

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Il ruolo della fluidodinamica iperbolica nei  
modellamenti matematici dei processi  
chemiotattici nel sangue o in ambito  
biomedico**

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

**Relatore:**  
**Chiar.ma Prof.ssa**  
**Franca Franchi**

**Presentata da:**  
**Carla Dottori**

**IV Sessione**  
**2019/2020**

*A mio fratello Vittorio,  
che sono sicura sarebbe fiero di me.*

# Indice

<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Nozioni di base</b>	<b>9</b>
1.1 PDEs e curve caratteristiche . . . . .	9
1.1.1 PDEs del primo ordine . . . . .	10
1.1.2 PDEs del secondo ordine . . . . .	17
1.2 Curve caratteristiche come curve di discontinuità del primo e del secondo ordine . . . . .	24
1.2.1 Il Modello di Eulero . . . . .	29
1.3 Il Metodo delle Onde Dispersive . . . . .	34
1.4 Le Leggi di Bilancio . . . . .	37
<b>2 Il Modello pionieristico di Keller-Segel</b>	<b>46</b>
2.1 Formulazione del modello . . . . .	47
2.2 Analisi della stabilità lineare del modello di Keller e Segel . . . . .	51
<b>3 Il Modello idrodinamico di Chavanis e Sire</b>	<b>55</b>
3.1 Il Modello di Eulero e il Modello di Eulero-Poisson . . . . .	55
3.1.1 Generalizzazioni del Modello di Eulero: Il Modello di Eulero-Poisson in Astrofisica . . . . .	58
3.2 Il Modello di Chavanis e Sire . . . . .	59
3.2.1 Verso il modello di Chavanis e Sire . . . . .	60

---

3.2.2	Analisi della stabilità lineare del modello di Chavanis e Sire . . . .	63
3.2.3	Modello di Chavanis e Sire Vs Instabilità di tipo Jeans . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Il comportamento viscoso del sangue Vs il comportamento viscoelastico</b>	<b>75</b>
4.1	Gli effetti viscosi/dissipativi del tipo Navier-Stokes sul modello di Chavanis e Sire . . . . .	77
4.1.1	Il modello di Navier-Stokes . . . . .	77
4.1.2	Il modello di Chavanis e Sire con effetti viscosi del tipo Navier-Stokes	77
4.1.3	Gli effetti della viscosità sull'analisi della stabilità lineare del modello di Chavanis e Sire . . . . .	78
4.2	Il modello viscoelastico di Maxwell . . . . .	82
4.2.1	Il ruolo delle superfici caratteristiche sul test di iperbolicità del modello di Maxwell . . . . .	84
4.2.2	Il modello di Maxwell-Poisson Versus il modello di Eulero-Poisson: l'instabilità di Jeans in un fluido viscoelastico . . . . .	88
4.2.3	Il comportamento viscoelastico può essere un "salva vita" contro l'infarto? Un batterio come l'Escherichia Coli che ruolo potrebbe avere? Verso un modello idrodinamico per i fenomeni chemiotattici in presenza di effetti viscoelastici . . . . .	92
	<b>Conclusioni</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>99</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>102</b>

# Abstract

In questa tesi ci occupiamo di modelli matematici usati per descrivere i processi di natura chemiotattica. In primis parliamo del modello parabolico-parabolico pionieristico per la chemiotassi di Keller-Segel, che però ignora l'inerzia e non è in grado di riprodurre la formazione di reticoli, che avviene durante la vasculogenesi, un processo molto importante durante la crescita di un tumore. Per studiare questi fenomeni legati alla chemiotassi sono stati introdotti recentemente nuovi modelli idrodinamici (iperbolici). Noi ci concentriamo sul modello idrodinamico iperbolico-parabolico di Chavanis e Sire. Confrontiamo i risultati dell'analisi della stabilità lineare con gli analoghi del modello di Keller e Segel e procediamo anche ad un confronto con il modello di Jeans per l'instabilità gravitazionale, in quanto collasso gravitazionale e collasso chemiotattico condividono molte analogie: da una parte abbiamo aggregazione cellulare e dall'altra formazione stellare. Mostriamo che gli aspetti dissipativi presenti nel modello di Chavanis e Sire sono stabilizzanti, infatti la soglia critica per l'insorgenza del collasso chemiotattico risulta inferiore alla soglia critica del modello di Jeans in astrofisica.

Il sangue è un fluido complesso, generalmente non newtoniano e con comportamento viscoelastico, quindi, per descrivere i fenomeni chemiotattici in angiogenesi, generalizziamo il modello di Chavanis e Sire, prima aggiungendo aspetti viscosi che non alterano le condizioni di stabilità, ma rendono il modello parabolico e, successivamente, focalizzandoci sul modello viscoelastico di Maxwell, che dimostriamo essere iperbolico mediante la teoria delle superfici caratteristiche e che quindi ci permette di rispettare le motivazioni dei due autori. Dimostriamo, nel caso del modello di Jeans in astrofisica, che il comportamento viscoelastico è anche stabilizzante.

Infine, pensando a recenti ricerche mediche legate all'aggregazione dell'Escherichia Coli,

ci chiediamo se un ritardo di risposta come quello fornito dal modello di Maxwell, possa agire come un "salva vita", ritardando l'insorgenza del collasso chemiotattico.

**Parole chiave:** Chemiotassi, modelli idrodinamici, onde iperboliche, stabilità lineare, viscoelasticità del sangue.

# Introduzione

Un gran numero di insetti e animali (inclusi gli esseri umani) trasmettono le informazioni ai membri della loro specie grazie al senso dell'olfatto. Gli agenti chimici coinvolti in questo processo sono chiamati *feromoni*. Ad esempio, l'acuto senso dell'olfatto di molti pesci che vivono in acque profonde è essenziale per la comunicazione e la predazione. Oltre alla demarcazione territoriale, una delle conseguenze più rilevanti del rilascio dei feromoni è il movimento direzionato che può essere generato in una popolazione.

Il termine *chemiotassi* si riferisce proprio al fenomeno di movimento direzionato chimicamente (vedi capitolo 11, [1]). Si consideri, per esempio, una specie con una popolazione densamente fitta. In un processo di *diffusione*, la popolazione si espande verso l'esterno nello spazio. Al contrario, la chemiotassi produce l'effetto opposto, infatti la specie viene attratta verso una concentrazione chimica, che può essere più alta o più bassa: parleremo rispettivamente di chemio-attrazione e di chemio-repulsione.

La chemiotassi può essere cruciale in alcuni processi biologici. Ad esempio, quando un'infezione batterica invade il corpo umano, essa può essere attaccata dal movimento di cellule verso la sorgente, e ciò è un risultato della chemiotassi; inoltre, prove convincenti suggeriscono che le cellule dei leucociti nel sangue si muovano verso la regione dell'infiammazione batterica, per contrastarla, salendo lungo un gradiente chimico crescente, causato appunto dall'infezione.

Un fenomeno chemiotattico ampiamente studiato è quello della muffa della melma *Dicystelium discoideum*, in cui le amebe monocellulari si spostano verso regioni di concentrazione relativamente alta di una sostanza chimica chiamata ciclico-AMP, che viene prodotta dalle amebe stesse. Sperimentalmente si osservano interessanti movimenti ondulatori e spaziali (vedi capitolo 1, [2]).

Un altro esempio di fenomeno chemiotattico riguarda i batteri flagellati come la *Salmonella typhimurium*, la quale reagisce all'aspartato (vedi [3]).

È interessante studiare i modelli matematici che descrivono il movimento chemiosensitivo, in quanto il fenomeno chemiotattico spiega la auto-organizzazione spontanea di cellule biologiche come batteri, amebe e cellule endoteliali, causata dall'attrazione ad ampio raggio operata da un agente chimico, spesso prodotto dall'organismo stesso, e la formazione di aggregati cellulari (collegati al fenomeno della morfogenesi).

Il modello matematico pionieristico per la chemiotassi è il *modello di Keller-Segel* (vedi [4]), chiamato anche modello di Patlak-Keller-Segel, da un precedente articolo di Patlak (vedi [5]). Il modello consiste in un sistema di due equazioni paraboliche: una per l'evoluzione temporale della densità dell'organismo e l'altra per l'evoluzione temporale della concentrazione della sostanza chimica. La prima è rappresentata da un'equazione di diffusione-trasporto: contiene un termine diffusivo che modella il moto casuale delle particelle (come nella teoria Browniana) e un termine di trasporto, responsabile del moto sistematico lungo il gradiente della concentrazione dell'agente chimico secreto. L'evoluzione dell'agente chimico secreto, invece, è descritta da un'equazione di diffusione che coinvolge anche termini di produzione e di degradazione. Nel caso in cui abbiamo chemio-attrazione, il modello di Keller-Segel è in grado di riprodurre l'aggregazione chemiotattica (collasso chemiotattico) di popolazioni biologiche, quando il termine attrattivo di trasporto supera il termine diffusivo. Questo processo è simile al collasso gravitazionale di particelle Browniane auto-gravitanti. Questo modello parabolico porta alla formazione di picchi di Dirac o, in una versione regolarizzata, a profili di densità più continui (aggregati circolari) (vedi [6]).

Inoltre, recenti esperimenti di formazione in vitro di vasi sanguigni mostrano che cellule sparse in maniera casuale su una matrice di gel si organizzano autonomamente per formare una rete vascolare connessa che viene interpretata come l'inizio di una vascolarizzazione (vedi [7]). Questi reticoli non possono essere spiegati utilizzando modelli parabolici, i quali conducono ad un'aggregazione puntuale, ma si possono utilizzare i *modelli iperbolici*, che tengano conto di altri fattori. Ci sono principalmente due tipi di modelli iperbolici discussi in letteratura: il *modello di tipo Cattaneo* per la chemiotassi

(vedi [3]), che è il risultato dell'applicazione della legge di Cattaneo per la propagazione del calore al problema della chemiotassi e che rispetta finite velocità di propagazione, e un *modello idrodinamico* (vedi [6]), che considera un fluido barotropico con una certa equazione di stato  $p = p(\rho)$ , sul quale ci concentriamo maggiormente.

Lo scopo della tesi è derivare i modelli usati per descrivere la chemiotassi e studiare le condizioni di instabilità dello stato di equilibrio omogeneo. Ci concentreremo soprattutto sul *modello idrodinamico di Chavanis e Sire*.

Dopo un primo capitolo di nozioni di base e prerequisiti, nel secondo capitolo ci focalizziamo sul modello pionieristico per la chemiotassi di Keller-Segel: ricaviamo il modello e utilizziamo il metodo delle Onde Dispersive per cercare una soluzione e analizziamo la stabilità lineare.

Il terzo capitolo è dedicato al modello idrodinamico di Chavanis e Sire (vedi [6]): partiamo dal modello base di Eulero, studiandone la stabilità con il metodo delle Onde Dispersive e poi ci focalizziamo sul modello idrodinamico iperbolico-parabolico di Chavanis e Sire, studiandone la stabilità sempre con il metodo delle Onde Dispersive. Confrontiamo i risultati trovati con il modello pionieristico di Keller e Segel e portiamo avanti sempre anche un confronto con il modello di Eulero-Poisson, anche detto modello di Jeans per l'instabilità gravitazionale, in quanto collasso gravitazionale e collasso chemiotattico condividono molte analogie: da una parte abbiamo aggregazione cellulare e dall'altra formazione stellare. Gli aspetti dissipativi nel modello di Chavanis e Sire, sono stabilizzanti, infatti la soglia critica di Chavanis e Sire per l'insorgenza del collasso chemiotattico risulta inferiore alla soglia critica del modello di Jeans.

Nel quarto e ultimo capitolo diamo spazio alle proprietà viscoelastiche del sangue: esso è un fluido complesso, generalmente non newtoniano costituito da globuli rossi, bianchi, piastrine e dal plasma; gli elementi del sangue con maggiore influenza sulla reologia e la fluidodinamica sono i globuli rossi, a causa della loro elevata concentrazione. A causa dello spazio limitato tra i globuli rossi, l'interazione tra cellula e cellula ha un ruolo chiave nella fluizione del sangue. Questa interazione e la tendenza delle cellule ad aggregarsi costituiscono un importante contributo al comportamento viscoelastico del sangue. La deformazione dei globuli rossi e l'aggregazione di essi sono anche associate a cambia-

menti, indotti dal flusso del sangue, nella disposizione e nell'orientamento. Altri fattori che contribuiscono alle proprietà viscoelastiche del sangue sono la viscosità plasmatica, composizione del plasma, la temperatura e velocità di taglio. Insieme, questi fattori rendono il sangue umano viscoelastico e dunque non newtoniano e tissotropico (fluido pseudo-plastico che varia la viscosità quando viene sottoposto a sollecitazioni di taglio oppure nel caso di lunghi periodi di quiete o sottoposto a movimenti peristaltici). Quindi, in quest'ultimo capitolo, cerchiamo di generalizzare il nostro modello di Chavanis e Sire, prima aggiungendo aspetti viscosi e poi viscoelastici, che ci portano a focalizzarci sul modello viscoelastico di Maxwell.

Dimostriamo anche che gli aspetti viscosi del tipo Navier-Stokes non modificano la soglia critica del modello di Chavanis e Sire, ma rendono il modello parabolico-parabolico. La dissipazione viscosa serve a smorzare il comportamento oscillatorio delle onde longitudinali chemio-acustiche.

Anche se il modello viscoelastico più idoneo al nostro studio sarebbe quello di Johnson Segalman (vedi [14]), in cui effetti viscosi e effetti viscoelastici agiscono contemporaneamente, scegliamo di analizzare il modello viscoelastico di Maxwell, perchè dimostriamo tramite un test di iperbolicità, basato sulla teoria delle superfici caratteristiche, che è un modello iperbolico e in questo modo conserviamo l'obiettivo di Chavanis e Sire di proporre modelli idrodinamici iperbolici-parabolici per i fenomeni di chemiotassi. Infine mostriamo anche come l'instabilità di Jeans sia modificata in base all'aggiunta degli effetti viscoelastici (vedi [19]), sempre con lo scopo di portare avanti il nostro confronto tra instabilità chemiotattica e instabilità gravitazionale, cioè tra aggregazione cellulare e formazione stellare.

In conclusione il comportamento viscoelastico produce effetti stabilizzanti. In particolare, il modello viscoelastico di Maxwell, introduce un ritardo di risposta nell'equazione costitutiva. Ci chiediamo quindi se questo "ritardo di risposta viscoelastico" possa agire come un "salva vita", ad esempio anche nel caso dell'ostruzione di una micro arteria, responsabile di infarti o ictus.

Concludiamo la tesi con la proposta di un nuovo modello fluidodinamico per la chemiotassi, che generalizzi il modello di Chavanis e Sire e tenga conto di questi aspetti viscoelastici.

# Capitolo 1

## Nozioni di base

Introduciamo alcune notazioni utili per la comprensione di questo elaborato. Abbiamo unificato le notazioni, adattando quelle presenti nelle fonti alla nostre necessità. Per eventuali referenze, rimandiamo ai manuali di John, *Partial Differential Equations* [8] e di Renardy e Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations* [9]. Per quanto riguarda la sezione riguardante le leggi di bilancio, rimandiamo invece al testo di I-Shih Liu, *Continuum mechanics* [12].

### 1.1 PDEs e curve caratteristiche

**Definizione 1.1.** Dato un dominio regolare  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , un'**equazione differenziale alle derivate parziali** (PDE) per una funzione  $u(x)$  di classe  $C^k(\Omega, \mathbb{R})$  con  $k > 1$ , è un'equazione differenziale che coinvolge le derivate parziali di  $u$  del tipo:

$$f(x, u(x), Du(x), \dots, Du^k(x)) = 0. \quad (1.1)$$

dove  $f$  è una funzione assegnata della variabile  $x \in \Omega$ , della funzione incognita  $u(x)$  e di un numero finito di sue derivate parziali fino all'ordine  $k$ .

L'*ordine* di una PDE è l'ordine massimo di derivazione per la funzione incognita.

La *parte principale* di una PDE è l'insieme dei termini in cui figurano le derivate parziali di ordine massimo.

Una *soluzione* di (1.1) è una funzione che ha regolarità corrispondente all'ordine e che,

sostituita insieme alle sue derivate parziali, risolve identicamente l'equazione (1.1).

Una PDE si dice *stazionaria* se non contiene derivate parziali temporali, ma solo spaziali, altrimenti si dice *evolutiva*.

Ora consideriamo per semplicità una PDE scalare e classifichiamo le PDEs in base alle quantità da cui dipendono i coefficienti.

**Definizione 1.2.** Una PDE scalare si dice:

- *lineare* se è della forma:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha D^\alpha u = f(x);$$

dove  $a_\alpha$  e  $f$  sono funzioni continue;

- *semilineare* se è della forma:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha D^\alpha u + a_0(D^{k-1}, \dots, Du, u, x) = 0;$$

- *quasi lineare* se è della forma:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}, \dots, Du, u, x) = 0.$$

### 1.1.1 PDEs del primo ordine

Una soluzione generale di una PDE del primo ordine, si ottiene risolvendo un sistema lineare di Equazioni Differenziali Ordinarie (ODE). Per semplicità consideriamo il caso di due variabili  $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Nel caso dei modelli evolutivi, si considera in realtà  $(x, y) \in \Omega^+ \subset \mathbb{R}^{2+}$  con  $y > 0$ , dato che  $y$  assume il ruolo del tempo.

Riprendendo la classificazione precedente, supponendo  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ :

- Una PDE del primo ordine *lineare* è della forma:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y). \quad (1.2)$$

Si dice *omogenea* se  $d(x, y) = 0$ ;

- Una PDE del primo ordine *semi lineare* è della forma:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(\cdot), \quad (1.3)$$

dove  $(\cdot) = (x, y, u(x, y))$ . Si dice *omogenea* se  $c(\cdot) = 0$ ;

- Una PDE del primo ordine *quasi lineare* è della forma:

$$a(\cdot)u_x + b(\cdot)u_y = c(\cdot), \quad (1.4)$$

dove  $(\cdot) = (x, y, u(x, y))$ . Si dice *omogenea* se  $c(\cdot) = 0$  e ammette la soluzione nulla  $u = 0$ ;

- Una PDE del primo ordine *non lineare* non presenta dipendenza lineare rispetto alle derivate di ordine massimo.

dove  $a, b, c \in C^1(\Omega', \mathbb{R})$ ,  $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$  e  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

Data una PDE del primo ordine quasi lineare (1.4), definiamo il *vettore caratteristico* relativo:

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} a(\cdot) \\ b(\cdot) \\ c(\cdot) \end{bmatrix}.$$

Interpretiamo la funzione incognita  $u(x, y)$  come una superficie integrale  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $z = u(x, y)$ . Definiamo *versore normale alla superficie integrale*:

$$\vec{n} = \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|},$$

dove  $\varphi(x, y, z) := u(x, y) - z = 0$  e quindi  $\nabla\varphi = (u_x, u_y, -1)$ :

$$\vec{n} = \frac{(u_x, u_y, -1)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}}.$$

*Osservazione 1.3.* L'equazione relativa alla PDE quasi lineare (1.4) diventa quindi:

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{d} \perp \vec{n}, \quad \forall P_\Sigma.$$

**Definizione 1.4** (Prima definizione di curva caratteristica). Una **curva caratteristica**  $\gamma \subset \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  per una PDE quasi lineare (1.4) è una curva della superficie integrale che in ogni punto  $P_\gamma = P_\Sigma$  è tangente alla direzione individuata dal vettore caratteristico  $\vec{d}$ . Cioè, assegnato un opportuno parametro  $\tau$ , una curva  $\gamma$  è caratteristica se e solo se vale:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = a(\cdot) \\ \frac{dy}{d\tau} = b(\cdot) \\ \frac{dz}{d\tau} = c(\cdot) \end{cases} \quad (1.5)$$

Che equivale a richiedere:

$$\frac{d}{d\tau} \vec{X} = \vec{F}(\vec{X}), \quad \text{dove } \vec{X} = (x, y, z), \text{ e } \vec{F}(\vec{X}) = (a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)).$$

Osserviamo che si tratta di un sistema dinamico autonomo in  $\mathbb{R}^3$ , in quanto la  $F$  non dipende dal parametro scelto per la parametrizzazione.

*Osservazione 1.5.* Se il termine  $c(\cdot) = 0$  in (1.4), allora abbiamo:  $\frac{dz}{d\tau} = 0 \Rightarrow z = u(x, y)$  costante lungo la generica curva caratteristica  $\gamma$  passante per  $P_\Sigma$ .

*Osservazione 1.6.* La superficie integrale associata al campo  $u(x, y)$  può essere interpretata come unione di curve caratteristiche. Questa interpretazione si applica solo al caso delle PDE del primo ordine. Per essere nel caso di una PDE del primo ordine si deve verificare che almeno uno dei due termini  $a(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  sia diverso da zero. Supponiamo che  $b(\cdot) \neq 0$  e dividiamo la prima equazione del sistema 1.5 con la seconda:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a(\cdot)}{b(\cdot)}.$$

Se siamo in  $\mathbb{R}^2$ , la variabile  $y$  coincide con il tempo, quindi  $\frac{dx}{dy}$  rappresenta la velocità, che dipende quindi da  $a(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  e quindi, in generale, non è costante.

**Definizione 1.7** (Problema di Cauchy per una PDE del primo ordine quasi lineare). Abbiamo due possibili definizioni di **Problema di Cauchy** per una PDE del primo ordine quasi lineare (1.4) (vedi [8]):

1. Data una PDE del primo ordine quasi lineare (1.4), assegnare un problema di Cauchy significa assegnare una curva regolare  $\Gamma \subset \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  del tipo:

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases} \quad (1.6)$$

dove  $f(s)$ ,  $g(s)$  e  $h(s)$  sono funzioni di classe  $C^1 \forall s \in J \subseteq \mathbb{R}$ .

2. Data una PDE del primo ordine quasi lineare (1.4), assegnare un problema di Cauchy significa assegnare una curva regolare  $\Gamma \subseteq \Omega$  del piano del tipo:

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases} \quad (1.7)$$

dove  $f, g \in C^1(J, \mathbb{R})$ ,  $\forall s \in J \subset \mathbb{R}$  e  $f'(s)^2 + g'(s)^2 > 0 \quad \forall s \in J$ .

Inoltre è nota la relazione:

$$u(f(s), g(s)) = h(s), \quad h(s) \in C^1(J, \mathbb{R}). \quad (1.8)$$

**Definizione 1.8** (Problema ai valori iniziali). Se una tra le due variabili  $x$  e  $y$  ha il ruolo di tempo, allora, sfruttando la seconda definizione di Problema di Cauchy, possiamo definire un **problema ai valori iniziali**. Avremo, in riferimento al sistema 1.7:

$$\Gamma_0 : \begin{cases} x = s \\ y = 0 \end{cases} \quad (t_0 = 0 \text{ per comodità}) \quad (1.9)$$

E in riferimento alla relazione (1.8):

$$u(s, 0) = h(s), \quad h(s) \in C^1(J, \mathbb{R}). \quad (1.10)$$

Il Problema ai valori iniziali è dunque:

$$\begin{cases} au_x + bu_y = c \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad (1.11)$$

$\forall (x, y) \in \Omega$  e con  $h \in C^1(J, \mathbb{R})$  nota.

Ora introduciamo un'altra definizione di curva caratteristica che si lega alla seconda definizione che abbiamo dato di Problema Di Cauchy (1.7).

**Definizione 1.9** (Seconda definizione di curva caratteristica). Dato un qualsiasi punto  $P_\gamma = (f(s), g(s))$ , il dato di Cauchy su  $\gamma$  è:

$$u(f(s), g(s)) = h(s), \quad h(s) \in C^1(J, \mathbb{R}), \quad \forall P_\gamma \quad (1.12)$$

e abbiamo la condizione di compatibilità:

$$h'(s) = \frac{d}{ds}(u(f(s), g(s))) = u_x f'(s) + u_y g'(s). \quad (1.13)$$

Sostituiamo ora il punto  $P_\gamma$  nella PDE (1.4) e otteniamo:

$$a(\cdot(s))u_x + b(\cdot(s))u_y = c(\cdot(s)), \quad (1.14)$$

dove  $(\cdot(s)) = (f(s), g(s), h(s))$ .

Ora, mettendo a sistema (1.14) e (1.13), otteniamo il sistema di Cramer non omogeneo seguente:

$$\begin{cases} a(\cdot(s))u_x + b(\cdot(s))u_y = c(\cdot(s)) \\ u_x f'(s) + u_y g'(s) = h'(s) \end{cases} \quad (1.15)$$

Ora consideriamo il determinante del sistema 1.15:

$$D = \begin{vmatrix} a(\cdot(s)) & b(\cdot(s)) \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix}$$

Quindi:

$$D = a(\cdot(s))g'(s) - b(\cdot(s))f'(s), \quad (1.16)$$

Per il *teorema di Cramer*:

- se  $D \neq 0$ , allora il sistema 1.15 è determinato ed ha un'unica soluzione: la conoscenza del campo incognito mi permette di conoscere le derivate prime ( $\forall P_\gamma$ ) in maniera univoca. In questo caso la curva di dati  $\gamma$  si definisce **curva non caratteristica**;

- se  $D = 0$ , allora la conoscenza dei dati di Cauchy non induce univocamente quella delle derivate parziali prime (che sono quindi indeterminate  $\forall P_\gamma$ ). In questo caso si parla di **curva caratteristica**.

*Osservazione 1.10.*  $\gamma$  è curva caratteristica se e solo se  $a(\cdot(s))g'(s) - b(\cdot(s))f'(s) = 0$ :

$$a(\cdot(s))\frac{dy}{ds} - b(\cdot(s))\frac{dx}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{a}{b},$$

(ricordando che  $f'(s) = dx/ds$  e  $g'(s) = dy/ds$ ).

Quindi, se  $y$  rappresenta il tempo,  $\frac{a}{b}$  rappresenta una velocità.

Inoltre  $\frac{dz}{ds} = \frac{du}{ds} = c$ , quindi se  $c = 0$  (PDE (1.4) omogenea), la soluzione  $u$  è costante lungo le curve caratteristiche, in maniera analoga a quanto avevamo osservato per la prima definizione di curva caratteristica (vedi osservazione 1.6).

Terminiamo il discorso sulle PDEs di primo ordine riportando due esempi a confronto di tipo trasporto e mettendo in evidenza anche il formalismo delle **Travelling Waves**, basandoci su [1].

Consideriamo, come in precedenza, due variabili indipendenti  $x$  e  $y = t > 0$  tali che  $(x, t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , con  $\Omega$  aperto e regolare nel senso di Kellogg (vedi [10]).

*Esempio* (Modello lineare delle onde (1D)). Consideriamo il problema ai valori iniziali relativo al modello lineare delle onde (vedi definizione 1.8, sistema 1.11):

$$\begin{cases} \pm C_0 u_x + u_y = 0 \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad (1.17)$$

$\forall (x, y) \in \Omega$ , con  $C_0$  costante e  $h$  funzione nota di classe  $C^1$ .

Introduciamo il parametro  $\tau$  e ricaviamo le curve caratteristiche relative al modello, seguendo la prima definizione enunciata (1.5):

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \pm C_0 \Leftrightarrow x = \pm C_0 \tau + \xi \\ \frac{dy}{d\tau} = 1 \Leftrightarrow y = \tau + \eta \\ \frac{dz}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow z = u = h(\xi) \text{ costante lungo le curve caratteristiche} \end{cases} \quad (1.18)$$

Per semplicità scegliamo  $\eta = 0$ . Quindi la prima equazione del sistema 1.18 diventa :

$$x = \pm C_0 y + \xi, \quad \text{dove } y = \tau; \quad (1.19)$$

Osserviamo che nel caso in cui  $y = t$ , la velocità  $\frac{dx}{dt} = \pm C_0$  è costante. La soluzione del problema ai valori iniziali 1.21 è del tipo *travelling waves*:

$$u(x, y) = h(x \mp C_0 y). \quad (1.20)$$

Una "travelling wave" in generale, è un'onda che crea una perturbazione e si muove lungo una determinata direzione. Osserviamo che se  $h$  è  $C^1$ , la regolarità della soluzione è garantita  $\forall (x, y) \in \Omega$ .

*Esempio* (Modello di Burger). Consideriamo ora invece il problema ai valori iniziali relativo al modello di Burger (vedi definizione 1.8, sistema 1.11):

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 0 \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad (1.21)$$

$\forall (x, y) \in \Omega$ , con  $C_0$  costante e  $h$  funzione nota di classe  $C^1$ .

Introduciamo il parametro  $\tau$  e ricaviamo le curve caratteristiche relative al modello, seguendo la prima definizione enunciata (1.5):

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = u(x, y) \Leftrightarrow x = u\tau + \xi \\ \frac{dy}{d\tau} = 1 \Leftrightarrow y = \tau + \eta \\ \frac{dz}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow z = u = h(\xi) \text{ costante lungo le curve caratteristiche} \end{cases} \quad (1.22)$$

Per semplicità scegliamo  $\eta = 0$ . Quindi la prima equazione del sistema 1.22 diventa :

$$x = uy + \xi, \quad \text{dove } y = \tau; \quad (1.23)$$

Osserviamo che, a differenza dell'esempio precedente, nel caso in cui  $y = t$ , la velocità  $\frac{dx}{dt} = u(x, y)$  non è costante. Se fissiamo un certo  $\xi_2$ , otteniamo come curva caratteristica la retta  $x = h(\xi_2)y + \xi_2$  con pendenza  $h(\xi_2)$ , se invece consideriamo un altro  $\xi_1 \neq \xi_2$ , otterremo un'altra curva caratteristica, con pendenza  $h(\xi_1)$ .

Quindi, nel caso del modello quasi lineare di Burger, a causa della non linearità della PDE, due curve caratteristiche potrebbero intersecarsi in un punto. Si può perdere quindi regolarità e si parla di **blow-up** della soluzione o di **catastrofe del gradiente**. Analizziamo la regolarità di  $u(x, y)$  per capire quando e sotto quali condizioni avviene

la catastrofe del gradiente: La soluzione del problema ai valori iniziali 1.22 è del tipo *travelling waves*:

$$u(x, y) = h(x - uy). \quad (1.24)$$

Ora, definiamo  $s := x - uy$  e consideriamo:

$$u_x = h'(x - uy)(1 - u_x y) \Rightarrow u_x = \frac{h'(s)}{1 + h'(s)y}. \quad (1.25)$$

Osserviamo che, per  $y > 0$ :

- se  $h'(s) > 0$  (ovvero è una funzione monotona crescente  $\forall s$ ), allora  $u_x \in C(\Omega, \mathbb{R})$  e quindi la regolarità si mantiene.
- Se  $h'(s) < 0$ , cioè  $h'(s) = -|h'(s)|$ , allora può esistere un tempo critico che annulla il denominatore  $D := 1 - |h'(s)|y$ , definito come il primo istante in cui si perde regolarità:

$$y_c(s) := \min_{s \in J \subset \mathbb{R}} \frac{1}{|h'(s)|},$$

tale che:

$$\lim_{y \rightarrow y_c} |u_x| = +\infty.$$

La soluzione perde la regolarità  $C^1$  se siamo fuori dall'intervallo massimale  $[0; y_c[$ . Questo fenomeno è detto di blow-up o catastrofe del gradiente, ed è una conseguenza della non linearità della PDE.

### 1.1.2 PDEs del secondo ordine

Ora parliamo di PDEs scalari del secondo ordine, di vitale importanza per la costruzione di numerosi modelli matematici. Ci limiteremo, per semplicità, al caso di due variabili indipendenti reali, come prima.

**Definizione 1.11.** Data una generale PDE del secondo ordine, scalare in 2 variabili indipendenti reali  $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , quasi lineare:

$$a(\cdot)u_{xx}(x, y) + 2b(\cdot)u_{xy}(x, y) + c(\cdot)u_{yy}(x, y) = d(\cdot), \quad (1.26)$$

dove  $(\cdot) = (x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$ ,  $a, b, c, d$  sono almeno continui e  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , possiamo definire una matrice simmetrica di ordine 2 associata alla parte principale, detta *matrice caratteristica del modello* (vedi [9]):

$$A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -b & -c \end{bmatrix},$$

il cui determinante è  $\det(A) = ac - b^2$ .

Una PDE (1.26) si dice:

- **ellittica** se  $A$  è definita in segno:  $\det(A) > 0 \forall (x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$ ;
- **iperbolica** se  $A$  è indefinita in segno:  $\det(A) < 0 \forall (x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$ ;
- **parabolica** se  $A$  è singolare:  $\det(A) = 0 \forall (x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$ .

*Osservazione 1.12.* Questa classificazione può essere generalizzata al caso di tre o più variabili indipendenti reali, con l'assunzione che una possa rappresentare il tempo. Inoltre osserviamo che i modelli ellittici descrivono modelli stazionari, mentre quelli parabolici ed iperbolici descrivono modelli evolutivi.

**Definizione 1.13.** Assegnare un **problema di Cauchy** per la PDE (1.26), significa assegnare una curva regolare  $\gamma$ , del piano, contenuta in  $\Omega$ , del tipo:

$$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases} \quad (1.27)$$

dove  $f, g \in C^1(J, \mathbb{R})$ ,  $\forall s \in J \subset \mathbb{R}$  e  $f'(s)^2 + g'(s)^2 > 0 \quad \forall s \in J$ .

Inoltre sono note le seguenti relazioni per il campo  $u$  e le sue derivate parziali:

$$\begin{cases} u(f(s), g(s)) = h(s), & h(s) \in C^2(J, \mathbb{R}) \\ u_x(f(s), g(s)) = \hat{\varphi}(s), & \hat{\varphi}(s) \in C^1(J, \mathbb{R}) \\ u_y(f(s), g(s)) = \psi(s), & \psi(s) \in C^1(J, \mathbb{R}) \end{cases} \quad (1.28)$$

$\forall P_\gamma(s) \in \gamma$ . Dato che:

$$\frac{d}{ds}u(f(s), g(s)) = u_x(f(s), g(s)) + u_y(f(s), g(s)),$$

otteniamo le seguenti condizioni di compatibilità fra i dati di Cauchy:

$$\begin{cases} u_x(f(s), g(s))f'(s) + u_y(f(s), g(s))g'(s) = h'(s) \\ u_{xx}(f(s), g(s))f'(s) + u_{yx}(f(s), g(s))g'(s) = \hat{\varphi}'(s) \\ u_{yx}(f(s), g(s))f'(s) + u_{yy}(f(s), g(s))g'(s) = \psi'(s) \end{cases} \quad (1.29)$$

$\forall P_\gamma(s) \in \gamma$ . A questo punto, definendo  $(\cdot(s)) = (f(s), g(s), h(s), \hat{\varphi}(s), \psi(s))$  otteniamo il sistema di Cramer non omogeneo:

$$\begin{cases} a(\cdot(s))u_{xx}(f(s), g(s)) + 2b(\cdot(s))u_{xy}(f(s), g(s)) + c(\cdot(s))u_{yy}(f(s), g(s)) = d(\cdot(s)) \\ u_{xx}(f(s), g(s))f'(s) + u_{yx}(f(s), g(s))g'(s) = \hat{\varphi}'(s) \\ u_{yx}(f(s), g(s))f'(s) + u_{yy}(f(s), g(s))g'(s) = \psi'(s) \end{cases} \quad (1.30)$$

$\forall P_\gamma(s) \in \gamma$ . Ora consideriamo il determinante del sistema 1.30:

$$D = \begin{vmatrix} a(\cdot(s)) & 2b(\cdot(s)) & c(\cdot(s)) \\ f'(s) & g'(s) & 0 \\ 0 & f'(s) & g'(s) \end{vmatrix}$$

Si osserva che:

$$D = a(\cdot(s))g'(s)^2 - 2b(\cdot(s))f'(s)g'(s) + c(\cdot(s))f'(s)^2 = g'(s)^2 \left( a - \frac{2bf'(s)}{g'(s)} + c \left( \frac{f'(s)}{g'(s)} \right)^2 \right), \quad (1.31)$$

Per il teorema di Cramer:

- se  $D \neq 0$ , allora il sistema 1.30 è determinato: la conoscenza delle derivate prime ( $\forall P(s)$ ) mi permette di conoscere le derivate seconde ( $\forall P(s)$ ) in maniera univoca. In questo caso la curva di dati  $\Gamma$  si definisce **curva non caratteristica**;
- se  $D = 0$ , quindi se vale (1.31), ossia abbiamo:

$$c \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 - 2b \frac{dx}{dy} + a = 0, \quad (1.32)$$

allora la conoscenza dei dati di Cauchy non induce univocamente quella delle derivate seconde (che sono quindi indeterminate  $\forall P(s)$ ). In questo caso si parla di

**curva caratteristica.** A questo punto quindi consideriamo il discriminante dell'equazione (1.32)  $\Delta = b^2 - ac = -\det(A)$  (vedi definizione 1.11).

Otteniamo due ODEs del primo ordine del tipo:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{c}, \quad (1.33)$$

se  $c \neq 0$ .

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a}, \quad (1.34)$$

se  $a \neq 0$ .

Mettiamoci nel caso  $c \neq 0$ . Abbiamo tre casi:

1. se  $\Delta > 0$  la PDE è iperbolica e abbiamo due famiglie di curve caratteristiche reali e distinte  $\gamma^\pm$ , che si muovono con velocità  $\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{c}$ , se  $y$  rappresenta il tempo;
2. se  $\Delta = 0$  la PDE è parabolica e abbiamo una sola famiglia di curve caratteristiche reali ad un parametro;
3. se  $\Delta < 0$  la PDE è ellittica e non esiste alcuna famiglia di curve caratteristiche reali. Inoltre nei modelli ellittici entrambe le coordinate sono spaziali.

Nei primi due casi la (1.26) descrive modelli evolutivi  $1D$ , rispettivamente di tipo iperbolico e parabolico; nel terzo caso descrive un modello ellittico  $2D$ .

**Definizione 1.14.** I tre modelli classici del secondo ordine, sono:

- **Modello delle onde:**

$$u_{tt} - C_0^2 u_{xx} = 0, \quad (1.35)$$

con  $C_0 > 0$  costante.

È un modello evolutivo di tipo iperbolico. Infatti:

$a = -C_0^2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ , per cui:

$$\Delta = b^2 - ac = C_0^2 > 0.$$

Quindi abbiamo due famiglie di curve caratteristiche:  $\frac{dx}{dy} = \pm C_0$ :

$$\begin{cases} x(y) = C_0 y + \xi, & (\gamma^+) \\ x(y) = -C_0 y + \eta, & (\gamma^-) \end{cases}$$

$\forall \xi, \eta$ .

La versione 3D è  $u_{tt} - C_0^2 \Delta u = 0$ .

• **Modello di Laplace:**

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{1.36}$$

È un modello stazionario 2D di tipo ellittico. Infatti:

$a = c = 1$ ,  $b = 0$ , per cui:

$$\Delta = b^2 - ac = -1 < 0.$$

La versione 3D è  $\Delta u = 0$ .

• **Modello di diffusione:**

$$u_t = D u_{xx}, \tag{1.37}$$

con  $D > 0$  costante di diffusione o mobilità diffusiva.

È un modello evolutivo di tipo parabolico. Infatti:

$a = -D$ ,  $b = c = 0$ , per cui:

$$\Delta = b^2 - ac = 0.$$

Si ha una famiglia di curve caratteristiche reali e distinte, tale per cui  $\gamma$  è una curva caratteristica, se e solo se  $dx/dt = 0$ , cioè se e solo se  $t$  è costante. Formalmente:

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = +\infty.$$

In questo caso il modello parabolico ha modulo della velocità infinito e si parla di paradosso della velocità infinita.

La versione 3D è  $u_t = D \Delta u$ .

Aggiungendo un termine di reazione di tipo logistico  $\lambda u(1 - u)$  alla (1.37) (gli stessi risultati si ottengono per il caso  $3D$ ), si ottiene il **modello di diffusione e reazione** per mobilità  $D > 0$  costante:

$$u_t = Du_{xx} + \lambda u(1 - u). \quad (1.38)$$

Questi modelli sono anche detti del tipo **flusso-gradiente**, in quanto, utilizzando il  $J(x, t) = -Du_x(x, t)$  e chiamando il termine di reazione  $r(u)$ , possiamo riscriverli nel modo seguente:

$$\begin{cases} u_t = -J_x + (r(u)) \\ J(x, t) = -Du_x(x, t) \end{cases} \quad (1.39)$$

La seconda equazione del sistema 1.39 è detta *equazione costitutiva*, che è istantanea e stazionaria.

Sperimentalmente si osserva un ritardo di risposta, che dal punto di vista matematico si traduce nell'introdurre un *tempo di rilassamento*  $0 < \tau \ll 1$  nell'equazione costitutiva. Quindi ora il flusso  $J(x, t + \tau) = -Du_x(x, t)$ .

Questo ritardo di risposta porta alla *correzione del tipo Maxwell-Cattaneo* del modello, che da parabolico (1.39) diventa iperbolico:

$$\begin{cases} u_t = -J_x + (r(u)) \\ \tau J_t(x, t) + J(x, t) = -Du_x(x, t). \end{cases} \quad (1.40)$$

Verifichiamo che il modello ottenuto sia effettivamente iperbolico:

riscriviamo il sistema 1.40 ignorando il termine di reazione:

$$\begin{cases} u_t = -J_x \\ J_t = -\frac{D}{\tau}u_x - \frac{J}{\tau}. \end{cases} \quad (1.41)$$

Ora la matrice caratteristica associata al sistema 1.41 è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{D}{\tau} & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo eseguire il **test di iperbolicità**: il modello è iperbolico se e solo se la sua matrice caratteristica ha sempre autovalori reali.

Consideriamo quindi gli autovalori della matrice caratteristica  $A$ :

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{D}{\tau} = 0$ , quindi  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{D}{\tau}}$ . Gli autovalori sono effettivamente reali e distinti, in quanto  $\frac{D}{\tau} > 0$ .

L'equazione caratteristica del modello sarà  $\frac{dx}{dy} = \lambda$ . Le due famiglie di curve caratteristiche saranno:

$$\begin{cases} x(y) = \lambda y + \xi, & (\gamma^+) \\ x(y) = \lambda y + \eta, & (\gamma^-) \end{cases}$$

$\forall \xi, \eta$ .

*Osservazione 1.15.* Osserviamo che, derivando rispetto al tempo l'equazione (1.40)<sub>1</sub> e rispetto allo spazio (1.40)<sub>2</sub> ed operando una sottrazione tra le due equazioni ottenute, risulta:

$$u_{tt} = \frac{D}{\tau} u_{xx} - \frac{u_t}{\tau} + \frac{r(u)}{\tau} + r(u)_t,$$

perciò il termine  $u_{tt} - \frac{D}{\tau} u_{xx}$  si può scrivere come un'espressione costituita da termini di ordine inferiore: abbiamo una PDE del secondo ordine iperbolica, con  $C_0^2 = \frac{D}{\tau} > 0$ . Osserviamo che se  $\tau \rightarrow 0^+$  allora  $C_0^2 \rightarrow +\infty$  e ricadiamo nel paradosso della velocità infinita di propagazione.

Possiamo allora introdurre un nuovo modello, il *Modello delle Onde Smorzate*, con  $r(u) = 0$ , che descrive onde la cui ampiezza di oscillazione decresce con il tempo:

$$\tau u_{tt} + u_t - D u_{xx} = 0,$$

osservando che, se  $\tau \rightarrow 0$ , riotteniamo il modello diffusivo iniziale (1.37).

Il modello di diffusione e reazione diventa **modello di diffusione-reazione di tipo trasporto** quando inseriamo un termine detto *termine del trasporto*  $c = v(x, t)$  e il modello (1.38) diventa:

$$u_t + u_x v(x, t) = D u_{xx} + \lambda u(1 - u). \quad (1.42)$$

Più in generale, il termine del trasporto viene considerato come una certa funzione della variabile  $u(x, t)$  e può assumere significati diversi a seconda del modello.

## 1.2 Curve caratteristiche come curve di discontinuità del primo e del secondo ordine

In questa sezione mostriamo l'interpretazione delle curve caratteristiche come curve di discontinuità del primo e del secondo ordine per il campo incognito  $u$ .

Consideriamo sempre  $(x, y) \in \Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$ . Sia  $\gamma$  una curva regolare su  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , descritta dall'equazione  $x = \phi(y)$ , con  $\phi'(y) \neq 0$  (condizione di regolarità). Definiamo

$$\lambda := \frac{dx}{dy} = \phi'(y),$$

quindi se  $y = t$  corrisponde alla variabile temporale,  $\lambda$  è interpretabile come velocità. Siano poi  $\Omega^I$  e  $\Omega^{II}$  le parti di  $\Omega$  tali che:

$$\begin{cases} \Omega^I \cup \Omega^{II} = \Omega - \gamma \\ \Omega^I \cap \Omega^{II} = \emptyset. \end{cases}$$

Richiediamo che  $u$  sia continua  $\forall P \in \Omega^I \cup \gamma$  e  $\forall P \in \Omega^{II} \cup \gamma$ .

**Definizione 1.16** (Salto di  $u$  attraverso  $\gamma$ ). Definiamo  $\forall P_\gamma = (\phi(y), y)$  il salto di  $u$  attraverso  $\gamma$ :

$$[u](y) := \lim_{P \rightarrow P_\gamma^{II}} u - \lim_{P \rightarrow P_\gamma^I} u = u^{II}(\phi(y), y) - u^I(\phi(y), y). \quad (1.43)$$

*Osservazione 1.17.* Se  $u$  è continua  $\forall P_\gamma$ , allora  $[u](y) = 0 \forall y > 0$ .

Richiedendo ora condizioni di regolarità più forti, ovvero  $u \in C^1$  su  $\Omega^I \cup \gamma$  e su  $\Omega^{II} \cup \gamma$ , vale la seguente **condizione di compatibilità dei salti per il primo ordine**:

$$\frac{d}{dy}[u](y) = [u_y] + [u_x]\phi'(y) = [u_y] + \lambda[u_x]. \quad (1.44)$$

In questo caso, se  $[u](y) = 0$ , abbiamo che  $[u_y] = -\lambda[u_x]$ . Possiamo definire ora l'**ampiezza di discontinuità del salto del primo ordine** come:

$$\delta u(y) := [u_x](y). \quad (1.45)$$

Se in (1.44) vale  $[u] = [u_y] = [u_x] = 0$ , (quindi  $0 = 0$ ), allora  $u \in C^1(\Omega^+, \mathbb{R})$ . Se, invece, richiediamo che  $u \in C^2$  su  $\Omega^I \cup \gamma$  e su  $\Omega^{II} \cup \gamma$  con discontinuità del salto di secondo

ordine attraverso  $\gamma$ , quindi  $[u_{xx}] \neq 0$ ,  $[u_{yy}] \neq 0$  e  $[u_{xy}] \neq 0$ , dalla (1.44) valgono le seguenti **equazioni di compatibilità dei salti per il secondo ordine**:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy}[u_x](y) = [u_{xy}] + \lambda[u_{xx}] \\ \frac{d}{dy}[u_y](y) = [u_{yy}] + \lambda[u_{yx}]. \end{cases} \quad (1.46)$$

Dato che  $u \in C^2$ , allora vale il teorema di Schwarz per cui  $[u_{xy}] = [u_{yx}]$ .

Se  $[u_x] = [u_y] = 0$  in (1.46), allora otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -[u_{xx}]\lambda = [u_{xy}] \\ -[u_{xy}]\lambda = [u_{yy}]. \end{cases} \quad (1.47)$$

Definiamo  $\delta u(y) := [u_{xx}](y) \forall y$ , l'**ampiezza di discontinuità del secondo ordine**, possiamo riscrivere il sistema 1.47 nel modo seguente:

$$\begin{cases} [u_{xy}] = -\lambda\delta u(y) \\ [u_{yy}] = \lambda^2\delta u(y). \end{cases} \quad (1.48)$$

**Definizione 1.18** (Curva di discontinuità del primo ordine). Sia  $\gamma \in \Omega$  tale che  $x = \phi(y)$ . Essa è una **curva di discontinuità del primo ordine** per il campo  $u$  se e solo se per  $u \in C^1$  su  $\Omega^I \cup \gamma$  e  $\Omega^{II} \cup \gamma$  si ha:

$$\begin{cases} [u](y) = 0 \quad \forall P_\gamma \\ [u_x](y) \neq 0. \end{cases} \quad (1.49)$$

**Definizione 1.19** (Curva di discontinuità del secondo ordine). Sia  $\gamma \in \Omega$  tale che  $x = \phi(y)$ . Essa è una **curva di discontinuità del secondo ordine** per il campo  $u$  se e solo se per  $u \in C^2$  su  $\Omega^I \cup \gamma$  e  $\Omega^{II} \cup \gamma$  si ha:

$$\begin{cases} [u](y) = [u_x] = [u_y] = 0 \quad \forall P_\gamma \\ [u_{xx}](y) \neq 0. \end{cases} \quad (1.50)$$

**Teorema 1.20.**  $\gamma$  è una curva di discontinuità del primo e del secondo ordine se e solo se è una curva caratteristica.

## 1.2 Curve caratteristiche come curve di discontinuità del primo e del secondo ordine 26

---

*Dimostrazione.* Scriviamo l'equazione del salto della PDE del primo ordine della forma (1.4):

$$[au_x + bu_y - c] = 0, \quad (1.51)$$

da cui otteniamo, per la linearità del limite e per il fatto che  $a, b, c$  sono funzioni almeno continue:

$$a[u_x] + b[u_y] - [c] = 0, \text{ con } [c] = 0. \quad (1.52)$$

Per la condizione di compatibilità (1.44) e per la continuità di  $u$ , otteniamo  $[u_y] = -\lambda[u_x]$ , quindi:

$$[u_x](a - b\lambda) = 0. \quad (1.53)$$

Dato che  $\gamma$  è una curva di discontinuità del primo ordine,  $[u_x] \neq 0$ , allora l'equazione caratteristica è del tipo  $a - b\lambda = 0$ , da cui otteniamo  $\lambda = \frac{a}{b}$ .

Ricordiamo che  $\lambda = \frac{dx}{dy}$ , quindi otteniamo la stessa relazione trovata per le curve caratteristiche associate alla PDE (1.4) (definizione 1.4):

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = a \\ \frac{dy}{d\tau} = b \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}u = c. \end{cases} \quad (1.54)$$

Osserviamo che  $\lambda$  è sempre reale.

Consideriamo ora l'equazione del salto della PDE del secondo ordine del tipo (1.26):

$$a[u_{xx}] + 2b[u_{xy}] + c[u_{yy}] = 0. \quad (1.55)$$

Ricordando le condizioni di compatibilità 1.46, otteniamo:

$$a[u_{xx}] + 2b\lambda[u_{xx}] + c\lambda^2[u_{xx}] = 0, \quad (1.56)$$

e raccogliendo:

$$[u_{xx}](a - 2b\lambda + c\lambda^2) = 0.$$

Dato  $\gamma$  per ipotesi è una curva di discontinuità del secondo ordine, si ha  $[u_{xx}] \neq 0$ . L'equazione caratteristica è:

$$a - 2b\lambda + c\lambda^2 = 0. \quad (1.57)$$

Ricordiamo che  $\lambda = \frac{dx}{dy}$ , quindi:

$$c \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 - 2b \left( \frac{dx}{dy} \right) + a = 0.$$

Otteniamo infine

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}.$$

Abbiamo ottenuto la stessa relazione trovata per le curve caratteristiche associate alla PDE (1.26) (vedi (1.32)) la stessa equazione che ci permette di concludere che  $\gamma$  è una curva caratteristica. □

Osserviamo che se  $y$  rappresenta la variabile temporale, le curve caratteristiche possono essere interpretate come onde di discontinuità che si muovono con velocità reale finita. Questa interpretazione è tipica dei modelli evolutivi iperbolici del primo e del secondo ordine, quando  $\gamma$  è reale.

Fino ad ora abbiamo considerato PDEs quasi lineari scalari del primo e secondo ordine, consideriamo una generalizzazione vettoriale ad un sistema quasi lineare del primo ordine in  $\mathbb{R}^n$ , supponendo che  $y = t$ . Sia dunque  $\vec{u} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Otteniamo una PDE vettoriale della forma:

$$\vec{u}_t + A(\vec{x}, t, \vec{u}(\vec{x}, t))\vec{u}_x = \vec{c}(\vec{x}, t, \vec{u}(\vec{x}, t)), \quad (1.58)$$

dove  $A$  è una matrice di ordine  $n$  ed è detta *matrice rappresentativa del sistema* e  $c$  è un campo vettoriale, almeno continuo, a  $n$  componenti ed è detto *termine noto dell'equazione*. Se  $\vec{c} = \vec{0}$ , la PDE si dice omogenea.

I risultati visti in precedenza sulle PDEs scalari quasi lineari del primo ordine si estendono anche al caso vettoriale, quindi le curve caratteristiche di (1.58) si possono vedere come curve di discontinuità del primo ordine per il campo  $\vec{u}$ .

Definiamo l'**ampiezza di discontinuità** di  $\vec{u}$ :

$$\delta \vec{u} := [\vec{u}_x].$$

Sappiamo che  $[\vec{c}] = 0$ , siccome è un campo almeno continuo. Consideriamo il sistema del salto di (1.58):

$$[\vec{u}_t] + A[\vec{u}_x] = \vec{0}. \quad (1.59)$$

Vale la condizione di compatibilità  $[\vec{u}_t] = -\lambda[\vec{u}_x]$  che deriva da quella scalare.

Riscrivendo il sistema del salto 1.59 con la condizione di compatibilità. Otteniamo:

$$-\lambda[\vec{u}_x] + A[\vec{u}_x] = \vec{0},$$

da cui  $(A - \lambda I)[\vec{u}_x] = \vec{0}$ .

**Definizione 1.21** (Sistema Iperbolico e strettamente iperbolico). Il sistema (equazione vettoriale (1.58)) si dice iperbolico se e solo se gli autovalori della matrice  $A$  sono tutti reali; se sono anche distinti si definisce strettamente iperbolico.

Abbiamo ottenuto, infatti, che  $\gamma$  è una curva caratteristica se e solo se  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Quindi abbiamo una famiglia di  $n$  curve caratteristiche.

**Definizione 1.22** (Modello genuinamente non lineare). Un modello espresso dalla PDE vettoriale (1.58) si dice genuinamente non lineare se:

$$\nabla_{\vec{u}} \lambda^{(i)} = \left( \frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial u_n} \right) \neq \vec{0} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

**Definizione 1.23** (Condizione di eccezionalità secondo Lax). La  $k$ -esima curva caratteristica  $\gamma^{(k)}$  descritta da  $\lambda^{(k)} = \frac{dx}{dy}$ , nel caso in cui  $y$  rappresenti il tempo, ovvero la  $k$ -esima onda di discontinuità che si muove lungo l'asse  $x$  con velocità reale  $\lambda^{(k)}$ , si dice eccezionale secondo Lax se vale la condizione:

$$\nabla_{\vec{u}} \lambda^k \cdot r^{(k)} = 0,$$

dove  $r^{(k)} \in \text{Ker}(\lambda^{(k)})$  rappresenta l'autovettore destro tale per cui  $(A - \lambda^{(k)} I)r^{(k)} = 0$ .

Si dice che il modello è linearmente degenere lungo  $\lambda^{(k)}$ : lungo le onde che si muovono con queste velocità, il modello si comporta come se fosse lineare e in questo caso non si verifica la cosiddetta "catastrofe del gradiente". In caso contrario, per i modelli non lineari, può accadere che esista un tempo critico finito tale per cui il modulo dell'ampiezza di discontinuità esploda al limite, cioè:

$$\exists t_c < +\infty \quad (t_c > 0) \text{ tale che } \lim_{t \rightarrow t_c} \|\delta \vec{u}\| = +\infty.$$

In tal caso avviene una degenerazione delle onde iperboliche in onde d'urto.

### 1.2.1 Il Modello di Eulero

Per semplicità ci mettiamo nel regime termodinamico adiabatico, anzi isoentropico. Il modello di Eulero o del primo suono (vedi [9]) in versione  $1D$  è descritto da un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine vettoriale quasi lineare omogenea in  $\mathbb{R}^2$  in cui la funzione incognita è

$$\vec{u}(x, t) = \begin{bmatrix} \rho(x, t) \\ v(x, t) \end{bmatrix}$$

dove  $\rho(x, t)$  è la densità del fluido e  $v(x, t)$  è la sua velocità,  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ . La pressione del fluido  $p$  è legata alla densità incognita  $\rho$  mediante una relazione detta *equazione di stato*; ad esempio, per un gas perfetto politropico, l'equazione di stato è:

$$p(\rho) = A\rho^\gamma; \tag{1.60}$$

dove  $\gamma = c_p/c_v > 1$  è detto *invariante adiabatico* ( $c_p$  e  $c_v$  sono le capacità termiche unitarie rispettivamente a pressione e a volume costante) e  $A$  è un parametro positivo;  $\gamma$  e  $A$  sono entrambi costanti.

Considereremo più generalmente fluidi barotropici per i quali la pressione è una funzione di classe  $C^1$  della sola densità, con la condizione fenomenologica che  $p'(\rho) > 0$ ; infatti  $p'(\rho) = c_s^2(\rho)$ , dove  $c_s(\rho)$  è la *velocità del suono nel fluido considerato*, dipendente solo dalla densità  $\rho$ .

Nel caso politropico, si ha  $p'(\rho) = A\gamma\rho^{\gamma-1}$ , quindi  $c_s^2(\rho) = \frac{\gamma p}{\rho}$ .

Il modello di Eulero  $1D$  è descritto, quindi, dal seguente sistema quasi lineare di primo ordine omogeneo in  $\mathbb{R}^2$  (vedi [10]):

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_x v + \rho v_x = 0 \\ v_t + \frac{p'(\rho)}{\rho} \rho_x + v_x v = 0. \end{cases} \tag{1.61}$$

Le equazioni del modello di Eulero in versione  $3D$  sono (vedi [10]):

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{v}_t + \frac{p'(\rho)}{\rho} \nabla \rho + (\nabla \vec{v}) \vec{v} = 0, \end{cases} \tag{1.62}$$

dove  $\rho(\vec{x}, t)$  è la densità del fluido e  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  è la sua velocità (vettoriale),  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  e  $t > 0$ . La prima equazione del sistema 1.62 è scalare, è detta *equazione di continuità* ed equivale alla forma locale del principio di conservazione della massa; la seconda equazione, vettoriale, è l'*equazione del moto di Eulero* e rappresenta la forma locale del principio di conservazione della quantità di moto per un fluido perfetto barotropico.

Tale modello risulta sempre iperbolico e quindi è compatibile con la propagazione di due onde di discontinuità del primo ordine che sono longitudinali e vengono dette *onde sonore*; queste onde sono le onde iperboliche tipiche del modello e genuinamente non lineari. Si hanno anche due onde trasversali di contatto (doppie) corrispondenti a velocità locale di propagazione nulla, che risultano sempre eccezionali secondo Lax.

### Test di iperbolicità

Consideriamo la versione 1D del modello di Eulero, descritto dal seguente sistema quasi lineare di primo ordine omogeneo in  $\mathbb{R}^2$  (vedi 1.61):

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_x v + \rho v_x = 0 \\ v_t + \frac{p'(\rho)}{\rho} \rho_x + v_x v = 0. \end{cases} \quad (1.63)$$

La forma vettoriale del modello è:

$$\vec{u}_t + A(x, t, \vec{u}) \vec{u}_x = \vec{0},$$

dove  $A$  è la matrice caratteristica associata al sistema 1.63:

$$A = \begin{bmatrix} v & \rho \\ \frac{p'(\rho)}{\rho} & v \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

Sappiamo che un modello è iperbolico se e solo se gli autovalori della matrice caratteristica associata sono reali e strettamente iperbolico se sono anche tutti distinti (vedi [9]).

Cerchiamo quindi gli autovalori della matrice  $A$ , ponendo  $\det(A - \lambda I) = 0$ , cioè:

$$\det \begin{bmatrix} v - \lambda & \rho \\ \frac{p'(\rho)}{\rho} & v - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (1.65)$$

Quindi:

$$(v - \lambda)^2 = p'(\rho) \Rightarrow \lambda^\pm = v \pm \sqrt{p'(\rho)} = v \pm \sqrt{c_s^2} = v \pm c_s, \quad (1.66)$$

dove  $c_s = c_s(\rho)$  è la velocità di propagazione ondosa delle due onde sonore. Si osserva che gli autovalori  $\lambda^\pm$  sono reali e distinti, quindi il modello è iperbolico strettamente.

*Osservazione 1.24.* Si hanno quindi due famiglie di curve caratteristiche reali e distinte indicate con  $\gamma^\pm$  e descritte dalle due ODEs del primo ordine  $\frac{dx}{dt} = \lambda^\pm$ .

Possiamo anche introdurre la notazione

$$U := \lambda - v,$$

per definire la **velocità locale di propagazione**, legata alla velocità di avanzamento  $\lambda$  e alla velocità del fluido  $v$ .

Consideriamo ora il modello di Eulero in versione  $3D$ , descritto dal seguente sistema (vedi 1.62):

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{v}_t + \frac{p'(\rho)}{\rho} \nabla \rho + (\nabla \vec{v}) \vec{v} = 0. \end{cases} \quad (1.67)$$

Nella versione  $3D$  del modello, la relazione tra  $U$  e  $\lambda$  è la seguente:

$$U = \lambda - \vec{v} \cdot \vec{n},$$

essendo  $\vec{n}$  il versore normale alla superficie di discontinuità.

### Forma conservativa del modello

Consideriamo la versione  $1D$  del modello di Eulero 1.61: posso riscriverla in forma conservativa utilizzando delle semplici identità:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p(\rho))_x = 0. \end{cases} \quad (1.68)$$

*Dimostrazione.* La prima equazione del sistema conservativo 1.69 è banalmente equivalente a quella del sistema 1.61. Verifichiamo che la seconda equazione del sistema conservativo equivale alla seconda equazione del sistema 1.61:

$$\begin{aligned} (\rho v)_t + (\rho v^2 + p(\rho))_x &= \\ \rho_t v + \rho v_t + \rho_x v^2 + 2\rho v v_x + p'(\rho) \rho_x &= \end{aligned}$$

$$\rho v_t + v(\rho_t + \rho_x v + \rho v_x) + \rho v v_x + p'(\rho)\rho_x = 0.$$

Ora, siccome  $\rho_t + \rho_x v + \rho v_x = 0$  (prima equazione del sistema di Eulero 1.61), dividendo tutto per  $\rho$ , otteniamo la tesi:

$$v_t + v v_x + \frac{p'(\rho)}{\rho} \rho_x = 0.$$

□

Vale la pena ricordare anche la forma conservativa della versione 3D del modello di Eulero 1.62:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ (\rho \vec{v})_t + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \mathbb{I}) = \vec{0}, \end{cases} \quad (1.69)$$

dove con  $\otimes$  si indica l'operazione diade e  $\mathbb{I}$  rappresenta il tensore di unità  $p^\perp$  (vedi [10]).

### Studio della propagazione ondosa e genuina non linearità del modello

Studiamo la propagazione ondosa del modello di Eulero in versione 1D 1.61 attraverso vari steps:

1. Scriviamo il sistema del "salto", supponendo che  $\vec{u}$  abbia una discontinuità del primo ordine di tipo salto (vedi [8]):

$$\begin{cases} [\rho_t] + v[v_t] + \rho[v_x] = 0 \\ [v_t] + v[v_x] + \frac{p'(\rho)}{\rho}[\rho_x] = 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

2. Utilizziamo le relazioni di compatibilità tra i salti, conosciute in letteratura come *condizioni di Hadamard*:

$$[\rho_t] = -\lambda[\rho_x],$$

$$[v_t] = -\lambda[v_x],$$

da cui otteniamo l'ampiezza di discontinuità

$$\delta \vec{u} = \begin{bmatrix} [\rho_x] \\ [v_x] \end{bmatrix} \neq \vec{0}.$$

3. Sostituiamo le condizioni di compatibilità nel sistema 1.70:

$$\begin{cases} (-\lambda + v)[\rho_x] + \rho[v_x] = 0 \\ (-\lambda + v)[v_x] + \frac{p'(\rho)}{\rho}[\rho_x] = 0. \end{cases} \quad (1.71)$$

Questo sistema è un sistema di Cramer omogeneo in  $\mathbb{R}^2$  e quindi condizione necessaria e sufficiente perchè abbia soluzione non banale ( $\delta\vec{u} \neq \vec{0}$ ) è che:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda + v & \rho \\ \frac{p'(\rho)}{\rho} & -\lambda + v \end{bmatrix} = 0.$$

Da cui ricaviamo l'equazione caratteristica:

$$(v - \lambda)^2 = p'(\rho) \Rightarrow \lambda^\pm = v \pm \sqrt{p'(\rho)} = v \pm \sqrt{c_s^2} = v \pm c_s, \quad (1.72)$$

equivalente a quella trovata durante il test di iperbolicità del modello (1.66).

Il modello è quindi compatibile con la propagazione di due onde sonore progressive e regressive, rispettivamente con velocità di avanzamento  $\lambda^+ = v + \sqrt{c_s^2}$  e  $\lambda^- = v - \sqrt{c_s^2}$ . Si tratta di *onde di accelerazione* che si muovono lungo l'asse  $x$  con velocità  $\lambda^\pm$  in quanto trasportano la discontinuità dell'accelerazione.

Il modello di Eulero è genuinamente non lineare, infatti:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \rho} \lambda^\pm, \frac{\partial}{\partial v} \lambda^\pm \right) = \left( \pm \frac{p''(\rho)}{2\sqrt{p'(\rho)}}, 1 \right) \neq (0, 0).$$

Ora consideriamo la versione 3D del modello di Eulero 1.62. In questo caso si può procedere formalmente come in [11] riproducendo le seguenti ampiezze di discontinuità:

$$\delta\rho = [\nabla\rho] \cdot \vec{n},$$

$$\delta\vec{v} = [\nabla\vec{v}] \cdot \vec{n}.$$

Per cui si hanno le condizioni di compatibilità:

$$[\rho_t] = \lambda\delta\rho,$$

$$[\vec{v}_t] = \lambda\delta\vec{v}.$$

Valgono anche le seguenti identità:

$$\begin{aligned} [\nabla\rho] &= \delta\rho\vec{n}, \\ [\nabla\vec{v}] &= \delta\vec{v} \otimes \vec{n}, \\ \left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right] &= -U\delta\rho, \\ \left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right] &= -U\delta\vec{v}, \\ [\nabla \cdot \vec{v}] &= \delta\vec{v} \cdot \vec{n}, \\ [\nabla \times \vec{v}] &= \vec{n} \times \delta\vec{v}. \end{aligned}$$

L'equazione caratteristica che si ottiene è:

$$U^2(U^2 - p'(\rho)) = 0, \quad (1.73)$$

da cui ottengo le soluzioni:

- $U = 0$  (soluzione doppia)  $\Rightarrow \lambda = \vec{v} \cdot \vec{n}$ ,
- $U = \pm c_s(\rho)$   $\Rightarrow \lambda^\pm = \vec{v} \cdot \vec{n} \pm c_s(\rho)$ .

Le velocità sono reali, quindi il modello è classificabile come iperbolico, non strettamente perchè la soluzione  $U = 0$  è doppia. Le onde d'accelerazione generate da  $U = 0$  sono onde materiali o di contatto, hanno infatti velocità nulla, non trasportano discontinuità in  $\delta\rho$  e  $\delta\vec{v} \cdot \vec{n}$  e sono trasversali; le onde d'accelerazione generate da  $U = \pm c_s(\rho)$  sono le classiche onde sonore e sono longitudinali: trasportano discontinuità in  $\delta\vec{v} \cdot \vec{n}$  e quindi anche in  $\delta\rho$ .

### 1.3 Il Metodo delle Onde Dispersive

Il *Metodo delle Onde Dispersive* è un metodo che può essere applicato a modelli lineari o linearizzati e, in questo caso, consiste nella ricerca di una soluzione  $s_0$  stazionaria e omogenea e poi nello studio del sistema linearizzato tramite l'introduzione di una opportuna perturbazione, attorno allo stato stazionario  $s_0$ .

Lavoriamo su equazioni in due variabili indipendenti  $(x, y)$ , dove  $y$  ha il significato di tempo, quindi  $y = t > 0$ .

**Definizione 1.25.** Una soluzione  $u_e$  si dice di *equilibrio stabile secondo Ljapunov* se:

$$\forall \epsilon > 0 \forall \delta(\epsilon) > 0 : \forall u(x, 0) \in B(u_e, \delta(\epsilon)), \|u(x, t) - u_e\| < \epsilon.$$

Inoltre  $u_e$  si dice poi asintoticamente (o fortemente) stabile secondo Ljapunov se:

$$u(x, t) \rightarrow u_e, \text{ per } t \rightarrow \infty.$$

**Definizione 1.26.** Definiamo **onde dispersive** o modi normali di Fourier funzioni scalari o vettoriali della forma:

$$0 \neq u(x, t) = u_1 e^{i(kx - \omega t)}, \quad (1.74)$$

$$\vec{0} \neq \vec{u}(x, t) = \vec{u}_1 e^{i(kx - \omega t)}, \quad (1.75)$$

dove

- $k \in \mathbb{R}$  è detto numero d'onda;
- $\omega$ , reale o complesso, è detta frequenza;
- $u_1 \in \mathbb{R}_0$  e  $\vec{u}_1$  sono dette ampiezze della soluzione e sono costanti e non nulle.

È ovvio che cerchiamo soluzioni diverse da zero.

*Osservazione 1.27.* La frequenza  $\omega$  è una funzione del numero d'onda  $k$  mediante una relazione, detta *equazione di dispersione*  $\omega = \omega(k)$ , che è strettamente legata al modello considerato. Nel caso in cui  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , le forme (1.74) e (1.75) diventano:

$$u(\vec{x}, t) = u_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (1.76)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (1.77)$$

dove ora  $\vec{k}$  è un vettore reale, detto *vettore d'onda*.

Per comodità indichiamo con  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$  il suo versore

**Definizione 1.28.** La grandezza  $V_f = \frac{\omega}{k}$  è detta **velocità di fase** (nel caso multidimensionale  $V_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$ ).

*Osservazione 1.29.* Il comportamento della soluzione del tipo (1.74) nel tempo  $t$ , è governato da  $\sigma := -\omega i$ , detto parametro di stabilità. Abbiamo due casi:

1. se  $\omega \in \mathbb{R}$ , allora  $\sigma \in \mathbb{C}$ , in particolare è un immaginario puro, quindi la soluzione  $u(x, t)$  avrà sempre un comportamento oscillatorio anche nella dipendenza da  $t$ ;
2. se  $\omega \in \mathbb{C}$ ,

$$\omega = \operatorname{Re}(\omega) + i\operatorname{Im}(\omega)$$

$$-i\omega = -i\operatorname{Re}(\omega) + \operatorname{Im}(\omega),$$

quindi la condizione sufficiente affinché la soluzione  $u(x, t)$  abbia una crescita di tipo esponenziale in  $t$ , corrispondente ad instabilità, è che  $\operatorname{Im}(\omega) > 0$ .

Per studiare la stabilità lineare di una soluzione di base  $u_e$  cerchiamo una legge di evoluzione temporale per una sua generica perturbazione istantanea  $\delta u(x, t)$  che si suppone 'piccola'. Se il sistema è linearizzato attorno a tale soluzione costante, vale il principio di sovrapposizione, quindi è possibile rappresentare una qualsiasi perturbazione in componenti di Fourier come (1.74) (o (1.75)) e studiare l'evoluzione separatamente di un singolo modo di Fourier; la soluzione sarà poi la somma delle singole evoluzioni.

Si procede quindi col determinare e discutere analiticamente l'equazione di dispersione per trovare il parametro di stabilità  $\sigma$ . Come si è detto:

- se  $\sigma \in \mathbb{C}$  è un immaginario puro, ossia ha parte reale nulla, si ha stabilità "neutra",
- se  $\sigma \in \mathbb{C}$  con parte reale diversa da zero, l'analisi della stabilità lineare è legata al segno della parte reale di  $\sigma$  (ossia la parte immaginaria di  $\omega$ ),
- se  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  si ha instabilità,
- se  $\sigma \in \mathbb{R}^-$  si ha a stabilità asintotica con legge di decadimento esponenziale.

Cerchiamo quindi una perturbazione della soluzione stazionaria e omogenea del tipo (caso 3D):

$$0 \neq \delta u = u_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \text{con } u_1 \neq 0; \quad (1.78)$$

$$0 \neq \delta \vec{u} = \vec{u}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \text{con } \vec{u}_1 \neq \vec{0}; \quad (1.79)$$

Valgono le seguenti identità per grandezze scalari e vettoriali:

$$1. \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta u = -i\omega \delta u, \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{u} = -i\omega \delta \vec{u}, \quad (1.81)$$

$$2. \quad \nabla \delta s = i\delta u \vec{k} = ik \delta u \vec{n}, \quad \text{con } \vec{n} = \frac{\vec{k}}{k} \text{ versore d'onda,} \quad (1.82)$$

$$\nabla \delta \vec{s} = \delta \vec{u} \otimes i\vec{k} = k\delta(\vec{u} \otimes i)\vec{n} = ik\delta u \otimes \vec{n}, \quad (1.83)$$

$$3. \quad \nabla \cdot \delta \vec{u} = \delta \vec{u} \cdot i\vec{k} = ik\delta \vec{u} \cdot \vec{n}, \quad (1.84)$$

$$4. \quad \nabla \times \delta \vec{u} = i\vec{k} \times \delta \vec{u} = ik(\vec{n} \times \delta \vec{u}), \quad (1.85)$$

$$5. \quad \Delta \delta u = -k^2 \delta u, \quad (1.86)$$

$$\Delta \delta \vec{u} = -k^2 \delta \vec{u}. \quad (1.87)$$

*Osservazione 1.30.* Osserviamo le analogie formali con le identità messe in evidenza su una superficie di discontinuità del primo ordine per lo studio delle onde iperboliche (non lineari) di un modello quasi lineare iperbolico (vedi sezione 1.2.1).

## 1.4 Le Leggi di Bilancio

Introduciamo alcune nozioni di base riguardanti le leggi di bilancio, rifacendoci a [12].

**Definizione 1.31.** Un *corpo continuo* è un insieme infinito di punti che andiamo a localizzare mediante l'identificazione di un punto con un vettore posizione in regioni regolari dell'ambiente euclideo  $\mathbb{E}^3$ , dette configurazioni del corpo continuo. Consideriamo due configurazioni:

- *Configurazione di riferimento (iniziale)*, indicata con  $B_R \subseteq \mathbb{E}^3$ ;

- *Configurazione attuale o istantanea* ad ogni generico istante  $t > 0$ , indicata con  $B(t) \subseteq \mathbb{E}^3$ .

*Osservazione 1.32.* Ciò significa che identifichiamo il generico punto  $P$  con il suo vettore posizione nella configurazione di riferimento  $B_R$ , cioè  $\mathbb{P} \equiv \vec{x}$ , e usiamo la notazione  $\vec{x}(t) = \mathbb{P}(t) \quad \forall t > 0$ , così che  $\mathbb{P}(0) = \vec{x}(0) = \vec{x}$ .

*Osservazione 1.33.* Nella *descrizione lagrangiana* del corpo continuo tipica dei corpi elastici si lavora con le coordinate spazio-tempo del tipo  $(\vec{x}, t)$  (coordinate fisse), mentre nella *descrizione euleriana* tipica dei fluidi si lavora con coordinate del tipo  $(\vec{x}(t), t)$  (coordinate istantanee).

**Definizione 1.34.** Elenchiamo alcune definizioni utili:

- definiamo *deformazione istantanea del corpo continuo* un diffeomorfismo fra aperti regolari di  $\mathbb{E}^3$  di classe almeno  $C^1$   $\vec{f}: B(0) \rightarrow B(t)$ .

L'equazione fondamentale per lo studio dei corpi continui nel caso euleriano è:

$$\vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad (1.88)$$

mentre nel caso lagrangiano è:

$$\vec{x} = \vec{f}^{-1}(\vec{x}(t), t); \quad (1.89)$$

con  $\vec{x}(0) = \vec{x}$ ;

- definiamo *tensore di deformazione* un tensore lagrangiano  $F = F(\vec{x}, t)$ , tale che

$$F := \nabla_{\vec{x}} \vec{x} = \nabla_{\vec{x}} \vec{f}(\vec{x}, t);$$

- definiamo il *coefficiente di dilatazione cubica* la grandezza scalare  $I = I(\vec{x}, t)$  tale che:

$$I := \det F(\vec{x}, t) > 0 \quad \forall (\vec{x}, t).$$

Notiamo che  $F(\vec{x}, 0) = \nabla_{\vec{x}} \vec{x}(0) = \nabla_{\vec{x}} \vec{x} = \mathbb{I}$ , quindi  $\det F(\vec{x}, 0) = 1 > 0$ ;

- definiamo il *vettore di spostamento* di  $\vec{x}$  il vettore  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  tale che:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) := \vec{x}(t) - \vec{x} = \vec{f}(\vec{x}, t) - \vec{x},$$

quindi:

$$\nabla_{\vec{x}} \vec{u}(\vec{x}, t) = \nabla_{\vec{x}} \vec{x}(t) - \mathbb{I} = F - \mathbb{I} \Rightarrow F = \mathbb{I} + \nabla_{\vec{x}} \vec{u};$$

- sia  $\varphi$  a valori scalari. Definiamo:

$$\varphi_s = \varphi(\vec{x}(t), t) \quad \text{notazione euleriana, } s \text{ spaziale}$$

$$\varphi_m = \varphi(\vec{f}(\vec{x}, t), t) = \varphi(\vec{x}, t) \quad \text{notazione lagrangiana.}$$

**Definizione 1.35.** Se si richiede  $\vec{f}$  di classe  $C^2$ , allora possiamo definire la *velocità del corpo continuo* e l'*accelerazione del corpo continuo* nel formalismo lagrangiano ( $\vec{x}$  fisso):

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \dot{\vec{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{f}(\vec{x}, t) = \vec{u}_t,$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \ddot{\vec{x}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{f}(\vec{x}, t) = \vec{u}_{tt}.$$

Le due definizioni di velocità e accelerazione nel caso euleriano sono:

$$\vec{v}(\vec{x}(t), t) = \dot{\vec{x}} = \vec{V}(\vec{f}^{-1}(\vec{x}(t), t), t),$$

$$\vec{a}(\vec{x}(t), t) = \ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}(t), t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \dot{\vec{x}}(t).$$

Ora, definendo il *tensore velocità di deformazione*  $D$  e il *tensore spin*  $W$ :

$$D = \frac{\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T}{2}, \quad (1.90)$$

$$W = \frac{\nabla \vec{v} - \nabla \vec{v}^T}{2}, \quad (1.91)$$

otteniamo:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v} - \nabla \vec{v}^T) \vec{v} + \nabla \vec{v}^T \vec{v}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2W \vec{v} + \frac{\nabla \vec{v}^2}{2}.$$

**Definizione 1.36** (Proprietà dei corpi continui). Da (1.88), si osserva che:

$$d\vec{x}(t) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} d\vec{x} = F d\vec{x} \forall t \quad (1.92)$$

$$\|d\vec{x}(t)\|^2 = d\vec{x} \cdot \mathbb{C} d\vec{x}, \quad (1.93)$$

dove  $\mathbb{C} = F^T F$  è detto  *tensore di deformazione destro di Cauchy Green*.

Dalla (1.95) si osserva che:

$$|d\vec{x}(t)| = \sqrt{d\vec{x} \cdot \mathbb{C} d\vec{x}}, \quad (1.94)$$

cioè:

$$|d\vec{x}(t)| = |d\vec{x}| \sqrt{\vec{e} \cdot \mathbb{C} \vec{e}}, \quad \text{dove } \vec{e} = \frac{d\vec{x}}{|d\vec{x}|}. \quad (1.95)$$

**Definizione 1.37.** Un *una parte regolare e materiale* di un corpo continuo è un aperto limitato e regolare  $\mathbb{P}(t) \subseteq B(t)$ . La frontiera  $\partial\mathbb{P}(t)$  della parte regolare e materiale di un corpo continuo è abbastanza regolare da poter applicare il teorema di Gauss o della divergenza. Cioè è un aperto limitato regolare nel senso di Kellogg [10].

**Teorema 1.38** (Teorema del Trasporto di Reynolds). *Sia  $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$  un campo a valori scalari di classe almeno  $C^1$ , definito  $\forall (\vec{x}(t), t) \in \mathbb{P}(t) \times \{t > 0\}$ , dove  $\mathbb{P}(t) \subseteq B(t)$  è una qualunque parte regolare e materiale del corpo continuo.*

*Allora, nel formalismo euleriano, si ha:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(t)} \varphi dv = \int_{\mathbb{P}(t)} \left[ \frac{d}{dt} \varphi + \varphi \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v} \right] dv. \quad (1.96)$$

*Nel caso in cui  $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(\vec{x}, t)$  sia a valori vettoriale, vale:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(t)} \vec{\varphi} dv = \int_{\mathbb{P}(t)} \left[ \frac{d}{dt} \vec{\varphi} + \vec{\varphi} \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v} \right] dv, \quad (1.97)$$

*dove  $dv = d_3\vec{x}$  è l'elemento di volume in  $B(t)$  e  $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ .*

*Considerando ora che*

$$\frac{d}{dt} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla_{\vec{x}} \varphi \cdot \vec{v} \quad (1.98)$$

*e che*

$$\nabla_{\vec{x}} \varphi \cdot \vec{v} + \varphi \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v} = \nabla_{\vec{x}} \cdot (\varphi \vec{v}), \quad (1.99)$$

l'equazione (1.96) diventa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(t)} \varphi \, dv = \int_{\mathbb{P}(t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\varphi \vec{v}) \right] dv. \quad (1.100)$$

Se  $\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(0) \forall t$ , allora otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(0)} \varphi \, dv = \int_{\mathbb{P}(0)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi \, dv, \quad \text{con } \vec{x}(0) = \vec{x}. \quad (1.101)$$

*Osservazione 1.39.* Il teorema di trasporto è la versione 3D della *formula di Leibniz* per  $\varphi = \varphi(x, t)$  con  $x = x(t) \in (a(t), b(t))$  di classe almeno  $C^1$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(\vec{x}, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{x}, t) dx + \varphi(b(t), t) \dot{b}(t) - \varphi(a(t), t) \dot{a}(t) \quad (1.102)$$

$\forall a, b$  di classe almeno  $C^1$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è immediata per effetto del diffeomorfismo  $f$ . Si operano i seguenti cambi di coordinate al membro a sinistra nell'equazione (1.96), ricordando le definizioni elencate in precedenza (vedi 1.34):

- $\mathbb{P}(t) \rightarrow \mathbb{P}(0)$ ,
- $\varphi(\vec{x}(t), t) \rightarrow \varphi_m(\vec{x}(t), t)$ ,
- $\varphi_s \rightarrow \varphi_m$ ,
- $d_3x = dv \leftrightarrow IdV$ .

Quindi il membro a sinistra in (1.96) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(0)} \varphi_m(IdV) &= \int_{\mathbb{P}(0)} \frac{d}{dt} (\varphi_m I) dV = \int_{\mathbb{P}(0)} \left[ \left( \frac{d}{dt} \varphi_m \right) I + \varphi_m \frac{d}{dt} I \right] dV = \\ &= \int_{\mathbb{P}(0)} \left[ \frac{d}{dt} \varphi_m + \varphi_m \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v} \right] I dV. \end{aligned}$$

Ora tornando alle coordinate precedenti ottengo la tesi del teorema :

$$\int_{\mathbb{P}(t)} \left[ \frac{d}{dt} \varphi + \varphi \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v} \right] dv.$$

□

**Definizione 1.40** (Formulazione integrale di una legge generale di bilancio per campi a valori scalari di classe almeno  $C^1$  nel formalismo euleriano). Sia  $\varphi = \varphi(\vec{x}(t), t)$  un campo a valori scalari di classe almeno  $C^1$ , Allora:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(t)} \varphi(\vec{x}(t), t) dv = - \int_{\partial\mathbb{P}(t)} \vec{J}_\varphi(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{n} d\sigma(t) + \int_{\mathbb{P}(t)} r_\varphi(\vec{x}(t), t) dv \quad \forall \mathbb{P}(t), t. \quad (1.103)$$

dove  $\vec{J}_\varphi(\vec{x}(t), t)$  è il vettore flusso relativo al campo  $\varphi(\vec{x}(t), t)$  di classe almeno  $C^1$  e  $r_\varphi(\vec{x}(t), t)$  si chiama termine di *supply*, almeno continuo (sperimentalmente), e può essere di tipo sorgente, se positivo o di tipo degradazione se negativo; il versore  $\vec{n}$  è la normale a  $\partial\mathbb{P}(t)$ .

La coppia  $(\vec{J}_\varphi, r_\varphi)$  rappresenta l'*inflow* associato a  $\varphi$ .

Vale la pena ricordare la formulazione integrale anche nel caso vettoriale:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(t)} \vec{\varphi}(\vec{x}(t), t) dv = - \int_{\partial\mathbb{P}(t)} \vec{J}_{\vec{\varphi}}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{n} d\sigma(t) + \int_{\mathbb{P}(t)} \vec{r}_{\vec{\varphi}}(\vec{x}(t), t) dv \quad \forall \mathbb{P}(t), t. \quad (1.104)$$

In questo caso l'*inflow* associato a  $\vec{\varphi}$  è rappresentato dalla coppia  $(\vec{J}_{\vec{\varphi}}, \vec{r}_{\vec{\varphi}})$

**Teorema 1.41.** *Per campi regolari scalari e vettoriali, con relativi inflow regolari, le formulazioni integrali (1.103) e (1.104), lavorando su parti regolari e materiali, sono equivalenti alla seguente forma locale per campi scalari (vedi [12]):*

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + \nabla \cdot (\varphi \vec{v} + \vec{J}_\varphi) = r_\varphi \quad (1.105)$$

detta forma del tipo divergenza che si può riscrivere in forma convettiva:

$$\frac{d}{dt} \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{J}_\varphi = r_\varphi \quad (1.106)$$

e alla seguente forma locale per campi vettoriali:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\varphi} + \nabla \cdot (\vec{\varphi} \otimes \vec{v} + \vec{J}_\varphi) = \vec{r}_\varphi \quad (1.107)$$

detta forma del tipo divergenza che si può riscrivere in forma convettiva:

$$\frac{d}{dt} \vec{\varphi} + \vec{\varphi} \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{J}_\varphi = \vec{r}_\varphi \quad (1.108)$$

$\forall (\vec{x}(t), t) \in \mathbb{P}(t) \times \{t > 0\}$ .

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione rimandiamo a [12]. Essa è basata sul teorema del trasporto, sul teorema di Gauss e sul teorema della permanenza del segno.  $\square$

### I tre principi di conservazione della meccanica dei continui visti come leggi generali di bilancio

1. il **principio della conservazione della massa** in forma integrale è:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(t)} \rho(\vec{x}, t) dv = 0 \quad \forall \mathbb{P}(t), t; \quad (1.109)$$

dove  $\rho(\vec{x}, t)$  è la densità di massa e  $dv = d_3x$  l'elemento di volume. Per campi regolari  $\rho$  di classe almeno  $C^1$ , il principio appena citato è equivalente alle forme locali (vedi teorema 1.41) :

- divergenza:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ ,
- convettiva:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$ ,

dette *equazioni di continuità*, dove  $(\rho(\vec{x}, t), \vec{v}(\vec{x}, t))$  rappresenta lo stato di un fluido;

2. il **principio di conservazione della quantità di moto** in forma integrale è:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) dv = \int_{\mathbb{P}(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) dv + \int_{\mathbb{P}(t)} \vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) d\sigma, \quad (1.110)$$

dove  $\vec{b}(\vec{x}, t)$  è la gravità e  $\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) = T(\vec{x}, t)\vec{n}$ .  $T = T(\vec{x}, t)$  prende il nome di *tensore degli sforzi di Cauchy*. Definiamo *sforzo di taglio*:

$$\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) \cdot \vec{n} = T\vec{n} \cdot \vec{n}.$$

Si osserva che, per campi regolari almeno  $C^1$ , il principio (1.110) è equivalente alle seguenti forme locali:

- divergenza:  $(\rho \vec{v})_t + \nabla(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} - T) = \rho \vec{b}$ ,
- convettiva:  $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot T + \rho \vec{b}$ ,

che prendono il nome di *equazione del moto di un fluido* e a cui dobbiamo aggiungere un'equazione costitutiva per il tensore  $T$ : abbiamo due proposte:

- $T(\vec{x}, t) = -p(\vec{x}, t)\mathbb{I}$ , ossia la proposta del *gas perfetto barotropico*;

- $T(\vec{x}, t) = -p(\vec{x}, t)\mathbb{I} + T^{(V)}$ , dove  $T^{(V)}$  è il *tensore viscoso* ed è definito nel seguente modo:

$$T^{(V)} = 2\mu D + \lambda \nabla \cdot \vec{v} \mathbb{I}, \quad (1.111)$$

ricordando che  $D$  è il tensore velocità di deformazione (vedi (1.90)).  $\mu > 0$  è la *viscosità di taglio* e  $\lambda \in \mathbb{R}$  la *viscosità di volume*. Questa è la proposta del *modello di Navier-Stokes* (vedi sezione 4.1.1). Si definisce la *viscosità di profondità* per i fluidi di Navier-Stokes:

$$\zeta := \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (1.112)$$

I coefficienti di viscosità  $\mu$  e  $\zeta$  sono parametri positivi (per il secondo Principio della Termodinamica) generalmente non costanti, ma dipendenti dai parametri di stato del fluido.

*Osservazione 1.42.* Per i fluidi di Stokes, si ha  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  e quindi  $\zeta = 0$ .

Quindi, utilizzando  $\zeta$ , il tensore viscoso può essere definito anche nel seguente modo:

$$T^{(V)} = 2\mu D + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v} \mathbb{I}. \quad (1.113)$$

3. il **principio di conservazione del momento della quantità di moto** è:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(t)} \vec{x}(t) \times \rho \vec{v} \, dv = \int_{\mathbb{P}(t)} \vec{x}(t) \times \rho \vec{b} \, dv + \int_{\partial \mathbb{P}(t)} \vec{x}(t) \times T \vec{n} \, d\sigma. \quad (1.114)$$

**Teorema 1.43.** *Il teorema del trasporto 1.38 per grandezze scalari o vettoriali per unità di massa, cioè del tipo:*

$$\begin{aligned} \rho \hat{\psi} \, dv \quad \rho \, dv &= dm, \\ \rho \hat{\vec{\psi}} \, dv \quad \psi &= \rho \hat{\psi}, \end{aligned}$$

si formula nel seguente modo operativo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(t)} \rho(\vec{x}, t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \, dv = \int_{\mathbb{P}(t)} \rho(\vec{x}, t) \frac{d}{dt} \hat{\psi}(\vec{x}, t) \, dv \quad \forall \mathbb{P}(t), t; \quad (1.115)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}(t)} \rho(\vec{x}, t) \hat{\vec{\psi}}(\vec{x}, t) \, dv = \int_{\mathbb{P}(t)} \rho(\vec{x}, t) \frac{d}{dt} \hat{\vec{\psi}}(\vec{x}, t) \, dv \quad \forall \mathbb{P}(t), t. \quad (1.116)$$

$\rho(\vec{x}, t)$  è tale da soddisfare l'equazione di continuità  $\frac{d}{dt} \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ .

Osserviamo che il principio (1.114), usando la formulazione (1.116) del teorema del trasporto appena citato, si può riscrivere nel seguente modo:

$$\int_{\mathbb{P}(t)} \rho \frac{d}{dt} (\vec{x} \times \vec{v}) \, dv = \int_{\mathbb{P}(t)} \vec{x}(t) \times \rho \vec{b} \, dv + \int_{\partial\mathbb{P}(t)} \vec{x}(t) \times T \vec{n} \, d\sigma;$$

e dal momento che  $\frac{d}{dt} (\vec{x} \times \vec{v}) = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{x}(t) \times \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{x}(t) \times \frac{d}{dt} \vec{v}$ , il terzo principio diventa:

$$\int_{\mathbb{P}(t)} \vec{x}(t) \times \rho \frac{d}{dt} \vec{v} \, dv = \int_{\mathbb{P}(t)} \vec{x}(t) \times \rho \vec{b} \, dv + \int_{\partial\mathbb{P}(t)} \vec{x}(t) \times T \vec{n} \, d\sigma.$$

Vale il seguente teorema:

**Teorema 1.44** (Teorema di Cauchy). *La validità del terzo principio (1.114), valendo i primi due, comporta che il tensore degli sforzi di Cauchy sia simmetrico:  $T \in \text{Sim}(\mathbb{R}^3)$  e viceversa se  $T = T^T$ , dai primi due principi si ottiene il terzo.*

## Capitolo 2

# Il Modello pionieristico di Keller-Segel

Il modello di Keller-Segel, descritto nell'articolo "*Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*" del 1970 (vedi [4]), è un modello evolutivo che riguarda i processi di aggregazione cellulare della chemiotassi in ambito bio-medico.

Ci sono due specie coinvolte: la densità cellulare  $\rho(\vec{x}, t)$  e la concentrazione della sostanza chimica attraente  $c(\vec{x}, t)$ .

Per redigere l'articolo, Keller e Segel hanno osservato lo sviluppo morfogenetico di alcune specie di muffe di melma (Acrasiales) e hanno cercato di elaborare un modello matematico che fosse conforme a quanto avevano osservato. Nello sviluppo morfogenetico di queste muffe, si possono osservare numerosi effetti interessanti dell'interazione intercellulare a lungo raggio, che può essere repulsiva o attrattiva. Dopo la germinazione, le cellule si disperdono, come se agissero sotto una reciproca repulsione. Quando si presenta una fonte di cibo, le cellule si muovono verso di essa guidate da un alto indice chemiotattico positivo. Dopo aver esaurito la loro scorta di cibo, le amebe prima tendono a distribuirsi uniformemente nello spazio a disposizione, poi iniziano a aggregarsi in un certo numero di "centri". In ogni centro si forma una lumaca, che migra e infine forma un corpo fruttifero multicellulare. È noto da tempo che l'aggregazione è mediata da una sostanza chimica chiamata *acrasina*, che viene degradata da un enzima extracellulare che chiamato *acrasinasi*.

Keller e Segel hanno derivato il loro modello da un punto di vista macroscopico: hanno esaminato il movimento dell'ameba (*Dictyostelium discoideum*) e della sostanza chimica (acrasina) nella loro interezza, rappresentandoli con funzioni regolari, che stanno per delle concentrazioni.

## 2.1 Formulazione del modello

Consideriamo  $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Per semplicità lavoriamo in uno spazio bidimensionale, ma tutti i risultati sono ancora validi in  $\mathbb{R}^3$ . Indichiamo con le funzioni di classe almeno  $C^1$  e positive  $\rho(\vec{x}, t)$  e  $c(\vec{x}, t)$  rispettivamente la concentrazione dell'ameba e quella della sostanza chimica. Il nostro obiettivo è costruire un sistema di due equazioni alle derivate parziali che descrivano il moto di queste due specie in modo sufficientemente accurato. Come in ogni reazione enzimatica, l'acrasina e l'acrasinasi si uniscono e formano un complesso enzima+substrato, che è molto instabile e decade rapidamente. La reazione chimica è la seguente:



dove  $\eta$  rappresenta la concentrazione dell'enzima e  $C$  la concentrazione del complesso enzima+substrato. All'inizio abbiamo sia acrasina che acrasinase, mentre alla fine della reazione enzimatica otteniamo solo acrasinase (più alcuni prodotti), quindi il risultato dell'interazione tra la sostanza chimica e l'enzima è la "morte" della specie chimica. Trascureremo l'equazione dell'enzima acrasinase (e anche quella del complesso enzima+substrato). Abbiamo però una funzione  $\Lambda(\rho, c)$  che indica la velocità di degradazione media dell'acrasina (a causa dell'interazione con acrasinase) e il tasso  $h(\rho, c)$  con cui l'acrasina viene prodotta.

In questo modo, lavoriamo solo con due equazioni: una per l'ameba e una per la sostanza chimica.

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. L'Acrasina è prodotta dall'ameba ad un tasso  $h(\rho, c)$  per ogni ameba;
2. L'Acrasina è degradata ad una velocità  $\Lambda(\rho, c)$ , proporzionale alla sostanza stessa;

3. Trascuriamo la nascita e la morte dell'ameba, in quanto accadono ad una velocità considerevolmente inferiore al tempo del movimento;
4. L'acrasina si muove in modo diffuso, con una mobilità diffusiva  $D_c$ ;
5. I cambiamenti nella concentrazione dell'ameba sono il risultato di un movimento chemiotattico orientato nella direzione di un gradiente "positivo" di acrasina, con un moto casuale (analogo ad un moto diffusivo, con mobilità  $D_\rho$ ).

Notiamo che le funzioni  $h(\rho, c)$  e  $\Lambda(\rho, c)$  possono essere eventualmente assunte come costanti, come avverrà nel seguito;

Il nostro obiettivo è ora quello di interpretare gli aspetti biologici in linguaggio matematico, in modo da costruire equazioni che descrivano il cambiamento nel tempo di  $\rho$  e  $c$ . Supponiamo che l'ameba si trovi in una regione  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , sottoinsieme del piano, fisso nel tempo, limitato o no, il cui bordo  $\partial\Omega$  sia sufficientemente regolare nel senso di Kellogg per poter applicare il teorema di Gauss, come definito in "An Introduction to Continuum Mechanics" [10] da Gurtin.

Applichiamo le leggi generali di bilancio (vedi sezione 1.4, teorema 1.40) a  $\rho(\vec{x}, t)$  e  $c(\vec{x}, t)$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d_2\vec{x} = - \int_{\partial\Omega} \vec{J}_\rho \cdot \vec{n} ds + \int_{\Omega} r_\rho d_2\vec{x} \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} c d_2\vec{x} = - \int_{\partial\Omega} \vec{J}_c \cdot \vec{n} ds + \int_{\Omega} r_c d_2\vec{x} \quad (2.3)$$

dove  $\vec{J}_\rho$  e  $\vec{J}_c$  sono i vettori di flusso di classe almeno  $C^1$  relativi all'ameba e alla sostanza chimica,  $r_\rho$  e  $r_c$  sono i termini di *supply* e sono funzioni almeno continue (di tipo sorgente se positivi, di tipo degradazione se negativi.);  $\vec{n}$  è la normale esterna a  $\partial\Omega$ .

Consideriamo ora le forme locali di (2.2) e (2.3); per poter spostare la derivata all'interno dell'integrale, utilizziamo una riduzione del teorema del trasporto classico in ambito fisso (sezione 1.4, teorema 1.38, equazione (1.101)), quindi abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d_2\vec{x} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho d_2\vec{x} \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} c d_2\vec{x} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} c d_2\vec{x} \quad (2.5)$$

dato che  $x(t) = x(0) \forall t \geq 0$ .

Ora, applicando il teorema della divergenza di Gauss, otteniamo:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{J}_\rho \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{J}_\rho \, d_2\vec{x} \quad (2.6)$$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{J}_c \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{J}_c \, d_2\vec{x} \quad (2.7)$$

Sostituiamo quindi (2.4) e (2.6) in (2.2), (2.5) e (2.7) in (2.3):

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho - r_\rho + \nabla \cdot \vec{J}_\rho \right] d_2\vec{x} = 0 \quad (2.8)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} c - r_c + \nabla \cdot \vec{J}_c \right] d_2\vec{x} = 0 \quad (2.9)$$

poichè la regione  $\Omega$  è arbitraria, per il *lemma fondamentale della meccanica dei continui*, ricaviamo le *equazioni locali di bilancio* (o *leggi di conservazione locale* nel caso in cui i termini di supply siano nulli):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho - r_\rho + \nabla \cdot \vec{J}_\rho = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c - r_c + \nabla \cdot \vec{J}_c = 0 \quad (2.11)$$

Secondo le ipotesi fatte, entrambi i flussi sono di tipo diffusivo. Supponendo poi che la densità e i termini di mobilità diffusiva  $D_\rho$  e  $D_c$  siano costanti, un'equazione costitutiva per il vettore flusso può essere quella del *flusso-gradiente*, cioè:

$$\vec{J}_\rho = -D_\rho \nabla \rho + D_{\rho c} \nabla c; \quad (2.12)$$

$$\vec{J}_c = -D_c \nabla c. \quad (2.13)$$

dove si suppone che la densità e le costanti diffusive  $D_\rho$  e  $D_c$  siano costanti. Il parametro  $D_{\rho c}$  indica la *mobilità chemiotattica* e può dipendere da entrambi i parametri  $\rho$  e  $c$ , ma a noi interessa il caso particolare in cui abbiamo solo la dipendenza lineare dal parametro  $\rho$ :  $D_{\rho c}(\rho) = \chi_0 \rho$ , dove  $\chi_0$  è chiamato *chemiosensività* e qui dovrebbe essere positivo, per descrivere l'attrazione. Nel caso in cui  $\chi_0$  è negativo, la sostanza chimica agisce come un veleno, in questo caso avremo repulsione.

Notiamo che il flusso legato all'ameba è composto da due termini: il primo proporzionale

al gradiente dell'ameba, che giustifica il termine diffusivo nelle equazioni finali e il secondo proporzionale al gradiente della sostanza chimica (acrasina), responsabile del movimento chemiotattico. Nel secondo termine, il segno positivo indica che abbiamo attrazione, nel caso della repulsione (la sostanza chimica agisce come un veleno), avremmo avuto un segno negativo.

Seguendo le ipotesi fatte, ignoriamo il termine di supply dell'ameba, quindi consideriamo

$$r_\rho = 0. \quad (2.14)$$

D'altra parte, non possiamo trascurare gli effetti della produzione e del degrado per la sostanza chimica. Quindi, ricordando che il tasso di natalità della sostanza chimica è proporzionale alla concentrazione dell'ameba e il tasso di morte è proporzionale alla concentrazione della sostanza chimica stessa (vedi ipotesi 1 e 2), poniamo:

$$r_c = -\Lambda(\rho, c)c + h(\rho, c)\rho. \quad (2.15)$$

Ora sostituiamo quanto trovato (equazioni (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15)) nelle due equazioni locali di bilancio (2.10) e (2.11) e otteniamo il *modello di Keller-Segel* per domini spazialmente fissi:

$$\begin{cases} \rho_t = \nabla \cdot (D_\rho(\rho, c)\nabla\rho) - \nabla \cdot (D_{\rho,c}\nabla c) \\ c_t = \nabla \cdot (D_c(\rho, c)\nabla c) - \Lambda(\rho, c)c + h(\rho, c)\rho. \end{cases} \quad (2.16)$$

Quindi abbiamo trovato due equazioni alla derivate parziali paraboliche. La prima equazione è di tipo **diffusivo drift**: le cellule diffondono secondo un coefficiente di diffusione  $D_\rho$  e si muovono in direzione di un gradiente di concentrazione dato dalla presenza della sostanza chimica. La mobilità chemiotattica  $D_{\rho,c}$  è una misura dell'influenza del gradiente chimico sul flusso di cellule.

La seconda equazione nel modello è un'equazione di **diffusione-reazione**: la sostanza chimica è prodotta dai batteri con una velocità  $h(\rho, c)$  ed è degradata con una velocità  $\Lambda(\rho, c)$ . Inoltre la sostanza chimica diffonde con un coefficiente di diffusione  $D_c$ .

*Osservazione 2.1.* Il modello considerato è di tipo parabolico-parabolico *quasi lineare*, perchè, anche se prendiamo  $h$ ,  $\Lambda$ ,  $D_\rho$  e  $D_c$  costanti, il termine  $D_{\rho c}$  non può essere costante.

*Osservazione 2.2.* Ricordiamo che tutti i risultati ottenuti lavorando in uno spazio bi-dimensionale, sono estendibili al caso tridimensionale. Distaccandoci dalla matematica, osserviamo però che in ambito biologico, ad esempio, non ha senso parlare di amebe in  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.2 Analisi della stabilità lineare del modello di Keller e Segel

Applichiamo il Metodo delle Onde Dispersive (vedi sezione 1.3) al modello di Keller Segel, che andrà linearizzato, essendo quasi lineare. In questo caso assumiamo che il dominio  $\Omega$  sia limitato. Per semplicità prendiamo  $h(\rho, c) = h$  e  $\Lambda(\rho, c) = \Lambda$  costanti. Procediamo attraverso tre steps:

1. troviamo la soluzione di equilibrio stazionaria e omogenea:  
sia  $s_0 = (\rho_0, c_0)$  la suddetta soluzione. Andiamo a sostituire  $s_0$  nel sistema 2.16, per linearizzare il sistema, che è quasi lineare. La prima equazione del sistema 2.16 è banalmente soddisfatta. Consideriamo la seconda:

$$-\Lambda c_0 + h\rho_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{h}{\Lambda}\rho_0,$$

2. perturbiamo la soluzione nel seguente modo:

$$s = s_0 + \delta s(\vec{x}, t).$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{cases} \rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\vec{x}, t) \\ c(\vec{x}, t) = c_0 + \delta c(\vec{x}, t). \end{cases}$$

Con i dati perturbati, il sistema 2.16 diventa:

$$\begin{cases} \delta\rho_t = \nabla \cdot (D_\rho(\rho_0 + \delta\rho, c_0 + \delta c)\nabla\delta\rho) - \nabla \cdot (\chi_0(\rho_0 + \delta\rho)\nabla\delta c) \\ \delta c_t = \nabla \cdot (D_c(\rho_0 + \delta\rho, c_0 + \delta c)\nabla\delta c) - \Lambda(c_0 + \delta c) + h(\rho_0 + \delta\rho) \end{cases}$$

Ora sviluppiamo in serie di Taylor i termini  $D_\rho(\rho_0 + \delta\rho, c_0 + \delta c)$  e  $D_c(\rho_0 + \delta\rho, c_0 + \delta c)$ :

$$\begin{cases} D_\rho(\rho_0 + \delta\rho, c_0 + \delta c) = D_\rho(\rho_0, c_0) + \frac{\partial}{\partial \rho} D_\rho|_{(\rho_0, c_0)} \delta\rho + \frac{\partial}{\partial c} D_\rho|_{(\rho_0, c_0)} \delta c + \text{termini di ordine sup} \\ D_c(\rho_0 + \delta\rho, c_0 + \delta c) = D_c(\rho_0, c_0) + \frac{\partial}{\partial \rho} D_c|_{(\rho_0, c_0)} \delta\rho + \frac{\partial}{\partial c} D_c|_{(\rho_0, c_0)} \delta c + \text{termini di ordine sup} \end{cases}$$

e chiamando  $D_\rho(0) = D_\rho(\rho_0, c_0)$  e  $D_c(0) = D_c(\rho_0, c_0)$ , otteniamo la versione linearizzata del sistema 2.16:

$$\begin{cases} \delta\rho_t = D_\rho(0)\Delta\delta\rho - \chi_0\rho_0\Delta\delta c \\ \delta c_t = D_c(0)\Delta\delta c - \Lambda\delta c + h\delta\rho \end{cases} \quad (2.17)$$

3. Dal punto di vista biomedico, osserviamo che il termine della prima equazione  $-\chi_0\rho_0\Delta c$  rappresenta il contrasto chemiotattico alla diffusione, mentre i termini  $\Lambda\delta c$  e  $h\delta\rho$ , che compaiono nella seconda equazione, indicano rispettivamente la degradazione della sostanza chimica dovuta a cure o difese immunitarie e la sorgente di crescita della sostanza.

Essendo in presenza di un sistema lineare, possiamo ora cercare perturbazioni del tipo Onde Dispersive e sostituirle in 2.17. Eliminiamo i termini in  $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ , in quanto si semplificano. Utilizzando le identità (1.80) e (1.86), otteniamo il sistema dispersivo:

$$\begin{cases} -i\omega\rho_1 = -D_\rho(0)k^2\rho_1 + \chi_0\rho_0k^2c_1 \\ -i\omega c_1 = -D_c(0)k^2c_1 - \Lambda c_1 + h\rho_1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Che può essere riscritto nel modo seguente, ricordando che  $(-i\omega = \sigma)$ :

$$\begin{cases} (\sigma + D_\rho(0)k^2)\rho_1 - \chi_0\rho_0k^2c_1 = 0 \\ -h\rho_1 + (\sigma + D_c(0)k^2 + \Lambda)c_1 = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Per il Teorema di Cramer, la condizione necessaria e sufficiente, affinché  $(\delta\rho, \delta c) \neq 0$ , è che il determinante della matrice associata  $D$  al sistema 2.19 sia uguale a zero:

$$D = \begin{bmatrix} \sigma + D_\rho(0)k^2 & -\chi_0\rho_0k^2 \\ -h & \sigma + D_c(0)k^2 + \Lambda \end{bmatrix}$$

Da questa condizione otteniamo l'equazione di dispersione:

$$\sigma^2 + \sigma((D_\rho(0) + D_c(0))k^2 + \Lambda) + D_\rho(0)k^2(D_c(0)k^2 + \Lambda) - \chi_0\rho_0hk^2 = 0. \quad (2.20)$$

*Osservazione 2.3.* Avremmo ottenuto lo stesso risultato se avessimo supposto  $D_{\rho c}$  costante, dal momento che il modello generale viene semplificato applicando il Metodo delle Onde Dispersive, perciò vale la pena di operare la generalizzazione.

Analizziamo ora la stabilità lineare del punto di equilibrio  $s_0 = (\rho_0, c_0)$ , mediante il metodo delle onde dispersive, concentrandoci sulla discussione del segno del termine noto dell'equazione di dispersione (2.20):

$$\begin{aligned} & D_\rho(0)k^2(D_c(0)k^2 + \Lambda) - \chi_0\rho_0k^2h = \\ & D_c(0)D_\rho(0)k^2 \left( k^2 + \frac{\Lambda}{D_c(0)} - \frac{\chi_0\rho_0h}{D_c(0)D_\rho(0)} \right) = \\ & D_c(0)D_\rho(0)k^2 \left( k^2 - \left( \frac{\chi_0\rho_0h}{D_c(0)D_\rho(0)} - \frac{\Lambda}{D_c(0)} \right) \right) = \\ & D_c(0)D_\rho(0)k^2 \left( k^2 - \left( K_{KS}^2 - \frac{\Lambda}{D_c(0)} \right) \right), \end{aligned}$$

dove abbiamo definito

$$K_{KS}^2 = \frac{\chi_0\rho_0h}{D_c(0)D_\rho(0)},$$

il numero d'onda critico di Keller-Segel.

Si può anche definire anche la *soglia critica modificata dalla presenza di  $\Lambda$* :

$$\tilde{K}_{KS}^2 = K_{KS}^2 - \frac{\Lambda}{D_c(0)} < K_{KS}^2.$$

Otteniamo così il seguente criterio di instabilità che porta alla formazione del **collasso chemiotattico**: la condizione sufficiente per l'insorgenza del collasso chemiotattico è

$$k^2 < \tilde{K}_{KS}^2. \tag{2.21}$$

*Osservazione 2.4.* Nel caso in cui  $\frac{\Lambda}{D_c(0)} > K_{KS}^2$ , non si verifica mai collasso chemiotattico, in quanto  $\tilde{K}_{KS}^2$  sarebbe negativa (e  $k^2 > 0$  sempre), quindi la condizione (2.21) non può essere verificata. Il termine noto risulta sempre positivo, dando luogo a stabilità sempre. Ciò significa che, per esempio in ambito biomedico, se le difese immunitarie fossero abbastanza elevate, non si verificherebbe mai metastasi tumorale.

*Osservazione 2.5.* Come abbiamo specificato in precedenza, abbiamo scelto  $h$  e  $\Lambda$  come costanti positive, ma è possibile generalizzare al caso in cui esse siano funzioni non costanti. Ad esempio se consideriamo  $\Lambda = \Lambda(c)$  con variazione logistica (generalizzando il modello di Malthus in dinamica delle popolazioni), otteniamo una equazione di secondo grado per la stabilità.

# Capitolo 3

## Il Modello idrodinamico di Chavanis e Sire

### 3.1 Il Modello di Eulero e il Modello di Eulero-Poisson

Riprendiamo il modello di Eulero descritto al capitolo 1, nella sezione 1.2.1, governato dal seguente sistema di equazioni 1.62:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho \vec{v}_t + \rho (\nabla \vec{v}) \vec{v} + p'(\rho) \nabla \rho = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

#### Analisi della stabilità lineare del modello

Seguendo il metodo delle Onde Dispersive descritto nel primo capitolo (vedi paragrafo 1.3), consideriamo una soluzione stazionaria e omogenea di base costante:

$$u_0 = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \vec{v}_0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo la soluzione di base nel sistema 3.1 si vede subito che le due equazioni sono banalmente soddisfatte.

Indichiamo con  $\delta \vec{u}(\vec{x}, t) \neq 0$  una perturbazione a  $u_0$  che supponiamo piccola e definita

dalla coppia  $(\delta\rho, \delta\vec{v})$  che scegliamo del tipo "onde dispersive", cioè:

$$\begin{cases} \delta\rho(\vec{x}, t) = \rho_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, & \rho_1 \neq 0 \\ \delta\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, & \vec{v}_1 \neq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Indichiamo quindi con  $\vec{u}_1$  il relativo vettore costante di componenti  $\rho_1$  e  $\vec{v}_1$ .

Visto che lavoriamo con un modello quasi lineare, procediamo a linearizzare il sistema 3.1 in un intorno dello stato  $(\rho_0, \vec{v}_0)$ . Sostituiamo nel sistema 3.1 la soluzione perturbata  $(\rho_0 + \delta\rho, \vec{v}_0 + \delta\vec{v})$ :

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \nabla \cdot ((\rho_0 + \delta\rho)(\vec{v}_0 + \delta\vec{v})) = 0 \\ (\rho_0 + \delta\rho)(\delta\vec{v}_t + (\nabla\delta\vec{v})(\vec{v}_0 + \delta\vec{v})) + p'(\rho_0 + \delta\rho)\nabla\delta\rho = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Sviluppiamo in serie di Taylor  $p'(\rho_0 + \delta\rho)$  e trascuriamo i termini nelle perturbazioni, dal quadratico in su. Il sistema che governa le piccole perturbazioni è il seguente:

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \nabla\delta\rho \cdot \vec{v}_0 + \rho_0\nabla \cdot \delta\vec{v} = 0 \\ \delta\vec{v}_t + (\nabla\delta\vec{v})\vec{v}_0 + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\nabla\delta\rho = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ora applichiamo le identità (1.80), (1.82), (1.83) e (1.84) elencate al capitolo 1 nella sezione 1.3 e trascuriamo il fattore  $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$  non nullo, presente in tutti i termini. Otteniamo:

$$\begin{cases} -i\omega\rho_1 + \rho_1 i\vec{k} \cdot \vec{v}_0 + \rho_0 \vec{v}_1 \cdot i\vec{k} = 0 \\ -i\omega\vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \otimes i\vec{k})\vec{v}_0 + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\rho_1 i\vec{k} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Ora, esplicitando l'operazione diade, semplificando la  $i$  e raccogliendo i termini si ha:

$$\begin{cases} \rho_1(-\omega + \vec{k} \cdot \vec{v}_0) + \rho_0 \vec{v}_1 \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{v}_1(-\omega + \vec{k} \cdot \vec{v}_0) + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\rho_1 \vec{k} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Introduciamo una terna ortonormale di riferimento  $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$  dove  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$  con  $k = |\vec{k}|$  è il versore normale al fronte d'onda e  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$  sono due versori trasversali tali che:

$$\vec{t}_i \cdot \vec{t}_j = \delta_{ij} \quad \vec{t}_i \cdot \vec{n} = 0 \quad i, j = 1, 2.$$

Allora abbiamo la decomposizione (unica) per l'ampiezza della velocità:

$$\vec{v}_1 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_1)\vec{t}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_2)\vec{t}_2.$$

Ora, proiettando l'equazione vettoriale del sistema 3.6, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \rho_1(-\omega + \vec{k} \cdot \vec{v}_0) + \rho_0 \vec{v}_1 \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{v}_1 \cdot \frac{\vec{k}}{k}(-\omega + \vec{k} \cdot \vec{v}_0) + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_1 \vec{k} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = 0 \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{t}_1(-\omega + \vec{k} \cdot \vec{v}_0) = 0 \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{t}_2(-\omega + \vec{k} \cdot \vec{v}_0) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Per il Teorema di Cramer, la condizione necessaria e sufficiente, affinché il sistema 3.7 abbia soluzione non banale è che il determinante  $D$  della matrice associata al sistema 3.6 sia uguale a zero:

$$D = \begin{vmatrix} \vec{k} \cdot \vec{v}_0 - \omega & \rho_0 k & 0 & 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} k & \vec{k} \cdot \vec{v}_0 - \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{k} \cdot \vec{v}_0 - \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{k} \cdot \vec{v}_0 - \omega \end{vmatrix} = 0$$

Da questa condizione otteniamo l'equazione di dispersione:

$$(\vec{k} \cdot \vec{v}_0 - \omega)^2 \left[ (\vec{k} \cdot \vec{v}_0 - \omega)^2 - p'(\rho_0) k^2 \right] = 0. \quad (3.8)$$

Quindi abbiamo due casi:

1. se  $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}_0$  (soluzione doppia e reale), allora dalla prima equazione del sistema 3.7 ottengo che  $\vec{v}_1 \perp \vec{k}$  e dalla seconda equazione ottengo che  $\rho_1 = 0$ .

In questo caso le onde generate, dette *onde di contatto o materiali*, si propagano con velocità di fase uguale alla componente lungo la direzione di  $k$  della velocità imperturbata:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{v}_0.$$

Il vettore  $\vec{v}_1$  è tangente al piano dell'onda e l'onda non trasporta perturbazioni di densità e dunque di pressione.

Per lo stato di quiete  $\vec{v}_0 = 0$ , si ha la soluzione multipla  $\omega = 0$ , corrispondente ad un modo stazionario.

2. se  $\omega^\pm = \vec{k} \cdot \vec{v}_0 \pm c_s(\rho_0) k$  (soluzioni reali e semplici), allora dalla terza equazione del sistema 3.7 ottengo che  $\vec{v}_1 \perp \vec{t}_1$  e dalla quarta che  $\vec{v}_1 \perp \vec{t}_2$ , quindi  $\vec{v}_1$  sarà parallelo

a  $\vec{k}$ . In questo caso vi sono due onde dispersive longitudinali, dette *onde sonore*, caratterizzate da variazioni di densità e quindi di pressione, che si muovono con velocità di fase:

$$v_f^\pm = \frac{\omega^\pm}{k} = \frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{v}_0 \pm c_s(\rho_0).$$

In particolare allo stato di quiete  $\vec{v}_0 = 0$ , la velocità di fase coincide con la velocità di propagazione del suono nel fluido considerato:  $v_f^\pm = \pm c_s$ .

In ogni caso, il fatto che  $\omega \in \mathbb{R}$  e che quindi  $\sigma = -i\omega \in \mathbb{C}$  è sempre complesso, assicura la neutra stabilità della soluzione di base costante  $(\rho_0, \vec{v}_0)$ , corrispondente a comportamenti oscillatori.

Vista l'iperbolicità del modello, e quindi la sua compatibilità con la propagazione di onde d'accelerazione longitudinali (onde di discontinuità di prim'ordine), le velocità di fase delle onde sonore di piccola ampiezza (costanti) corrispondono proprio alle velocità delle onde sonore di piccola ampiezza tipiche del modello date da:

$$\lambda^\pm = \vec{v} \cdot \vec{n} \pm c_s(\rho),$$

le stesse trovate nel primo capitolo tramite il test di iperbolicità e tramite lo studio della propagazione ondosa (vedi sezione 1.2.1).

Se introduciamo il concetto di *velocità locale di propagazione di fase*

$$U_0 = v_f - \vec{n} \cdot \vec{v},$$

che risulta essere la versione linearizzata della velocità locale di propagazione  $U = \lambda - \vec{n} \cdot \vec{v}$  vista al capitolo 1 nella sezione 1.2.1, si può creare una analogia con il metodo delle superfici caratteristiche, sostituendo la velocità di avanzamento  $\lambda$  dell'onda iperbolica con la velocità di fase di quella dispersiva, la velocità del fluido con la velocità costante  $\vec{v}_0$ , mantenendo, senza equivoco, la notazione  $\vec{n}$  per indicare il versore normale alla superficie di discontinuità o il versore del vettore d'onda.

### 3.1.1 Generalizzazioni del Modello di Eulero: Il Modello di Eulero-Poisson in Astrofisica

Consideriamo una nube di gas omogenea, in quiete, spazialmente infinita e vogliamo studiare sotto quali condizioni diventa instabile, per la presenza di una forza di

autogravit  non costante di potenziale regolare  $\phi(\vec{x}, t)$ . Lo stato del gas barotropico autogravitante   descritto ora dalla funzione incognita:

$$u(\vec{x}, t) = \begin{bmatrix} \rho(\vec{x}, t) \\ \vec{v}(\vec{x}, t) \\ \phi(\vec{x}, t) \end{bmatrix}$$

dove  $\rho(\vec{x}, t)$  rappresenta la densit  di massa e  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  la velocit . Vista la presenza del potenziale di autogravit  come funzione incognita aggiuntiva, rispetto a quelle del modello di Eulero 1.62, dobbiamo aggiungere un'ulteriore equazione: l'*equazione ellittica di Poisson* che lega l'energia potenziale di autogravit  alla densit  del gas. Il nuovo modello, detto di Eulero-Poisson,   descritto dal seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{v}_t + (\nabla \vec{v}) \vec{v} = -\frac{p'(\rho)}{\rho} \nabla \rho - \nabla \phi \\ \Delta \phi = 4\pi G \rho, \end{cases} \quad (3.9)$$

dove  $G$    la costante di gravitazione universale.

Osserviamo che il sistema 3.9 non   pi  del prim'ordine come 1.62, a causa proprio dell'equazione di Poisson, e proprio per questa equazione perde il suo carattere di iperbolicit . Il modello di Eulero-Poisson   descritto da un sistema iperbolico-ellittico. In letteratura il modello di Eulero-Poisson 3.9, prende il nome di *modello di Jeans per l'instabilit  gravitazionale* (vedi [13]).

*Osservazione 3.1.* Per questi moti guidati gravitazionalmente, si studia l'insorgenza del collasso gravitazionale con il metodo delle onde dispersive (formazione stellare).

## 3.2 Il Modello di Chavanis e Sire

Il modello di Keller e Segel, come osservato nel capitolo precedente,   generalmente un modello quasi lineare costituito da due PDEs di tipo parabolico. Questo modello ignora l'inerzia e assume che la velocit  di deriva degli organismi sia direttamente indotta da una forza chemiotattica proporzionale al gradiente della concentrazione della sostanza chimica.

Il modello di Keller e Segel può prevedere la formazione di "clusters" per il collasso chemiotattico, tuttavia non è in grado di riprodurre la formazione di reticoli (filamenti). Questi filamenti sono stati osservati in esperimenti riguardanti la formazione di capillari e vasi sanguigni. Queste strutture sono dovute all'auto-organizzazione spontanea delle cellule endoteliali durante la vasculogenesi, un processo coinvolto nello sviluppo embriologico e molto importante durante la crescita di un tumore.

Per studiare questi fenomeni sono stati introdotti nuovi modelli per la chemiotassi, che sopperiscano alle mancanze dei modelli puramente parabolici. Si tratta generalmente modelli idrodinamici (iperbolici), che tengono conto degli effetti dell'inerzia e sono in grado di riprodurre la formazione dei filamenti, interpretati come l'inizio di una vascolarizzazione. Questo fenomeno è responsabile dell'angiogenesi, un attore importante nella crescita dei tumori.

Uno di questi modelli è il recente modello idrodinamico con forza di attrito introdotto da Chavanis e Sire nel 2007 (vedi [6]), con un approccio unificato. Quando il termine di attrito è trascurabile, otteniamo un modello idrodinamico per la chemiotassi che è abbastanza simile al sistema di Eulero-Poisson 3.9 che descrive l'auto-gravitazione dei fluidi barotropici in ambiente astrofisico, mediante un'adeguata gestione delle notazioni.

### 3.2.1 Verso il modello di Chavanis e Sire

Partiamo dal Modello pionieristico di Keller e Segel 2.16, in cui sostituiamo il termine  $D_\rho \nabla \rho$  con un termine di pressione più generale:  $\nabla p(\rho)$  che tiene conto dell'equazione di stato barotropica  $p = p(\rho)$  per i fluidi comprimibili, con  $p(\rho)$  funzione di classe  $C^1$  e  $p'(\rho) > 0$  richiesto sperimentalmente; cioè:

$$\begin{cases} \rho_t = \nabla \cdot (\nabla p(\rho)) - \nabla \cdot (D_{\rho c} \nabla c) \\ c_t = \nabla \cdot (D_c(\rho, c) \nabla c) - \Lambda(\rho, c)c + h(\rho, c)\rho \end{cases} \quad (3.10)$$

Consideriamo ora il seguente sistema iperbolico-parabolico di equazioni:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla c \\ c_t = \nabla \cdot (D_c \nabla c) - \Lambda(\rho, c)c + h(\rho, c)\rho \end{cases} \quad (3.11)$$

dove  $\rho$  è la densità (cellulare),  $\vec{v}$  la velocità e  $c$  è sempre la concentrazione chimica. A differenza del modello iperbolico di Eulero per il gas perfetto barotropico (1.62), siamo ora in presenza di un modello iperbolico-parabolico dovuto ai *moti guidati chimicamente* (dovuti alla forza chimica  $\rho\nabla c$  presente nella seconda equazione del sistema 3.11). Si nota subito che l'ultima equazione per la concentrazione della sostanza chimica è esattamente l'equazione di diffusione e reazione del modello di Keller e Segel 2.16.

### Analogie con il modello di Eulero-Poisson

Notiamo che esistono numerose analogie tra il sistema evolutivo di equazioni idrodinamiche appena descritto 3.11 e il cosiddetto sistema iperbolico-ellittico di Eulero-Poisson 3.9, usato per descrivere strutture su larga scala nell'universo. Infatti il sistema 3.11 si riduce al sistema Eulero-Poisson 3.9 quando l'equazione parabolica del sistema 3.11, relativa all'evoluzione della concentrazione della sostanza chimica, si riduce alla forma ellittica stazionaria:

$$h\rho + \Delta c = 0, \quad (3.12)$$

dove abbiamo preso  $D_c = 1$  e  $h = 4\pi G$ ;  $G$  è la costante gravitazionale e la concentrazione della sostanza chimica  $c$  gioca il ruolo del potenziale gravitazionale  $\phi$  nel modello di Eulero-Poisson. D'altra parte le interazioni biologiche sono mediate dalla presenza di una sostanza materiale, ossia la sostanza chimica, mentre l'interpretazione fisica del potenziale gravitazionale è molto più astratta.

La differenza fondamentale tra i due sistemi 3.11 e 3.9 risiede nella terza equazione: in astrofisica il potenziale gravitazionale è generalmente determinato istantaneamente dalla densità di massa, attraverso l'equazione di Poisson; in biologia invece l'evoluzione della concentrazione della sostanza chimica, descritta dalla terza equazione del sistema 3.11, risulta più complessa e coinvolge più termini. Quindi c'è un'interessante analogia tra il collasso chemiotattico in ambito biomedico e il collasso gravitazionale di una nube gassosa auto-gravitante in astrofisica, che potrebbe essere un argomento di studio (aggregazione cellulare Versus formazione stellare, vedi [6]).

### La nuova proposta idrodinamica di Chavanis e Sire per i processi chemiotattici

Chavanis e Sire hanno proposto un modello idrodinamico che tenga conto anche della presenza di una forza di attrito (vedi [6]) e che corrisponde al sistema 3.11 dove alla seconda equazione è stato aggiunto il termine relativo alla forza di attrito  $-\xi\vec{v}$ , con  $\xi > 0$ :

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\rho \cdot \vec{v} + \rho\nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla c - \xi\vec{v} \\ c_t = \nabla \cdot (D_c\nabla c) - \Lambda(\rho, c)c + h(\rho, c)\rho. \end{cases} \quad (3.13)$$

Chiaramente per  $\xi = 0$  si ottiene il sistema 3.11.

### Da Chavanis e Sire a Keller e Segel

Analizziamo cosa succede nel caso in cui invece  $\xi \rightarrow \infty$ .

Consideriamo la seconda equazione del sistema 3.13 e moltiplichiamola per  $\rho/\xi$ , otteniamo:

$$\frac{\rho}{\xi}(\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}) = -\rho\vec{v} + \frac{1}{\xi}(-\nabla p + \rho\nabla c). \quad (3.14)$$

Siccome  $\xi \rightarrow \infty$ , ignoriamo il termine a sinistra dell'equazione (3.29) (termine di accelerazione), che va a zero. La prima equazione del sistema 3.13 si può riscrivere  $\nabla \cdot (\rho\vec{v}) = -\rho_t$ , da cui ricaviamo il termine  $\nabla \cdot (\rho\vec{v})$  e lo sostituiamo in (3.29) (applicando la divergenza a tutti i termini). Otteniamo:

$$\rho_t + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\xi}(-\nabla p + \rho\nabla c) \right) = 0. \quad (3.15)$$

Ricordiamo che la pressione dipende dalla densità attraverso l'equazione di stato  $p = p(\rho)$ , di classe  $C^1$  con  $p'(\rho) > 0$ . Quindi possiamo sostituire  $\nabla p(\rho)$  con  $p'(\rho)\nabla\rho$ . Ora, definiamo la sensitività chemiotattica  $\chi_0 = 1/\xi$  e il parametro di diffusione per  $\rho$   $D_\rho = \frac{1}{\xi}p'(\rho)$ , otteniamo:

$$\rho_t = \nabla \cdot (D_\rho(\rho, c)\nabla\rho) - \nabla \cdot (\chi_0\rho\nabla c). \quad (3.16)$$

Ossia, ricordando la definizione della mobilità drift  $D_{\rho c} = \chi_0\rho$ :

$$\rho_t = \nabla \cdot (D_\rho(\rho, c)\nabla\rho) - \nabla \cdot (D_{\rho c}\nabla c), \quad (3.17)$$

che, insieme all'ultima equazione del sistema 3.13 che rimane invariata, costituisce proprio il modello pionieristico di Keller e Segel 2.16 descritto nel capitolo 2.

In conclusione, si può dire che, nel limite del forte attrito, il modello di Chavanis e Sire 3.13, che tiene conto dei termini inerziali e di una forza di attrito, può essere ricondotto al classico modello parabolico-parabolico di Keller e Segel.

*Osservazione 3.2.* Come già osservato in precedenza per il modello 3.11, il modello di Chavanis e Sire per moti guidati chimicamente prende le caratteristiche del modello di Eulero-Poisson in ambito astrofisico per i moti guidati gravitazionalmente.

Mettiamo anche in evidenza l'importanza del termine riguardante la forza di attrito nel modello di Chavanis e Sire, che ci permette di ricondurci al modello di Keller e Segel 2.16, mandando  $\xi$  all'infinito e quindi trascurando i termini inerziali. Nel caso del modello iperbolico-parabolico 3.11, che non tiene conto dell'attrito ( $\xi = 0$ ), non è infatti possibile riallacciarsi al modello di Keller e Segel.

### 3.2.2 Analisi della stabilità lineare del modello di Chavanis e Sire

Applichiamo ora il metodo delle Onde Dispersive al modello idrodinamico di Chavanis e Sire 3.13 al fine di studiarne le proprietà di stabilità o instabilità (vedi sezione 1.3). Come nel caso del modello di Keller e Segel 2.16, prendiamo  $\Lambda$  e  $h$  costanti, per semplificare i conti.

Sia  $s_0 = (\rho_0, \vec{v}_0, c_0)$  la soluzione di base stazionaria e omogenea. Sostituiamola nel sistema 3.13, ricordandoci che  $p'(\rho)\nabla\rho = \nabla p$ :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -\xi\vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{0} \\ 0 = -\Lambda c_0 + h\rho_0 \Rightarrow c_0 = \frac{h}{\Lambda}\rho_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

*Osservazione 3.3.* Notiamo che la presenza dell'attrito determina uno stato stazionario e omogeneo di quiete ( $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ).

Ora consideriamo una perturbazione di questo stato di equilibrio del tipo "onda dispersiva"  $\delta s(\vec{x}, t) = s_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$  con  $s_1 \neq 0$ , tale che:

$$\delta s = \begin{bmatrix} \delta \rho \\ \delta \vec{v} \\ \delta c \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

Come prima, procediamo verso la linearizzazione del modello attorno il suo stato di equilibrio  $s_0$ , perturbando  $s_0$  nel seguente modo:

$$s = s_0 + \delta s(\vec{x}, t).$$

In questo caso avremo:

$$\begin{cases} \rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \delta \rho(\vec{x}, t) \\ \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}_0 + \delta \vec{v}(\vec{x}, t) \Rightarrow \vec{v}(\vec{x}, t) = \delta \vec{v}(\vec{x}, t) \\ c(\vec{x}, t) = c_0 + \delta c(\vec{x}, t) \end{cases}$$

Sostituendo nel sistema 3.13 la soluzione perturbata, abbiamo:

$$\begin{cases} \delta \rho_t + \nabla \cdot ((\rho_0 + \delta \rho) \delta \vec{v}) = 0 \\ \delta \vec{v}_t + (\delta \vec{v} \cdot \nabla) \delta \vec{v} = -\frac{p'(\rho_0 + \delta \rho)}{\rho_0 + \delta \rho} \nabla \delta \rho + \nabla \delta c - \xi \delta \vec{v} \\ \delta c_t = D_c(\rho_0 + \delta \rho, c_0 + \delta c) \Delta \delta c - \Lambda(c_0 + \delta c) + h(\rho_0 + \delta \rho) \end{cases} \quad (3.19)$$

Ora, ricordando che  $-\Lambda c_0 + h \rho_0 = 0$ , sviluppando in serie di Taylor il termine  $p'(\rho_0 + \delta \rho)$  e  $D_c(\rho_0 + \delta \rho, c_0 + \delta c)$  e trascurando i termini non lineari in  $\delta \rho$ ,  $\delta \vec{v}$  e  $\delta c$ , otteniamo il sistema linearizzato per le perturbazioni:

$$\begin{cases} \delta \rho_t + \rho_0 \nabla \cdot \delta \vec{v} = 0 \\ \delta \vec{v}_t = -\frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \nabla \delta \rho + \nabla \delta c - \xi \delta \vec{v} \\ \delta c_t = D_c(0) \Delta \delta c - \Lambda \delta c + h \delta \rho, \end{cases} \quad (3.20)$$

ricordando che  $D_c(0) = D_c(\rho_0, c_0)$ .

Possiamo ora lavorare con perturbazioni del tipo "onde dispersive"  $\delta s(\vec{x}, t) = s_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ . Semplifichiamo il sistema ottenuto eliminando il fattore comune  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$  e utilizziamo

le identità (1.80), (1.82), (1.83), (1.84) e (1.86) elencate nella sezione 1.3.

Si ottiene facilmente il sistema algebrico in  $\mathbb{R}^5$ :

$$\begin{cases} -i\omega\rho_1 + \rho_0\vec{v}_1 \cdot i\vec{k} = 0 \\ -i\omega\vec{v}_1 = -\frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\rho_1i\vec{k} + c_1i\vec{k} - \xi\vec{v}_1 \\ -i\omega c_1 = -D_c(\rho_0, c_0)k^2c_1 - \Lambda c_1 + h\rho_1. \end{cases} \quad (3.21)$$

Ora riscriviamo il sistema 3.21 raccogliendo i termini:

$$\begin{cases} -i\omega\rho_1 + \rho_0\vec{v}_1 \cdot i\vec{k} = 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\rho_1i\vec{k} + (-i\omega + \xi)\vec{v}_1 - c_1i\vec{k} = 0 \\ -h\rho_1 + (-i\omega + D_c(\rho_0, c_0)k^2 + \Lambda)c_1 = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Introduciamo una terna ortonormale di riferimento  $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$  dove  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$  con  $k = |\vec{k}|$  è il versore normale al fronte d'onda e  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$  sono due versori trasversali tali che:

$$\vec{t}_i \cdot \vec{t}_j = \delta_{ij} \quad \vec{t}_i \cdot \vec{n} = 0 \quad i, j = 1, 2.$$

Allora abbiamo la decomposizione (unica) per l'ampiezza della velocità:

$$\vec{v}_1 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_1)\vec{t}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_2)\vec{t}_2.$$

Ora, proiettando l'equazione vettoriale del sistema 3.22 lungo  $\vec{n}$ ,  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$  e ricordando che  $\sigma = -i\omega$ , otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sigma\rho_1 + \rho_0\vec{v}_1 \cdot i\vec{k} = 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\rho_1i\vec{k} \cdot \frac{\vec{k}}{k} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\vec{k}}{k}(\sigma + \xi) - c_1i\vec{k} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = 0 \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{t}_1(\sigma + \xi) = 0 \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{t}_2(\sigma + \xi) = 0 \\ -h\rho_1 + (\sigma + D_c(\rho_0, c_0)k^2 + \Lambda)c_1 = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Per semplicità supponiamo che  $\sigma + \xi \neq 0$ , in maniera tale che  $\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_i = 0 \forall i = 1, 2$ .

In questo modo ci possiamo ridurre ad un sistema di Cramer in  $\mathbb{R}^3$  nelle ampiezze essenziali  $\delta\rho$ ,  $\delta\vec{v} \cdot \vec{n}$  e  $\delta c$ . Per il Teorema di Cramer, la condizione necessaria e sufficiente,

affinchè  $(\delta\rho, \delta\vec{v} \cdot \vec{n}, \delta c) \neq \vec{0}$ , è che il determinante  $D$  della matrice associata al sistema 3.23 sia uguale a zero, cioè:

$$D = \begin{vmatrix} \sigma & \rho_0 ik & 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} ik & \sigma + \xi & -ik \\ -h & 0 & \sigma + D_c(0)k^2 + \Lambda \end{vmatrix} = 0$$

In questo caso, ricordando che  $c_s^2 = p'(\rho_0)$ , dove  $c_s$  è la velocità del suono nel fluido considerato calcolata in  $\rho_0$ , otteniamo la seguente equazione di dispersione:

$$\sigma(\sigma + \xi)(\sigma + D_c(0)k^2 + \Lambda) - h\rho_0 k^2 + c_s^2 k^2 (\sigma + D_c(0)k^2 + \Lambda) = 0. \quad (3.24)$$

Quindi:

$$\sigma^3 + \sigma^2(\xi + D_c(0)k^2 + \Lambda) + \sigma(\xi(D_c(0)k^2 + \Lambda) + c_s^2 k^2) - h\rho_0 k^2 + c_s^2 k^2 (D_c(0)k^2 + \Lambda) = 0. \quad (3.25)$$

L'analisi di stabilità dello stato di equilibrio  $s_0 = (\rho_0, 0, c_0)$ , è legata al **criterio di Routh-Hurwitz**: data un'equazione cubica in  $\sigma$ :

$$\sigma^3 + a_1\sigma^2 + a_2\sigma + a_3 = 0,$$

perchè valga la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità (corrispondente al parametro di stabilità reale negativo e/o con parte reale negativa), devono valere le seguenti condizioni sui coefficienti:

$$a_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, 3; \quad a_1 a_2 > a_3.$$

Quindi, anche in questo caso, è il segno del termine noto a determinare il criterio di stabilità o instabilità.

Concentriamoci sul termine noto, che riscriviamo raccogliendo i termini:

$$k^2(-h\rho_0 + c_s^2(D_c(0)k^2 + \Lambda)) = k^2 \left( c_s^2 D_c(0) \left( k^2 - \left( \frac{h\rho_0}{c_s^2 D_c(0)} - \frac{\Lambda}{D_c(0)} \right) \right) \right).$$

Ricaviamo facilmente il seguente criterio di instabilità per l'insorgenza del **collasso chemiotattico**. Condizione sufficiente per l'insorgenza del collasso chemiotattico è:

$$k^2 < \frac{h\rho_0}{D_c(0)c_s^2} - \frac{\Lambda}{D_c(0)}. \quad (3.26)$$

Definiamo *soglia critica di Chavanis e Sire*

$$K_{CS}^2 := \frac{h\rho_0}{D_c(0)c_s^2}$$

e *soglia critica di Chavanis e Sire modificata* dalla presenza del termine di degradazione  $\Lambda$

$$\tilde{K}_{CS}^2 := K_{CS}^2 - \frac{\Lambda}{D_c(0)}.$$

Sono per tanto instabili i modi di Fourier per cui:

$$k^2 < \tilde{K}_{CS}^2. \quad (3.27)$$

Osserviamo che la condizione ottenuta non dipende dal parametro  $\xi$  riguardante l'attrito e utilizzato dagli autori per un confronto con il modello di Keller e Segel 2.16. Inoltre, confrontando il risultato di instabilità per questo modello idrodinamico iperbolico-parabolico con quello parabolico-parabolico di Keller e Segel, si nota che l'unica differenza riguardo la soglia critica  $K_{CS}^2$  rispetto a  $K_{KS}^2$ , è la sostituzione di  $p'(\rho)$  alla mobilità diffusiva cellulare  $D_\rho(0)$  (e manca il fattore costante  $\chi_0$ ). In ogni caso la stabilità è assicurata  $\forall k^2 : k^2 \geq \tilde{K}_{CS}^2$ , mentre nel caso di Keller e Segel si ha stabilità solo per  $k^2 > \tilde{K}_{KS}^2$ .

Nel caso in cui  $k^2 = \tilde{K}_{CS}^2$ , come equazione di dispersione otteniamo una cubica senza termine noto, che avrà una soluzione doppia in  $\sigma = 0$  e un'altra soluzione reale e negativa, che assicura la stabilità anche in questo caso.

*Osservazione 3.4.* Vale la pena di osservare che se  $\frac{\Lambda}{D_c(0)} > K_{CS}^2$ , cioè  $\lambda p'(\rho_0) > h\rho$ , non avremo mai collasso chemiotattico.

*Osservazione 3.5.* Notiamo che avremmo potuto considerare direttamente il sistema di Cramer in  $\mathbb{R}^5$  3.23, senza ridurlo in  $\mathbb{R}^3$ . L'equazione di dispersione, in questo caso, sarebbe stata:

$$(\sigma + \xi)^2 (\sigma^3 + \sigma^2(\xi + D_c(0)k^2 + \Lambda) + \sigma(\xi(D_c(0)k^2 + \Lambda) + c_s^2 k^2) - h\rho_0 k^2 + c_s^2 k^2 (D_c(0)k^2 + \Lambda)) = 0.$$

### 3.2.3 Modello di Chavanis e Sire Vs Instabilità di tipo Jeans

Analizziamo ora le analogie che sussistono tra il modello di Chavanis e Sire per i moti guidati chimicamente in ambito biomedico e il modello di Eulero-Poisson per i moti

guidati gravitazionalmente in astrofisica, seguendo [6]. L'analogia tra questi due sistemi di natura molto differente (stelle e batteri) è davvero interessante e merita di essere sviluppata ed enfatizzata.

Mettiamo in evidenza come il modello idrodinamico di Chavanis e Sire 3.13 sia simile al modello per le particelle auto-gravitanti di Langevin descritto dal sistema di Eulero-Poisson smorzato:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{v}_t + (\nabla \vec{v}) \vec{v} = -\frac{p'(\rho)}{\rho} - \nabla \phi - \xi \vec{v} \\ \Delta \phi = 4\pi G \rho. \end{cases} \quad (3.28)$$

Per  $\xi = 0$  otteniamo il sistema barotropico di Eulero-Poisson 3.9.

Studiamo il caso in cui  $\xi \rightarrow \infty$ .

Consideriamo la seconda equazione del sistema 3.28 e moltiplichiamola per  $\rho/\xi$ , otteniamo:

$$\frac{\rho}{\xi} (\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}) = -\rho \vec{v} + \frac{1}{\xi} (-\nabla p - \rho \nabla \phi). \quad (3.29)$$

Siccome  $\xi \rightarrow \infty$ , ignoriamo il termine a sinistra dell'equazione (3.29) (termine di accelerazione), che va a zero. La prima equazione del sistema 3.28 si può riscrivere  $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -\rho_t$ , da cui ricaviamo il termine  $\nabla \cdot (\rho \vec{v})$  e lo sostituiamo in (3.29) (applicando la divergenza a tutti i termini). Otteniamo:

$$\rho_t - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\xi} (\nabla p + \rho \nabla \phi) \right) = 0, \quad (3.30)$$

che, insieme alla terza equazione del sistema 3.28 invariata, costituisce il **modello generalizzato di Smoluchowski-Poisson**:

$$\begin{cases} \rho_t - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\xi} (\nabla p + \rho \nabla \phi) \right) = 0 \\ \Delta \phi = 4\pi G \rho. \end{cases} \quad (3.31)$$

In questa analogia tra il modello di Chavanis e Sire e il modello smorzato di Eulero-Poisson, notiamo che la concentrazione  $-c(\vec{x}, t)$  della sostanza chimica gioca il ruolo del potenziale gravitazionale  $\phi(\vec{x}, t)$ .

In biologia, l'interazione è mediata da una sostanza materiale (la sostanza chimica secreta) mentre l'interpretazione fisica del potenziale gravitazionale in astrofisica è più

astratta. Chavanis e Sire hanno introdotto un modello idrodinamico che coinvolge un'equazione di stato barotropica, un potenziale di interazione a lungo raggio e una forza di attrito, a livello generale. Si è notato che a partire da questo modello, si possono definire modelli generalizzati riguardanti la chemiotassi e le particelle browniane auto-gravitanti. La principale differenza tra il modello chemiotattico 3.13 e il modello gravitazionale 3.28 riguarda la terza equazione dei due sistemi. In astrofisica, il potenziale gravitazionale è determinato istantaneamente dalla densità delle particelle  $\rho$  attraverso l'equazione di Poisson (terza equazione del sistema 3.28). In biologia, l'equazione che determina l'evoluzione della sostanza chimica è più complessa e coinvolge termini di memoria. La sostanza chimica diffonde con un coefficiente di diffusione  $D_c(\rho, c)$ , è prodotta dagli organismi ad una velocità  $h(\rho, c)$  ed è degradata a una velocità  $\Lambda(\rho, c)$ . A causa del termine  $c_t$ , la concentrazione della sostanza chimica al tempo  $t$  dipende dalla concentrazione degli organismi in tempi precedenti.

Seguendo le osservazioni fatte da Chavanis e Sire (vedi [6]), possiamo trascurare il termine  $c_t$ . Ciò è valido nel caso in cui la costante diffusiva della sostanza chimica è grande, ossia  $D_c \rightarrow \infty$ . Sempre seguendo l'articolo di Chavanis e Sire [6], possiamo prendere i tassi di produzione chimica e degradazione chimica come costanti e non dipendenti dalla concentrazione della sostanza chimica  $c$ .

In primis consideriamo il modello senza degradazione chimica, quindi  $\Lambda = 0$ . Quindi, assumendo  $h = \lambda D_c$ , con  $\lambda = O(1)$  e ponendoci nel caso in cui  $D_c \rightarrow \infty$ , la terza equazione del sistema 3.13 diventa:

$$\Delta c = -\lambda(p - \bar{p}), \quad (3.32)$$

dove  $\bar{p} = \frac{1}{V} \int \rho dx$  è il valore medio della densità, che è una quantità conservata. In questo caso, la concentrazione è data dall'equazione di Poisson. Questo modello prende il nome di **modello newtoniano**. Ora consideriamo il caso in cui abbiamo velocità di degradazione finita. Supponendo che  $h = \lambda D_c$  e  $\Lambda = \Lambda_0^2 D_c$ , con  $\lambda = O(1)$  e  $\Lambda_0 = O(1)$  e ponendoci nel caso in cui  $D_c \rightarrow \infty$ , otteniamo:

$$\Delta c - \Lambda_0^2 c = -\lambda p. \quad (3.33)$$

Se prendiamo  $\Lambda_0 = 0$ , otteniamo un'equazione di Poisson simile alla terza equazione del sistema di Eulero-Poisson 3.9 o del sistema di Eulero-Poisson smorzato 3.28, dove

$-c(x, t)$  svolge il ruolo di  $\phi(x, t)$  e  $\lambda$  svolge il ruolo della costante di gravitazionale  $4\pi G$ . Tuttavia, l'equazione (3.33) è stata derivata per  $\Lambda_0 \neq 0$ . Ciò implica che l'interazione è schermata su una distanza tipica  $\Lambda_0^{-1}$ . Faremo riferimento a questo modello come **modello di Yunkawa**, dalla schermatura Yunkawa in fisica nucleare.

Osserviamo che l'analisi della stabilità lineare del modello di Chavanis e Sire 3.13 (vedi sezione 3.2.2) risulta molto simile all'analisi dell'instabilità classica di Jeans per il modello barotropico di Eulero-Poisson 3.9 (vedi [13]). Quindi il collasso chemiotattico di una popolazione biologica è simile al collasso gravitazionale in astrofisica (instabilità di Jeans).

D'altro canto ci sono due differenze fondamentali rispetto all'analisi classica di Jeans:

1. la presenza della forza di attrito  $-\xi\vec{v}$  nella seconda equazione del modello di Chavanis e Sire. Come abbiamo osservato nella sezione riguardante l'analisi della stabilità lineare del modello (vedi sezione 3.2.2), la forza di attrito non modifica l'insorgenza dell'instabilità, ma influenza l'evoluzione della perturbazione.
2. la natura differente della terza equazione dei due sistemi.

*Osservazione 3.6.* Notiamo che, volendo applicare il metodo delle Onde Dispersive e cercando quindi una soluzione stazionaria e omogenea, una distribuzione infinita e omogenea di stelle con  $\rho_0 = \text{cost}$  e  $\vec{v}_0 = \vec{0}$  non è uno stato stazionario del sistema barotropico e gravitazionale di Eulero-Poisson 3.9, in quanto non è possibile soddisfare simultaneamente la condizione idrostatica di equilibrio:

$$\nabla p(\rho_0) + \rho_0 \nabla \phi_0 = 0 \Rightarrow \nabla \phi_0 = 0$$

e l'equazione di Poisson:

$$\Delta \phi_0 = 4\pi G \rho_0 \neq 0.$$

Questa incongruenza, che porta ad una inconsistenza nell'analisi matematica quando si studiano le proprietà di stabilità e instabilità di una tale distribuzione, prende il nome di **inganno di Jeans**.

Una distribuzione infinita e omogenea di cellule, invece, è uno stato stazionario per il sistema idrodinamico di Chavanis e Sire 3.13, corrispondente alla condizione  $\Lambda c = h\rho$  (vedi sezione relativa 3.2.2). Per il "modello Newtoniano" questa condizione diventa

$\rho = \bar{\rho}$  e per il "modello di Yukawa" diventa  $\Lambda_0^2 c = \lambda \rho$ .

L'inganno di Jeans per il modello di Eulero-Poisson potrebbe essere superato se nell'equazione di Poisson si aggiungesse un termine di degradazione del tipo  $-\Lambda\phi$ , dove  $\Lambda$  potrebbe assumere il significato di *costante cosmologica*.

### Instabilità classica di Jeans

Vediamo in dettaglio l'analisi della stabilità lineare del modello di Eulero-Poisson, per poi trarre le conclusioni riguardo le analogie con il modello idrodinamico di Chavanis e Sire.

Consideriamo un gas omogeneo, infinito spazialmente e in quiete, descritto dal modello standard di Eulero-Poisson 3.9; il nostro scopo è lo studio dettagliato della propagazione di una piccola perturbazione istantanea di uno stato d'equilibrio costante. Lo stato di equilibrio sia dato da

$$s_0 = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \vec{v}_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix}$$

tale che  $\rho_0 > 0$ ,  $\vec{v} = \vec{0}$  e  $\nabla\phi_0 = 0$ .

Per sopperire all'inganno di Jeans, assumiamo che l'equazione di Poisson descriva solo la relazione tra le perturbazioni della densità e del potenziale di autogravità (vedi [13]). Consideriamo, come prima, una perturbazione di questo stato di equilibrio del tipo "onda dispersiva"  $\delta s(\vec{x}, t) = s_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$  con  $s_1 \neq 0$ , tale che:

$$\delta s = \begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta\vec{v} \\ \delta\phi \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

e procediamo verso la linearizzazione del modello attorno il suo stato di equilibrio  $s_0$ , perturbando  $s_0$  nel seguente modo:

$$s = s_0 + \delta s(\vec{x}, t).$$

Procedendo in maniera analoga ai modelli precedenti, otteniamo il sistema linearizzato per le perturbazioni:

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \rho_0 \nabla \cdot \delta\vec{v} = 0 \\ \delta\vec{v}_t = -\frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \nabla \delta\rho - \nabla \delta\phi \\ \Delta \delta\phi = 4\pi G \delta\rho. \end{cases} \quad (3.34)$$

Ora sostituiamo le perturbazioni con la loro definizione  $\delta s(\vec{x}, t) = s_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$  e semplifichiamo il sistema ottenuto eliminando il fattore comune  $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$ . Poi utilizziamo, come prima, le identità elencate nella sezione 1.3 e raccogliamo i termini. Otteniamo quindi il sistema algebrico:

$$\begin{cases} -i\omega\rho_1 + \rho_0 \vec{v}_1 \cdot i\vec{k} = 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_1 i\vec{k} - i\omega\vec{v}_1 + \phi_1 i\vec{k} = 0 \\ 4\pi G i\rho_1 + k^2 i\phi_1 = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Il sistema 3.35 è un sistema algebrico lineare e omogeneo nella incognita  $u_1 = (\rho_1, \vec{v}_1, \phi_1)$  in  $\mathbb{R}^5$ ; per il teorema di Cramer, condizione necessaria e sufficiente affinché abbia soluzione diversa da zero è che la matrice associata sia singolare.

Come in precedenza consideriamo il versore normale all'onda dispersiva  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$  e indichiamo con  $t_1$  e  $t_2$  i due versori, tra loro ortogonali, nel piano tangente; Abbiamo la decomposizione unica per l'ampiezza velocità:

$$\vec{v}_1 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_1)\vec{t}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_2)\vec{t}_2.$$

Ora, proiettando l'equazione vettoriale del sistema 3.35 lungo  $\vec{n}$ ,  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$ , otteniamo un sistema il cui determinante della matrice associata deve essere zero, cioè:

$$D = \begin{vmatrix} -\omega & \rho_0 k & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} k & -\omega & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 4\pi G & 0 & 0 & 0 & k^2 \end{vmatrix} = 0$$

Otteniamo così la seguente equazione di dispersione:

$$\omega^2(\omega^2 + 4\pi G \rho_0 - p'(\rho_0)k^2) = 0; \quad (3.36)$$

quindi abbiamo due casi:

1.  $\omega = 0$  (soluzione doppia). Dalla prima equazione del sistema 3.35 ottengo che  $\vec{v}_1 \perp \vec{k}$ . Questa soluzione corrisponde ad un modo stazionario, infatti la velocità di fase  $v_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = 0$ .
2.  $\omega^2 = -4\pi G\rho_0 + p'(\rho_0)k^2$ . Ricordando che  $c_s(\rho_0) = p'(\rho_0)$ , ottengo la seguente equazione di dispersione per  $\omega$ :

$$\omega^2 = -4\pi G\rho_0 + c_s^2(\rho_0)k^2$$

Ora, definendo il cosiddetto **numero d'onda critico di Jeans**:

$$K_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2(\rho_0)},$$

ottengo la seguente equazione di dispersione:

$$\omega^2 = c_s^2(\rho_0)(k^2 - K_J^2)$$

Osserviamo allora che la stabilità dell'equilibrio dipenderà solo dal modulo del vettore d'onda  $\vec{k}$ , ossia  $k$ . Infatti:

- per tutti i numeri d'onda  $k < K_J$ , allora  $\omega^2 < 0$ , quindi  $\omega \in \mathbb{C}$ : in particolare  $\omega$  è un immaginario puro,  $\omega = i\gamma$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  quindi  $\sigma = -i\omega \in \mathbb{R}^+$  se  $\gamma > 0$  e  $\sigma \in \mathbb{R}^-$ , se  $\gamma < 0$ . La dipendenza dal tempo della perturbazione di densità è proporzionale a  $e^{\gamma t}$ : vi è una crescita/decrescita esponenziale dell'ampiezza della perturbazione che conduce da una parte all'instabilità del mezzo, dall'altra alla scomparsa della perturbazione; questo comunque è sufficiente per assicurare l'instabilità.
- per tutti i numeri d'onda  $k > K_J$ , allora  $\omega^2 > 0$ , quindi  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $\sigma = -i\omega \in \mathbb{C}$ : Il comportamento nel tempo della perturbazione di densità è oscillatorio. Si formano delle onde, dette *onde gravitazionali di Jeans*, che si propagano lungo la direzione individuata dal vettore d'onda con velocità di fase

$$v_J^\pm = v_f^\pm = \pm c_s(\rho_0) \sqrt{1 - \left(\frac{K_J}{k}\right)^2},$$

detta *velocità di Jeans*.

Osserviamo che

$$v_J^\pm \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow K_J.$$

In questo caso, siamo in presenza di onde stazionarie (materiali). D'altra parte si ha:

$$v_J^\pm \rightarrow \pm c_s(\rho_0) \quad \text{per } k \rightarrow \infty;$$

quindi le fluttuazioni si comportano sempre più come pure onde sonore di piccola ampiezza che si propagano nel mezzo.

In conclusione la condizione, detta *criterio di Jeans per l'insorgenza del collasso gravitazionale*, è:

$$k^2 < K_J^2. \quad (3.37)$$

Tornando al confronto tra i due modelli, osserviamo che la *soglia critica di Chavanis e Sire* modificata dalla presenza del termine di degradazione  $\Lambda$ , assume il ruolo del *numero d'onda di Jeans* nell'analisi delle instabilità gravitazionali, in quanto avevamo (vedi (3.27)):

$$k^2 < \tilde{K}_{CS}^2$$

Mettiamo a confronto  $K_J^2$  e  $\tilde{K}_{CS}^2$ , ricordandoci che  $h$  gioca il ruolo di  $4\pi G$  e che  $D_c(0) = 1$ . Notiamo che :

$$K_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2(\rho_0)} > \tilde{K}_{CS}^2 = \frac{h \rho_0}{c_s^2(\rho_0)} - \Lambda.$$

Osserviamo che potevamo aspettarci che la soglia critica di Chavanis e Sire fosse più piccola del numero d'onda di Jeans, in quanto sappiamo che gli effetti della forza di attrito (effetti dissipativi) aiutano la stabilità. Quindi possiamo concludere dicendo che la discussione analitica delle condizioni sufficienti per l'insorgenza del cosiddetto collasso chemiotattico presenta analogie evidenti, anche di terminologie, con quella legata al collasso gravitazionale.

## Capitolo 4

# Il comportamento viscoso del sangue Vs il comportamento viscoelastico

In questo ultimo capitolo analizzeremo gli aspetti viscosi e viscoelastici che interessano i processi chemiotattici. Per le nozioni biomediche e teoriche facciamo riferimento ad esempio a [14], [15], [16], [17], [20], [21] e [22].

Si definisce *fluido non newtoniano* (o anche fluido amorfo) un fluido la cui viscosità varia a seconda dello sforzo di taglio che viene applicato. Di conseguenza, i fluidi non newtoniani non hanno un valore definito di viscosità. Molte soluzioni polimeriche sono esempi di fluidi non newtoniani.

I **fluidi viscoelastici** sono fluidi non-newtoniani formati da un componente viscoso e uno elastico. In breve, essi sono una miscela di un solvente e di un polimero. Numerose caratteristiche rendono i fluidi viscoelastici molto interessanti, infatti essi sono presenti in molte applicazioni importanti di varia natura. Le vernici ne sono un buon esempio, infatti gli edifici sono dipinti con una combinazione di un polimero e un solvente. Esistono anche applicazioni più complesse che coinvolgono soluzioni polimeriche e altri processi. Alcuni fluidi viscoelastici possono essere di natura biologica o, addirittura, possono essere utilizzati per qualche applicazione ottica o simili. Inoltre, i fluidi viscoelastici possono essere così diversi tra loro che sono state sviluppate tantissime equazioni costitutive per modellarne il comportamento. Allo stesso tempo, alcune applicazioni che coinvolgono fluidi viscoelastici possono richiedere meccanismi fisici per un corretto funzionamento,

come la convezione naturale. Questo è il caso della replicazione dell'acido desossiribonucleico (DNA) e della fabbricazione di superfici ondulate, per esempio. La viscoelasticità è quindi allo stesso livello di importanza della convezione naturale.

Le sospensioni polimeriche mostrano un comportamento viscoelastico ma la loro relazione stress-deformazione non è facilmente rappresentabile da un unico modello. In reologia questi modelli sono chiamati "equazioni costitutive".

Il **sangue** è un fluido non newtoniano costituito dagli elementi figurati (globuli rossi, bianchi e piastrine) e dal plasma; gli elementi del sangue con maggiore influenza sulla reologia e la fluidodinamica sono i globuli rossi, a causa della loro elevata concentrazione. A causa dello spazio limitato tra i globuli rossi, l'interazione tra cellula e cellula ha un ruolo chiave nella fluizione del sangue. Questa interazione e la tendenza per le cellule ad aggregarsi costituiscono un importante contributo al comportamento viscoelastico del sangue. La deformazione dei globuli rossi e l'aggregazione di essi sono anche associate a cambiamenti, indotti dal flusso del sangue, nella disposizione e nell'orientamento. Altri fattori che contribuiscono alle proprietà viscoelastiche del sangue sono la viscosità plasmatica, la composizione del plasma, la temperatura e la velocità di taglio. Insieme, questi fattori rendono il sangue umano viscoelastico e dunque non newtoniano e tissotropico (fluido pseudo-plastico che varia la viscosità quando viene sottoposto a sollecitazioni di taglio oppure nel caso di lunghi periodi di quiete o quando è sottoposto a movimenti peristaltici).

Osserviamo che il sangue è una miscela di due fluidi: una componente solvente (viscosa) e una componente capillare (elastica), ma noi lo studiamo dal punto di vista matematico considerandolo, per semplicità, come un unico fluido di natura viscoelastica. Questo approccio ad un fluido è molto trattato in letteratura.

Da un punto di vista medico diventa evidente l'importanza di studiare le proprietà viscoelastiche del sangue. Con lo sviluppo di dispositivi protesici cardiovascolari come valvole cardiache e pompe del sangue, è necessaria la comprensione del flusso sanguigno pulsante in geometrie complesse. Sono state presentate forti correlazioni tra viscoelasticità sanguigna e flusso sanguigno regionale e globale durante il bypass cardiopolmonare. Questo ha anche aperto la strada allo sviluppo di un fluido analogo del sangue per studiare e testare dispositivi protesici. Il classico analogo della glicerina e dell'acqua fornisce una

buona rappresentazione della viscosità e degli effetti inerziali, ma manca la caratteristica elastica del sangue rosso. Uno di questi "analoghi del sangue" è una soluzione acquosa di gomma "xantana" e glicerina sviluppata per abbinare i componenti sia viscosi che elastici della complessa viscosità del sangue (si veda per esempio [16]).

## 4.1 Gli effetti viscosi/dissipativi del tipo Navier-Stokes sul modello di Chavanis e Sire

Prima di tutto introduciamo il classico modello di Navier-Stokes, noto in letteratura come il modello Newtoniano.

### 4.1.1 Il modello di Navier-Stokes

Il classico modello linearmente viscoso e compressibile di Navier-Stokes è descritto dal seguente sistema di equazioni (vedi [10]):

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho(\vec{v}_t + (\nabla \vec{v})\vec{v}) = -p'(\rho)\nabla \rho + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \mu\Delta \vec{v}. \end{cases} \quad (4.1)$$

dove  $\rho(\vec{x}, t)$  è la densità di massa,  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  la velocità,  $\lambda$  è la *viscosità di volume* e  $\mu$  la *viscosità di taglio*.

In letteratura si definisce *coefficiente di viscosità cinematica* la quantità non negativa:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (4.2)$$

### 4.1.2 Il modello di Chavanis e Sire con effetti viscosi del tipo Navier-Stokes

Il modello generalizzato di Chavanis e Sire con l'aggiunta di ulteriori effetti dissipativi come sono gli effetti viscosi del tipo Navier-Stokes è descritto dal seguente sistema di

equazioni:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho \vec{v}_t + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -p'(\rho) \nabla \rho + \nabla \cdot T^V - \rho \xi \vec{v} + \rho \nabla c \\ c_t = \nabla \cdot (D_c \nabla c) - \Lambda(\rho, c)c + h(\rho, c)\rho, \end{cases} \quad (4.3)$$

ricordando le definizioni del tensore degli sforzi di Cauchy  $T = T(\vec{x}, t)$  e del tensore viscoso  $T^V = T^V(\vec{x}, t)$  (vedi sezione 1.4, (1.113)). Abbiamo:

$$\nabla \cdot T^V = \mu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\mu\right) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}).$$

Quindi il sistema 4.3, tenendo conto degli aspetti costitutivi, diventa:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho \vec{v}_t + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -p'(\rho) \nabla \rho - \rho \xi \vec{v} + \rho \nabla c + \mu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\mu\right) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) \\ c_t = \nabla \cdot (D_c \nabla c) - \Lambda(\rho, c)c + h(\rho, c)\rho. \end{cases} \quad (4.4)$$

*Osservazione 4.1.* Con questo modello idrodinamico parabolico-parabolico, si perde l'obiettivo di Chavanis e Sire di lavorare con modelli idrodinamici iperbolici(-parabolici) (vedi terzo capitolo, sezione 3.2), per giustificare la formazione di patterns complessi come filamenti. Per ottenere una generalizzazione del modello di Chavanis e Sire 3.13 sempre di tipo iperbolico, ci concentreremo più avanti sul modello viscoelastico di Maxwell.

### 4.1.3 Gli effetti della viscosità sull'analisi della stabilità lineare del modello di Chavanis e Sire

Analizziamo ora nel dettaglio come la presenza della viscosità modifichi o meno l'analisi della stabilità lineare del modello idrodinamico di Chavanis e Sire.

Applichiamo ora il metodo delle Onde Dispersive al modello idrodinamico di Chavanis e Sire modificato dalla presenza di effetti viscosi e dissipativi del tipo Navier-Stokes 4.4 al fine di studiarne le proprietà di stabilità o instabilità (vedi sezione 1.3). Come nel caso del modello originale, prendiamo  $\Lambda$  e  $h$  costanti, per semplificare i conti.

Sia  $s_0 = (\rho_0, \vec{v}_0, c_0)$  la soluzione di base stazionaria e omogenea.

Sostituiamola nel sistema 4.4:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -\xi \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{0} \\ 0 = -\Lambda c_0 + h\rho_0 \Rightarrow c_0 = \frac{h}{\Lambda} \rho_0 \end{cases} \quad (4.5)$$

*Osservazione 4.2.* Come nel modello originale, la presenza dell'attrito determina uno stato stazionario e omogeneo di quiete ( $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ).

Consideriamo, come sempre, una perturbazione di questo stato di equilibrio del tipo "onda dispersiva"  $\delta s(\vec{x}, t) = s_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$  con  $s_1 \neq 0$ , tale che:

$$\delta \vec{s} = \begin{bmatrix} \delta \rho \\ \delta \vec{v} \\ \delta c \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

Come prima, procediamo verso la linearizzazione del modello attorno al suo stato di equilibrio  $s_0$ , perturbando  $s_0$  nel seguente modo:

$$s = s_0 + \delta s(\vec{x}, t).$$

Quindi avremo:

$$\begin{cases} \rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \delta \rho(\vec{x}, t) \\ \vec{v}(\vec{x}, t) = \delta \vec{v}(\vec{x}, t) \\ c(\vec{x}, t) = c_0 + \delta c(\vec{x}, t) \end{cases}$$

Sostituendo nel sistema 4.4 la soluzione perturbata, abbiamo:

$$\begin{cases} \delta \rho_t + \nabla \cdot ((\rho_0 + \delta \rho)(\delta \vec{v})) = 0 \\ \delta \vec{v}_t + (\delta \vec{v} \cdot \nabla) \delta \vec{v} = -\frac{p'(\rho_0 + \delta \rho)}{\rho_0 + \delta \rho} \nabla \delta \rho + \nabla \delta c - \xi \delta \vec{v} + \frac{\mu}{\rho_0 + \delta \rho} \Delta \delta \vec{v} + \frac{(\zeta + \frac{1}{3}\mu)}{\rho_0 + \delta \rho} \nabla(\nabla \cdot \delta \vec{v}) \\ \delta c_t = D_c(\rho_0 + \delta \rho, c_0 + \delta c) \Delta \delta c - \Lambda(c_0 + \delta c) + h(\rho_0 + \delta \rho) \end{cases} \quad (4.6)$$

Ora, ricordando che  $-\Lambda c_0 + h\rho_0 = 0$ , sviluppando in serie di Taylor il termine  $p'(\rho_0 + \delta \rho)$  e  $D_c(\rho_0 + \delta \rho, c_0 + \delta c)$  e trascurando i termini non lineari in  $\delta \rho$ ,  $\delta \vec{v}$  e  $\delta c$ , otteniamo il

sistema linearizzato per le perturbazioni:

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \rho_0 \nabla \cdot \delta\vec{v} = 0 \\ \vec{v}_t = -\frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \nabla \delta\rho + \nabla \delta c - \xi \delta\vec{v} + \nu \Delta \delta\vec{v} + \left(\frac{\zeta}{\rho_0} + \frac{\nu}{3}\right) \nabla (\nabla \cdot \delta\vec{v}) \\ \delta c_t = D_c(0) \Delta \delta c - \Lambda \delta c + h \delta\rho, \end{cases} \quad (4.7)$$

ricordando che  $D_c(0) = D_c(\rho_0, c_0)$  e che  $\nu = \mu/\rho_0$ .

Possiamo ora lavorare con perturbazioni del tipo "onde dispersive"  $\delta s(\vec{x}, t) = s_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ . Utilizziamo le identità (1.80), (1.82), (1.83), (1.84) e (1.86) elencate nella sezione 1.3 e semplifichiamo il sistema ottenuto eliminando il fattore comune  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ .

Si ottiene facilmente il sistema algebrico in  $\mathbb{R}^5$ :

$$\begin{cases} -i\omega\rho_1 + \rho_0 \vec{v}_1 \cdot i\vec{k} = 0 \\ -i\omega\vec{v}_1 = -\frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_1 i\vec{k} + c_1 i\vec{k} - \xi \vec{v}_1 - \nu k^2 \vec{v}_1 - \left(\frac{\zeta}{\rho_0} + \frac{\nu}{3}\right) (\vec{v}_1 \cdot \vec{k}) \vec{k} \\ -i\omega c_1 = -D_c(\rho_0, c_0) k^2 c_1 - \Lambda c_1 + h\rho_1. \end{cases} \quad (4.8)$$

Ora riscriviamo il sistema 4.8 raccogliendo i termini:

$$\begin{cases} -i\omega\rho_1 + \rho_0 \vec{v}_1 \cdot i\vec{k} = 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_1 i\vec{k} + (-i\omega + \xi + \nu k^2) \vec{v}_1 + \left(\frac{\zeta}{\rho_0} + \frac{\nu}{3}\right) (\vec{v}_1 \cdot \vec{k}) \vec{k} - c_1 i\vec{k} = 0 \\ -h\rho_1 + (-i\omega + D_c(\rho_0, c_0) k^2 + \Lambda) c_1 = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Introduciamo la solita terna ortonormale di riferimento  $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$  dove  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$  con  $k = |\vec{k}|$  è il versore normale al fronte d'onda e  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$  sono due versori trasversali tali che:

$$\vec{t}_i \cdot \vec{t}_j = \delta_{ij} \quad \vec{t}_i \cdot \vec{n} = 0 \quad i, j = 1, 2.$$

Allora abbiamo la decomposizione (unica) per l'ampiezza della velocità:

$$\vec{v}_1 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_1) \vec{t}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_2) \vec{t}_2.$$

Ora, proiettando l'equazione vettoriale del sistema 4.9 lungo  $\vec{n}$ ,  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$  e ricordando che  $\sigma = -i\omega$ , otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sigma\rho_1 + \rho_0\vec{v}_1 \cdot i\vec{k} = 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}i\rho_1k + (\sigma + \xi + (\frac{\zeta}{\rho_0} + \frac{4}{3}\nu)k^2)\vec{v}_1 \cdot \vec{n} - ikc_1 = 0 \\ (\sigma + \xi + \nu k^2)\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_1 = 0 \\ (\sigma + \xi + \nu k^2)\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_2 = 0 \\ -h\rho_1 + (\sigma + D_c(\rho_0, c_0)k^2 + \Lambda)c_1 = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Per semplicità supponiamo che  $\sigma + \xi + \nu k^2 \neq 0$ , in maniera tale che  $\vec{v}_1 \cdot \vec{t}_i = 0 \forall i = 1, 2$ . Ci riduciamo quindi ad un sistema di Cramer in  $\mathbb{R}^3$  nelle ampiezze essenziali  $\delta\rho$ ,  $\delta\vec{v} \cdot \vec{n}$  e  $\delta c$ . Per il Teorema di Cramer, la condizione necessaria e sufficiente, affinché  $(\delta\rho, \delta\vec{v} \cdot \vec{n}, \delta c) \neq \vec{0}$ , è che il determinante  $D$  della matrice associata al sistema 4.10 ridotto sia uguale a zero, cioè:

$$D = \begin{vmatrix} \sigma & \rho_0 ik & 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} ik & \sigma + \xi + k^2(\frac{\zeta}{\rho_0} + \frac{4}{3}\nu) & -ik \\ -h & 0 & \sigma + D_c(0)k^2 + \Lambda \end{vmatrix} = 0$$

In questo caso, ricordando che  $c_s^2 = p'(\rho_0)$ , dove  $c_s$  è la velocità del suono nel fluido considerato calcolata in  $\rho_0$ , otteniamo la seguente equazione di dispersione:

$$\sigma(\sigma + \xi + k^2(\frac{\zeta}{\rho_0} + \frac{4}{3}\nu))(\sigma + D_c(0)k^2 + \Lambda) - h\rho_0k^2 + c_s^2k^2(\sigma + D_c(0)k^2 + \Lambda) = 0, \quad (4.11)$$

che possiamo riscrivere nella forma:

$$\begin{aligned} \sigma^3 + \sigma^2(\xi + k^2(\frac{\zeta}{\rho_0} + \frac{4}{3}\nu) + D_c(0)k^2 + \Lambda) + \sigma((\xi + k^2(\frac{\zeta}{\rho_0} + \frac{4}{3}\nu))(D_c(0)k^2 + \Lambda) + c_s^2k^2) + \\ -h\rho_0k^2 + c_s^2k^2(D_c(0)k^2 + \Lambda) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Anche in questo caso, l'analisi di stabilità dello stato di equilibrio  $s_0 = (\rho_0, \vec{v}_0 = \vec{0}, c_0)$ , è legata al **criterio di Routh-Hurwitz** e quindi, ancora, è il segno del termine noto a determinare il criterio di stabilità o instabilità.

Osserviamo che il termine noto della equazione di dispersione (4.12) è lo stesso dell'equazione di dispersione (3.25) trovata per il modello originario di Chavanis e Sire, pertanto

il criterio per l'insorgenza dell'instabilità chemiotattica è il medesimo (3.27):

Sono instabili i modi longitudinali di Fourier tali per cui:

$$k^2 < \tilde{K}_{CS}^2, \quad (4.13)$$

con  $\tilde{K}_{CS}^2 = \frac{h\rho_0}{D_c(0)c_s^2} - \frac{\Lambda}{D_c(0)}$ .

*Osservazione 4.3.* In conclusione, gli effetti dissipativi-viscosi non alterano il precedente criterio di Chavanis e Sire. L'unico effetto che hanno è quello di smorzare, nel caso stabile ( $k^2 \geq \tilde{K}_{CS}^2$ ), il comportamento oscillatorio dei modi di Fourier, che quindi diventano modi oscillatori smorzati, o, più precisamente, onde dispersive longitudinali di tipo chemio-acustico, smorzate dagli effetti viscosi.

*Osservazione 4.4.* Si hanno anche modi doppi trasversali asintoticamente stabili, non influenzati dagli effetti chemiotattici, corrispondenti al trinomio:

$$(\sigma + \zeta + \nu k^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = -(\zeta + \nu k^2).$$

In conclusione gli effetti dissipativi-viscosi aiutano la stabilità.

*Osservazione 4.5.* In parallelo ci si può aspettare che il criterio di Jeans (vedi sezione 3.2.3, criterio (3.37)) studiato non venga alterato dagli effetti viscosi. Si veda per esempio [18].

## 4.2 Il modello viscoelastico di Maxwell

Consideriamo un piccolo volume cubico di sangue su cui agiscono forze mediante pompaggio del cuore e forze di taglio dai bordi. Il cambio di forma del cubo avrà due componenti:

1. Deformazione elastica, che è recuperabile e viene immagazzinata nella struttura del sangue.
2. Slittamento, associato ad un input continuo di energia viscosa.

Quando la forza si esaurisce, il cubo riprenderà parzialmente la sua forma. La deformazione elastica allora è invertita, ma lo slittamento no. Questo spiega perchè la componente

elastica si nota solo in caso di flusso instabile. In flusso costante, lo slittamento continuerà ad aumentare e le misurazioni della forza che non varia nel tempo faranno sì che i contributi dell'elasticità vengano trascurati.

Consideriamo il modello viscoelastico di Maxwell descritto dal seguente sistema di PDEs del primo ordine quasi lineare:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\rho + \rho\nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho \frac{d}{dt}\vec{v} = -p'(\rho)\nabla\rho - \rho\xi\vec{v} + \nabla \cdot T^{(V)} \\ \tau_v(\frac{d}{dt}T^{(V)} - WT^{(V)} + T^{(V)}W) + T^{(V)} = 2\mu D + (\zeta - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \vec{v}\mathbb{I}; \end{cases} \quad (4.14)$$

dove  $\tau_v > 0$  è il tempo di rilassamento viscoelastico.  $T^{(V)}$ ,  $D$ ,  $W$ ,  $\mu$  e  $\zeta$  sono le quantità definite nella sezione relativa alle leggi di bilancio (vedi 1.4).

Osserviamo che, per  $\tau_v \rightarrow 0^+$ , otteniamo esattamente il modello di Navier-Stokes (in presenza o meno di forza di attrito).

Definiamo la *derivata materiale oggettiva di Jaumann*, detta anche "corotazionale":

$$\frac{d}{dt}|_J T^{(V)} := \frac{d}{dt}T^{(V)} - WT^{(V)} + T^{(V)}W, \quad (4.15)$$

che è invariante per cambio di base ortonormale.

In questo modo l'equazione costitutiva di tipo "rate" in campo, dovuta alla reologia del tipo Maxwell, è invariante per cambio di sistema di riferimento inerziale, come le leggi locali di bilancio (vedi sezione 1.4).

Definiamo le tre tipologie di velocità che entrano nella discussione, dovute all'interazione tra effetti sonori e viscoelastici:

- la velocità del suono nel fluido (già utilizzata):  $c_s^2(\rho) = p'(\rho) = \frac{\gamma p}{\rho}$ , considerando l'equazione di stato per un gas politropico:  $p = A\rho^\gamma$ , con  $\gamma > 1$  (vedi sezione 1.2.1, equazione (1.60));
- la *velocità viscoelastica longitudinale*:  $c_{VEl}^2 = \frac{\zeta}{\rho\tau_v} + \frac{4}{3}\frac{\nu}{\tau_v}$ ;
- la *velocità viscoelastica trasversale*:  $c_{VEt}^2 = \frac{\nu}{\tau_v}$ .

### 4.2.1 Il ruolo delle superfici caratteristiche sul test di iperbolicità del modello di Maxwell

Dimostriamo che il modello 4.14 è iperbolico, studiandone le proprietà di propagazione ondosa con il metodo delle superfici caratteristiche (vedi primo capitolo, sezione 1.2).

Per le referenze si veda, ad esempio [19].

Per semplicità trattiamo solo il caso della derivata convettiva ordinaria nell'equazione costitutiva, trascurando quindi i due termini non lineari dovuti alla presenza del tensore spin  $W$ .

Sia  $\Sigma(t)$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$  descritta da:

$$\phi(\vec{x}(t), t) = 0, \quad \text{con} \quad \vec{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \quad \forall P_\Sigma \in \Sigma. \quad (4.16)$$

Si ha sempre:

$$\frac{d}{dt}\phi(\vec{x}(t), t) = 0,$$

da cui:

$$\phi_t + \nabla\phi \cdot \dot{\vec{x}} = 0,$$

o anche:

$$\phi_t + \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \cdot \|\nabla\phi\| \dot{\vec{x}} = 0.$$

Definiamo ora la velocità di avanzamento:

$$\lambda = u_n = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{n} = \frac{-\phi_t}{\|\nabla\phi\|}.$$

E ricordiamo anche la definizione di velocità locale di propagazione vista al capitolo 1 nella sezione 1.2.1:

$$U = \lambda - \vec{v} \cdot \vec{n}.$$

Vale la pena di osservare che la superficie  $\Sigma(t)$  è una superficie materiale o di contatto se e soltanto se  $U = 0$ , cioè  $\lambda = \vec{v} \cdot \vec{n}$ .

Sia  $\Sigma(t)$  una superficie caratteristica del primo ordine per il sistema 4.14, cioè  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $T^{(V)}$  sono grandezze (scalari, vettoriali e tensoriali rispettivamente) continue  $\forall P_\Sigma$ , con derivate prime parziali spaziali e temporali che ammettono discontinuità del tipo "salto"

$\forall P_\Sigma$ , cioè:

$\vec{v}$ ,  $\rho$  e  $T^{(V)}$  sono di classe  $C^1$  su  $\Omega^+ \cup \Sigma$  e su  $\Omega^- \cup \Sigma$ , mentre  $\forall P_\Sigma$  soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} [\vec{v}] &= \vec{0} \quad [\rho] = 0 \quad [T^{(V)}] = 0 \\ [\nabla \vec{v}] \vec{n} &\neq \vec{0} \quad [\nabla \rho] \cdot \vec{n} \neq 0 \quad [\nabla T^{(V)}] \vec{n} \neq 0. \end{aligned}$$

Introduciamo le ampiezze di discontinuità:

$$\begin{aligned} \delta \rho &= [\nabla \rho] \cdot \vec{n}, \\ \delta \vec{v} &= [\nabla \vec{v}] \vec{n}, \\ \delta T^{(V)} &= [\nabla T^{(V)}] \vec{n}. \end{aligned}$$

In base alle identità formali fra i "salti", valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\rho}{dt} \right] &= -U \delta \rho, \quad \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = -U \delta \vec{v}, \quad \left[ \frac{dT^{(V)}}{dt} \right] = -U \delta T^{(V)} \\ [\nabla \rho] &= \delta \rho \vec{n} \\ [\nabla \cdot \vec{v}] &= \delta \vec{v} \cdot \vec{n} \quad [\nabla \vec{v}] = \delta \vec{v} \otimes \vec{n} \quad [\nabla \vec{v}^T] = \vec{n} \otimes \delta \vec{v} \\ [\nabla \cdot T^{(V)}] &= \delta T^{(V)} \vec{n}. \end{aligned}$$

Dal sistema 4.14, otteniamo il seguente sistema "salto"  $\forall P_\Sigma$ :

$$\begin{cases} -U \delta \rho + \rho \delta \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \\ -U \delta \vec{v} = -\frac{p'(\rho)}{\rho} \delta \rho \vec{n} + \frac{\delta T^{(V)}}{\rho} \vec{n} \\ -\tau_v U \delta T^{(V)} = 2\mu \left( \frac{\delta \vec{v} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \delta \vec{v}}{2} \right) + \left( \zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \delta \vec{v} \cdot \vec{n} \mathbb{I}; \end{cases} \quad (4.17)$$

ricordando le ipotesi di continuità per  $\rho$ ,  $\vec{v}$  e  $T^{(V)}$ . Supponiamo  $U \neq 0$ .

Analizziamo le tre equazioni del sistema 4.17 separatamente. Dalla prima equazione otteniamo:

$$\delta \rho = \frac{\rho \delta \vec{v} \cdot \vec{n}}{U}. \quad (4.18)$$

Ora ci concentriamo sulla seconda equazione del sistema 4.17, ossia l'equazione del moto "salto". Definiamo la solita terna ortonormale di riferimento formata dai tre vettori  $\vec{n}$ ,  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$ , tali che:

$$\vec{t}_i \cdot \vec{t}_j = \delta_{ij} \quad \vec{t}_i \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall i = 1, 2.$$

Proiettando l'equazione del moto "salto" lungo i tre versori e utilizzando la relazione (4.18), troviamo le seguenti tre relazioni:

$$\begin{cases} -U\delta\vec{v} \cdot \vec{n} = -p'(\rho)\frac{\delta\vec{v} \cdot \vec{n}}{U} + \frac{\delta T^{(V)}}{\rho}\vec{n} \cdot \vec{n} \\ -U\delta\vec{v} \cdot \vec{t}_1 = \frac{\delta T^{(V)}}{\rho}\vec{n} \cdot \vec{t}_1 \\ -U\delta\vec{v} \cdot \vec{t}_2 = \frac{\delta T^{(V)}}{\rho}\vec{n} \cdot \vec{t}_2. \end{cases} \quad (4.19)$$

Per quanto riguarda la terza equazione del sistema 4.17, ossia l'equazione costitutiva "tensoriale" di tipo "rate", la moltiplichiamo per  $\vec{n}$ , riducendola alla forma vettoriale:

$$-\tau_v U \delta T^{(V)} \vec{n} = 2\mu \left( \frac{\delta\vec{v} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \delta\vec{v}}{2} \right) \vec{n} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\mu \right) (\delta\vec{v} \cdot \vec{n}) \mathbb{I} \vec{n},$$

che si riscrive nel seguente modo, tenendo conto della definizione dell'operazione diade  $((\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{c} := (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a})$ :

$$-\tau_v U \delta T^{(V)} \vec{n} = \mu \delta\vec{v} + \mu (\delta\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\mu \right) (\delta\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n},$$

che, raccogliendo, riscriviamo:

$$-\tau_v U \delta T^{(V)} \vec{n} = \mu \delta\vec{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3}\mu \right) (\delta\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n}.$$

Proiettiamo quest'ultima equazione vettoriale lungo la terna ortornormale e otteniamo:

$$\begin{cases} -\tau_v U \delta T^{(V)} \vec{n} \cdot \vec{n} = \left( \zeta + \frac{4}{3}\mu \right) (\delta\vec{v} \cdot \vec{n}) \\ -\tau_v U \delta T^{(V)} \vec{n} \cdot \vec{t}_1 = \mu \delta\vec{v} \cdot \vec{t}_1 \\ -\tau_v U \delta T^{(V)} \vec{n} \cdot \vec{t}_2 = \mu \delta\vec{v} \cdot \vec{t}_2. \end{cases} \quad (4.20)$$

Per  $U \neq 0$ , le ampiezze essenziali del problema sono le seguenti (onde di accelerazione longitudinali):

$$\delta\vec{v}_n := \delta\vec{v} \cdot \vec{n},$$

$$\delta\vec{v}_1 := \delta\vec{v} \cdot \vec{t}_1,$$

$$\delta\vec{v}_2 := \delta\vec{v} \cdot \vec{t}_2.$$

Infatti dalla prima equazione del sistema 4.19, si ha:

$$(-U^2 + c_s^2(\rho))\delta\vec{v}_n = \frac{1}{\rho} U \delta T^{(V)} \vec{n} \cdot \vec{n},$$

da cui:

$$\delta T^{(V)} \vec{n} \cdot \vec{n} = \frac{\rho}{U} (-U^2 + c_s^2(\rho)) \delta \vec{v}_n.$$

Dalle altre due equazioni del sistema 4.19, invece, si ottiene:

$$\delta T^{(V)} \vec{n} \cdot \vec{t}_i = -\rho U \delta \vec{v}_i, \quad i = 1, 2.$$

Sostituendo queste relazioni nel sistema 4.20, si ha:

$$\begin{cases} -\tau_v \rho (-U^2 + c_s^2(\rho)) \delta \vec{v}_n = (\zeta + \frac{4}{3} \mu) \delta \vec{v}_n \\ \tau_v U^2 \rho \delta \vec{v}_1 = \mu \delta \vec{v}_1 \\ \tau_v U^2 \rho \delta \vec{v}_2 = \mu \delta \vec{v}_2. \end{cases}$$

Ora, dividendo per  $\rho \tau_v$ , otteniamo:

$$\begin{cases} \left( U^2 - c_s^2(\rho) - \frac{1}{\tau_v} \left( \frac{\zeta}{\rho} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \right) \right) \delta \vec{v}_n = 0 \\ \left( U^2 - \frac{\mu}{\tau_v \rho} \right) \delta \vec{v}_1 = 0 \\ \left( U^2 - \frac{\mu}{\tau_v \rho} \right) \delta \vec{v}_2 = 0. \end{cases}$$

Che si può riscrivere nel modo seguente, ricordando la definizione di coefficiente di viscosità cinematica  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  (vedi sezione 4.1.1) e quelle di velocità viscoelastica longitudinale e trasversale:

$$\begin{cases} (U^2 - c_s^2(\rho) - c_{VEl}^2) \delta \vec{v}_n = 0 \\ (U^2 - c_{VEt}^2) \delta \vec{v}_1 = 0 \\ (U^2 - c_{VEt}^2) \delta \vec{v}_2 = 0. \end{cases}$$

Per  $\delta \vec{v}_n \neq 0$ , otteniamo l'equazione caratteristica:

$$0 < U^2 = c_s^2(\rho) + c_{VEl}^2. \quad (4.21)$$

Per  $\delta \vec{v}_i \neq 0$  per  $i = 1, 2$ , si ha (soluzione doppia):

$$U^2 = c_{VEt}^2 (> 0); \quad (4.22)$$

da cui ottengo, rispettivamente:

$$U^\pm = \pm \sqrt{c_s^2(\rho) + c_{VEl}^2}; \quad (4.23)$$

$$U^\pm = \pm \sqrt{c_{VEt}^2}. \quad (4.24)$$

Riassumendo abbiamo messo in evidenza la presenza di due onde d'accelerazione longitudinali accoppiate del tipo acusto-viscoelastico (interazione tra effetti acustici e viscoelastici) e due onde d'accelerazione trasversali (doppie) che non risentono degli effetti acustici. Le prime si muovono con velocità di avanzamento  $\lambda^\pm = \vec{v} \cdot \vec{n} \pm \sqrt{c_s^2(\rho) + c_{VEt}^2}$  e le seconde con velocità di avanzamento  $\lambda^\pm = \vec{v} \cdot \vec{n} \pm c_{VEt}$ .

*Osservazione 4.6.* Quindi le superfici caratteristiche, interpretate come onde di discontinuità del primo ordine, o onde iperboliche non lineari, si muovono con velocità di avanzamento reali e questo fatto permette di classificare il sistema quasi lineare di Maxwell 4.14 come sistema iperbolico (non strettamente).

*Osservazione 4.7.* Per  $U = 0$  abbiamo una superficie o onda di contatto materiale (non semplice), lungo la quale  $\delta \vec{v}_n = 0$ ,  $\delta \vec{v}_i = 0$  per  $i = 1, 2$  e  $\delta T^{(V)} \vec{n} \cdot \vec{t}_i = 0$  per  $i = 1, 2$ , mentre  $\delta \rho$  e  $\delta T^{(V)} \vec{n} \cdot \vec{n}$  possono essere diversi da zero.

*Osservazione 4.8.* Il modello più adatto a studiare i fenomeni legati al sangue, sarebbe quello di Johnson Segalman (vedi [14]), in cui effetti viscosi e viscoelastici agiscono simultaneamente, ma, essendo che il nostro obiettivo è quello di generalizzare il modello idrodinamico di Chavanis e Sire 3.13, trascuriamo il solvente e consideriamo il modello viscoelastico di Maxwell, così da lavorare con un modello iperbolico, rispettando gli obiettivi imposti da Chavanis e Sire.

## 4.2.2 Il modello di Maxwell-Poisson Versus il modello di Eulero-Poisson: l'instabilità di Jeans in un fluido viscoelastico

In questa sezione trattiamo gli effetti iperboliche della viscoelasticità in un gas omogeneo, infinito spazialmente, in quiete e autogravitante. In questo modo discutiamo l'instabilità di Jeans, seguendo l'articolo [19].

Consideriamo un fluido neutro, fortemente accoppiato, in maniera tale che gli effetti della viscosità e dell'elasticità agiscano contemporaneamente. Prima di tutto incorporiamo gli effetti costitutivi viscoelastici nell'equazione del moto, che riscriviamo così:

$$\left(1 + \tau_v \frac{d}{dt}\right) \left[ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \rho \nabla \phi + c_s^2(\rho) \nabla \rho \right] = \mu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\mu\right) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}), \quad (4.25)$$

dove, come prima,  $\rho$  è la densità di massa,  $\phi$  è il potenziale gravitazionale,  $c_s^2(\rho)$  è la velocità del suono nel fluido considerato. Le proprietà viscoelastiche del mezzo sono caratterizzate dal tempo di rilassamento  $\tau_v$ , dalla viscosità di taglio  $\mu$  e dal coefficiente di viscosità di profondità  $\zeta$ .

Naturalmente la densità di massa soddisfa l'equazione di stato (vedi sezione 1.2.1, equazione (1.60)) e la sua evoluzione è descritta dalla seguente equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (4.26)$$

Il potenziale gravitazionale è legato alla densità di massa tramite l'equazione di Poisson:

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho, \quad (4.27)$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale. In un fluido Newtoniano, il ruolo della viscosità è quello di dare origine allo smorzamento delle onde gravito-soniche. Un mezzo governato dalle equazioni (4.25) e (4.26) supporta la propagazione di modelli viscoelastici sia longitudinali che trasversali, nel limite di  $\omega \tau_v \gg 1$ . Questo limite implica che la frequenza  $\omega$  del modo è molto più grande dell'inverso del tempo di rilassamento viscoelastico  $\tau_v$ .

*Osservazione 4.9.* In questo contesto di versione linearizzata del modello, avremmo potuto lasciare anche la derivata di Jaumann nell'equazione (4.25). Nel procedimento di linearizzazione, infatti, i pezzi non lineari si sarebbero cancellati.

Consideriamo quindi il *modello di Jeans con la correzione viscoelastica*, descritto dal sistema delle tre equazioni (4.25), (4.26) e (4.27):

$$\begin{cases} (1 + \tau_v \frac{d}{dt}) [\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \rho \nabla \phi + c_s^2(\rho) \nabla \rho] = \mu \Delta \vec{v} + (\zeta + \frac{1}{3}\mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \Delta \phi = 4\pi G \rho. \end{cases} \quad (4.28)$$

### Analisi della stabilità lineare del modello di Jeans con la correzione costitutiva viscoelastica

Consideriamo una soluzione omogenea e stazionaria del sistema 4.28:

$$s_0 = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \vec{v}_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix}$$

tale che  $\rho_0 > 0$ ,  $\vec{v} = \vec{0}$  e  $\nabla\phi_0 = 0$ .

Come per il caso dell'instabilità classica di Jeans (vedi sezione 3.2.3), per superare l'inganno di Jeans, assumiamo che l'equazione di Poisson descriva solo la relazione tra le perturbazioni della densità e del potenziale di autogravità (vedi [13]).

Consideriamo, ancora una volta, una perturbazione di questo stato di equilibrio del tipo "onda dispersiva"  $\delta s(\vec{x}, t) = s_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$  con  $s_1 \neq 0$ , tale che:

$$\delta s = \begin{bmatrix} \delta \rho \\ \delta \vec{v} \\ \delta \phi \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

e perturbiamo  $s_0$  nel seguente modo:

$$s = s_0 + \delta s(\vec{x}, t).$$

Procedendo in maniera analoga ai modelli precedenti, eseguendo le stesse semplificazioni e operazioni di sempre, otteniamo il nuovo sistema linearizzato per le perturbazioni:

$$\begin{cases} (1 + \tau_v \frac{\partial}{\partial t}) [\rho_0 \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \delta \phi + c_s^2(\rho_0) \nabla \delta \rho] = \mu \Delta \delta \vec{v} + (\zeta + \frac{1}{3} \mu) \nabla (\nabla \cdot \delta \vec{v}) \\ \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \delta \vec{v}) = 0 \\ \Delta \delta \phi = 4\pi G \delta \rho. \end{cases} \quad (4.29)$$

Sostituiamo la forma del tipo onda dispersiva e utilizzando le solite identità evidenziate alla sezione 1.3. Dal sistema 4.29, otteniamo il seguente sistema algebrico:

$$\begin{cases} (1 - i\omega\tau_v) [-i\omega\rho_0\vec{v}_1 + i\rho_0\vec{k}\phi_1 + ic_s^2(\rho_0)\vec{k}\rho_1] = -\mu k^2\vec{v}_1 - (\zeta + \frac{1}{3}\mu)\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \\ -i\omega\rho_1 + i\rho_0(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) = 0 \\ -k^2\phi_1 = 4\pi G\rho_1. \end{cases} \quad (4.30)$$

Ora, moltiplicando scalarmente per  $\vec{k}$  la prima equazione del sistema 4.30 e tenendo conto delle altre due, otteniamo:

$$(1 - i\omega\tau_v) [\omega^2\rho_1 + 4\pi G\rho_0\rho_1 - c_s^2(\rho_0)k^2\rho_1] = -i\omega \frac{(\zeta + 4/3\mu)}{\rho_0} k^2\rho_1. \quad (4.31)$$

Quindi, nel limite  $\omega\tau_v \gg 1$ , ricordando la definizioni della velocità viscoelastica longitudinale data in precedenza, otteniamo la seguente equazione di dispersione:

$$\omega^2 = -\omega_J^2 + c_s^2(\rho_0)k^2 + c_{VE}^2 k^2, \quad (4.32)$$

dove  $w_J^2 := 4\pi G\rho_0$  è la *frequenza di Jeans del fluido*.

L'equazione (4.32) rappresenta la relazione di dispersione che descrive il problema dell'instabilità gravitazionale di Jeans in un plasma omogeneo modificato dalla presenza degli effetti viscoelastici.

In questo caso abbiamo considerato l'ampiezza  $\rho_1$  come ampiezza di riferimento. L'equazione (4.32) la possiamo riscrivere anche così:

$$\omega^2 = (c_s^2 + c_{VEl}^2) \left( k^2 - \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2 + c_{VEl}^2} \right). \quad (4.33)$$

Possiamo quindi definire un nuovo numero d'onda critico:

$$K_{JVE}^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2 + c_{VEl}^2} < K_J^2. \quad (4.34)$$

Quindi la condizione sufficiente per l'instabilità gravitazionale in presenza di effetti viscoelastici diventa:

$$k^2 < K_{JVE}^2.$$

In questo modo recuperiamo stabilità, cioè formazione di onde dispersive di tipo gravito-acusto-viscoelastico  $\forall k > K_{JVE}^2$ . Il "range di recupero della stabilità" è:

$$\{ k \mid K_{JVE}^2 < k^2 \leq K_J^2 \}.$$

In conclusione la presenza degli effetti viscoelastici nel mezzo contribuisce alla sua stabilità contro fluttuazioni del potenziale gravitazionale. Infatti per un fluido newtoniano, l'autogravità porta all'instabilità nel caso in cui  $k^2 < K_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2(\rho_0)} = \frac{w_J^2}{c_s^2(\rho_0)}$  (vedi sezione 3.2.3). Nel caso di un fluido viscoelastico, invece, la soglia critica si abbassa. Questi risultati sono molto rilevanti per lo studio della materia stellare, che presenta un comportamento viscoelastico.

### 4.2.3 Il comportamento viscoelastico può essere un "salva vita" contro l'infarto? Un batterio come l'*Escherichia Coli* che ruolo potrebbe avere? Verso un modello idrodinamico per i fenomeni chemiotattici in presenza di effetti viscoelastici

Come abbiamo osservato in questo capitolo, gli aspetti viscoelastici aiutano la stabilità e quindi rendono più difficile l'insorgenza del collasso chemiotattico (o gravitazionale). Ci chiediamo quindi se il comportamento viscoelastico agisca come un "salva vita", ritardando l'insorgenza del collasso. Abbiamo visto infatti che il modello viscoelastico di Maxwell prevede un "ritardo di risposta viscoelastico", che quindi sembrerebbe proprio essere una sorta di "salva vita": esso concede del tempo in più. Se pensiamo, ad esempio, ad un infarto o un ictus, il tempo diventa una componente essenziale.

È stato dimostrato che il batterio *Escherichia Coli* è correlato all'aggregazione cellulare di cellule tumorali. Ci chiediamo se sia connesso anche con l'insorgenza di infarti ed ictus. Ancora oggi è complesso da spiegare cosa porti all'occlusione di una o più arterie coronarie, quelle che portano il sangue al cuore. E forse anche il *microbiota*, ovvero i batteri che vivono nel nostro corpo, potrebbe avere un ruolo come "complice" nei fenomeni che scatenano l'attacco cardiaco.

Una ricerca italiana (vedi [23]) mette sotto accusa un batterio, l'*Escherichia Coli*, che è stato identificato non solo nel sangue circolante delle persone colpite da infarto ma anche nella stessa arteria che si chiude determinando il quadro. La ricerca, apparsa su *European Heart Journal*, è stata condotta su 150 persone ed è stata coordinata da Francesco Violi, Direttore della I Clinica Medica del Policlinico universitario Umberto I di Roma. Lo studio è durato per più di quattro anni ed ha dimostrato che in chi va incontro all'attacco cardiaco si osservano variazioni della permeabilità dell'intestino e soprattutto la presenza del batterio *Escherichia Coli* nel sangue circolante e soprattutto nella lesione che ha causato l'occlusione arteriosa. La popolazione studiata di 150 individui era costituita da 50 individui con infarto in atto, 50 persone cardiopatiche ma senza infarto e 50 individui sani. Solo in chi è arrivato in ospedale con infarto acuto il batterio è risultato presente, mentre era assente nel sangue di chi soffriva di malattie cardiache e nei sani.

Un'osservazione simile è stata effettuata anche negli animali da esperimento, con il batterio che, iniettato nei topi, in caso di infarto era presente nella struttura del coagulo che blocca la circolazione del sangue.

Sul fronte delle cure, la speranza futura è di inibire al batterio di legarsi con le cellule del sistema difensivo che si trovano nell'arteria in cui si forma il trombo. Più in là nel tempo, nei soggetti a rischio, si potrebbe pensare ad una sorta di "vaccinazione" preventiva nei confronti dell'Escherichia Coli.

Non è la prima volta che si parla di rapporti "stretti" tra la composizione della flora batterica intestinale e la salute cardiovascolare. Nell'ultimo congresso della Società europea di Cardiologia tenutosi a Parigi è stata presentata un'altra ricerca, sempre italiana, che dimostrava come alcuni batteri dell'apparato digerente potessero modificare la struttura della placca presente su un vaso coronarico e quindi dare il via all'infarto.

### La nostra proposta di modello fluidodinamico iperbolico-parabolico per la chemiotassi

Sarebbe interessante generalizzare il modello di Chavanis e Sire 3.13, proponendo un nuovo modello per la chemiotassi che tenga conto di aspetti viscoelastici del tipo Maxwell.

In questo caso, quindi, consideriamo l'analogia tra il modello di Chavanis e Sire 3.13 e il modello di Jeans riversata. Infatti abbiamo dimostrato che, nel caso del modello di Jeans per l'instabilità gravitazionale, gli effetti viscoelastici aiutano la stabilità. Per questa analogia potremmo concludere proponendo un nuovo **modello fluidodinamico di Chavanis-Sire-Maxwell** iperbolico-parabolico di questo tipo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho \frac{d}{dt}\vec{v} = -p'(\rho)\nabla\rho - \rho\xi\vec{v} + \rho\nabla \cdot T^{(V)} + \rho\nabla c \\ \tau_v(\frac{d}{dt}T^{(V)} - WT^{(V)} + T^{(V)}W) + T^{(V)} = 2\mu D + (\zeta - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \vec{v}\mathbb{I} \\ \frac{d}{dt}c = \nabla \cdot (D_c\nabla c) - \Lambda(\rho, c)c + h(\rho, c)\rho, \end{cases} \quad (4.35)$$

dove, come sempre,  $\rho(\vec{x}, t)$  è la densità di massa,  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  è la velocità e  $c(\vec{x}, t)$  è la concentrazione della sostanza chimica.  $T^{(V)}$  è il tensore viscoso,  $W$  e  $D$  sono rispettivamente il

tensore spin e il tensore velocità di trasformazione,  $\mu$  è la viscosità di taglio e  $\zeta$  la viscosità di profondità (vedi sezione 1.4).  $\tau_v > 0$  è un tempo di rilassamento e  $\xi$  il coefficiente relativo alla forza di attrito.

Osserviamo che il modello 4.35 che abbiamo proposto corrisponde al modello di Maxwell 4.14, che sappiamo essere iperbolico, a cui abbiamo aggiunto i contributi della sostanza chimica  $c$ , per tenere conto dei moti guidati chimicamente.

*Osservazione 4.10.* Potremmo considerare che la sostanza chimica  $c$  non si muova. A quel punto l'ultima equazione del sistema 4.35 relativa all'evoluzione della concentrazione della sostanza chimica non sarebbe più parabolica, ma ellittica. Infatti essa si riduce alla forma ellittica stazionaria:

$$h\rho + D_c\Delta c = 0. \quad (4.36)$$

Osserviamo che, se prendiamo  $D_c = 1$  e  $h = 4\pi G$ , otteniamo esattamente l'ultima equazione del sistema di Eulero-Poisson 3.9, come già osservato nella sezione 3.2.1.

Concludiamo la nostra discussione con la proposta di questo nuovo modello per la Chemiotassi 4.35 e ci chiediamo, quindi, se esso potrebbe essere utilizzato per frenare l'aggregazione dell'Escherichia Coli, in maniera tale da combattere infarti e ictus, battendoli sul tempo. È un discorso molto interessante e che varrebbe la pena di essere approfondito.

*Osservazione 4.11.* L'ultima equazione del sistema 4.35 non tiene conto che il fluido potrebbe muoversi, come avviene nella realtà dei fatti per i fenomeni riguardanti la chemiotassi e il sangue. Si potrebbe pensare di modificare l'equazione per l'evoluzione della concentrazione della sostanza chimica, che considera solo la derivata convettiva, aggiungendo un termine del tipo  $c\nabla \cdot \vec{v}$ .

Molte cure mediche, infatti, spesso falliscono in quanto, non considerando il movimento dei fluidi, vanno ad attaccare punti sani e quindi rischiano di avere effetti molto destabilizzanti. Sarebbe, quindi, molto interessante sviluppare nuovi modelli che tengano conto del fatto che i fluidi si spostano.

# Conclusioni

Riassumiamo i principali risultati ottenuti in questa tesi:

- Il **modello di Keller e Segel** è un modello quasi lineare parabolico-parabolico. Abbiamo dimostrato, con il metodo delle Onde Dispersive, che il criterio per l'insorgenza dell'instabilità chemiotattica è:

$$k^2 < \tilde{K}_{KS}^2 = \frac{\chi_0 \rho_0 h}{D_c(0) D_\rho(0)} - \frac{\Lambda}{D_c(0)}.$$

Come tutti i modelli puramente parabolici, questo modello ignora l'inerzia e non è in grado di riprodurre la formazione di strutture complesse come ad esempio i reticoli, che si formano durante la vasculogenesi, un processo importante durante la crescita di un tumore. Per studiare questi fenomeni sono stati introdotti nuovi modelli idrodinamici (iperbolici).

- Il modello di Eulero per il gas perfetto barotropico è un modello iperbolico quasi lineare, compatibile con la propagazione di onde sonore longitudinali (onde iperboliche tipiche del modello) e di onde trasversali materiali (doppie). Perturbando un suo stato di base stazionario e omogeneo  $(\rho_0, \vec{v}_0)$  con il metodo delle Onde Dispersive si generano o onde materiali trasversali, che non trasportano perturbazione di densità, o onde sonore di piccola ampiezza longitudinali che si muovono rispetto al fluido con velocità costante  $\pm c_s(\rho_0)$ . In ogni caso si ha neutra stabilità della soluzione di base costante, corrispondente a comportamenti oscillatori. Si crea così un raffronto tra le onde iperboliche non lineari e le onde dispersive, che si ottengono dalla versione linearizzata del modello.
- Il **modello idrodinamico di Chavanis e Sire** è un modello iperbolico-parabolico che tiene conto della presenza di una forza di attrito  $-\xi \vec{v}$ . Per  $\xi \rightarrow \infty$  si ottie-

ne esattamente il modello pionieristico di Keller e Segel. Abbiamo dimostrato, con il metodo delle onde dispersive, che il criterio per l'insorgenza dell'instabilità chemiotattica è:

$$k^2 < \tilde{K}_{CS}^2 = \frac{h\rho_0}{D_c(0)c_s^2} - \frac{\Lambda}{D_c(0)}.$$

La condizione ottenuta non dipende dal parametro  $\xi$ . Confrontando il risultato con quello del modello di Keller e Segel, si nota che l'unica differenza riguardo la soglia critica, è la sostituzione di  $p'(\rho_0)$  alla mobilità diffusiva cellulare  $D_\rho(0)$  (e manca il fattore costante  $\chi_0$ ). In ogni caso la stabilità è assicurata  $\forall k^2 : k^2 \geq \tilde{K}_{CS}^2$ , mentre nel caso di Keller e Segel si ha stabilità solo per  $k^2 > \tilde{K}_{KS}^2$ .

- Il modello di Chavanis e Sire per la chemiotassi ha delle forti analogie con il modello di Eulero-Poisson o **modello di Jeans per l'instabilità gravitazionale** in astrofisica. Ci sono però delle differenze fondamentali, come la presenza della forza di attrito nel modello di Chavanis e Sire, la natura differente della terza equazione dei due sistemi (parabolica in un caso ed ellittica nell'altro) e, inoltre, il modello di Jeans presenta il cosiddetto "inganno di Jeans" (vedi osservazione 3.6), che sarebbe superato se nell'equazione di Poisson si aggiungesse un termine di degradazione del tipo  $-\Lambda\phi$ , dove  $\Lambda$  potrebbe avere significato di costante cosmologica. Abbiamo dimostrato, sempre con il metodo delle Onde Dispersive, che il criterio per l'insorgenza dell'instabilità gravitazionale è:

$$k^2 < K_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2(\rho_0)}.$$

Mettendo a confronto le due soglie critiche per l'insorgenza dell'instabilità, notiamo che la soglia di Chavanis e Sire è più piccola del numero d'onda di Jeans, non sono però gli effetti della forza di attrito ad aiutare la stabilità in questo senso, ma la presenza del termine di degradazione  $\Lambda$ . Quindi la discussione sull'insorgenza del collasso chemiotattico presenta analogie evidenti, anche di terminologie, con quella legata al collasso gravitazionale in astrofisica.

- Il sangue è un fluido complesso, generalmente non newtoniano e con comportamento viscoelastico, quindi abbiamo voluto generalizzare il modello di Chavanis e Sire per tenere conto di questi aspetti. Aggiungendo gli effetti viscosi del tipo

Navier Stokes al modello di Chavanis e Sire, la soglia critica per l'insorgenza dell'instabilità chemiotattica non cambia, ma il comportamento oscillatorio dei modi di Fourier viene smorzato. Inoltre il modello idrodinamico è parabolico e, come suggerito da Chavanis e Sire, non è adatto a descrivere la formazione di strutture complesse, come i reticoli. Ci si può aspettare che valga lo stesso per il modello di Jeans.

- Il modello viscoelastico più idoneo al nostro studio sarebbe quello di Johnson Segalman, in cui gli effetti viscosi e quelli viscoelastici agiscono contemporaneamente, ma, poichè vogliamo generalizzare il modello di Chavanis e Sire rispettando i loro obiettivi, ci siamo concentrati sul **modello viscoelastico di Maxwell**, che risulta essere iperbolico. Con il test di iperbolicità al modello di Maxwell, infatti, abbiamo messo in evidenza l'esistenza di due onde d'accelerazione longitudinali accoppiate del tipo acusto-viscoelastico (interazione tra gli effetti acustici e quelli viscoelastici) e di due onde d'accelerazione trasversali (doppie) che non risentono degli effetti acustici e quindi con un comportamento puramente meccanico. Le prime si muovono con velocità di avanzamento  $\lambda^\pm = \vec{v} \cdot \vec{n} \pm \sqrt{c_s^2(\rho) + c_{VEI}^2}$  e le seconde con velocità di avanzamento  $\lambda^\pm = \vec{v} \cdot \vec{n} \pm c_{VEt}$ .

Nell'ambito dell'instabilità di Jeans, abbiamo dimostrato che la presenza di effetti viscoelastici è stabilizzante, infatti abbiamo trovato una nuova soglia critica inferiore alla classica soglia critica di Jeans, ritardando così la formazione del collasso gravitazionale.

Si può quindi affermare che il comportamento viscoelastico del sangue possa agire come "salva vita", ritardando così l'insorgenza dell'instabilità chemiotattica? Il modello di Maxwell, infatti, introduce un tempo di rilassamento, interpretato come un "ritardo di risposta" che sembrerebbe fungere da "salva vita", concendendo "del tempo in più". Se si pensa poi ad un infarto o un ictus, il tempo è una componente essenziale per salvare la vita del paziente.

- Recentemente ricerche mediche hanno dimostrato la correlazione tra il batterio **Escherichia Coli** (nell'intestino) e l'insorgenza di tumori, o anche di infarti o ictus. In particolare, ricercatori italiani hanno dimostrato che questo batterio potreb-

be essere presente nei pazienti che presentano un infarto in corso. Se così fosse, si potrebbe pensare ad una sorta di "vaccinazione" contro questo batterio, per combattere le sue responsabilità versus ictus e infarti.

- Abbiamo concluso questa tesi con la proposta di un nuovo modello fluidodinamico iperbolico-parabolico per la chemiotassi, che generalizza il modello di Chavakis e Sire aggiungendo gli effetti viscoelastici del tipo Maxwell. Ci chiediamo se potrebbe essere un buon modello matematico anche per frenare l'aggregazione dell'Escherichia Coli e quindi per combattere infarti e ictus, battendoli sul tempo.

# Bibliografia

- [1] Murray, J. D., *Mathematical Biology, Vol I, An Introduction*, Springer (2002)
- [2] Murray, J. D., *Mathematical Biology, Vol II, Spatial models and biomedical applications*, Springer (2003)
- [3] Dolak, Y. e Hillen, T., *Cattaneo models for chemosensitive movement - Numerical solutions and pattern formation*, J Math Biol., 46(2), 153-70 (2003)
- [4] Keller, E. F. e Segel, L. A., *Initiation of Slime Mold Aggregation viewed as an Instability*, Journal of Theoretical Biology, 26(3), 399-415 (1970)
- [5] Patlak, C. S., *Random walk with persistence and external bias*, Bull. Math. Biophys. 15, 311-338 (1953)
- [6] Chavanis, P-H. e Sire, C., *Jeans type analysis of chemotactic collapse*, Physica A, Statistical Mech. and its Appl., 387, 4033-4052 (2008)
- [7] Gamba, A., Ambrosi, D., Coniglio, A., De Candia, A., Di Talia, S., Giraud, E., Serini, G., Preziosi, L. e Bussolino, F., *Percolation, Morphogenesis, and Burgers Dynamics in Blood Vessels Formation*, Phys. Rev. Letters 90(11), 118101 (2003)
- [8] John, F., *Partial Differential Equations*, Springer (1991)
- [9] Renardy, M. e Rogers, R. C., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer (2006)
- [10] Gurtin, M. E., *An introduction to continuum mechanics*, Mat. in Sci. and Engn., 158, Academic Press USA (1981)

- [11] Ruggeri, T., *Introduzione alla termomeccanica dei continui*, Mondussi Editore (2007)
- [12] I-Shih Liu, *Continuum mechanics*, Springer (2013)
- [13] Binney, J. e Tremaine, S., *Galactic Dynamics, Princeton Series in Astrophysics* (1987)
- [14] Franchi, F., Lazzari, B. e Nibbi, R., *Mathematical Models for the non-isothermal J-S viscoelasticity in porous media: stability and wave propagation*, Math. Meth. Appl. Sci., 38, 4075-4087 (2015)
- [15] Franchi, F., *On the Behaviour of One-dimensional Waves in Thermo-Viscoelastic Fluids*, Meccanica, 17, 3-10 (1982)
- [16] Pérez-Reyes, I., Vargas-Aguilar, R. O., Pérez-Vega, S. B., e Ortiz-Pérez, A. S., *Applications of Viscoelastic Fluids Involving and Heat Transfer* (2018)
- [17] Bollada, P. C. e Phillips, T. N., *On the Mathematical Modelling of a Compressible Viscoelastic Fluid* (2012)
- [18] Carlevaro, N. e Montani, G., *Jeans instability in the presence of viscous effects*, Int. J. of Mod. Phys. D., 1257,1272 (2009)
- [19] Janaki, M. S., Chakrabarti, N. e Banarjee, D., *Jeans Instability in a viscoelastic fluid*, Saha institute of nuclear phisic, India (2013)
- [20] Varchanis, S., Dimakopoulos, Y., Wagner, C. e Tsamopoulos, J., *Soft Matter* (2018)
- [21] Brust, M., Schaefer, C., Doerr, R., Pan, L., Garcia, M., Arratia, P. E. e Wagner, C., *Rheology of human blood plasma: Viscoelastic versus Newtonian behavior*, Phys. Rev Letters 110, 078305 (2013)
- [22] Ghigo, A.R., Lagré, P.Y. e Fullana, J.M., *A time-dependent non-Newtonian extension of a 1D blood flow model*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 253, 36-49 (2019)

- [23] Violi, F., Nocella, C. e Carnevale, R., *Gut microbiota and myocardial infarction*, European Heart Journal, Volume 41, Issue 23, Pages 2221-2222 (2020)

# Ringraziamenti

Vorrei ringraziare la mia relatrice, la professoressa Franca Franchi, per la grande passione, la gentilezza e la disponibilità che ha sempre mostrato, sia a lezione e sia, soprattutto, durante lo sviluppo di questa tesi.

Ringrazio tutti i docenti incontrati in questi anni alla facoltà di Matematica, che hanno contribuito alla mia formazione e hanno stimolato il mio interesse.

Ringrazio i miei genitori, Sabrina e Michele, che mi hanno sempre sostenuta e amata. Un ringraziamento speciale va a mia madre e alla sua forza incredibile. Tutto quello che sono oggi lo devo soprattutto a lei.

Ringrazio tutta la mia famiglia: la parte veneta e la parte marchigiana. Ringrazio soprattutto mia nonna Annamaria, che è sempre disponibile e farebbe qualsiasi cosa per me e la mia prozia Carla a cui devo il mio nome, che mi ha sempre a cuore ed è molto generosa e amorevole.

Ringrazio il mio fidanzato Matteo, che è sempre stato al mio fianco durante tutto il mio percorso universitario, con la sua dolcezza e il suo amore. Mi ha sempre capita e rispettata e non ha mai dubitato delle mie scelte.

Ringrazio tutti i compagni e amici conosciuti fra i banchi di Matematica. In particolare ringrazio Anna e Rossana, senza le quali la mia esperienza universitaria non sarebbe stata completa. Ringrazio Sofia, Yvonne, Nicola, Iacopo e tutti gli altri del gruppo.

Ringrazio tutti i miei amici di Reggio, quelli veri. Un ringraziamento speciale va ad Anna, che per me è come la sorella che non ho mai avuto, a Valentina, che è da sempre un'amica sincera e amorevole, ad Alessandra, che ha un cuore più grande di lei, a Maurizio, che mi fa sempre ridere e a Sabrina, per la quale metterei la mano sul fuoco.