ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÁ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

DIFFICOLTÀ DI TRASPOSIZIONE DELLE CONOSCENZE MATEMATICHE IN FISICA: PROBLEMI ED ESERCIZI CON DUE CLASSI QUINTE DI LICEO SCIENTIFICO

Relatore:
Prof.ssa Olivia Levrini

Correlatore:
Prof. Ivan Genesio

Presentata da:
Matteo Fantoni

Anno Accademico 2019/2020

Abstract

L'obiettivo principale dello studio è indagare le difficoltà incontrate da studenti al quinto anno di Liceo nella risoluzione di particolari quesiti: coppie di problemi di matematica e fisica, costruiti per essere identici nelle conoscenze matematiche che la soluzione richiede.

I problemi sono stati formulati per capire se le criticità nelle loro soluzioni siano di tipo tecnico (cioè derivanti da lacune di tipo matematico) oppure legate alla modellizzazione del problema e alla difficoltà di trasporre le conoscenze matematiche in un contesto diverso da quelle in cui sono state introdotte (in questo caso, in un contesto fisico).

Lo studio si colloca nel tema più generale dell'interdisciplinarità tra fisica e matematica nella soluzione di problemi: tema su cui anche il Ministero dell'Istruzione da qualche anno sta ponendo particolare attenzione, modificando la seconda prova dell'Esame di Stato dei Licei Scientifici.

Dal punto di vista metodologico, lo studio riprende e sviluppa l'indagine di un gruppo belga (Ceuppens et al., 2019), replicata con studenti frequentanti il primo anno del corso di laurea in Scienze Biologiche di Bologna (Miani, 2019). Ci si è ispirati a questi studi per la formulazione dei problemi e per l'idea di confrontare le soluzioni degli studenti in problemi "isomorfi" di matematica e fisica.

Due questionari, composti rispettivamente da sei quesiti (tre coppie di problemi "isomorfi"), sono stati somministrate in due classi di quinta Liceo Scientifico e alcuni studenti sono stati poi intervistati singolarmente.

Dai risultati emerge una generale disparità nelle difficoltà riscontrate nelle due diverse tipologie di problemi: in particolare, sono risultati più ostici i quesiti di carattere fisico. Tale conclusione si trova in perfetto accordo con quanto riscontrato anche da Ceuppens e Miani nei loro lavori.

Indice

Introduzione

Il lavoro di ricerca da me svolto si colloca nel settore di ricerca in Didattica della fisica. L'obiettivo di questo lavoro è quello di indagare le difficoltà che emergono da studenti al termine del loro percorso di studi quinquennale ad indirizzo di scienze applicate all'interno di un liceo scientifico: in particolare, andare a distinguere se le difficoltà incontrate nella risoluzione di esercizi di Matematica-Fisica sono di tipo tecnico-nozionistico (quindi legate alla Matematica), oppure di modellizzazione ed interpretazione (riconducibili a problematiche di natura Fisica). L'elaborato si articola in tre parti distinte.

La prima ha lo scopo di fornire una contestualizzazione del problema di ricerca nel quadro dei documenti ministeriali per Licei emanati dal MIUR.

Mediante un'analisi temporale, dalle indicazioni del 2010 ai Quadri di Riferimento più recenti (in vigore per l'anno scolastico 2019/2020), si è notata un'attenzione sempre maggiore rivolta al tema dell'interdisciplinarità tra Matematica e Fisica. Sono quindi illustrati i lavori di Ceuppens et al. (2019) e di Lorenzo Miani (2019), presi a riferimento per la costruzione dell'indagine e collocarla con continuità nella ricerca.

Nella seconda parte viene descritta la metodologia con cui ho deciso di organizzare lo studio.

Sono state selezionate le due classi dell'istituto ad indirizzo di scienze applicate; quindi sono stati somministrati due questionari diversi, uno per classe, composti ciascuno da tre coppie di problemi isomorfi (il primo contestualizzato in termini fisici, ed il secondo avente riferimenti strettamente matematici). I due compiti, seppur diversi, sono stati costruiti da me *ex novo* al fine di avere due problemi diversamente contestualizzati ma identici nella struttura matematica. Successivamente, è stata data la possibilità agli studenti di effettuare interviste individuali relative all'elaborato ed al loro modo di affrontare i problemi di matematica e fisica.

Nella terza ed ultima sezione del lavoro sono analizzate le tipologie di risposte fornite dagli studenti e categorizzate secondo la tipologia e gravità di difficoltà incontrata: dalla semplice distrazione a difficoltà di natura concettuale. Dai risultati emerge che sono generalmente confermati gli andamenti ricavati, in precedenza, da Ceuppens ed i suoi colleghi circa le differenze riscontrate nella risoluzione degli esercizi di matematica e di fisica: in particolare, guardando le singole coppie isomorfe di problemi, si è osservato che i quesiti di fisica hanno destato più difficoltà rispetto a quelli di matematica.

Emerge la necessità di inventare nuovi strumenti e nuove attività didattiche che favoriscano lo sviluppo di competenze di ri-concettualizzazione della matematica quando è usata in ambito fisico. Questo è particolarmente urgente data l'attenzione posta dal MIUR nella seconda prova dell'esame di Stato, ovvero quella di “Matematica-Fisica”. Allo stesso tempo, risulta fondamentale l’introduzione di nuovi strumenti che permettano all’insegnante di conseguire tali obiettivi.

CAPITOLO 1

Stato dell'arte e della ricerca

1.1 Indicazioni Nazionali e Quadri di Riferimento, le proposte del MIUR

Negli ultimi anni il Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR) ha posto particolare attenzione al tema dell'interdisciplinarità tra fisica e matematica e all'importanza di promuovere, negli studenti di Liceo, la capacità di applicare le conoscenze matematiche in contesti di carattere fisico, legati a problemi reali.

Concretamente, il MIUR ha modificato la seconda prova dell'esame di maturità per i Licei Scientifici, che oggi è *"di matematica-fisica"*, e non più solamente *"di matematica"*, come fino a due anni fa.

Per ripercorrere cronologicamente l'evoluzione dei Quadri di Riferimento (QDR) – riguardanti l'approccio suggerito per la valutazione e l'attribuzione della dovuta importanza a tali competenze di collegamento –si riparte dalle Indicazioni Nazionali per Licei emanate dal MIUR nel marzo del 2010, tutt'ora in vigore (MIUR, 2010).

In tale documento più volte emerge la necessità di rendere lo studente consapevole dell'importanza della matematica ai fini di una comprensione più completa della fisica. Sia nella sezione riguardante le linee guida generali, sia nelle successive, specifiche, riguardanti l'articolazione dei contenuti di matematica lungo i cinque anni si trovano frasi come questa: studente «*Studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale. Approfondirà inoltre la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell'algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica.*» (sezione di Aritmetica e Algebra relativa al primo biennio). Da quanto letto, il MIUR sembra consigliare di impostare il lavoro didattico sfruttando la fisica non come un contesto che mostri quanto la matematica risulti effettivamente applicabile ed utile.

Viceversa, la matematica emerge come uno strumento fondamentale per la fisica. Questo si evince dalle parole riportate nella sezione di linee guida generali di fisica «*…lo studente avrà acquisito le seguenti competenze: […] formalizzare un problema di fisica e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la sua risoluzione.*», oppure da quanto riportato nel capitolo dedicato agli obbiettivi specifici di apprendimento «*I temi suggeriti saranno sviluppati dall'insegnante secondo modalità e con un ordine coerenti con gli strumenti concettuali e con le conoscenze matematiche già in possesso degli studenti o contestualmente acquisite nel corso parallelo di Matematica.*».

Si può concludere che la visione complessiva che emerge dalla lettura delle indicazioni nazionali è, quindi, quella di una matematica necessaria per la fisica ed una fisica concepita solo come contesto di applicazione della matematica.

Andando a confrontare quanto appena visto con il QDR della II prova di Fisica dell'esame di Stato per i Licei Scientifici redatto in data 23/10/2015 (MIUR, 2015), alla terza pagina, nella sezione riguardanti i criteri di valutazione delle competenze generali, si ritrova la dicitura «*Essere in grado di formalizzare matematicamente un problema fisico e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione*».

La concezione del rapporto tra fisica e matematica, a cinque anni di distanza da quanto visto nel primo documento, sembra essere diventata più stretta e importante: la matematica come strumento per modellizzare e formalizzare un problema reale.

Continuando, e concludendo, il percorso relativo all'evoluzione dei QDR, mi soffermerei su quel che è riportato negli ultimi quadri proposti dal MIUR per l'anno scolastico 2019/2020. In particolare, andando a leggere il documento (MIUR, 2019) relativo alla seconda prova per licei scientifici, nella sezione riguardante fisica, è importante osservare la griglia di valutazione per l'attribuzione dei punteggi (fig.1.1); così da notare l'articolazione sempre più esplicita delle competenze di modellizzazione e di interdisciplinarità.

Da questa analisi dei documenti ministeriali sembra emergere una attenzione sempre più esplicita sull'interdisciplinarità tra matematica e fisica, così come sempre più forte appare la necessita di spingere gli insegnanti a focalizzarsi sullo sviluppo di competenze di problem solving che richiedano il trasferimento e l'utilizzo delle conoscenze matematiche in contesti fisici. Questa evidenza apre un problema non banale per i docenti perché esistono ancora pochi materiali didattici che li possano guidare nel raggiungimento di questi obiettivi. La tipologia di problemi che proporrò e discuterò in questa tesi vuole contribuire a colmare questo divario tra gli obiettivi dell'esame di stato e i materiali didattici a disposizione.

Indicatore *(correlato agli obiettivi della prova)*	**Punteggio max per ogni indicatore (totale 20)**
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	**5**
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare situazioni problematiche e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione.	**6**
Interpretare criticamente i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto.	**5**
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato e comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	**4**

Figura 1.1: Griglia di valutazione per l'attribuzione dei punteggi, riportata nel QDR per i licei scientifici in vigore dall'anno scolastico 2018/2019.

1.2 Quadro di ricerca in Didattica della fisica: articoli recenti che hanno guidato lo studio

Il legame tra conoscenze fisiche e matematiche è un tema studiato nella ricerca in didattica della fisica e della matematica, soprattutto nell'ottica dello sviluppo di capacità di collegamento ed interdisciplinarità in grado di fornire allo studente strumenti utili per approfondire e consolidare argomenti di ambedue le discipline.

Uno degli studi più importanti – nonché quello al quale mi sono ispirato maggiormente – è lo studio effettuato dai ricercatori belgi Ceuppens et al. nel loro articolo "*9th grade students' understanding and strategies when solving x(t) problems in 1D kinematics and y(x) problems in mathematics*". L'articolo, pubblicato nel 2019, affronta il problema riguardante le difficoltà incontrate dagli studenti nella lettura di grafici matematici e fisici relativi a due temi strettamente collegati, ovvero, rispettivamente, funzioni lineari e cinematica.

L'obiettivo del loro lavoro era quello di mettere in evidenza non solo l'esistenza di tale problematica, ma anche di fornirne una caratterizzazione: se le difficoltà fossero più legate ad una carenza di conoscenze tecniche (quindi di tipo matematico), oppure dovute ad errori nei processi di modellizzazione del contesto e re-interpretazione del formalismo (perciò, in un certo senso, più di carattere fisico).

Il campione selezionato da Ceuppens comprendeva 17 classi di 7 scuole superiori di secondo grado delle Fiandre (Belgio), per un totale di 253 alunni di età compresa tra i 14 ed i 15 anni.

La prova contava un totale di 24 quesiti a risposta aperta, di cui: 12 incentrati su una trattazione in ambiente puramente matematico e 12 contestualizzati in situazioni fisiche; lo studio è stato un riferimento per questo elaborato anche per le tipologie delle risposte.
Per dare un esempio della tipologia di problemi, si riporta qui una delle 12 coppie di esercizi: quella formata dai quesiti M10 e K12, riportati rispettivamente nelle figg.1.2, 1.3.

M10

Una funzione f è data da

$$f(x) = 6x+2.$$

Determina la pendenza. Spiega la risposta.

Figura 1.2: Problema M10, tratto dallo studio di S.Ceuppens (2019).

K12

Un'automobile si sta muovendo lungo una strada rettilinea. La posizione *x* della macchina in funzione del tempo è data da

$$x = 3 - 12t.$$

La posizione è in metri, il tempo in secondi.

Determina la velocità dell'auto. Spiega la tua risposta.

Figura 1.3: Problema K12, tratto dallo studio di S.Ceuppens (2019).

La versione italiana dei due quesiti sopracitati è ripresa dal lavoro di tesi triennale di Lorenzo Miani, il quale ha riproposto il test dei ricercatori belgi ad un campione di studenti italiani frequentanti il primo anno del corso di laurea in Scienze Biologiche. Come si nota, i testi sono leggermente diversi a livello numerico, ma sono costruiti per mantenere tutte le caratteristiche-chiave affinché richiedano le stesse conoscenze matematiche.
Le risposte più frequenti alla domanda M10 si possono riassumere nella frase «La pendenza è messa prima della x nella forma *f(x)* = mx + q, quindi è 6»; Ceuppens conclude quindi che gli studenti i quali hanno fornito risposte simili a quella appena scritta non hanno compreso il vero significato di pendenza (o, per meglio dire, del coefficiente angolare), ma hanno bensì seguito un ragionamento guidato solamente dalla memoria e dal confronto con una formula che avevano già incontrato nel loro percorso di studi, senza ulteriori considerazioni in merito al significato grafico e/o matematico di quanto trovato.
Per quel che riguarda il problema K12, Ceuppens ritrova un pattern risolutivo piuttosto frequente, specialmente negli studenti che avevano dato, alla domanda M10, la risposta vista sopra, ovvero

quello consistente nel rimandare direttamente ad una formula conosciuta per poi ricavare la grandezza richiesta senza porsi alcuna domanda sul significato di ogni azione. Tale sviluppo (1.1) porta a concludere che sia presente una confusione fra il concetto di legge oraria ed intervallo Δx, con la prima che viene sostituita, erroneamente, nella formula per ottenere la velocità.

$$x = 3 - 12t; \quad v = \frac{x}{t}; \quad quindi \quad v = \frac{3-12t}{t} \tag{1.1}$$

Confrontando le domande "*isomorfe*", come le definisce Ceuppens stesso, le conclusioni ultime alle quali giunge l'equipe di ricercatori belgi è che il collegamento fra cinematica e fisica, in senso più generale, non è molto solido e che gli studenti spesso non sono in grado di trasferire le conoscenze acquisite in campo matematico nei problemi di cinematica.

Il primo suggerimento didattico che viene proposto dagli autori belgi è quello di usare il questionario come pre-test e post-test per misurare i "*learning gains*" ottenuti attraverso un insegnamento mirato, similmente a quanto fatto da Hill et al. (Hill, 2015) con il Force Concept Inventory (Hestenes, 1992). In secondo luogo, si suggerisce l'integrazione del programma con problemi e questionari simili a quello proposto al fine di abituare gli studenti ad instaurare parallelismi tra argomenti matematici e fisici, stimolando in loro la curiosità per la ricerca all'interdisciplinarità.

Ceuppens e colleghi si sono focalizzati su temi fisici legati strettamente alla cinematica e il campione da loro studiato frequentava il primo biennio di scuola superiore di secondo grado. Lorenzo Miani, invece, nel suo lavoro di ricerca, si è concentrato su studenti che già avevano intrapreso da qualche mese un percorso di tipo universitario.

Sempre incentrato su un campione di studenti frequentanti il primo anno di diversi corsi di laurea triennali della Scuola di Scienze, si ha un altro articolo pubblicato nel 2020 da Marta Carli et al. (CARLI, 2020) nel quale si fa riferimento alle difficoltà riscontrate nella risoluzione di problemi isomorfi (di matematica e fisica); all'interno di tale articolo vengono affrontati i concetti di vettore, derivata ed integrale, sia da un punto di vista meramente matematico, sia attraverso un approccio fisico attraverso i concetti di forza, posizione e velocità. L'obiettivo dello studio, come nell'elaborato qui presente, è di evidenziare una discrepanza – che si rivelerà essere significativa – tra la bontà delle risoluzioni dei problemi di matematica e quelli di fisica: coi primi che trovano una percentuale maggiore di risposte corrette rispetto ai secondi.

Lo studio che viene proposto in questo mio elaborato si frappone tra i lavori appena citati, andando a selezionare un target formato da studenti frequentanti gli ultimi mesi del quinto anno di liceo scientifico. Si è anche scelto di estendere gli argomenti didattici trattati. Come si vedrà nel prossimo capitolo, sono presenti, oltre a quesiti di cinematica e funzioni lineari comparabili con quelli proposti dal ricercatore belga, quesiti su temi più complessi come variazioni di flussi di campi magnetici o sui concetti di continuità e derivabilità.

Come un grande puzzle didattico, questo lavoro mira a contribuire ad incrementare la consapevolezza su quanto sia importante sviluppare competenze di trasferimento della matematica nel contesto della fisica; la seconda prova di maturità scientifica svolge, nel ragionamento che qui si sta proponendo, il ruolo non solo di scopo, ovvero visto come traguardo da raggiungere e superare, bensì anche di mezzo per far nascere nello studente la consapevolezza degli strumenti a sua disposizione.

CAPITOLO 2

Lo studio: strumenti, metodi e campione

2.1 Finalità e articolazione dello studio

Per questa tesi ho costruito due questionari a risposta aperta che potessero svolgere una duplice funzione: indagare se e come gli studenti di quinta liceo sono in grado di traferire conoscenze matematiche nella soluzione di problemi di fisica, ed inventare uno strumento didattico che possa sostenere l'insegnante nel guidare gli studenti nello sviluppo delle competenze interdisciplinari richieste nei documenti ministeriali sull'esame di stato dei Licei Scientifici. Più nello specifico, i questionari sono stati costruiti come strumento di base per raggiungere i seguenti obiettivi:

I. Individuare, confrontando le risposte alle "coppie isomorfe di esercizi" proposte, l'origine della eventuale difficoltà incontrata dallo studente, ovvero se essa sia legata alla mancanza di strumenti formali o se a problemi di interpretazione e trasferimento della conoscenza matematica in ambito fisico.

II. Esplorare una nuova modalità di formulazione di problemi che possa diventare uno strumento didattico per lo sviluppo di competenze di trasferimento della conoscenza.

Per raggiungere questi obiettivi, come si vedrà meglio nel seguito, i questionari sono stati costruiti a partire da quesiti di matematica o di fisica delle prove di maturità degli anni passati. Per ciascuno di questi è stato costruito *ex novo* il "problema isomorfo". Questa procedura è stata seguita per:

- mettere lo/la studente/ssa di fronte a problemi – o ad una parte di essi – presi direttamente da esami di maturità, così da renderlo/la consapevole di quali potrebbero essere le richieste della prova che dovrà affrontare;
- stimolare una riflessione sulle proprie conoscenze e acquisire consapevolezza del problema rappresentato dal trasferimento della conoscenza in nuovi contesti;

Al fine di valutare il raggiungimento degli obiettivi è stata prevista una seconda fase di indagine condotta con interviste individuali: costruite per capire quale tipo di ragionamento e riflessione sull'interdisciplinarità era stato stimolato dalla tipologia di problemi.
Nel seguito si descriveranno gli strumenti di indagine, prima i questionari e poi il protocollo di intervista. Chiude il capitolo la descrizione del contesto in cui l'indagine è stata condotta.
Concludo citando Virgilio:

"Si può essere stanchi di tutto, ma non di capire."

2.2 I questionari e i loro quesiti

In questa sezione sono descritti nel dettaglio i quesiti a risposta aperta riportati all'interno dei due questionari proposti (riportati per intero, rispettivamente, in appendice A e B). La descrizione parte dal problema presente in una prova ufficiale del MIUR, al quale segue il mio riarrangiamento, ed infine si conclude con il testo da me inventato per il quesito isomorfo: in ogni passaggio sono esplicitati i nodi concettuali ed epistemologici che si vogliono far emergere e le scelte effettuate nella costruzione dell'esercizio.

QUESTIONARIO A

PROBLEMI 1A – 4A

Il problema in questione è stato ripreso – pressoché alla lettera – dal quesito 6 proposto dal MIUR nella simulazione di seconda prova del 28/02/2019. Nelle figg.2.1, 2.2 sono riportati, rispettivamente, il testo dell'esercizio ministeriale e quanto proposto nel mio studio.
Nel processo di riscrittura del testo è stata riportata la situazione ad un contesto più strettamente collegato alla realtà (andando a parlare di "un'auto") e, per rendere più semplice la formulazione del problema isomorfo, sono state modificate le richieste sull'analisi della velocità e dell'accelerazione.

6. Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \geq 0$, da $x(t) = \frac{1}{9}t^2\left(\frac{1}{3}t + 2\right)$, dove $x(t)$ indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante t (in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.

Figura 2.1: Quesito 6 preso dalla simulazione di seconda prova del 28/02/2019.

Problema1:

Un'auto parte da ferma e si muove lungo un tratto rettilineo di strada secondo la legge oraria espressa da: $x(t) = \frac{1}{9}t^2(\frac{1}{3}t + 2)$, dove *x(t)* indica (in metri) la posizione occupata dalla macchina all'istante t (in secondi).
Considerando che l'auto inizia a muoversi a t = 0s, si studi l'andamento della sua velocità e quello della sua accelerazione.
Nei primi 9 secondi di moto si ha v_{media} = 5m/s; calcolare a che istante di tempo il veicolo si muoverà con tale velocità.

Figura 2.2: Problema 1 del compito A.

Gli aspetti che si vogliono mettere in evidenza col problema 1A sono principalmente due. Innanzitutto, la competenza dello studente di identificare accelerazione e velocità come, rispettivamente, derivata prima e seconda di della posizione *x(t)* rispetto al tempo; in secondo luogo, la sua capacità di riconoscere la richiesta a proposito della velocità istantanea e ritrovarla, quindi, nella *v(t)* ricavata nella prima parte dell'esercizio.
Nella figura 2.3 è riportato il quesito matematico isomorfo per domande e concetti sviluppati (quesito 4A). Nel quesito è richiesto esplicitamente lo studio di derivata prima e seconda di una funzione *y(x)* – completamente indipendente da ogni contesto fisico – e la conoscenza del significato grafico di derivata prima e relative condizioni di tangenza di una retta ad una curva.

Problema 4:

Data la funzione $y(x) = x^2(\frac{1}{6} - \frac{x}{30})$, calcolare derivata prima e seconda. Trovare, quindi, il/i punto/i in cui la retta tangente al grafico di *y(x)* ha coefficiente angolare pari a $-\frac{5}{3}$.

Figura 2.3: Problema 4 del compito A.

PROBLEMI 2A – 5A

Il quesito da cui sono partito per questa coppia di problemi appartiene anch'esso alla simulazione di seconda prova del 28/02/2019: più precisamente, si tratta del quesito 1, in fig.2.4.

1. Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - a\,x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x-3} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g'.

Figura 2.4: Quesito 1 preso dalla simulazione di seconda prova del 28/02/2019.

Il lavoro da me svolto in questo quesito è stato quello di limitarne le richieste, andando ad eliminare lo studio sulle derivate – già apprezzabile nella coppia di problemi 1A e 4A, vista prima – e togliendo la componente parametrica dell'esercizio. In questo modo, come possibile osservare in fig.2.5, ciò che il problema si propone di far emergere è la competenza dello studente nel capire cosa si intende con derivabilità e come essa si applica ad una funzione definita "a tratti".
Importante notare che, anche in questo caso, la rielaborazione è stata motivata dalla necessità di creare le condizioni per costruire un problema isomorfo significativo e alla portata degli studenti.

Problema 5:

Determinare se la funzione *g(x)* è derivabile in R:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(3-x)(3+x)}{2}, & per\ x \leq 1 \\ \dfrac{16}{x+3}, & per\ x > 1 \end{cases}$$

Figura 2.5: Problema 5 del compito A.

Per rielaborare il problema in chiave fisica ho pensato di descrivere una legge oraria attraverso una funzione definita a tratti: il testo completo dell'esercizio è riportato in fig.2.6 ed è costruito in modo da risultare simile – non solo per argomenti, ma anche a livello visivo – alla sua controparte matematica, così da suggerire il collegamento logico fra i due quesiti.
Definita in questo modo la funzione *x(t)*, è richiesto uno studio sulla velocità al fine di capire se essa sia determinante o meno per concludere che si tratti di un moto o meno. Di proposito il termine "velocità" è stato evidenziato in neretto, così da essere sicuri che lo studente non andasse a perdersi in argomentazioni poco pertinenti, ed avere così un focus più mirato sugli aspetti cruciali del problema.

Problema 2:

Data la legge oraria sottostante, ci sono considerazioni fisiche sulla **velocità** che permettono di concludere che questa funzione NON può rappresentare un moto?

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{-t^2+5}{4}, & per\ t \leq 1 \\ \dfrac{2}{t+1}, & per\ t > 1 \end{cases}$$

Figura 2.6: Problema 2 del compito A.

PROBLEMI 3A – 6A

Questa coppia di problemi è ripresa dal lavoro di tesi di Lorenzo Miani, la quale, a sua volta, risulta essere una traduzione di due dei quesiti proposti da Ceuppens ed i suoi colleghi nel loro lavoro di ricerca del 2019. I temi trattati, come si può osservare in figg.2.7, 2.8, sono, rispettivamente, confronto tra velocità e coefficienti angolari; in entrambi i casi non si vuole entrare in merito di un conto numerico, bensì di un ragionamento meramente qualitativo legato al confronto tra due auto o due rette, dipendentemente dal contesto in cui ci troviamo.

Problema 3:

Due auto si stanno muovendo lungo una strada rettilinea. Il grafico mostra la posizione in funzione del tempo. x (in metri), t (in secondi). Quale auto ha la velocità maggiore in $[t_0, t_p)$? In t_p? E dopo t_p? Motivare ciascuna risposta.

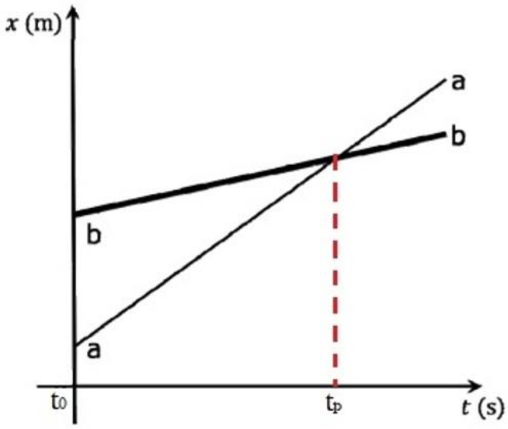


Figura 2.7: Problema 3 del compito A.

Problema 6:

Il grafico mostra l’andamento di due funzioni, *f* e *g*. Quale delle due rette ha coefficiente angolare maggiore nell’intervallo $[0, x_p)$? In x_p? Dopo x_p? Motivare ogni risposta.

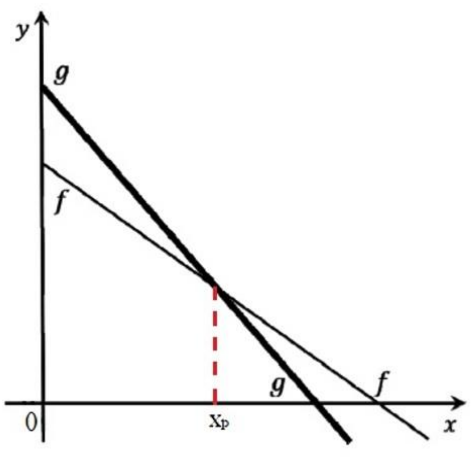


Figura 2.8: Problema 6 del compito A.

Si è deciso di inserire nel questionario anche questa coppia di quesiti che, benché molto più semplici degli altri, sembrava potesse offrire la possibilità di confrontare i risultati ottenuti in questa indagine coi risultati già ottenuti in studi precedenti.

PROBLEMI 1B – 4B

Per la stesura di questa coppia di problemi sono partito dal quesito 6 della sessione ordinaria del 20/06/2019, fig.2.9. Quest'ultimo si presta bene al nostro studio in quanto già nella proposta del MIUR è presente una richiesta di confronto grandezze in relazione di derivazione l'una rispetto all'altra.

6. Una spira di rame, di resistenza $R = 4{,}0\ \text{m}\Omega$, racchiude un'area di $30\ \text{cm}^2$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:

a) da 0,0 ms a 3,0 ms;

b) da 3,0 ms a 5,0 ms;

c) da 5,0 ms a 10 ms.

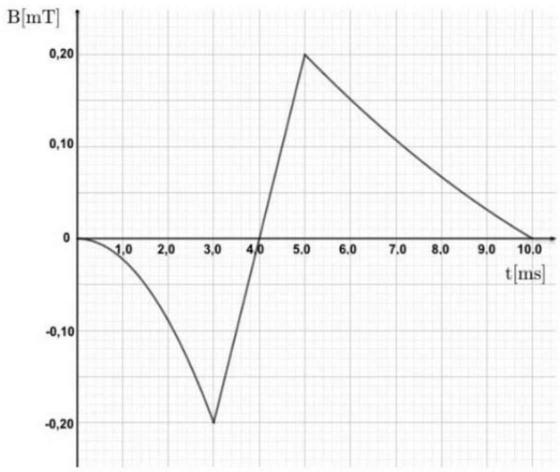


Figura 2.9: Quesito 6 preso dalla sessione di esame ordinaria del 20/06/2019.

Nella mia riscrittura del problema (testo riportato in fig.2.10) ho preferito omettere le richieste mirate allo svolgimento di calcoli aritmetici, così da concentrare l'attenzione sullo studio grafico ed il confronto qualitativo delle due grandezze in questione.

Problema1:

Una spira di rame, di resistenza R = 2mΩ racchiude un'area di 30cm^2 ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di campo sono perpendicolari alla superficie della spira. Il campo magnetico B(t), in mT, varia secondo la legge:

$$B(t) = -te^{-t^2}$$

Determinare l'espressione analitica della corrente indotta sulla spira, $i_{ind}(t)$. Riportare quindi B(t) e $i_{ind}(t)$ su due grafici.

Figura 2.10: Problema 1 del compito B.

Il problema isomorfo 4B, fig.2.11, è stato difatti pensato con lo scopo di andare ad accentuare ulteriormente il confronto tra i grafici di funzioni *g(x)* e *g'(x)*, in un ambiente puramente matematico.

La funzione *g(x)* è stata volontariamente scelta in una forma simile a quella proposta per la *B(t)* al problema 1B, così da instaurare un richiamo reciproco tra i grafici ottenuti nella sezione fisica e quelli ricavati in ambiente matematico.

Problema 4:

Riportare su due grafici distinti le funzioni *g(x)* e *g'(x)*, ovvero la sua derivata prima.

$$g(x) = (x^2 - 1)e^x$$

Figura 2.11: Problema 4 del compito B.

PROBLEMI 2B – 5B

Il quesito da cui sono partito, in fig.2.12, appartiene alla simulazione di seconda prova del 2/04/2019 ed è la base dalla quale sono partito per scrivere – praticamente ex novo – i due problemi del compito B.

3. Si consideri la funzione $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\,dt$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1.

Figura 2.12: Quesito 3 preso dalla simulazione di seconda prova del 2/04/2019.

L'aspetto che più si prestava allo sviluppo di una trama comune alle due discipline non era tanto l'applicazione del teorema fondamentale del calcolo integrale – tema cruciale all'interno del quesito – bensì la seconda richiesta fatta dal MIUR, ovvero lo studio relativo alla condizione di tangenza ad una curva data. In secondo luogo, un altro punto che ho voluto far emergere dal problema 5B (fig.2.13), è stata la riflessione relativa alle condizioni di esistenza della funzione *f(x)*, essendo essa definita solo nell'intervallo (0, +∞). Quest'ultimo aspetto viene facilmente ripreso in un contesto fisico, andando ad escludere le soluzioni matematiche che non rispettano le condizioni fisiche poste "a contorno" di una situazione studiata.

Problema 5:

Si consideri la funzione *f*: (0, +∞) → R così definita: $f(x) = -x^3 + 2x^2$.
Disegnare in un grafico tale funzione e determinare il coefficiente angolare della retta tangente ad f(x) nel punto di ascissa 2.

Figura 2.13: Problema 5 del compito B.

Nel problema 2B, riportato in fig.2.14, è presentato un semplice problema di caduta di un grave: esso si presta bene, difatti, allo studio del coefficiente angolare della retta tangente alla curva delineata dalla legge oraria *x(t)* in un grafico x/t, ovvero la velocità istantanea del corpo ad un determinato istante *t'*.
L a funzione della legge oraria porta, in fase di risoluzione, a due risultati (t_1 e t_2, con ad esempio $t_1 < t_2$), uno dei quali, però, è da escludere per "condizioni fisiche": non avrebbe fisicamente senso, difatti, accettare un risultato corrispondente, in questo caso, ad un tempo negativo.

Problema 2:

Un oggetto puntiforme viene lanciato verso l'alto verticalmente. La quota x, in metri, espressa in funzione del tempo t, in secondi, segue la legge oraria:

$$x(t) = -t(5t - 10)$$

Riportare in un diagramma x/t (tempo sull'asse delle ascisse e quota sulle ordinate) tale funzione. Calcolare, quindi, la velocità istantanea al tempo t = 1.6s.

Figura 2.14: Problema 2 del compito B.

La parte più complicata – ma anche interessante – della stesura dei problemi fisici si è rivelata essere non tanto il cercare gli argomenti comuni da trattare da ambedue i punti di vista, bensì il riuscire ad utilizzare parametri che fossero in grado di rappresentare un problema fisico. Questo discorso vale per tutti i problemi a sfondo fisico che sono stati citati, ma in particolare su questo è stato fondamentale riuscire a trovare funzioni in grado di mettere in risalto il rapporto biunivoco presente tra esercizi e realtà; spesso, purtroppo, si ritrovano infatti esercizi che sembrano non avere niente a che vedere con la nostra realtà quotidiana, e questo non aiuta lo studente ad osservare in maniera critica i risultati ottenuti.

PROBLEMI 3B – 6B

La coppia di problemi che va a chiudere il compito B (riportati in figg.2.15, 2.16), similmente a quanto visto per il compito A, consiste di due quesiti presi direttamente dal questionario proposto da Ceuppens e tradotto da Lorenzo Miani nel suo lavoro di tesi. Differentemente da quanto richiesto per la coppia analoga presente nel compito A, qui sono richieste risposte numeriche e non solo considerazioni qualitative dettate da un confronto. Ciò che vuole essere studiato attraverso il confronto tra le risoluzioni dei due esercizi è la strategia impiegata per ottenere la risposta: i due problemi sono del tutto identici, cambia soltanto il nome dei due assi cartesiani; tuttavia, gli studi precedenti hanno mostrato che la sola contestualizzazione matematica o fisica indice lo/la studente/ssa verso formule e ragionamenti differenti tra loro.

Problema 3:

Un'auto si sta muovendo lungo una strada rettilinea. Il grafico mostra la posizione della macchina in funzione del tempo. La posizione è in metri, il tempo in secondi. Determinare la velocità della macchina. Motivare la propria risposta.

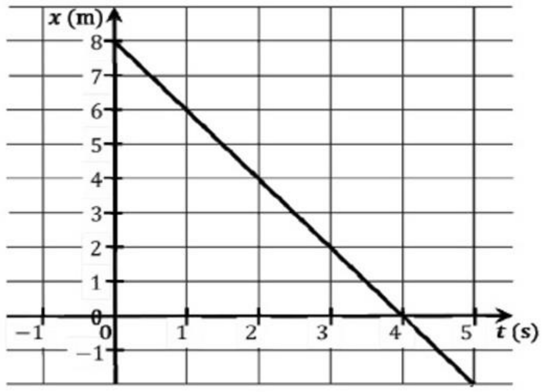


Figura 2.16: Problema 6 del compito B.

Problema 6:

La figura mostra il grafico della funzione f. Determinare il suo coefficiente angolare motivando la risposta data.

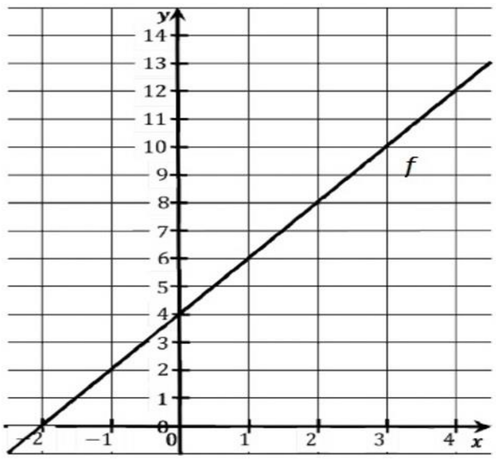


Figura 2.15: Problema 3 del compito B.

2.3 Protocollo di intervista e sue finalità

2.3.1 Introduzione all'intervista ed obiettivi specifici proposti

Al momento della consegna del compito è stata offerta agli studenti la possibilità di effettuare brevi interviste che avessero come scopo principale quello di chiarire eventuali miei dubbi a proposito dei procedimenti e del ragionamento seguito nello svolgimento della prova scritta, ma soprattutto – cosa ben più importante in chiave didattica – discutere con loro la struttura del questionario. Mi aspettavo che gli studenti non si fossero neanche accorti della presenza delle coppie isomorfe di problemi ed ero curioso di vedere la loro reazione nello “svelare” questa caratteristica del compito e di vedere se, discutendo su questo, si riusciva ad accompagnare lo/la studente/ssa nell’acquisizione di una consapevolezza maggiore sull’interdisciplinarità presente tra temi di matematica e di fisica.

Alla sezione 2.3.4 è riportato il protocollo di intervista: la prima parte consiste in domande strettamente legate al compito effettuato, mentre la seconda – le “domande post-intervista” - non riguardano l’elaborato bensì l’approccio dello/a studente/ssa ai differenti tipi di problemi.

Importante fare una precisazione al fine di giustificare il fatto che tutte le conclusioni verranno tratte indipendentemente dal compito svolto dallo studente: benché le domande fossero formulate ed impostate in maniera differente, i temi affrontati nelle due prove sono stati, comunque, gli stessi. Tale discorso resta valido anche per quel che riguarda l’intervista guidata: gli argomenti su cui si vuole far riflettere, difatti, nonostante siano presi da strade diverse, portano comunque ad argomentare e sviluppare ragionamenti attorno alle stesse criticità.

2.3.2 Domande differenziate per compito svolto

L’intervista, per quel che riguarda la sua prima parte, è stata impostata partendo da quanto scritto nell’elaborato ed andando a guidare verso gli aspetti più critici del ragionamento attraverso le domande mirate riportate nello schema di intervista stesso.

I punti cruciali che vengono affrontati nelle prime parti delle sezioni A e B sono inerenti ai temi di lettura ed interpretazione qualitativa di grafici fisici (in termini di condizioni, “*significato fisico*”) e significato di derivabilità; quest’ultimo, in particolare, viene richiesto prima da un punto di vista puramente matematico, e successivamente si provano a trarre conclusioni su cosa comporti la derivabilità o meno di una funzione $x(t)$ o $v(t)$. Attraverso tale approccio si punta quindi a promuovere il confronto e l’importanza di stabilire relazioni biunivoche, quindi di reciproco scambio, tra fisica e matematica, così da ottenere più consapevolezze sul senso di ciò che si sta studiando.

, perché questi sono stati i due problemi principali emersi dallo scritto. Le domande sono state formulate per guidare gli studenti a confrontare i problemi isomorfi e, attraverso il confronto e il reciproco scambio tra fisica e matematica, fare acquisire nuove consapevolezze sul senso di ciò che avevano studiato.

Infine, le ultime domande presenti nelle sezioni differenziate A e B riguardano le coppie di esercizi 3 e 6 (ovvero i due presi dal questionario di Ceuppens et al.). La formulazione delle domande parte da una “variante” del problema dello scritto, finalizzata a far riflettere sull’importanza di contestualizzare ogni tipo di ragionamento e di valutarne la coerenza e la significatività nell'ambiente specifico, così come nel confronto interdisciplinare.

2.3.3 Domande post-intervista

La seconda parte dell'intervista prevede una breve serie di domande a sfondo personale, non tanto focalizzate sulle competenze quanto più su aspetti personali e di approccio alle due materie.

La prima delle tre domande in cui è strutturata la sezione in questione si propone di indagare sull'idea generale dello studente a proposito delle due materie, ponendo particolare attenzione agli aspetti motivazionali che lo hanno spinto ad affrontare la prova con più o meno serietà e fiducia nei propri mezzi.

Proseguendo nella lettura delle domande si incontra quella che forse è la più importante per lo sviluppo di un nuovo percorso didattico; attraverso l'analisi dei diversi approcci tra problemi di carattere strettamente matematico ed esercizi più contestualizzati in un ambiente fisico, si possono mettere in risalto molteplici aspetti cruciali. Tra i più importanti, quelli che su cui viene posta attenzione in maniera più marcata saranno: le prime impressioni date dai quesiti, il ruolo ricoperto dalla teoria e dalle formule, e la tendenza o meno a rappresentarsi mentalmente esempi di situazioni simili a quella presentata nell'esercizio.

La domanda che chiude non solo la sezione corrente, ma anche l'intera intervista, si propone di ripercorrere assieme allo studente i punti salienti dei ragionamenti da lui fatti prima e dopo essere venuto a conoscenza del forte legame tra i problemi isomorfi proposti; riprendendo la duplice trattazione dei problemi 3A-6A e 3B-6B, già effettuata nella prima parte dell'intervista, si offre allo studente la prova tangibile di quanto sia utile ed importante porsi dubbi di carattere interdisciplinare al fine di ottenere una conoscenza più completa e approfondita.

"Sono salito sulla cattedra per ricordare a me stesso che dobbiamo sempre guardare le cose da angolazioni diverse. E il mondo appare diverso da quassù. Non vi ho convinti? Venite a veder voi stessi. Coraggio! È proprio quando credete di sapere qualcosa che dovete guardarla da un'altra prospettiva."

– Dal film "L'attimo fuggente"

2.3.4 Protocollo di intervista

COMPITO A

1) Prendiamo in considerazione il grafico *v(t)* che hai tracciato, ha significato fisico? Ci sono caratteristiche del grafico che possono avere problemi nella loro interpretazione dal punto di vista fisico? Quali condizioni deve rispettare, un grafico come questo, affinché possa descrivere un moto?
2) Nel secondo esercizio c'è una funziona "a tratti". Ti sembra ragionevole che possa descrivere un moto? Se sì, quali sono quindi le condizioni su *x(t)* e *v(t)* affinché questa funzione abbia significato fisico? Vorrei ragionassimo sul significato fisico di alcune condizioni matematiche…
3) Che cosa significa, dal punto di vista matematico, che una funzione è continua? E derivabile? Come sono legati questi due concetti? E dal punto di vista fisico?
4) Ti ripropongo i quesiti 3 e 6, i cui grafici sono stati scambiati reciprocamente. Possiamo provare a risolverli e a ragionarci?
5) (DOMANDE POST-INTERVISTA)

COMPITO B

1) Definita la legge di Faraday-Neumann, cosa significa scrivere $\frac{d\Phi(B(t))}{dt}$? Puoi dire a parole tue il significato di quella notazione? Quali Analogie/Differenze vedi con la forma $\frac{dg(x)}{dx}$? (Far emergere, anche come input diretto, l'equivalenza fra le notazioni $\dot{B}(t)$, B'(t) e $\frac{dB(t)}{dt}$.)
2) Il grafico rappresentato nell'esercizio 2 ha significato in un contesto fisico? Nel senso: quando si svolge un esercizio di fisica bisogna stare attenti al fatto che i risultati ottenuti abbiano un loro "senso fisico"; hai fatto dei ragionamenti da questo punto di vista? (Riferendoci all'elaborato dello studente intervistato) quali considerazioni fisiche possiamo fare?
3) Spostandoci all'esercizio 5, ci sono "condizioni matematiche" da considerare? Il grafico riportato sull'elaborato corrisponde effettivamente alla *f(x)* richiesta nel testo?
4) Quale/i differenza/e c'è/ci sono fra "condizioni fisiche" e "condizioni matematiche"?
5) Ti ripropongo i quesiti 3 e 6, i cui grafici sono stati scambiati reciprocamente. Possiamo provare a risolverli e a ragionarci?
6) (DOMANDE POST-INTERVISTA)

DOMANDE POST-INTERVISTA

1) Come hai vissuto il questionario? (Cosa ti ha spinto a farlo, come lo consideri, che cosa ti aspettavi che ti rimanesse e cosa ti è rimasto, se pensi che sia stato utile a te come studente).
2) Mi sapresti descrivere il tuo modo di porti di fronte ad un problema matematico (quando hai davanti un esercizio di matematica, a cosa pensi, come ti organizzi per rispondere, quali domande ti fai…)? E di fronte ad uno fisico? (Quale ruolo dai alle formule, alla tua conoscenza teorica, al cercare di immaginarti il fenomeno descritto, ad altri problemi simili…)
3) Ti sei reso conto che nel compito c'erano coppie di esercizi "strutturalmente" identici 1-4, 2-5, 3-6? Se sì, hai usato questa simmetria nello svolgimento della prova? (Sì, No, perché?) Se no, ora che sai di questo legame fra le coppie di esercizi, saresti in grado di fare considerazioni ulteriori sulla differenza che vedi tra un esercizio di matematica e uno di fisica? Quali ti sembrano più facili? Perché?

2.4 Il campione

Il campione di studenti scelto per effettuare questo studio comprende ragazzi e ragazze di età compresa tra i 18 ed i 19 anni, tutti frequentanti, in due classi distinte, il quinto anno ad indirizzo di scienze applicate di un liceo scientifico toscano[*].

A causa del lockdown non è stato possibile chiedere una partecipazione obbligatoria e hanno risposto, rispettivamente, 19 studenti per il compito A e 12 per il compito B. Quindi, complessivamente, il numero di studenti che hanno preso parte all'attività è stato di 31 persone sulle circa 50 delle due classi. Queste ultime sono state raggiunte grazie alla collaborazione con gli insegnanti, i quali hanno anche partecipato alla stesura del compito, commentando e valutando la significatività delle domande rispetto al contesto.

È stato chiesto ai ragazzi di cronometrarsi autonomamente nello svolgimento della prova – data l'impossibilità di svolgere qualsivoglia forma di controllo esterna – e di non superare le 2 ore previste. La consegna è avvenuta in maniera anonima e la disponibilità a partecipare ad un'eventuale intervista è stata espressa in fase di consegna da ogni studente.

Le interviste sono state condotte a distanza di circa due settimane dal compito e hanno accettato di farsi intervistare 7 studenti (4 maschi e 3 femmine), con una durata media di circa 40 minuti ciascuna. Avendo letto e studiato i lavori di ricerca di Ceuppens e Miani, aventi come target ragazzi frequentanti, rispettivamente, primo biennio di scuola superiore e primo anno di un corso di laurea triennale, ho pensato di porre questo lavoro come "tramite didattico" tra le due ricerche sopracitate. Quel che ci si propone di far emergere, difatti, è il livello di preparazione e consapevolezza interdisciplinare raggiunte al termine di un corso di studi superiore, scientifico, quinquennale. Soprattutto negli ultimi due anni dal MIUR sono arrivati segnali importanti e chiari sul percorso didattico da intraprendere: la spinta verso un'interdisciplinarità sempre più marcata è il tema cardine delle ultime prove di maturità, anche se già all'interno Indicazioni Nazionali (citate nel capitolo 1 del presente elaborato, risalenti al 2012) sono presenti riferimenti a proposito dell'importanza di tale aspetto.

Si arriva a concludere che per indagare sul livello di consapevolezza interdisciplinare acquisito dallo studente al momento dell'effettivo conseguimento del diploma di maturità scientifica sarà necessario somministrare il questionario a ragazzi frequentanti il quinto anno (preferibilmente negli ultimi mesi dell'anno scolastico, così che possano aver metabolizzato anche i concetti di derivate, per matematica, ed elettromagnetismo, per fisica).

[*] Il nome della scuola è stato omesso per motivi di privacy.

CAPITOLO 3

Analisi dei risultati

3.1 La partecipazione

Come nel capitolo precedente, le due classi alle quali è stato somministrato il compito contavano un numero complessivo di circa 50 studenti, dei quali 31 si sono impegnati a svolgere l'attività proposta. In particolare: diciannove sono gli studenti appartenenti alla classe associata al compito A, ed i restanti dodici si sono confrontati con il compito B.

3.2 Uno sguardo complessivo sulle prove

Nei grafici in figg.3.1a, 3.1b sono riportati, rispettivamente, i risultati conseguiti dalla classe A e dalla classe B: le risposte sono state classificate in base precisione con cui sono stati motivati i passaggi, la coerenza in questi ultimi e la presenza o meno di errori concettuali. In ogni grafico, i primi tre problemi (1A, 2A, 3A e 1B, 2B, 3B) sono i problemi fisici e gli ultimi tre (4A, 5A, 6A e 4B, 5B, 6B) sono i problemi matematici.

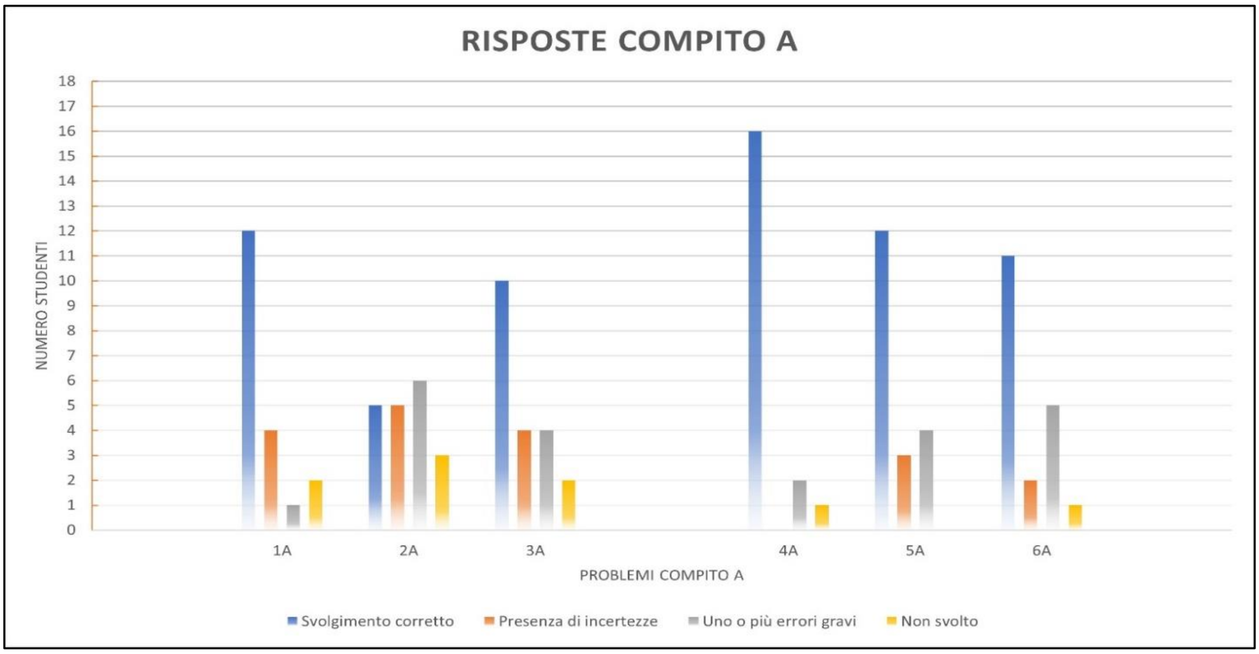


Figura 3.1a: Risposte fornite dai 19 studenti della classe A, suddivise lungo le ascisse a seconda del problema e, quindi, per colore in base alla bontà della risposta data. I problemi 1A, 2A e 3A sono di fisica, i problemi 4A, 5A e 6A di matematica.

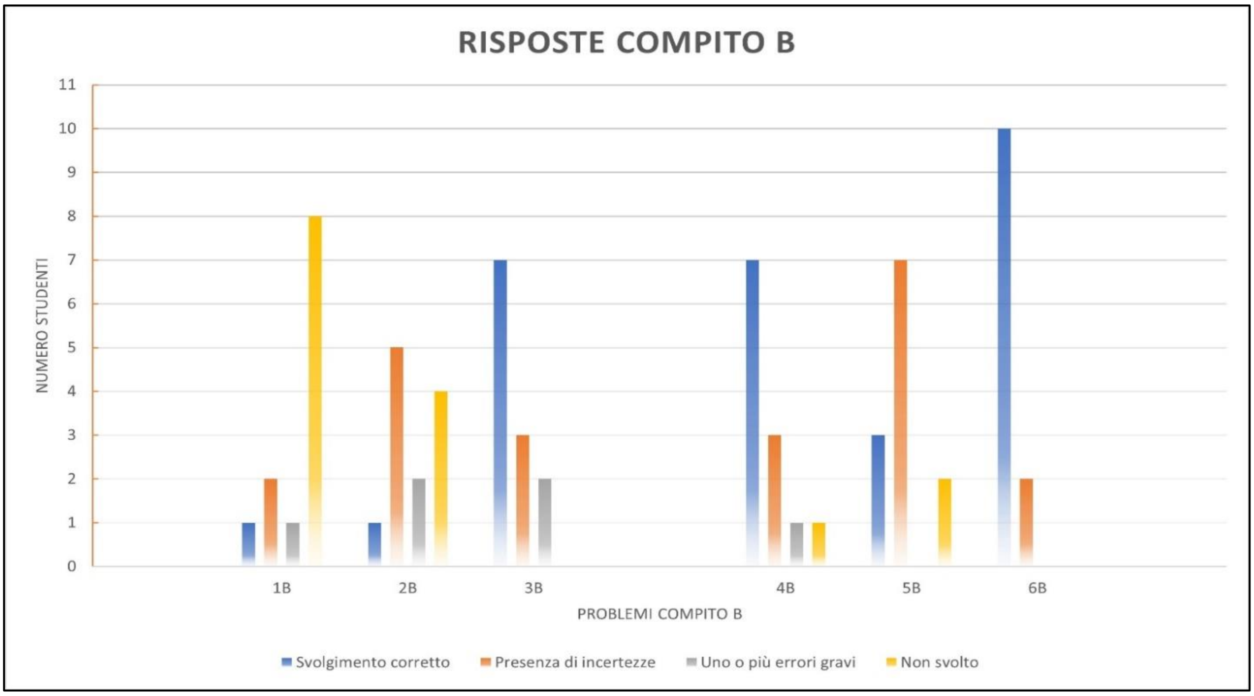


Figura 3.1b: Risposte fornite dai 12 studenti della classe B, suddivise lungo le ascisse a seconda del problema e, quindi, per colore in base alla bontà della risposta data. I problemi 1B, 2B e 3B sono di fisica, i problemi 4B, 5B e 6B di matematica.

Dato che il questionario è stato proposto ad un campione di studenti molto ridotto, i dati riportati in grafico hanno il solo scopo di fornire una sintesi immediata dei risultati ottenuti: non è possibile far assumere ad essi valore statistico, infatti, per il motivo appena citato.

Tuttavia, in ogni compito, la coppia isomorfa di problemi 3A-6A e 3B-6B, presa dal questionario proposto da Ceuppens et al., ci consente di confrontare l'andamento del nostro campione con i risultati ottenuti in studi statisticamente più significativi. Si apprezza come le risposte, anche nel nostro caso, diano luogo ad un fenomeno simile a quello osservato dai ricercatori belgi. Confrontando, infatti, la qualità delle risoluzioni fornite dagli studenti (il fenomeno è più evidente nel compito B), si nota come le risposte fornite dagli studenti siano state migliori nel problema matematico piuttosto che nel suo isomorfo proposto in termini fisici. Inoltre, è possibile apprezzare come i quattro problemi presi dal questionario belga, nonostante fossero da considerarsi molto semplici per uno studente al termine del suo quinto anno di scuola secondaria di secondo grado, siano riusciti a far emergere difficoltà importanti su argomenti di base.

È possibile estendere questo discorso a tutte le coppie di problemi isomorfi: si apprezza, difatti, come, in linea generale, le risposte più corrette siano state fornite ai problemi di matematica piuttosto che a quelli di fisica. Tale fenomeno si è presentato in maniera particolarmente evidente nelle coppie 2A-5A, 1B-4B e 2B-5B.

Si procede, quindi, con un'analisi dettagliata delle singole coppie di problemi così da spiegare i criteri in base ai quali sono state classificate le risposte, e far emergere il carattere delle difficoltà che hanno portato ad una tale disparità nelle due discipline.

3.3 Confronto tra le coppie di problemi isomorfi

PROBLEMI 1A – 4A

Il problema contestualizzato in ambito fisico prevedeva l’utilizzo del processo di derivazione al fine di ricavare le leggi orarie di velocità ed accelerazione, e quindi di sfruttare la funzione relativa alla derivata prima per ricavare l’istante di tempo in cui la velocità istantanea coincideva con il valore dato nel testo del problema. Lo svolgimento appena descritto è quello seguito da tutti gli studenti i quali compiti ricadono sotto la voce “Risposta corretta”, per il quale prendiamo ad esempio la soluzione riportata nella figura 3.2.

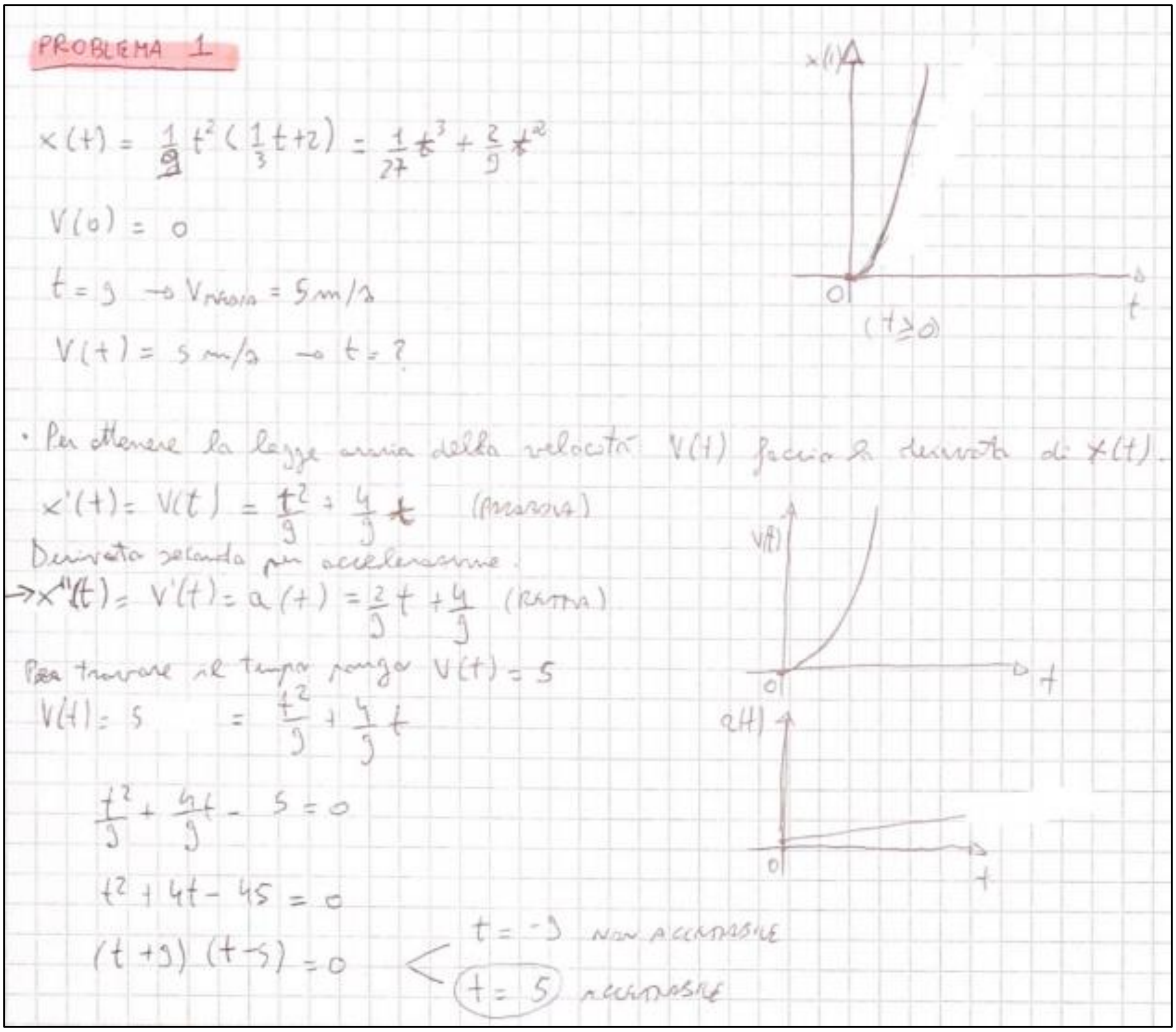


Figura 3.2: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 1A.

Sono state considerate “incertezze” i singoli errori di distrazione nella derivata seconda oppure l’essersi dimenticati di scrivere anche la relazione che descrivesse l’andamento dell’accelerazione. Curioso notare che due studenti si sono sentiti di specificare – nel corso dello studio di funzione fatto per determinare il grafico relativo alla velocità – che «[la funzione *v(t)*] *È sempre crescente quindi non ho min e max*»; dallo studio della funzione, infatti, emerge che il punto di minimo di tale funzione cade in t = -2, quindi fuori dall'intervallo studiato – correttamente – di t ≥ 0. Questa affermazione, però, porta i due studenti a compiere un errore che seppur lieve merita di una particolare attenzione: l'auto, come descritto da problema, partiva da ferma all'istante iniziale (t = 0), motivo per il quale, con velocità strettamente crescente, non possiamo che affermare che v_{min} = *v(0)* = 0. In fig.3.3, dove si riporta il passaggio in questione presente in uno dei due compiti, è possibile vedere quanto appena scritto.

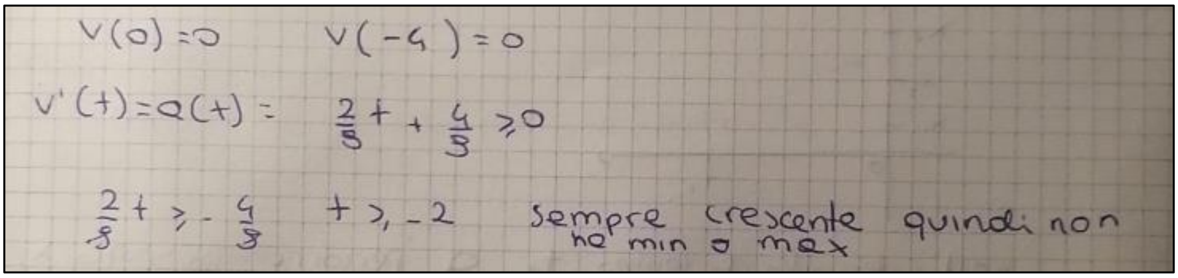


Figura 3.3: Esempio di risposta imprecisa al problema 1A.

Gli errori considerati gravi che sono stati portati alla luce da questo problema sono relativi al concetto di velocità istantanea (non chiaro e confuso con la velocità scalare media), e le condizioni poste dalla contestualizzazione fisica sulla richiesta relativa al momento in cui la retta tangente alla funzione *x(t)* assume il valore proposto dal testo. Rispetto al secondo punto, quel che si trova, svolgendo i calcoli, sono infatti due istanti temporali nei quali la velocità istantanea dell'auto sarà di 5 m/s, ovvero t_1 = 5s e t_2 = -9s. Nell'immagine sottostante (fig.3.4†) si osserva come lo studente arriva correttamente a dedurre i due punti e poi, senza ricontestualizzare il risultato del calcolo nel problema, decide di considerare accettabili entrambi i risultati (contrassegnandoli con un cerchietto).

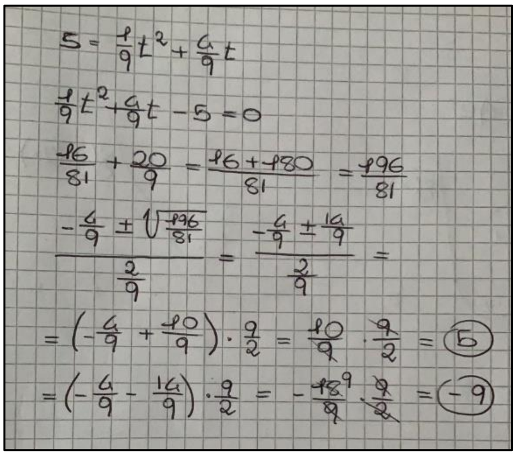


Figura 3.4: Esempio di risposta contenente un errore grave per il problema 1A.

† Per garantire l'anonimato degli studenti le figure sono state riscritte.

Spostandosi sulla controparte matematica, invece, è stata considerata corretta la risoluzione analitica delle derivate ed il successivo studio di tangenza, di cui un esempio è riportato in fig.3.5.

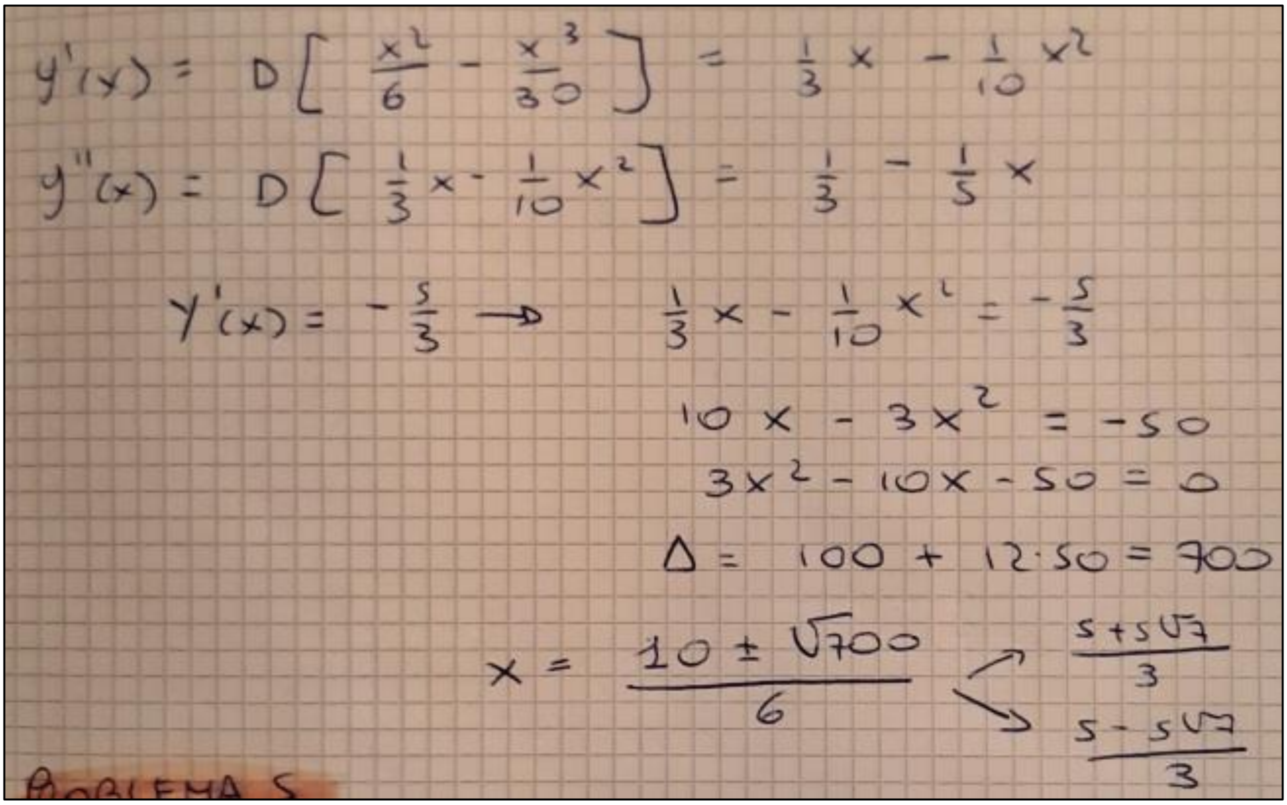


Figura 3.5: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 4A.

Non sono presenti, per questo problema, risposte contenenti piccole incertezze mentre due casi includono l’errore ritenuto grave di aver studiato la retta tangente non al grafico di *y(x)*, ma a quello di *y’(x)*. I due alunni in questione non hanno – è evidente da quanto riportato in fig.3.6, estratta da uno dei due elaborati – alcuna difficoltà con i concetti di “derivata” e “condizioni di tangenza”. L’ipotesi che si può fare è che i loro errori siano il frutto di una meccanicità legata all’esercizio: era stato richiesto di svolgere uno sviluppo fino alla derivata seconda, per cui suppongo abbiano pensato fosse necessario proseguire l’esercizio ripartendo da quel punto.

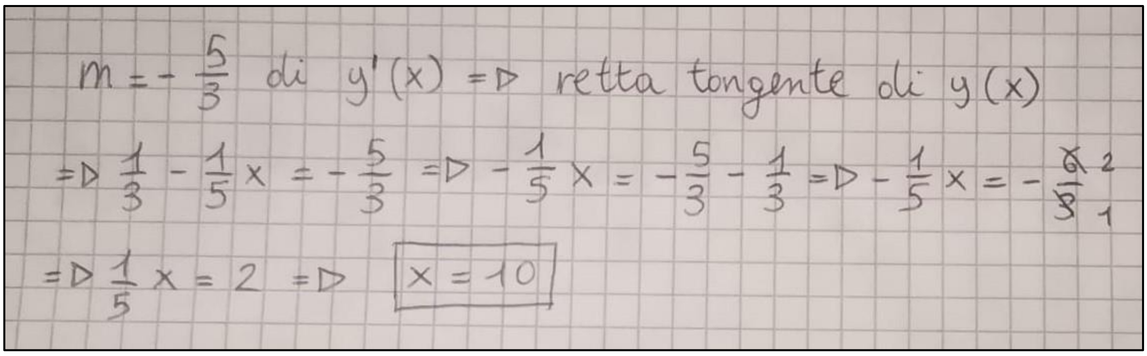


Figura 3.6: Esempio di risposta contenente un errore grave per il problema 4A.

PROBLEMI 2A – 5A

Per il primo problema, presentato in termini fisici, è stata valutata corretta una risoluzione che comprendesse lo studio della continuità di *v(t)*. Parte degli studenti che hanno risposto correttamente al quesito si sono limitati a verificare che il limite destro e sinistro della funzione *v(t)*, definita a tratti, avessero stesso valore finito; la maggior parte di loro, però, si è sentita in dovere di andare a verificare anche la continuità della funzione *x(t)*. Quest'ultimo passaggio è superfluo, dato che la condizione di derivabilità è più forte della continuità, per cui una funzione, se derivabile in un intervallo, allora è necessariamente anche continua nel medesimo intervallo. Si riporta in fig.3.7 un esempio di studio corretto, senza verifica di continuità della *x(t)*.

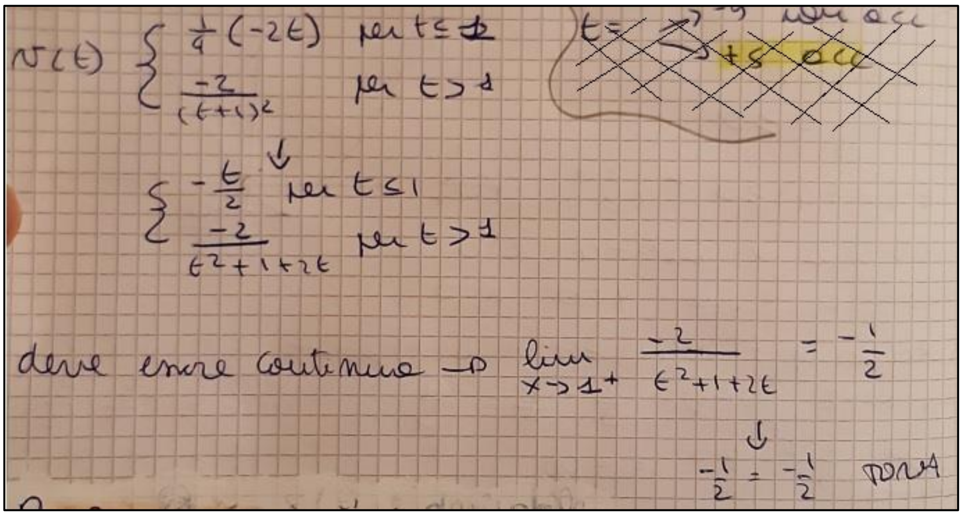


Figura 3.7: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 2A.

Rientrano nei compiti aventi delle imprecisioni cinque studenti che hanno fornito risoluzioni carenti di motivazioni per i passaggi eseguiti (ad esempio, c'è chi si è limitato a dire che *v(t)* fosse continua senza fornire una risposta esplicita al quesito od un qualsiasi conto di sorta).

Tra gli errori gravi, invece, è possibile individuare due tipologie di risposte: le prime sono legate strettamente ad un focus errato sulla funzione da studiare (ci sono studenti, infatti, che si sono limitati alla continuità di *x(t)* ed altri che si sono spinti fino allo studio dell'accelerazione senza individuare il punto importante), le seconde – ben più importanti – sono frutto di considerazioni di mero carattere fisico fatte dallo studente. In particolare, in ben due compiti sembra che l'alunno abbia problemi col significato fisico del segno della velocità, ritenendo che la velocità in questione, essendo "sempre negativa" «Non può essere reale» – oppure come si legge in fig.3.8 – «Non può rappresentare un moto nel verso positivo dell'asse X».

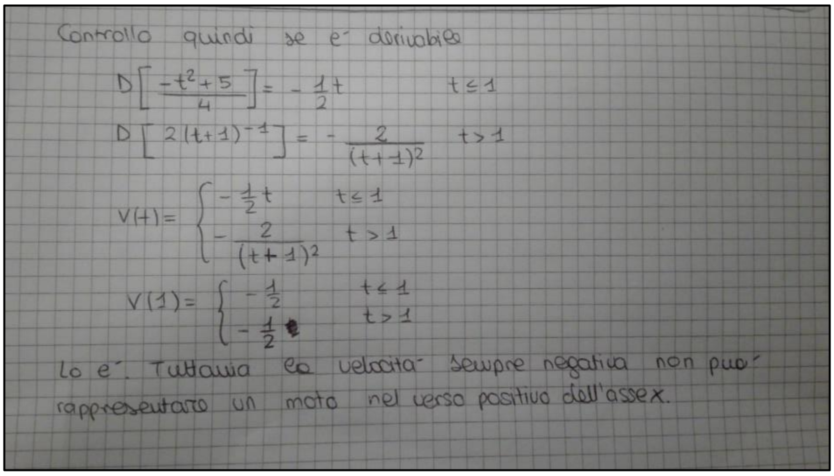

Controllo quindi se e' derivabile
$D\left[\frac{-t^2+5}{4}\right] = -\frac{1}{2}t \qquad t \le 1$
$D\left[2(t+1)^{-1}\right] = -\frac{2}{(t+1)^2} \qquad t > 1$
$v(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t & t \le 1 \\ -\frac{2}{(t+1)^2} & t > 1 \end{cases}$
$v(1) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & t \le 1 \\ -\frac{1}{2} & t > 1 \end{cases}$
Lo e'. Tuttavia la velocita' sempre negativa non puo' rappresentare un moto nel verso positivo dell'asse x.

Figura 3.8: Esempio di risposta contenente un errore grave per il problema 2A.

Passando ora al problema relativo al concetto di derivabilità della funzione matematica *g(x)*, estrapolata da qualsiasi contesto fisico, sono state considerate come corrette tutte le risposte che comprendessero il corretto studio della continuità di *g'(x)*. Un esempio di svolgimento corretto lo ritroviamo in fig.3.9, dove ogni passaggio è chiaramente motivato e la risposta finale è formulata coerente con quanto scritto.

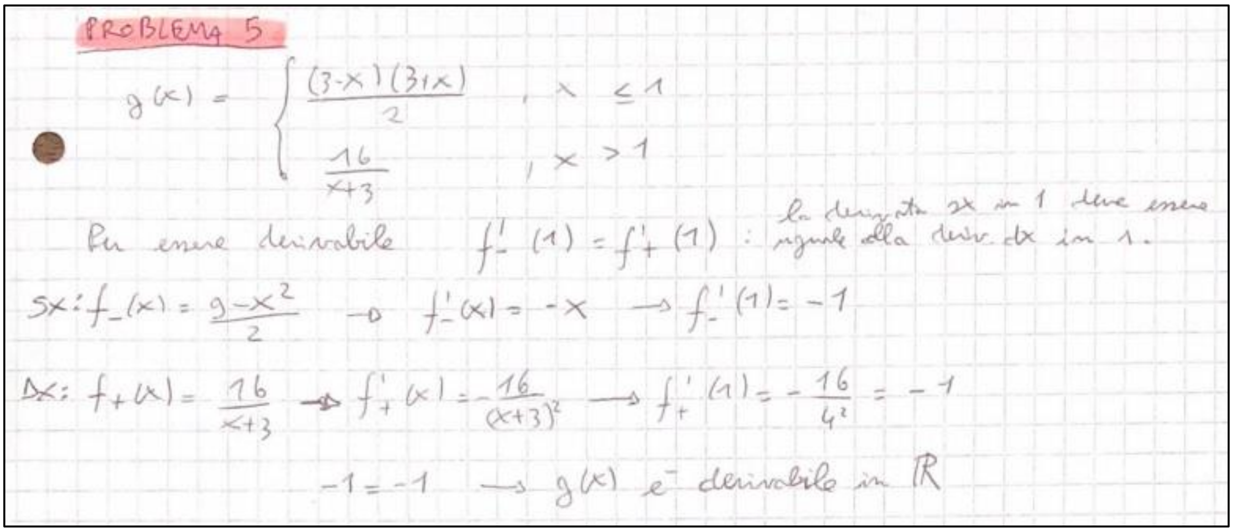

PROBLEMA 5
$g(x) = \begin{cases} \frac{(3-x)(3+x)}{2} & , x \le 1 \\ \frac{16}{x+3} & , x > 1 \end{cases}$
Per essere derivabile $f'_-(1) = f'_+(1)$: la derivata sx in 1 deve essere uguale alla deriv. dx in 1.
Sx: $f_-(x) = \frac{9-x^2}{2} \rightarrow f'_-(x) = -x \rightarrow f'_-(1) = -1$
Dx: $f_+(x) = \frac{16}{x+3} \rightarrow f'_+(x) = -\frac{16}{(x+3)^2} \rightarrow f'_+(1) = -\frac{16}{4^2} = -1$
$-1 = -1 \rightarrow g(x)$ e' derivabile in $\mathbb{R}$

Figura 3.9: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 5A.

Tra le imprecisioni ritroviamo i casi riguardanti semplici errori di trascrizione di un segno o di sviluppo del quadrato di un binomio, entrambe situazioni considerate imputabili a piccole distrazioni e perciò non rilevanti ai fini di questa ricerca. Un discorso a parte va fatto per la determinazione del prodotto notevole seguente, presente al numeratore della prima delle due funzioni che andavano a definire *g(x)*: $(3-x)(3+x)$, sviluppato da parte degli studenti come $3-x^2$ invece che $9-x^2$. Ciò che mi spinge a porre un particolare accento su questo errore è numero di occorrenze con cui si è presentato: infatti, ben quattro studenti su diciannove, ovvero più del

20%, sono stati portati a dare la risposta errata esclusivamente questo motivo (un esempio si può ritrovare in fig.3.10).

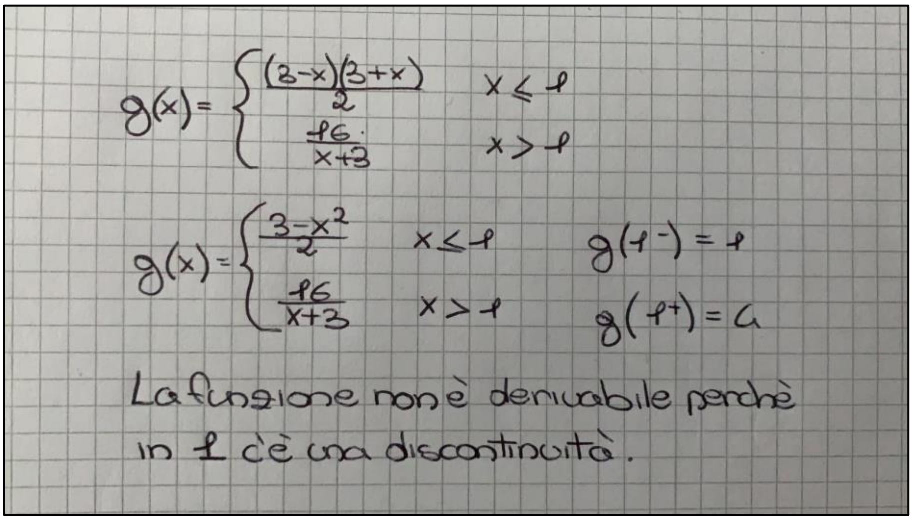


Figura 3.10: Esempio di risposta contenente un errore grave per il problema 5A.

PROBLEMI 3A – 6A

Per fornire una risposta gran parte della classe si è affidata allo studio del coefficiente angolare delle due rette, rappresentate nel grafico proposto per il problema 3A. Tale procedimento (di cui un esempio è apprezzabile in fig.3.11) ha portato a concludere, correttamente, che a prescindere dall'intervallo scelto la velocità sarà comunque maggiore per la macchina a.

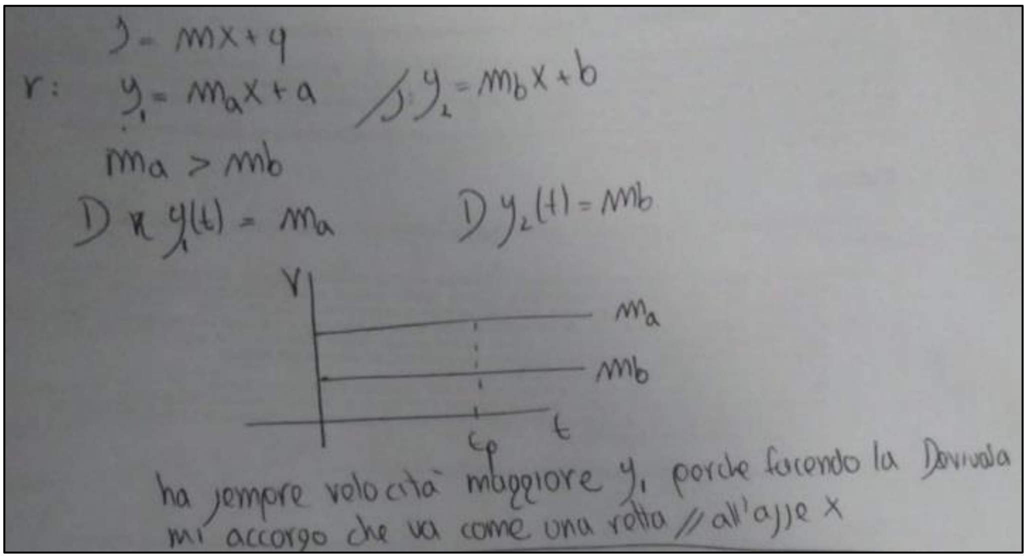


Figura 3.11: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 3A.

È stata considerata una trattazione imprecisa il ragionamento che ha portato a confrontare gli angoli identificati dalle due rette con l'asse delle ascisse, senza nominare la tangente. In fig.3.12 è riportato una di queste risposte: a tal proposito, è possibile apprezzare come anche sul grafico venga identificato il coefficiente angolare direttamente con un angolo.

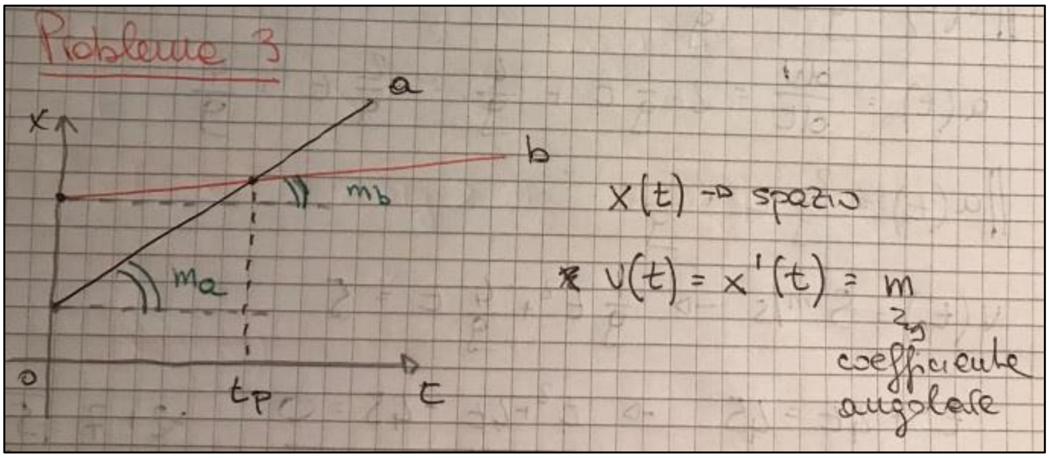


Figura 3.12: Esempio di risposta imprecisa al problema 3A.

Un più piccolo numero di studenti, essendosi ritrovato ad affrontare un problema di fisica, si è affidato alla legge che descrive la velocità media $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, la quale li ha portati a compiere un errore grave nello studio del punto corrispondente al tempo t_p. Viene scritto da uno studente (fig.3.13) che «In quell'istante a e b hanno percorso lo stesso spazio quindi $v_a = v_b$».

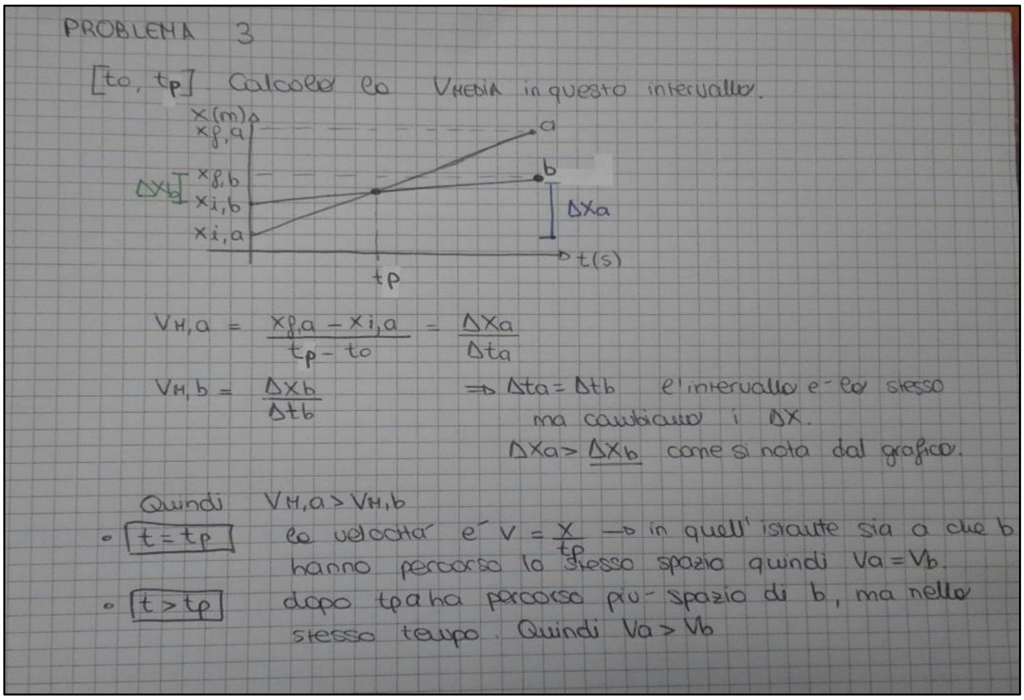
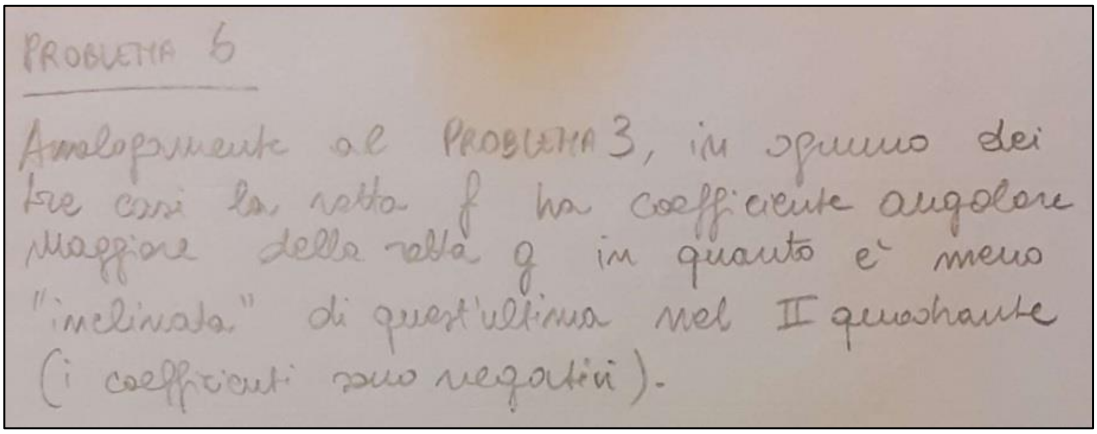


Figura 3.13: Esempio di risposta contenente un errore grave per il problema 3A.

Spostandosi sul problema isomorfo di stampo matematico, la soluzione corretta (di cui un esempio è riportato in fig.3.14) è stata raggiunta sia con considerazioni strettamente qualitative sulle "pendenze" delle due rette ed il fatto che hanno coefficienti angolari negativi, sia attraverso un'esemplificazione quantitativa; entrambi i metodi sono stati considerati corretti, anche se il secondo può rivelarsi particolarmente insidioso qualora si vadano a scegliere esempi numerici critici.

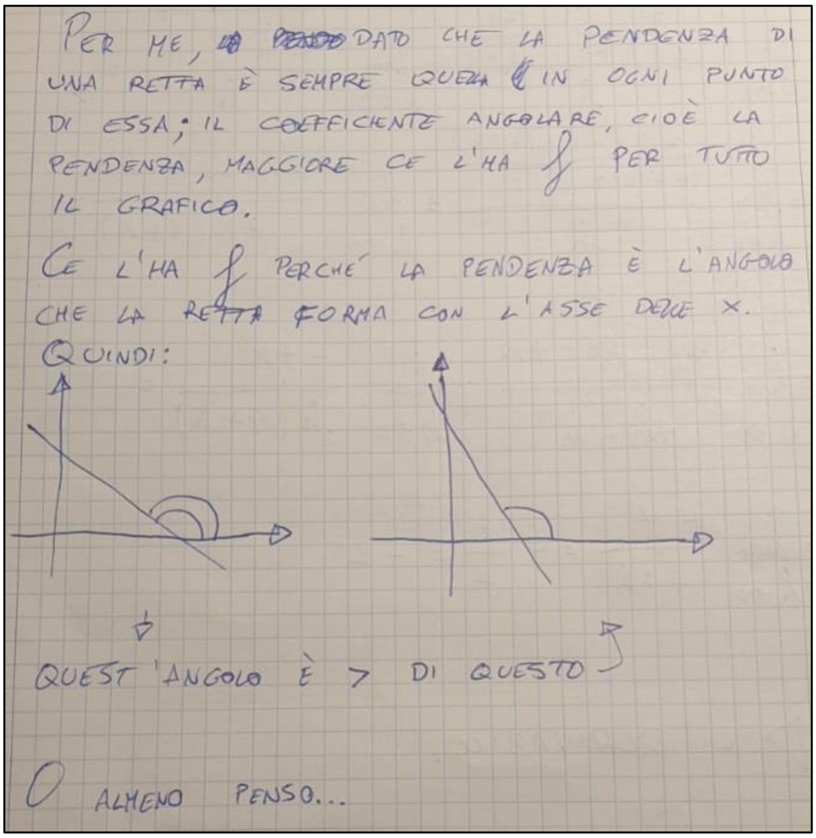


PROBLEMA 6

Analogamente al PROBLEMA 3, in ognuno dei tre casi la retta f ha coefficiente angolare maggiore della retta g in quanto è meno "inclinata" di quest'ultima nel II quadrante (i coefficienti sono negativi).

Figura 3.14: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 6A.

Tra le incertezze rientrano solo due occorrenze, entrambe motivate da una spiegazione confusa o poco chiara della risposta. È riportata in fig.3.15 la risposta che più ritengo caratterizzante in quanto contiene essa stessa una considerazione cruciale fatta dallo studente: al termine della risposta, difatti, è aggiunto «O almeno credo…».



PER ME, DATO CHE LA PENDENZA DI UNA RETTA È SEMPRE QUELLA IN OGNI PUNTO DI ESSA; IL COEFFICIENTE ANGOLARE, CIOÈ LA PENDENZA, MAGGIORE CE L'HA f PER TUTTO IL GRAFICO.

CE L'HA f PERCHÉ LA PENDENZA È L'ANGOLO CHE LA RETTA FORMA CON L'ASSE DELLE X.

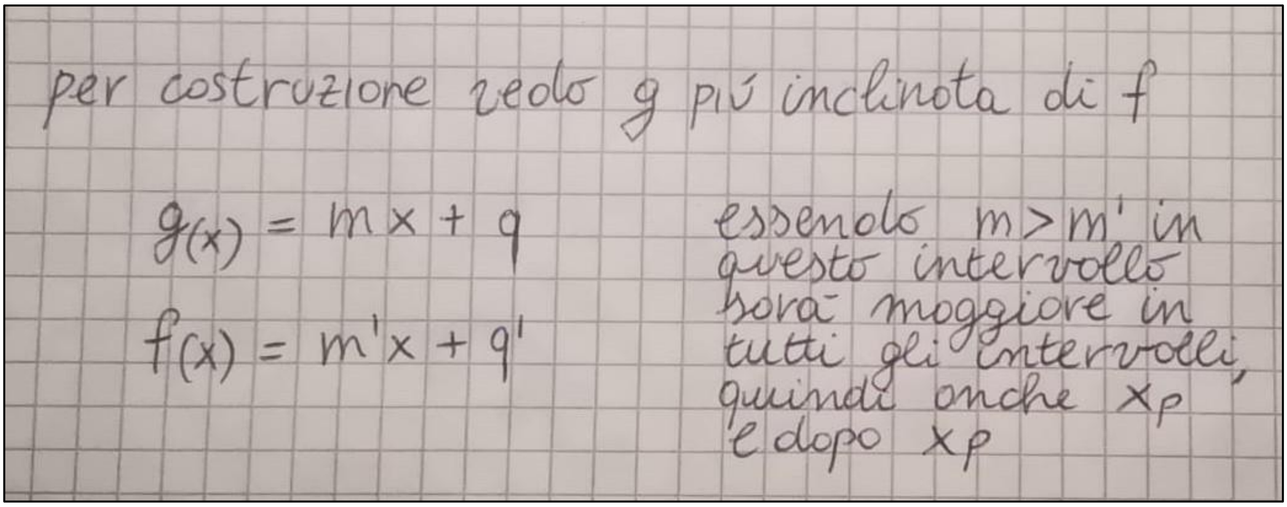
QUINDI:

QUEST'ANGOLO È > DI QUESTO

O ALMENO PENSO...

Figura 3.15: Esempio di risposta imprecisa al problema 6A.

Gli errori più gravi sono tutti riconducibili al pattern noto legato al problema di interpretazione del segno e sull'aspetto percettivo che la retta *g* appare «*Più inclinata della retta f*». Non si considera, cioè, che entrambe le rette hanno coefficiente angolare negativo. Lo studio del punto x_p, di contro, è risultato quasi banale agli occhi di tutti gli studenti. Nello svolgimento riportato in fig.3.16 si nota chiaramente come l'osservazione "g più inclinata di f" vada ad implicare – all'occhio dello studente – «m > m'».


per costruzione vedo g più inclinata di f

$g(x) = mx + q$

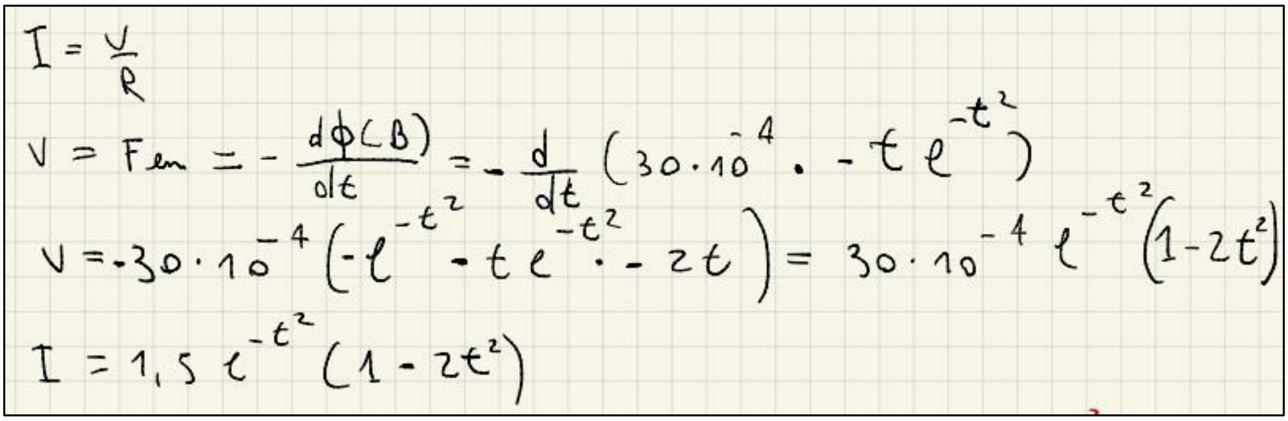
$f(x) = m'x + q'$

essendo $m > m'$ in questo intervallo sarà maggiore in tutti gli intervalli, quindi anche x_p e dopo x_p

Figura 3.16: Esempio di risposta contenente un errore grave per il problema 6A.

PROBLEMI 1B – 4B

Il primo esercizio di fisica proposto è stato svolto correttamente da solo uno studente nell'intero campione classe. È stata giudicata come corretta l'unica risposta, racchiusa in fig.3.17, in cui fosse presente una descrizione ed uno sviluppo corretti della legge di Faraday-Neumann-Lenz in termini di derivate.


$$I = \frac{V}{R}$$

$$V = F_{em} = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(30\cdot 10^{-4} \cdot -t\,e^{-t^2}\right)$$

$$V = -30\cdot 10^{-4}\left(-e^{-t^2} - t\,e^{-t^2}\cdot -2t\right) = 30\cdot 10^{-4}\,e^{-t^2}(1-2t^2)$$

$$I = 1{,}5\,e^{-t^2}(1-2t^2)$$

Figura 3.17: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 1B.

Le risposte imprecise sono state caratterizzate da una interpretazione errata del simbolo $\frac{d}{dt}$ per la derivata. È infatti considerato da diversi studenti come un rapporto tra due derivate indipendenti, come mostrato nell'esempio di fig.3.18. In realtà questo punto potrebbe essere una spia molto interessante da esplorare, circa il problema di allineare i tanti significati del concetto di derivata che emergono nei diversi contesti, quali: coefficiente angolare della retta tangente ad una curva in un punto, funzione ricavabile da una funzione data con regole algebriche di derivazione, e limite di un rapporto incrementale.

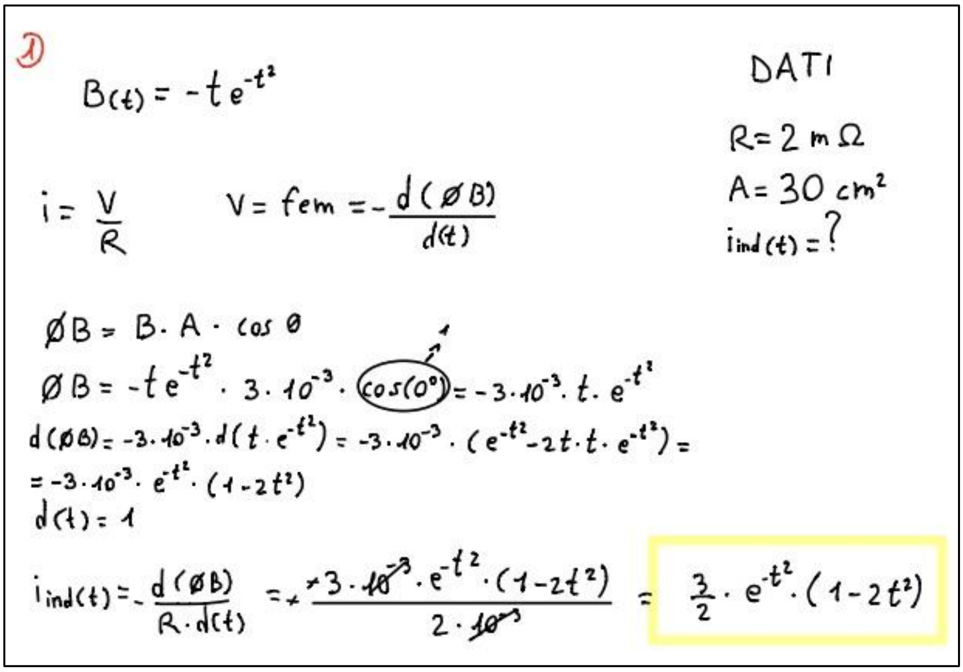


Figura 3.18: Esempio di risposta imprecisa al problema 1B.

È stato considerato, invece, un grave errore dal punto di vista fisico l'aver trattato la legge di Faraday-Neumann-Lenz come differenza tra stato finale ed iniziale invece che come un rapporto incrementale. In fig.3.19 si è riportato il procedimento seguito dallo studente.

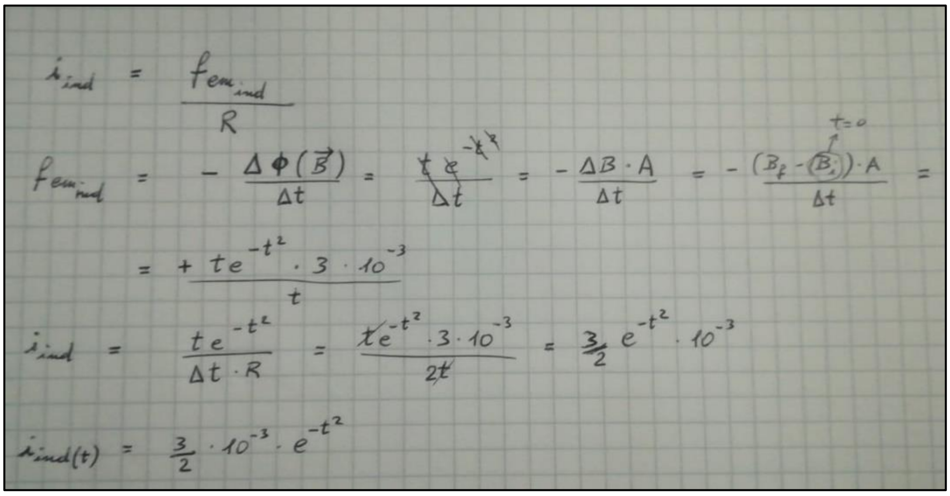


Figura 3.19: Esempio di risposta contenente un errore grave per il problema 1B

Spostandosi sul problema isomorfo, si sono considerate corrette tutte le risposte che comprendevano uno studio di derivata prima e seconda ed una rappresentazione grafica in grado di mettere in risalto i punti più notevoli delle due funzioni. In fig.3.20 sono riportati i risultati finali a cui tali studenti sono giunti: è stata volontariamente omessa la parte di esercizio dedicata allo studio di funzione, comunque seguito pedissequamente da ciascuno degli alunni in questione.

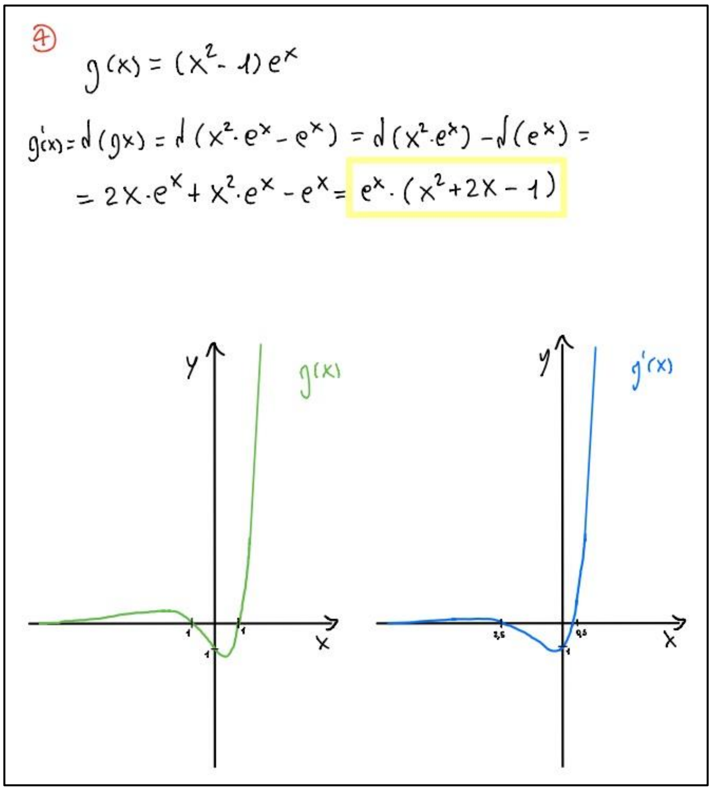


Figura 3.20: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 4B.

Le risposte ritenute imprecise contenevano errori di distrazione (come un segno) o rappresentazioni non molto precise di *g(x)* e *g'(x)*, seppur qualitativamente coerenti e correlate da un corretto svolgimento dei due studi di funzione. L'unico studente ad aver commesso un grave errore sulla derivazione è giunto, ovviamente, anche ad un grafico per *g'(x)* che mostrava evidenti incoerenze con quello di *g(x)*: in fig.3.21 è riportato l'intera risposta fornita dallo studente, coi due grafici posti uno di fianco all'altro.

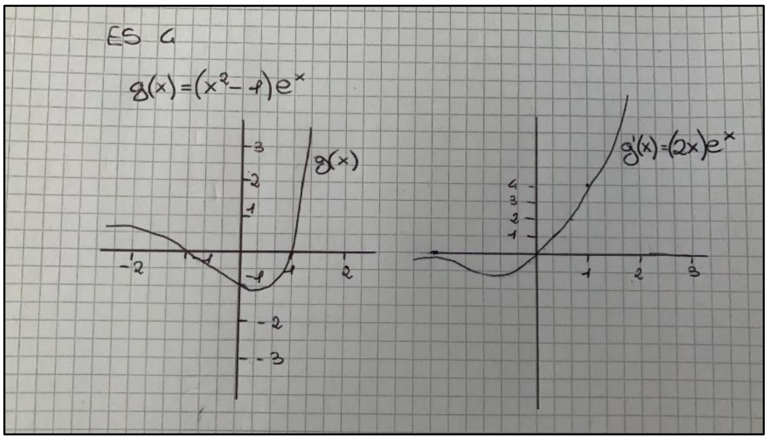


Figura 3.21: Esempio di risposta contenente un errore grave per il problema 4B.

PROBLEMI 2B – 5B

Gli aspetti cruciali dell’esercizio fisico erano legati alle condizioni “a contorno”, ovvero l’insieme dei vincoli da imporre sui due assi affinché il grafico assuma significato se letto in chiave fisica. Solo uno studente è riuscito a svolgere uno studio completo, chiaro (come apprezzabile in fig.3.22), evidenziando sul grafico stesso tutte le considerazioni fisiche necessarie.

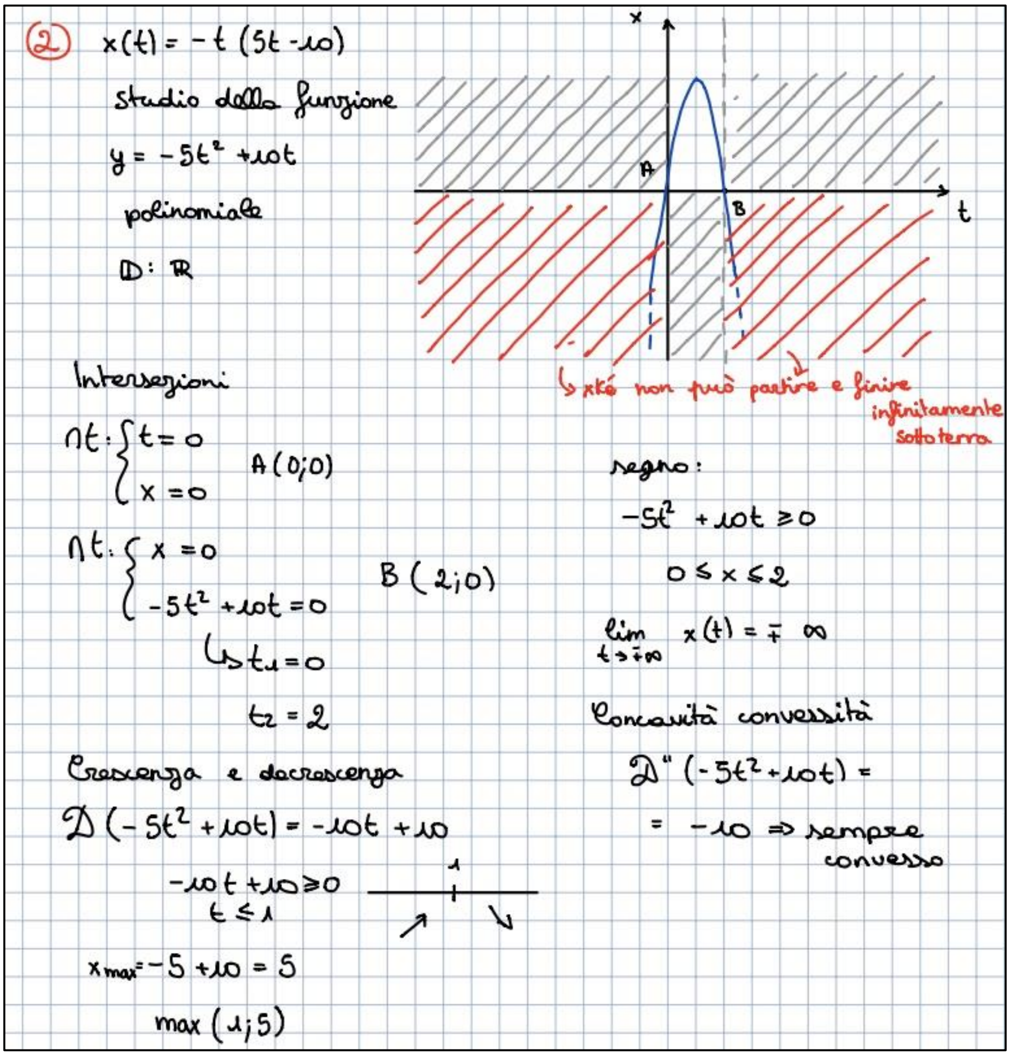


Figura 3.22: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 2B.

Tra le risposte considerate imprecise ritroviamo un tema che già si è presentato nell’analisi del problema 1B, ovvero l’interpretazione del simbolo di rapporto incrementale come una vera e propria frazione avente una derivata sia a numeratore che a denominatore. Inoltre, a differenza di quanto visto nella risoluzione precedente, spesso non sono state rispettate le condizioni fisiche dettate dalla contestualizzazione del problema. Il tutto è osservabile in maniera più chiara ed esplicita in fig.3.23, dove sono presenti entrambe le tipologie di errore.

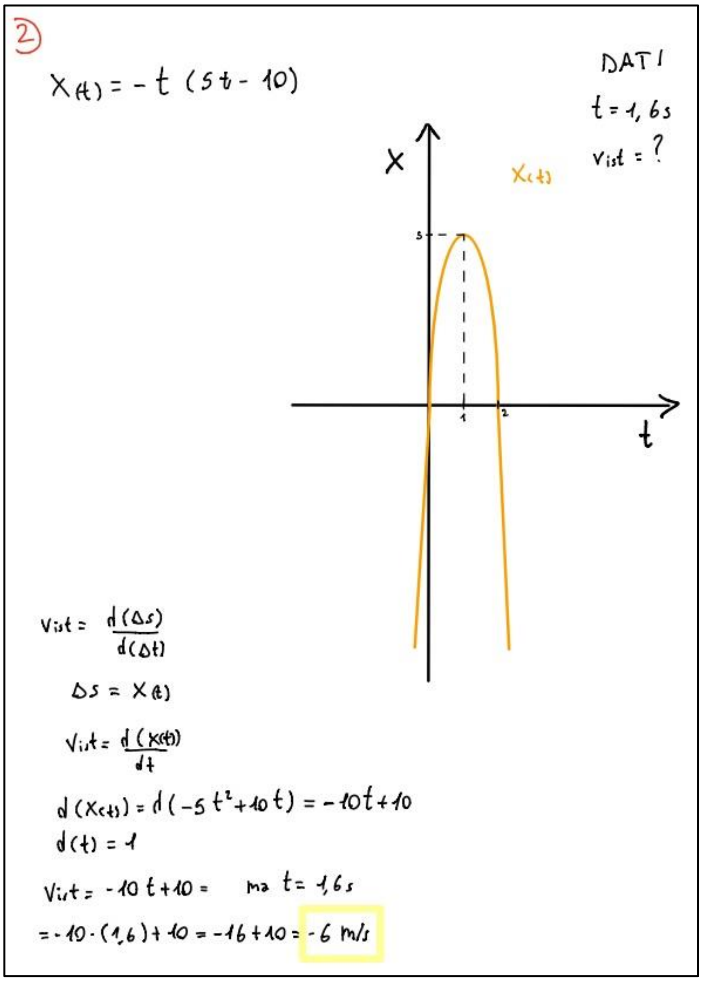


Figura 3.23: Esempio di risposta imprecisa al problema 2B.

Ad aggravare la condizione, per quanto riguarda le risposte sbagliate, è stata la mancata verifica della coerenza dei risultati con il grafico disegnato. In fig.3.24 è possibile notare come l'inesattezza del risultato circa la velocità istantanea sia dovuto ad un errore di trascrizione di un segno; tuttavia, il risultato di -26m/s avrebbe dovuto destare qualche sospetto sulla coerenza del grafico con il risultato analitico ottenuto.

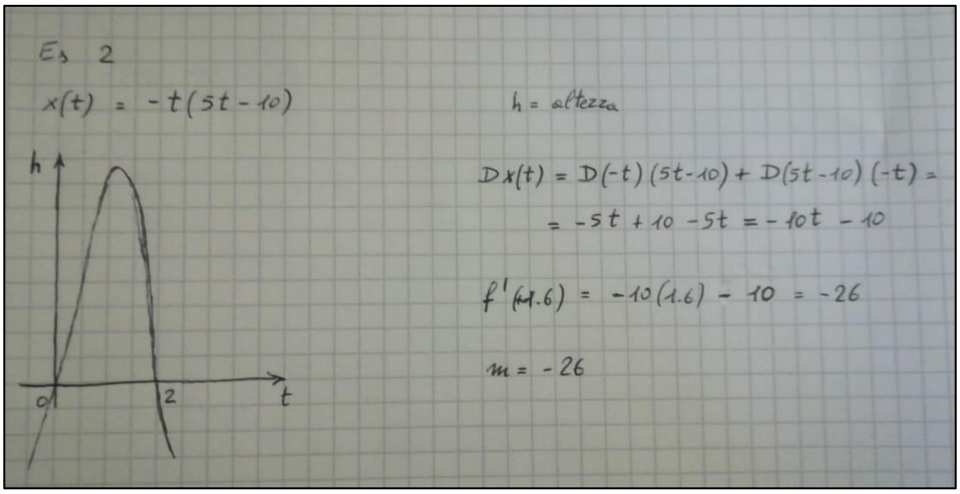


Figura 3.23: Esempio di risposta contenente un errore grave per il problema 2B.

Nel problema matematico isomorfo a quello appena analizzato è stata accettata come risposta corretta solo quella comprendente, oltre al corretto studio circa la condizione di tangenza, anche considerazioni circa il dominio della funzione *f(x)*, la quale non risulta, infatti, definita in $\mathbb{R}$, bensì solo nell'intervallo $[0, +\infty)$, come correttamente illustrato e spiegato nel procedimento in fig.3.24.

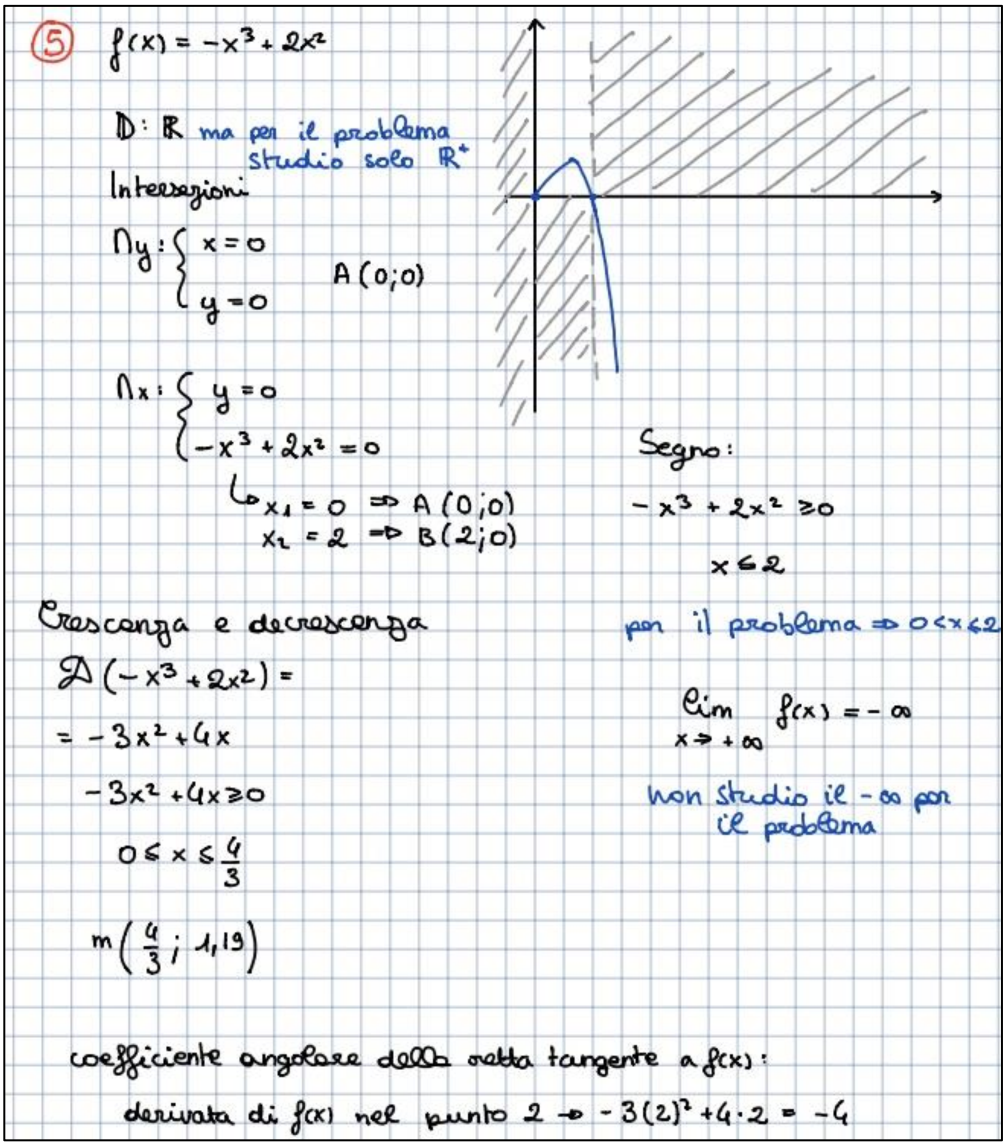


Figura 3.24: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 5B.

La maggior parte delle risposte, a differenza di quella appena vista, evidenziavano poca attenzione al dominio di esistenza della funzione proposta dall'esercizio: difatti, l'unico errore è stato quello di considerare la funzione *f(x)* su tutto l'intervallo dei numeri reali, mentre lo studio sul coefficiente angolare della retta tangente è stato risolto correttamente, come si può osservare in fig.3.25.
Non sono emersi, invece, errori concettuali dalle risposte fornite dagli studenti.

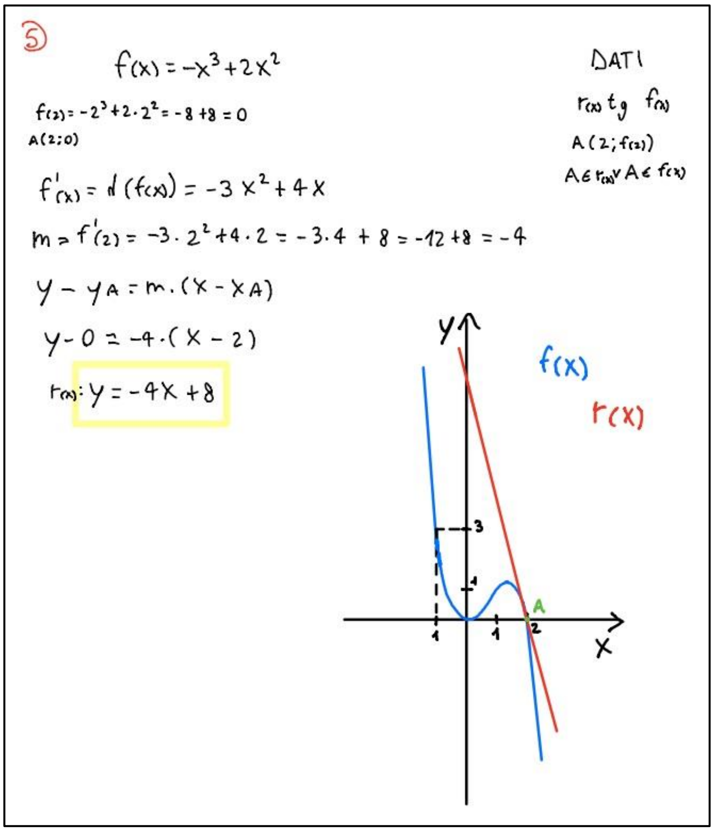


Figura 3.25: Esempio di risposta imprecisa al problema 5B.

<u>PROBLEMI 3B – 6B</u>

Per la coppia di problemi presa dal questionario di Ceuppens e colleghi, partendo dall'esercizio di fisica, sono state considerate egualmente corrette le risposte che sfruttavano la definizione di velocità scalare media oppure l'analogia tra x'(t) e *v(t)*. In particolare, viene riportata in fig.3.26 una risoluzione che sfrutta la seconda proposta: essa denota, infatti, piena consapevolezza della validità ed applicabilità delle nozioni matematiche anche in un contesto fisico.

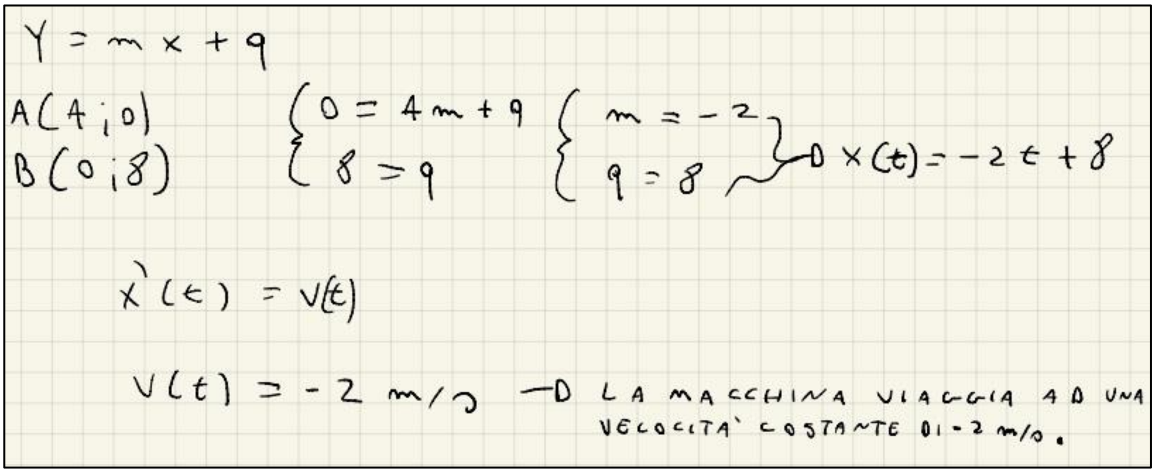


Figura 3.26: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 3B.

È stata considerata imprecisa la risposta di figura 3.27 che mostra difficoltà nell'interpretazione del segno della velocità, per cui si dà la risposta, implicitamente, in termini di modulo (2m/s), con la precisazione che l'auto si stesse muovendo «*In retromarcia*» o, anche, «*All'indietro*».

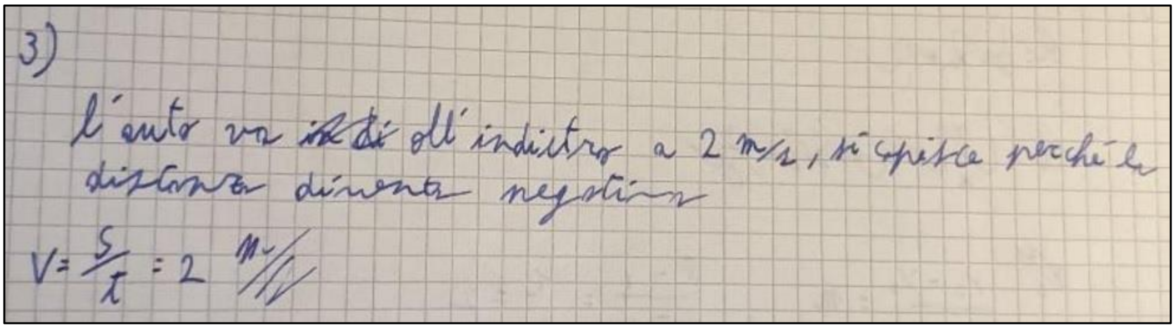

3)
l'auto va all'indietro a 2 m/s, si capisce perché la distanza diventa negativa
$V = \frac{S}{t} = 2$ m/s

Figura 3.27: Esempio di risposta imprecisa al problema 3B.

Tra gli errori più gravi, come visto anche per il problema 2B, ritroviamo le risposte di quegli studenti che non si sono accorti della totale incoerenza tra il risultato ottenuto attraverso i conti ed il coefficiente angolare della retta rappresentata nel grafico proposto. Una risposta di questo tipo è riportata nella fig.3.28.

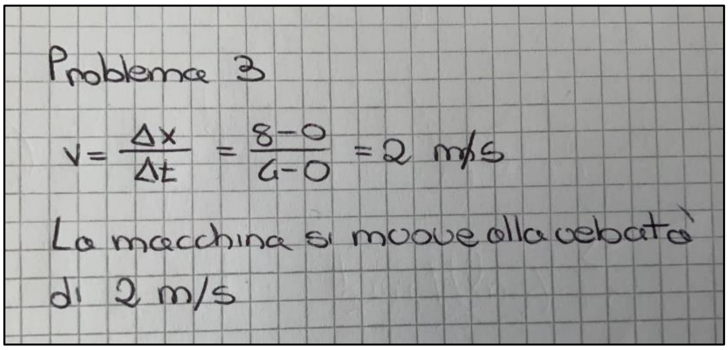

Problema 3
$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8-0}{6-0} = 2$ m/s
La macchina si muove alla velocità di 2 m/s

Figura 3.28: Esempio di risposta contenente un errore grave per il problema 3B.

Il problema isomorfo inerente a temi strettamente matematici ha trovato come corrette due soluzioni: la prima, più macchinosa, prevede che si ricavi l'equazione canonica della retta e, dalla forma implicita, se ne deduca il coefficiente angolare; la seconda strategia risolutiva, più snella, si avvale della definizione di coefficiente angolare come rapporto tra l'incremento sulle ordinate in rapporto con quello sulle ascisse, in formula $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, come scritto nello svolgimento proposto in fig.3.29.

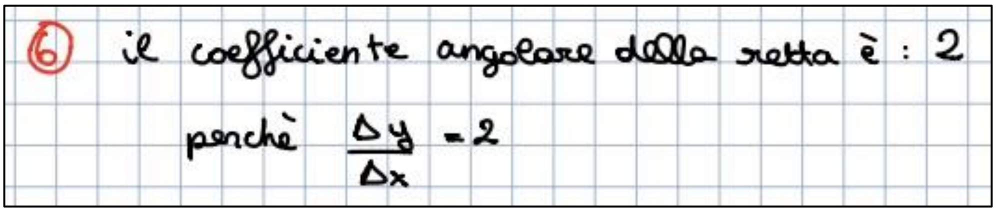

6 il coefficiente angolare della retta è : 2
perchè $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

Figura 3.29: Esempio di risposta considerata corretta per il problema 6B.

È stata vista come un'imprecisione la presenza di passaggi non troppo chiari (riportati in fig.3.30) durante la risoluzione del problema, oppure la presenza di una svista che ha portato uno studente ad affermare che la retta avesse coefficiente angolare pari ad $\frac{1}{2}$. Non sono emerse difficoltà critiche su questo esercizio.

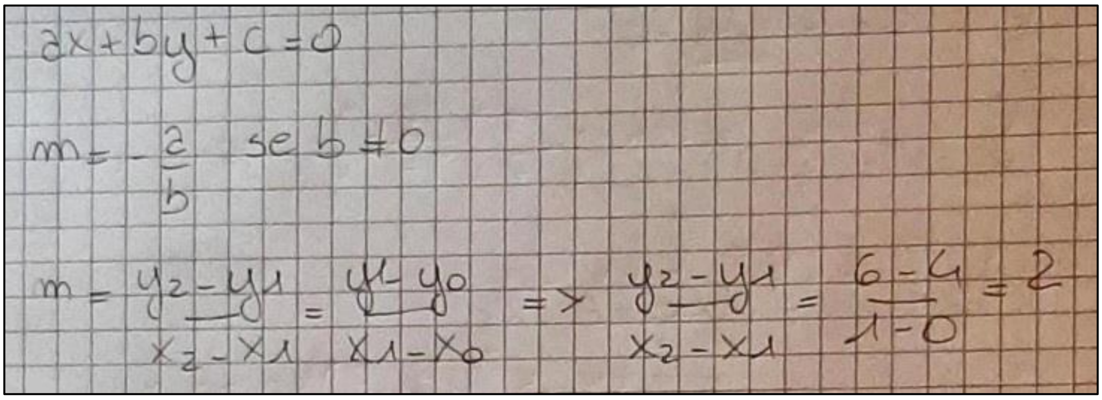


Figura 3.30: Esempio di risposta imprecisa al problema 6B.

3.4 Le difficoltà emerse dal questionario

Dall'analisi delle risoluzioni proposte dagli studenti, indipendentemente dalla classe di provenienza, è emersa una discrepanza significativa tra le risposte fornite ai problemi matematici e quelli di contestualizzazione fisica: in particolare, i primi sono stati affrontati – in linea generale – con meno difficoltà e con più sicurezza dei secondi; da non trascurare, difatti, il dato inerente al numero di studenti che non hanno svolto i problemi, dal quale si deduce una difficoltà evidente già nel primo approccio al problema. Tale fenomeno è risultato particolarmente evidente nei problemi 1B, 2B e 2A se rapportati ad i corrispettivi esercizi matematici. Per la risoluzione di questi ultimi, difatti, erano richieste competenze relative ai concetti di derivabilità e di svolgimento analitico di derivate prime e seconde; non avendo incontrato grosse difficoltà nella risoluzione degli esercizi di matematica, quindi, si può dedurre che la criticità principale alla base della mancata risoluzione dei quesiti citati sia riconducibile alla difficoltà degli studenti di riuscire a tradurre questi concetti per applicarli, poi, alla situazione fisica proposta.

Di contro, una problematica che emerge chiara in ambedue le tipologie di esercizi è l'erronea interpretazione del simbolo di rapporto incrementale, $\frac{d}{dt}$, il quale viene studiato come un quoziente tra due derivate distinte. Questo tipo di errore concettuale non comporta, di fatto, il raggiungimento di un risultato numerico differente, e per accorgersi di tale criticità si è posta l'attenzione sui singoli svolgimenti proposti dagli studenti: prendendo ad esempio la risposta al problema 1B illustrata in fig.3.18, infatti, è possibile leggere la derivata corretta divisa per 1 (ovvero la derivata di t rispetto a t, in formula $\frac{d(t)}{dt}$).

Non sono state riscontrate, tra le diverse coppie isomorfe di problemi, difficoltà legate all'interpretazione della velocità e dell'accelerazione, rispettivamente come derivata prima e seconda della posizione *x(t)*. Discorso analogo per le condizioni di tangenza matematica e la determinazione della velocità istantanea data una legge oraria.

Le difficoltà emerse in particolar modo nei problemi 2B-5B (isomorfi tra loro) e 1A sono collegate ad una scarsa attenzione posta dallo studente alle condizioni di accettabilità del problema. Spesso, infatti, è stato registrato un atteggiamento quasi meccanico da parte dello studente nei confronti degli esercizi: quest'ultimo si limita a rispondere alla domanda somministrata seguendo passaggi definiti, quasi automaticamente, senza porsi domande sui risultati ottenuti e sul perché si stiano seguendo certi metodi e strategie. Con un approccio di questo tipo diventa di importanza secondaria la contestualizzazione fisica del problema, o le condizioni poste sul dominio di una funzione matematica, che sembrano venire intese come informazioni esterne al problema e marginali.

Non andando ad includere queste considerazioni nello svolgimento dei problemi si arriva spesso ad incoerenze importanti tra grafici e risultati analitici: questa mancanza, di importanza cruciale, si ritrova in pressoché tutti gli esercizi di ambedue i compiti. L'esempio più lampante lo si è ritrovato nei problemi presi dal questionario di Ceuppens, nei quali le difficoltà coi segni hanno condotto a risultati incoerenti.

Nella correzione dell'esercizio 3B è stata considerata una mancanza meno grave quella di coloro i quali, pur giungendo per errori di segno ad una velocità positiva, si sono impegnati a ricercare una coerenza con quanto osservato nel grafico x/t: hanno dimostrato in questo modo di essere consapevoli della necessità di dare coerenza del risultato ottenuto e, seppur sbagliando, hanno comunque provato a fornire un'interpretazione di quanto ottenuto.

Si ritiene che queste tipologie di problemi, se seguiti in classe da attente discussioni, potrebbero incentivare riflessioni sul significato della contestualizzazione di un problema, così come potrebbero far emergere problemi di allineamento dello stesso concetto, quando proiettato in diversi contenti disciplinari. Questo promuoverebbe forse anche competenze di interdisciplinarità a partire dallo sviluppo di una maggiore consapevolezza dei procedimenti da seguire per giungere ad un determinato risultato; inoltre, a seguito di questa conquista, sarebbe molto più facile sviluppare un senso critico importante nei confronti dei risultati. Troppo poco spesso, nelle scuole superiori di secondo grado, viene richiesta – stavolta mi riferisco prevalentemente alla fisica – una risposta in termini di mera considerazione di ordini di grandezza. Seppur lo studente sappia cosa si intende con tale dicitura, non è però avvezzo a farne deduzioni qualitative in merito. Il processo

logico si può riportare, ovviamente, anche in matematica, seppur con qualche piccola accortezza in più relativa alle conoscenze di base.
Nella prossima sezione, riportiamo quanto emerso dalle interviste a controllo di queste ipotesi, ovvero a controllo delle potenzialità che problemi di questo tipo possono avere.

3.5 L'esito delle interviste e la critica degli studenti

Sulla totalità del campione di studenti che hanno svolto il compito, circa la metà hanno dato disponibilità per un'intervista, e tra di essi sono stati selezionati poco meno di una decina, i casi più significativi, per svolgere l'intervista singola.
Tutte le ragazze e i ragazzi ascoltati si sono dimostrati interessati sia agli argomenti trattati, sia al modo in cui l'attività era stata proposta: una studentessa, in particolare, ha trovato l'attività molto positiva perché fatta «*Da uno studente, per gli studenti*»: nel senso che, come da lei spiegato, questo è stato un lavoro di ricerca partito dai disagi provati dagli studenti e pensato per risolverli.
Le lacune, o le imprecisioni, riscontrate nel compito sono state affrontate generalmente con successo: i singoli studenti – taluni in maniera autonoma ed immediata, altri con il supporto di qualche suggerimento – si sono resi conto degli errori commessi ed hanno ricoperto ruolo attivo nella ricerca della risposta, o del ragionamento, corretti. Con coloro i quali avevano svolto il compito B sono stati affrontati nello specifico, in modo approfondito, le problematiche relative al rapporto incrementale ed il significato della notazione $\frac{d}{dt}$ in analogia con $\frac{d}{dx}$. Per gli studenti che si erano cimentati con il compito A, invece, è stato affrontato più nel dettaglio i concetti di continuità e derivabilità e come sono legati tra loro. Argomento di discussione comune a tutti, infine, sono state le condizioni di accettabilità in ambito sia fisico che matematico: un focus particolare è stato fatto, dipendentemente dallo studente, attorno ai problemi 2A-5A e 2B-5B.
Nonostante gli esercizi siano stati ritenuti abbastanza facili, tutti gli studenti hanno concordato nell'utilità della prova al fine di andare a ripassare quegli argomenti dati un po' più per scontati, soprattutto in vista dell'imminente prova di maturità che sarebbero andati ad affrontare di lì a poche settimane.
I problemi di matematica, in generale, sono considerati più semplici di quelli di fisica: la motivazione fornita risiede, principalmente, nelle strategie risolutive applicate. Difatti, gli studenti hanno asserito di essere portati a seguire precisi passaggi in maniera meccanica in base alle richieste dell'esercizio, saltando da una formula all'altra senza porre troppa attenzione ai ragionamenti dietro i singoli procedimenti. L'unico studente in controcorrente con questa linea di pensiero – peraltro, autore di uno dei migliori compiti della classe – ha affermato, di contro, che trova gli esercizi di

matematica più difficili di quelli fisici proprio a causa delle difficoltà nel raffigurarsi mentalmente cosa significhino i concetti di derivata ed integrale.

I problemi di fisica, invece, sono considerati più complessi proprio per la richiesta di un ragionamento diverso per ogni singolo caso studiato; afferma uno studente: «*A matematica hai delle formule precise, mentre a fisica cambiano in ogni situazione.*», andando ad intendere che ogni esercizio contiene, a modo suo, qualche caratteristica in grado di renderlo unico, così da imporre allo studente di ragionare e non procedere in maniera sistematica. Una studentessa aggiunge «(un esercizio di matematica) *Se lo sai fare, soliti passaggi, lo fai. Nei problemi fisici devi ragionare per ogni caso, quindi sono più difficili.*».

Alcuni studenti si sono espressi criticamente verso il metodo didattico con cui sono proposti gli argomenti di fisica, in particolare per quanto riguarda la teoria dietro a formule e ragionamenti: riporto di seguito le parole dei ragazzi in quanto le reputo il mezzo più efficace e trasparente per trasmettere tale senso di disagio e sconforto.

Studentessa 1: «*Nella fisica c'è molta più teoria dietro la singola formula, ma la trascuro perché tanto non me la chiedono; mi chiedono solo di saper applicare formule. Per questo mi è piaciuto il problema 2A: mi ha offerto l'opportunità di ragionare e capire che significa quel che sto studiando.*»

Studente 2: «*La parte teorica della fisica non mi è mai piaciuta perché, almeno per come viene spiegata alle superiori, è molto più un "tieni la formula e fatti l'esercizio"*»

Conclusioni

Lo studio voleva valutare le caratteristiche legate alle difficoltà incontrate dagli studenti nella risoluzione di problemi di matematica-fisica, con un particolare focus alla seconda prova dell'esame di Stato. Inoltre, attraverso l'intervista, si è indagato un aspetto più personale legato ai differenti metodi di approccio degli studenti quando posti di fronte a problemi di carattere matematico oppure fisico. Inoltre, si è voluto contribuire alla ricerca andando a fornire uno strumento di indagine utilizzabile da docenti di scuola superiore di II grado al fine di identificare criticità – che siano esse di tipo tecnico-nozionistico o di modellizzazione – all'interno della propria classe.

I risultati ottenuti rispecchiano quanto ritrovato da Ceuppens et al. e Lorenzo Miani nel settore della cinematica 1D; è emersa, difatti, una differenza – più o meno netta dipendentemente dalla coppia di problemi isomorfi presa in considerazione – nella bontà delle risposte fornite ai problemi. Sono state riscontrate evidenti difficoltà anche solo in fase di approccio al quesito: fenomeno particolarmente evidente nel problema 1B, dove quasi la totalità degli studenti si sono limitati alla trascrizione dei dati.

È risultato evidente come gran parte degli studenti abbiano chiari i concetti matematici (come quelli di derivabilità e di tangenza), ma che non riescano poi a ritrovarli in un problema proposto in un contesto fisico.

Nelle interviste sono emersi ulteriori tratti personali che evidenziano maggiormente questa differenza in difficoltà riscontrate.

I problemi di matematica vengono visti come ripetitivi e meccanici: ovvero risolvibili seguendo precisi passi che, anche variando la difficoltà analitica dell'esercizio, si mantengono comunque invariati di caso in caso.

Discorso diametralmente opposto viene fatto per gli esercizi di estrazione fisica, i quali vengono visti come "ognuno un caso a parte" e quindi focalizzati più sul ragionamento che su di un automatismo procedurale predefinito; questo fa sì che essi vengano visti come più complicati ed, allo stesso tempo però, anche più stimolanti per coloro che hanno interesse nel cimentarsi con tali tipologie di sfide.

Appendice A

Compito A

Problema 1:

Un'auto parte da ferma e si muove lungo un tratto rettilineo di strada secondo la legge oraria espressa da: $x(t) = \frac{1}{9}t^2(\frac{1}{3}t + 2)$, dove *x(t)* indica (in metri) la posizione occupata dalla macchina all'istante t (in secondi).

Considerando che l'auto inizia a muoversi a t = 0s, si studi l'andamento della sua velocità e quello della sua accelerazione.

Nei primi 9 secondi di moto si ha v_{media} = 5m/s; calcolare a che istante di tempo il veicolo si muoverà con tale velocità.

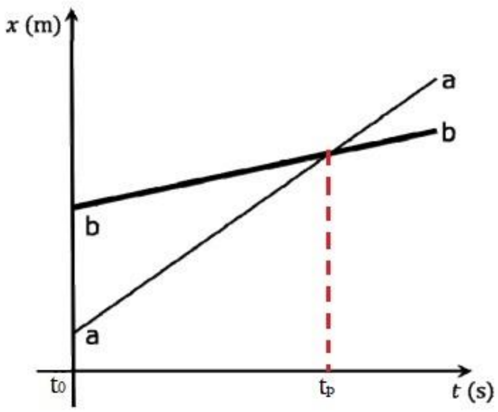
Problema 2:

Data la legge oraria sottostante, ci sono considerazioni fisiche sulla **velocità** che permettono di concludere che questa funzione NON può rappresentare un moto?

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{-t^2 + 5}{4}, & per\ t \leq 1 \\ \dfrac{2}{t+1}, & per\ t > 1 \end{cases}$$

Problema 3:

Due auto si stanno muovendo lungo una strada rettilinea. Il grafico mostra la posizione in funzione del tempo. x (in metri), t (in secondi). Quale auto ha la velocità maggiore in [t_0, t_p)? In t_p? E dopo t_p? Motivare ciascuna risposta.



Problema 4:

Data la funzione $y(x) = x^2(\frac{1}{6} - \frac{x}{30})$, calcolare derivata prima e seconda. Trovare, quindi, il/i punto/i in cui la retta tangente al grafico di *y(x)* ha coefficiente angolare pari a $-\frac{5}{3}$.

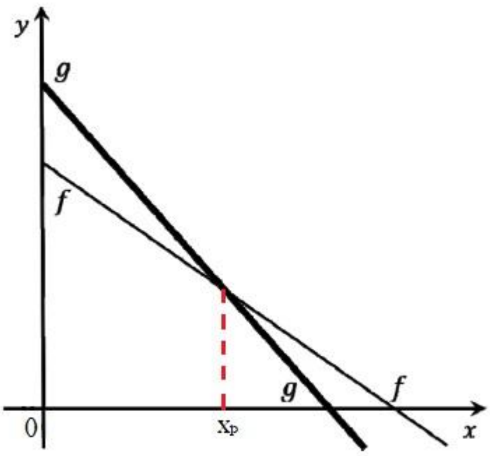
Problema 5:

Determinare se la funzione *g(x)* è derivabile in R:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(3-x)(3+x)}{2}, & per\ x \leq 1 \\ \frac{16}{x+3}, & per\ x > 1 \end{cases}$$

Problema 6:

Il grafico mostra l'andamento di due funzioni, *f* e *g*. Quale delle due rette ha coefficiente angolare maggiore nell'intervallo [0, x_p)? In x_p? Dopo x_p? Motivare ogni risposta.



Appendice B

Compito B

Problema1:

Una spira di rame, di resistenza R = 2mΩ racchiude un'area di $30cm^2$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di campo sono perpendicolari alla superficie della spira. Il campo magnetico B(t), in mT, varia secondo la legge:

$$B(t) = -te^{-t^2}$$

Determinare l'espressione analitica della corrente indotta sulla spira, $i_{ind}(t)$. Riportare quindi B(t) e $i_{ind}(t)$ su due grafici.

Problema 2:

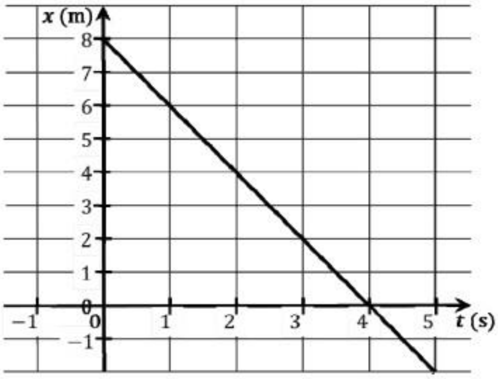
Un oggetto puntiforme viene lanciato verso l'alto verticalmente. La quota x, in metri, espressa in funzione del tempo t, in secondi, segue la legge oraria:

$$x(t) = -t(5t - 10)$$

Riportare in un diagramma x/t (tempo sull'asse delle ascisse e quota sulle ordinate) tale funzione. Calcolare, quindi, la velocità istantanea al tempo t = 1.6s.

Problema 3:

Un'auto si sta muovendo lungo una strada rettilinea. Il grafico mostra la posizione della macchina in funzione del tempo. La posizione è in metri, il tempo in secondi. Determinare la velocità della macchina. Motivare la propria risposta.



Problema 4:

Riportare su due grafici distinti le funzioni *g(x)* e *g'(x)*, ovvero la sua derivata prima.

$$g(x) = (x^2 - 1)e^x$$

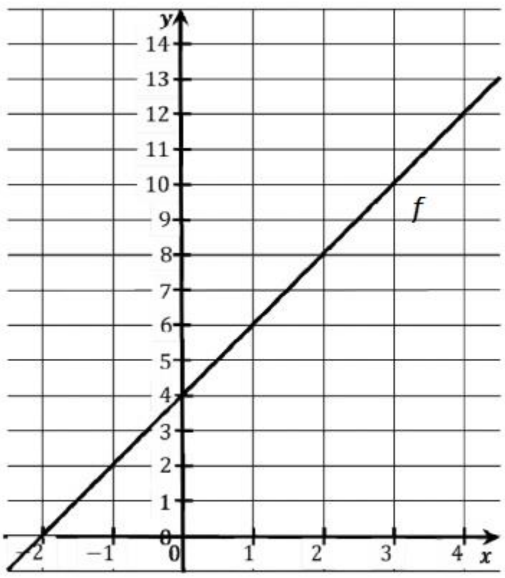
Problema 5:

Si consideri la funzione *f*: (0, +∞) → R così definita: $f(x) = -x^3 + 2x^2$.

Disegnare in un grafico tale funzione e determinare il coefficiente angolare della retta tangente ad f(x) nel punto di ascissa 2.

Problema 6:

La figura mostra il grafico della funzione *f*. Determinare il suo coefficiente angolare motivando la risposta data.



Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto la Prof.ssa Olivia Levrini per l'infinita pazienza avuta con me: per le decine (o forse centinaia?) di mail che le ho inviato ad ogni ora del giorno e della notte, per aver sopportato le mie ansie, e per tutte le indicazioni che mi ha fornito. In seconda battuta, ringrazio infinitamente anche il Prof. Ivan Genesio per la disponibilità dimostrata e la passione che è stato in grado di trasmettermi a lezione, quando ero in quinta liceo, ed al telefono in questi ultimi mesi.
Ringrazio i miei genitori, per avermi permesso di inseguire i miei sogni, e mio fratello per non aver mai smesso di credere in me, anche quando io stesso ero il primo a vacillare; e la Nonna Franca per avermi ascoltato ripetere facendo finta di capire ogni cosa, riprendendomi sulle pronunce delle lettere greche («Si dice *mi*, non *mu*… mica sei una mucca!»).
Un ringraziamento speciale lo dedico ai miei tre compagni di viaggio, Giulia, Sara e Luca, coi quali ho condiviso gioie per voti insperati, frustrazioni, dolori, pettegolezzi vari, Nutella e molte risate. Sono sempre stati in grado di spronarmi e si sono sempre dimostrati pronti a ripetermi ogni dimostrazione mille volte con estrema pazienza.
Un grosso, enorme, ringraziamento lo dedico a tutti i miei condorelli Aurora (x2), Giulia, Filippo e Riccardo: con voi ho passato le serate migliori, riuscite sempre a distrarmi con mille argomenti e tante cavolate; siamo tutti in settori differenti, ma forse è proprio questo a rendere ogni conversazione ed ogni istante unico e mai banale.
Ringrazio anche "gli amici del mare", che hanno contribuito a pompare il mio ego oltre ogni limite, e coi quali ho vissuto mattinate parole croc… ehm volevo dire di studio! (Mirko è sbronzo, sempre.)
Un grazie speciale ad Alessia, Carlo, Federica e Giada, che hanno avuto modo di vedere il vero Matteo a 360°, nel bene e nel male, e ai quali sarò sempre riconoscente. Vi auguro di sorridere tanto.
Infine, un piccolo ringraziamento all'ambizione e alla curiosità, mie fedeli compagne di viaggio.

"Il mondo è nelle mani di coloro che hanno il coraggio di sognare e di correre il rischio di vivere i propri sogni."

– Paulo Coelho

Bibliografia

MIUR (2010). *Gazzetta Ufficiale*. Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento.

MIUR (2015). *Gazzetta Ufficiale*. Quadro di riferimento per la redazione e lo svolgimento della seconda prova scritta dell'esame di Stato.

Hill, M., Sharma, M. D., Johnston, H. (2015). *Eur. J. Phys. 36, 045019*. How online learning modules can improve the representational fluency and conceptual understanding of university physics students.

Ceuppens, S., Bollen, L., Deprez, J., Dahaene, W., De Cock, M. (2019). *Physical Review Physics Education Research 15, 010101*. 9th grade students' understanding and strategies when solving x(t) problems in 1D kinematics and y(x) problems in mathematics.

Carli, M., Lippiello, S., Pantano, O., Perona, M., Tormen, G. (2020). *Physical Review Physics Education Research 16, 010111*. Testing students ability to use derivatives, integrals, and vectors in a purely mathematical context and in a physical context.

Miani, L. (2019). *Tesi di Laurea in Fisica.* La comprensione dei nodi concettuali della cinematica di base: uno studio con studenti del corso di laurea in scienze biologiche.

Sitografia

http://www.matematica.it/tomasi/matls/ (2020)

https://www.istruzione.it/esame_di_stato/201819/Licei.htm (2020)