

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# **Cenni al modello del Big Bang, Inflazione e Materia oscura**

Tesi di laurea

Presentata da:  
Bianca Pacini

Relatore:  
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

---

Sessione III  
Anno accademico 2019-2020

# Indice

<b>Indice</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduzione:</b>	<b>2</b>
<b>2 Modelli di Friedmann:</b>	<b>4</b>
2.1 Equazioni di campo di Einstein: . . . . .	4
2.2 Equazioni di Friedmann: . . . . .	5
2.3 Universo di polvere: . . . . .	6
2.4 Universo di radiazione: . . . . .	7
2.5 Universo di Energia oscura: . . . . .	7
2.6 Universo a più componenti: . . . . .	8
<b>3 Big Bang:</b>	<b>9</b>
3.1 Problema della piattezza: . . . . .	10
3.2 Problema dell'orizzonte: . . . . .	11
3.3 Problema del monopolo: . . . . .	11
3.4 Radiazione cosmica di fondo: . . . . .	12
<b>4 Inflazione:</b>	<b>13</b>
<b>5 Materia oscura:</b>	<b>15</b>
5.1 Curva di rotazione galassie a spirale: . . . . .	16
<b>6 Appendici:</b>	<b>17</b>
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>18</b>

# 1 Introduzione:

La cosmologia, dal greco antico  $\kappa\acute{o}\sigma\mu\omicron\varsigma$ , "ordine", e  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ , "discorso", è la branca della fisica che si occupa di descrivere l'universo come unico oggetto in evoluzione.

Nel mondo occidentale, le prime teorie cosmologiche con fondamenti scientifici (e non puramente religiosi) furono elaborate da astronomi e filosofi dell'antica Grecia. Aristarco di Samo (Samo, 310 a.C. circa – 230 a.C. circa) per primo ipotizzò che fosse la Terra a ruotare attorno al Sole. Tale idea rimase un'ipotesi poco realistica per molto tempo; solo nel XVI secolo sarà riproposto il sistema eliocentrico, grazie a Niccolò Copernico (Toruń, 1473 – Frombork, 1543). L'eliocentrismo fu una vera e propria rivoluzione dal punto di vista filosofico: l'uomo non era più al centro dell'universo. Il lavoro di Copernico era sostenuto anche da Galileo Galilei (Pisa, 1564 – Arcetri, 1642), che per primo osservò il cielo come non era mai stato fatto, costruendo il primo cannocchiale. Ci fu poi Johannes Kepler (Weil der Stadt, 1571 – Ratisbona, 1630) che scoprì che le orbite planetarie, tra cui quella della Terra, non erano circolari, ma ellittiche. Infine grazie a Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 1642– Londra, 1726), con la legge di gravitazione universale, si arrivò a una prima comprensione coerente del sistema solare e dell'universo in generale.

La cosmologia moderna, nasce fra il 1915 e il 1929; nel 1915 Albert Einstein (Ulma, 1879 – Princeton, 1955) pubblicò il primo articolo riguardante la relatività generale, nel 1929 Edwin Powell Hubble (Marshfield, Missouri 1889 – San Marino, California, 1953) scoprì la sua famosa legge, da cui si iniziò a parlare di universo in espansione.

Einstein nel suo lavoro introdusse il cosiddetto *principio cosmologico*: l'asserzione che, su una scala sufficientemente grande, l'universo sia omogeneo e isotropo<sup>1</sup>. L'omogeneità è vera in termini di quantità medie, l'isotropia è invece confermata da numerose osservazioni, come la distribuzione delle sorgenti radio e la radiazione cosmica a microonde (CMB<sup>2</sup>). Assumendo queste due ipotesi, ogni punto dell'universo è un centro e non esiste un osservatore privilegiato all'interno. Tale risultato è chiamato *principio copernicano*. Un universo omogeneo e isotropo descritto dalla relatività possiede un *orizzonte cosmologico*, regione sferica il cui raggio misura la distanza da cui è possibile ricevere informazioni, a causa della velocità finita della radiazione. Regioni sufficientemente lontane tra di loro, che non sono mai state all'interno dei rispettivi orizzonti, non possono essere in contatto causale. Einstein inoltre introdusse la *costante cosmologica*  $\Lambda$ , un artificio matematico per ottenere un universo statico, come lui e la maggior parte dei fisici pensavano dovesse essere. Se pur lo stesso Einstein cercò in ogni modo di eliminare tale costante, risulterà un elemento fondamentale nello sviluppo della cosmologia moderna. La costante cosmologica e l'idea di *materia oscura*, introdotta da Fritz Zwicky per far fronte ai dati osservativi (Varna, 1898 – Pasadena, 1974), sono due elementi fondamentali del cosiddetto modello standard della cosmologia ( $\Lambda$ CDM<sup>3</sup>). Il fattore  $\Lambda$  rappresenta l'*energia oscura*, responsabile dell'espansione dell'universo. Inoltre il modello prevede che la materia oscura sia "fredda" quindi non barionica, non termalizzata e non collisionale e l'universo sia piatto e in espansione accelerata, come si osserva sperimentalmente.

La legge di Hubble-Lemaître<sup>4</sup> è invece una legge empirica che afferma il legame lineare tra la velocità di allontanamento di un oggetto astrofisico e la sua distanza dall'osservatore. In particolare, la costante di proporzionalità è chiamata *costante di Hubble* e descrive il tasso di espansione dell'universo:

$$v_r = H_0 \cdot D$$

in cui  $H_0 \sim 70 \frac{km/s}{Mpc}$  adesso.

---

<sup>1</sup>L'omogeneità, cioè l'indipendenza dalla posizione, ci permette di utilizzare nella descrizione le quantità medie. L'isotropia, cioè l'indipendenza dalla direzione, di sfruttare la simmetria sferica.

<sup>2</sup>La CMB (Cosmic Microwave Background) è la radiazione cosmica di fondo a microonde, una radiazione che permea l'intero universo e ha uno spettro caratteristico di corpo nero. In seguito, sarà spiegato più approfonditamente di cosa si tratta e il ruolo centrale che ha nella costruzione di modelli cosmologici.

<sup>3</sup> $\Lambda$  per l'energia oscura, CDM per Cold Dark Matter. Il modello è chiamato anche "concordance" e riesce a giustificare numerose evidenze osservative.

<sup>4</sup>Georges Edouard Lemaître (Charleroi, 1894 – Lovanio, 1966) è stato un fisico, astronomo e presbitero belga. Egli scoprì contemporaneamente ad Hubble, la legge di espansione dell'universo.

<sup>5</sup>L'unità della misura della costante di Hubble deriva dal fatto che solitamente la velocità si esprime in km/s e la distanza in Mpc.

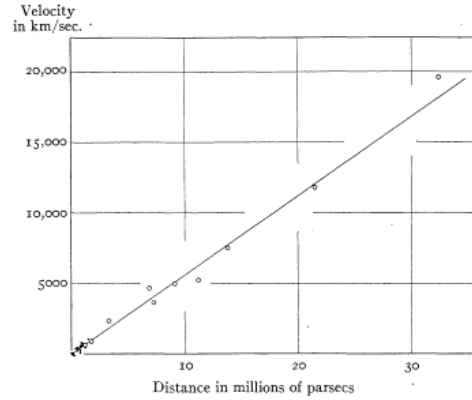


Figura 1: Relazione di velocità-distanza tratto dall'articolo "The Velocity-Distance Relation among Extragalactic Nebulae" di Hubble, E. Humason, M. L. del 1931.

$H_0$  può essere stimata tramite la CMB ( $H_0 \approx 67.4 \pm 0.5$ ) oppure utilizzando le candele standard nell'universo locale, come le Supernovae ( $H_0 \approx 74.03 \pm 1.42$ ).

Vediamo che  $H$  è non costante nel tempo; definito  $R(t)$  il *fattore di scala*, che rappresenta il raggio dell'universo:

$$R(t) = \begin{cases} 1 & \text{adesso} \\ 0 < R < 1 & \text{nel passato} \end{cases}$$

allora, la costante di Hubble è:

$$H(t) := \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$$

In base alla velocità di espansione-contrazione<sup>6</sup> dell'universo e al suo raggio, avremo una diversa costante. Per ricavare questa legge, il fisico osservò lo spostamento spettrale negli spettri delle galassie. Tale shift è dovuto all'*effetto Doppler*; detta  $v_r$  la velocità relativa tra una sorgente e l'osservatore, la lunghezza d'onda osservata differisce da quella emessa seguendo la relazione:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = z$$

Dato che l'universo è in espansione, le galassie si stanno allontanando e le lunghezze d'onda percepite hanno energia minore rispetto a quelle emesse: si parla di *redshift cosmologico* ( $z$ ).

L'idea di universo statico di Einstein venne poi abbandonata da Aleksandr Aleksandrovič Friedmann (San Pietroburgo, 1888 – San Pietroburgo, 1925). Egli trovò le soluzioni delle equazioni della relatività generale che mostravano diversi scenari per l'evoluzione del cosmo. Tutti descrivevano un universo di densità iniziale infinita, che si sarebbe poi espanso e rarefatto. Alle stesse conclusioni giunse Lemaître cinque anni dopo in modo del tutto indipendente. In seguito a questi risultati nacque l'idea di *Big Bang*, con la quale si riuscì a giustificare le abbondanze chimiche osservate<sup>7</sup>. Una scoperta fondamentale a conferma del modello del Big Bang fu la CMB, da parte di Arno Penzias (Monaco di Baviera, 1933) e Robert Woodrow Wilson (Houston, 1936). Infine, per risolvere alcune problematiche nate a seguito dell'introduzione del modello cosmologico del Big Bang, venne avanzata da Alan Guth (New Brunswick, 1947) nel 1981 la soluzione inflazionaria, che riguarda l'universo in un brevissimo intervallo dopo la sua nascita.

Nell'elaborato si cerca di fornire una visione d'insieme del modello cosmologico del Big Bang (Sezione 3), come esso nasce e le problematiche associate; si fa riferimento all'inflazione (Sezione 4) in quanto soluzione a tre problemi principali (Sezioni 3.1, 3.2, 3.3). Per fare questo si introducono le equazioni di campo di Einstein (Sezione 2.1, Equazione: 2) dalle quali si ricavano le equazioni di Friedmann, che descrivono l'evoluzione dell'universo. Tramite esse, specificando una particolare equazione di stato (Sezione 2.2, Equazione 4), si ricava l'evoluzione temporale delle diverse componenti dell'universo (Sezioni 2.3, 2.4, 2.5). Nell'ambito del modello del Big Bang si dà anche una spiegazione qualitativa e sintetica della CMB (Sezione 3.4), che sarà citata più volte nella trattazione. Infine si propone una discussione riguardante la materia oscura (Sezione 5), costituente fondamentale dell'universo, di cui ancora la natura non è nota. In tutta la trattazione non si utilizzerà la costante cosmologica, anche se si farà qualche cenno a come si

<sup>6</sup>Gli unici moti ammissibili con l'omogeneità e l'uniformità dell'universo sono quelli di contrazione e espansione uniforme.

<sup>7</sup>Nell'appendice A si parla approfonditamente del problema dell'elio.

modificherebbero i calcoli tramite questa aggiunta. Si considera inoltre solamente il caso della cosmologia relativistica in cui si tiene conto della relatività generale, e non della cosmologia "classica" basata su un approccio newtoniano.

## 2 Modelli di Friedmann:

Friedmann, matematico e cosmologo russo, nel 1922 elaborò le cosiddette *equazioni di Friedmann*: le equazioni di campo di Einstein applicate al sistema-universo una volta ipotizzato il principio cosmologico. Tramite tali equazioni è possibile ricavare i *modelli di Friedmann*, che descrivono l'evoluzione dell'universo e dalle quali si deduce l'esistenza del Big Bang.

### 2.1 Equazioni di campo di Einstein:

La relatività generale è la teoria formulata da Einstein che descrive l'interazione gravitazionale tra masse e la struttura dello spaziotempo usufruendo del formalismo matematico della geometria differenziale. Le relazioni tra le grandezze fisiche sono espresse come equazioni tensoriali. La costruzione di modelli consiste dunque nella definizione di uno spaziotempo e nella risoluzione delle equazioni di Einstein e di quelle da esse ricavabili, tra cui le equazioni di Friedmann.

La relatività generale, a differenza della newtoniana:

1. Ha dieci potenziali, invece che uno;
2. E' una teoria non lineare;
3. Tiene conto della pressione, oltre alla densità, come fonte di gravitazione;
4. Non risente del problema delle dimensioni infinite dell'universo, grazie ai potenziali ritardati;
5. Possiede un legame tra energia totale e geometria dello spaziotempo.

Tali differenze portano a grandi difficoltà di tipo matematico, che sono però minimizzate imponendo le condizioni di simmetria, uniformità e isotropia. Dunque, essendo la teoria della relatività generale una teoria geometrica, si deve investigare le proprietà geometriche, descritte dalla metrica, di spazi omogenei e isotropi. L'ipotesi di simmetria infatti limita la metrica, che dà la distanza tetradimensionale tra due punti vicini dello spazio-tempo, a quella di Robertson- Walker in coordinate sferiche [2]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R(t)^2}{(1 + kr^2/4)^2} \{dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2)\} \quad (1)$$

Essa differisce dalla metrica della relatività speciale, descritta dallo spaziotempo di Minkowski, solo per la presenza del fattore indeterminato  $R(t)$  e per la costante  $k$ . In particolare  $R(t)$ , che ha lo stesso significato nella teoria newtoniana, detto fattore di scala o di trascinamento cosmologico, può essere utilizzato per definire la distanza tra due punti dell'universo. Fissato un centro arbitrario dell'universo, la distanza e la velocità di un punto generico sono:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= R(t)\vec{r}_0 \\ \vec{v}(t) &= H_0 \vec{r}(t) \end{aligned}$$

in cui  $\vec{r}_0$  è chiamata *distanza comovente*, che si espande assieme all'universo ed è dunque costante,  $\vec{r}(t)$  è la *distanza fisica*, misurata con le osservazioni.

La quantità  $k$ , nota come costante di curvatura, è invece una misura della curvatura dello spazio tridimensionale a ogni istante  $t_0$ :  $k$  è fondamentale un'informazione geometrica. Nel caso newtoniano rappresenta la differenza tra energia potenziale e cinetica: energia e geometria sono rappresentate dallo stesso fattore. In particolare:

1.  $k=0$ : Geometria euclidea, la somma degli angoli interni di un triangolo è  $180^\circ$ ;
2.  $k>0$ : Geometria di tipo sferico, è l'analogo tridimensionale della geometria sulla superficie di una sfera. La somma degli angoli interni di un triangolo è  $> 180^\circ$  e il volume dello spazio è finito e pari a  $\pi^2 R^3$  (aumenta con  $t$ );
3.  $k<0$ : Geometria di tipo iperbolico. La somma degli angoli interni di un triangolo è  $< 180^\circ$  e il volume dello spazio infinito.

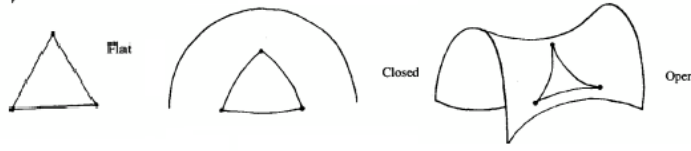


Figura 2: Esempi di spazi curvi in due dimensioni.

In termini di tensore metrico dello spaziotempo  $g_{ik}$ , che ne determina tutte le proprietà geometriche, si può scrivere:

$$ds^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k$$

in cui  $dx^i$  e  $dx^k$  rappresentano coordinate comoventi dello spazio-tempo.

Si introducono quindi le equazioni di campo di Einstein, analogo relativistico della legge di gravitazione di Newton. Dato che in relatività la pressione funge da sorgente di gravitazione, bisogna porre molta attenzione. Questa pressione deve contenere i contributi dovuti ai moti peculiari delle galassie, al gas intergalattico, alla radiazione, ai campi magnetici e ai raggi cosmici. Al momento attuale tutti questi contributi sono trascurabili in quanto sorgenti di gravitazione in confronto alla densità di energia della materia.

Le equazioni di Einstein sono un set di 10 equazioni che definiscono la metrica:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (2)$$

in cui:  $R_{ij}$  è il tensore curvatura o tensore di Riemann-Christoffel (proprietà dello spazio-tempo, che determina se un dato spazio sia curvo o piatto) e  $T_{ij}$  il tensore energia-impulso (proprietà massa-energia). Quindi i termini di sinistra descrivono la curvatura dello spazio-tempo, il termine a destra il contributo dell'energia e della materia in quanto sorgente di curvatura.

La più generale modificazione è:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$$

in cui si è introdotta la costante cosmologica  $\Lambda$ .

## 2.2 Equazioni di Friedmann:

Assumendo la metrica di Robertson-Walker (Equazione: 1) e l'ipotesi di fluido perfetto<sup>8</sup>, cioè un fluido omogeneo e isotropo in espansione adiabatica senza viscosità o conduzione termica, vale:

$$T_{ij} = -Pg_{ij} + (P + \rho c^2)U_i U_j$$

in cui le  $U$  rappresentano la velocità 4-dimensionale,  $P$  la pressione,  $\rho$  la densità e quindi  $(P + \rho c^2)$  la densità di energia. Tramite le ipotesi fatte, le equazioni cosmologiche di Einstein (Equazione: 2) si semplificano nelle equazioni di Friedmann, la cui soluzione descrive l'evoluzione dell'universo:

$$\begin{cases} \dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 - k \\ 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R} = -\frac{8\pi GP}{c^2} - \frac{k}{R^2} \end{cases} \quad (3)$$

Si osserva che la densità si intende solo di materia ma anche di energia.

Introducendo  $\Lambda$  nelle equazioni di campo, si può invece ottenere:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

da cui si ricava l'equazione per l'accelerazione:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}$$

<sup>8</sup>L'assunzione di fluido perfetto è un'approssimazione realistica in molte situazioni astrofisiche; il libero cammino medio tra le particelle è molto inferiore rispetto alle scale fisiche di interesse, quindi il fluido può essere considerato perfetto.

$\Lambda > 0$  fornisce un contributo positivo all'accelerazione del fattore di scala, agendo come forza repulsiva e contrastando l'attrazione gravitazionale della materia. Se il suo valore è sufficientemente elevato può anche superare il contributo attrattivo e fornire un universo in accelerazione. Le soluzioni evolutive dipenderanno dal parametro di curvatura e dal valore di  $\Lambda$ .

Per derivare le soluzioni cosmologiche all'equazione di Friedmann in assenza della costante cosmologica, cioè l'andamento di  $R(t)$  in diversi regimi, si specifica una generale equazione di stato per tutti i componenti dell'universo, cioè il legame tra  $P$  e  $\rho$ :

$$P = w\rho c^2 \quad (4)$$

Il parametro  $w$  è un numero privo di significato fisico, che assumiamo essere costante. L'intervallo in cui  $0 \leq w \leq 1$  è chiamato solitamente *intervallo Zel'dovich*. E' inoltre interessante notare che tale parametro è legato alla velocità del suono adiabatica:

$$v_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^{1/2}$$

da cui si deduce che  $w$  non può essere maggiore di 1 poichè implicherebbe  $v_s > c$ . Se invece  $w$  è minore di zero, non è più legato alla velocità del suono, che assumerebbe valori immaginari.

Infine si ha che:

$$\rho \propto R^{-3(1+w)}$$

Si studiano quindi i modelli al variare di  $\rho$ .

### 2.3 Universo di polvere:

Con universo di polvere si intende un insieme di particelle non relativistiche, a riposo nel sistema di riferimento delle coordinate comoventi. La densità di energia, direttamente proporzionale al numero di particelle contenute nel volume, è inversamente proporzionale al volume stesso:

$$\rho \propto R^{-3}$$

che implica  $w=0$  ed esprime la conservazione della massa. In un gas di particelle a una certa temperatura  $T$  l'energia termica tipica delle particelle ( $\approx k_B T$ , in cui  $k_B$  è la costante di Boltzmann), è molto inferiore rispetto alla sua massa a riposo. Dunque, in un universo di polvere  $p \approx 0$ , la pressione è trascurabile. In questo caso si trova:

$$\dot{R}^2 = -k + \frac{const}{R}$$

che porta alle stesse soluzioni dinamiche del modello newtoniano. Nonostante tutte le differenze tra relatività generale e teoria newtoniana, il fattore di scala soddisfa ambedue le teorie fino a che la pressione è trascurabile. Questo è chiamato *teorema di Milne-McCrea*. In base al segno di  $k$  si hanno diversi scenari (Figure: 2,3).

- $k=0$  Universo piatto di Einstein- De Sitter: geometria euclidea

$$R \propto t^{2/3}$$

Nel caso in cui si fosse considerata la costante cosmologica:

$$R(t) = R_0 e^{[(\Lambda/3)^{1/2}t]}$$

L'evoluzione del fattore di scala è differente rispetto ai modelli con  $\Lambda = 0$ , portando a una modifica della legge di Hubble. In linea di principio, misurazioni della costante di Hubble e del *parametro di decelerazione*<sup>9</sup> possono essere utilizzate al fine di determinare il valore di  $\Lambda$ .

Ponendo  $k=0$  dalla prima equazione di Friedmann per un universo di polvere si definisce la *densità critica*, densità necessaria a rendere un universo piatto:

$$\rho_c(z) = \frac{3H(z)^2}{8\pi G}$$

---

<sup>9</sup>Quantità fisica che quantifica l'entità della decelerazione dell'universo:  $q := -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}$ . Nel modello  $\Lambda$ CDM è negativa, poichè prevede un andamento accelerato.

in cui  $G$  la costante di gravitazione universale. La quantità normalizzata è:

$$\Omega(z) = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda}{\rho_c} \quad (5)$$

in cui  $\rho_m$  si riferisce alla materia,  $\rho_r$  alla radiazione,  $\rho_\Lambda$  all'energia oscura. Quindi  $\Omega$  in funzione del redshift quantifica i vari contributi delle componenti alla chiusura dell'universo e deve mantenersi costante per la conservazione della geometria. Perché l'universo sia piatto:

$$\rho = \rho_{crit} \quad e \quad \Omega = 1$$

In particolare dalla discordanza tra la stima di  $\Omega$  dal conteggio degli ammassi ( $\Omega \approx 0.3$ ) e quella della CMB ( $\Omega = 1$ ) si deduce la presenza di una componente di energia repulsiva e priva di massa che "chiude" l'universo ( $\Omega \approx 0.7$ ).

- $k < 0$  Universo aperto: geometria iperbolica  
Il fattore di scala ha andamento:  $R \propto t$ ;
- $k > 0$  Universo chiuso: geometria sferica  
La curva  $R(t)$  è una cicloide simmetrica rispetto al tempo con raggio massimo:

$$R_M = \frac{8\pi G \rho_0}{3k}$$

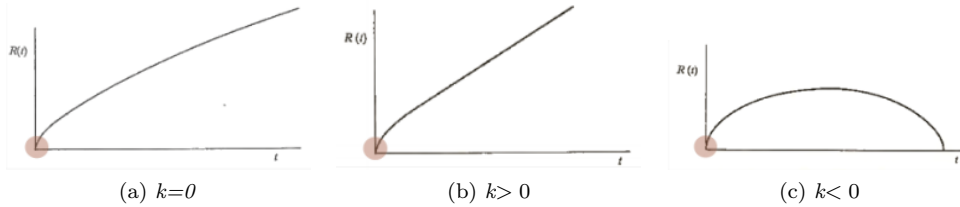


Figura 3: Andamento del fattore di scala per i diversi valori di  $k$  nel caso dell'universo di polvere.

Tutti questi modelli sono decelerati e per  $t \rightarrow 0$  seguono lo stesso andamento dell'universo di Einstein-De Sitter.

## 2.4 Universo di radiazione:

Si considera l'universo come un fluido composto da fotoni e particelle ultrarelativistiche massive non degeneri. Tale modello risulta rilevante per la descrizione dell'universo primordiale ( $z > 3500$ ), dunque un'età dell'universo minore di  $10^5$  anni. La densità di energia decresce più rapidamente che nel caso della polvere, poichè un fotone che viaggia nell'universo perde energia a causa del redshift cosmologico:

$$\rho \propto R^{-4}$$

Ossia:  $w=1/3$ , che esprime la conservazione del numero dei fotoni tenendo conto del redshift. L'equazione di stato per un universo di radiazione è:  $P = \frac{1}{3}\rho c^2$ . In questo caso si ha:

$$R \propto \sqrt{t}$$

L'espansione è più rapida per  $t \rightarrow 0$  che per un universo di polvere pochè dato che la densità di energia decresce molto più rapidamente, rallenta meno l'espansione.

## 2.5 Universo di Energia oscura:

Ci si riferisce al caso in cui il fluido cosmico mantenga pressione e densità di energia costanti. Non si ha ancora idea di quale possa essere il costituente dell'energia oscura. Le varie ipotesi ([4]) coinvolgono sia la teoria quantistica dei campi che la supersimmetria, in cui si parla di *quintessenza*. A dovrebbe essere la somma di questi, e altri, contributi.

Ad ogni modo, in generale si ha che:

$$\rho \propto V^0$$



Da cui  $w=-1$ , per la costanza della densità dell'energia. L'equazione di stato, rilevante per il modello  $\Lambda$ CDM è:  $P=-\rho$ . In questo caso si ottiene, ponendo  $k=0$  seguendo il  $\Lambda$ CDM, il modello di De Sitter<sup>10</sup>:

$$R(t) = e^{t/\tau}$$

L'effetto gravitazionale è ora repulsivo, l'espansione accelera invece che rallentare. Al contrario degli altri modelli, il fattore di scala non tende a zero per  $t=0$ . La densità rimane costante perchè il lavoro della tensione durante l'espansione si traduce in creazione di materia che compensa l'effetto di diluizione.

## 2.6 Universo a più componenti:

L'universo reale però non è composto da un solo fluido, ma è costituito da più componenti. In prima approssimazione, però, ogni fluido obbedisce alla propria equazione di stato e ha la propria densità d'energia. I vari contributi cambiano nel tempo in modo diverso, come appena visto, e in particolare l'unico che domina a grandi tempi è quello relativo all'energia oscura. Si assume che l'universo nel corso della sua evoluzione sia andato incontro a varie fasi, durante ognuna delle quali la sua composizione è stata dominata da una componente particolare. Ad esempio, nelle prime fasi, era dominato dalla radiazione.

Tenendo conto di tutti i contributi, si ricava l'andamento della costante di Hubble con il redshift:

Dato che:

$$\begin{cases} \rho_m \propto (1+z)^3 & \text{per la materia} \\ \rho_r \propto (1+z)^4 & \text{per la radiazione} \\ \rho_\Lambda \propto (1+z)^0 & \text{per l'energia oscura} \end{cases}$$

in cui nella materia si include sia materia barionica che oscura e nel contributo della radiazione anche i neutrini. Si ricorda definizione della costante di Hubble:

$$H = \frac{\dot{R}}{R}$$

e utilizzando la prima equazione di Friedmann:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 - k$$

in cui si pone  $k=0$  poichè il modello piatto, si ottiene l'andamento di H con il redshift:

$$H(z)^2 = \frac{8\pi G}{3}[\rho_m(1+z)^3 + \rho_r(1+z)^4 + \rho_\Lambda]$$

da cui dividendo per la densità critica:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = E(z)^2 = [\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_\Lambda] \quad (6)$$

in cui  $E(z)$  è chiamata *funzione di espansione dell'universo*.  $\Omega_r > \Omega_m$  se  $z > 3500$  e  $\Omega_m < \Omega_\Lambda$  per  $z < 0.33$ . Per determinare i parametri cosmici, si utilizzano i dati empirici: misurando le distanze di luminosità tramite le candele standard come le Supernovae Ia si determina il parametro di decelerazione, tramite la geometria dello spazio-tempo ricavabile utilizzando la CMB si determina  $\Omega$  complessivo, misurando il contenuto di materia (negli ammassi di galassie, nelle strutture su larga scala) si determina il parametro di densità della materia. I valori di best-fit in  $\Lambda$ CDM misurati con la CMB sono:  $\Omega_m=0.315$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.685$ ,  $\Omega_r = 0.00004$ . Si vede che nell'attuale universo domina l'energia oscura che causa un'espansione accelerata. La storia dell'universo può essere suddivisa quindi in tre ere cosmiche: l'era della radiazione, l'era della materia, l'era corrente dell'energia oscura.

Possiamo quantificare l'età dell'universo tramite il *look back time*, ponendo  $z \rightarrow$ :

$$t_L = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')(1+z')} \sim \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')H_0[(1+z')^3\Omega_m + \Omega_\Lambda]} \sim 13.5Gyr$$

<sup>10</sup>Willem de Sitter (Sneek, 1872 –Leida, 1934) è stato un astronomo olandese.

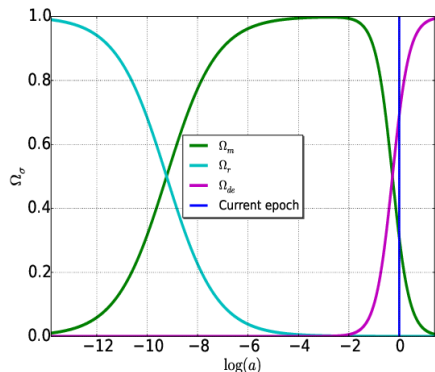


Figura 4: L'evoluzione della densità di energia per ciascuna componente cosmica in funzione del fattore di scala. Tratto dall'articolo "Gamma ray bursts (GRBs) as probes of Cosmological Parameters" F. Dirirsa, S. Razzaque

### 3 Big Bang:

Basandosi su questi nuovi modelli e sulla legge di Hubble iniziarono a svilupparsi nuove teorie cosmologiche. Tra queste, *la teoria del Big Bang* di Lemaitre, *la teoria della Stato Stazionario (Steady-state)* di Fred Hoyle (Bingley, 1915 – Bournemouth, 2001) in base alla quale doveva esserci una continua creazione di materia per poter sostenere l'espansione dell'universo.

L'idea della *singolarità primordiale* nasce spontaneamente osservando che tutti modelli analizzati, ad eccezione dell'universo De Sitter, implicano l'annullarsi del parametro  $R$  per  $t=0$ . In tale istante sia la densità che la costante di Hubble divergono. Si può pensare quindi che l'universo sia nato a seguito di una grande esplosione iniziale, il Big Bang, che ne causò l'espansione che ancora oggi si osserva. In particolare spesso si fa riferimento alla *teoria del Big Bang caldo*, il modello cosmologico che descrive l'universo nelle primissime fasi evolutive, in quanto si pensa che l'universo si sia espanso da uno stato iniziale di densità e temperature estremamente alte verso la rarefazione e il raffreddamento. Tale espansione interessa l'intero spazio-tempo: ciascun punto dell'universo è centro di espansione. La temperatura dopo il tempo di Planck ( $t \sim 10^{-43}$  s), si può pensare seguire la relazione ([4]):

$$T(t) \sim T_p \frac{R(t_p)}{R(t)}$$

Quando l'universo aveva circa un minuto di vita, ad esempio, la temperatura era circa  $10^9 K$  e in questa fase ha inizio la nucleosintesi: protoni e neutroni cominciarono a combinarsi per formare i nuclei atomici. Quando raggiunge i 380000 anni la temperatura è solo 3000K e ha inizio la ricombinazione: gli elettroni si combinano con i nuclei per formare i primi atomi neutri. Gli elementi non si sono ricombinati tutti assieme. Ad esempio ([8]) la prima ricombinazione del litio corrisponde a  $z \sim 14000$ , la prima dell'elio per  $5500 < z < 7000$ , per l'idrogeno  $z < 1100$ .

Si assume nel modello un universo omogeneo e isotropo, la cui evoluzione è governata dalle equazioni di Friedmann, ottenute dalla relatività generale. Nonostante la fisica che conosciamo non sia adesso ancora in grado di dare una spiegazione su quali fossero le condizioni al Big Bang e come (se) sia possibile descriverlo, il Big Bang offre una spiegazione comprensibile per un insieme di osservazioni. Ad esempio, il fatto che la CMB abbia uno spettro di corpo nero circa isotropo, costituisce un importante supporto sperimentale alla teoria. Se non si assumesse un universo caldo, denso, opaco e circa omogeneo, sarebbe difficile darne una spiegazione ragionevole.

Il modello standard del Big Bang caldo è basato sulle seguenti assunzioni ([4]):

1. Le leggi della fisica, verificate adesso nei laboratori, sono valide anche nell'universo primordiale e la gravità è descritta dalla relatività generale senza costante cosmologica;
2. Il principio cosmologico vale;
3. Le condizioni iniziali, che devono in linea di principio essere predette da una teoria più generale, sono tali che al tempo del Big Bang  $T > 10^{12} K$ , l'universo era in equilibrio termico, deve esserci stata un'asimmetria barionica,  $\Omega(t_i)^{11}$  è molto vicino all'unità e deve esserci stato uno spettro di fluttuazioni di densità iniziali che giustifica la formazione di strutture successive;

Grazie a questo modello si riesce a giustificare: l'abbondanza degli elementi leggeri prodotti nella nucleosintesi cosmologica, la CMB in quanto relitto dell'iniziale fase calda, l'espansione dell'universo. Inoltre

<sup>11</sup> $t_i$  si riferisce al tempo in cui si ipotizza essere avvenuta l'inflazione.

fornisce una possibile spiegazione per la formazione di galassie e altre strutture cosmiche.

Per quanto riguarda l'abbondanza degli elementi leggeri, il problema nasce dal fatto che le abbondanze osservate non possono essere del tutto giustificate dal solo bruciamento dell'idrogeno negli interni stellari. In particolare per l'elio ([5]) l'abbondanza osservata adesso è  $\sim 25\%$ , molto maggiore del valore di  $\sim 1\%$ , che si avrebbe con le sole reazioni termonucleari. Il Big Bang risolve la discrepanza tra i due valori poichè, nelle condizioni in cui si assume essere l'universo immediatamente dopo tale esplosione, erano possibili reazioni estremamente efficienti (adesso impossibili) che possono aver prodotto una grande quantità di elio. Per una trattazione più esaustiva si faccia riferimento all'appendice A.

Il modello del Big Bang caldo ha però ancora dei punti irrisolti:

1. Il problema della piattezza;
2. Il problema dell'orizzonte cosmologico;
3. L'origine dell'universo: l'evoluzione dell'universo prima del tempo di Planck;
4. La natura della materia oscura;

Tramite l'incorporazione delle "nuove fisiche" (BSM<sup>12</sup>) nel modello del Big Bang si arriva a un modello standard revisionato con il quale possono essere risolte parte delle problematiche quali una spiegazione qualitativa della bariosintesi, del comportamento dell'universo a  $T > 10^{12}K$ , la possibilità che esistano particelle non barioniche, che potrebbero costituire la materia oscura. Le versioni moderne del modello del Big Bang eliminano molte delle problematiche prima elencate. Allo stesso tempo si introduce un nuovo problema: il problema del monopolo magnetico.

Si analizzano nel dettaglio il problema della piattezza, dell'orizzonte cosmologico e del monopolo magnetico ([1]), per poi introdurre una soluzione: l'inflazione.

### 3.1 Problema della piattezza:

L'universo è quasi piatto adesso, ed era anche più piatto nel passato. La curvatura dell'universo, dipende dalla densità, e quindi dal parametro  $\Omega$ .

Dalle osservazioni della CMB e delle supernovae Ia, adesso:

$$|1 - \Omega_0| \leq 0.005$$

In particolare, come descritto dal modello  $\Lambda$ CDM, si ha che:  $\Omega_{r,0} \approx 9.0 \times 10^{-5}$ ,  $\Omega_{m,0} \approx 0.31$  e  $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.69$ . Per giustificare questi dati, si potrebbe pensare che le condizioni iniziali erano tali da far in modo che  $\Omega$  assumesse adesso tale valore. Però, estrapolando il valore di  $\Omega(t)$  nel passato, si vede che è impossibile che tale risultato sia semplicemente una coincidenza.

Si osserva infatti che nel passato,  $\Omega$  era ancora più vicino a 1.

1. Al tempo dell'uguaglianza radiazione-materia, il parametro di densità  $\Omega_{rm}$  è uguale a 1 con un'accuratezza:

$$|1 - \Omega_{rm}| \leq 2 \times 10^{-6}$$

2. Al tempo della nucleosintesi, subito dopo il Big Bang è solamente:

$$|1 - \Omega_{nuc}| \leq 7 \times 10^{-16}$$

3. All'epoca di Planck,  $t_p \sim 5 \times 10^{-44}s$ :

$$|1 - \Omega_p| \leq 2 \times 10^{-62}$$

Risulta dunque estremamente importante quantificare la vicinanza a 1 del parametro di densità. Ad esempio, se la deviazione da  $\Omega$  al tempo della nucleosintesi fosse stata dell'ordine di  $10^{-6}$  invece che  $10^{-15}$ , l'universo sarebbe collassato in un *Big Crunch* oppure si sarebbe espanso in un universo poco denso, chiamato *Big Chill*. In questo caso non sarebbe stata possibile la formazione di galassie, pianeti, stelle. Si conclude dunque che una coincidenza così precisa sul valore di  $\Omega$  è estremamente improbabile: si deve introdurre un meccanismo fisico che "appiattisca" l'universo nei suoi primi attimi.

<sup>12</sup>Physics beyond the Standard Model

### 3.2 Problema dell'orizzonte:

Il problema dell'orizzonte deriva dal fatto che l'informazione non può viaggiare più veloce della luce. In un universo di età finita questo pone un limite fisico, chiamato orizzonte, sulla massima distanza che possono avere due regioni che siano state in contatto causale. Dal sistema di riferimento terrestre, l'orizzonte è una superficie sferica centrata nell'osservatore, oltre cui non è possibile vedere poichè la luce di oggetti più distanti non ha avuto il tempo di raggiungerla. In tale contesto, l'isotropia e l'omogeneità osservate nella CMB risultano problematiche. Tali proprietà permettono di descrivere la curvatura della metrica di Robertson-Walker e la sua espansione tramite le equazioni di Friedmann. Se l'universo fosse non omogeneo e anisotropo su larga scala, sarebbe stato molto più difficile descriverlo matematicamente. Però tali caratteristiche dell'universo sono in contraddizione con il modello standard del Big Bang caldo. Secondo il modello la radiazione che si misura oggi nel cielo proviene da una superficie sferica chiamata superficie di ultimo scattering: l'insieme dei punti nello spazio in cui si ritiene sia avvenuto l'evento di disaccoppiamento tra materia e radiazione. La distanza propria della terra dalla superficie di ultimo scattering è:

$$d_p(t_0) = c \int_{t_{ls}}^{t_0} \frac{dt}{R(t)}$$

In cui  $t_{ls}$  è molto minore di  $t_0$ . Per il modello  $\Lambda$ CDM, vale:  $d_p(t_0) = 0.98d_{hor}(t_0)$ . Quindi due punti opposti a  $180^\circ$  da un osservatore terrestre sono separati da una distanza propria pari a  $1.96d_{hor}(t_0)$ .

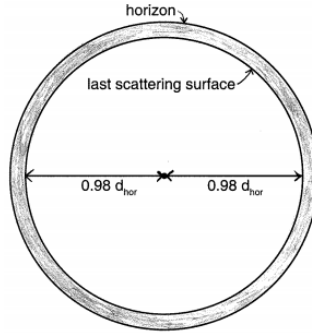


Figura 5: Nel modello del Big Bang caldo la distanza propria dall'ultimo scattering è il 98 % della distanza dell'orizzonte attualmente.

Dato che i due punti sono più distanti rispetto alla distanza dell'orizzonte, saranno casualmente sconnessi: non hanno avuto tempo per spedirsi alcun informazione e in particolare per termalizzarsi tra di loro. Tuttavia si osserva sperimentalmente che i due punti hanno la stessa temperatura, con fluttuazioni infinitesime dell'ordine di  $10^{-5}$ .

Come si giustifica il fatto che regioni fuori da qualsiasi contatto causale al tempo dell'ultimo scattering possano avere proprietà omogenee? Non è possibile che sia una coincidenza: essi devono aver avuto un contatto tale per cui adesso, che l'universo ha circa 13.7 Gyr, hanno entrambi una temperatura di circa 2.725 K.

### 3.3 Problema del monopolio:

L'universo è apparentemente libero di monopoli magnetici. Tale problema nasce dalla combinazione dello scenario dell'Hot Big Bang con la Teoria della grande unificazione (GUT<sup>13</sup>), una teoria dei campi che tenta di unificare forza elettromagnetica con la forza nucleare debole e nucleare forte. A seguito della dimostrazione di Sheldon Glashow (New York, 1932), Abdus Salam (Jhang,1926 – Oxford,1996) e Steven Weinberg (New York, 1933), che vinsero per questo il Premio Nobel per la Fisica nel 1979, che, per particelle più energetiche di  $E \sim 1TeV$ , la forza elettromagnetica e la forza debole costituiscono un'unica *forza elettrodebole*, si cercò di dimostrare che gravitazione, forza forte, debole e elettromagnetica costituissero tutte un'unica forza. L'energia elettrodebole ( $E \sim 1TeV$ ) corrisponde a una temperatura  $T \sim E/T \sim 10^{16}K$  che l'universo aveva a  $t_u \sim 10^{-12}s$ . Quindi prima di questo momento c'erano solo tre forze fondamentali. Estrapolando le proprietà della forza forte e elettrodebole a particelle ancora più energetiche, i fisici stimarono che all'energia  $E_{GUT} \sim 10^{12}TeV$  ( $T_{GUT} \sim 10^{28}K$ ,  $t_{u,GUT} \sim 10^{-36}s$ ) esse debbano unificarsi in

<sup>13</sup>Grand Unified Theory

un'unica. Allo stesso modo includendo anche la gravità, si stima che a energie dell'ordine di  $E \sim 10^{16} \text{TeV}$  ( $T \sim 10^{32} \text{K}$ ,  $t_u \sim 10^{-43} \text{s}$ ), ci fosse un'unica forza. In questo caso si parla di "Teoria del Tutto" (TEO<sup>14</sup>) che dovrebbe descrivere come tutte le forze fossero un'unica sola in scale temporali dell'ordine del tempo di Planck. La GUT prevede che l'universo, quando la temperatura è divenuta minore di  $T_{GUT}$ , abbia attraversato una *transizione di fase*. In generale, le transizioni sono associate a spontanee perdite di simmetria: per  $T > T_{GUT} \sim 10^{28} \text{K}$  si ha la simmetria tra forze elettrodebole e forte, poi questa simmetria è persa spontaneamente e le forze cominciano a comportarsi in maniera differente. Tali perdite di simmetria danno origine a *difetti topologici* che possono essere bidimensionali, unidimensionali (in cosmologia tali difetti sono chiamati *stringhe cosmiche*) e talvolta zerodimensionali (point-like). La GUT prevede che tali transizioni in cui si perdono le simmetrie creino difetti puntiformi che agiscono come *monopoli magnetici*, veri e propri poli nord e sud isolati di un magnete. L'energia a riposo dei monopoli magnetici creati nella transizione GUT è prevista essere:  $E_{GUT} \sim 10^{12} \text{TeV}$ . Inoltre, ci aspettiamo approssimativamente un difetto topologico per volume dell'orizzonte al tempo  $t_{GUT}$ .

Quindi, la densità numerica di monopoli magnetici al tempo della loro creazione, si stima essere:

$$n_M(t_{GUT}) \sim \frac{1}{2ct_{GUT}} \sim 10^{82} m^{-3}$$

e la loro densità di energia:

$$\epsilon_M(t_{GUT}) \sim (m_M c^2) n_M \sim 10^{94} \text{TeV} m^{-3}$$

Tale energia, nonostante sia un valore enorme, è dieci ordini minore rispetto alla densità di energia della radiazione:

$$\epsilon_\gamma(t_{GUT}) \sim 10^{104} \text{TeV} m^{-3}$$

Quindi i monopoli magnetici non avrebbero impedito in alcun modo alla radiazione di dominare al tempo della transizione GUT. Essi avrebbero però dominato in seguito poichè essendo così massivi sarebbero presto diventati non relativistici con una densità di energia  $\epsilon_M \propto R^{-3}$ , mentre la densità di radiazione  $\epsilon_\gamma \propto R^{-4}$ . Quindi i monopoli magnetici avrebbero dominato la densità di energia quando il fattore di scala fosse stato circa  $10^{10}$ : quando la temperatura era circa  $10^{-10} T_{GUT} \sim 10^{18} \text{K}$  e l'età dell'universo  $t \sim 10^{-16} \text{s}$ .

E' ovvio però dalle osservazioni che l'universo non è dominato dai monopoli magnetici oggi, abbiamo forti evidenze che essi non esistono affatto. Le ricerche sui monopoli pongono come limite superiore per la loro densità numerica:  $n_{M,0} < 10^{-29} n_{bar,0}$ . Un monopolo ha massa  $m_M$  tale per cui  $m_M c^2 \sim 10^{12} \text{TeV} \sim 10^{15} m_P c^2$ , questo implica che la loro densità è oggi  $\Omega_{M,0} < 5 \times 10^{-16}$ , molto lontano dalla dominazione dei monopoli.

Il problema relativo ai monopoli riguarda proprio dove essi siano finiti. Potremmo semplicemente rispondere che non ci sono mai stati monopoli, che non esiste una singola teoria unificatrice delle forze (GUT). Difatti in alcune varianti della GUT, i monopoli non sono mai stati prodotti. Ad ogni modo il problema della piattezza e dell'orizzonte rimangono. Nel 1981 Guth risolve tutte e tre le questioni con un singolo meccanismo cosmologico: l'inflazione.

### 3.4 Radiazione cosmica di fondo:

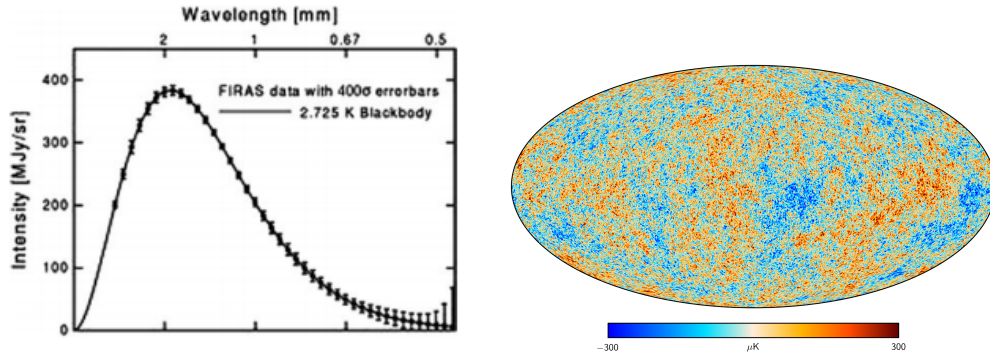
Si è visto come la CMB costituisca un elemento fondamentale nella trattazione; si cerca quindi di darne una descrizione sintetica.

La CMB venne scoperta nel 1965 da Penzias e Wilson, grazie a cui vinsero il premio Nobel del 1979. Tale radiazione termica era stata predetta nel 1940 da George Gamow (Odessa, 1904 – Boulder, 1968) nello studio delle prime fasi dell'universo. La prima misurazione dettagliata della CMB venne fatta dal satellite COBE<sup>15</sup> nel 1989, da cui si osservò una corrispondenza con lo spettro di Planck di corpo nero a  $T=2.725 \pm 0.002 \text{K}$  straordinaria (Figura: 5(a)).

Secondo la teoria del Big Bang fino a  $t_{ls} \sim 380000$  nell'universo la temperatura era talmente alta da non consentire l'esistenza di atomi. L'elevata energia dei fotoni impediva agli elettroni di legarsi ai protoni, impedendo la formazione degli atomi. Con l'espansione dell'universo, sia il plasma sia la radiazione iniziarono a raffreddarsi e i fotoni non furono più in grado di impedire la formazione di atomi stabili. L'universo, che fino a  $t_{ls}$  era stato una sorta di nebbia opaca, diventò trasparente alla radiazione, consentendo ai fotoni di viaggiare liberamente. La CMB è la testimonianza di questi fotoni. E' possibile infatti definire una superficie, detta superficie di ultimo scattering, cioè l'universo effettivamente osservabile, più piccolo rispetto all'orizzonte (teoricamente) osservabile ( $\sim 13 \text{Gyr}$  anni luce).

<sup>14</sup>Theory of Everything

<sup>15</sup>COsmic Background Explorer



(a) Osservazioni della CMB da parte del satellite COBE nel 1990.

(b) Immagine della CMB del satellite Planck dell'ESA. I diversi colori rappresentano fluttuazioni di temperatura, corrispondenti a zone con densità diversa.

Figura 6: Immagini relative alla CMB.

## 4 Inflazione:

L'inflazione è il modello cosmologico che descrive l'universo in una brevissima fase a seguito del Big Bang, prevedendo in tale intervallo una legge esponenziale per l'espansione (De-Sitter-like), quindi  $\ddot{R} > 0$ . Esistono varie versioni del modello inflazionario. La prima è stata formulata da Guth e viene chiamata "Old Inflation". Tra le altre versioni, la "New Inflation", la "Chaotic Inflation", la "Stochastic Inflation" e la "Open inflation".

Durante l'inflazione la densità di energia è dominata dalla costante cosmologica e il fattore di scala cresce esponenzialmente con il tempo:

$$R(t) \propto e^{H_i t}$$

in cui  $H_i$  è la costante di Hubble durante l'inflazione. Quindi, da  $t_i$ , quando è iniziata l'inflazione esponenziale, e il tempo  $t_f$ , quando l'inflazione si è fermata, il fattore di scala è aumentato di un fattore:

$$\frac{R(t_f)}{R(t_i)} = e^N$$

in cui  $N$  è il numero di e-folding<sup>16</sup> dell'inflazione :

$$N = H_i(t_f - t_i)$$

Se la durata dell'inflazione è grande confrontata con il tempo di Hubble  $H_i^{-1}$ , allora  $N$  è grande e la crescita del fattore di scala enorme. Si assume che l'inizio dell'inflazione sia avvenuto al tempo GUT  $t_i \approx 10^{-36} s$ , con parametro di Hubble  $H_i \approx 10^{36} s^{-1}$ .

Si vede dunque, come anticipato, come sia possibile che il modello inflazionario risolva i tre problemi prima descritti.

- Problema della piattezza:  
Si può dimostrare dalle equazioni di Friedmann che:

$$|1 - \Omega(t)| \propto (R(t))^{-2}$$

per cui, dato che durante l'espansione esponenziale:  $R(t) \propto e^{(H_i t)}$

$$|1 - \Omega(t)| \propto e^{-2H_i t}$$

La differenza tra  $\Omega$  e 1 decresce esponenzialmente con il tempo. Se compariamo il parametro di densità all'inizio dell'inflazione ( $t_i$ ) con quello alla fine ( $t_f = t_i + N/H_i$ ), troviamo:

$$|1 - \Omega(t_f)| = e^{-2N} |1 - \Omega(t_i)|$$

<sup>16</sup>L'intervallo di tempo in cui la quantità cresce di un fattore  $e$ , numero di Nepero.

che, supponendo che l'universo fosse molto curvo:

$$|1 - \Omega(t_i)| \sim 1$$

si ha:

$$|1 - \Omega(t_f)| \sim e^{-2N}$$

Anche se l'universo prima dell'inflazione non era particolarmente piatto, dopo un centinaio di e-foldings lo sarebbe comunque diventato. Dato che adesso  $|1 - \Omega_0| \leq 0.005$ , si ha che  $N$  è al minimo 60. Quindi, al minimo:

$$\frac{R(t_f)}{R(t_i)} \sim e^{60} \sim 10^{26}$$

$$|1 - \Omega(t_f)| \sim e^{-120}$$

Il modello inflazionario implica un universo piatto.

- Problema dell'orizzonte:

La dimensione dell'orizzonte cresce esponenzialmente durante l'inflazione, dopodiché torna a essere dominato dalla radiazione e dunque a espandersi  $\propto t^{1/2}$ .

Si assume un modello che prevede l'inizio dell'inflazione a  $t \sim t_{GUT}$  e  $N=65$  e-folding.

Per definizione, la distanza dall'orizzonte è:

$$d_{hor}(t) = R(t)c \int_0^t \frac{dt}{R(t)}$$

Dunque, prima dell'inflazione:

$$d_{hor}(t_i) = R_i c \int_0^{t_i} \frac{dt}{R_i(t/t_i)^{1/2}} = 2ct_i$$

E immediatamente dopo:

$$d_{hor}(t_f) = R_i e^N c \left( \int_0^{t_i} \frac{dt}{R_i(t/t_i)^{1/2}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{R_i e^{H_i(t-t_i)}} \right)$$

Da cui, assumendo  $N$  grande e  $H_i \sim t_i^{-1}$ , si ricavano i valori numerici:

$$d_{hor}(t_i) \sim 6 \times 10^{-28} m$$

$$d_{hor}(t_f) \sim 15m$$

La dimensione dell'orizzonte al tempo dell'ultimo scattering è invece:

$$d_{hor}(t_{ls}) \sim 200Mpc$$

Circa 800 volte il valore che si avrebbe in assenza di inflazione:

$$d_{hor}(t_{ls}) \sim 0.25Mpc$$

Si considera adesso l'universo a noi visibile oggi, ovvero la regione di spazio limitata dalla superficie di ultimo scattering. Attualmente la distanza propria dalla superficie di ultimo scattering è:

$$d_p \approx 1.4 \times 10^4 Mpc$$

Quindi immediatamente dopo l'inflazione, la porzione di universo attualmente visibile era compresa in una sfera di raggio:

$$d_p(t_f) = R_f d_p(t_0) \sim 0.9m$$

Dove  $R_f \sim 2 \times 10^{-27}$  è il fattore di scala alla fine dell'inflazione. Appena prima dell'epoca di inflazione:

$$d_p(t_i) = e^{-N} d_p(t_f) \sim 4 \times 10^{-29} m$$

Questa distanza è minore della dimensione dell'orizzonte appena prima dell'inflazione, ricavata in precedenza. Dunque la porzione di universo visibile, anche dato il minimo numero possibile di e-foldings, ha avuto tempo di scambiarsi l'informazione e raggiungere l'uniformità prima dell'inizio dell'inflazione. Regioni distanti del cosmo che appaiono *ora* non essere in rapporto causale, lo sono state nell'universo primordiale.

- Problema dei monopoli:

Se i monopoli magnetici sono stati creati prima o durante l'inflazione, allora la densità numerica di monopoli è diluita nell'inflazione a un numero non rilevabile. Mentre l'universo si espande esponenzialmente, il numero di monopoli, se non sono né distrutti né costruiti, decresce esponenzialmente. Ad esempio, se l'inflazione comincia attorno al tempo GUT, quando la densità di monopoli è:  $n_M(t_{GUT}) \approx 10^{82} m^{-3}$ , allora dopo 65 e-folding di inflazione tale numero sarà:  $n_M(t_f) \approx 0.002 m^{-3}$ . Adesso, dopo l'ulteriore espansione dell'universo, sarebbe quindi:  $n_M \approx 2 \times 10^{-83} m^{-3} \approx 5 \times 10^{-16} Mpc^{-3}$ . Quindi, la probabilità che ci siano monopoli entro la superficie di ultimo scattering è trascurabile.

## 5 Materia oscura:

Tutto ebbe inizio con Zwicky, che, nei primi anni '30 del secolo scorso, intraprese uno studio sistematico dell'ammasso della Chioma, un aggregato di galassie. Zwicky si rese conto che le galassie si muovevano troppo velocemente perché l'ammasso si potesse mantenere compatto. Per risolvere questa situazione paradossale, egli avanzò l'idea che l'ammasso contenesse anche della massa invisibile, che esercitava attrazione gravitazionale ma che non emetteva luce, non contribuendo, quindi, alla luminosità della galassia. La materia oscura (DM<sup>17</sup>) ha un ruolo centrale nella comprensione dell'universo. Infatti, uno dei problemi più importanti della cosmologia, consiste nel determinare la densità di materia nell'universo, che include materia barionica, cioè formata dalle particelle del modello standard, e oscura. Il parametro di densità è fondamentale per ricavare la curvatura spaziale e il rate di espansione dell'universo.

La miglior stima della densità barionica deriva dalle osservazioni della CMB e dalla predizione della nucleosintesi primordiale. Sia le fluttuazioni di temperatura della CMB, che l'efficienza della nucleosintesi primordiale (in cui si è convertito idrogeno in deuterio, elio, litio e altri elementi), dipendono dal rapporto tra fotoni e materia. Tramite queste informazioni, si deduce che il parametro di densità di materia barionica adesso deve essere:

$$\Omega_{bary,0} = 0.048 \pm 0.003$$

Come sappiamo però  $\Omega_m \approx 0.3$ , quindi la maggior parte della materia non è barionica (o meglio, può anche essere materia barionica ma che non si riesce ad osservare).

Ci riferiamo quindi in generale alla materia oscura come quella componente dell'universo che non assorbe, emette o riflette luce. Non essendo nota la natura della DM, sono state avanzate diverse ipotesi. In particolare, possiamo fare una macro-distinzione tra *Cold Dark matter* (CDM) e *Hot Dark Matter* (HDM). La CDM è materia non relativistica rilevabile solo tramite i suoi effetti gravitazionali. Tra i candidati dei possibili costituenti della materia oscura fredda:

1. Le WIMPs – *Weakly Interacting Massive Particles*, particelle non barioniche massicce a debole interazione e non relativistiche. Ad esempio il neutralino, ipotetica particella elementare, prevista dalla teoria della supersimmetria, il gravitrino;
2. I MACHOs – *Massive Compact Halo Objects*, oggetti massicci e compatti dell'alone galattico, che possono essere oggetti condensati come i buchi neri, le stelle di neutroni e le nane bianche, oppure stelle molto deboli o oggetti non luminosi come pianeti. In questo caso, naturalmente, la DM è di natura barionica. La presenza di MACHO's è stata verificata, tuttavia il loro numero risulta molto inferiore rispetto a quello che ci si aspetterebbe per giustificare le osservazioni;

La HDM, invece, è la forma ipotetica di DM costituita da particelle che viaggiano a velocità relativistiche. Un esempio di possibili costituenti sono i neutrini, che hanno una massa molto piccola, interagiscono debolmente con la materia, non prendono parte alle interazioni elettromagnetiche e alle interazioni dovute alla forza forte, e sono presenti in maniera consistente. La HDM presenta però delle problematiche e può al massimo costituire solo una piccola frazione di materia oscura.

Sono state trovate numerose evidenze osservative e teoriche della necessità di introdurre la materia oscura:

- Le curve di rotazione delle galassie a spirale che non rispettano l'andamento teorico predetto;
- Lensing gravitazionale: le masse che si deducono studiando gli effetti gravitazionali sono molto maggiori rispetto a quelle che effettivamente si osservano;
- Le velocità delle galassie negli ammassi, come lo stesso Zwicky aveva notato;

---

<sup>17</sup>Dark Matter



- La teoria sulla formazione delle strutture, che funziona meglio assumendo la presenza di materia oscura;
- L'inflazione che suggerisce che  $\Omega$  debba essere 1 e necessità dunque di una componente aggiuntiva di materia rispetto a quella osservabile per  $\Omega_M \sim 0.3$ ;

Esistono tuttavia teorie alternative che ipotizzano che la materia oscura non esista e avanzano formulazioni alternative della gravità, coerenti con i dati osservativi. Ad esempio la MOND: Modified Newton Dynamics.

## 5.1 Curva di rotazione galassie a spirale:

La curva di rotazione caratteristica delle galassie a spirale rappresenta una delle più importanti evidenze osservative della presenza di materia oscura nell'universo. Si vuole studiare la curva di rotazione, cioè

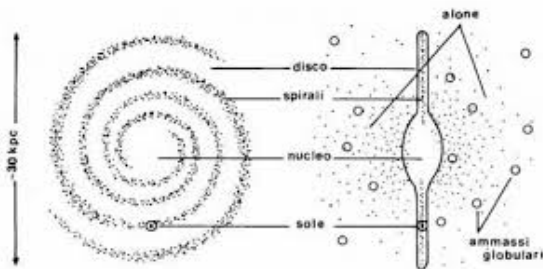


Figura 7: Schema di una galassia a spirale. Le galassie a spirale sono costituite da dischi molto sottili in cui troviamo le stelle, che hanno orbite circa circolari. Al centro del disco si trova il bulge, regione sferica a densità circa costante. Il disco è inoltre circondato da un alone di gas molto esteso.

l'andamento della velocità in funzione della distanza dal centro. Si consideri dunque una stella generica in moto circolare attorno al centro della galassia, con raggio orbitale  $R$  e velocità  $v$ ; la sua accelerazione è data da:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

diretta verso il centro della galassia. Se l'accelerazione è causata dall'attrazione gravitazionale della galassia:

$$a = \frac{GM(R)}{R^2}$$

in cui  $M(R)$  è la massa contenuta all'interno della sfera di raggio  $R$  centrata nel centro galattico. Eguagliando le due espressioni:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}$$

dato che  $v \propto 1/\sqrt{R}$  per alti valori di  $R$  e considerando una massa costante, si ha la caduta Kepleriana. Nel Bulge delle galassie, invece:  $v \propto R$ . La curva di rotazione delle galassie a spirale, può essere costruita grazie alle nubi di idrogeno neutro (HI), presenti nell'intera galassia, caratterizzate dall'emissione a 21 cm quando lo spin dell'elettrone passa da parallelo a antiparallelo. Tramite l'effetto Doppler, tale riga può essere utilizzata per descrivere il moto dell'intera galassia. Essendo una lunghezza d'onda molto grande, la galassia è praticamente trasparente ad essa. Tramite queste misurazioni si osserva che però le curve di rotazione non seguono l'andamento teorico che ci si aspetta debbano avere. Per giustificare queste curve, si introduce la materia oscura: le galassie a spirali sono circondate da enormi aloni di materia oscura.

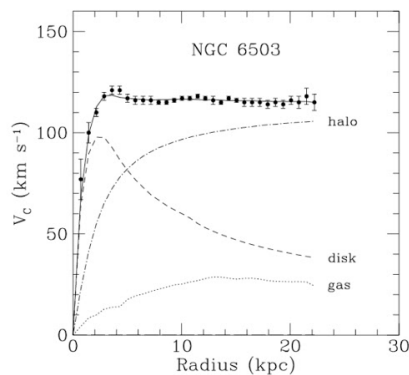


Figura 8: Curva di rotazione della galassia NGC 6503: i dati con barre di errore sono le velocità osservate. Si vedono i contributi dei vari componenti: la linea tratteggiata rappresenta il contributo delle stelle, quella punteggiata il contributo del gas, quella in cui si alternano tratti e punti l'alone.

## 6 Appendici:

### Appendice A: Il problema dell'elio.

L'abbondanza di elio che si misura nell'universo di  $\sim 25\%$  è troppo alta per essere spiegata dal solo bruciamento dell'idrogeno negli interni stellari tramite reazioni termonucleari. Si può dare una stima di quanto elio può essere stato prodotto dalle stelle da quando si è formato l'universo ad oggi ( $\tau \sim 13Gyr \sim 4 \cdot 10^{17}s$ ).

Si svolge il conto per la nostra Galassia:

$$\begin{cases} L_{gal} \sim 10^{11} L_{\odot} \sim 4 \cdot 10^{44} erg/s \\ M_{gal} \sim 10^{12} M_{\odot} \sim 2 \cdot 10^{45} g \end{cases}$$

Si suppone che la luminosità della Galassia sia dovuta al solo bruciamento dell'idrogeno e che sia rimasta sempre costante; l'energia prodotta da quando la galassia si è formata è:

$$E = L_{gal} \cdot \tau = 1.6 \cdot 10^{62} erg$$

L'energia di legame di un nucleo di elio, cioè l'energia prodotta dal bruciamento di quattro nuclei di idrogeno per produrre un atomo di elio è pari a:

$$E_{He} \sim 4.5 \times 10^{-5} erg$$

Quindi il numero di atomi di elio che si sono formati in 13 miliardi di anni è:

$$N_{He} = \frac{N_{tot}}{N_{He}} = 3.5 \cdot 10^{66}$$

che corrisponde a una massa totale prodotta:

$$M_{tot,He} = N_{He} \cdot m_{He} = 3.5 \cdot 10^{66} \cdot 6.64 \cdot 10^{-24} = 2.4 \cdot 10^{43} g$$

L'abbondanza relativa di elio è dunque:

$$Y = \frac{m_{He}}{M_{gal}} \sim 0.01$$

che non è coerente con i dati osservativi per cui  $Y \sim 0.24-0.28$ . Tale abbondanza è osservabile anche nelle stelle più vecchie. Deve quindi esserci stato un processo estremamente efficiente, su tempi scala molto brevi, di produzione dell'elio.

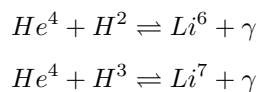
Tale processo necessita di condizioni termiche estreme, come quelle appena successive al Big Bang. In particolare, quando  $\tau \sim 1sec$  e la  $T \sim 10^{10} K$ , si hanno le reazioni:

$$\begin{cases} e^- + e^+ \rightleftharpoons \nu_e + \bar{\nu}_e \\ p + \bar{\nu}_e \rightleftharpoons n + e^+ \\ p + e^- \rightleftharpoons n + \nu_e \end{cases}$$

in cui vengono creati neutroni liberi. La temperatura diminuisce poi raggiungendo il valore:  $T \sim 10^9 K$ . In questo momento ci sono molti neutroni liberi e la temperatura è tale che diventa stabile il primo nucleo composto, cioè il deuterio. In questa fase, qualche decina di secondo dopo il Big bang, le reazioni termonucleari "classiche" non possono essere efficienti, essenzialmente per mancanza di tempo. Inoltre, in intervalli temporali dell'ordine delle decine di secondi, i neutroni sono stabili poichè decadono in circa 10 minuti. Dunque, si possono avere le seguenti reazioni:

$$\begin{cases} n + p \rightarrow H^2 + \gamma \\ H^2 + H^2 \rightarrow He^3 + n \\ He^3 + n \rightarrow H^3 + p \\ H^2 + H^3 \rightarrow He^4 + n \end{cases}$$

Ciò giustifica la presenza dell'elio prima che le stelle cominciassero a bruciare l'idrogeno. A partire dall'elio, si sono poi sintetizzati altri elementi chimici. Ad esempio:



## Riferimenti bibliografici

- [1] B. Ryden. , *Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press, 2017.
  - [2] Dennis W. Sciama, *Cosmologia moderna*, Arnoldo Mondadori Editore, 1977.
  - [3] H. Karttunen, P. Kroger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, Springer, 2016.
  - [4] Peter Coles, Francesco Lucchin *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, John Wiley Sons, 2002.
  - [5] Francesco Rosario Ferraro, *Appunti del corso di Astrofisica Stellare*. Corso di laurea in Astronomia, 2019
  - [6] Franco Vazza, *Appunti del corso di Cosmologia*. Corso di laurea in Astronomia, 2020
  - [7] Paola Focardi, *Appunti del corso di Storia dell'astronomia*. Corso di laurea in Astronomia, 2020
  - [8] Andrea Cimatti, *Slides del corso di Formazione e Evoluzione delle Galassie.*, Corso di laurea in Astrofisica, 2020
- P. James E. Peebles, *Dark matter*, Princeton University, 2014