmo per la risoluzione numerica di tali problemi matematici, e particolare attenzione è stata posta nello sviluppo di un algoritmo parallelo scalabile, in modo da diminuire i tempi di calcolo, che solitamente sono estremamente elevati per questo tipo di simulazioni.

Per la validazione del codice è stato implementato un caso semplice di diffusione bidimensionale stazionaria non locale e confrontato con risultati benchmark presenti in letteratura. Tali simulazioni sono state effettuate per vari ordini di derivazione  $s$ , vari tipi di griglia e sorgente ritrovando sempre risultati coerenti con la letteratura. Risulta che per valori di  $s$  vicini a 0 la sorgente diffonde in maniera meno marcata rispetto a valori di  $s$  tendenti a 1. Questo risultato è in linea con quanto atteso, in quanto l'operatore per  $s = 0$  è di tipo non diffusivo, mentre per  $s = 1$  corrisponde ad un laplaciano classico. Come step intermedio per la validazione del codice per equazioni non stazionarie, è stato implementato un codice che simula l'equazione del calore con il laplaciano frazionario come termine diffusivo. Non è stato possibile trovare risultati in letteratura coi quali fare un confronto, ma i risultati ottenuti sono stati in linea con le aspettative. Infine, è stato implementato il codice per la risoluzione delle equazioni quasi-geostrofiche superficiali, che hanno natura simile alle equazioni del calore con laplaciano frazionario implementate in precedenza. In questo caso, a diffe-

renza dell'equazione del calore, la velocità convettiva viene calcolata come gradiente ortogonale del laplaciano frazionario della soluzione dell'equazione del calore stessa. Avendo confrontato i risultati ottenuti con altri presenti in letteratura, si può dire che il software di calcolo numerico del sistema SQG è stato implementato correttamente. Anche la parallelizzazione dell'algoritmo è stata eseguita in modo efficiente, riducendo così drasticamente gli elevati tempi di calcolo necessari. È stato inoltre implementato efficacemente un algoritmo di tipo *predictor corrector* per la riduzione del tempo computazionale richiesto dal codice numerico.

# Elenco delle figure

1.1	Soluzione dell'equazione elastica (1.1) . . . . .	9
1.2	Rappresentazione della successione (1.2). . . . .	13
1.3	Soluzione numerica $f(x)$ , derivata prima discontinua $f'(x)$ e derivata seconda $f''(x)$ funzione generalizzata. . . . .	17
1.4	Funzioni di forma locali $\phi_i^0(x)$ . . . . .	22
1.5	Funzioni di forma canoniche costanti a tratti $\phi_i^0(x)$ (sinistra). Appros- simazione di una curva con funzioni di forma costanti a tratti $\phi_i^0(x)$ (destra). . . . .	23
1.6	Funzioni di forma locali lineari a tratti $\phi_i^1(x)$ . . . . .	24
1.7	Funzioni di forma canoniche lineari a tratti $N_i^1(x)$ (sinistra). Appros- simazione di una curva con funzioni di forma lineari a tratti $N_i^1(\xi)$ (destra). . . . .	25
1.8	Funzioni di forma canoniche quadratiche a tratti $N_i^2(\xi)$ (sinistra). Ap- prossimazione di una curva con funzioni di forma lineari a tratti $N_i^2(\xi)$ (destra). . . . .	27
1.9	Funzione di forma bidimensionale QUAD1. . . . .	28
1.10	Funzione di forma bidimensionale QUAD4 . . . . .	29
1.11	Funzioni di forma bidimensionali QUAD9 . . . . .	31
1.12	Elemento tridimensionale HEX8 . . . . .	34
1.13	Elemento tridimensionale HEX8 . . . . .	35
1.14	Elemento bidimensionale TRI3 locale (sinistra) e canonico (destra). . .	36
1.15	Elemento bidimensionale TRI3 (sinistra), ed elemento canonico (destra). .	39
1.16	Polinomi di Legendre fino all'ordine 5 . . . . .	41

2.1	Grafici delle derivate frazionarie della retta $y = x$ per $x \in [0, 1]$ . Si nota che per $\alpha \rightarrow 1$ le derivate frazionarie coincidono con la derivata prima della retta $\frac{d}{dx}(x) = 1$ . . . . .	45
2.2	Calcolo dell'integrale su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ tramite la (2.45) . . . . .	55
2.3	Calcolo dell'integrale su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ tramite la (2.47) . . . . .	56
4.1	Andamento di $u(\mathbf{x})$ con sorgente unitaria $f(\mathbf{x}) = 1$ con $s = 0.25$ , $s = 0.5$ e $s = 0.75$ su una griglia $32 \times 32$ . . . . .	77
4.2	Sinistra: andamento di $u(x, 0)$ al variare di $s$ con griglia $32 \times 32$ . Destra: convergenza con la griglia di $u(x, 0)$ per $s = 0.5$ . . . . .	78
4.3	Confronto con il benchmark per $s = 0.25$ su una griglia $32 \times 32$ . . . . .	78
4.4	Andamento di $u(\mathbf{x})$ con sorgente sinusoidale $f(\mathbf{x}) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ con $s = 0.01$ , $s = 0.25$ e $s = 0.5$ su una griglia $32 \times 32$ . . . . .	79
4.5	Sinistra: andamento di $u(x, 0)$ al variare di $s$ con griglia $32 \times 32$ . Destra: convergenza di griglia di $u(x, 0)$ per $s = 0.5$ . . . . .	80
4.6	Confronto con il benchmark per $s = 0.25$ su una griglia $32 \times 32$ . . . . .	80
4.7	Andamento di $u(\mathbf{x})$ con sorgente gaussiana $f(\mathbf{x}) = e^{-x^2-y^2}$ con $s = 0.25$ (sinistra), $s = 0.5$ (centro) e $s = 0.75$ (destra) su una griglia $32 \times 32$ . . . . .	81
4.8	Sinistra: andamento di $u(x, 0)$ al variare di $s$ con griglia $32 \times 32$ . Destra: convergenza di griglia di $u(x, 0)$ per $s = 0.5$ . . . . .	81
4.9	Campo di velocità $\mathbf{u}$ . . . . .	83
4.10	Soluzione $\theta(x, y, t)$ singolo vortice per $t = 0s$ (in alto), $t = 3s$ (al centro), $t = 7s$ (in basso) per $s = 0.01$ (sinistra), $s = 0.5$ (centro) e $s = 0.75$ (destra). . . . .	83
4.11	Energia cinetica $\mathcal{K}$ in funzione del tempo. . . . .	84
4.12	Campo di velocità $\mathbf{u}$ . . . . .	85
4.13	Soluzione $\theta(x, y, t)$ doppio vortice per $t = 0s$ (in alto), $t = 3s$ (al centro), $t = 7s$ (in basso) per $s = 0.01$ sinistra, $s = 0.25$ centro e $s = 0.5$ destra. . . . .	86
4.14	Energia cinetica $\mathcal{K}$ in funzione del tempo. . . . .	86
4.15	Mesh utilizzata per le simulazioni con condizione iniziale gaussiana. . . . .	88
4.16	Evoluzione temporale della soluzione $\theta(x, y, t)$ di condizione iniziale $\theta_0(x, y) = e^{-4x^2-16y^2}$ per $t = 0s$ , $t = 6s$ , $t = 8s$ , $t = 11s$ , $t = 16s$ , $t = 21s$ . . . . .	88

4.17 Evoluzione temporale della soluzione  $\theta(x, y, t)$  di condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{-4x^2-16y^2}$  per  $t = 0s, t = 6s, t = 8s, t = 11s, t = 16s, t = 21s$ . . . . . 89

4.18 Sinistra: Energia cinetica  $\mathcal{K}(t)$ . Destra: Elicità  $\mathcal{H}(t)$  con condizioni iniziali  $\theta_0(x, y) = e^{-4x^2-16y^2}(e^1)$  e  $\theta_0(x, y) = e^{x^2-16y^2}(e^2)$ . . . . . 90

4.19 Evoluzione temporale della soluzione  $\theta(x, y, t)$  di condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{-36(x-0.5)^2-y^2} + e^{-36(x+0.5)^2-y^2}$  per  $t = 0s, t = 6s, t = 8s, t = 11s, t = 16s, t = 21s$ . . . . . 91

4.20 Sinistra: Energia cinetica  $\mathcal{K}(t)$ . Destra: Elicità  $\mathcal{H}(t)$  per condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{-36(x-0.5)^2-y^2} + e^{-36(x+0.5)^2-y^2}$ . . . . . 91

4.21 Mesh utilizzate per il caso vortice multiplo. Sinistra: *mesh 1*. Destra: *mesh 2*. . . . . 92

4.22 Iso-linee della soluzione  $\theta(x, y, t)$  con condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = \sin^2(x) \sin^2(y)$  per  $t = 0s, t = 6s, t = 12s, t = 18s, t = 23s, t = 25s$ , sulla *mesh 2*. . . 93

4.23 Campo di velocità  $\mathbf{u}$  per  $t = 0.1s$  (in alto a sinistra),  $t = 6s$  (in alto a destra),  $t = 12s$  (in basso a sinistra),  $t = 18s$  (in basso a destra). . . . . 94

4.24 Sinistra: Energia cinetica  $\mathcal{K}(t)$ . Destra: Elicità  $\mathcal{H}(t)$  per la condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = \sin^2(x) \sin^2(y)$ . . . . . 94

4.25 Speedup del software utilizzando la condizione iniziale  $\theta_0(x, y) = e^{x^2-16y^2}$  per due griglie uniformi  $15 \times 15$  e  $30 \times 30$ . La linea tratteggiata rappresenta la retta  $su_n = n$ . . . . . 96

4.26 Sinistra: soluzione  $\theta(x, y, t)$  senza predictor-corrector. Destra: soluzione  $\theta(x, y, t)$  con predictor-corrector. Le soluzioni sono state considerate per  $t = 6s$  (in alto),  $t = 8s$  (al centro),  $t = 12.5s$  (in basso). . . . . 98

4.27 Confronto tra andamento di  $\theta(0, y, 12.5)$  in presenza e in assenza di predictor corrector. . . . . 99



# Elenco delle tabelle

1.1	Tabella rappresentativa di punti $\xi_g$ e pesi $w_g$ di Gauss fino al quarto ordine. . . . .	42
-----	---	----



# Bibliografia

- [1] R. A. Adams, “Sobolev spaces. 1975,” 1975.
- [2] S. Brenner and R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, vol. 15. Springer Science & Business Media, 2007.
- [3] U. N. Katugampola, “A new approach to generalized fractional derivatives,” *arXiv preprint arXiv:1106.0965*, 2011.
- [4] J. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions, données par leur développement de Taylor*. Gauthier-Villars, 1892.
- [5] K. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier, 1974.
- [6] M. Caputo, “Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent—ii,” *Geophysical Journal International*, vol. 13, no. 5, pp. 529–539, 1967.
- [7] Z. Ding, “A proof of the trace theorem of sobolev spaces on lipschitz domains,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 124, no. 2, pp. 591–600, 1996.
- [8] E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci, “Hitchhiker’s guide to the fractional sobolev spaces,” *Bulletin des sciences mathématiques*, vol. 136, no. 5, pp. 521–573, 2012.
- [9] S. A. Silling, “Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, no. 1, pp. 175–209, 2000.

- [10] P. W. Bates and A. Chmaj, “An integrodifferential model for phase transitions: stationary solutions in higher space dimensions,” *Journal of statistical physics*, vol. 95, no. 5-6, pp. 1119–1139, 1999.
- [11] M. Shlesinger, B. West, and J. Klafter, “Lévy dynamics of enhanced diffusion: Application to turbulence,” *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 11, p. 1100, 1987.
- [12] M. D’Elia and M. Gunzburger, “The fractional laplacian operator on bounded domains as a special case of the nonlocal diffusion operator,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 66, no. 7, pp. 1245–1260, 2013.
- [13] A. Bonito, J. P. Borthagaray, R. H. Nochetto, E. Otárola, and A. J. Salgado, “Numerical methods for fractional diffusion,” *Computing and Visualization in Science*, vol. 19, no. 5-6, pp. 19–46, 2018.
- [14] S. Duo, H. Wang, and Y. Zhang, “A comparative study on nonlocal diffusion operators related to the fractional laplacian,” *arXiv preprint arXiv:1711.06916*, 2017.
- [15] G. Acosta and J. P. Borthagaray, “A fractional laplace equation: regularity of solutions and finite element approximations,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 55, no. 2, pp. 472–495, 2017.
- [16] J. R. Bunch and D. J. Rose, *Sparse matrix computations*. Academic Press, 2014.
- [17] S. Balay, S. Abhyankar, M. Adams, J. Brown, P. Brune, K. Buschelman, L. Dalcin, A. Dener, V. Eijkhout, W. Gropp, *et al.*, “PetSc users manual,” 2019.
- [18] M. D’Elia, Q. Du, C. Glusa, M. Gunzburger, X. Tian, and Z. Zhou, “Numerical methods for nonlocal and fractional models,” *arXiv preprint arXiv:2002.01401*, 2020.
- [19] A. Lischke, G. Pang, M. Gulian, F. Song, C. Glusa, X. Zheng, Z. Mao, W. Cai, M. M. Meerschaert, M. Ainsworth, *et al.*, “What is the fractional laplacian?,” *arXiv preprint arXiv:1801.09767*, 2018.
- [20] A. E. Gill, *Atmosphere—ocean dynamics*. Elsevier, 2016.

- [21] A. Majda, *Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean*, vol. 9. American Mathematical Soc., 2003.
- [22] J. Pedlosky, *Ocean circulation theory*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] I. M. Held, R. T. Pierrehumbert, S. T. Garner, and K. L. Swanson, “Surface quasi-geostrophic dynamics,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 282, pp. 1–20, 1995.
- [24] P. Constantin, A. J. Majda, and E. Tabak, “Formation of strong fronts in the 2-d quasigeostrophic thermal active scalar,” *Nonlinearity*, vol. 7, no. 6, p. 1495, 1994.
- [25] L. Formaggia, A. Quarteroni, and A. Veneziani, *Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system*, vol. 1. Springer Science & Business Media, 2010.
- [26] J. G. Charney and N. Phillips, “Numerical integration of the quasi-geostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows,” *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 10, no. 2, pp. 71–99, 1953.
- [27] G. Coriolis, *Mémoire sur le principe des Forces vives dans les Mouvements relatifs des machines*. Verlag nicht ermittelbar, 1831.
- [28] W. A. Heiskanen, “Physical geodesy,” *Determination of the Geoid from Ground Anomalies*, vol. 8, pp. 325–330, 1967.
- [29] P. Constantin, Q. Nie, and N. Schörghofer, “Nonsingular surface quasi-geostrophic flow,” *Physics Letters A*, vol. 241, no. 3, pp. 168–172, 1998.
- [30] P. R. Stinga and J. L. Torrea, “Extension problem and harnack’s inequality for some fractional operators,” *Communications in Partial Differential Equations*, vol. 35, no. 11, pp. 2092–2122, 2010.
- [31] A. Bonito and M. Nazarov, “Numerical simulations of surface-quasi geostrophic flows on periodic domains,” *arXiv preprint arXiv:2006.01180*, 2020.
- [32] M. Liu, W. Cao, and Z. Fan, “Convergence and stability of the semi-implicit euler method for a linear stochastic differential delay equation,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 170, no. 2, pp. 255–268, 2004.

- [33] J. H. Bramble, *Multigrid methods*. Routledge, 2019.
- [34] P. Wei, *Numerical Approximation of Time Dependent Fractional Diffusion With Drift: Numerical Analysis and Applications to Surface Quasi-Geostrophic Dynamics and Electroconvection*. PhD thesis, 2019.
- [35] P. Constantin, M.-C. Lai, R. Sharma, Y.-H. Tseng, and J. Wu, “New numerical results for the surface quasi-geostrophic equation,” *Journal of Scientific Computing*, vol. 50, no. 1, pp. 1–28, 2012.
- [36] K. Ohkitani and M. Yamada, “Inviscid and inviscid-limit behavior of a surface quasigeostrophic flow,” *Physics of Fluids*, vol. 9, no. 4, pp. 876–882, 1997.
- [37] F. Song and G. E. Karniadakis, “Fractional spectral vanishing viscosity method: Application to the quasi-geostrophic equation,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 102, pp. 327–332, 2017.