

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea Magistrale in Fisica del Sistema Terra

**EFFETTO DELLO SPESSORE DI
UN'INCLUSIONE
TERMO-PORO-ELASTICA IN AREE
VULCANICHE E IDROTERMALI**

Relatore:
Prof.ssa Maria Elina
Belardinelli

Presentata da:
Carolina Benussi

Correlatore:
Dott. Massimo Nespoli

Sessione II

Anno Accademico 2019/2020

*Ai miei nonni che mi
hanno insegnato a non perdere
mai la voglia di imparare.*

Sommario

I sistemi idrotermali in ambiente vulcanico rappresentano la manifestazione in superficie di processi magmatici che avvengono in profondità. Un esempio di area idrotermale ad alto rischio vulcanico è quella di Campi Flegrei, caratterizzata da frequenti fenomeni di unrest e fenomeni di vulcanismo secondario. Gli studi riguardanti gli eventi che hanno interessato la zona negli ultimi cinquanta anni, associano questi fenomeni alla presenza ed al movimento di fluidi caldi e pressurizzati nel sottosuolo in prossimità della caldera. Il modello a sorgente termo-poro-elastica si presta a descrivere questa fenomenologia spiegando anche la presenza della sismicità che spesso accompagna gli episodi di unrest. Una sorgente termo-poro-elastica presente in letteratura consiste in un'inclusione posta all'interno della crosta, a forma di disco sottile. Tale inclusione è sottoposta a variazioni di temperatura e pressione di poro, mentre il mezzo circostante si trova in condizioni drenate e isoterme. Recenti studi di tomografia suggeriscono per la caldera di Campi Flegrei la presenza di uno strato con estensione limitata (di ~ 4 km) e spessore 500 m dove si concentra la sismicità dell'episodio 82-84, che è compatibile con la presenza di una sorgente termo-poro-elastica di dimensioni equivalenti. In questa tesi proponiamo un metodo per estendere il modello di sorgente termo-poro-elastica a forma di disco, al caso di un'inclusione di forma cilindrica avente uno spessore arbitrario. La sorgente di forma cilindrica può infatti essere rappresentata come una sovrapposizione di più inclusioni a forma di disco (elementi), posto che questi siano abbastanza sottili. Mostriamo quindi come stimare il numero e lo spessore dei singoli elementi che permettono di ottenere una corretta rappresentazione di una inclusione TPE cilindrica. Si proverà che lo spostamento non è significativamente influenzato dalla discretizzazione ed è ben rappresentato dal modello a disco qualunque sia lo spessore della sorgente. Per la rappresentazione degli sforzi invece, la discretizzazione risulta in generale necessaria.

Indice

1	Introduzione al modello di inclusione termo-poro-elastica ed alla sua applicabilità alle aree idrotermali	9
1.1	Breve introduzione ai sistemi idrotermali	9
1.2	Il vulcanismo Campano	10
1.2.1	La caldera dei Campi Flegrei	10
1.3	Modello di inclusione termo-poro-elastica	13
1.3.1	Modello di sorgente TPE per il caso dei Campi Flegrei	15
1.4	Inclusione TPE di forma cilindrica con spessore finito	16
2	Modello di inclusione termo-poro-elastica a forma di disco in un semi-spazio	18
2.1	Introduzione al modello di sorgente TPE	18
2.1.1	Relazioni costitutive per mezzi termo-poro-elastici	19
2.1.2	Inclusione termo-poro-elastica in un semispazio poro-elastico	21
2.2	Soluzione del modello di inclusione TPE a forma di disco	22
2.3	Effetto dello spessore sul modello TPE a forma di disco	32
2.3.1	Spostamento generato da un disco TPE di spessore crescente	32
2.3.2	Sforzo generato da un disco TPE di spessore crescente	35
3	Effetti dovuti alla discretizzazione dello spessore del cilindro	38
3.1	Rappresentazione a più dischi di spessore infinitesimo	38
3.2	Sviluppo dei programmi: le <i>functions</i> spostamentoTPE e stressTPE	39
3.3	I contributi elementari a spostamento e sforzo	40
3.3.1	Variazioni nel campo di spostamento	40
3.3.2	Variazioni nel campo di sforzo	42
3.4	Il modello a cilindro discretizzato	44
3.4.1	La discretizzazione di cilindri di diverso spessore (50 m e 500 m): spostamento	46
3.4.2	La discretizzazione di cilindri di diverso spessore (50 m e 500 m): sforzo	51

3.5	Criteri di discretizzazione al variare dello spessore	55
3.5.1	Confronto con modello numerico (Mindlin)	59
3.5.2	Massimo spessore degli elementi	61
4	Applicazioni dei risultati	62
4.1	Confronto disco - cilindro di spessore finito	63
4.2	Inclusione TPE a Campi Flegrei e l'evento di unrest 1982-84	66
4.3	Considerazioni conclusive	73

Introduzione

Lo scopo dell'elaborato è quello di descrivere gli effetti che si riscontrano su spostamento e sforzo quando varia lo spessore di una sorgente cilindrica termo-poro-elastica all'interno di un semispazio. Un simile tipo di sorgente di deformazione è stato proposto per descrivere le osservazioni che si possono produrre in aree vulcaniche o idrotermali quando i fluidi contenuti all'interno dei pori della roccia sono investiti da un sostanziale cambiamento di temperatura e di pressione di poro in una regione limitata della crosta. La tesi realizza un modello di sorgente TPE a cilindro sovrapponendo un numero N di elementi TPE a disco, i cui effetti sono stati resi noti in una recente pubblicazione.

La tesi è divisa in quattro capitoli principali, vediamo qui di seguito un breve riassunto degli argomenti trattati da ciascuno di essi:

CAPITOLO 1 : questo capitolo si propone di introdurre al lettore le tematiche principali trattate nell'elaborato: le aree idrotermali, con focus particolare sulla zona dei Campi Flegrei e il modello di sorgente termo-poro-elastica. Nella parte finale ci si concentra sul modello di sorgente cilindrica TPE a spessore finito facendone una piccola introduzione e spiegando quali novità possa apportare tale modello.

CAPITOLO 2 : questo capitolo si occupa di presentare il modello di sorgente TPE a disco contenuta in un semispazio poro-elastico descritta da Mantiloni et al. (2020). Una prima parte descrive le relazioni costitutive associate a mezzi termo-poro-elastici le quali sono alla base della risoluzione del modello a disco. Una seconda parte invece presenta brevemente il procedimento seguito per ritrovare campi di spostamento, deformazione e sforzo generati da questo tipo di sorgente TPE. Nell'ultima sezione

vengono presentati i risultati prima per un disco di spessore $d = 40$ m, poi per più dischi di spessore diverso mettendo in luce quali siano gli effetti dell'ispessimento della sorgente.

CAPITOLO 3 : questo capitolo rappresenta il fulcro di tutto l'elaborato: si occupa di descrivere e discutere il modello di sorgente cilindrica TPE con spessore finito. Una prima parte descrive in dettaglio la struttura del modello analizzando i contributi elementari allo spostamento e allo sforzo. La parte centrale illustra il criterio utilizzato per definire il numero minimo di elementi a disco necessari per rappresentare adeguatamente spostamento e sforzo prodotti da una sorgente TPE cilindrica di spessore finito. Tale numero poi viene calcolato al variare dello spessore fino ad un rapporto spessore-raggio pari a 1. Per valutare la correttezza del criterio di discretizzazione, si confronta il modello ottenuto in questa tesi con il numero appropriato di elementi con un modello numerico.

CAPITOLO 4 : questo è il capitolo conclusivo in cui vengono presentati e discussi i risultati ottenuti tramite l'analisi del nostro modello. In primis tramite il confronto con il modello a disco, si identifica lo spessore massimo che può avere un'inclusione TPE cilindrica per poter essere rappresentata con un modello a disco. Ci si confronta poi con il caso reale dei Campi Flegrei, in particolare l'evento di unrest degli anni 1982-84.

Capitolo 1

Introduzione al modello di inclusione termo-poro-elastica ed alla sua applicabilità alle aree idrotermali

1.1 Breve introduzione ai sistemi idrotermali

Un sistema idrotermale consiste in due componenti essenziali: una fonte di calore, la quale può essere magmatica ed una fase fluida che può provenire dal magma, ma molto spesso è acqua presente nel sottosuolo (Norton, 1984) che circola in una serie di condotti presenti in una roccia porosa. La fonte di calore può indurre detta circolazione della fase fluida in una roccia permeabile.

Una cella idrotermale consiste in tre principali elementi: un sistema di ricarica, una cella di circolazione e un sistema di scarica. Possiamo descrivere il processo come segue: a partire da un serbatoio più grande, il fluido ad alte temperature (a volte superiori ai 500°C) si disperde attraverso condotti sempre più stretti fino a raggiungere i siti di deposito oppure può fuoriuscire dalla crosta. Durante il percorso, interagisce con rocce ricche di metalli e minerali, incorporando questi ultimi attraverso processi chimici. Nel caso incontri una barriera impermeabile, la circolazione può fermarsi determinando la formazione di un deposito minerario, oppure procede grazie all'aumento di pressione determinando la fratturazione del mezzo. Nel caso in cui il fluido non incontri alcun ostacolo, si disperde in superficie. Lì l'attività idrotermale si manifesta attraverso geysers, fumarole e hot springs. I geysers sono fontane d'acqua che emettono ad intermittenza potenti getti in grado di raggiungere altezze di decine di metri, le fumarole invece sono spaccature del terreno da cui fuoriescono gas e vapori, anche ad alta temperatura ed infine le hot springs sono sorgenti di acqua calda che fuoriescono dal terreno, le cosiddette sorgenti idrotermali.

Questo tipo di strutture sono presenti un po' in tutta la Terra ma la maggior parte si ritrova in corrispondenza di aree vulcaniche, in cui la fonte di calore è rappresentata da camere magmatiche. In questi casi i fluidi coinvolti possono provenire dalla cristallizzazione del magma oppure da sorgenti esterne che si trovano nelle vicinanze della

camera magmatica. La risalita del magma genera una variazione di temperatura nel materiale circostante, dando il via al processo idrotermale appena descritto. La manifestazione in superficie di questo tipo di fenomeni prende il nome di vulcanismo secondario.

In Italia l'attività idrotermale di origine vulcanica ed i conseguenti fenomeni di vulcanismo secondario sono diffusi in tutta la penisola. Di particolare interesse per il nostro studio è la zona dei Campi Flegrei in Campania.

1.2 Il vulcanismo Campano

Nella regione Campana si riconoscono tre principali complessi vulcanici: il vulcano Somma-Vesuvio, i Campi Flegrei e l'isola di Ischia assieme a quella di Procida e Vivara. Questi si sono formati all'interno della Piana Campana, una zona ribassata denominata *graben* (o fossa tettonica), formatasi a seguito dello stiramento del bordo occidentale dell'Appennino meridionale (Amore, 2015). Il vulcanismo campano fa parte infatti di una cintura formatasi nel Plio-Quaternario a partire dal Sud della Toscana fino a raggiungere le Isole Eolie.

Somma-Vesuvio è uno stratovulcano formato da un cono più vecchio, il monte Somma, ed uno più giovane, il Vesuvio. Il più antico ha dato inizio alla sua attività attorno ai 33 mila anni fa (De Vivo et al., 2020) presentando inizialmente un carattere effusivo con emissione di colate laviche e scoriae, le quali hanno permesso la costruzione del monte stesso. All'incirca 18.3 mila anni fa è diventato molto più esplosivo e di carattere Pliniano, provocando per più volte il collasso della caldera. Il Vesuvio si è formato successivamente, in seguito all'eruzione del 79 d.C.. La formazione del cono che lo caratterizza è avvenuta proprio in corrispondenza della caldera sommitale del monte Somma. Anch'esso è caratterizzato da eruzioni pliniane e sub pliniane e la sua ultima eruzione risale al 1944. Tutt'ora è caratterizzato da una moderata sismicità ed emissioni fumaroliche al cratere.

L'isola di Ischia è ciò che rimane di un vulcano di natura prevalentemente esplosiva distrutto da collassi volcanotettonici, frane ed erosione. È la manifestazione in superficie di un grande apparato magmatico che si eleva dal fondo del mare. Il periodo di attività principale si aggira attorno ai 55 mila anni fa e la sua ultima eruzione risale al 1302. Oggi l'isola è caratterizzata da attività fumarolica e idrotermale.

Le isole di Procida e Vivara sono state create a seguito delle attività freatomagmatiche e esplosive dei vicini Campi Flegrei e della stessa isola di Ischia, attorno ai 70 – 15 mila anni fa.

1.2.1 La caldera dei Campi Flegrei

La caldera dei Campi Flegrei (fig. 1.1), una depressione vulcanica di diametro circa 10 km, è una delle aree vulcaniche più pericolose al mondo. La sua struttura particolarmente complessa è formata da due principali caldere ed altre più piccole all'interno delle stesse

(De Vivo et al., 2020, cap. 5). La regione è sempre stata caratterizzata da fenomeni vulcanici esplosivi di tipo freatomagmatico o pliniano. Nonostante vi siano segni di attività molto più antichi al di fuori della caldera, la più devastante eruzione associata ai Campi Flegrei è avvenuta circa 40 mila anni fa, la quale provocò la totale devastazione dell'area (la cosiddetta eruzione dell'*Ignimbrite Campana*). Circa 25 mila anni dopo (la datazione risale a 14.9 ± 0.4 mila anni fa (Deino et al., 2003)) seguì l'eruzione esplosiva del *Tufo Giallo Napoletano*: da qui in poi l'attività vulcanica si è sviluppata solo all'interno della caldera. L'ultima eruzione dei Campi Flegrei, nel 1538, è durata una settimana ed ha dato origine al vulcano Monte Nuovo. La prima parte dell'eruzione fu esplosiva, caratterizzata da una grande fuoriuscita d'acqua (fase idromagmatica); una volta terminata l'acqua l'eruzione è diventata prevalentemente di carattere effusivo (Di Vito et al., 1987).



Figura 1.1: Mappa dei Campi Flegrei (tratta da Mantiloni et al. (2020)).

Oggi i Campi Flegrei sono caratterizzati da un'intensa attività idrotermale ed importanti deformazioni del suolo che prendono il nome di *bradisismi* o *unrest* (dal greco "bradus" che significa lento e "seism" che significa movimento).

Il sistema idrotermale è alimentato da due tipi di fluido (Valentino and Stanzione, 2003): il primo è di origine marina e si infila dalla Baia di Pozzuoli a profondità minori di 2000 m mescolandosi alle acque sotterranee; il secondo ha origine a profondità maggiori e deriva dal mescolamento di acque magmatiche ed acque meteoriche.

Le manifestazioni superficiali del sistema idrotermale più notevoli sono le fumarole di Pisciarelli presso il cratere di Solfatara: questo sito rappresenta un punto di partenza importante per monitorare le variazioni in atto nel sottosuolo dell'area Flegrea.

L'attività di bradisismo rappresenta uno dei problemi più discussi riguardanti l'area dei Campi Flegrei: infatti ancora non è chiaro a cosa sia dovuta l'origine del fenomeno. Fino ad ora sono stati valutati svariati modelli tra cui l'intrusione di nuovo magma a bassa profondità, l'intermittente risalita di materiale da un serbatoio più grande a maggiore profondità verso uno a minore profondità, l'espansione di fluidi dovuta al calore o processi fluidodinamici nel sistema geotermale a basse profondità (De Vivo et al., 2020, cap. 15). Sicuramente gli studi degli ultimi anni concordano sul fatto che la deformazione del suolo e la sismicità siano spesso connesse all'attività delle fumarole e quella idrotermale (Chiodini et al., 2012).

In Isaia et al. (2019) vengono studiate le fasi di innalzamento e subsidenza che hanno coinvolto i Campi Flegrei negli ultimi 15 mila anni. Tramite lo studio della stratigrafia della scogliera La Starza, si è potuto verificare che i fenomeni di sollevamento e ribassamento totali che si sono susseguiti sono strettamente legati ai fenomeni di vulcanismo. Uno dei più importanti periodi di unrest si è verificato circa 4500 anni fa durante il quale la parte nord del Golfo di Pozzuoli si è rialzata, invece la parte sud ha subito un forte ribassamento (Del Gaudio et al., 2010). I fenomeni di uplift e subsidenza sono noti già dall'era Romana, durante la quale si registrano variazioni tra 1 – 10 m. La formazione del Monte Nuovo nel 1538 è stato l'unico episodio che presenta un innalzamento pari a 15 m verificatosi in concomitanza di un'eruzione. Dopo quest'ultima eruzione la zona dei Campi Flegrei ha vissuto un periodo molto lungo di subsidenza.

Al giorno d'oggi lo studio e la misurazione dei fenomeni di uplift è molto importante per cercare di valutare il rischio di una futura eruzione. A partire dal 1900, l'osservazione del fenomeno è stata fortemente intensificata ed è tutt'ora oggetto di discussione a seguito di alcuni eventi significativi. Nell'ultimo secolo infatti si sono verificati fenomeni di uplift abbastanza notevoli: tra il 1950 e il 1985 si stima un rialzo pari a 3.813 ± 0.200 m, a seguire tra il 1985 e l'anno 2000 si è perso circa 1 m di altezza (Del Gaudio et al., 2010). Nel periodo di innalzamento riscontrato a partire dagli anni Cinquanta, il biennio che ha più risentito del fenomeno di bradisismo è il 1982 – 1984 durante il quale si è registrato un uplift pari a 1.8 m (Belardinelli et al., 2011; Trasatti et al., 2011). In contemporanea si sono registrati presso la zona del cratere di Solfatara, la quale ha registrato il maggiore uplift, una serie di sismi la cui magnitudo ha raggiunto i 4.2 gradi della scala Richter. Le autorità locali hanno infatti scelto di evacuare gli abitanti dei Campi Flegrei.

Nella figura 1.2 vengono mostrate le variazioni di quota che hanno coinvolto la città di Pozzuoli negli ultimi 70 anni. Dalla figura si può notare che 2005 è iniziata una nuova fase di unrest, il cui sollevamento totale ad oggi è pari a 66 cm.

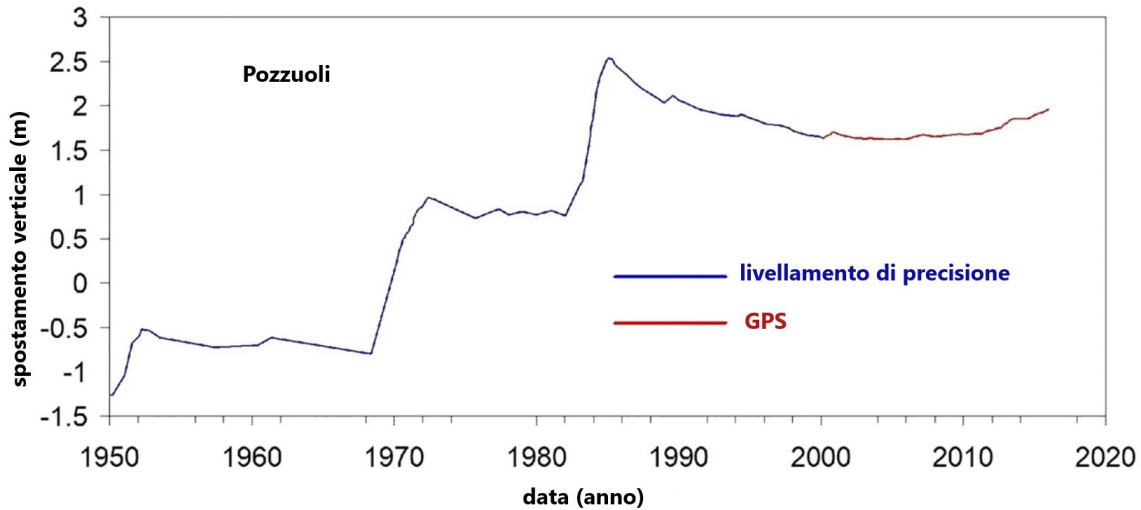


Figura 1.2: Serie temporale delle variazioni di quota che hanno coinvolto la città di Pozzuoli a partire dal 1950 (tratta da Moretti et al. (2018)).

Ad oggi l'area dei Campi Flegrei - Vesuvio è costantemente monitorata da Protezione Civile ed enti di ricerca i quali collaborano allo studio dei fenomeni tutt'ora in atto. Attualmente il livello di allerta rimane alto, vista l'alta densità di popolazione che vive nella zona.

1.3 Modello di inclusione termo-poro-elastica

Come già descritto nei paragrafi precedenti, le aree idrotermali sono caratterizzate dal trasporto di energia e massa ad opera della convezione di fluidi riscaldati: infatti l'intrusione di magma a bassa profondità nella crosta è spesso legato all'essoluzione di sostanze volatili, in particolare acqua e anidride carbonica. Queste sostanze sono in grado di migrare e spostarsi all'interno del materiale circostante attraverso fratture e pori, provocando un aumento di temperatura ΔT e un aumento di pressione di poro Δp (Belardinelli et al., 2019). Il modello di inclusione TPE rappresenta il caso in cui tali variazioni di ΔP e ΔT si verifichino all'interno di una regione di estensione limitata costituita da materiale poroso e permeabile (rappresentata in giallo in figura 1.3), che è caratterizzata da un comportamento termo-poro-elastico. Tali variazioni producono deformazione (e stress) nel mezzo circostante (matrice), per cui ci riferiremo all'inclusione TPE anche in termini di sorgente di deformazione.

La matrice (parte grigia in figura) è invece assunta in condizioni isoterme e drenate. Infine la regione arancione rappresenta il serbatoio magmatico in fase di degassamento. Basandoci sulle relazioni costitutive e le leggi alla base della teoria della termo-poro-elasticità possiamo valutare spostamento, deformazione e sforzo generati dall'inclusione TPE cioè dalla parte di sistema che subisce variazioni di temperatura e pressione di poro.

Frequentemente la rappresentazione di spostamento in ambienti vulcanici, viene valutata mediante modelli basati su cavità pressurizzate o crack. Alcune dei modelli più noti sono quelli di Mogi (1958), Yang et al. (1988) e Fialko et al. (2001). I primi

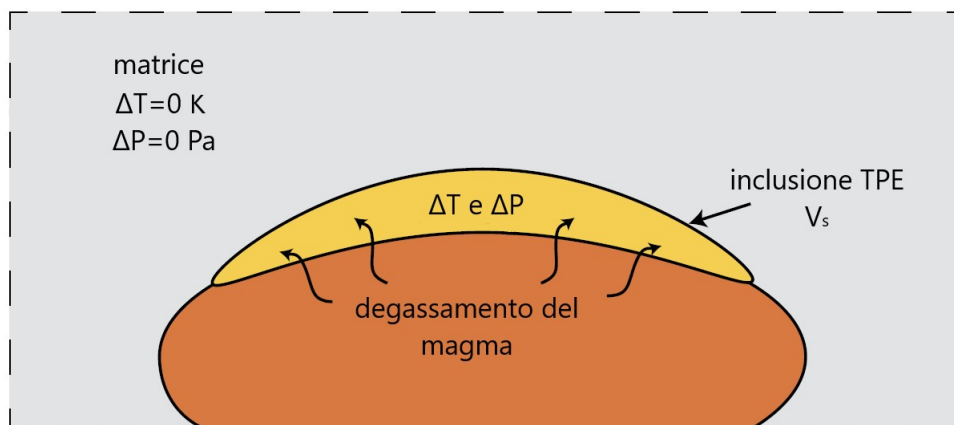


Figura 1.3: Modello di inclusione termo-poro-elastica sottoposta a variazioni di temperatura e pressione (tratta da Belardinelli et al. (2019)).

due modelli rappresentano la sorgente magmatica come una cavità pressurizzata, il terzo invece descrive gli effetti di crack circolari e orizzontali. Tutti e tre hanno in comune il fatto che la sorgente si trova all'interno di un semispazio omogeneo ed elastico e non considerano la presenza di fluido nelle rocce dovuta al degassamento. I modelli puramente magmatici difficilmente spiegano la subsidenza a lungo termine (Troise et al., 2018) inoltre la presenza di grandi porzioni di corpi magmatici a profondità di pochi chilometri è in contrasto con evidenze sperimentali dei Campi Flegrei come ad esempio le perforazioni del suolo (Judenherc and Zollo, 2004) che escludono la presenza di magma a basse profondità.

A differenza di detti modelli con cavità pressurizzate, la sorgente TPE prevede elevati valori di sforzo deviatorico all'interno della sorgente stessa, compatibili con la sismicità osservata.

Fino ad ora, sono stati introdotti due differenti modelli di inclusione TPE: il primo descritto da Belardinelli et al. (2019) considera una sorgente TPE a forma di guscio sferico, in cui al centro si ritrova la camera magmatica e al di fuori la matrice, rappresentata da un mezzo poro-elastico infinito. Il secondo, più recente (Mantiloni et al., 2020), descrive invece una sorgente TPE a forma di disco compresa in un semi-spazio poro-elastico.

Il modello a guscio sferico è applicabile solo a sorgenti TPE molto profonde, dato che al momento non tiene conto della superficie libera della Terra. Questo tipo di sorgente permette di determinare l'ordine di grandezza del campo di sforzo all'interno della inclusione, mettendo in luce il fatto che dentro la TPE vi sia un'importante concentrazione di sforzo deviatorico generata dalle variazioni di pressione di poro e temperatura.

Il secondo modello a forma di disco in un semispazio si può invece applicare per riprodurre gli spostamenti osservati alla superficie e gli sforzi interni alla sorgente anche quando quest'ultima è superficiale. Questo tipo di modello descrive quindi una regione esterna alla camera magmatica, supponendo che la regione sottoposta a variazione di temperatura e pressione di poro abbia la forma di un disco schiacciato. L'implementazione del modello richiede che il rapporto tra spessore d e raggio a sia piccolo. Anche il modello di TPE a disco ritrova tra i suoi risultati un'importante concentrazione di sforzo

deviatorico nell'inclusione. Entrambi i modelli a sorgente TPE implicano l'esistenza di un ambiente compressivo all'interno della sorgente stessa, una novità rispetto ai modelli precedenti.

1.3.1 Modello di sorgente TPE per il caso dei Campi Flegrei

Molti studi riguardanti la regione dei Campi Flegrei, caratterizzata da intensa attività vulcanica e idrotermale, affermano che le fasi di unrest che hanno caratterizzato la caldera sono strettamente connesse all'essoluzione di fluidi quali H₂O e CO₂. Analizzando i maggiori episodi di bradisismo verificatosi negli ultimi cinquanta anni, gli studi hanno messo in luce che:

- i fenomeni degli anni 1969 – 1972 e 1982 – 84, durante i quali si è riscontrato un uplift di ~ 1.8 m in ciascun lasso temporale, sono stati interpretati come effetto di un eccesso di pressione nella camera magmatica unito alla migrazione di fluido caldo e pressurizzato al di fuori di questa (Bonafede, 1990);
- il periodo successivo è stato caratterizzato complessivamente da una fase di subsidenza, alternata da brevi periodi di unrest. Questi eventi sono stati generalmente associati ad episodi di migrazioni di fluido (D'Auria et al., 2014);
- tra il 2005 e il 2014 in cui si è verificata una sollevamento pari a ~ 20 cm (Belardinelli et al., 2019, fig. 1), il fenomeno di uplift è stato collegato ad un aumento di calore dovuto all'arricchimento dei fluidi idrotermali in componenti magmatiche (Chiodini et al., 2015);
- nel lavoro di Lima et al. (2009) si sostiene che i brevi episodi di uplift verificatisi negli ultimi cinquanta anni possono essere spiegati in termini di espulsioni episodiche di fluidi acquosi provenienti da un serbatoio pressurizzato più profondo e diretti ad un serbatoio più superficiale.

Le evidenze sperimentali sottolineano quindi un nesso tra fenomeni di bradisismo nei Campi Flegrei e variazioni nell'attività idrotermale. Quindi per poter modellare la fenomenologia associata al sistema magmatico flegreo, non è possibile trascurare la presenza di fluido nel mezzo circostante la sorgente, il quale gioca un ruolo fondamentale nell'origine dei fenomeni di uplift. Perciò il modello di inclusione termo-poro-elastica descrive questo tipo di manifestazioni pur non escludendo un possibile contributo da parte di un intrusione magmatica; in particolare per spiegare la deformazione osservata nell'episodio 82-84, risulta più completo di modelli basati su cavità pressurizzate di tipo Mogi (1958), Fialko et al. (2001) e Yang et al. (1988).

Studi recenti riguardanti l'episodio di unrest del 1982 – 84 concordano sul fatto che la sorgente che ha causato l'uplift si trovi tra i 2 ed i 5 km di profondità (Trasatti et al., 2011). Inoltre, gli studi presentati da Calò and Tramelli (2018) suggeriscono l'esistenza di uno strato di rocce tra i 2 ed i 3 km di profondità, che separa il corpo magmatico

dall'acquifero più superficiale. Lo strato di rocce porose di spessore stimato 500 m e estensione laterale 3.5 km (Calò and Tramelli, 2018) è quindi sottoposto a variazioni di temperatura e pressione di poro dovuti all'infiltrazione di sostanze fluide rilasciate dal serbatoio di magma stesso (fig. 1.4).

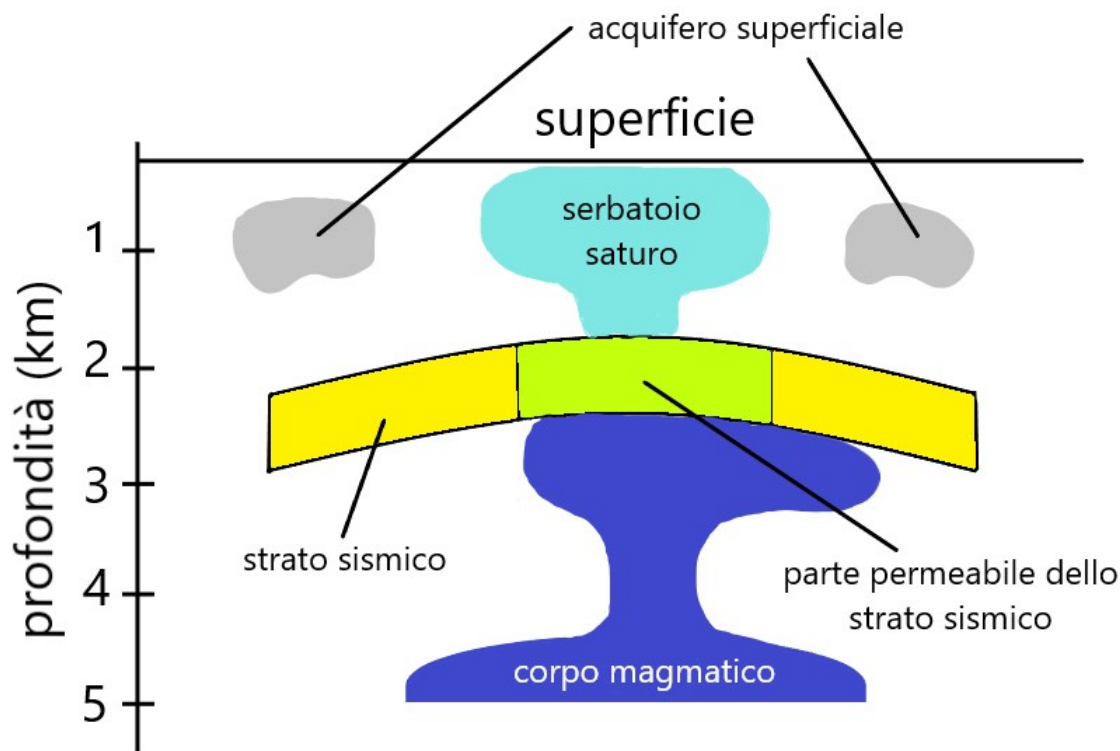


Figura 1.4: Rappresentazione del sistema idrotermale sotto la città di Pozzuoli. Il serbatoio magmatico (blu) attraverso il fenomeno di degassamento oppure di cristallizzazione rilascia fluidi caldi e pressurizzati che attraversano lo strato di rocce nella sua parte permeabile (verde). I fluidi possono quindi raggiungere la superficie attraverso l'acquifero oppure entrare nel serbatoio (ripresa da Calò and Tramelli (2018)).

Un modello a cilindro TPE di spessore 500 m e raggio ~ 2 km si presterebbe quindi a rappresentare lo strato di roccia permeabile evidenziato da Calò and Tramelli (2018).

1.4 Inclusione TPE di forma cilindrica con spessore finito

Il modello della sorgente TPE a forma di disco (Mantiloni et al., 2020), pur rappresentando un importante contributo all'interpretazione della sismicità e lo spostamento superficiale che hanno accompagnato la crisi 82-84 a Campi Flegrei, vincola a utilizzare per l'inclusione un rapporto spessore-raggio d/a piccolo.

Nell'elaborato si propone quindi un nuovo modello di inclusione TPE: una sorgente termo-poro-elastica di forma cilindrica e spessore finito d immersa in un semispazio. Per

ricreare questo tipo di sorgente spessa, si sovrappongono un numero N di dischi sottili, che chiameremo *elementi*, il cui effetto complessivo sarà quello di una sorgente di spessore finito.

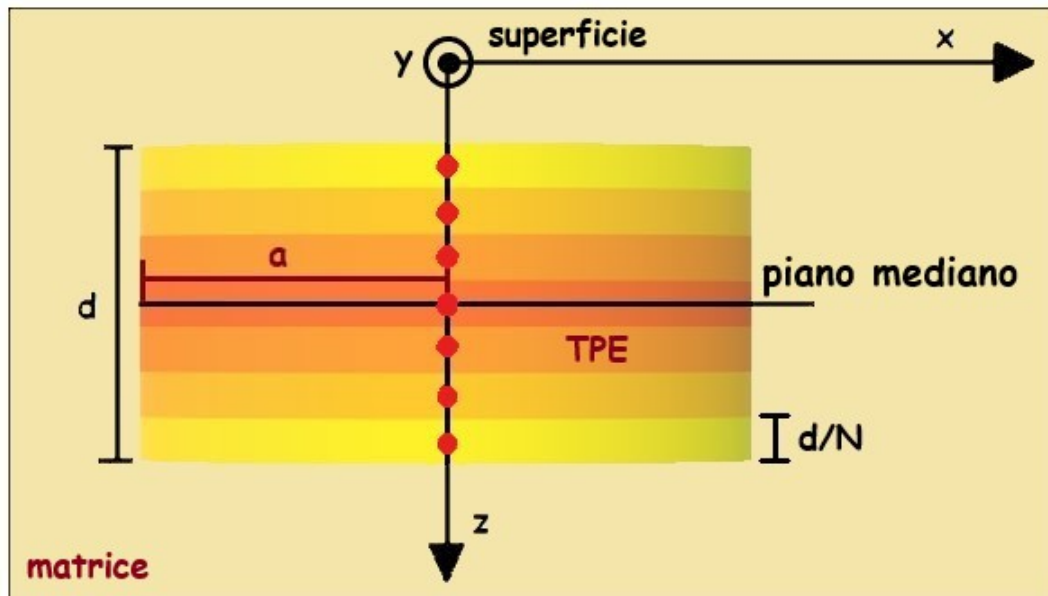


Figura 1.5: Modello di sorgente TPE cilindrica di spessore finito d e raggio a inserita in un semispazio. La TPE, formata tramite la sovrapposizione di un numero N di dischi di spessore d/N , forma una sorgente di spessore d .

La discussione affrontata nell'elaborato è volta a definire quale sia lo spessore d/a limite per il modello a disco, oltre il quale non è più corretto utilizzare il modello stesso. Nello stesso tempo il modello presentato consentirà di stimare correttamente come dipendono spostamento e sforzo dallo spessore d della sorgente quando questo varia fino a diventare comparabile con la dimensione laterale dell'inclusione.

Per rappresentare campi di spostamento e di sforzo dei singoli elementi si seguirà il modello di Mantiloni et al. (2020), il quale verrà descritto nel prossimo capitolo; per rappresentare i campi totali verranno sommati i singoli effetti mantenendo le stesse relazioni costitutive descritte nei modelli TPE.

Capitolo 2

Modello di inclusione termo-poro-elastica a forma di disco in un semispazio

Con questo elaborato si presuppone di descrivere i campi di stress e spostamento dovuti ad un inclusione cilindrica termo-poro-elastica di spessore finito inserita in un semispazio poro-elastico. Il modello a cui faremo riferimento è quello descritto da Mantiloni (2019) e Mantiloni et al. (2020), il quale rappresenta una sorgente a forma di disco termo-poro-elastica di spessore infinitesimo inserita in un semispazio. In questo capitolo parleremo del modello appena citato e valuteremo gli effetti che l'ispessimento della sorgente provoca sui campi di spostamento e spessore.

2.1 Introduzione al modello di sorgente TPE

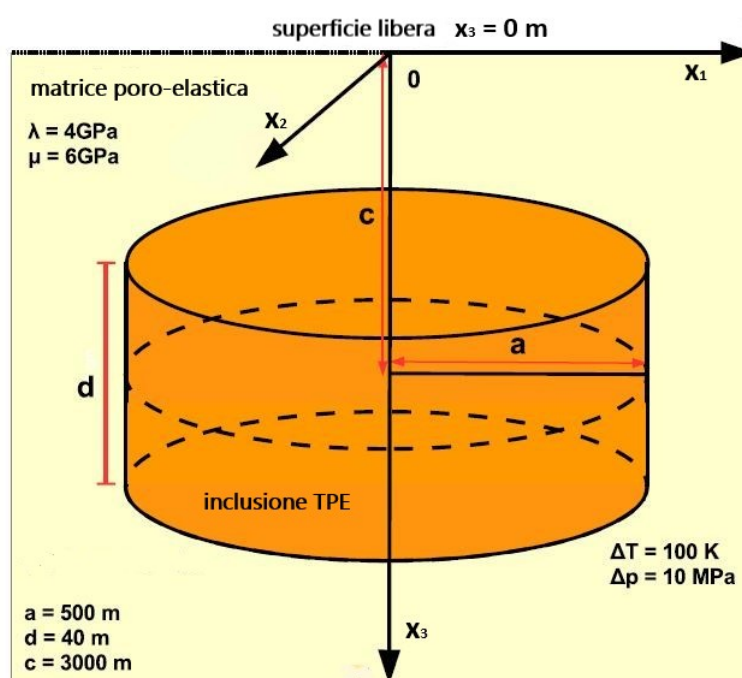


Figura 2.1: Modello di inclusione TPE inserita in una matrice poro-elastica. Nel grafico sono presenti i valori dei parametri usati per le simulazioni (tratta da Mantiloni, 2019).

Il modello descritto da Mantiloni et al. (2020) e presentato in figura 2.1 rappresenta un'inclusione termo-poro-elastica (colorata in arancio) a forma di disco con raggio a e spessore $d \ll a$.

L'inclusione, che prende il nome di *regione sorgente termo-poro-elastica (TPE)*, è una porzione di materiale sottoposta ad una improvvisa variazione di temperatura ΔT e pressione di poro Δp . Il semispazio in cui si trova il disco prende il nome di *matrice* ed è anch'esso un mezzo termo-poro-elastico assunto in condizione drenata e isoterma. Nella matrice avremo quindi che $\Delta T = 0$ e $\Delta p = 0$. Il punto c rappresenta il centro del disco: il sistema di assi cartesiani (x_1, x_2, x_3) è stato posizionato in modo tale che la sorgente TPE risulti simmetrica rispetto all'asse x_3 , su cui giace c ed allo stesso tempo le sue basi siano parallele al piano $x_3 = 0$ m, cioè alla superficie. Dato che il modello descritto ha l'obiettivo di studiare gli effetti della sorgente all'interno del semispazio $x_3 \geq 0$ m e non in uno spazio infinito, il modello deve necessariamente soddisfare la condizione al contorno di superficie libera da sforzi in corrispondenza di $x_3 = 0$, cioè $\tau_{33}(x_1, x_2, x_3^-) = \tau_{33}(x_1, x_2, x_3^+) = 0$.

2.1.1 Relazioni costitutive per mezzi termo-poro-elastici

Per determinare i campi di spostamento e di sforzo generati dalla sorgente prima descritta è fondamentale conoscere le caratteristiche che contraddistinguono il mezzo preso in esame.

Un mezzo poro-elastico è composto da una matrice (o *frame*) che si comporta elasticamente nella quale si riconoscono delle cavità dette *pori* riempite di liquido. Introduciamo le principali caratteristiche di un mezzo poroso: per *porosità* si intende il volume di spazio vuoto per unità di volume del mezzo; si distingue tra *porosità totale* e *porosità effettiva*: la prima riguarda tutti i tipi di poro, la seconda invece fa riferimento solo ai pori in grado di trasferire fluido tra di loro. Si definisce inoltre la *quantità di fluido* v_i come il volume dell' i -esimo tipo di fluido contenuto all'interno della matrice, per unità di volume di materiale. Nel caso in cui il mezzo sia saturo da un solo tipo di fluido allora questa coincide con la porosità. La *pressione di poro* invece è la pressione del fluido che riempie i pori. Infine la *pressione di confinamento* P_C , la quale coincide con la parte isotropa del tensore di stress, vale $P_C = \frac{1}{3}\tau_{kk}$.

Per raggiungere il nostro scopo è importante conoscere la relazione costitutiva di un mezzo poro-elastico, descritta nei lavori di Biot (1980) e Rice and Cleary (1999). Si parta da un caso più semplice: si consideri un elemento di forma cubica che presenta delle cavità di dimensione molto inferiore rispetto a quelle del cubo stesso, in modo tale da poter considerare omogeneo il mezzo in esame. Supponendo che l'elemento sia sottoposto a sforzi i quali soddisfano l'equazione di equilibrio e che all'interno dei pori vi sia del fluido, possiamo immaginare lo stress come composto da due parti differenti: una causata dalla pressione del fluido, l'altra data dallo sforzo medio agente sulla matrice. Se il mezzo è sottoposto alla sola pressione esterna e cioè non vi è alcun incremento nella pressione di poro $\Delta p = 0$, e il fluido è libero di defluire fino a che la pressione di poro non sarà

uguale alla pressione atmosferica. La relazione costitutiva del corpo in esame, che lega il tensore di deformazione e_{ij} a quello dello sforzo τ_{ij} , corrisponde a quella di un corpo elastico, dove ν è il modulo di Poisson e μ il modulo di rigidità:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu} \tau_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.1)$$

In questo caso la quantità di fluido varia in modo tale da mantenere la pressione di poro costante, quindi $\Delta v = a_{ij} \tau_{ij}$, dove a_{ij} è un tensore di isotropo di rango 2 $a_{ij} = a \delta_{ij}$. Possiamo quindi definire la quantità $H_1 = \frac{1}{3a}$ così che si possa riscrivere Δv come:

$$\Delta v = \frac{1}{3H_1} \tau_{kk} = -\frac{1}{H_1} P_C \quad \text{con} \quad \Delta p = 0 \quad (2.2)$$

($\frac{1}{H_1}$ = volume di fluido che defluisce da un'unità di volume di materiale per un'unità di pressione di confinamento applicata alla superficie del mezzo mentre la pressione di poro rimane costante) In questo caso e_{ij} e quindi τ_{ij} si riferiscono a valori aggiuntivi rispetto ad uno stato di riferimento.

Supponiamo ora di avere un volume poro-elastico a cui non è applicato alcuno sforzo aggiuntivo alla superficie, perciò lo sforzo agente totale risulta costante. Supponiamo che sia avvolto da una membrana impermeabile e flessibile completamente chiusa, se non per un tubo dal quale fluisce liquido verso l'interno. Finché il materiale è in grado di espandersi può causare una variazione di volume Δv e pressione di poro Δp . In questo caso ci si aspetta che la deformazione sia:

$$e_{ij} = b_{ij} \Delta p = \frac{1}{3H_2} \Delta p \delta_{ij} \quad (2.3)$$

dove b_{ij} è un tensore isotropo di rango 2. H_2 , detta *costante di Biot*, ha le stesse unità di misura dello stress, invece $\frac{1}{H_2}$ rappresenta l'incremento di volume per unità di volume per un incremento unitario di pressione di poro, mantenendo gli sforzi costanti. La relazione lineare tra Δv e Δp è:

$$\Delta v = \frac{1}{R} \Delta p \quad (2.4)$$

in cui $\frac{1}{R}$ rappresenta l'incremento di volume di fluido dentro i pori per unità di volume di materiale per unità di incremento di Δp .

Consideriamo ora una deformazione generale per un materiale poro-elastico: in questo caso sia la pressione che lo stress subiscono una variazione. Si può quindi dividere il processo in due trasformazioni distinte: la prima prevede l'applicazione di stress a pressione costante, la seconda prevede una variazione di pressione a stress costante. Unendo quindi le relazioni 2.1 e 2.3 ottenute in precedenza per la deformazione, si ottiene:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \tau_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3H_2} \Delta p \delta_{ij} \quad (2.5)$$

e per la quantità di fluido 2.3 e 2.4:

$$v = \frac{1}{3H_1} \tau_{kk} + \frac{1}{R} p \quad (2.6)$$

in cui si può dimostrare che $H_1 = H_2 = H$ (per la dimostrazione si rimanda a Biot, 1980).

L'equazione 2.5 può essere generalizzata nel caso di un mezzo termo-poro-elastico, sottoposto ad una variazione di temperatura ΔT e una variazione di pressione di poro Δp , dove α è il coefficiente di espansione termica:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \tau_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3H} \Delta p \delta_{ij} + \frac{1}{3} \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (2.7)$$

la cui relazione inversa è:

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} - K \left(\frac{1}{H} \Delta p \delta_{ij} + \alpha \Delta T \delta_{ij} \right) \quad (2.8)$$

Entrambe sono descritte in McTigue (1986).

2.1.2 Inclusione termo-poro-elastica in un semispazio poro-elastico

Il caso preso in esame in questo elaborato riguarda una sorgente termo-poro-elastica inserita all'interno di un semispazio poro-elastico. Per descrivere una regione TPE limitata e sottoposta ad una variazione di temperatura e pressione di poro all'interno di una matrice, si usa generalizzare il metodo ideato da Eshelby (1957) e descritto poi da Aki and Richards (1980) per un mezzo puramente elastico. Il procedimento è il seguente: prima si rimuove la porzione di volume V_s corrispondente all'inclusione dal materiale circostante, mantenendo sia la matrice che l'inclusione soggette alla stessa trazione iniziale. Per il teorema di unicità di Kirchoff, la forma iniziale e il volume di ciascun elemento sono preservati. Poi si aumenta temperatura e pressione all'interno dell'inclusione lasciando sempre invariata la trazione. Allora la variazione di deformazione in un mezzo termo-poro-elastico che subisce i cambiamenti appena citati, si ricava dalla relazione costitutiva 2.7:

$$\Delta \epsilon_{ij} = \epsilon_0 \delta_{ij} \quad \text{con} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{3H} \Delta p \delta_{ij} + \frac{1}{3} \alpha \Delta T \quad (2.9)$$

ovviamente la sorgente subirà una variazione di volume. Per riportare l'inclusione al volume iniziale è necessario applicare delle trazioni aggiuntive sulla sua superficie, $T_k = -3K e_0 n_k$, dove $K = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$ rappresenta l'incompressibilità. Infine si inserisce di nuovo l'inclusione all'interno della matrice, la quale supplirà alla discontinuità di trazione $[T_k]^+ = 3K e_0 n_k$ presente sulla superficie dell'inclusione, generando il seguente campo di spostamento:

$$u_i(\mathbf{x}) = \oint_S G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') T_k, dS' = 3K e_0 \oint_S G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') n_k(\mathbf{x}'), dS' \quad (2.10)$$

e tramite il teorema di Gauss si ottiene:

$$u_i(\mathbf{x}) = 3K e_0 \int_{V_s} \frac{\partial G_{ik}}{\partial x'_k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), dv(\mathbf{x}') \quad (2.11)$$

G_{ik} rappresenta il tensore di Green per un semispazio con i parametri elastici in condizione isoterme e drenate, il quale ci permette di valutare lo spostamento nella direzione i -esima in \mathbf{x} (punto ricevitore) generato da una forza agente nella k -esima direzione localizzata in

\mathbf{x}' (punto sorgente) di intensità unitaria. Le componenti del tensore di Green sono state calcolate da Mindlin (1936).

Lo sforzo all'interno e all'esterno della sorgente causato dalla presenza della sorgente TPE si ottiene tramite le equazioni 2.9 e 2.8 (Belardinelli et al., 2019):

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \tau_{ij}^{in} = 2\mu e_{ij} + 2\mu \frac{1}{1-2\nu} [\nu e_{kk} - (1 + \nu)e_0] \delta_{ij} & \text{se } \mathbf{x} \in V_s \\ \tau_{ij}^{out} = 2\mu e_{ij} + 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} e_{kk} \delta_{ij} & \text{se } \mathbf{x} \notin V_s \end{cases} \quad (2.12)$$

e può essere espresso come segue (Mantiloni et al., 2020):

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{in} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 3K e_0 \delta_{ij} & \text{se } \mathbf{x} \in V_s \\ \tau_{ij}^{out} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} & \text{se } \mathbf{x} \notin V_s \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove l'apice *in* indica lo sforzo in un punto interno all'inclusione e *out* indica lo sforzo in un punto esterno all'inclusione.

La deformazione per definizione vale:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.14)$$

e può essere calcolata tramite lo spostamento 2.11.

2.2 Soluzione del modello di inclusione TPE a forma di disco

Tramite le premesse fatte nel paragrafo precedente è possibile calcolare le componenti dello spostamento valutando le derivate parziali del tensore di Green (Mantiloni et al., 2020):

$$\begin{aligned} u_1 &= 3KC e_0 \int_{-a}^a dx'_1 \int_{-f(x'_1)}^{f(x'_1)} dx'_2 \int_{c-\frac{d}{2}}^{c+\frac{d}{2}} dx'_3 (x_1 - x'_1) \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)}{R_2^3} - \frac{6x_3(x_3 + x'_3)}{R_2^5} \right] \\ u_2 &= 3KC e_0 \int_{-a}^a dx'_1 \int_{-f(x'_1)}^{f(x'_1)} dx'_2 \int_{c-\frac{d}{2}}^{c+\frac{d}{2}} dx'_3 (x_2 - x'_2) \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)}{R_2^3} - \frac{6x_3(x_3 + x'_3)}{R_2^5} \right] \\ u_3 &= 3KC e_0 \int_{-a}^a dx'_1 \int_{-f(x'_1)}^{f(x'_1)} dx'_2 \int_{c-\frac{d}{2}}^{c+\frac{d}{2}} dx'_3 \left[\frac{(x_3 - x'_3)}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(x_3 - x'_3)}{R_2^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6x_3(x_3 + x'_3)}{R_2^5} + \frac{2x_3}{R_2^3} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

in cui:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2} \\ R_2 &= \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + x'_3)^2} \\ f(p) &= \sqrt{a^2 - p^2}, \quad C = \frac{1 - 2\mu}{8\pi\mu(1 - \nu)} \end{aligned}$$

Gli intervalli di integrazione dipendono dalla geometria dell'inclusione TPE. Gli spostamenti esplicitati alla 2.15 possono essere visti come composti da due parti: una prima parte diverge all'interno del volume della sorgente e dipende da $\frac{1}{R_1^3}$ ed una seconda parte, dipendente da $\frac{1}{R_2}$ che non diverge all'interno della sorgente. I termini dipendenti da $\frac{1}{R_1^3}$ li chiameremo *termini singolari*, quelli dipendenti da $\frac{1}{R_2}$ *termini non singolari*. Il campo di spostamento può essere quindi espresso come segue:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^s + \mathbf{u}^{ns} \quad (2.16)$$

Per quanto riguarda la parte singolare, essa può essere riscritta tramite il gradiente di un potenziale scalare Φ :

$$\mathbf{u}^s = -\frac{e_1}{4\pi} \nabla \Phi \quad \text{con} \quad \Phi(\mathbf{x}) = \int_{V_s} \frac{1}{R_1} dv(\mathbf{x}') \quad (2.17)$$

con

$$e_1 = e_0 \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \quad (2.18)$$

che rappresenta la dilatazione interna alla sorgente. Il potenziale presentato nell'equazione 2.17 è equivalente a quello elettrostatico di Coulomb per un volume cilindrico V_s e densità di carica $4\pi\epsilon_0$ (si veda Jackson, 1999). Perciò può essere scritto tramite l'espansione in serie dei polinomi di Legendre se si suppone che lo spessore del cilindro sia molto più piccolo del raggio e cioè $d \ll a$. Per il potenziale quindi si ottiene la seguente espressione in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) (fig. 2.2a):

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= 2\pi ad \left[1 - |\cos \theta| \frac{r}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} P_{2m}(\cos \theta) \frac{1}{2m-1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2m} \right] \quad \text{se } r < a \\ \Phi(r, \theta) &= 2\pi ad \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} P_{2m}(\cos \theta) \frac{1}{2m+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2m+1} \quad \text{se } r > a \end{aligned} \quad (2.19)$$

dove $c_{2m} = (-1)^m 4^{-m} (2m)! (m!)^{-2}$.

È importante tenere in considerazione il fatto che le formule appena descritte convergono molto lentamente nel caso in cui $r \approx a$ e il punto $r = a$ rappresenta una singolarità. Calcolando il gradiente di Φ si ottengono le componenti del campo di spostamento in coordinate sferiche:

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = -Aa \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} P_{2m}(\cos \theta) \left[\frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m-1} - \frac{2m}{2m-1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2m-1} \right] \\ u_\theta(r, \theta) = -Aa \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \frac{dP_{2m}}{d\theta}(\cos \theta) \left[\frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m-1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2m-1} \right] \end{cases} \quad (2.20)$$

per $r < a$ e:

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = Aa \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} P_{2m}(\cos \theta) \frac{2m+1}{2m+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2m+2} \\ u_\theta(r, \theta) = -Aa \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \frac{dP_{2m}}{d\theta}(\cos \theta) \frac{1}{2m+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2m+2} \end{cases} \quad (2.21)$$

per $r > a$. A è una costante e vale $e_1 \frac{d}{2a}$.

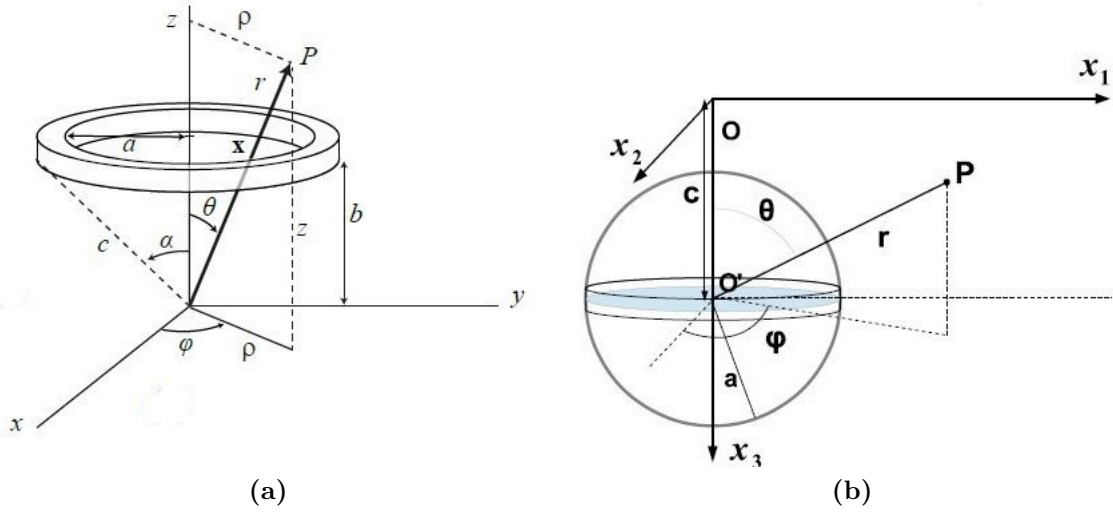


Figura 2.2: (a) Raffigurazione della sorgente a disco nel sistema di coordinate sferiche. Nel caso preso in esame nell'elaborato $b = 0$ (tratta da Lamberti, 2017). (b) Sistema di riferimento cartesiano traslato, con origine posizionato alla superficie e asse x_3 orientato verso il basso. Questo è il sistema di riferimento utilizzato nel modello. (tratta da Mantiloni, 2019).

Applicando la trasformazione che ci permette di passare al sistema di riferimento cartesiano (x, y, z) di figura 2.2a, si ottengono le seguenti formule per lo spostamento singolare:

$$\begin{aligned} u_1^s(x, y, z) &= u_r(r, \theta) \sin \theta \cos \phi + u_\theta(r, \theta) \cos \theta \cos \phi \\ u_3^s(x, y, z) &= u_r(r, \theta) \cos \theta + u_\theta(r, \theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.22)$$

in cui: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \arccos(z/r)$ e $\phi = \arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2})$.

Dato che per la risoluzione del problema usiamo il sistema di riferimento in figura 2.2b, si ha $x = x_1$, $y = x_2$ e $z = c - x_3$.

Per quanto riguarda la componente non singolare, questa si può scrivere come somma di integrali:

$$\begin{aligned} u_1^{ns}(x_1, x_2, x_3) &= 3KCe_0(I_a^{(1)} + I_b^{(1)}) \\ u_3^{ns}(x_1, x_2, x_3) &= 3KCe_0(I_a^{(3)} + I_b^{(3)}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

i quali si risolvono come segue:

$$\begin{aligned} I_a^{(1)} &= (3 - 4\nu) \int_{-a}^a dx'_2 \left[\ln \left(\frac{R|_+^+ + x_3 + c + \frac{d}{2}}{R|_-^+ + x_3 + c - \frac{d}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \ln \left(\frac{R|_+^- + x_3 + c + \frac{d}{2}}{R|_-^- + x_3 + c - \frac{d}{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$I_b^{(1)} = 2x_3 \int_{-a}^a dx'_2 \left[\frac{1}{R|_+^+} - \frac{1}{R|_-^+} - \frac{1}{R|_+^-} + \frac{1}{R|_-^-} \right] \quad (2.25)$$

$$I_a^{(3)} = - (3 - 4\nu) \int_{-a}^a dx'_2 \left[\ln \left(\frac{R|_+^+ - x_1 + \sqrt{a^2 - x'_2{}^2}}{R|_+^- - x_1 - \sqrt{a^2 - x'_2{}^2}} \right) - \ln \left(\frac{R|_-^+ - x_1 + \sqrt{a^2 - x'_2{}^2}}{R|_-^- - x_1 - \sqrt{a^2 - x'_2{}^2}} \right) \right] \quad (2.26)$$

$$I_b^{(3)} = - 2x_3 \int_{-a}^a \left\{ \left(x_3 + c + \frac{d}{2} \right) \left[\frac{x_1 - \sqrt{a^2 - x'_2{}^2}}{R|_+^+ [(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c + \frac{d}{2})^2]} - \frac{x_1 + \sqrt{a^2 - x'_2{}^2}}{R|_+^- [(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c + \frac{d}{2})^2]} \right] - \left(x_3 + c - \frac{d}{2} \right) \left[\frac{x_1 - \sqrt{a^2 - x'_2{}^2}}{R|_-^+ [(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c - \frac{d}{2})^2]} - \frac{x_1 + \sqrt{a^2 - x'_2{}^2}}{R|_-^- [(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c - \frac{d}{2})^2]} \right] \right\} \quad (2.27)$$

in cui:

$$R|_+^+ = \sqrt{(x_2 - x'_2)^2 + \left(x_3 + c + \frac{d}{2} \right)^2 + (x_1 - \sqrt{a^2 - x'_2{}^2})^2}$$

$$R|_-^+ = \sqrt{(x_2 - x'_2)^2 + \left(x_3 + c + \frac{d}{2} \right)^2 + (x_1 - \sqrt{a^2 - x'_2{}^2})^2}$$

$$R|_+^- = \sqrt{(x_2 - x'_2)^2 + \left(x_3 + c - \frac{d}{2} \right)^2 + (x_1 + \sqrt{a^2 - x'_2{}^2})^2}$$

$$R|_-^- = \sqrt{(x_2 - x'_2)^2 + \left(x_3 + c - \frac{d}{2} \right)^2 + (x_1 + \sqrt{a^2 - x'_2{}^2})^2}$$

Dato che rappresenteremo lo spostamento su piani in cui $x_2 = 0$, non mostriamo le formule per la componente u_2 , la quale è nulla per simmetria sui piani verticali passanti per il centro del disco.

Tramite le definizioni di deformazione $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ e tenendo conto della simmetria del sistema, si può calcolare la deformazione generata dal disco. Anch'essa si può dividere nelle due componenti singolare e non singolare:

$$e_{ij} = e_{ij}^s + e_{ij}^{ns} \quad (2.28)$$

Per quanto riguarda le componenti sulla diagonale, la parte singolare nel sistema di riferimento di figura 2.2b corrisponde a:

$$e_{11}^s = e_{rr} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 2e_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + e_{\theta\theta} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + e_{\phi\phi} \sin^2 \phi$$

$$e_{22}^s = e_{rr} \sin^2 \theta \sin^2 \phi + 2e_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi + e_{\theta\theta} + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + e_{\phi\phi} \cos^2 \phi$$

$$e_{33}^s = e_{rr} \cos^2 \theta - 2e_{r\theta} \sin \theta \cos \theta + e_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad (2.29)$$

con:

$$\begin{cases} e_{rr} = A \sum_{m=1}^{\infty} 2m c_{2m} P_{2m}(\cos \theta) \left(\frac{r}{a}\right)^{2m-2} \\ e_{\theta\theta} = A \left[2\delta(\cos \theta) \frac{a}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{2m}}{2m-1} \left(\frac{d^2 P_{2m}}{d\theta^2}(\cos \theta) + 2m P_{2m}(\cos \theta) \right) \left(\frac{r}{a}\right)^{2m-2} \right] \\ e_{\phi\phi} = A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{2m}}{2m-1} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dP_{2m}}{d\theta}(\cos \theta) + 2m P_{2m}(\cos \theta) \right) \left(\frac{r}{a}\right)^{2m-2} \\ e_{r\theta} = A \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} \frac{dP_{2m}}{d\theta}(\cos \theta) \left(\frac{r}{a}\right)^{2m-2} \end{cases} \quad (2.30)$$

per $r < a$ e:

$$\begin{cases} e_{rr} = -A \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) c_{2m} P_{2m}(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2m+3} \\ e_{\theta\theta} = \frac{A}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{2m}}{m+1} \left(\frac{d^2 P_{2m}}{d\theta^2}(\cos \theta) + (2m+1) P_{2m}(\cos \theta) \right) \left(\frac{a}{r}\right)^{2m} \right] \\ e_{\phi\phi} = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{2m}}{2m+2} \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dP_{2m}}{d\theta}(\cos \theta) + (2m+1) P_{2m}(\cos \theta) \right) \left(\frac{a}{r}\right)^{2m+3} \\ e_{r\theta} = A \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} \frac{dP_{2m}}{d\theta}(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2m+3} \end{cases} \quad (2.31)$$

per $r > a$.

La parte non singolare delle componenti sulla diagonale invece corrisponde a :

$$\begin{aligned} e_{11}^{ns} &= -3KCe_0 \frac{\partial}{\partial x'_1} (I_a^{(1)} + I_b^{(1)}) \\ e_{22}^{ns} &= 3KCe_0 \frac{\partial}{\partial x'_2} (I_a^{(2)} + I_b^{(2)}) \\ e_{33}^{ns} &= -3KCe_0 \frac{\partial}{\partial x'_3} (I_a^{(3)} + I_b^{(3)}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

le cui derivate degli integrali si risolvono come segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} I_a^{(1)} &= (3-4\nu) \int_{-a}^a dx'_2 \frac{x_1 - f(x'_2)}{(x_2 - x'_2)^2 + (x_1 - f(x'_2))^2} \left(\frac{x_3 + c + \frac{d}{2}}{R|_+^+} - \frac{x_3 + c - \frac{d}{2}}{R|_-^+} \right) + \\ &+ (3-4\nu) \int_{-a}^a dx'_2 \frac{x_1 + f(x'_2)}{(x_2 - x'_2)^2 + (x_1 + f(x'_2))^2} \left(\frac{x_3 + c + \frac{d}{2}}{R|_+^-} - \frac{x_3 + c - \frac{d}{2}}{R|_-^-} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} I_b^{(1)} = -2x_3 \int_{-a}^a dx'_2 \left(\frac{x_1 - f(x'_2)}{R|_+^{+3}} - \frac{x_1 + f(x'_2)}{R|_-^{+3}} - \frac{x_1 - f(x'_2)}{R|_+^{-3}} + \frac{x_1 + f(x'_2)}{R|_-^{-3}} \right) \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_2} (I_a^{(2)} + I_b^{(2)}) &= 2(3-4\nu) \int_{-a}^a dx'_1 \frac{f(x'_1)}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - f(x'_1))^2} \left(\frac{x_3 + c + \frac{d}{2}}{R|_+^+} - \frac{x_3 + c - \frac{d}{2}}{R|_-^+} \right) + \\ &+ 4x_3 \int_{-a}^a dx'_1 f(x'_1) \left(\frac{1}{R|_+^{+3}} - \frac{1}{R|_-^{+3}} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} I_a^{(3)} = & -(3 - 4\nu) \int_{-a}^a dx'_2 \left\{ -\left(x_3 + c + \frac{d}{2}\right) \left[-\frac{x_1 - f(x'_2)}{[(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c + \frac{d}{2})^2] R|_+^+} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{x_1 + f(x'_2)}{[(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c + \frac{d}{2})^2] R|_+^-} \right] - \left(x_3 + c - \frac{d}{2}\right) \right. \\ & \left. \left[\frac{x_1 - f(x'_2)}{[(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c - \frac{d}{2})^2] R|_-^+} - \frac{x_1 + f(x'_2)}{[(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c - \frac{d}{2})^2] R|_-^-} \right] \right\} \quad (2.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} I_b^{(3)} = & (4x_3 + 2c + d) \int_{-a}^a dx'_2 \frac{\frac{x_1 - f(x'_2)}{R|_+^+} - \frac{x_1 + f(x'_2)}{R|_+^-}}{(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c + \frac{d}{2})^2} - \\ & - 4x_3 \left(x_3 + c + \frac{d}{2}\right)^2 \int_{-a}^a dx'_2 \frac{\frac{x_1 - f(x'_2)}{R|_+^+} - \frac{x_1 + f(x'_2)}{R|_+^-}}{[(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c + \frac{d}{2})^2]^2} - \\ & - 2x_3 \left(x_3 + c + \frac{d}{2}\right)^2 \int_{-a}^a dx'_2 \frac{\frac{x_1 - f(x'_2)}{R|_+^{+3}} - \frac{x_1 + f(x'_2)}{R|_+^{-3}}}{(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c + \frac{d}{2})^2} - \\ & - (4x_3 + 2c - d) \int_{-a}^a dx'_2 \frac{\frac{x_1 - f(x'_2)}{R|_-^+} - \frac{x_1 + f(x'_2)}{R|_-^-}}{(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c - \frac{d}{2})^2} + \\ & + 4x_3 \left(x_3 + c - \frac{d}{2}\right)^2 \int_{-a}^a dx'_2 \frac{\frac{x_1 - f(x'_2)}{R|_-^+} - \frac{x_1 + f(x'_2)}{R|_-^-}}{[(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c - \frac{d}{2})^2]^2} + \\ & + 2x_3 \left(x_3 + c - \frac{d}{2}\right)^2 \int_{-a}^a dx'_2 \frac{\frac{x_1 - f(x'_2)}{R|_-^{+3}} - \frac{x_1 + f(x'_2)}{R|_-^{-3}}}{(x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + c - \frac{d}{2})^2} \quad (2.37) \end{aligned}$$

Tramite l'equazione costitutiva 2.13, si ricavano le soluzioni per lo sforzo:

$$\text{Sforzo totale: } \begin{cases} \tau_{ij}^{in} = \tau_{ij}^{s,in} + \tau_{ij}^{ns} \\ \tau_{ij}^{out} = \tau_{ij}^{s,out} + \tau_{ij}^{ns} \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\text{Sforzo singolare: } \begin{cases} \tau_{11}^{s,in} = 2\mu(-e_1 + e_{11}^s) \\ \tau_{11}^{s,out} = 2\mu e_{11}^s \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} \tau_{22}^{s,in} = 2\mu(-e_1 + e_{22}^s) \\ \tau_{22}^{s,out} = 2\mu e_{22}^s \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\begin{cases} \tau_{33}^{s,in} = 2\mu(-e_1 + e_{33}^s) \\ \tau_{33}^{s,out} = 2\mu e_{33}^s \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\text{Sforzo non singolare: } \begin{cases} \tau_{11}^{ns} = \lambda e_{kk} + 2\mu e_{11}^{ns} \\ \tau_{22}^{ns} = \lambda e_{kk} + 2\mu e_{22}^{ns} \\ \tau_{33}^{ns} = \lambda e_{kk} + 2\mu e_{33}^{ns} \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\text{Sforzo deviatorico: } \begin{cases} \tau_{11}^{d,in} = 2\mu \left(e_{11}^s - \frac{1}{3}e_1 + e_{11}^{ns} - \frac{1}{3}e_{kk}^{ns} \right) \\ \tau_{11}^{d,out} = 2\mu \left(e_{11}^s + e_{11}^{ns} - \frac{1}{3}e_{kk}^{ns} \right) \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\begin{cases} \tau_{22}^{d,in} = 2\mu \left(e_{22}^s - \frac{1}{3}e_1 + e_{22}^{ns} - \frac{1}{3}e_{kk}^{ns} \right) \\ \tau_{22}^{d,out} = 2\mu \left(e_{22}^s + e_{22}^{ns} - \frac{1}{3}e_{kk}^{ns} \right) \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} \tau_{33}^{d,in} = 2\mu \left(e_{33}^s - \frac{1}{3}e_1 + e_{33}^{ns} - \frac{1}{3}e_{kk}^{ns} \right) \\ \tau_{33}^{d,out} = 2\mu \left(e_{33}^s + e_{33}^{ns} - \frac{1}{3}e_{kk}^{ns} \right) \end{cases} \quad (2.45)$$

come già indicato prima, *in* e *out* indicano lo sforzo dentro e fuori dal disco.

Nell'elaborato ci concentreremo sullo studio delle componenti diagonali di deformazione e sforzo, in particolare sul piano mediano ed alla superficie. La scelta è dovuta al fatto che due di queste risultano nulle data la simmetria del problema (τ_{12} e τ_{23}), la terza invece (τ_{13}) è nulla solo all'interno della TPE, ma non nulla al di fuori (Mantiloni et al., 2020).

Tramite le soluzioni appena ottenute, mostriamo graficamente i campi di spostamento e di sforzo generati da un disco di spessore $d = 40$ m e raggio $a = 500$ m, con rapporto $d/a = 0.08$. È importante che questo rapporto rimanga piccolo, affinché venga rispettata la condizione $d \ll a$ imposta nella risoluzione della componente singolare dello spostamento.

Prima di mostrare i risultati però, è bene fissare i parametri e le costanti che utilizzeremo per implementare il modello: saranno le stesse utilizzate in Mantiloni et al. (2020). La sorgente TPE che andremo a considerare ha profondità $c = 3000$ m e la variazione di temperatura a cui è sottoposta è pari a $\Delta T = 100$ K, invece quella di pressione di poro vale $\Delta p = 10$ MPa. Il coefficiente di espansione termica è $\alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; il valore H equivale a 10 GPa. Infine i parametri elastici hanno i seguenti valori $\lambda = 4$ GPa, $\mu = 6$ GPa e $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = 0.2$. Segue quindi che $e_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu}e_0 = 1.5 e_0$.

I valori scelti per l'implementazione del modello rimarranno invariati per tutto l'elaborato se non esplicitamente indicato.

Per primi mostriamo i campi di spostamento e di sforzo generati da un disco di spessore $d = 40$ m sul piano mediano ($x_3 = 3000$ m) in funzione del rapporto x_1/a :

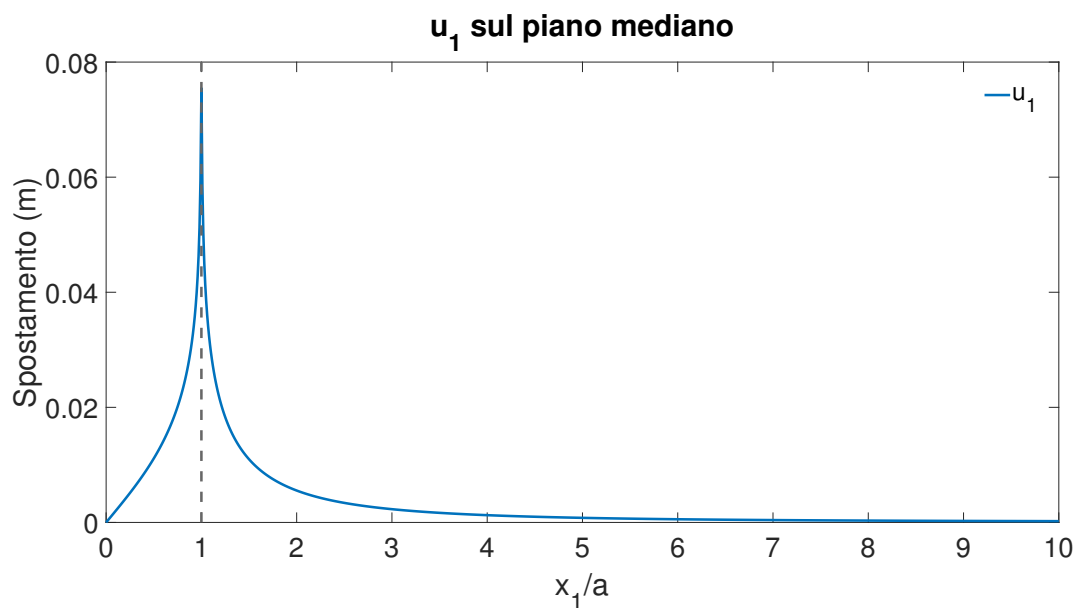


Figura 2.3: Componente orizzontale dello spostamento generata sul piano mediano da una sorgente TPE con centro $c = 3000$ m e spessore $d = 40$ m. La linea verticale in $x_1/a = 1$ rappresenta il bordo della sorgente.

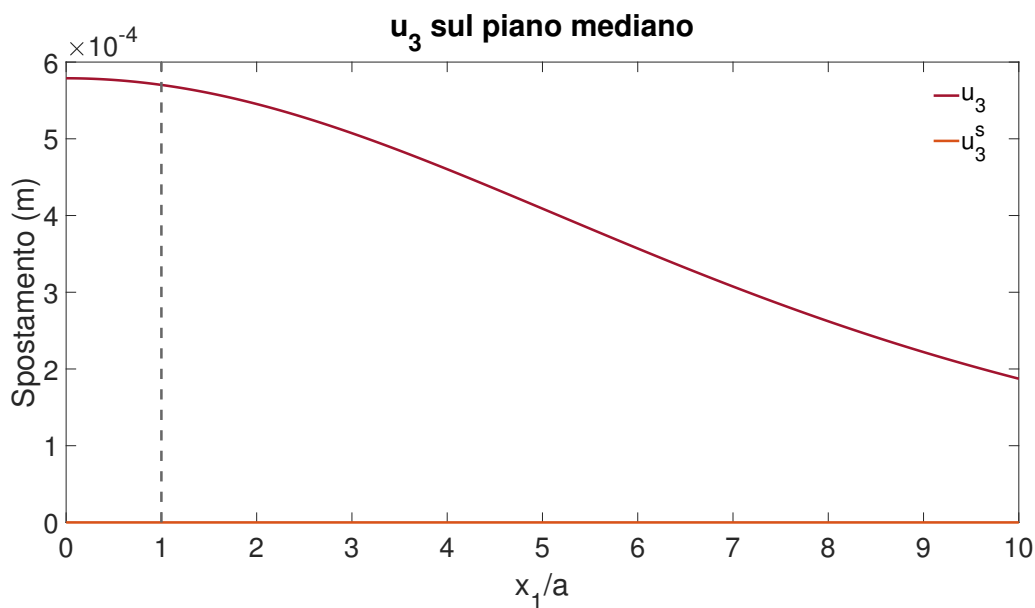


Figura 2.4: Componente verticale dello spostamento $-u_3$ generata sul piano mediano da una sorgente TPE con centro $c = 3000$ m e spessore $d = 40$ m. La linea verticale in $x_1/a = 1$ rappresenta il bordo della sorgente.

In tutta la tesi, per comodità di lettura, scegliamo di rappresentare l'opposto dello spostamento verticale $-u_3$. In questo caso i risultati sono rappresentati lungo l'asse x_1 tra 0 m e 5000 m.

Si decide di raffigurare lo spostamento verticale assieme alla sua parte singolare per mettere in luce il fatto che se non fosse per la parte non singolare dell'uplift, la componente u_3 sarebbe completamente nulla, tenendo conto della simmetria del problema.

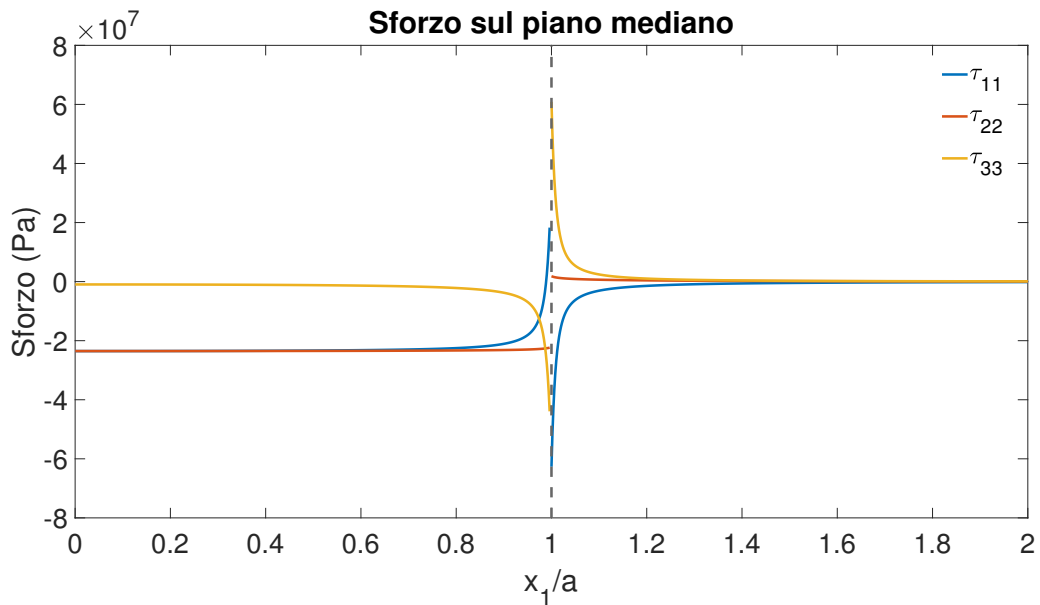


Figura 2.5: Campo di sforzo generato sul piano mediano da una sorgente TPE con centro $c = 3000$ m e spessore $d = 40$ m. La linea verticale in $x_1/a = 1$ rappresenta il bordo della sorgente.

Nella figura 2.5 sono rappresentate le componenti diagonali del campo di sforzo. È ben evidente che i due grafici sembrano perfettamente uguali: infatti a questa profondità (pari a $c = 3000$ m), la dimensione orizzontale del disco è considerevolmente più piccola di c quindi si possono trascurare le condizioni alla superficie approssimando il semispazio ad uno spazio infinito. Ciò fa sì che la parte singolare prevalga notevolmente sulla parte non singolare dello sforzo e si ritrovi questo risultato. Da notare inoltre che le ampiezze dello sforzo al di fuori della sorgente risultino nettamente minori di quelle all'interno. All'interno di essa invece ritroviamo sforzi compressivi importanti in particolare per le componenti τ_{11} e τ_{22} .

Discutiamo ora i risultati ottenuti alla superficie ($x_3 = 0$ m).

Nelle figure 2.6 e 2.7, si mostra il campo di spostamento generato da un'inclusione posta ad una profondità di 3000 m. Lo spostamento generato risulta ancora simmetrico rispetto al centro della sorgente, ma diminuisce di ampiezza, come ci si poteva aspettare allontanandosi dalla sorgente stessa. Dalla figura riguardante lo spostamento verticale si nota una parte singolare non nulla a differenza del caso precedente: spostandosi dal piano mediano il problema non è più simmetrico e il contributo di u_3^s diventa diverso da zero.

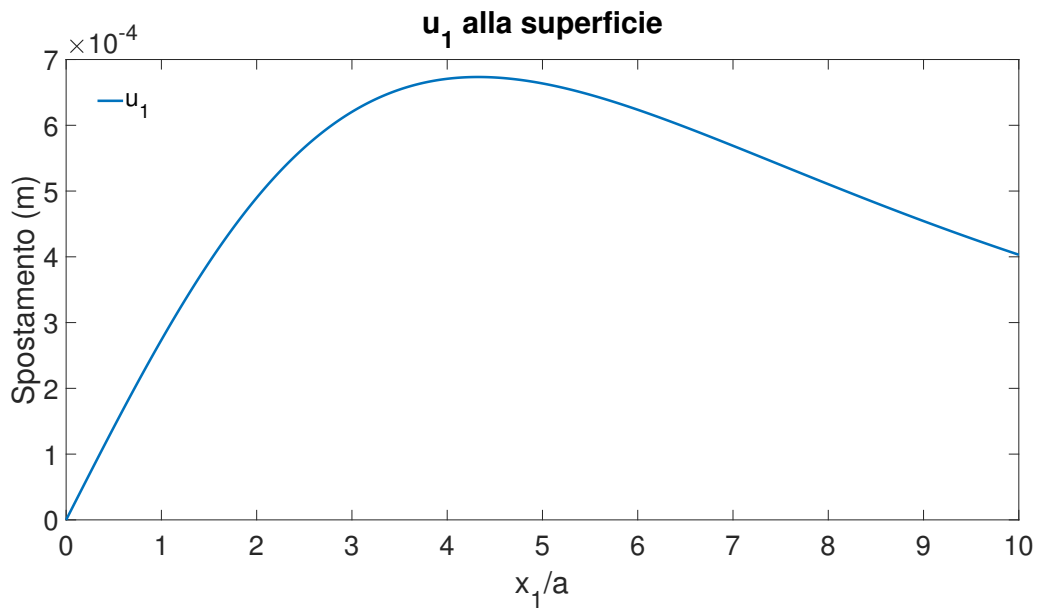


Figura 2.6: Componente orizzontale dello spostamento generata alla superficie da una sorgente TPE con centro in $c = 3000$ m e spessore $d = 40$ m.

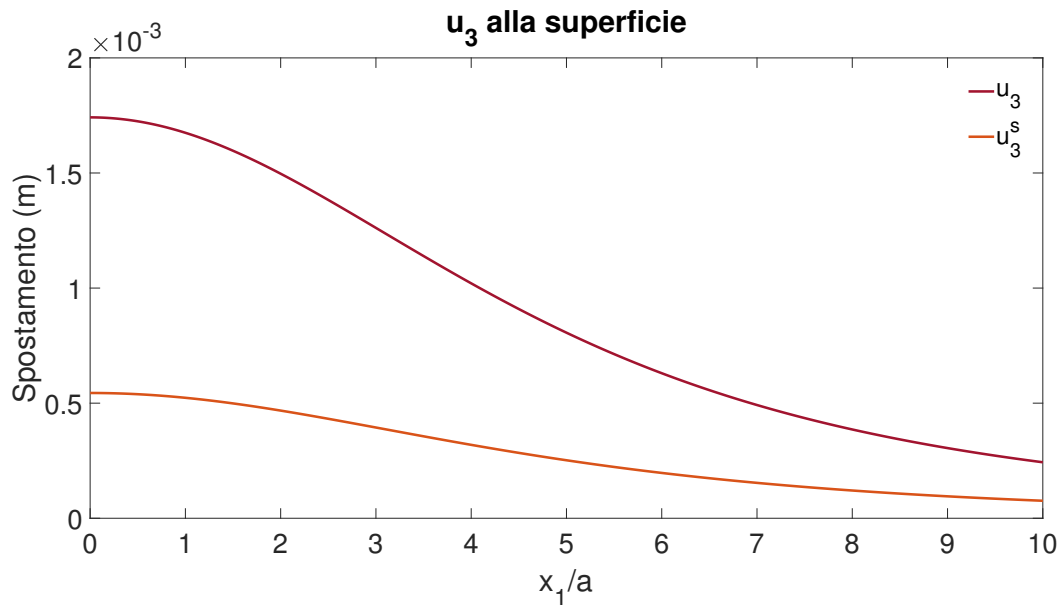


Figura 2.7: Componente verticale dello spostamento $-u_3$ generata alla superficie da una sorgente TPE con centro $c = 3000$ e spessore $d = 40$ m.

Nella figura 2.8 vengono mostrati i risultati per le componenti diagonali dello sforzo in $x_3 = 0$ m. Come ci si poteva aspettare, la parte non singolare dello stress non è più trascurabile come nel caso del piano mediano, anzi il suo contributo diventa la parte più consistente dello sforzo totale. In più la componente non singolare fa sì che venga rispettata la condizione di superficie libera per τ_{33} annullando l'effetto della parte singolare.

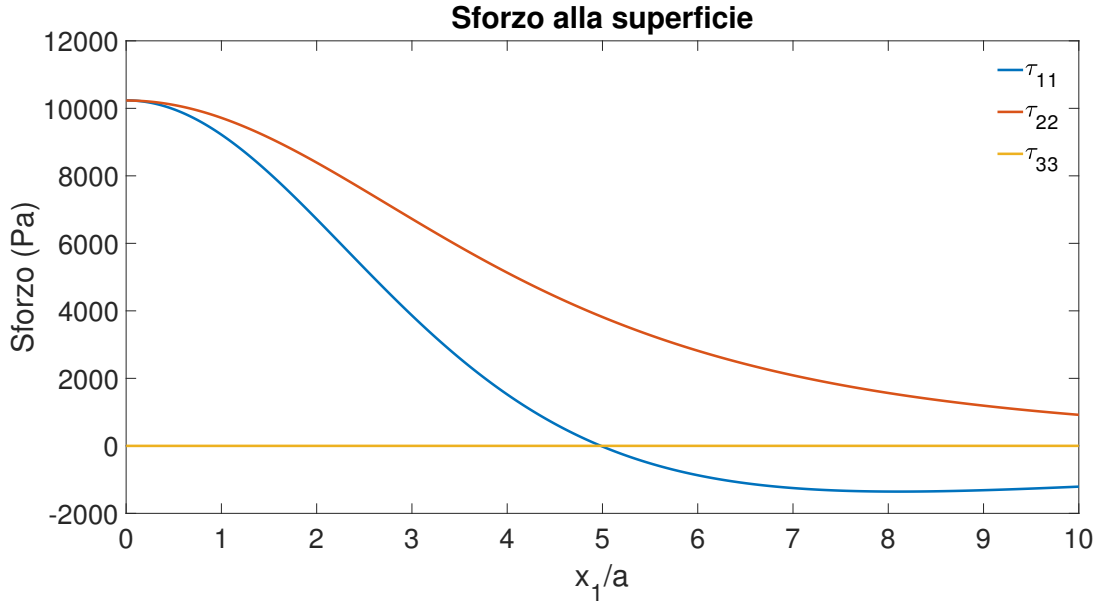


Figura 2.8: Campo di sforzo generato alla superficie da una sorgente TPE con centro $c = 3000$ m e spessore $d = 40$ m.

Anche per lo sforzo quando ci si allontana dalla sorgente l'ampiezza delle componenti diminuisce notevolmente.

2.3 Effetto dello spessore sul modello TPE a forma di disco

In questo capitolo si è descritto un modello a disco di inclusione termo-poro-elastica con spessore infinitesimo. Osservando le formule per la parte singolare si vede come gli spostamenti (equazioni 2.20 e 2.21) e quindi sforzi sono proporzionali attraverso alla costante A allo spessore del disco. Il risultato però non è scontato per la parte non singolare (equazioni 2.23 e 2.32). Vediamo quindi come variano i campi di sforzo e di spostamento per un disco infinitesimo al variare dello spessore.

2.3.1 Spostamento generato da un disco TPE di spessore crescente

Per procedere nella nostra analisi fissiamo il centro della sorgente in c e variamo lo spessore d da 20 m, il cui rapporto d/a corrisponde a 0.04, fino a 140 m il cui rapporto d/a equivale a 0.28, in modo tale che sia rispettata l'ipotesi di disco.

Rappresentiamo per primi spostamento orizzontale (fig. 2.9) e verticale (fig. 2.10) sul piano mediano: da entrambe le immagini si deduce che lo spostamento generato dipende linearmente dallo spessore della sorgente. Considerando lo spessore massimo $d = 140$ m, si misura uno spostamento orizzontale pari a $u_1^{max} = 0.18$ m e uno spostamento verticale pari a $u_3^{max} = 2 \cdot 10^{-3}$ m.

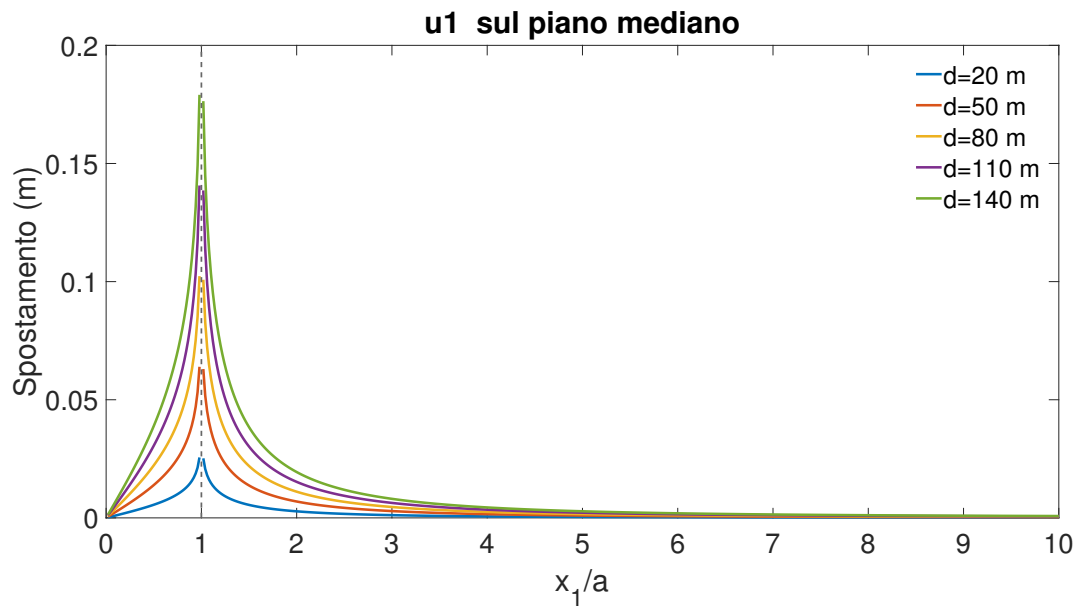


Figura 2.9: Componente orizzontale dello spostamento generata sul piano mediano da sorgenti TPE con centro $c = 3000$ m e spessore d variabile.

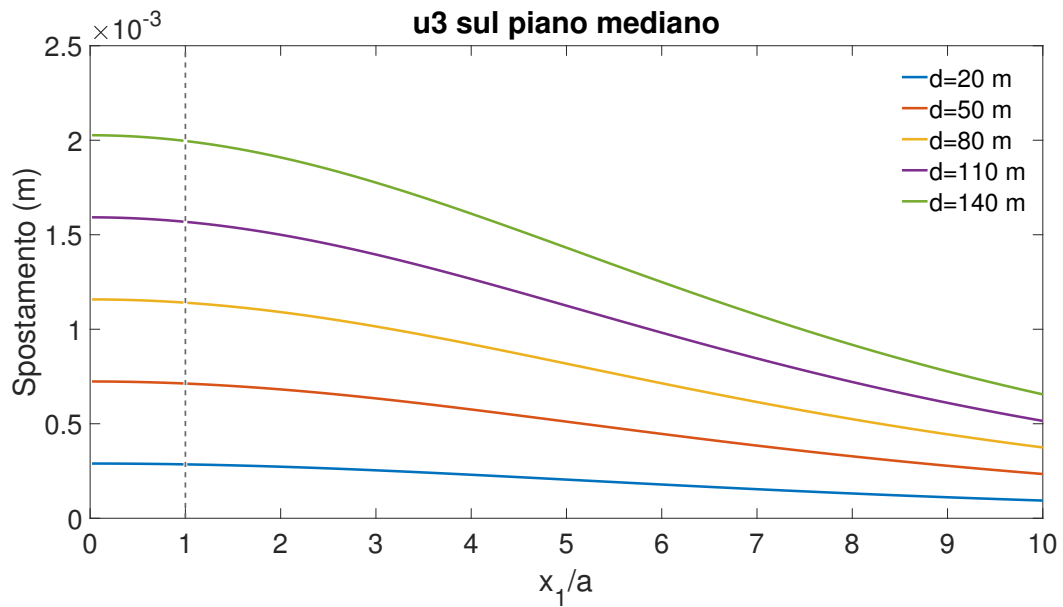


Figura 2.10: Componente verticale dello spostamento $-u_3$ generata sul piano mediano da sorgenti TPE con centro $c = 3000$ m e spessore d variabile.

Osserviamo ora che cosa cambia alla superficie:

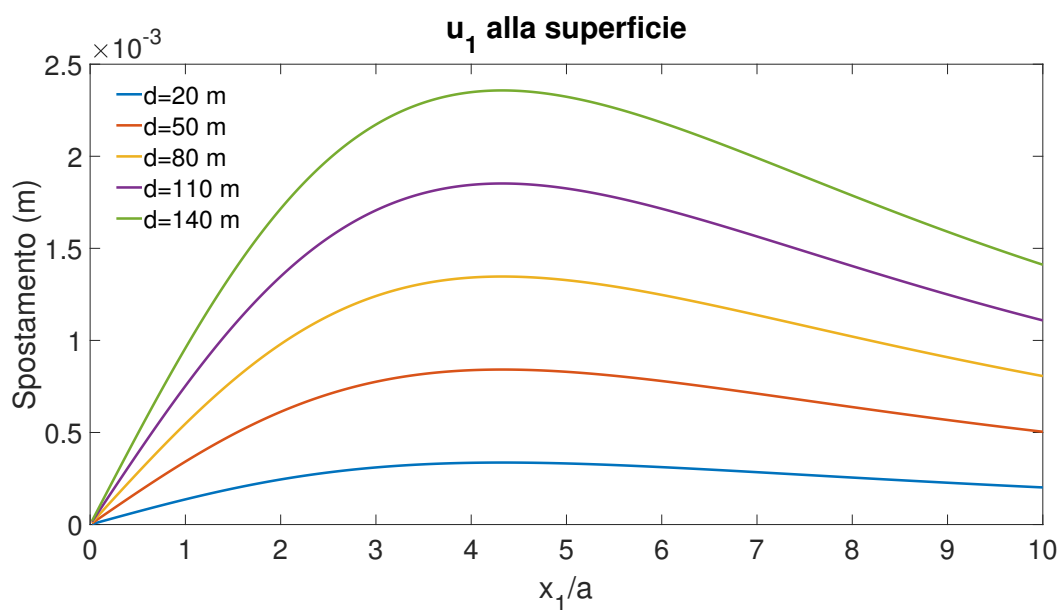


Figura 2.11: Componente orizzontale dello spostamento generata alla superficie da sorgenti TPE con centro $c = 3000$ m e spessore d variabile.

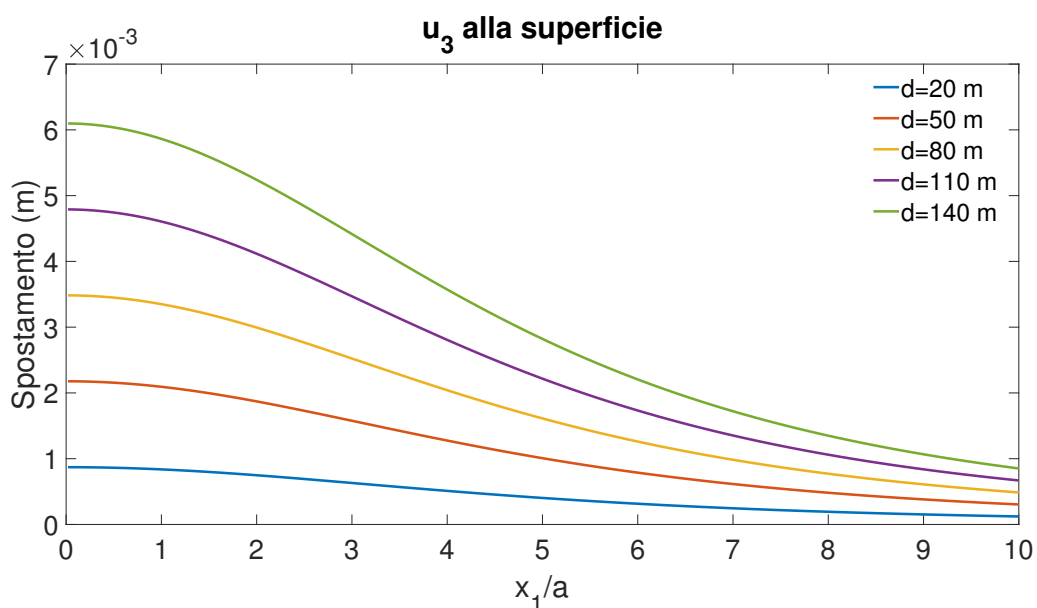


Figura 2.12: Componente verticale dello spostamento $-u_3$ generata alla superficie da sorgenti TPE con centro coincidente in $c = 3000$ m e spessore d variabile.

Le figure 2.11, 2.12 rappresentano il campo di spostamento generato alla superficie da cilindri di spessore variabile, gli stessi già citati per il caso del piano mediano. Nonostante gli effetti risentano della lontananza della sorgente, rimane comunque la proporzionalità tra valore assoluto dello spostamento e spessore del cilindro.

2.3.2 Sforzo generato da un disco TPE di spessore crescente

Passiamo ora ad analizzare come le componenti sulla diagonale del campo di sforzo cambino all'aumentare dello spessore d della sorgente. I risultati ottenuti sul piano mediano sono rappresentati nelle figure 2.13, 2.14 e 2.15.

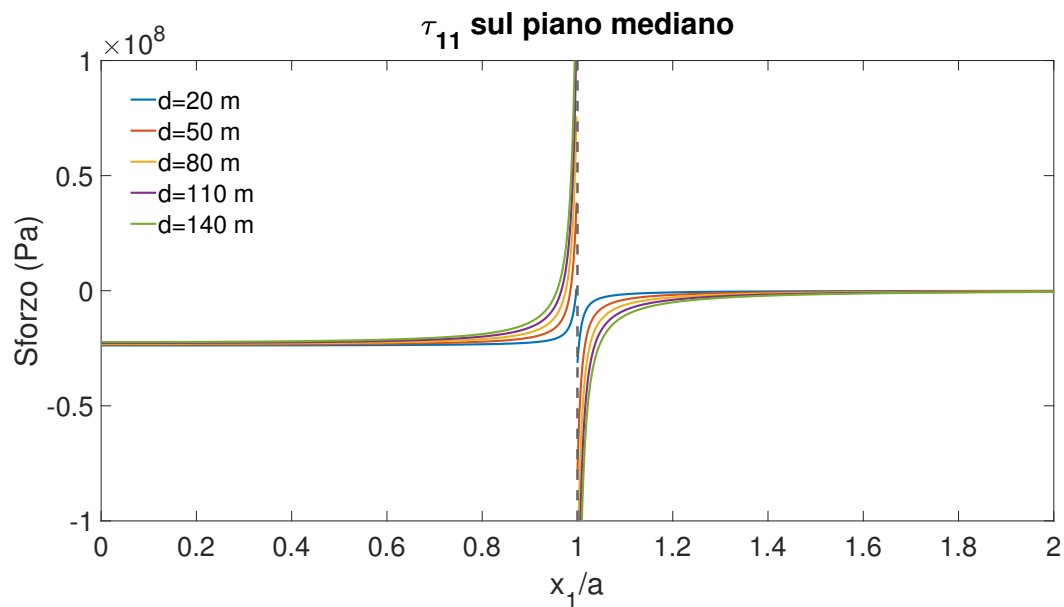


Figura 2.13: Componente τ_{11} dell'sforzo generata sul piano mediano da sorgenti TPE con centro $c = 3000$ m e spessore d variabile.

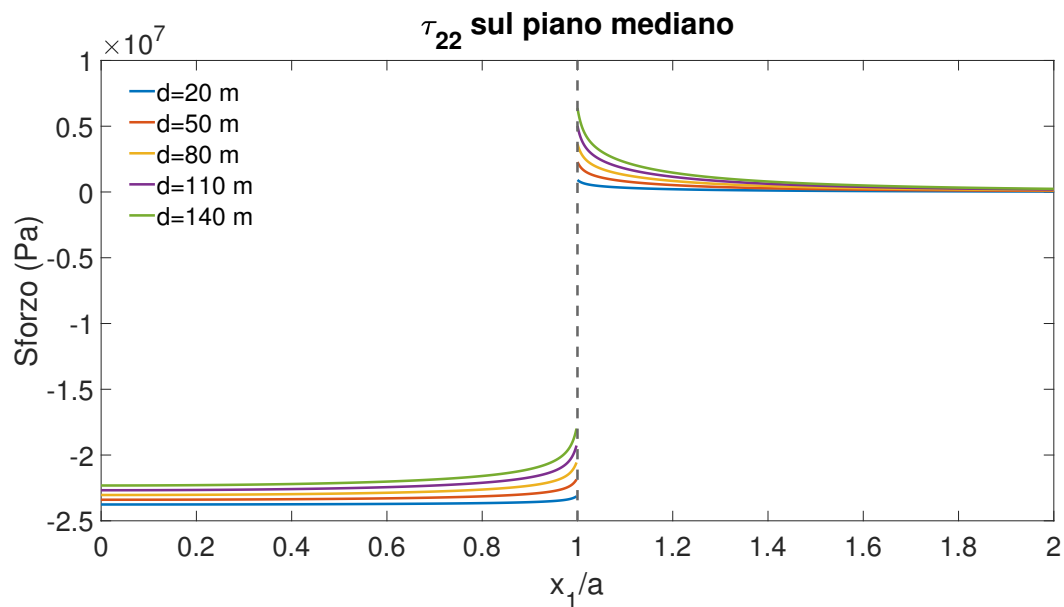


Figura 2.14: Componente τ_{22} dell'sforzo generata sul piano mediano da sorgenti TPE con centro $c = 3000$ m e spessore d variabile.

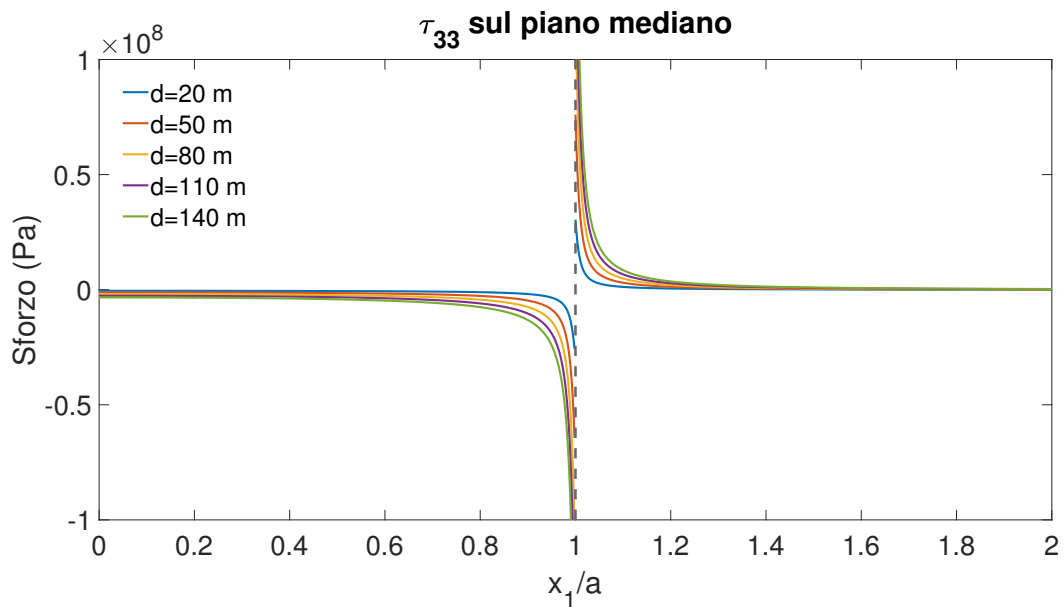


Figura 2.15: Componente τ_{33} dell’ sforzo generata sul piano mediano da sorgenti TPE con centro $c = 3000$ m e spessore d variabile.

Anche in questo caso gli effetti sono amplificati per tutte e tre le componenti all’ aumentare dello spessore.

Analizziamo ora il campo di sforzo di sorgenti di diverso spessore alla superficie: la scelta di mostrare solo le componenti τ_{11} e τ_{22} è dovuta al fatto che la terza componente risulta nulla poichè $z = 0$ m rappresenta una superficie libera. Di nuovo, anche alla superficie, ritroviamo una dipendenza lineare ad x fissato dello sforzo dallo spessore d .

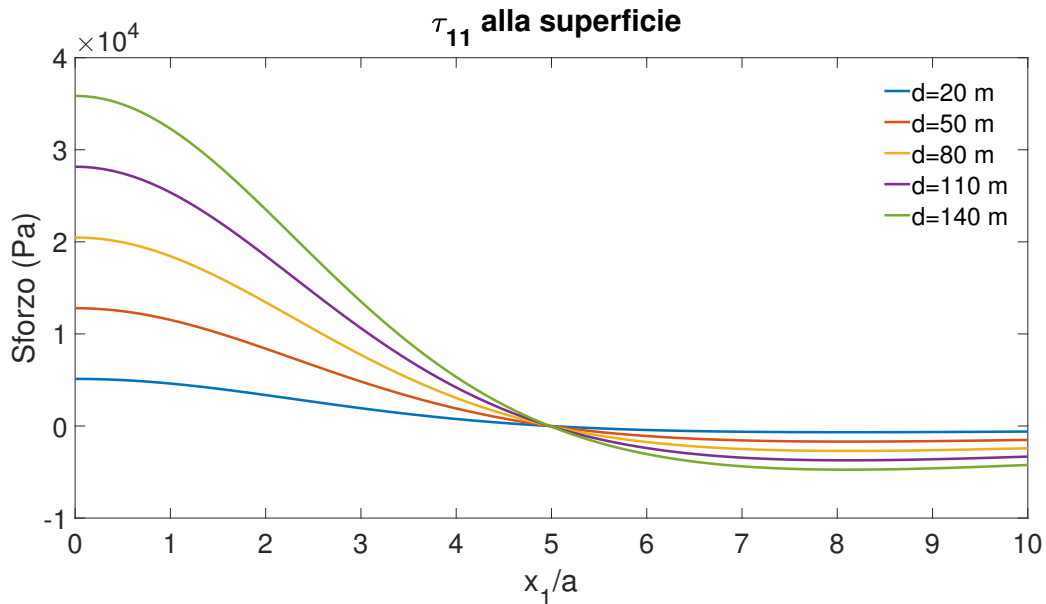


Figura 2.16: Componente τ_{11} dell’ sforzo generata alla superficie da sorgenti TPE con centro $c = 3000$ m e spessore d variabile.

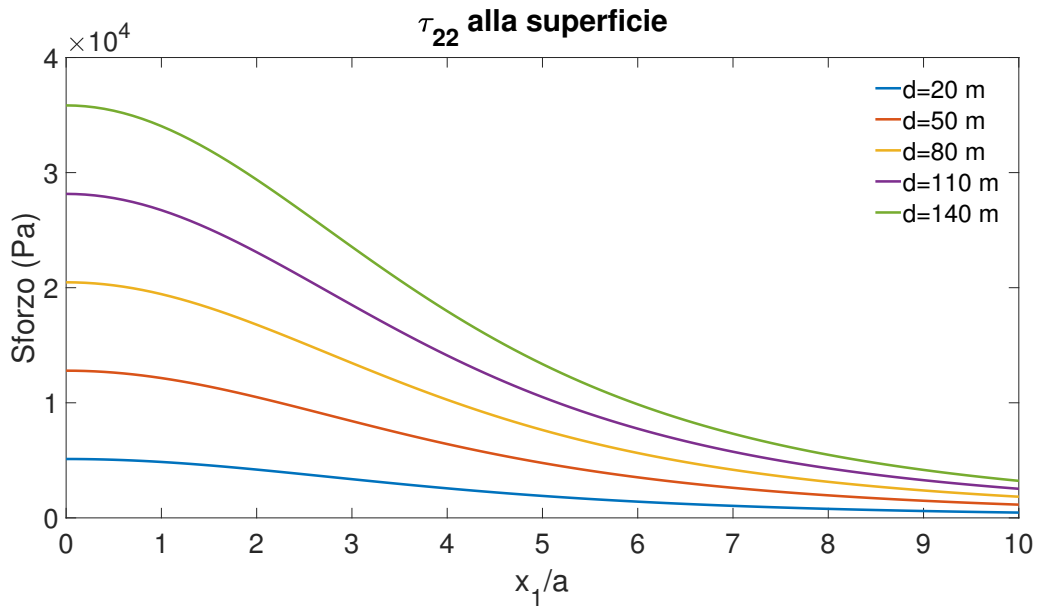


Figura 2.17: Componente τ_{22} dell' sforzo generata alla superficie da sorgenti TPE con centro $c = 3000$ m e spessore d variabile.

Si conclude quindi che qualunque sia il punto da cui si studia il campo di spostamento e quello di stress, l'ampiezza di questi ultimi presenta una dipendenza lineare dallo spessore d .

Il modello su cui stiamo basando la nostra analisi è un modello di inclusione a disco con spessore infinitesimo, cioè in cui il rapporto d/a è piccolo. Se si aumenta significativamente lo spessore d e si mantiene fisso il raggio a significa aumentare il rapporto prima citato non rispettando più la condizione richiesta dal modello. Per ovviare a questo fatto si potrebbe pensare di discretizzare il cilindro di spessore finito in più elementi a disco. Nel prossimo capitolo ci occuperemo di descrivere il modello di cilindro discretizzato e valuteremo al di sopra di quale rapporto d/a esso rappresenta più correttamente di un modello a disco i campi di sforzo e spostamento prodotti da un' inclusione a cilindro di spessore finito d .

Nell'ultimo capitolo, una volta stabilita la discretizzazione necessaria per riprodurre accuratamente spostamenti e sforzi prodotti da un cilindro TPE di spessore finito, verificheremo se ancora i campi di spostamento e sforzo siano legati linearmente al parametro spessore del cilindro.

Capitolo 3

Effetti dovuti alla discretizzazione dello spessore del cilindro

L'obiettivo del seguente capitolo consiste nel realizzare una sorgente cilindrica di spessore finito sovrapponendo soluzioni per elementi di spessore infinitesimo. Il cilindro viene discretizzato in dischi di uguale spessore pari ad una frazione dello spessore totale: questi ultimi si definiscono *elementi di cilindro*. Per modellare gli effetti degli elementi, si assume che ognuno di essi sia rappresentabile attraverso la soluzione presentata nel capitolo 2 supponendo $d/a \ll 1$.

3.1 Rappresentazione a più dischi di spessore infinitesimo

Il cilindro singolo di spessore significativo viene ricreato tramite la sovrapposizione di un numero N di dischi di spessore minore chiamati *elementi di cilindro*. N sarà un numero dispari: ci sarà un elemento posizionato lungo il piano mediano, il cui centro coinciderà con quello del cilindro di spessore finito e $(N - 1)/2$ elementi al di sopra e $(N - 1)/2$ elementi al di sotto del medesimo (fig.3.1). Ovviamente i centri degli elementi saranno allineati lungo l'asse z come mostrato nella figura 3.1 (cerchi rossi).

Il centro di questi elementi è traslato di $\pm(d/N) \cdot m$ al di sopra o al di sotto di quello dell'elemento centrale. Lo spessore degli elementi infinitesimi è costante e pari a $d_e = d/N$. Si ottiene:

$$c^{(m)} = c + m \cdot d_e \quad \text{dove} \quad m = -\frac{N-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N-1}{2} \quad (3.1)$$

Tramite il modello di sorgente TPE inclusa in un semispazio, è possibile calcolare il campo di spostamento e campo di stress per ciascuno degli elementi di cilindro nell'ipotesi che per questi valga l'approssimazione di disco di spessore infinitesimo. In questo caso possiamo perciò utilizzare le formule 2.16 per lo spostamento del disco infinitesimo e 2.38 per lo stress, dove al posto di c si considera $c^{(m)}$ e al posto di d si considera d_e per ciascuno degli elementi. In tutto il capitolo ci riferiamo al sistema di riferimento di figura 3.1. Inoltre calcoleremo spostamento e sforzo lungo profili collocati in $y = 0$, $z = cost$, passanti per l'asse del cilindro. In tal caso lo spostamento in direzione y è nullo per la simmetria della sorgente, come anticipato nel capitolo 2. Lo spostamento u_1 si intende

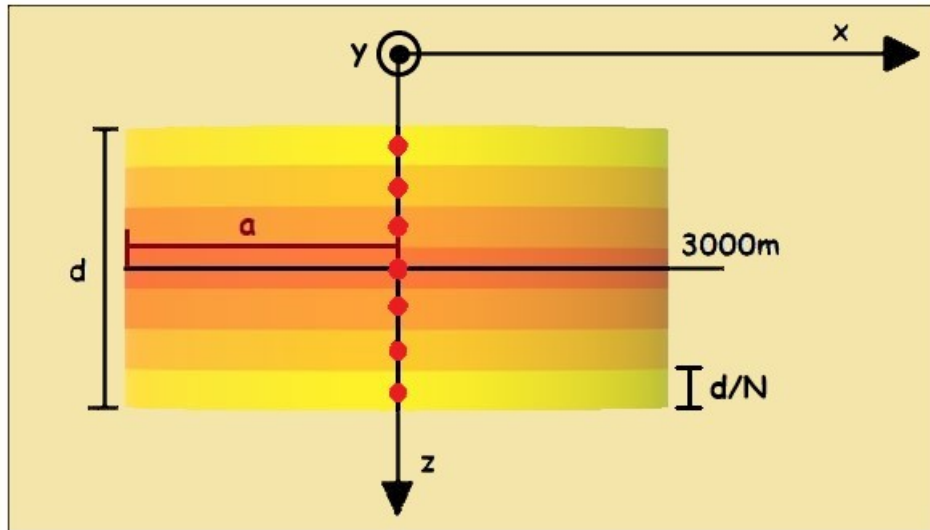


Figura 3.1: Suddivisione di un cilindro di spessore finito in sette elementi di cui uno al centro, tre sopra e tre sotto.

uguale alla componente x dello spostamento, lo spostamento u_3 si intende uguale alla componente z dello spostamento, ed altrettanto per lo sforzo τ_{11} si intende uguale alla componente xx dello sforzo, τ_{22} si intende uguale alla componente yy dello sforzo e τ_{33} si intende uguale alla componente zz dello sforzo.

3.2 Sviluppo dei programmi: le *functions* spostamentoTPE e stressTPE

A partire dal modello di inclusione termo-poro-elastica a forma di disco in un semispazio (Mantiloni et al., 2020), sono state create due differenti *functions*, *spostamentoTPE* e *stressTPE* tramite il linguaggio MATLAB. Queste ultime sono in grado di restituire il campo di spostamento e di sforzo generati da ciascuno degli elementi che formano il cilindro di spessore finito. Entrambe le funzioni hanno le medesime variabili in ingresso:

- *dPressione*, cioè la variazione di pressione di poro a cui è sottoposta l'inclusione;
- *dTemperatura*, cioè la variazione di temperatura a cui è sottoposta l'inclusione;
- *spessore*, cioè l'altezza del cilindro studiato;
- *profondità*, cioè la profondità del centro del cilindro studiato;
- *raggio* della base del cilindro;
- x, y, z , cioè le coordinate del punto in cui si vuole misurare il campo di spostamento/stress.

Di particolare interesse per il nostro obiettivo sono le variabili *spessore* d_e e *profondità*.

Le costanti termo-poro-elastiche (già descritte nella sezione 2.2), le quali descrivono il comportamento della sorgente TPE, sono definite come variabili globali, in modo tale da

essere condivise con l'ambiente di lavoro senza essere ridefinite.

Le serie della parte singolare (equazioni 2.20, 2.21, 2.30 e 2.31) sono troncate a $m = 100$, se non diversamente specificato.

3.3 I contributi elementari a spostamento e sforzo

Si considerino tre dischi di spessore $d = 40$ m con i centri posizionati come segue lungo l'asse z :

- $z = c_1 = c - d$: centro traslato in alto rispetto al piano mediano, è il più vicino alla superficie (cilindro sopra);
- $z = c_2 = c$: centro posto a $z = 3000$ m, è il cilindro centrale;
- $z = c_3 = c + d$: centro traslato in basso rispetto al piano mediano, è il più lontano dalla superficie (cilindro sotto).

Per ognuno di essi si calcola il campo di spostamento e quello di sforzo generati sul piano $z = c = 3000$ m e alla superficie $z = 0$ m.

3.3.1 Variazioni nel campo di spostamento

In primis studiamo il campo di spostamento generato da ognuno dei tre dischi sul piano $z = c$ (fig. 3.2 e 3.3).

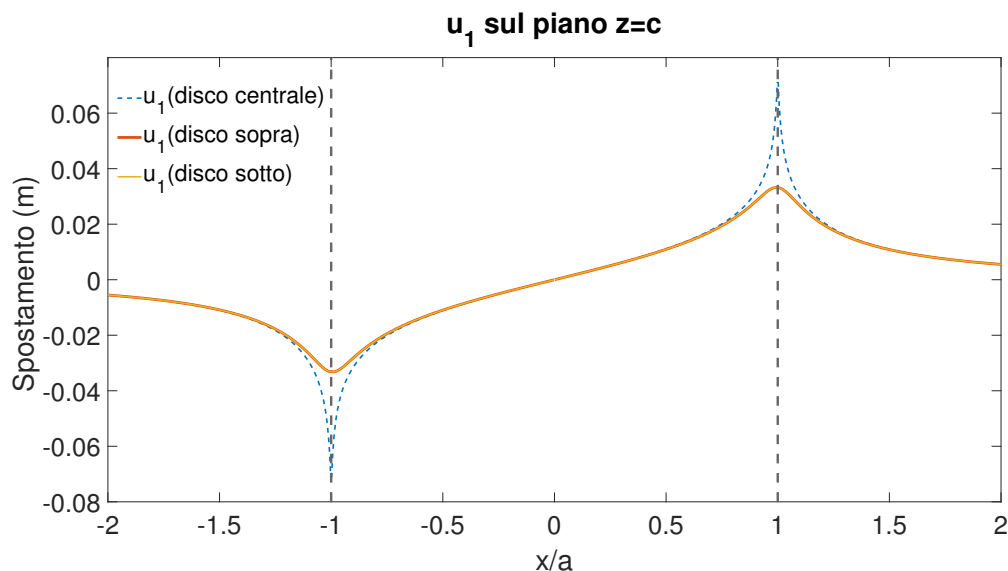


Figura 3.2: Componente orizzontale dello spostamento generata da dischi di spessore 40 m. Il disco centrale ha il centro posizionato ad una profondità di $c_2 = c = 3000$ m, quello sopra a $c_1 = 2960$ m e quello sotto a $c_3 = 3040$ m. Lo spostamento è rappresentato sul piano $z = c$.

Nella figura 3.2 le componenti orizzontali dello spostamento u_1 risultano perlopiù sovrapposte, tranne che in corrispondenza dei bordi $x = \pm a$, in cui il campo generato dal disco centrale raggiunge valori più elevati, dovuti alla singolarità.

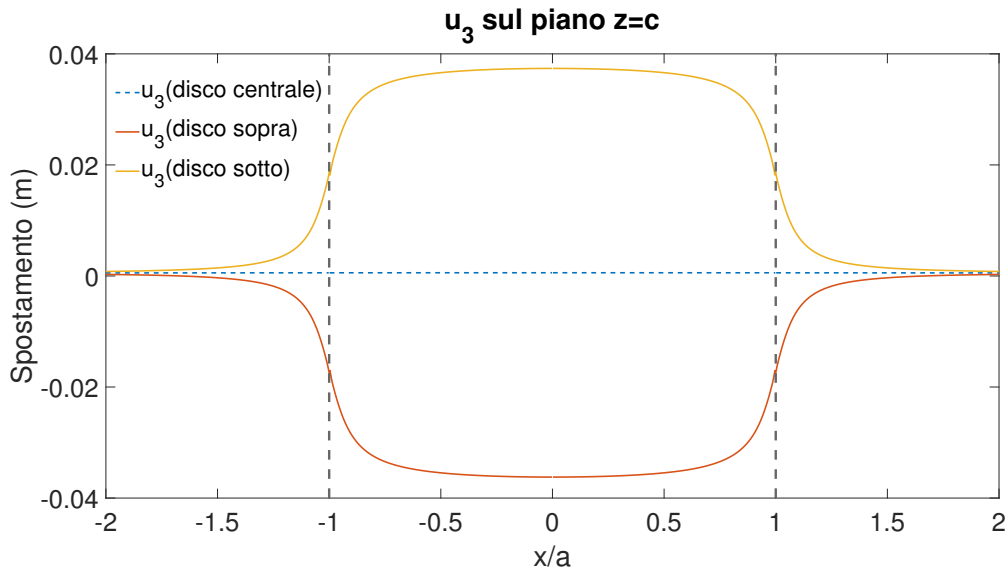


Figura 3.3: Componente verticale dello spostamento $-u_3$ generato da dischi di spessore 40 m. Il disco centrale ha il centro posizionato ad una profondità di $c_2 = c = 3000$ m, quello sopra a $c_1 = 2960$ m e quello sotto a $c_3 = 3040$ m. Lo spostamento è rappresentato sul piano $z = c$.

Diverso è il risultato ottenuto in figura 3.3 il quale mostra lo spostamento verticale u_3 : all'interno della sorgente ($-a \leq x \leq a$) gli spostamenti generati dal disco sopra e da quello sotto sono approssimativamente opposti, invece quello generato dal disco centrale è non nullo solo a causa del contributo non singolare che, essendo il piano $z = c$ molto distante dalla superficie, è trascurabile in modulo rispetto ai contributi degli altri due elementi.

Si può quindi affermare che sul piano mediano $z = c$ l'effetto di ciascun disco su quelli vicini è significativamente diverso.

Studiamo ora gli spostamenti alla superficie generati dai tre dischi prima descritti:

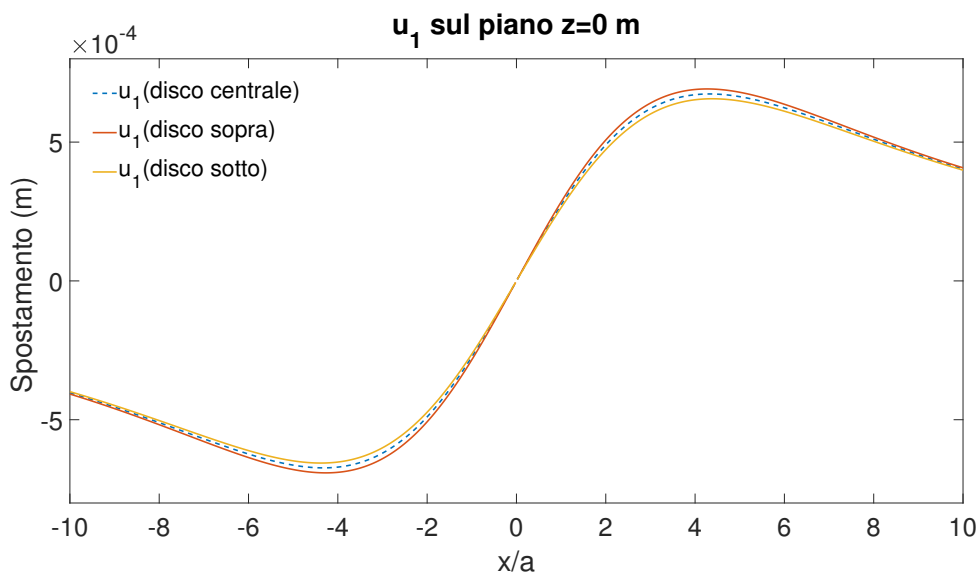


Figura 3.4: Componente orizzontale dello spostamento alla superficie generato da dischi di spessore 40 m. Il disco centrale ha il centro posizionato ad una profondità di $c_2 = c = 3000$ m, quello sopra a $c_1 = 2960$ m e quello sotto a $c_3 = 3040$ m.

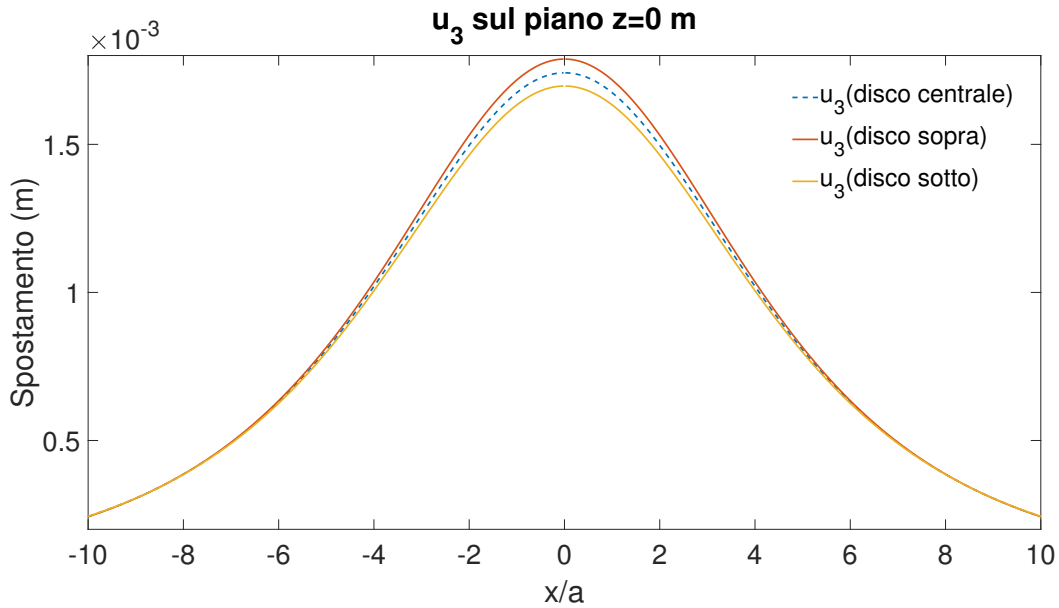


Figura 3.5: Componente verticale dello spostamento $-u_3$ alla superficie generato da dischi di spessore 40 m. Il disco centrale ha il centro posizionato ad una profondità di $c_2 = c = 3000$ m, quello sopra a $c_1 = 2960$ m e quello sotto a $c_3 = 3040$ m.

Come si può osservare dalle figure 3.4 e 3.5, il campo generato alla superficie risente in maniera minore della traslazione delle sorgenti: sia il disco sopra che il disco sotto generano campi di spostamento che si discostano di poco da quello del disco centrale. Infatti in superficie l'effetto della traslazione dei dischi è molto meno rilevante. Ciò è dovuto al fatto che le sorgenti sopra e sotto sono traslate rispetto a quella centrale di una profondità d_e trascurabile rispetto alla profondità a cui si trovano (si parla di una variazione pari a $\sim 1\%$).

Bisogna precisare che allontanandosi dalla sorgente, cioè per $|x|/a \gg 1$ nel caso del piano $z = c$ e nel caso della superficie in cui $c^{(m)} > a$, il campo di spostamento si riduce tendendo quasi a zero. Infatti, gli spostamenti generati da una sorgente TPE decrescono con la distanza del punto d'osservazione dalla sorgente stessa, per questo motivo al crescere di quest'ultima il campo tende ad annullarsi.

Effettuando varie prove a profondità d'indagine differenti, si riscontra che la variazione percentuale dello spostamento generato dai due dischi sopra e sotto rispetto a quello centrale (che calcoliamo come $\frac{\Delta u_{MAX}}{u_{disco\ centrale}} \cdot 100$ con $\Delta u_{MAX} = \max|u_{disco\ centrale} - u_{disco\ sopra/sotto}|$) raggiunge valori inferiori al 10% ad una profondità pari a 2400 m (e cioè appena fuori dal sorgente TPE stessa). Ciò vuol dire che la distinzione tra i campi di spostamento dei tre dischi si nota perlopiù all'interno della sorgente e man mano che ci si allontana da essa questi risultano sempre più indistinguibili.

3.3.2 Variazioni nel campo di sforzo

Si vadano ora ad analizzare i campi di sforzo generati dai tre dischi prima descritti sia sul piano $z = c$ che alla superficie.

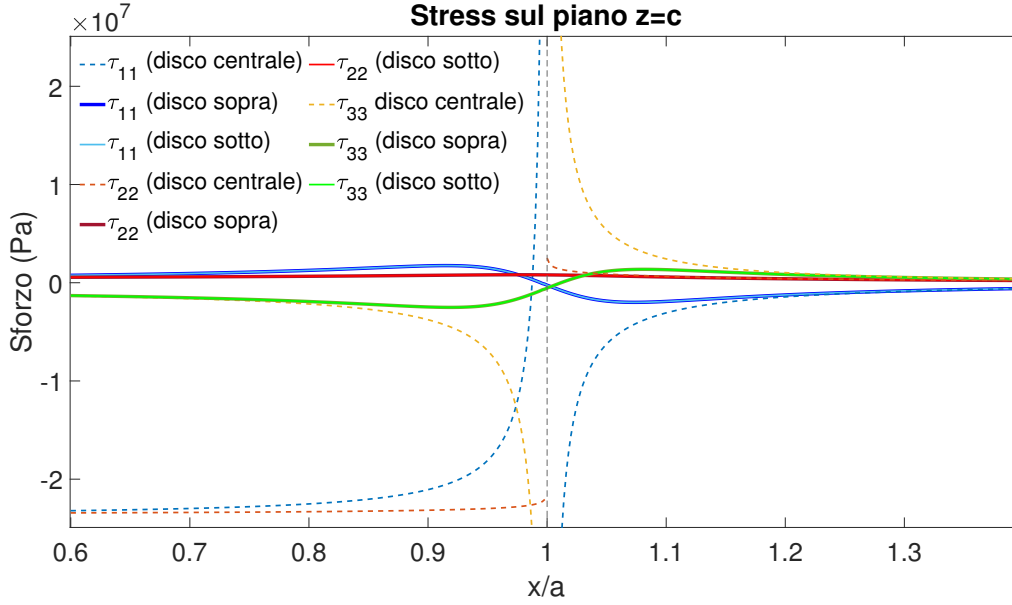


Figura 3.6: Stress sul piano $z = c$ generato da dischi di spessore 40 m. Il disco centrale ha il centro posizionato ad una profondità di $c_2 = c = 3000$ m, quello sopra a $c_1 = 2960$ m e quello sotto a $c_3 = 3040$ m. In questo caso Le serie sono troncate a $n = 1000$.

Sul piano $z = c$ (fig. 3.6) i contributi dei dischi sopra e sotto sono praticamente uguali e differiscono da quello del disco centrale all'interno della sorgente stessa dove $|x/a| < 1$. All'esterno della sorgente detta differenza si annulla al crescere di $|x/a|$. In $x/a = 0.6$ si registra una differenza di sforzo tra disco centrale e dischi sopra/sotto pari a $\sim 2 \cdot 10^7$ Pa per le componenti τ_{22} e τ_{11} . Infatti per queste due componenti in valore assoluto i contributi dei dischi esterni sono molto minori di quello del disco centrale nella regione $|x/a| < 1$. Inoltre gli sforzi diagonali generati dai dischi esterni sono non singolari, poichè stiamo modellando lo stress al di fuori del loro piano mediano.

Alla superficie la situazione è molto diversa: il campo di sforzo si riduce di ben 3 ordini di grandezza, di conseguenza si riduce anche la differenza tra le componenti dello stress generate dal disco centrale e quelli sopra e sotto. La massima variazione percentuale (che calcoliamo come $\frac{\Delta\tau_{MAX}}{\tau_{disco\ centrale}} \cdot 100$ con $\Delta\tau_{MAX} = \max|\tau_{disco\ centrale} - \tau_{disco\ sopra/sotto}|$) si riduce allo 0.2%. Perciò si può affermare che alla superficie i campi di stress delle tre sorgenti sono pressocchè indistinguibili.

Fuori dalla sorgente (a profondità minori e uguali di 2400 m), la massima variazione percentuale dello sforzo si riduce al di sotto del 10%. Anche per lo sforzo gli effetti maggiori dovuti alla traslazione della sorgente si riscontrano per $|x/a| < 1$.

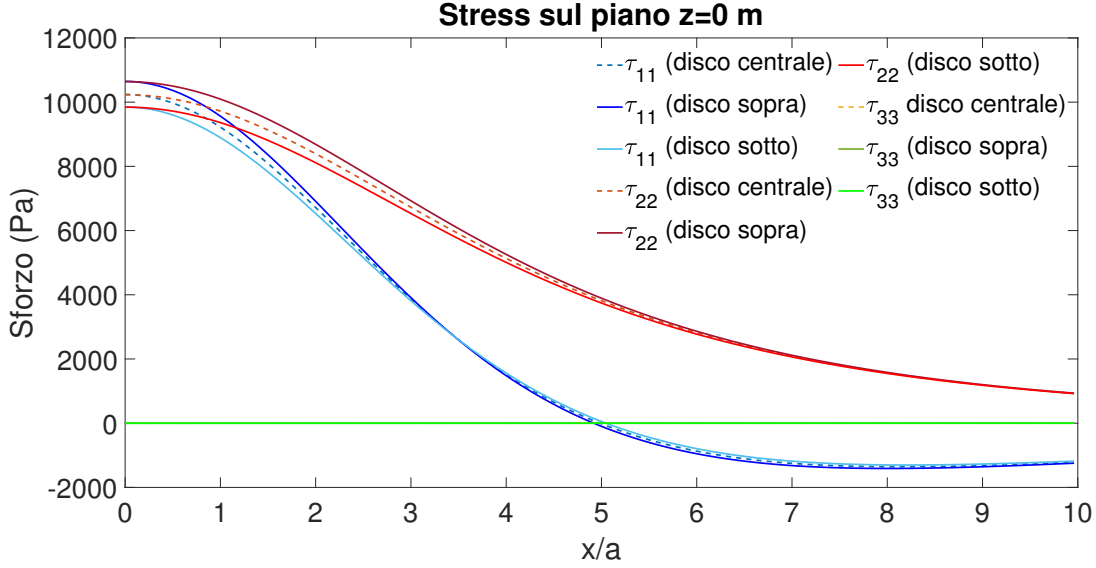


Figura 3.7: Stress alla superficie generato da dischi di spessore 40 m. Il disco centrale ha il centro posizionato ad una profondità di $c_2 = c = 3000$ m, quello sopra a $c_1 = 2960$ m e quello sotto a $c_3 = 3040$ m.

3.4 Il modello a cilindro discretizzato

Fino ad ora nell'elaborato abbiamo trattato dischi, cioè con un rapporto tra spessore d e raggio a piccolo. Il nostro scopo è quello di modellizzare lo spostamento e lo stress generato da un cilindro di spessore finito attraverso una sovrapposizione di elementi di spessore infinitesimo: è ciò che faremo in questa sezione. Per riprodurre il campo totale di spostamento u_i o deformazione e_{ij} o sforzo τ_{ij} si sovrappongono contributi di spostamento $u_i^{(m)}$, deformazione $e_{ij}^{(m)}$ e sforzo $\tau_{ij}^{(m)}$ di ciascun elemento con spessore d_e e centro in $z = c^{(m)}$ con $m = N - \frac{1}{2}, \dots, N - \frac{1}{2}$:

$$u_i = \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_i^{(m)} \quad (3.2)$$

$$e_{ij} = \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e_{ij}^{(m)} \quad (3.3)$$

$$\tau_{ij} = \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \tau_{ij}^{(m)} \quad (3.4)$$

dove per l'equazione 2.13:

$$\tau_{ij}^{(m)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(m)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(m)} - 3K e_0 \delta_{ij} \quad \text{se } |x| < a, |z - c^{(m)}| < \frac{d_e}{2} \quad (3.5)$$

$$\tau_{ij}^{(m)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(m)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(m)} \quad \text{se } |x| < a, |z - c^{(m)}| > \frac{d_e}{2}, z > 0 \quad (3.6)$$

$$\tau_{ij}^{(m)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(m)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(m)} \quad \text{se } |x| > a, z > 0 \quad (3.7)$$

Una sorgente TPE a cilindro di spessore finito $d = Nd_e$ e centro in $z = c$ per l'equazione 2.13 produce campi di spostamento u_i , deformazione e_{ij} e sforzo τ_{ij} tali che:

$$\tau_{ij}(x, z) = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 3Ke_0 \delta_{ij} \quad \text{se } |x| < a, |z - c| < \frac{d}{2} \quad (3.8)$$

$$\tau_{ij}(x, z) = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad \text{se } |x| < a, |z - c| > \frac{d}{2}, z > 0 \quad (3.9)$$

$$\tau_{ij}(x, z) = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad \text{se } |x| > a, z > 0 \quad (3.10)$$

Dobbiamo verificare che il campo totale di spostamento prodotto dalla sovrapposizione degli elementi soddisfi le 3.8, 3.9 e 3.10 che caratterizzano un cilindro di spessore finito. Poichè assumiamo le equazioni 3.2, 3.3 e 3.4, in base alla 3.7 risulta che l'equazione 3.10 è automaticamente soddisfatta. Verifichiamo che siano soddisfatte anche la 3.8 e 3.9 considerando il caso di $N = 3$ elementi. Per l'elemento sopra il centrale si ha:

$$\tau_{ij}^{(-1)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(-1)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(-1)} - 3Ke_0 \delta_{ij} \quad \text{se } |x| < a, |z - c^{(-1)}| < d_e \quad (3.11)$$

$$\tau_{ij}^{(-1)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(-1)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(-1)} \quad \text{se } |x| < a, |z - c^{(-1)}| > d_e, z > 0 \quad (3.12)$$

che, tenuto conto della definizione di $c^{(-1)}$ (eq. 3.1), possono essere riscritte:

$$\tau_{ij}^{(-1)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(-1)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(-1)} \quad \text{se } |x| < a, 0 < z < c - \frac{3}{2}d_e \quad (3.13)$$

$$\tau_{ij}^{(-1)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(-1)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(-1)} - 3Ke_0 \delta_{ij} \quad \text{se } |x| < a, c - \frac{3}{2}d_e < z < c - \frac{1}{2}d_e \quad (3.14)$$

$$\tau_{ij}^{(-1)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(-1)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(-1)} \quad \text{se } |x| < a, z > c - \frac{1}{2}d_e \quad (3.15)$$

analogamente per l'elemento centrale e quello sotto si ha:

$$\tau_{ij}^{(0)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(0)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(0)} \quad \text{se } |x| < a, 0 < z < c - \frac{1}{2}d_e \quad (3.16)$$

$$\tau_{ij}^{(0)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(0)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(0)} - 3Ke_0 \delta_{ij} \quad \text{se } |x| < a, c - \frac{1}{2}d_e < z < c + \frac{1}{2}d_e \quad (3.17)$$

$$\tau_{ij}^{(0)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(0)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(0)} \quad \text{se } |x| < a, z > c + \frac{1}{2}d_e \quad (3.18)$$

$$\tau_{ij}^{(1)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(1)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(1)} \quad \text{se } |x| < a, 0 < z < c + \frac{1}{2}d_e \quad (3.19)$$

$$\tau_{ij}^{(1)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(1)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(1)} - 3Ke_0 \delta_{ij} \quad \text{se } |x| < a, c + \frac{1}{2}d_e < z < c + \frac{3}{2}d_e \quad (3.20)$$

$$\tau_{ij}^{(1)}(x, z) = \lambda e_{kk}^{(1)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{(1)} \quad \text{se } |x| < a, z > c + \frac{3}{2}d_e \quad (3.21)$$

Sommando tutti i contributi nel dominio $|x| < a, 0 < z < c - \frac{3}{2}d_e$ (equazioni 3.13, 3.16 e 3.19) si ottiene:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(x, z) &= \sum_{m=-1}^1 \tau_{ij}^{(m)} = \lambda \delta_{ij} \sum_{m=-1}^1 e_{kk}^{(m)} + 2\mu \sum_{m=-1}^1 e_{ij}^{(m)} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \\ &\quad \text{con } |x| < a, 0 < z < c - \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la 3.3 e riespresso il dominio tenuto conto che $d = 3d_e$. Analogamente nel dominio $|x| < a, z > c + \frac{3}{2}d_e = c + \frac{d}{2}$ (equazioni 3.14, 3.18 e

3.21) si ottiene:

$$\tau_{ij}(x, z) = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad \text{con} \quad |x| < a, \quad z > c + \frac{d}{2} \quad (3.23)$$

In base a queste ultime due equazioni si ha che l'equazione 3.9 è soddisfatta.

All'interno dell'elemento sopra al centrale ($|x| < a, c - \frac{3}{2}d_e < z < c - \frac{1}{2}d_e$, equazioni 3.13, 3.16 e 3.19) si ha:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(x, z) &= \sum_{m=-1}^1 \tau_{ij}^{(m)} = \lambda \delta_{ij} \sum_{m=-1}^1 e_{kk}^{(m)} + 2\mu \sum_{m=-1}^1 e_{ij}^{(m)} - 3K e_0 \delta_{ij} \\ &\quad \text{con} \quad |x| < a, \quad c - \frac{d}{2} < z < c + \frac{d}{6} \end{aligned} \quad (3.24)$$

ovvero:

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 3K e_0 \delta_{ij}, \quad \text{con} \quad |x| < a, \quad c - \frac{d}{2} < z < c - \frac{d}{6} \quad (3.25)$$

dove il dominio è stato riespresso tenuto conto che $d = 3d_e$ e il contributo $-3K e_0 \delta_{ij}$ viene dal contributo soprastante (equazione 3.13). Analogamente si dimostra che ciò vale all'interno dell'elemento centrale $|x| < a, c - \frac{d}{6} < z < c + \frac{d}{6}$ e dell'elemento sottostante $|x| < a, c + \frac{d}{6} < z < c + \frac{d}{2}$, potendo concludere che:

$$\tau_{ij}(x, z) = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 3K e_0 \delta_{ij} \quad \text{con} \quad |x| < a, \quad c - \frac{d}{2} < z < c + \frac{d}{2} \quad (3.26)$$

cioè anche la 3.8 è soddisfatta.

Estrapolando al caso di N elementi possiamo dire che la soluzione ottenuta sovrappo-
nendo i singoli elementi si candida a risolvere lo stesso problema (eq. 3.8, 3.9 e 3.10) che
riguarda una sorgente TPE cilindrica di spessore finito.

3.4.1 La discretizzazione di cilindri di diverso spessore (50 m e 500 m): spostamento

Consideriamo ora due cilindri con centro in $c = 3000$ m, raggio $a = 500$ m e spessore
completamente differente: il primo pari a 50 m e il secondo pari a 500 m. Si vuole
dimostrare che aumentando lo spessore della sorgente TPE, la discretizzazione si rende
sempre più necessaria per ottenere un risultato accurato.

Nel primo caso di spessore $d = 50$ m, il cui rapporto $d/a = 0.1$ risulta abbastanza
piccolo, ci si aspetta che il modello a disco risulti abbastanza accurato e quindi sia
richiesto un numero piccolo di elementi. Valutiamo quanto lo spostamento generato dal
singolo disco si discosta dalla somma degli spostamenti generati da una serie N elementi
sovrapposti (cilindro discretizzato).

Prendiamo due punti $x_{in} = 475$ m, interno all'inclusione e $x_{out} = 525$ m, esterno all'in-
clusione. Nello stesso grafico confrontiamo lo spostamento generato da un elemento singolo
(cerchi blu) e lo spostamento generato dal cilindro discretizzato da un numero N di ele-
menti che varia da 1 a 21 (croci rosse), il tutto in funzione del numero di elementi (fig. 3.8).

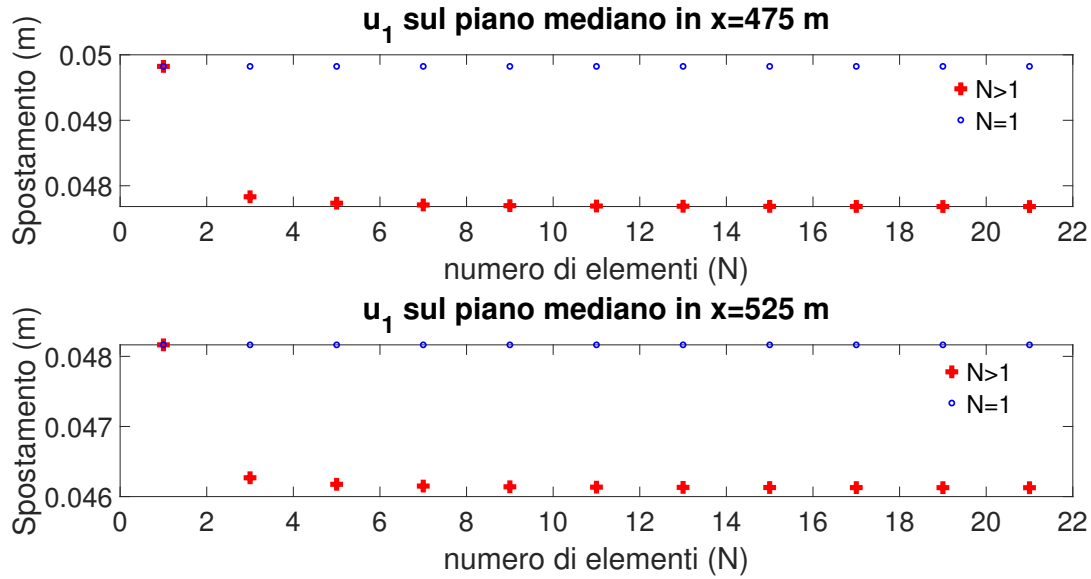


Figura 3.8: Confronto tra componente orizzontale dello spostamento generata sul piano mediano da una sorgente TPE di spessore $d = 50$ m ($N = 1$) e la componente orizzontale dello spostamento generata sul piano mediano da una sorgente TPE discretizzata da un numero $N > 1$ crescente di elementi. Entrambe le sorgenti hanno centro in $c = 3000$ m.

In figura 3.8, in cui è rappresentato lo spostamento orizzontale in funzione di N nei punti x_{in} e x_{out} , si nota un "salto" $\Delta u_1 \simeq 0.002$ m tra la componente generata da un singolo elemento e quella generata dalla sorgente discretizzata con $N = 3$ elementi. Aumentando il numero di elementi N , il valore dello spostamento generato dal cilindro discretizzato non varia significativamente.

Confrontiamo ora la componente orizzontale dello spostamento nei casi $N = 1$, $N = 3$ e $N = 5$ per x/a compreso tra 0.8 e 1.2. In figura 3.9 si riscontra la variazione maggiore in corrispondenza del bordo del cilindro $x/a = 1$. Se ci si allontana sia verso l'esterno che verso l'interno della sorgente, le variazioni tra gli spostamenti non sono più distinguibili. Se osserviamo le soluzioni con $N = 3$ e $N = 5$, queste sono perlopiù sovrapposte, a parte tra $x/a = 0.98$ e $x/a = 1.02$.

Lo spostamento verticale è stato volutamente omesso, le variazioni riscontrate tra la componente generata dal singolo elemento e quella generata dal cilindro discretizzato risultano dell'ordine $\Delta u_3 \simeq 10^{-13}$ m, quindi possono essere trascurate.

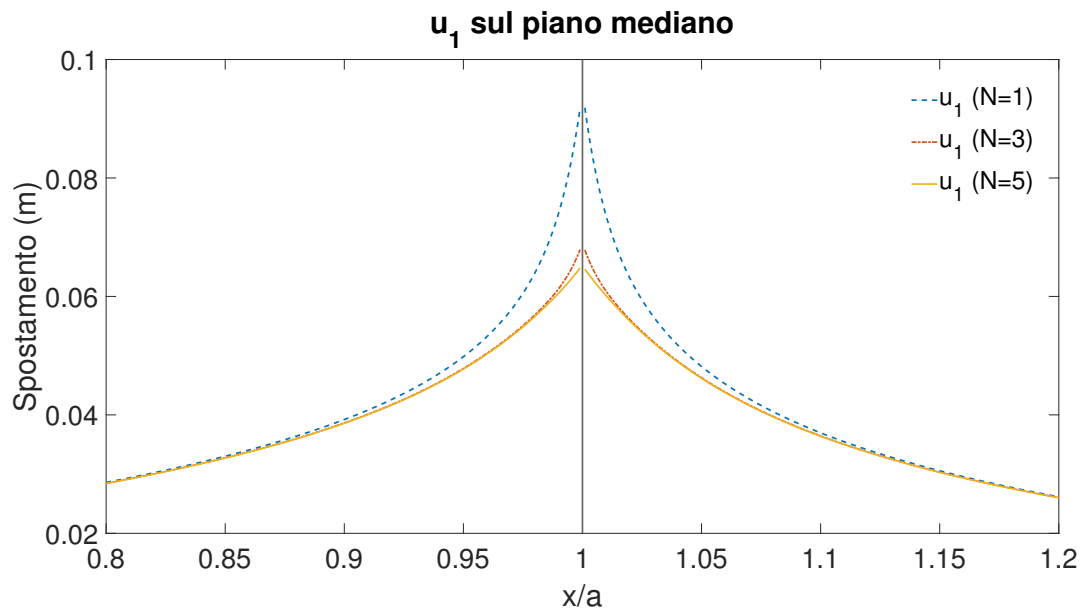


Figura 3.9: Spostamento orizzontale generato sul piano mediano da una sorgente di spessore 50 m formata da un singolo elemento (blu), da tre elementi (rosso) e da cinque elementi (giallo). Il centro della sorgente è $c = 3000$ m.

Valutiamo ora gli effetti della discretizzazione del cilindro spesso $d = 50$ m alla superficie, mostrando solamente gli spostamenti generati nei casi $N = 1$, $N = 3$ e $N = 5$:

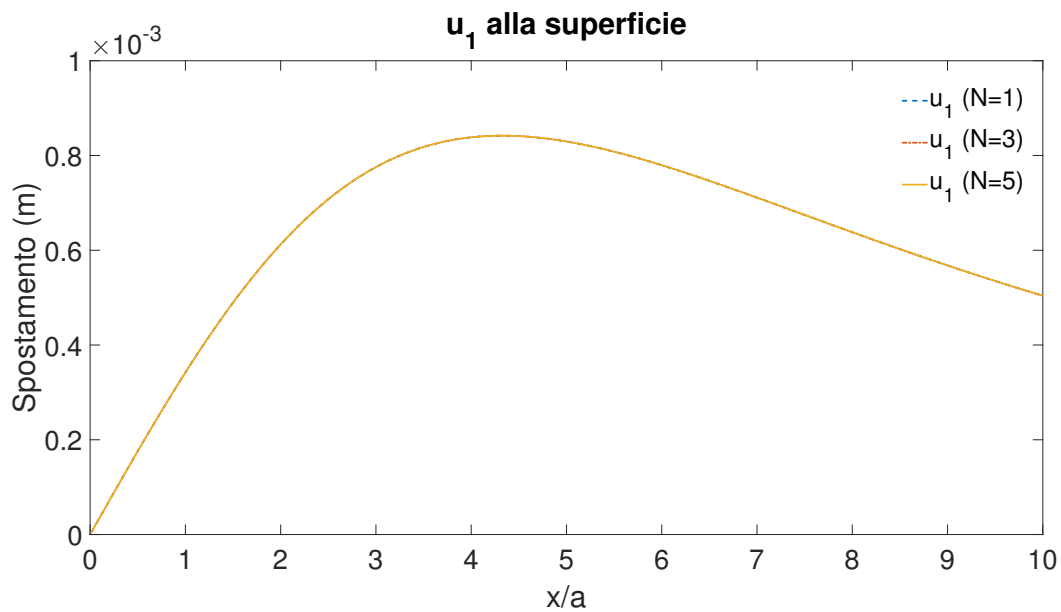


Figura 3.10: Spostamento orizzontale generato alla superficie da una sorgente di spessore 50 m formata da un singolo elemento (blu), da tre elementi (rosso) e da cinque elementi (giallo). Il centro della sorgente è $c = 3000$ m.

In figura 3.10 sono rappresentati le componenti orizzontali dello spostamento generato dal singolo elemento, dal cilindro discretizzato con $N = 3$ elementi e quello discretizzato con $N = 5$ elementi. Le soluzioni sono pressocchè sovrapposte, dal grafico infatti non siamo in grado di distinguere alcuna variazione. Infatti si può verificare che la variazione massima per u_1 è $\simeq 10^{-8}$ m, per questo le differenze tra le soluzioni sono indistinguibili.

Perciò possiamo affermare che a grande distanza dalla sorgente, non vi è differenza tra cilindro discretizzato e un disco di spessore infinitesimo, quando $d = 50$ m.

Prendiamo ora una sorgente considerevolmente più spessa di quella precedente ($d = 500$ m) e valutiamo gli effetti della discretizzazione. Partendo dal piano mediano, consideriamo di nuovo i due punti $x_{in} = 475$ m e $x_{out} = 525$ m e studiamo come varia lo spostamento orizzontale in funzione del numero di elementi N (fig. 3.11).

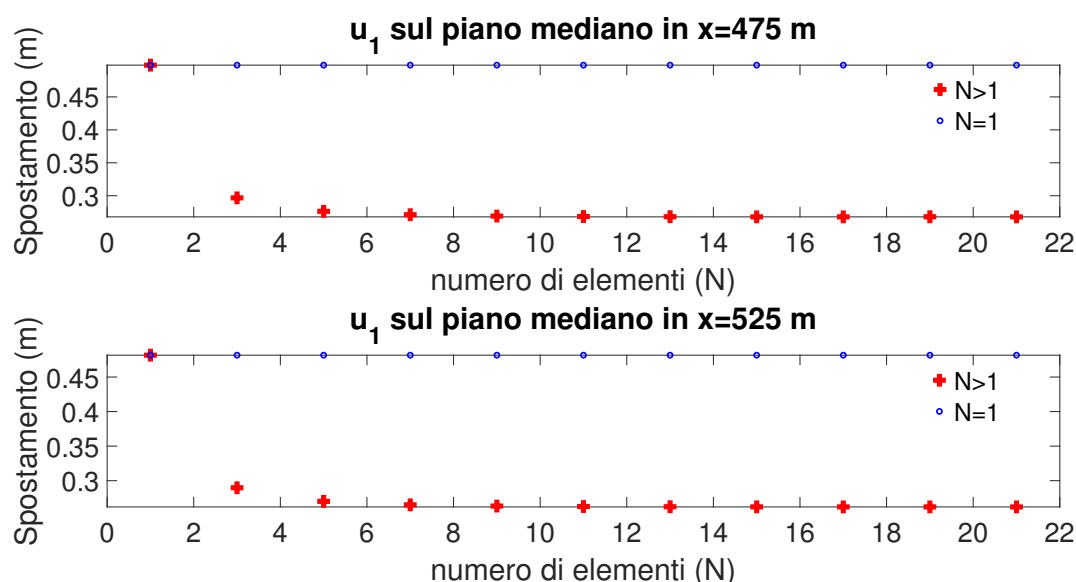


Figura 3.11: Confronto tra componente orizzontale dello spostamento generata sul piano mediano da una sorgente TPE di spessore $d = 500$ m ($N = 1$) e la componente orizzontale dello spostamento generata sul piano mediano da una sorgente TPE discretizzata da un numero $N > 1$ crescente di elementi. Entrambe le sorgenti hanno centro in $c = 3000$ m.

Come ci si poteva aspettare, si nota subito che i valori di spostamento sono maggiori di quelli del cilindro di spessore $d = 50$ m. In più $\Delta u_1 \simeq 2 \cdot 10^{-1}$ m è pari a 100 volte il precedente. Aumentando il numero di elementi Δu_1 aumenta ancora di più fino a che non si stabilizza dopo un numero N^* di elementi.

Di nuovo, rappresentiamo lo spostamento orizzontale generato per $N = 1$, $N = 3$ e $N = 5$ sul piano mediano: dalla figura 3.12 si può apprezzare come il modello ad elemento singolo si discosti considerevolmente dalle soluzioni discretizzate per tutto l'intervallo di x mostrato in figura. In più osserviamo che le soluzioni a 3 e 5 elementi si discostano tra loro di una differenza non trascurabile e ben evidente dal grafico.

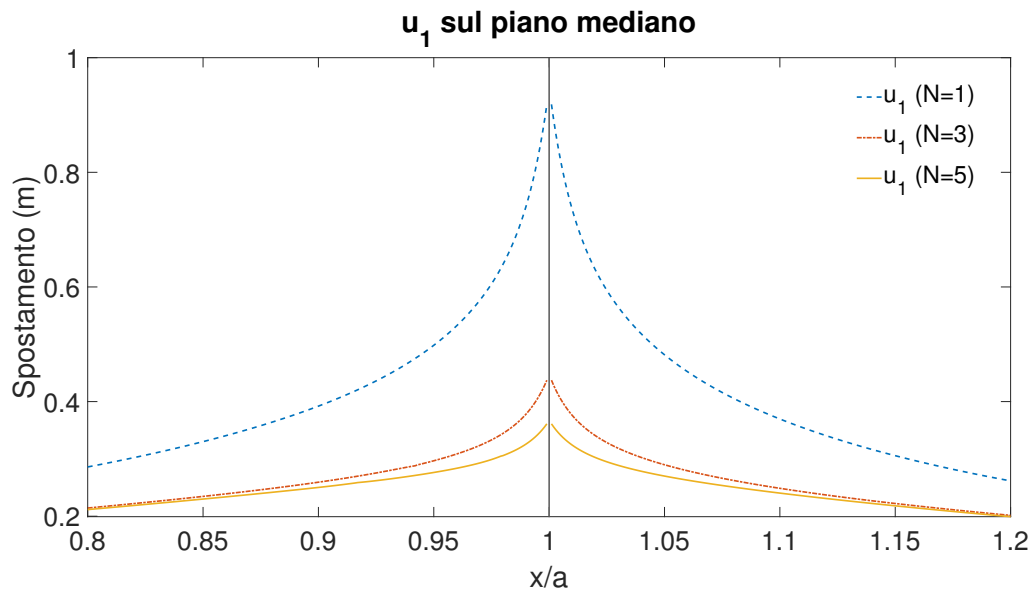


Figura 3.12: Spostamento orizzontale generato sul piano mediano da una sorgente di spessore $d = 500$ m formata da un singolo elemento (blu), da tre elementi (rosso) e da cinque elementi (giallo). Il centro della sorgente è $c = 3000$ m.

Modelliamo ora lo spostamento generato da un cilindro discretizzato di spessore $d = 500$ m con $N = 1$, $N = 3$ e $N = 5$ alla superficie:

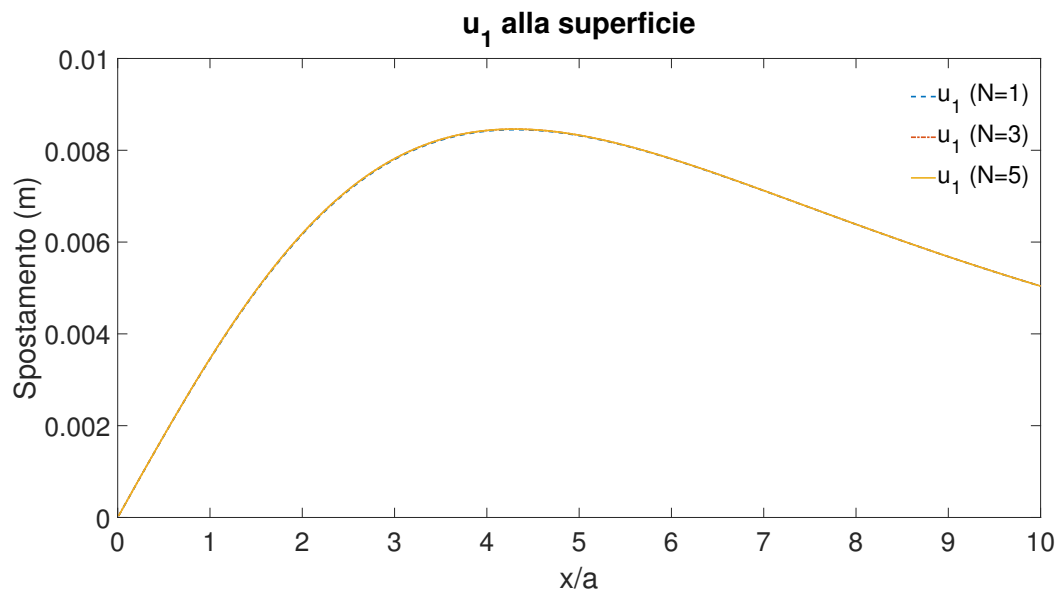


Figura 3.13: Spostamento orizzontale generato alla superficie da una sorgente di spessore $d = 500$ m formata da un singolo elemento (blu), da tre elementi (rosso) e da cinque elementi (giallo). Il centro della sorgente è $c = 3000$ m.

Come nel caso di $d = 50$ m, ritroviamo Δu_1 molto piccolo ($\simeq 10^{-5}m$), non visibile in figura. Perciò di nuovo possiamo affermare che alla superficie gli effetti della discretizzazione sullo spostamento sono trascurabili.

La discussione appena affrontata si riferisce alla sola componente orizzontale alla superficie in quanto con quella verticale, alla superficie si ritrovano variazioni piccole e trascurabili.

In questa sezione infatti si è scelto di mostrare l'andamento dello spostamento in funzione di N per due punti sull'asse x , uno interno alla sorgente TPE ed l'altro esterno. Se si scegliessero due punti diversi Δu_1 e il suo andamento in funzione di N cambierebbero come si vede ad esempio in figure 3.12. Per questo motivo è necessario un metodo che ci permetta di identificare N^* il più possibile indipendente dallo specifico punto in cui valutiamo l'accordo o il disaccordo fra gli effetti del singolo elemento (disco) e della somma degli elementi (cilindro discretizzato). Questo verrà descritto nella sezione successiva. Tuttavia d'ora si può arrivare alla seguente conclusione: lo spostamento orizzontale risente della discretizzazione in misura maggiore rispetto all'uplift. Più la sorgente è spessa, più la variazione tra gli spostamenti orizzontali è grande e dipende da d stesso. Per l'uplift invece, nonostante le dimensioni importanti della sorgente, la variazione Δu_3 è così ridotta rispetto allo spostamento misurato che la discretizzazione ha effetti trascurabili sulla componente verticale.

3.4.2 La discretizzazione di cilindri di diverso spessore (50 m e 500 m): sforzo

Analizziamo ora le componenti diagonali dello sforzo generato nei due punti $x_{in} = 475$ m e $x_{out} = 525$ m sul piano mediano da un disco spesso $d = 50$ m:

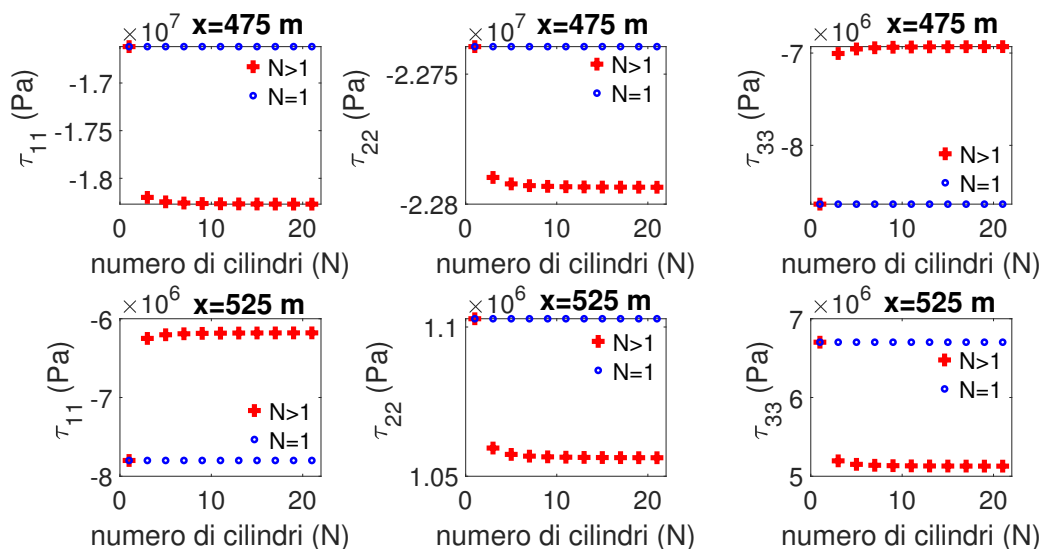


Figura 3.14: Confronto tra sforzo generato sul piano mediano da una sorgente TPE di spessore $d = 50$ m ($N = 1$) e quello generato sul piano mediano da una sorgente TPE discretizzata da un numero $N > 1$ crescente di elementi. Entrambe le sorgenti hanno centro in $c = 3000$ m.

nella figura 3.14 sono rappresentate tutte e tre le componenti dello sforzo, sia all'interno che all'esterno della sorgente. Le differenze sono indicativamente dell'ordine di $10^6 - 10^5$ Pa e variano in base alla posizione (all'interno o all'esterno della sorgente) ed alla componente dello sforzo.

Come nel caso dello spostamento, all'aumentare del numero N di elementi lo sforzo si stabilizza attorno ad un valore corrispondente a $N = N^*$. Vedremo che questo valore dipende dallo spessore d della sorgente e dal punto in cui si osserva il campo di stress. In

più, N^* dipende dalla componente di sforzo osservata.

Vediamo ora di rappresentare lo sforzo generato con $N = 1$, $N = 3$ e $N = 5$ da una sorgente spessa $d = 50$ m sul piano mediano:

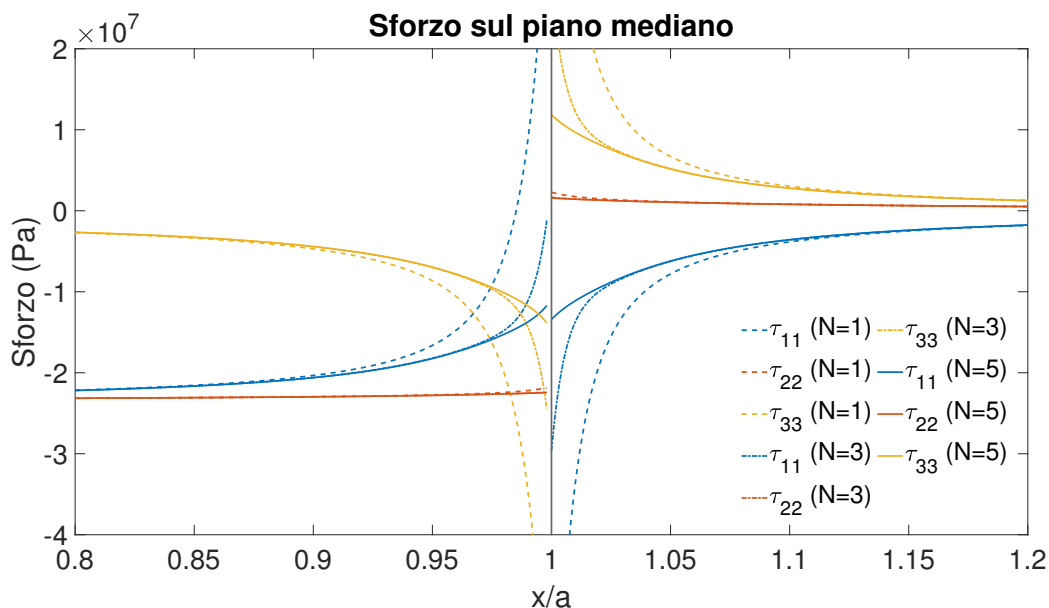


Figura 3.15: Sforzo generato sul piano mediano da una sorgente di spessore $d = 50$ m formata da un singolo elemento (tratteggiato), da tre elementi (punto-tratto) e da cinque elementi (linea continua). Il centro della sorgente è $c = 3000$ m.

Dalla figura 3.15 si può notare subito come l'effetto della discretizzazione agisca particolarmente sulle componenti τ_{11} e τ_{33} con valore massimo di variazione pari a $\sim 10^7$ Pa; per quanto riguarda la componente τ_{22} gli effetti sono molto minori e non rilevabili dal grafico. Come già detto in precedenza gli effetti differiscono da regione interna e regione esterna al cilindro.

Descriviamo ora gli effetti alla superficie della discretizzazione di un cilindro di spessore $d = 50$ m: come si può vedere nella figura 3.16, gli effetti alla superficie sono perlopiù trascurabili. Si riscontra infatti un $\Delta\tau \simeq 1$ Pa tra modello a elemento singolo e modello a cilindro discretizzato che, se confrontato con il valore dello sforzo pari a 10^4 Pa, risulta trascurabile. Anche nel caso dello sforzo misurato ad una grande distanza dalla sorgente, il valore del campo generato diminuisce e l'effetto della discretizzazione diventa trascurabile.

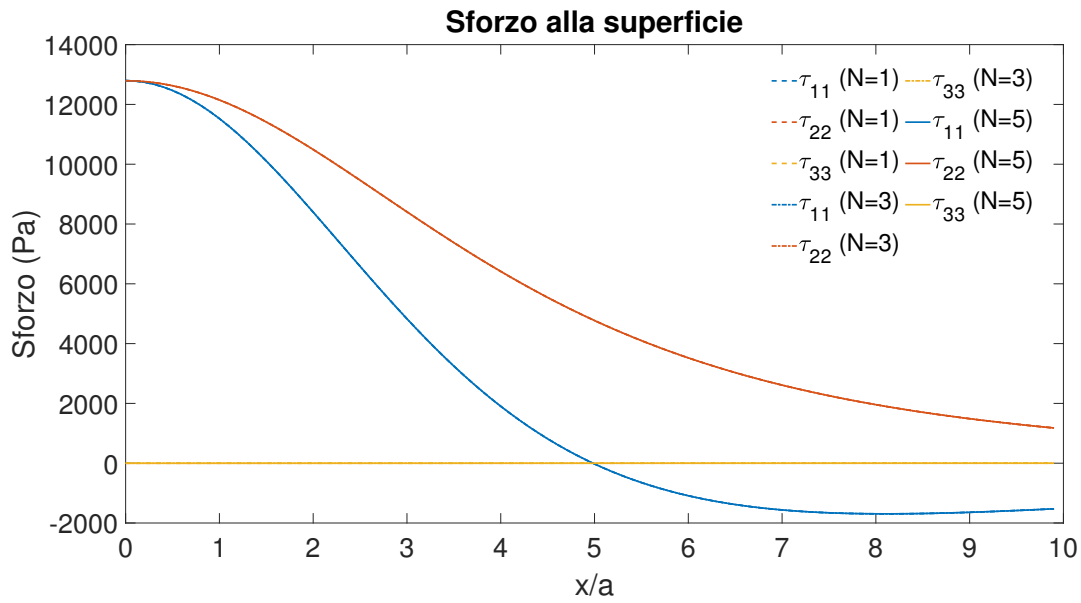


Figura 3.16: Sforzo generato alla superficie da una sorgente di spessore $d = 50$ m formata da un singolo elemento (tratteggiato), da tre elementi (punto-tratto) e da cinque elementi (linea continua). Il centro della sorgente è $c = 3000$ m.

Come per il campo di spostamento, procediamo con stesso tipo di analisi per lo stress generato da un cilindro di spessore $d = 500$ m: mostriamo l'andamento dello sforzo in funzione del numero di elementi N per due punti x_{in} e x_{out} .

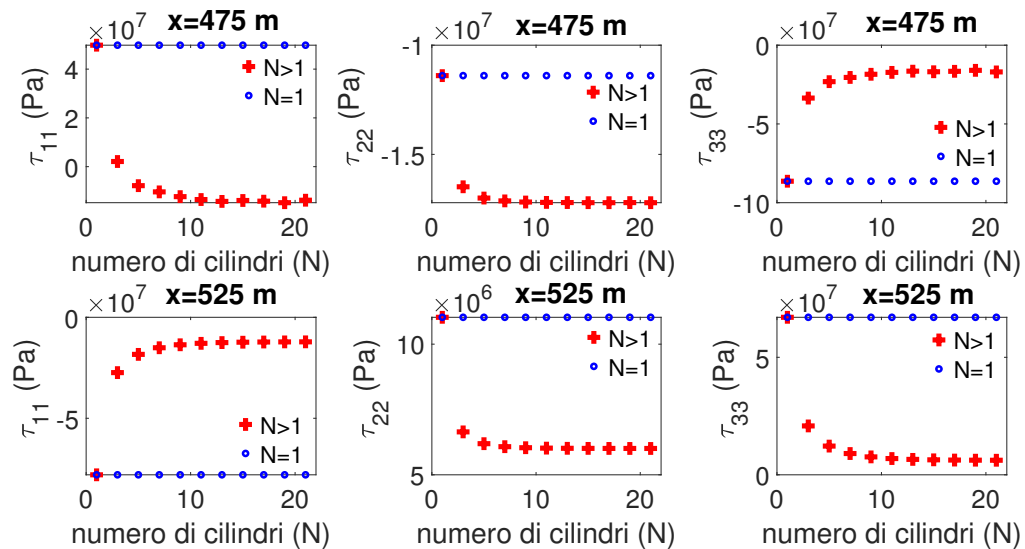


Figura 3.17: Confronto tra sforzo generato sul piano mediano da una sorgente TPE di spessore $d = 500$ m ($N = 1$) e quello generato sul piano mediano da una sorgente TPE discretizzata da un numero $N > 1$ crescente di elementi. Entrambe le sorgenti hanno centro in $c = 3000$ m.

Dalla figura 3.17 si evince che le variazioni maggiori per effetto della discretizzazione si riscontrano per τ_{11} e τ_{33} e sono $\geq 5 \cdot 10^7$ Pa, invece per τ_{22} sono inferiori a 10^7 Pa. In questo caso, il valore dello sforzo si stabilizza una volta superati un numero pari ad N^* elementi, il quale dipende anche dal tipo di componente.

Rappresentiamo ora lo stress generato sul piano mediano per $N = 1$, $N = 3$ e $N = 5$: dalla figura 3.18 si nota chiaramente che le componenti che risentono maggiormente della discretizzazione sono τ_{11} e τ_{33} , come già sottolineato dal grafico precedente. Gli effetti sono analoghi a quelli ottenuti per lo spessore $d = 50$ m ma in questo caso in misura molto maggiore, tale che lo stress ottenuto tramite cilindro discretizzato sia 3 volte più piccolo di quello generato dall'elemento singolo.

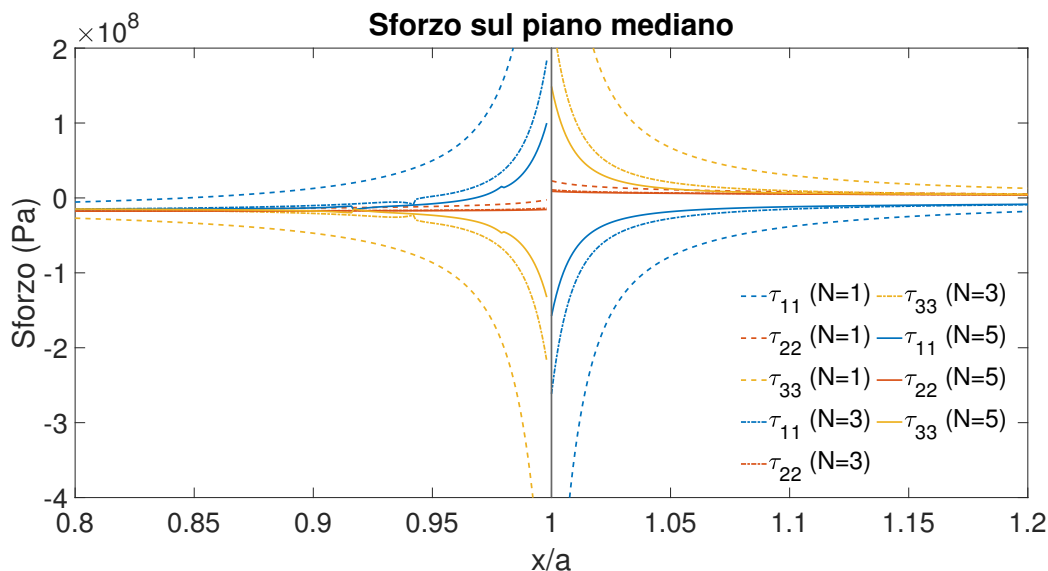


Figura 3.18: Sforzo generato sul piano mediano da una sorgente di spessore $d = 500$ m formata da un singolo elemento (tratteggiato), da tre elementi (punto-tratto) e da cinque elementi (linea continua). Il centro della sorgente è $c = 3000$ m.

Vediamo ora il grafico dello sforzo alla superficie nei casi $N = 1$, $N = 3$ e $N = 5$:

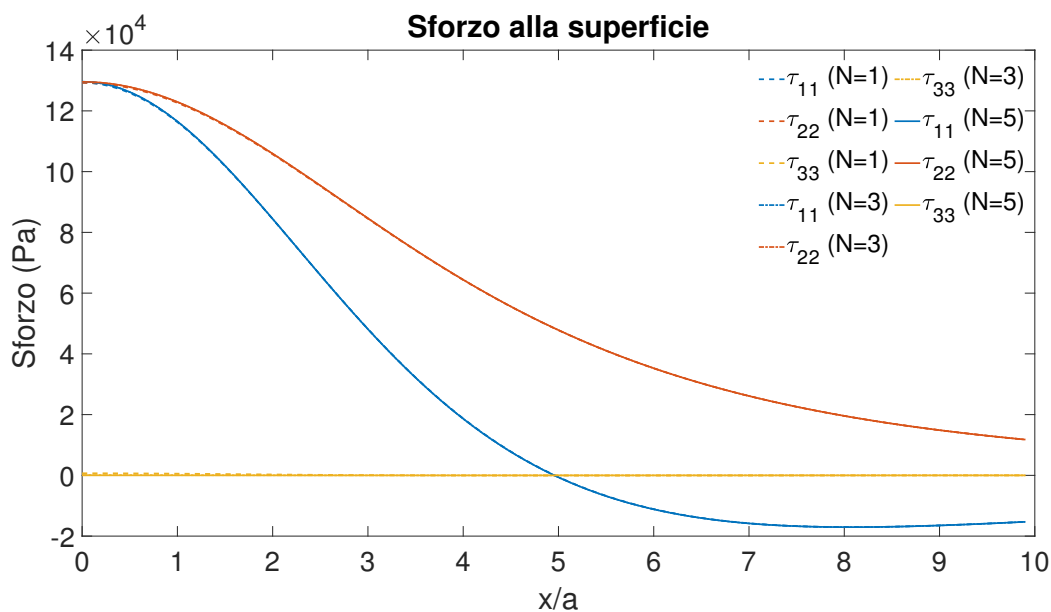


Figura 3.19: Sforzo generato alla superficie da una sorgente di spessore $d = 500$ m formata da un singolo elemento (tratteggiato), da tre elementi (punto-tratto) e da cinque elementi (linea continua). Il centro della sorgente è $c = 3000$ m.

Anche in questo caso (fig. 3.19) alla superficie non si riscontra alcuna variazione significativa tra i campi di stress generati da elemento singolo e cilindro discretizzato. La variazione massima, anche se trascurabile, si riscontra in corrispondenza di $x = 0$ m.

3.5 Criteri di discretizzazione al variare dello spessore

Dalle considerazioni fatte nel precedente paragrafo, si giunge alla conclusione che la discretizzazione del cilindro di spessore finito ci permette di studiare soluzioni per lo stress e lo spostamento tramite il modello a disco anche quando non vale l'ipotesi $d/a \ll 1$. Bisogna però individuare il numero ideale N^* di elementi da utilizzare. L'analisi fatta in precedenza, riferita a due punti particolari all'interno x_{in} e all'esterno x_{out} della sorgente TPE, la quale ci ha permesso di vedere l'andamento di spostamento e stress in funzione di N , non può essere considerata rappresentativa per spostamento e sforzo in qualunque altro punto a parità di profondità.

Stimiamo la differenza fra modello a cilindro con N elemento e modello a disco (o a elemento singolo) attraverso la quantità:

$$R_N(z) = \frac{1}{p} \sqrt{\sum_{k=1}^p [u^{(N)}(x_k, z) - u_d(x_k, z)]^2} \quad (3.27)$$

dove con $u^{(N)}(x_k, z)$ si intende lo spostamento calcolato mediante la discretizzazione a N elementi nel punto (x_k, z) , invece $u_d(x_k, z) = u^{(1)}(x_k, z)$ rappresenta lo spostamento calcolato mediante il modello a disco di Mantiloni et al. (2020) nel punto (x_k, z) . p rappresenta il numero di punti considerati sull'asse x .

Per definire N^* si utilizza il criterio che segue:

$$N^* = \min(N) \quad | \quad R_{N+1} - R_N < \epsilon \quad (3.28)$$

con $\epsilon = 0.0005$ m. Per $N > N^*$ possiamo ritenere che lo stimatore di disaccordo R_N non vari più di ϵ , quindi anche i risultati per lo spostamento che si ottengono utilizzando un modello a $N > N^*$ elementi non differiscano in media più di ϵ dai risultati ottenuti con N^* elementi. Si può quindi ritenere che N^* rappresenti il numero adeguato di elementi con cui discretizzare un sorgente TPE a cilindro di spessore finito d (criterio di discretizzazione).

Bisogna precisare che per il calcolo di R_N associato allo spostamento, è stato escluso l'intervallo di punti in corrispondenza della singolarità: seguendo le indicazioni descritte da Lamberti (2017), si è deciso di escludere il seguente intervallo:

$$0.96 < |x/a| < 1.04 \quad (3.29)$$

In questo modo la misura del R_N non viene compromessa dal comportamento della funzione nella singolarità.

Le formule analoghe per lo sforzo sono:

$$S_N(z) = \frac{1}{p} \sqrt{\sum_{k=1}^p [\tau^{(N)}(x_k, z) - \tau_d(x_k, z)]^2} \quad (3.30)$$

$$N^* = \min(N) \quad | \quad S_{N+1} - S_N < \epsilon \quad (3.31)$$

dove $\epsilon = 5000$ Pa e $\tau_d(x_k, z) = \tau^{(1)}(x_k, z)$.

Anche per lo stress è stato necessario escludere un intervallo di punti sull'asse x , lo stesso indicato in 3.29, dato che lo sforzo presenta una singolarità in $x \simeq a$.

La determinazione di N^* viene fatta per ogni spessore a partire da $d = 50$ m ($d/a = 0.1$) fino a $d = 500$ m ($d/a = 1$). Il passo utilizzato per lo spessore è 50 m. Dato che le maggiori discrepanze tra cilindro discretizzato e disco si riscontrano sul piano mediano, focalizzeremo la nostra analisi in $z = 3000$ m.

La scelta dei valori di ϵ per spostamento e sforzo viene fatta sulla base di rilevanze scientifiche: il primo, che vale 0.5 mm, ci permette di considerare un errore dell'ordine di grandezza di quello commesso dai sistemi di GPS; il secondo, che vale 5000 Pa, è dello stesso ordine di grandezza (10^3 Pa) del valore limite di sforzo spesso associato alla sismicità indotta. Riteniamo opportuno quindi non considerare valori più piccoli di questi presi in considerazione, in quanto portano già a criteri sufficientemente severi, almeno in funzione dei nostri scopi.

Analizziamo i risultati ottenuti per lo spostamento in funzione dello spessore d :

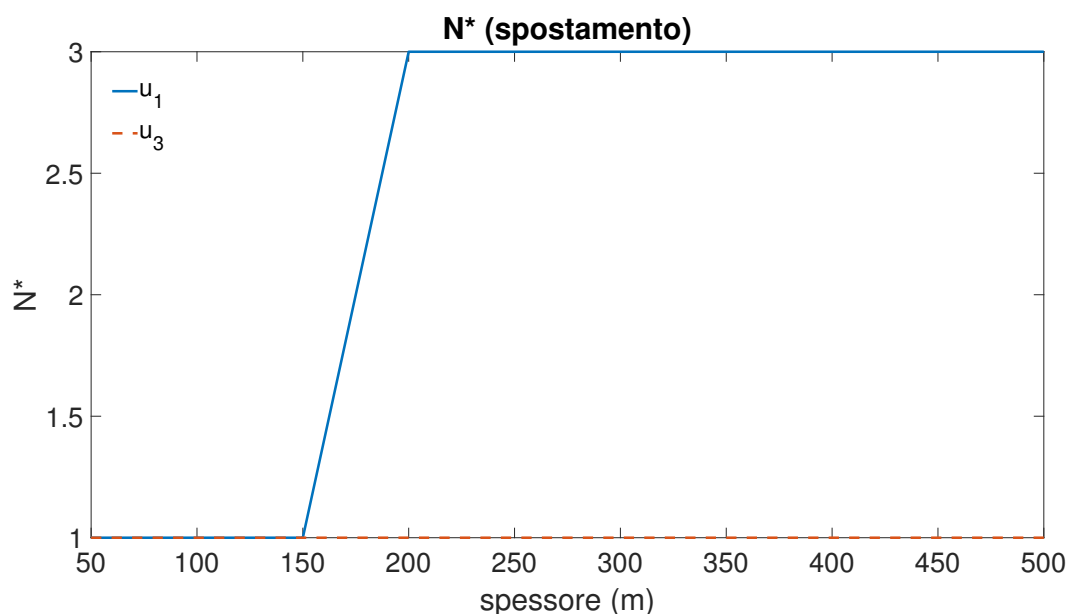


Figura 3.20: Andamento di N^* in funzione dello spessore d per lo spostamento sul piano mediano. Il passo utilizzato per lo spessore è di 50 m.

Il numero di elementi N^* (fig. 3.20), aumenta al crescere dello spessore, come ci si poteva aspettare: più il cilindro è spesso, più è necessario avere un numero grande di

elementi. Nel caso dello spostamento però il numero di elementi necessario è estremamente basso, pari a 1 per uno spessore pari a $d = 50 - 150$ m e pari a 3 per spessori pari o superiori a $d = 200$ m.

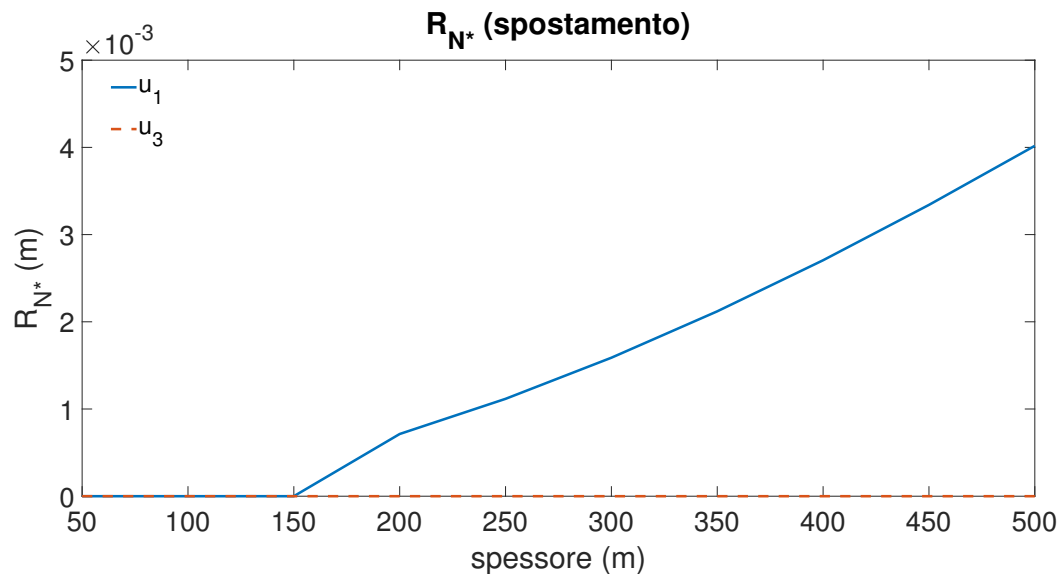


Figura 3.21: R_{N^*} calcolato per lo spostamento generato da cilindri di spessore variabile (da 50 m a 500 m con passo di 50 m) sul piano mediano.

Per lo spostamento sul piano mediano si ottiene un valore di R_{N^*} crescente con l'aumentare dello spessore (fig. 3.21).

Studiamo ora le variazioni legate allo stress sul piano mediano:

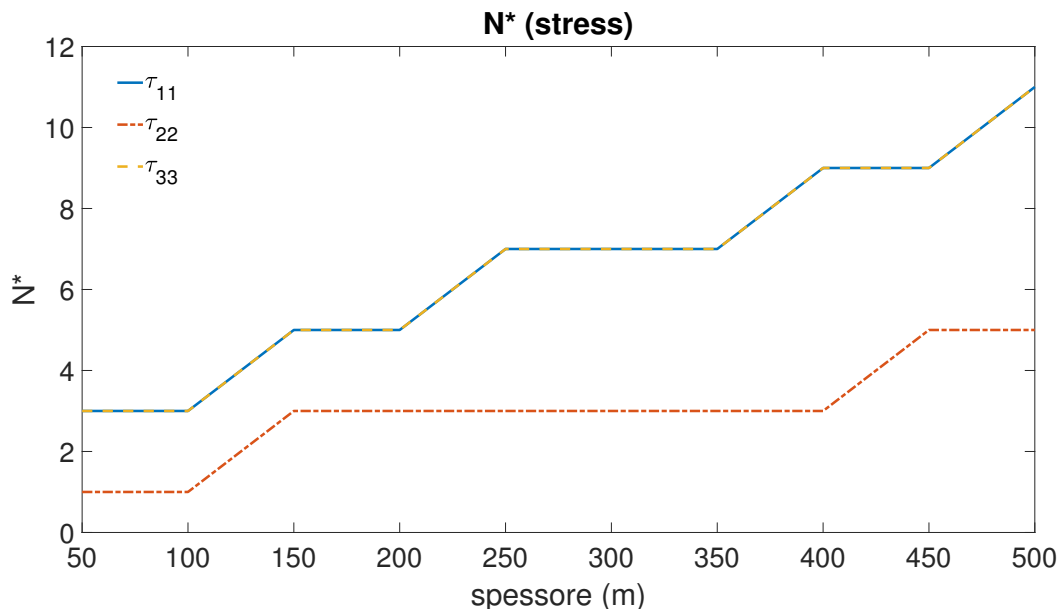


Figura 3.22: Andamento di N^* in funzione dello spessore d per lo sforzo sul piano mediano. Il passo utilizzato per lo spessore è di 50 m.

Come si può vedere dalla figura 3.22, il criterio di convergenza applicato alle componenti di stress, in particolare per τ_{33} e τ_{11} , è più esigente di quello applicato allo spostamento richiedendo un numero di elementi maggiore per ogni d . S_{N^*} raggiunge

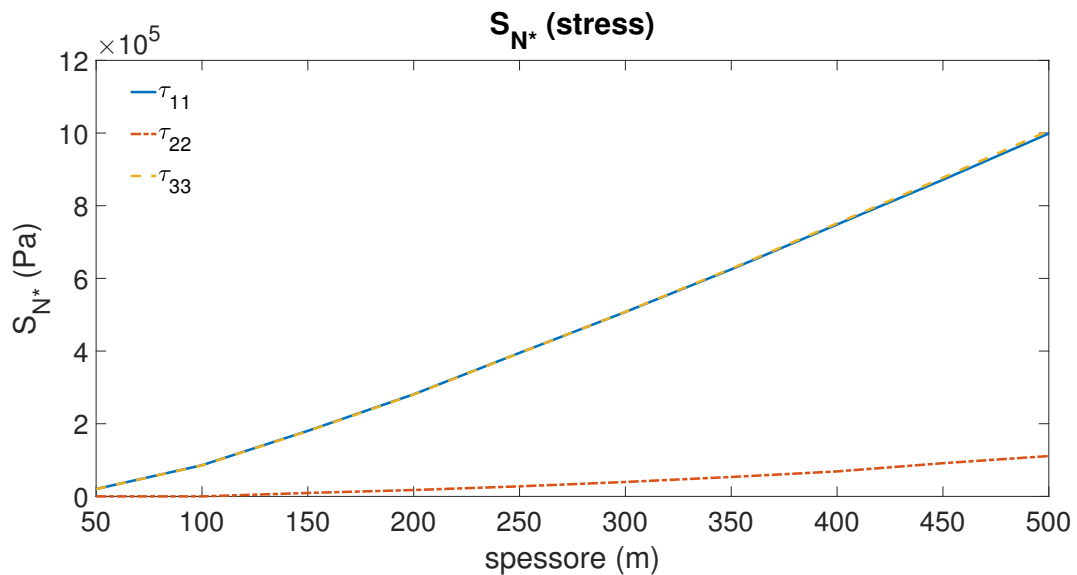


Figura 3.23: S_{N^*} calcolato per lo stress generato da cilindri di spessore variabile (da 50 m a 500 m con passo di 50 m) sul piano mediano.

valori considerevolmente più alti per le componenti τ_{11} e τ_{33} ($\sim 10^6$ Pa per $x/a = 1$) rispetto a quelli ottenuti per la componente τ_{22} ($\sim 10^5$ Pa) (fig. 3.23). Ciò dimostra che le prime due componenti risentono maggiormente della discretizzazione rispetto a quest'ultima.

Tenendo conto dei dati appena mostrati vogliamo definire un criterio unico per stabilire il numero di cilindri N^* in funzione dello spessore: la scelta ricadrà quindi sui valori di N^* ottenuti per lo sforzo dal momento che richiede un numero di elementi maggiore dello spostamento, adottando il quale, viene garantita anche la convergenza per entrambi. Perciò, se volessimo rappresentare spostamento e stress per un cilindro di spessore finito d dovremmo discretizzare la sorgente con numero di elementi pari a:

Spessore totale sorgente (d)	Numero di elementi (N^*)
50 m	3
100 m	3
150 m	5
200 m	5
250 m	7
300 m	7
350 m	7
490 m	9
450 m	9
500 m	11

Tabella 3.1: Spessore totale del cilindro e corrispondente numero di elementi.

3.5.1 Confronto con modello numerico (Mindlin)

Per apprezzare quanto un cilindro discretizzato in N^* elementi possa rappresentare realmente un cilindro di spessore finito, confrontiamo ora i risultati ottenuti per il campo di spostamento e sforzo per un cilindro di spessore $d = 500$ m discretizzato con $N = N^* = 11$ con quelli che si ottengono tramite un modello numerico che considera una distribuzione di forze sulla superficie del cilindro (gli effetti di ciascuna delle quali sono stati valutati da Mindlin, 1936 in modo tale da riprodurre l'equazione 2.11). Confrontando le componenti del campo di spostamento generato sul piano mediano si ottiene:

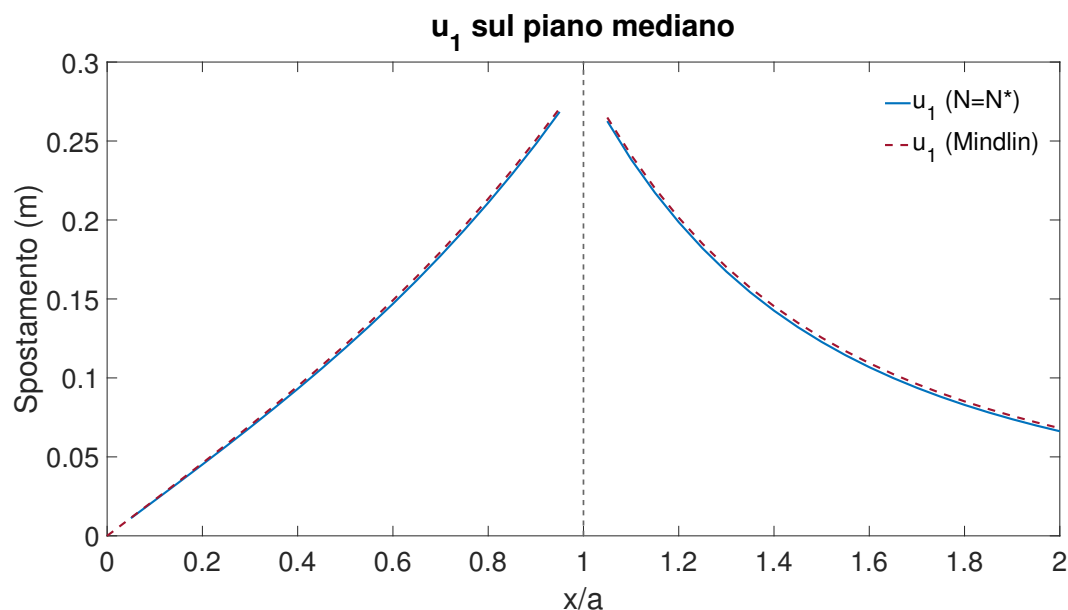


Figura 3.24: Confronto tra spostamento orizzontale generato da modello discretizzato con $N = N^*$ e quello generato dal modello numerico. La sorgente ha spessore $d = 500$ m e centro $c = 3000$ m.

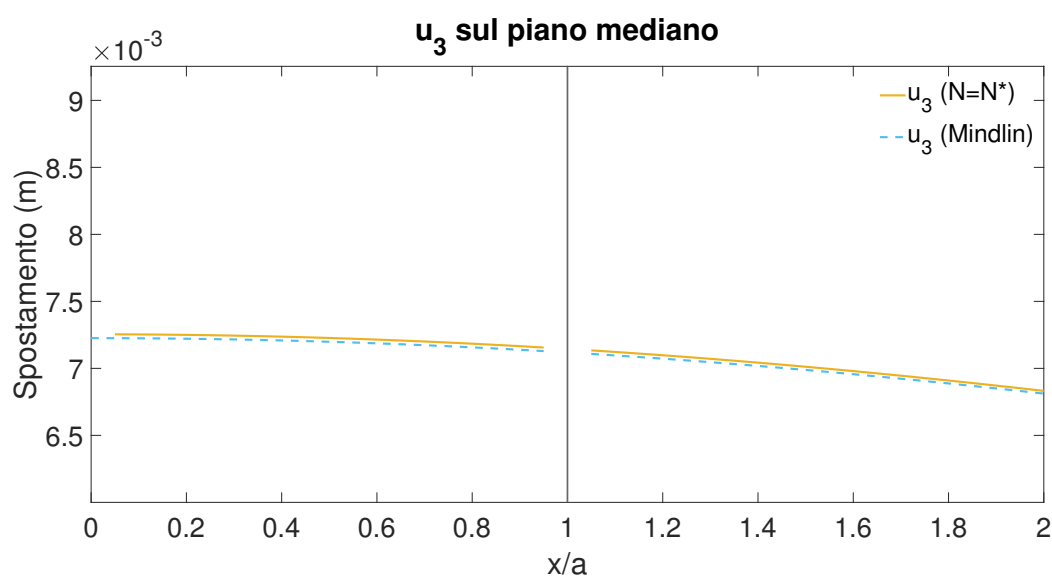


Figura 3.25: Confronto tra spostamento verticale generato da modello discretizzato con $N = N^*$ e quello generato dal modello numerico. La sorgente ha spessore $d = 500$ m e centro $c = 3000$ m.

Nelle figure 3.24 e 3.25 si può notare che sia lo spostamento orizzontale che quello verticale risultano molto simili (eventuali discrepanze dipendono anche dalla distribuzione di forze scelta per il modello di confronto). Perciò il modello discretizzato ad 11 cilindri, approssima in maniera soddisfacente il modello di confronto.

Per quanto riguarda lo sforzo, qui di seguito si presenta il grafico di confronto sul piano mediano:

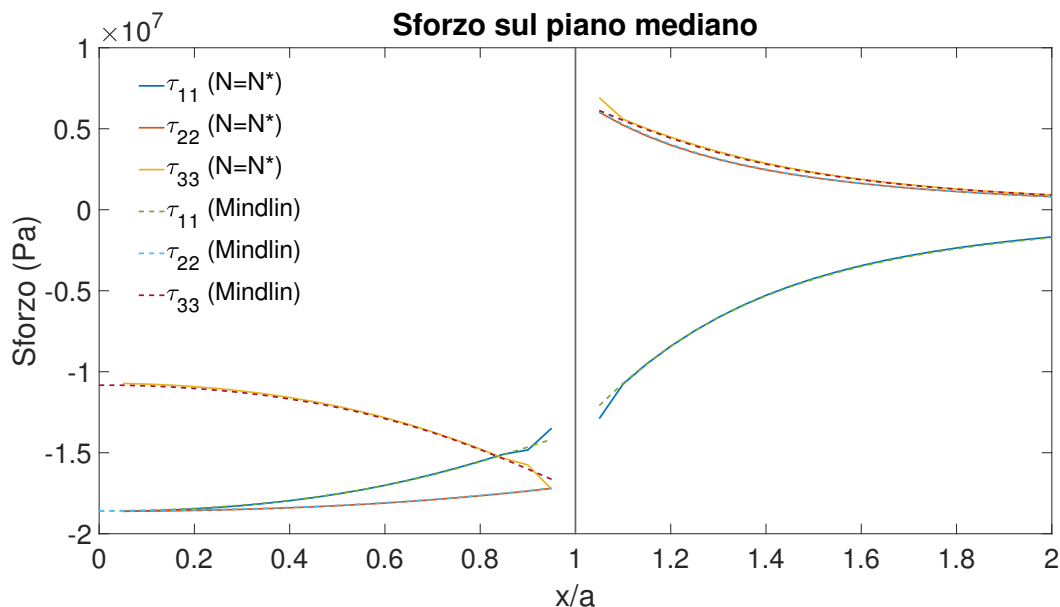


Figura 3.26: Confronto tra stress generato da nostro modello discretizzato con $N = N^*$ e quello generato dal modello numerico. La sorgente ha spessore $d = 500$ m e centro $c = 3000$ m.

Per lo sforzo invece (fig. 3.26) le componenti risultano perlopiù sovrapposte, a parte in $x \sim a$ in cui il nostro modello risente maggiormente della discontinuità. Anche in questo caso si può dire che il nostro modello a 11 elementi approssima in maniera soddisfacente lo sforzo ottenuto tramite il modello di confronto.

A supporto della nostra precedente affermazione valutiamo l'errore S , analogo all'equazione 3.31, considerando come termine di confronto il modello numerico:

$$S(z, \tau) = \frac{1}{p} \sqrt{\sum_{k=1}^p [\tau^{(N)}(x_k, z) - \tau_{num}(x_k, z)]^2} \quad (3.32)$$

Partendo da $N = 5$ fino ad un massimo di $N = 15$, vediamo come questo parametro varia in funzione del numero di elementi.

Osservando la figura 3.27 si può affermare che il modello discretizzato con $N = N^* = 11$ elementi ben rappresenta il modello numerico di cilindro con spessore finito, dato che il valore S per $N = 11$ risulta molto inferiore rispetto al valore di S_{N^*} . Non si ritiene opportuno prendere in considerazione un numero di elementi più elevato, poichè anche il modello numerico ottenuto tramite le soluzioni di Mindlin (1936) è soggetto ad incertezze essendo basato sulla rappresentazione dell'integrale di superficie 2.11, ottenuto tramite una distribuzione di forze singole applicate sulla superficie della sorgente TPE. La precisione del modello numerico (Mindlin) dipende quindi dalla finezza della distribuzione di forze.

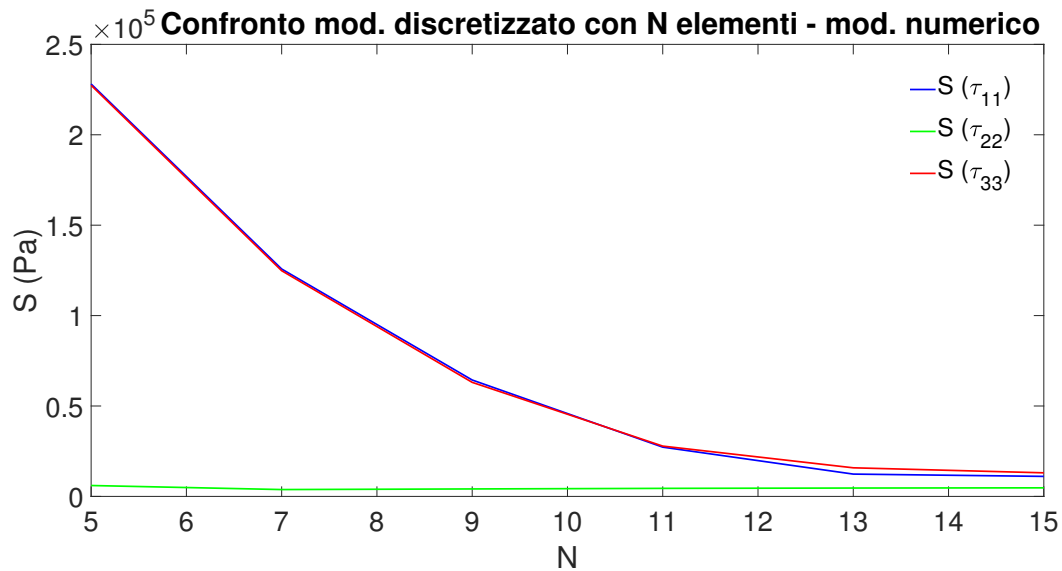


Figura 3.27: Andamento del parametro S in funzione del numero di elementi (N) usati per discretizzare il cilindro di spessore $d = 500$ m.

3.5.2 Massimo spessore degli elementi

A partire dai valori di tabella 3.1, possiamo valutare $d_e^* = d/N^*$, cioè lo spessore massimo degli elementi che devono essere utilizzati per discretizzare un cilindro di spessore finito in base al criterio di convergenza:

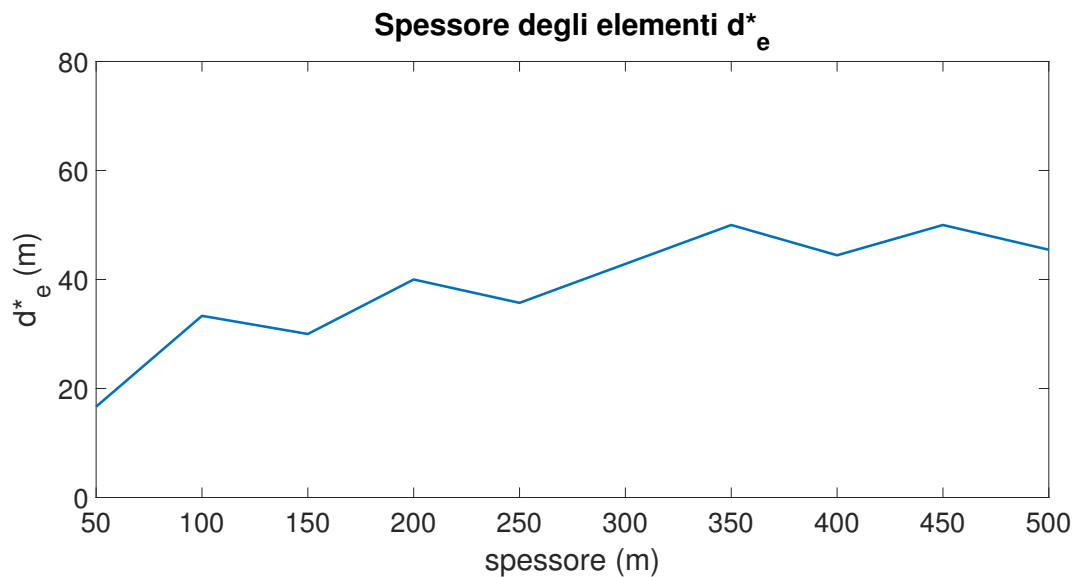


Figura 3.28: Andamento di d_e^* in funzione dello spessore d . Il passo utilizzato per lo spessore è di 50 m.

Dalla figura 3.28 possiamo affermare che lo spessore degli elementi discretizzanti risulta quasi costante e si aggira tra i 16 m e i 50 m.

Capitolo 4

Applicazioni dei risultati

In questo elaborato si considera un'inclusione termo-poro-elastica a forma di cilindro di raggio $a = 500$ m e spessore d variabile. La sorgente è inserita in un semispazio poro-elastico in condizioni drenate ed isoterme ed il suo centro si trova ad una profondità di $c = 3000$ m. A partire dal modello di disco infinitesimo descritto da Mantiloni et al. (2020), si studiano gli effetti che lo spessore d può apportare al campo di spostamento e di stress generato da un'inclusione termo-poro-elastica di forma cilindrica. Poichè il modello a disco infinitesimo richiede che il rapporto spessore-raggio d/a sia piccolo, si rappresenta la sorgente TPE (di spessore finito) tramite la sovrapposizione di dischi o elementi riproducendo lo spessore totale. Lo spostamento e lo sforzo risultanti sono dati dalla somma degli spostamenti e degli sforzi dei singoli elementi, riprodotti tramite il modello a disco. Questo è reso possibile dal fatto che le condizioni al contorno del sistema rimangono inalterate, come dimostrato nella sezione 3.4.

Nella prima parte della nostra analisi, che comprende lo studio di spostamento e sforzo dei singoli elementi (sezione 3.3) ed il confronto degli effetti per cilindri di spessore 50 m e 500 m (paragrafi 3.4.1 e 3.4.2), si riscontra che le maggiori differenze tra effetti generati da un disco singolo e cilindro discretizzato sono visibili sul piano mediano della sorgente stessa ($z = c$). Ciò è dovuto al fatto che la sorgente si trova ad una profondità molto maggiore rispetto alle sue dimensioni $c > a$, perciò i campi di spostamento e di sforzo in superficie risentono in maniera trascurabile degli effetti della discretizzazione.

Introducendo gli stimatori di disaccordo R_N e S_N , nella sezione 3.5 si valuta il numero ottimale N^* di elementi per ciascun spessore d . Lo studio è affrontato solo per il piano mediano, ove si riscontrano le maggiori discrepanze tra i due modelli. N^* rappresenta il numero di elementi oltre il quale lo stimatore di disaccordo raggiunge un valore stabile entro $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ m per lo spostamento e $\epsilon = 5 \cdot 10^3$ Pa per lo sforzo. I risultati ottenuti indicano che il numero N^* dipende dalla componente di sforzo considerata, in particolare, delle tre componenti sulla diagonale considerate, la componente τ_{33} , cioè lo sforzo normale su superfici orizzontali, richiede il massimo numero di elementi N^* . I suddetti valori di N^* sono riportati nella tabella 3.1. A partire dai valori di N^* corrispondenti ad ogni spessore d , si ritrova che lo spessore massimo d_e degli elementi utilizzati per discretizzare un cilindro risulta compreso tra i 16 m ed i 50 m (paragrafo 3.5.2). I risultati del modello

a N^* elementi sono confermati da un modello numerico indipendente per un cilindro di spessore finito (paragrafo 3.5.1).

4.1 Confronto disco - cilindro di spessore finito

Nella sezione 3.5, abbiamo definito il numero di elementi N^* necessario per rappresentare un cilindro di spessore finito d (tab. 3.1). Da quanto risulta dalla nostra analisi, in numero N^* è crescente con l'aumentare dello spessore totale d : ci si aspetta quindi che pure l'errore che si commette rappresentando una sorgente TPE cilindrica aumenti all'aumentare dello spessore stesso. Infatti gli stimatori R_{N^*} e S_{N^*} crescono all'aumentare di d (figure 3.21 e 3.23) e, in base alla loro definizione, rappresentano una stima dell'errore medio che si commette utilizzando un modello a disco al posto di un modello a N^* elementi nel rappresentare spostamento e sforzo sul piano mediano. L'errore relativo associato a una componente di spostamento nel punto di coordinata x, z (figura 3.1) valutata tramite modello a disco, u^d , al posto del modello a N^* elementi, $u^{(N^*)}$. Viene stimato come segue:

$$\frac{\Delta u}{u}(z) = \frac{1}{p} \sqrt{\sum_{k=1}^p \frac{[u^{(N^*)}(x_k, z) - u_d(x_k, z)]^2}{u^{(N^*)}(x_k, z)}} \quad (4.1)$$

invece quello relativo a una componente di sforzo valutata tramite modello a disco, τ^d , al posto del modello a N^* elementi, $\tau^{(N^*)}$:

$$\frac{\Delta \tau}{\tau}(z) = \frac{1}{p} \sqrt{\sum_{k=1}^p \frac{[\tau^{(N^*)}(x_k, z) - \tau_d(x_k, z)]^2}{\tau^{(N^*)}(x_k, z)}} \quad (4.2)$$

dove x_k è un punto lungo il profilo orizzontale a z costante passante per l'asse del cilindro. Nel calcolo dell'errore però si è deciso di escludere un intorno del bordo del cilindro come indicato nel calcolo del valore R_{N^*} e S_{N^*} (eq. 3.27 per lo spostamento e 3.31 per lo sforzo). La scelta è dovuta al fatto che all'interno della regione esclusa, le singolarità di spostamento e sforzo non ci permetterebbero di stimare adeguatamente i valori di errore. I risultati al variare di d sono mostrati nelle figure 4.1 per spostamento e figura 4.2 per sforzo. Come previsto si nota che anche l'errore percentuale cresce con lo spessore del disco ed è inferiore per lo spostamento rispetto allo sforzo.

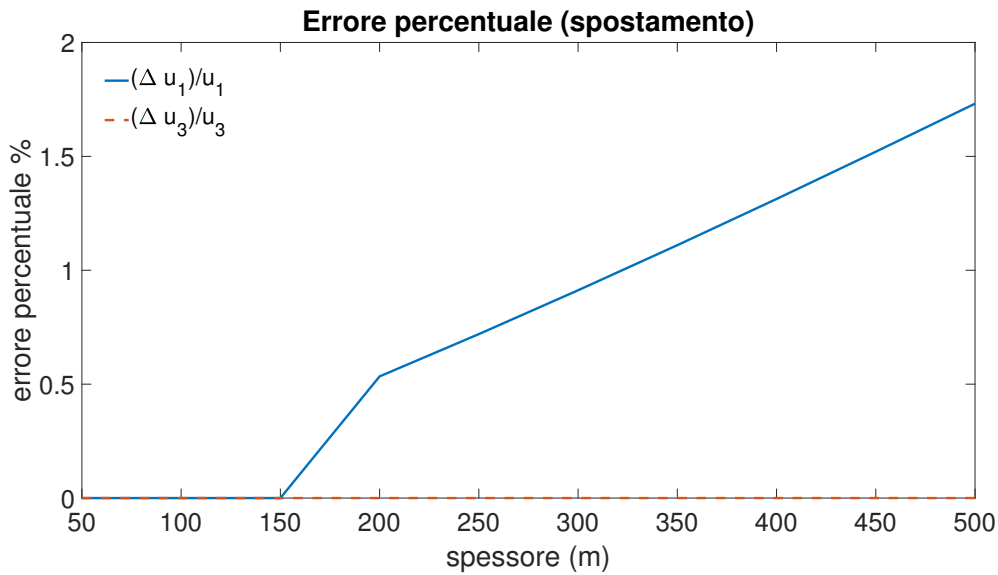


Figura 4.1: Errore percentuale associato allo spostamento generato da cilindri di spessore variabile (da 50 m a 500 m con passo di 50 m) sul piano mediano $z = c$.

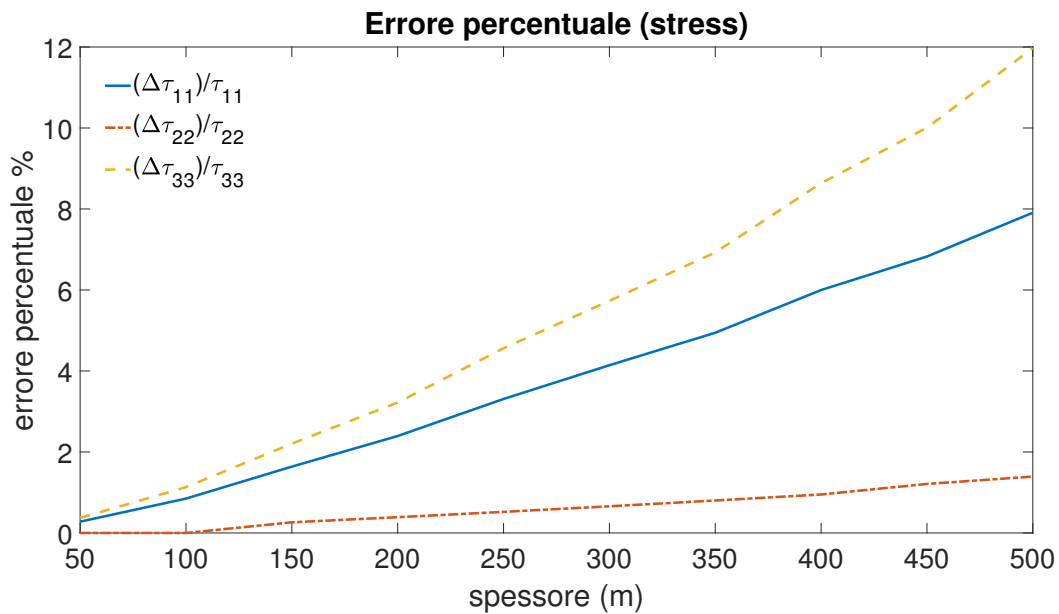


Figura 4.2: Errore percentuale associato allo stress generato da cilindri di spessore variabile (da 50 m a 500 m con passo di 50 m) sul piano mediano.

Per definire quale sia lo spessore massimo d_{MAX} oltre il quale si rende necessaria una rappresentazione a $N^* > 1$ elementi e al di sotto della quale invece il modello a disco di Mantiloni (2019) resta valido si è considerato l'errore relativo sulla componente τ_{33} (tramite la quale abbiamo definito i valori di N^*) prefissando il relativo massimo valore che si è disposti tollerare: consideriamo ad esempio il 2%. Con riferimento alla figura 4.2, si vede che lo spessore di soglia d_{MAX} vale 150 m (nella sezione 2.3 infatti ci si è limitati a mostrare la soluzione a disco fino ad un massimo di $d = 140$ m, inferiore al limite che abbiamo appena definito).

Si deduce quindi che la soluzione a disco (Mantiloni et al., 2020) vale fino a uno spessore $d_{MAX} = 150$ m (cioè un rapporto $d/a = 0.3$) entro un errore del 2%. Quando lo spessore

supera questo valore allora la discretizzazione si rende necessaria. Bisogna tenere conto che il valore di soglia d_{MAX} dipende dall'errore richiesto dal particolare problema studiato: più questo è piccolo più si rende necessario discretizzare cilindri con spessori sempre minori.

A titolo di esempio consideriamo una sorgente a cilindro di spessore finito $d = 500$ m ($d/a = 1$), e confrontiamo sul piano mediano i risultati con quelli del modello a disco.

Richiamando la tabella 3.1, il numero di elementi necessario per uno spessore di 500 m risulta essere 11 e i risultati del confronto sul piano mediano fra modello a disco e cilindro discretizzato a N^* elementi sono mostrati in figura 4.3 (componente u_1 dello spostamento) e figura 4.4 (componenti diagonali dello sforzo).

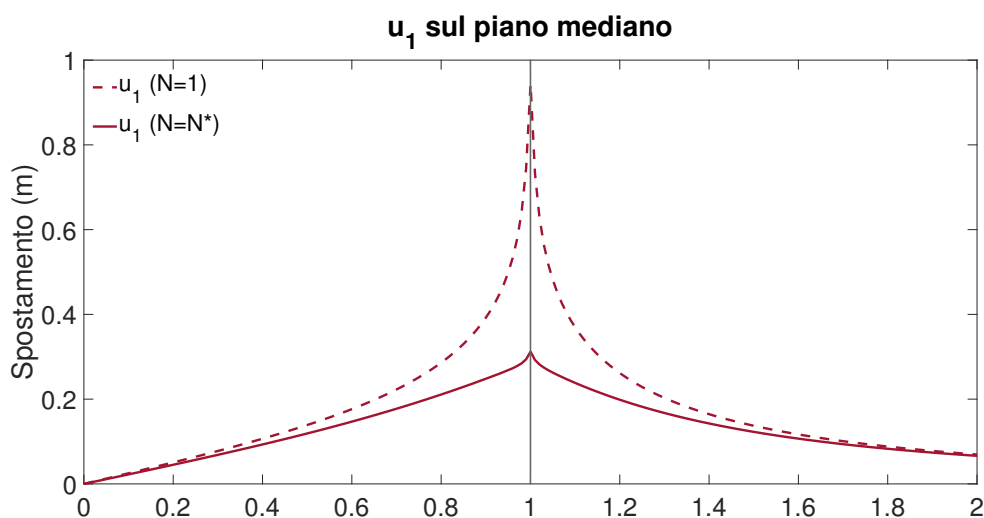


Figura 4.3: Componente u_1 dello spostamento generato tramite modello a elemento singolo ($N = 1$) e tramite modello a cilindro di spessore finito con $N = N^* = 11$. Lo spessore della sorgente è di $d = 500$ m e ha centro in $c = 3000$ m.

In accordo coi risultati di figura 3.21, nelle figure 4.3 e 4.4 si vede che in questo l'errore medio commesso dal modello a disco è dell'ordine di mezzo cm per lo spostamento orizzontale e di 1 MPa per le componenti sforzo τ_{11} e τ_{33} .

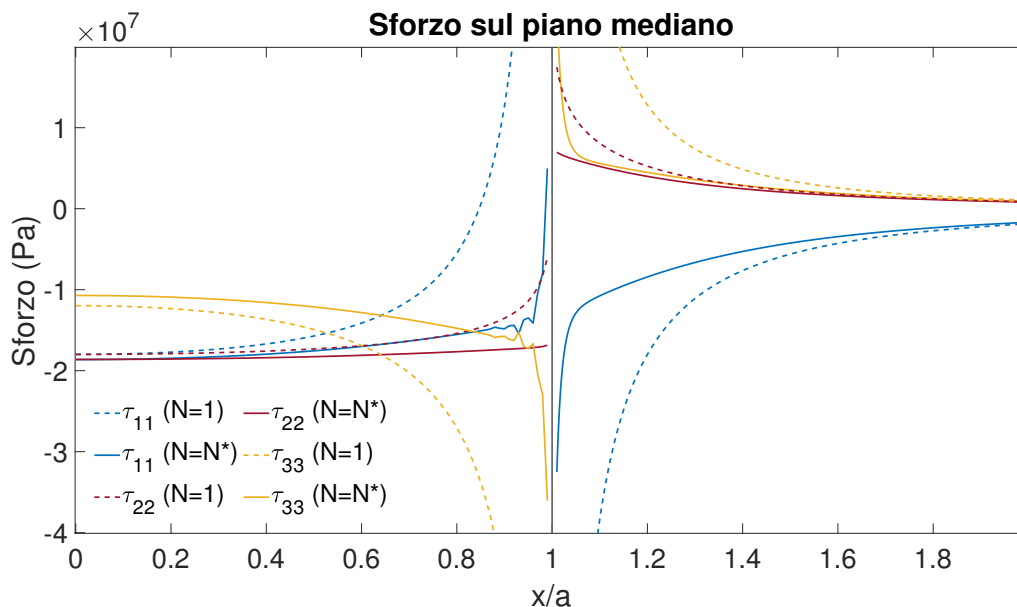


Figura 4.4: Stress tramite modello a elemento singolo ($N = 1$) e tramite modello a cilindro discretizzato con $N = N^* = 11$. Lo spessore della sorgente è di $d = 500\text{m}$ e ha centro in $c = 3000\text{ m}$. In questo particolare caso in cui $d/a = 1$, lo sforzo all'interno della sorgente tende a diventare isotropo, come nel caso della sorgente puntiforme.

4.2 Inclusione TPE a Campi Flegrei e l'evento di unrest 1982-84

Nel caso fino ad ora considerato, in cui $a < c$, abbiamo calcolato stress e spostamento solo sul piano mediano, sul quale le discrepanze tra i due modelli sono evidenti. Infatti per gli effetti di campo lontano, alla superficie abbiamo ritrovato variazioni trascurabili.

Poniamoci ora in un caso reale: consideriamo il periodo di unrest che ha caratterizzato i Campi Flegrei tra il 1982 e il 1984. In due anni si è registrato un innalzamento complessivo massimo di circa 1.8 m (Belardinelli et al., 2011) accompagnato da una serie di eventi sismici di magnitudo compresa tra 0.2 – 4.2 in particolare nell'area di Solfatara e nel porto di Pozzuoli. Recenti studi riguardanti la fenomenologia dell'evento, hanno interpretato il fenomeno di uplift come conseguenza di un eccesso di pressione contenuto nella camera magmatica ad di sotto dei Campi Flegrei ed alla conseguente migrazione di fluido caldo (Bonafede, 1990). Lo spostamento di fluido ha probabilmente generato una variazione di temperatura e di pressione di poro nel mezzo circostante, dando origine a campi di deformazione e sforzo. Dagli studi tomografici basati sugli eventi sismici degli anni 82 – 84 nei Campi Flegrei, risulta uno strato di rocce tra gli 1.7 ed i 2.2 km di profondità nel quale si è riscontrato una grande quantità di terremoti. In questo substrato sismico si riconosce una zona caratterizzata da una permeabilità più elevata (Calò and Tramelli, 2018) in cui vi è presenza di fluido. Questa regione, di diametro circa 3.5 – 4 km e spessore 500 m, può essere rappresentata mediante l'inclusione termo-poro-elastica. Nel lavoro di Mantiloni et al. (2020), tramite la procedura di inversione dei dati geodetici si ritrovano i seguenti valori per il modello a disco TPE: raggio $a = 1.9\text{ km}$, profondità della sorgente $c = 1.9\text{ km}$ e spessore $d = 500\text{ m}$ in accordo con le evidenze di tomografia

(Calò and Tramelli, 2018).

Vogliamo quindi testare la procedura proposta in questa tesi su di un caso reale per verificare quindi se questo tipo di sorgente può essere rappresentata mediante il modello a disco, oppure se lo spessore richiede di essere discretizzato. Mentre il rapporto spessore-raggio d/a in questo caso è pari a 0.26, invece il rapporto profondità-raggio $c/a = 1$ corrisponde a un valore inferiore a quello utilizzato nei capitoli precedenti. Dobbiamo studiare come dipendono spostamento e sforzo, dallo spessore del cilindro. Ci aspettiamo una relazione di proporzionalità come quella verificata nel caso del modello a disco (paragrafo 2.3.1), dato che il modello a cilindro discretizzato viene realizzato per sovrapposizione di elementi a disco. Si noti che tale proporzionalità non è banale per la parte non singolare degli effetti della sorgente TPE, mentre lo è per la parte singolare, dal momento che questa è proporzionale a d/a tramite la costante A (equazioni 2.20, 2.21 per lo spostamento e 2.30 e 2.31 per la deformazione e quindi lo sforzo). Inoltre nel caso di sorgente superficiale, $c/a \leq 1$, gli effetti della parte non singolare non possono essere trascurati (Mantiloni, 2019).

Riprendendo l'analisi fatta in sezione 3.5, per una sorgente TPE con raggio e profondità uguali a quelli ottenuti dall'inversione di Mantiloni et al. (2020), e spessore variabile, si ottengono i risultati mostrati nelle figure 4.5 - 4.9.

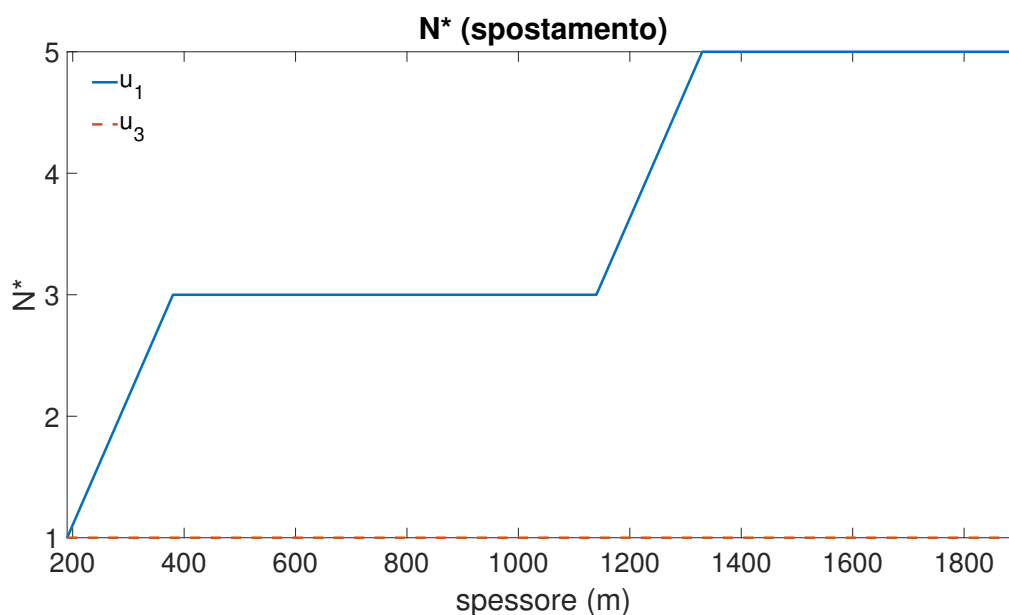


Figura 4.5: Andamento di N^* in funzione dello spessore d tra 190 e 1900 m per lo spostamento sul piano mediano. Il centro della sorgente è $c = 1900$ m e il raggio è $a = 1900$ m.

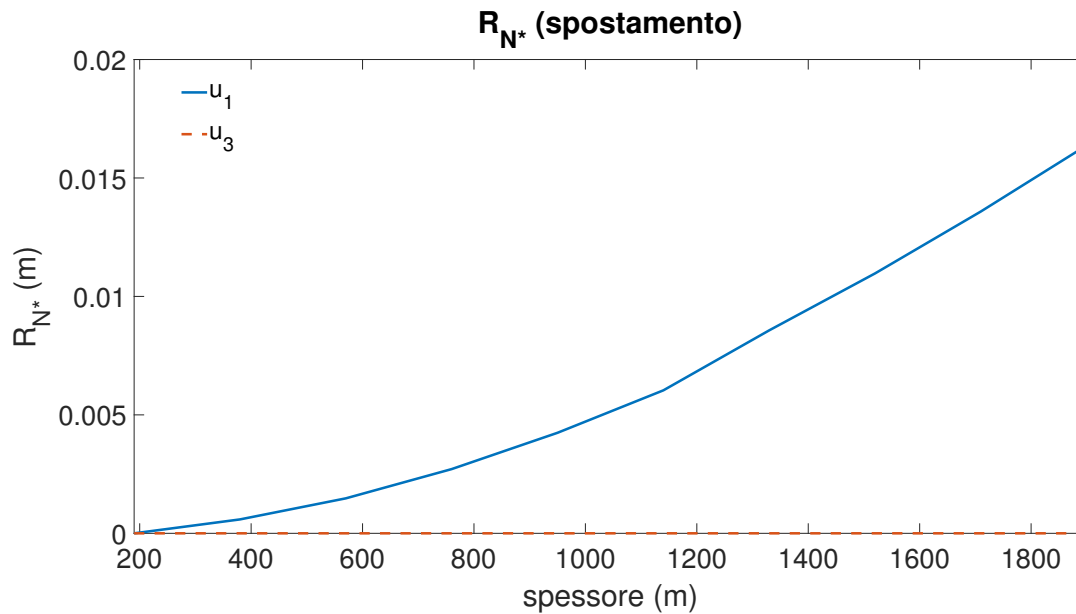


Figura 4.6: R_{N^*} in funzione dello spessore d tra 190 e 1900 m per lo spostamento sul piano mediano. Il centro della sorgente è $c = 1900$ m e il raggio è $a = 1900$ m.

Anche in questo caso, il numero di elementi N^* definito dal criterio di discretizzazione per lo spostamento risulta più piccolo (fig. 4.5) di quello richiesto per riprodurre la componente τ_{33} dello sforzo (figura 4.8), con un massimo di $N^* = 5$ per $d > 1330$ m. Anche se il valore dello stimatore R_{N^*} raggiunge gli 1.7 cm per $d = 1900$ m (fig. 4.6), l'errore percentuale commesso è al massimo pari a 1.9% (fig. 4.7).

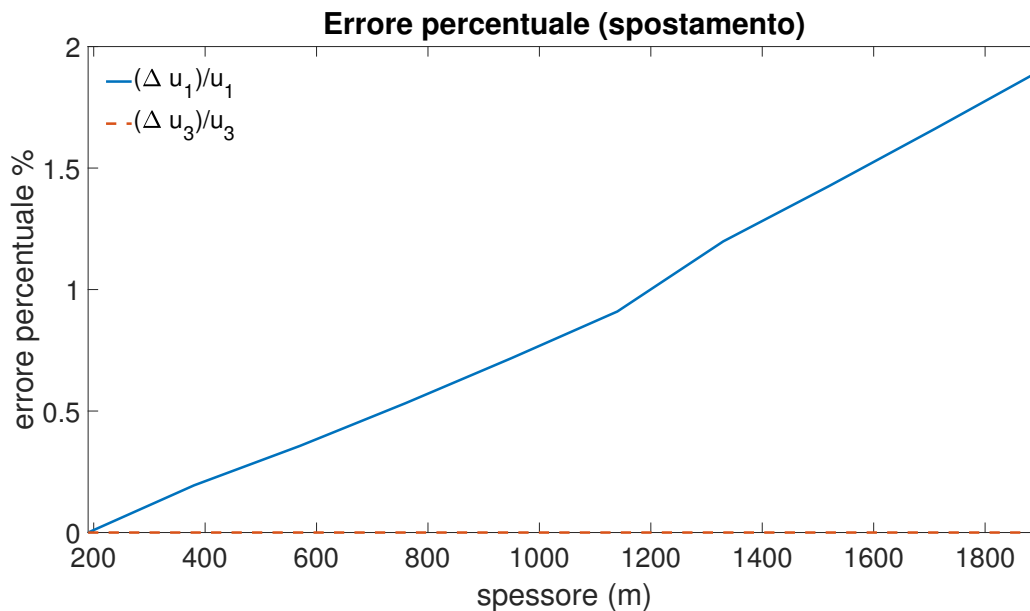


Figura 4.7: Andamento dell'errore percentuale in funzione dello spessore d tra 190 e 1900 m per lo spostamento sul piano mediano. Il centro della sorgente è $c = 1900$ m e il raggio è $a = 1900$ m.

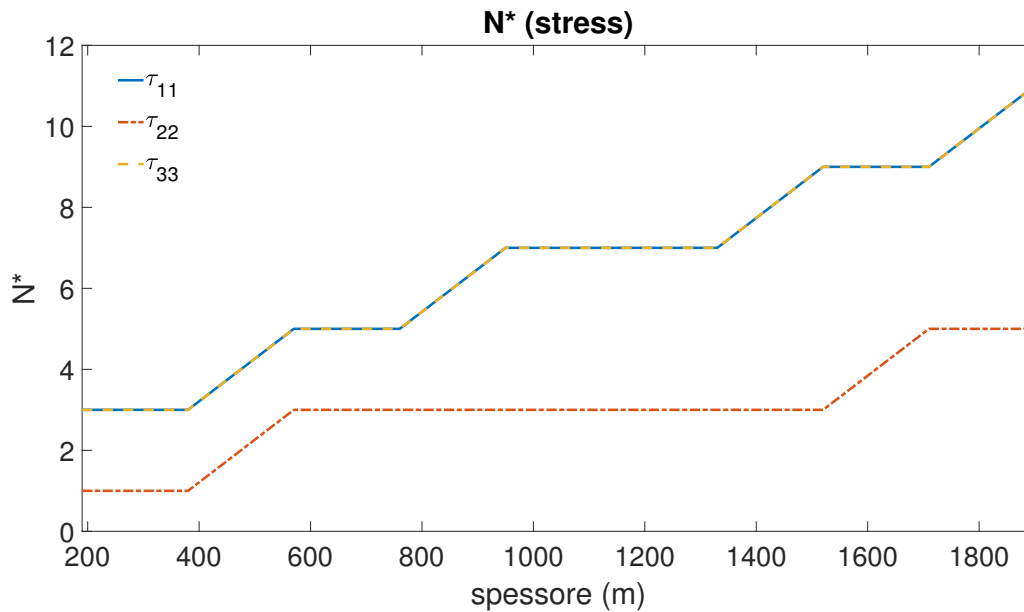


Figura 4.8: Andamento di N^* in funzione dello spessore d tra 190 e 1900 m per lo sforzo sul piano mediano. Il centro della sorgente è $c = 1900$ m e il raggio è $a = 1900$ m.

L'errore percentuale per τ_{33} raggiunge il 10%, per un rapporto $d/a = 1$ (fig.4.9) e, a partire da uno spessore pari a $d = 570$ m si commette un errore più alto del 2%.

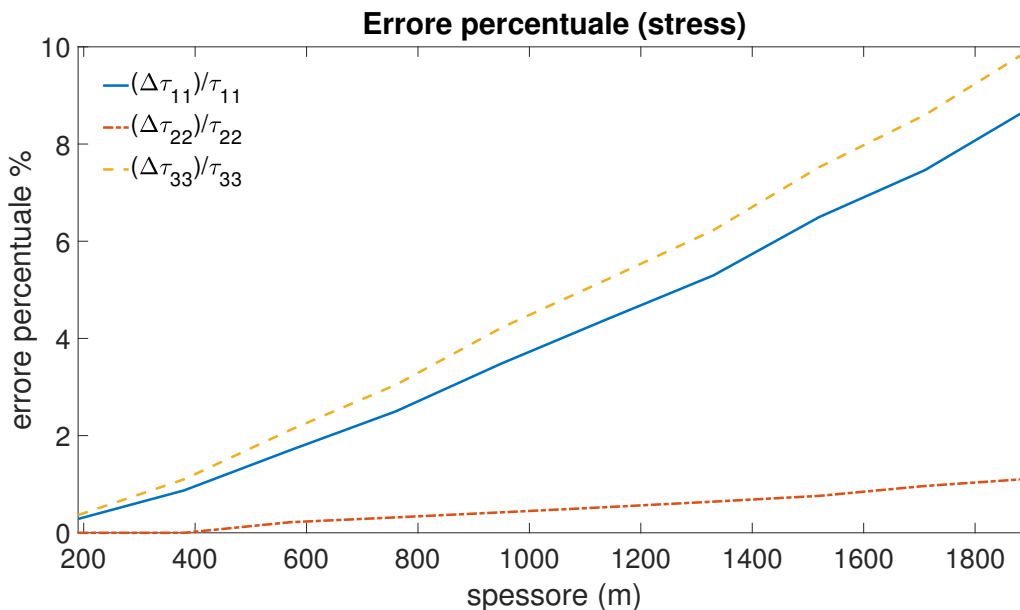


Figura 4.9: Andamento dell'errore percentuale in funzione dello spessore d tra 190 e 1900 m per lo sforzo sul piano mediano. Il centro della sorgente è $c = 1900$ m e il raggio è $a = 1900$ m.

Visto che non vale più la condizione di campo lontano, in questo caso approfondiamo lo studio anche alla superficie. Nel caso dello spostamento, si ritrova $N^* > 1$ solo per spessori più grandi di 1140 m. Lo stimatore di disaccordo R_{N^*} che valuta anche l'errore assoluto commesso dal modello a disco ha valori molto bassi, dell'ordine di circa 10^{-3} m. Se si considera infatti che lo spostamento misurato per i Campi Flegrei nel periodo 82-84 è dell'ordine dei decimetri, con errori di misura superiori al centimetro, le discrepanze tra i due modelli possono essere trascurate. Possiamo quindi concludere che il modello a

disco di Mantiloni et al. (2020), rappresenta in maniera adeguata la sorgente TPE nella sua applicazione a Campi Flegrei.

In base a una analisi preliminare della riproduzione del campo di sforzo alla superficie, risulta un criterio di discretizzazione meno severo rispetto a quello sul piano mediano, come era nel caso $c/a > 1$. Tuttavia, nel caso $c/a = 1$ e $d/a > 0.5$, il modello a cilindro discretizzato è necessario al fine di riprodurre la condizione di superficie libera $\tau_{33} = 0$.

Perciò in questo caso la condizione più stringente, per quanto riguarda i valori di N^* è imposta dallo sforzo sul piano mediano e per ogni spessore, il numero di elementi necessario è:

Spessore totale sorgente (d)	Numero di elementi (N^*)
190 m	3
380 m	3
570 m	5
760 m	5
950 m	7
1140 m	7
1330 m	7
1520 m	9
1710 m	9
1900 m	11

Tabella 4.1: Spessore totale del cilindro e corrispondente numero di elementi.

Una volta individuato il numero di elementi N^* corrispondente allo spessore d , rappresentiamo il campo di spostamento in superficie e il campo di sforzo sul piano mediano generati da un cilindro di spessore finito al variare dello spessore. Nel caso dello spostamento in superficie mostriamo la componente orizzontale in figura 4.10 e la componente verticale in figura 4.11.

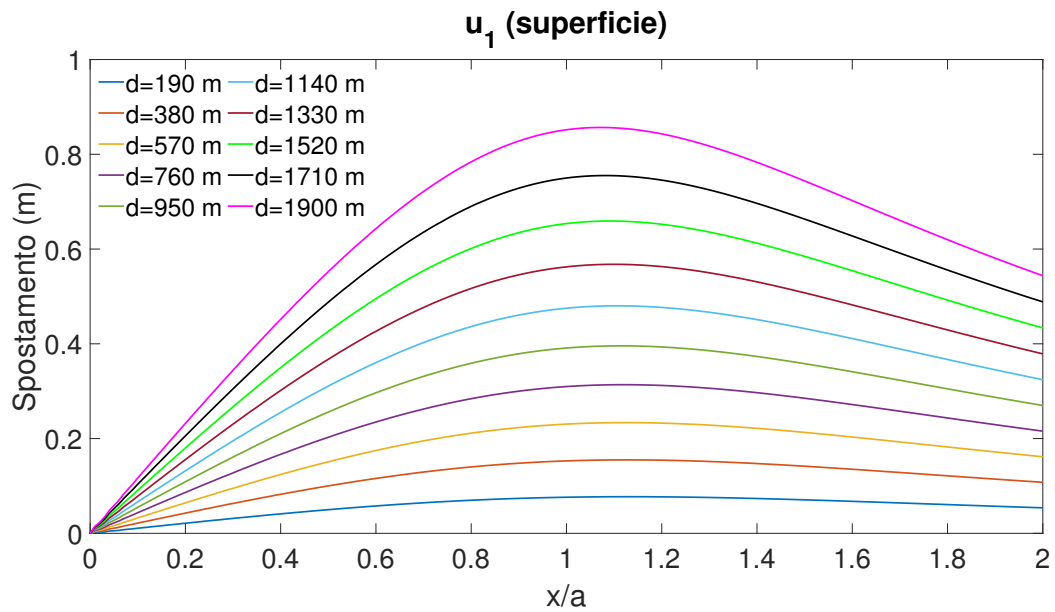


Figura 4.10: Andamento della componente orizzontale dello spostamento alla superficie. Il centro della sorgente è $c = 1900$ m e il raggio è pari a $a = 1900$ m.

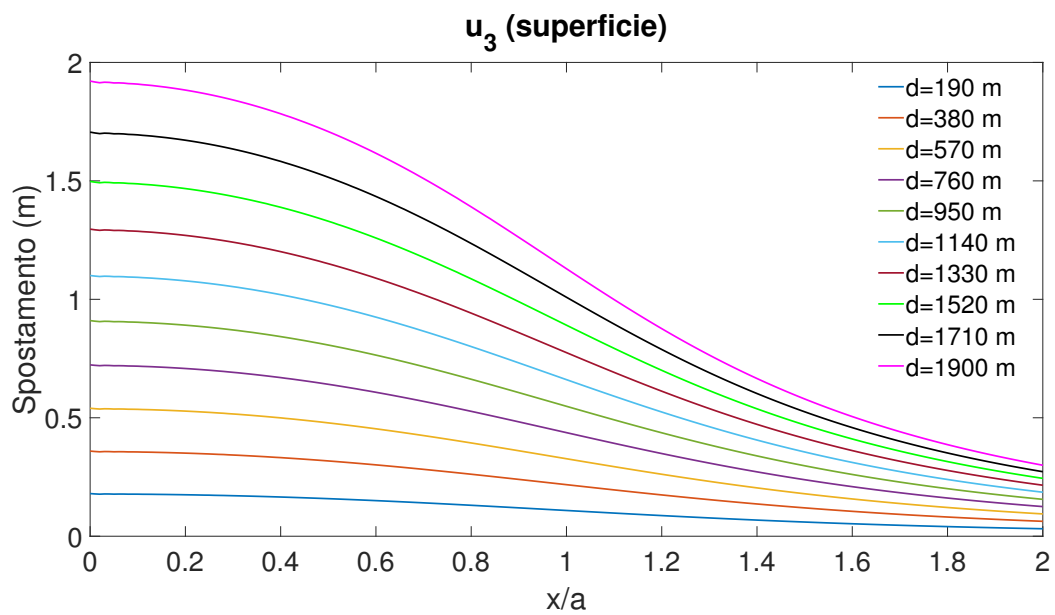


Figura 4.11: Andamento della componente verticale dello spostamento $-u_3$ alla superficie. Il centro della sorgente è $c = 1900$ m e il raggio è pari a $a = 1900$ m.

Dai grafici si evince che lo spostamento, sia verticale che orizzontale, cresce linearmente all'aumentare dello spessore d , come si era osservato nel paragrafo 2.3.1. Sapendo che la sorgente termo-poro-elastica nel caso dei Campi Flegrei ha uno spessore pari a $d \simeq 500$ m, si ottiene uno spostamento orizzontale massimo pari a $u_1 = 0.22$ m ed un uplift $u_3 = 0.51$ m.

Per le componenti diagonali dello sforzo sul piano mediano invece rappresentiamo nella stessa figura i grafici che si riferiscono a quattro spessori di differenti $d_1 = 190$ m, $d_2 = 760$ m, $d_3 = 1330$ m $d_4 = 1900$ m. Per ogni spessore la sorgente è discretizzata da un numero N^* di elementi.

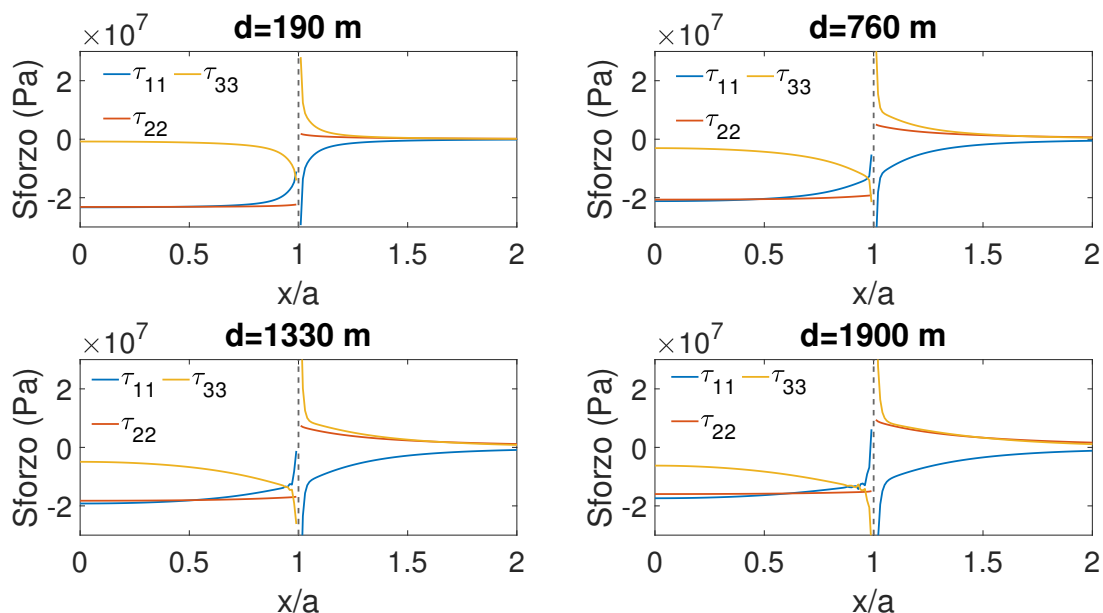


Figura 4.12: In ognuno dei quattro grafici vengono mostrate le componenti diagonali dello sforzo generato da una sorgente TPE di spessore $d = 190$ m con $N^* = 3$ (in alto a sinistra), $d = 760$ m con $N^* = 5$ (in alto a destra), $d = 1330$ m con $N^* = 7$ (in basso a sinistra) e $d = 1900$ m con $N^* = 11$ (in basso a destra) sul piano mediano. Il centro di ciascuna di esse si trova in $c = 1900$ m.

Dalla figura 4.12 si evince che, qualunque sia lo spessore d della sorgente, all'interno della regione TPE si ha un ambiente tettonico di tipo compressivo, dato che i valori degli sforzi risultano negativi (per $x/a \ll 1$ si ha $\tau_{33} > \tau_{22} > \tau_{11}$, fino a che $x/a > 0.5$ dove $\tau_{11} > \tau_{22}$). La componente deviatorica dello sforzo, in particolare nella zona $x/a < 1$, promuove un meccanismo di faglie inverse. Quando l'aspect ratio d/a aumenta e si avvicina al valore 1, la componente deviatorica diminuisce d'intensità favorendo uno stato di sforzo isotropo (in cui $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33}$) all'interno della sorgente. Al di fuori della sorgente, quando $x/a > 1$, le componenti di sforzo diminuiscono la loro intensità, in accordo con la concentrazione di sismicità rilevata all'interno della TPE (Mantiloni et al., 2020, fig. 3). Più il cilindro è spesso, più l'intensità degli sforzi diminuisce lentamente all'esterno della TPE.

4.3 Considerazioni conclusive

A partire dal modello di sorgente TPE a forma di disco in cui l'aspect ratio d/a deve essere piccolo, si è realizzato un modello di sorgente TPE di forma cilindrica il quale permette di rappresentare inclusioni con spessori maggiori. Questo è possibile poichè il cilindro discretizzato, inteso come sovrapposizione di elementi, riproduce lo spostamento generato da un cilindro di spessore finito, come verificato attraverso il confronto con un modello numerico.

Abbiamo identificato un aspect ratio massimo d/a pari a 0.3 per la validità del modello a disco, oltre il quale la discretizzazione dello spessore risulta necessaria. Se si utilizza il modello a disco con un maggior aspect ratio, si commetterà un errore maggiore del 2% nella stima del campo di sforzo sul piano mediano, mentre l'errore sullo spostamento risulta molto minore.

Nello studio riguardante il caso reale dei Campi Flegrei, si ritrova che il campo di spostamento non è influenzato dalla discretizzazione nè sul piano mediano nè alla superficie. Perciò la stima del campo di spostamento in superficie, basata sui parametri valutati tramite l'inversione dei dati geodetici, risulta adeguata anche utilizzando il modello a disco. Invece se assumessimo un aspect ratio superiore a quello considerato da Mantiloni et al. (2020), dovremmo utilizzare il modello a cilindro di spessore finito per riuscire a rappresentare il campo di sforzo con errori inferiori al 2%.

I campi di spostamento e di sforzo dipendono linearmente dallo spessore. All'aumentare dello spessore, il campo di sforzo tende a diventare isotropo all'interno dell'inclusione, indipendentemente dal rapporto tra profondità e raggio.

Ringraziamenti

Dopo tanti anni di studi, è giunto al termine questo capitolo della mia vita. Mi sono appassionata a questa disciplina grazie ai professori che ho incontrato durante il mio cammino e che mi hanno trasmesso la loro passione.

Uno speciale ringraziamento va alla Professoressa Belardinelli e al Dottor Nespoli, che mi hanno aiutato e spronato in questi mesi, senza farmi mai sentire distante, visto il periodo che stiamo vivendo.

Un grazie di cuore va ai miei genitori, che hanno sempre fatto il tifo per me in ogni situazione.

Grazie ai miei amici Irene, Chloe, Linda, Totò, Andrea, Giacomo, Margherita, Greta, Federico, Thomas, Sofia, Chiara, Martina, Lisa, Anna, Emanuele, Cesare, Manuel, Beniamino, Diletta, Sofia, Francesca, Noemi, Mariachia e Margheri, in questa tesi c'è tanta della loro pazienza e del loro affetto. Vi voglio bene.

Un grazie immenso va al mio allenatore Campa, che è sempre al mio angolo in ogni sfida.

Grazie al mio Johnny, che in questi anni mi ha lasciata seguire i miei sogni sostenendomi in ogni momento.

Per ultimo, ma non meno importante, il mio più grande grazie va alla mia sorellina Chiara, che si è sempre presa cura di me e a cui voglio un bene infinito.

Bibliografia

- Aki, K. and Richards, P. (1980). *Quantitative Seismology: Theory and methods, vol.1*. W. H. Freeman.
- Amore, M. (2015). *Campania, terra di vulcani*. <http://www.ingv.it/it/newsletter-n-1/3685-campania-terra-di-vulcani>.
- Belardinelli, M. E., Bizzarri, A., Berrino, G., and Ricciardi, G. P. (2011). *A model for seismicity rates observed during the 1982-1984 unrest at Campi Flegrei caldera (Italy)*. Earth and Planetary Science Letters.
- Belardinelli, M. E., Bonafede, M., and Nespole, M. (2019). *Stress heterogeneities ad failure mechanism induced by temperature and pore pressure increase in volcanic regions*. Earth and Planetary Science Letters.
- Biot, M. A. (1980). *General theory of three-dimensional consolidation*. Journal of Applied Physics, vol. 12(2):155-164.
- Bonafede, M. (1990). *Axi-symmetric deformation of a thermo-poro-elastic half space: inflation of a magma chamber*. Geophysics Journal International 103(2), 289-299.
- Calò, M. and Tramelli, A. (2018). *Anatomy of the Campi Flegrei caldera using Enhanced Seismic Tomography Models*. Scientific Reports.
- Cardellini, C., Chiodini, G., Frondini, F., Aino, R., Bagnato, E., Calino, S., Lelli, M., and Rsiello, A. (2017). *Monitoring diffuse volcanic degassing during volcanic unrest: the case of Campi Flegrei (Italy)*. Scientific Reports.
- Carlino, S., Piochi, M., Tramelli, A., Mormone, A., Montanaro, C., Scheu, B., and Klaus, M. (2018). *Field-scale permeability and temperature of volcanic crust from borehole data: Campi Flegrei, southern Italy*. Journal of Volcanology and Geothermal Research.

- Chiodini, G., Caliro, S., De Martino, P., Aino, R., and Ghepardi, F. (2012). *Early signals of new volcanic unrest at Campi Flegrei caldera? Insights from geochemical data and physical simulations*. *Geology* 40, 943-946.
- Chiodini, G., Vandemeulebrouck, J., Caliro, S., D'Auria, L., Martino, P., Mangia-capra, A., and Petrillo, Z. (2015). *Evidence of thermal-driven processes triggering the 2005–2014 unrest at Campi Flegrei caldera*. *Earth Planetary Science Letters* 414, 58–67.
- D'Auria, L., Massa, B., Cristiano, E., Gaudio, C., Giudicepietro, F., Ricciardi, G., and Ricco, C. (2014). *Repeated fluid-transfer episodes as a mechanism for the recent dynamics of Campi Flegrei caldera (1989-2010)*. *Journal of Geophysics Research of Solid Earth* 116, B04313.
- De Vivo, B., Belkin, H. E., and Rolandi, G. (2020). *Introduction to Vesuvius, Campi Flegrei, and Campanian Volcanism*. Elsevier.
- Deino, A. L., Orsi, G., de Vita, S., and Piochi, M. (2003). *The age of the Neapolitan yellow tuff caldera-forming eruption (Campi Flegrei caldera - Italy) assessed by $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ dating method*. *Journal of Vulcanology and Geothermal Research*.
- Del Gaudio, C., Aquino, I., Ricciardi, G. P., Ricco, C., and Scandone, R. (2010). *Unrest episodes at Campi Flegrei: A reconstruction of vertical ground movements during 1905-2009*. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*.
- Di Vito, M., Lirer, L., Mastrolorenzo, G., and Rolandi, G. (1987). *The 1538 Monte Nuovo eruption (Campi Flegrei, Italy)*. *Bulletin of Vulcanology*, Springer-Verlag 1987.
- Eshelby, J. D. (1957). *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*. *Proc. R. Soc. Lond. A*.
- Fialko, Y., Khazan, Y., and Simons, M. (2001). *Deformation due to a pressurized horizontal circular crack in an elastic half-space, with applications of volcano geodesy*. *Geophysics Journal International* 144(2), 300-308.
- Fischer, T. B. and Chiodini, G. (2015). *The encyclopedia of Volcanoes: Volcanic, magmatic and hydrothermal gases (cap. 15, second edition)*. Haraldur Sigurdsson.

- Giudicepietra, F., Chiadini, G., Caliro, S., De Cesare, W., Esposito, A. M., Galluzzo, D., La Bascia, D., Macedonia, G., Orazi, M., Ricciolina, P., and Vandermeulebrouck, J. (2020). *Il tremore fumarolico di Pisciarelli e lo stato di attività dell'area vulcanica dei Campi Flegrei*. <https://ingvvulcani.com/2020/01/24/il-tremore-fumarolico-di-pisciarelli-e-lo-stato-di-attivita-dellarea-vulcanica-dei-campi-flegrei/>.
- INGV Osservatorio Vesuviano (2020). *Bollettino di sorveglianza Campi Flegrei (Febbraio 2020)*. https://www.ov.ingv.it/ov/bollettini-mensili-campania/Bollettino_Mensile_Campi_Flegrei_2020_02.pdf.
- Isaia, R., Vitale, S., Marturano, A., Aiello, G., Barra, D., Ciarcia, S., Iannuzzi, E., and Tramparulo, F. D. (2019). *High-resolution geological investigation to reconstruct the long-term ground movements in the last 15 kyr at Campi Flegrei caldera (southern Italy)*. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. John Wiley and Sons.
- Judenherc, S. and Zollo, A. (2004). *The bay of naples (southern italy): Constraints on the volcanic structures inferred from a dense seismic survey*. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 109(B10).
- La Rocca, M. and Galluzzo, D. (2019). *Focal mechanism of recent seismicity at Campi Flegrei, Italy*. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*.
- Lamberti, I. (2017). *Modelling the stress field induced by changes in temperature and pore pressure in a volcanic region*. Tesi di Laurea Triennale, Alma Mater Studiorum, Università degli Studi di Bologna.
- Lima, A., De Vivo, B., Spera, F. J., Bodnar, R. J., Mila, A., Nunziata, C., Belkin, H. E., and Cannatelli, C. (2009). *Thermodynamic model for uplift and deflation episodes (bradysism) associated with magmatic-hydrothermal activity at the Campi Flegrei (Italy)*. *Earth-Science Reviews*.
- Macedonio, G., Martini, M., Neri, A., Papale, P., Rosi, M., Zuccaro, G., Cardaci, C., and Mangione, D. (2012). *Gruppo di lavoro incaricato della definizione dello scenarion di riferimento per il piano di emergenza dei Campi Flegrei per il rischio vulcanico (rapporto finale)*. Dipartimento della Protezione Civile.
- Mantiloni, L. (2019). *Modelling displacement and stress fields in hydrothermal regions: the case of a thermo-poro-elastic inclusion in a poro-elastic*

- half space*. Tesi di Laurea Magistrale, Alma Mater Studiorum, Università degli Studi di Bologna.
- Mantiloni, L., Belardinelli, M. E., Bonafede, M., and Nespoli, M. (2020). *Deformation and stress in hydrothermal regions: the case of a disk-shaped inclusion in a half-space*. Journal of Volcanology and Geothermal Research.
- McTigue, D. F. (1986). *Thermoelastic response of fluid saturated porous rock*. Geophysics Res. Solid Earth 91 (B9), 9533-9542.
- Mindlin, R. D. (1936). *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid*. Physics 7 (5), 195-202.
- Mogi, K. (1958). *Relations between the eruptions of various volcanoes and the deformations of the ground surfaces around them*. Research Earthquake Institute 36, 99-134.
- Moretti, R., Troise, C., Sarno, F., and Natale, G. D. (2018). *Caldera unrest driven by CO₂-induced drying of the deep hydrothermal system*. Scientific reports, 8(1):8309.
- Norton, D. L. (1984). *Theory of hydrothermal system*. Annual review of Earth and Planetary Sciences, 12:155-77.
- Petrillo, Z., Chiodini, G., Mangiacapra, A., Caliro, S., Capuano, P., Russo, G., Cardellini, C., and Avino, R. (2013). *Defining a 3D physical model for the hydrothermal circulation at Campi Flegrei caldera (Italy)*. Journal of Volcanology and Geothermal Research.
- Pirajno, F. (2009). *Hydrothermal process and mineral systems, cap.2*. Springer Science.
- Pruess, K. (2002). *Mathematical modelling of fluid flow and heat transfer: Hydrothermal Systems (lecture 1)*. The United Nations University: Geothermal training programme.
- Rice, J. R. and Cleary, M. P. (1999). *Some basic stress diffusion solution for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents*. Reviews of geophysics and space physics, vol.14.
- Trasatti, E., Bonafede, M., Ferrari, C., Giunchi, C., and Berrino, G. (2011). *On deformation sources in volcanic areas: Modelling the Campi Flegrei (Italy) 1982-84 unrest*. Earth and Planetary Science Letters.

- Troise, C., Natale, G. D., Schiavone, R., Somma, R., and Moretti, R. (2018). *The campi flegrei caldera unrest: Discriminating magma intrusions from hydrothermal effects and implications for possible evolution*. Earth-Science Reviews.
- Valentino, G. M. and Stanzione (2003). *Source processes of the thermal waters from Phlegraen Fields (Naples, Italy) by means of the study of selected minor and trace elements distribution*. Chemical Geology, vol. 194 (4), 245-274.
- Vaselli, O., Tassi, F., Tedesco, D., Poreda, J. R., and Caprai, A. (2011). *Submarine and inland gas discharges from the Campi Flegrei (southern Italy) and the Pozzuoli Bay: geochemical clues for a common hydrothermal-magmatic source*. Earth and Planetary Science.
- Yang, X.-M., Davis, P. M., and Dieterich, J. H. (1988). *Deformation from inflation of a dipping finite prolate spheroid in an elastic half-space as a mode for volcanic stressing*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth 93 (B5), 4249-4257.