Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

GRUPPI DI RIFLESSIONE ASTRATTI

Relatore:
Chiar.mo Prof.
FABRIZIO CASELLI

Presentata da:
ALICE LUNGHERINI

IV Sessione
Anno Accademico 2019/2020

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di mostrare che a partire da assiomi astratti è possibile ricostruire la teoria concreta che si ha nel caso dei gruppi di riflessione finiti. In particolare faremo vedere che dato un gruppo astratto W, definito tramite una sua presentazione con un insieme di generatori S e relazioni tra i generatori, esistono delle condizioni, tutte equivalenti tra loro, che ci permetteranno di stabilire se il gruppo di partenza può essere considerato un *gruppo di riflessione*, ovvero un gruppo per il quale valgono proprietà geometriche analoghe a quelle dei gruppi di riflessione finiti.

Nel caso in cui W è un gruppo di riflessione finito e S è l'insieme delle riflessioni rispetto ai muri di una certa camera fissata, sappiamo che il poset delle celle Σ è un complesso simpliciale, che triangola la sfera unitaria di dimensione $n-1$ (dove $n = card(S)$). In più, Σ possiede una ricca teoria geometrica, con muri, semi-spazi, etc.., e gli elementi di S agiscono su Σ come riflessioni.

Dallo studio di questi ultimi emergono quindi proprietà geometriche interessanti e ci chiediamo se valgano in casi più generali; al fine di darci una risposta, la nostra strategia sarà quella di cercare di utilizzare la teoria dei gruppi di riflessione finiti come guida per definire delle nozioni geometriche nel caso di gruppi astratti.

Come già accennato precedentemente, a partire da alcuni assiomi, arriveremo a scoprire una famiglia di gruppi che portano il nome di gruppi di Coxeter e sono proprio i gruppi che potremmo chiamare *gruppi di riflessione astratti.*

In particolare mostreremo che dato un gruppo di Coxeter (W, S), possiamo definire una sua rappresentazione lineare, che chiamiamo *rappresentazione canonica*, che si dimostra essere fedele; quindi W risulta essere isomorfo ad un gruppo di trasformazioni lineari generato da riflessioni e nel caso in cui W è finito si può vedere che non c'è nessuna differenza tra un gruppo di Coxeter finito e un gruppo di riflessione finito.

- Nel primo capitolo daremo una lista di definizioni che culminerà nell'assioma (A) che la coppia (W, S) deve soddisfare per potere essere considerata un gruppo di riflessione e inoltre mostreremo un'importante conseguenza della condizione (A): la condizione (D) o condizione di cancellazione.

- Nel secondo capitolo daremo alcune definizioni preliminari sulla teoria delle rappresentazioni di gruppi e forniremo due esempi di gruppi (infiniti) che soddisfano (A): il gruppo diedrale di ordine infinito D_∞ e $PGL_2(\mathbf{Z})$; inoltre troveremo per il primo dei gruppi in questione la sua rappresentazione canonica.

- Nel terzo capitolo daremo delle formulazioni equivalenti della condizione (D), vale a dire le condizioni (E) ed (F); enunceremo e daremo una soluzione del problema delle parole in un caso particolare (per i gruppi che soddisfano la condizione (D)), e vedremo una applicazione della condizione (F).

- Nel quarto ed ultimo capitolo mostreremo che tutte le condizioni analizzate nei capitoli precedenti sono equivalenti; infine arriveremo a definire i gruppi di Coxeter e il loro legame con i gruppi di riflessione, sia nel caso finito che nel caso infinito.

Indice

Capitolo 1

In cerca di assiomi: le condizioni (A) e (D)

1.1 Prime definizioni e notazioni

In questa sezione W denota un gruppo generato da un sottoinsieme S formato da elementi di ordine 2;

Definizione 1.1.1 (classe laterale speciale)**.** Una *classe laterale speciale* è una classe laterale della forma $w\langle S'\rangle$ con $w \in W$ e $S' \subseteq S$.

Definizione 1.1.2 (Σ)**.** $\Sigma = \Sigma(W, S)$ è il poset delle classi laterali speciali ordinato con la relazione di inclusione opposta: $B \leq A$ in Σ se e solo se $B \supseteq A$ come sottoinsiemi di W; in questo caso diremo che B è una *faccia* di A.

Notazioni:

1. s_H: Dato uno spazio vettoriale euclideo V e un iperpiano $H \subset V$, denotiamo con s_H la riflessione rispetto ad H, cioè, la trasformazione lineare $V \longmapsto V$ che è l'identità ristretta ad H ed è la moltiplicazione per -1 ristretta a $H^{\perp}$.

2. *riflessione*: Chiamiamo un elemento di W una *riflessione* se è coniugato ad un elemento di S.

Definizione 1.1.3 (Gruppo di riflessione finito)**.** Sia V uno spazio vettoriale euclideo; un gruppo di riflessione finito è un gruppo finito W costituito da trasformazioni lineari di V, generato da riflessioni s_H, con H che varia in un insieme $\mathcal{H}$ di iperpiani di V.

1.1.1 Muri, azione di W su $\mathcal{H}$

Definizione 1.1.4 ($\mathcal{H}$)**.** Indichiamo con $\mathcal{H}$ un insieme astratto in corrispondenza $1-1$ con l'insieme delle riflessioni; la corrispondenza è data dalla funzione $H \longmapsto s_H$, per $H \in \mathcal{H}$.

Gli elementi di $\mathcal{H}$ li chiameremo *muri*.

Osservazione 1.1.1.1. *Poiché* W *agisce per coniugio sull'insieme delle riflessioni, possiamo usare la corrispondenza* $1-1$ *per definire l'azione di* W *su* $\mathcal{H}$.

Proposizione/Definizione 1.1.5 (Azione di W su $\mathcal{H}$)**.** L'azione di W sull'insieme $\mathcal{H}$ è una mappa:

$$W \times \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H},$$

tale che $(w, H) \longmapsto wH$ ed è della forma: $s_{wH} = ws_Hw^{-1}$, con $w \in W$ e $H \in \mathcal{H}$.

Dimostrazione. Per definizione, dato $H \in \mathcal{H}$, esiste un'unica riflessione corrispondente ad H che denotiamo con s_H; inoltre poiché W agisce sull'insieme delle riflessioni per coniugio, ws_Hw^{-1}, con $w \in W$ e $H \in \mathcal{H}$, è ancora una riflessione. Quindi si ha che l'azione di W su $\mathcal{H}$ è come nell'enunciato. □

1.1.2 Camere, gallerie e distanza combinatoria

Definizione 1.1.6 (Camera)**.** Una *camera* è un elemento massimale di Σ; inoltre, per come abbiamo definito il poset Σ, è proprio una delle classi laterali speciali minimali, cioè, il singoletto $\{w\} \subset W$.

Osservazione 1.1.2.1. *W agisce su Σ per traslazione a sinistra, ovvero c'è una mappa*

$$W \times \Sigma \longmapsto \Sigma$$

tale che $(w', w\langle S'\rangle) \longmapsto w'w\langle S'\rangle$, con w,$w' \in W$ e $S' \subseteq S$; inoltre l'azione è semplicemente transitiva sulle camere.

Osservazione 1.1.2.2. *Poniamo $C = \{1\}$ e chiamiamo C la* camera fondamentale*; così ogni camera $\{w\}$ può essere scritta come wC, sfruttando l'azione di* W*.*

Definizione 1.1.7 (Elementi di codimensione 1)**.** Gli elementi $A \in \Sigma$ che non sono delle camere e che sono massimali rispetto agli elementi di Σ escluse le camere, sono gli elementi di codimensione 1 e sono le classi laterali speciali costituite da due elementi: $w\langle s\rangle = \{w, ws\}$.

Osservazione 1.1.2.3. *Un elemento A che ha questa forma è una faccia di esattamente due camere: $\{w\}$ e $\{ws\}$.*

Definizione 1.1.8 (Adiacenza)**.** Due camere $\{w\}$ e $\{w'\}$ si dicono *adiacenti* se hanno una faccia di codimensione 1 in comune. Se $w \neq w'$, si ha che $w' = ws$ per qualche $s \in S$.

Avendo definito la relazione di adiacenza, possiamo dare le nozioni di *galleria*, di *lunghezza di una galleria* e di *distanza combinatoria*.

Definizione 1.1.9 (Galleria)**.** Una *galleria* è una sequenza di camere $\Gamma = (C_0, \ldots, C_d)$ tale che due camere consecutive C_{i-1} e C_i (con $i = 1, \ldots, d$) sono adiacenti. Scriveremo Γ: $C_0, \ldots, C_d$ e diremo che Γ è una galleria da C_0 a C_d.

Definizione 1.1.10 (Galleria che "slitta")**.** Sia $\Gamma = (C_0, \ldots, C_d)$ una galleria, diremo che Γ slitta se $C_{i-1} = C_i$ per qualche i.

Osservazione 1.1.2.4. *Le gallerie che non slittano $(C_i)_{0 \leq i \leq d}$ con $C_0 = C$ sono in corrispondenza $1-1$ con le sequenze $s_1, \ldots, s_d$ di elementi di* S*, e la corrispondenza è data da $C_i = \{w_i\}$, dove $w_i = s_1 \ldots s_i$.*

Definizione 1.1.11 (Muri attraversati)**.** Sia $\Gamma : C_0, \ldots, C_d$ una galleria, e sia H_i il muro tale $s_i = s_{H_i}$; allora i muri $w_{i-1}H_i$ $(i = 1, \ldots, d)$ sono *i muri attraversati* dalla galleria data.

Definizione 1.1.12 (Lunghezza di una galleria)**.** Data una galleria $\Gamma : C_0, \ldots, C_d$, l'intero d è la *lunghezza* di Γ.

Definizione 1.1.13 (Distanza combinatoria)**.** La distanza combinatoria tra due camere C e D, si denota con $d(C, D)$, ed è la lunghezza minima di una galleria che connette C a D. Inoltre ogni galleria $\Gamma : C = C_0, \ldots, C_d = D$ di lunghezza $d(C, D)$ prende il nome di *galleria minimale* da C a D.

Osservazione 1.1.2.5. *Risulta chiaro da queste definizioni che $d(C, wC)$ è il più piccolo intero d tale che w può essere espresso come $s_1 \ldots s_d$ nell'insieme dei generatori S. In questo caso d è chiamato la* lunghezza *di w rispetto a S e si denota con $l_S(w)$ o con $l(w)$. Quindi abbiamo:*

$$d(C, wC) = l(w).$$

Osservazione 1.1.2.6. *La distanza combinatoria è invariante rispetto all'azione di W; quindi si ha che:*

$$d(wC, w'C) = d(C, w^{-1}w'C) = l(w^{-1}w').$$

1.2 Condizione (A)

In questa sezione ci occupiamo di dare una condizione che (W, S) deve soddisfare affinché il gruppo W agisca su un dato insieme astratto come un gruppo di riflessione.

Prima di procedere occorre tenere presente che le definizioni e i risultati di questa sezione sono per lo più intuitivi; infatti ci limitiamo a dare un'idea di come si possa arrivare alla formulazione della condizione **(A)**.

Definizione 1.2.1 (Semispazio)**.** Un semispazio è una delle due parti in cui un iperpiano divide uno spazio affine.

Osservazione 1.2.0.1. *Un gruppo di riflessione finito, con una camera fissata C e con l'insieme S costituito dalle riflessioni rispetto ai muri di C, agisce sul poset delle celle $\Sigma \cong$(classi laterali speciali)^{op} come un gruppo di automorfismi tra poset, cioè, permuta le celle e preserva la relazione tra le facce, quindi manda semispazi in semispazi.*

Vogliamo cercare di generalizzare quanto appena visto per un gruppo (W, S), dove S è un insieme di generatori del gruppo di ordine 2.

Intuitivamente, fissato un $H \in \mathcal{H}$, un "semispazio" è una delle due parti in cui si divide l'insieme delle camere; denotiamo le due parti con $U_-(H)$ e $U_+(H)$, in modo tale che l'insieme con al pedice il segno $+$ contenga la camera fondamentale C.

In linea con quanto succede per i gruppi di riflessione finiti, ci aspettiamo che (W, S), per essere considerato un gruppo di riflessione, porti "semispazi" in "semispazi";

Osservazione 1.2.0.2. *L'insieme dei "semispazi" dovrebbe quindi essere in corrispondenza $1-1$ con l'insieme $\mathcal{H} \times \{\pm 1\}$. Perciò ci aspettiamo che la $W-$azione di portare "semispazi" in "semispazi", induca un'azione di W sull'insieme astratto $\mathcal{H} \times \{\pm 1\}$, che sia della forma:*

$$w \cdot (H, \varepsilon) = (wH, \pm\varepsilon),$$

dove si ha il segno "$+$" se e solo se $wC \in U_+(wH)$. In altre parole, il segno dovrebbe essere $+$ se e solo se wC e C sono dalla "stessa parte" rispetto al muro wH

Osservazione 1.2.0.3. *Applicando l'azione di w^{-1}, quanto appena affermato si può riformulare dicendo che il segno è $+$ se e solo se C e $w^{-1}C$ non sono separate da* H, *cioè, se $w^{-1}C \in U_+(H)$. Quindi l'azione di* W *sull'insieme $\mathcal{H} \times \{\pm 1\}$ dovrebbe soddisfare: $w \cdot (H, \varepsilon) = (wH, -\varepsilon) \Leftrightarrow$* H *separa* C *da w^{-1}*C*, cioè, se $w^{-1}C \in U_-(H)$.*

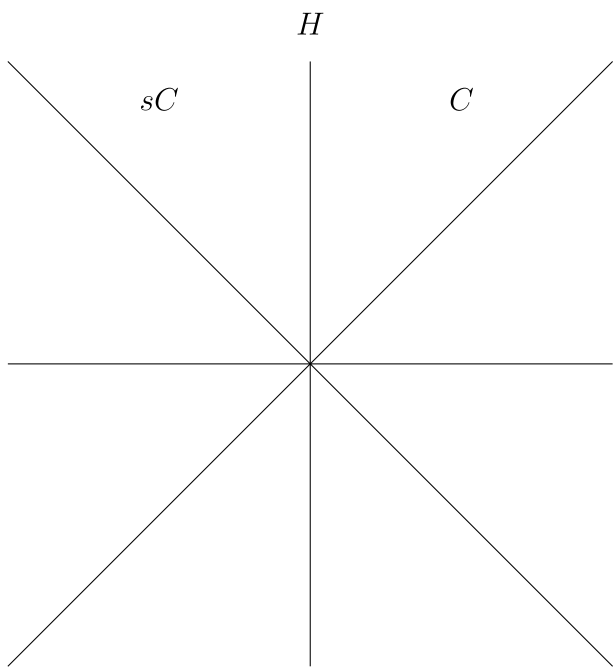
1.2.1 Involuzione ρ_s

Consideriamo adesso il caso in cui $w = s \in S$; ci aspettiamo che ci sia un solo $H \in \mathcal{H}$ che separa C da sC, proprio l'elemento H tale che $s = s_H$. L'azione di s sull'insieme $\mathcal{H} \times \{\pm 1\}$ dovrebbe essere quindi l'involuzione ρ_s definita nel seguente modo:

$$\rho_s(H, \varepsilon) = \begin{cases} (H, -\varepsilon) & s = s_H \\ (sH, \varepsilon) & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

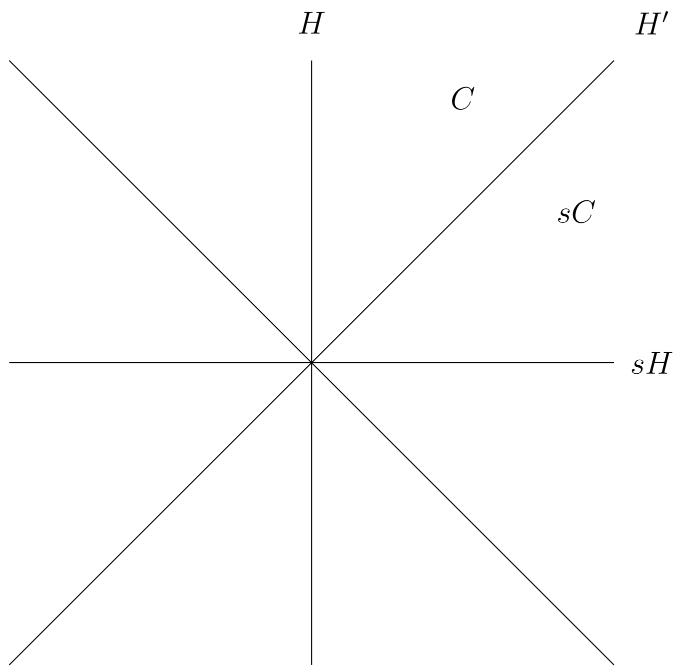
Osservazione 1.2.1.1. *Per convincerci di avere definito l'azione in modo ragionevole ci mettiamo nelle ipotesi dei gruppi di riflessione finiti e vediamo con due figure quello che succede;*

Nel primo caso si ha che $sH = H$; applicando s alla camera fondamentale C, abbiamo che H separa C da sC come è mostrato nella figura e quindi il segno $-$;



Nel secondo caso invece si ha che se $s \neq s_H$ (in particolare abbiamo che $s = s_{H'}$ con $H' \in \mathcal{H}$), come si può vedere nella figura di seguito, le camere

C e sC non sono separate dal muro H e quindi abbiamo il segno $+$.



Siamo quindi arrivati ad una condizione che (W, S) deve soddisfare se vogliamo che si comporti come un gruppo di riflessione. Chiameremo questa condizione **(A)**, dove la lettera A sta per "azione":

(A) C'è un'azione di W sull'insieme $\mathcal{H} \times \{\pm 1\}$ tale che, per ogni $s \in S$, s agisce come l'involuzione ρ_s definita sopra.

Osservazione 1.2.1.2. *Come vedremo in seguito la condizione **(A)** è sufficiente affinchè un dato gruppo astratto, con un insieme di generatori e relazioni, sia un gruppo di riflessione.*

1.3 Conseguenze della condizione (A)

1.3.1 L'insieme $\mathcal{H}(w)$ dei muri corrispondenti ad un elemento

A questo punto mostriamo una prima conseguenza della condizione **(A)**, che sostanzialmente mostra che se quest'ultima vale, allora l'insieme dei muri attraversati da una galleria ha le proprietà che ci aspettiamo dalla teoria dei gruppi finiti di riflessione, ovvero:

Teorema 1.3.1. *Supponiamo che (W, S) soddisfi* ***(A)****. Allora è possibile associare ad ogni $w \in W$ un sottoinsieme finito $\mathcal{H}(w) \subseteq \mathcal{H}$ con le seguenti proprietà:*

1. *$card(\mathcal{H}(w)) = d(C, wC) = l(w)$.*
2. *Se Γ è una galleria minimale da C a wC, allora i muri attraversati da Γ sono distinti e sono esattamente gli elementi di $\mathcal{H}(w)$.*
3. *Sia Γ una galleria arbitraria, di quelle che non slittano, da C a wC. Per ogni $\mathrm{H} \in \mathcal{H}$, si ha che $\mathrm{H} \in \mathcal{H}(w)$ se e solo se H è attraversato da Γ un numero dispari di volte.*

Dimostrazione. Intuitivamente $\mathcal{H}(w)$ può essere pensato come l'insieme dei muri che separano C da wC; per come abbiamo definito l'azione di W nel caso in cui soddisfi **(A)**, definiamo $\mathcal{H}(w)$ come l'insieme degli $H \in \mathcal{H}$ tali che $w^{-1} \cdot (H, 1) = (w^{-1}H, -1)$.

Supponiamo adesso che $w = s_1 \dots s_d$ con $s_i \in S$, e sia Γ la galleria corrispondente, ovvero la galleria della forma $(w_i C)_{0 \leq i \leq d}$, dove $w_i = s_1 \dots s_i$. Poiché $w^{-1} = s_d \dots s_1$, possiamo calcolare $w^{-1} \cdot (H, 1)$ applicando prima s_1, poi s_2, etc. Dopo aver applicato $s_1, \dots, s_{i-1}$, avremo un elemento della forma $(w_{i-1}^{-1}H, \varepsilon)$, al quale dobbiamo ancora applicare s_i. Per come abbiamo definito ρ_{s_i}, l'applicazione di s_i cambierà ε in $-\varepsilon$ se e solo se $w_{i-1}^{-1}H = H_i$, dove H_i è il muro tale che $s_i = s_{H_i}$, cioè il segno risulterà cambiato se $w_{i-1}^{-1}H$ è uno dei muri attraversati dalla galleria Γ, che quindi separa C da wC. Quindi $w^{-1}(H, 1) = (w^{-1}H, (-1)^p)$, dove p è il numero di i tali che $H = w_{i-1}H_i$.

Dalla definizione di $\mathcal{H}(w)$, abbiamo che $H \in \mathcal{H}(w)$ se e solo se p è dispari. D'altra parte, $w_{i-1}H_i$ (sempre per definizione) è l'i-esimo muro attraversato da Γ, quindi p è il numero di volte che Γ attraversa H. Questo prova il punto (3) del teorema; per quanto riguarda i punti (1) e (2), mostriamo che seguono immediatamente da (3) e dal lemma che stiamo per enunciare, il quale non richiede che valga la condizione **(A)**. $\square$

Lemma 1.3.2. Per ogni $w \in W$ e per ogni galleria minimale Γ da C a wC, i muri attraversati da Γ sono distinti.

Dimostrazione. Sia Γ la galleria corrispondente alla sequenza di generatori $s_1, \ldots, s_d$. Allora la minimalità di Γ implica che $w = s_1 \ldots s_d$ ha lunghezza d. Supponiamo adesso che i muri attraversati da Γ non siano distinti. Allora abbiamo, con la notazione sopra, che $w_{i-1}H_i = w_{j-1}H_j$ per qualche $i < j$. Passando alla scrittura con le riflessioni associate, questo diventa:

$$w_{i-1}s_iw_{i-1}^{-1} = w_{j-1}s_jw_{j-1}^{-1}$$

o

$$w_iw_{i-1}^{-1} = w_jw_{j-1}^{-1},$$

per come abbiamo definito i w_i infatti si ha che $w_i = w_{i-1}s_i$; oppure si può scrivere in modo equivalente sfruttando sempre la definizione dei w_i in questo modo:

$$w_{i-1}^{-1}w_{j-1} = w_i^{-1}w_j.$$

In termini delle s, quest'ultima equazione mostra che

$$s_i \ldots s_{j-1} = s_{i+1} \ldots s_j;$$

inoltre moltiplicando a destra entrambi i membri dell'uguaglianza per s_j e sfruttando il fatto che s_j ha periodo 2, si ha che

$$s_is_{i+1} \ldots s_{j-1}s_j = s_{i+1} \ldots s_{j-1}.$$

In conclusione questo implica che:

$$w = s_1 \ldots s_d = s_1 \ldots \hat{s}_i \ldots \hat{s}_j \ldots s_d,$$

dove i cappelli indicano le lettere cancellate. Questo contraddice il fatto che $d = l(w)$. □

Osservazione 1.3.1.1. *I punti* (1) *e* (2) *del teorema precedente sono così dimostrati; infatti se* Γ *è una galleria minimale da* C *a* wC *allora per il lemma* *appena dimostrato sappiamo che i muri attraversati dalla galleria sono tutti distinti, cioè attraversati una sola volta (quindi un numero dispari di volte), e sono del tipo* $w_{i-1}H_i$ *(*$i = 1, \dots, d$*); inoltre sono esattamente* $d = l(w)$ *e appartengono tutti all'insieme* $\mathcal{H}(w)$ *per il punto* (3) *del teorema;* (1) *e* (2) *seguono.*

1.4 Condizione (D)

In questa sezione, l'ultima del primo capitolo, vediamo un'altra conseguenza della condizione **(A)**, ovvero la condizione **(D)** che un dato gruppo può o meno soddisfare; segue come corollario della dimostrazione del lemma della sezione precedente, e inoltre vedremo che avrà un ruolo molto importante anche in seguito.

(D) Se $w = s_1 \dots s_d$ con $d > l(w)$, allora ci sono due indici $i < j$ tali che $w = s_1 \dots s_d = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_d$.

Chiameremo questa condizione, la *condizione di cancellazione.* Come corollario del teorema e della dimostrazione del lemma, abbiamo anche il seguente risultato:

Corollario 1.4.1. *Se* (W, S) *soddisfa* ***(A)****, allora soddisfa* ***(D)****.*

Dimostrazione. Supponiamo $w = s_1 \dots s_d$ con $d > l(w)$, e consideriamo la galleria corrispondente Γ da C a wC. Allora abbiamo che Γ non può attraversare d muri distinti, poichè questo implicherebbe, per il punto (3) del teorema precedente, $card(\mathcal{H}(w)) = d$, contraddicendo il punto (1) del teorema. Quindi deve necessariamente esserci un muro attraversato più di una volta da Γ e la prova del lemma mostra che possono essere cancellate due lettere s_i, s_j. □

Osservazione 1.4.0.1. *In realtà nei capitoli successivi dimostreremo che le condizioni* ***(A)*** *e* ***(D)*** *sono due condizioni equivalenti e ci permetteranno di definire una classe di gruppi, che chiameremo* gruppi di Coxeter*, con delle proprietà interessanti.*

1.4.1 Formulazione equivalente di (D)

Definizione 1.4.2 (Parola)**.** Una *parola* nell'insieme dei generatori S di W, è una sequenza $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ di elementi di S.

Occorre prestare attenzione e non confondere una parola $\mathbf{s}$ della forma $(s_1, \ldots, s_d)$, con l'elemento $w = s_1 \ldots s_d \in W$ che essa rappresenta;

Definizione 1.4.3 (Parola ridotta)**.** La parola $(s_1, \ldots, s_d)$ si dice *ridotta* se l'elemento di W corrispondente, $w = s_1 \ldots s_d$ ha lunghezza $l(w) = d$, cioè se non può essere rappresentato da una parola più corta. In questa situazione si dice anche che una data parola è una *decomposizione ridotta* di w, cioè, che l'equazione $w = s_1 \ldots s_d$ è una decomposizione ridotta di w.

Possiamo quindi dare la seguente formulazione equivalente:
(D) Data una parola di lunghezza non minimale possiamo eliminare due lettere che la compongono e ottenere una parola di lunghezza minore che rappresenta lo stesso elemento di W.

Osservazione 1.4.1.1. *Nei capitoli successivi vedremo altre formulazioni equivalenti della condizione* ***(D)****; saranno le condizioni* ***(E)****,* ***(F)*** *e* ***(C)****.*

Capitolo 2

Esempi

2.1 Definizioni preliminari di teoria delle rappresentazioni

In questa sezione diamo delle definizioni utili riguardo la rappresentazione lineare di un gruppo astratto.

L'idea è quella di leggere, attraverso omomorfismi, ogni gruppo come un gruppo di matrici, in modo da confrontare un oggetto astratto con un oggetto in qualche modo più concreto, e di utilizzare le proprietà dell'algebra lineare per poter studiare le proprietà del gruppo stesso.

Definizione 2.1.1 (Rappresentazione lineare di un gruppo)**.** Una rappresentazione lineare di un gruppo G su uno spazio vettoriale V è un omomorfismo di gruppi da G a $GL(V)$. In altre parole una rappresentazione è una mappa: $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ tale che: $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$,$\forall g_1, g_2 \in G$.

In questo caso V viene chiamato *spazio di rappresentazione* e la dimensione di V (consideriamo il caso in cui V abbia dimensione finita) viene chiamata *dimensione* della rappresentazione.

Definizione 2.1.2 (Rappresentazione controgradiente o rappresentazione duale)**.** Sia G un gruppo e $\rho : G \longmapsto GL(V)$ una rappresentazione lineare di G su uno spazio vettoriale V, allora la *rappresentazione duale*, che si dimostra

essere una rappresentazione lineare di G, è la funzione
$\rho^* : G \longmapsto GL(V^*)$, definita nel seguente modo: $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^t$.

Definizione 2.1.3 (Rappresentazione fedele)**.** Sia $\rho : G \longmapsto GL(V)$ una rappresentazione lineare di G; ρ è fedele se

$$Ker(\rho) = \{g \in G; \rho(g) = Id\} = \{1\}.$$

In questo caso diciamo che G agisce *fedelmente* su V e G è isomorfo ad un sottogruppo di $GL(V)$.

Definizione 2.1.4 (Dominio fondamentale)**.** Dato un gruppo G che agisce su uno spazio topologico X, un dominio fondamentale per l'azione del gruppo è un sottoinsieme chiuso di X tale che il suo interno contiene esattamente un punto di ogni orbita, quindi è un insieme di rappresentanti per le orbite.

2.2 Gruppi infiniti che soddisfano (A)

Denotiamo con W un gruppo generato da un sottoinsieme S costituito da elementi di ordine 2. In questa sezione mostriamo due esempi in cui il gruppo W ha ordine infinito e la coppia (W, S) soddisfa la condizione **(A)**; analizzeremo in particolare il caso di gruppi infiniti perché dimostreremo in seguito che non c'è nessuna differenza tra i gruppi finiti che soddisfano la condizione **(A)** e i gruppi di riflessione finiti.

Osservazione 2.2.0.1. *Si può mostrare facilmente che un gruppo di riflessione finito, dove S è l'insieme delle riflessioni rispetto ai muri di una certa camera fissata, soddisfa la condizione **(A)**; infatti siamo arrivati ad enunciare la condizione **(A)** avendo fatto delle ipotesi che sappiamo essere soddisfatte da questi ultimi. D'altra parte, si può dimostrare che ogni gruppo finito che soddisfa la condizione **(A)**, è un gruppo di riflessione finito, e questo verrà mostrato alla fine dell'ultimo capitolo di questo elaborato.*

2.2.1 Il gruppo D_∞

In questa sottosezione W denota il gruppo diedrale di ordine infinito D_∞, definito tramite la seguente presentazione:

$$\langle s, t; s^2 = t^2 = 1 \rangle.$$

Osservazione 2.2.1.1. *Per ottenere una presentazione di questo tipo basta considerare il gruppo libero generato da s e da t, $F = F(s,t)$ e poi quozientarlo con il più piccolo sottogruppo normale che contiene s^2 e t^2.*

Si può inoltre notare che i gruppi diedrali finiti della forma D_{2m} sono dei quozienti di W, infatti ammettono una presentazione della forma:

$$D_{2m} = \langle s, t; s^2 = t^2 = (st)^m = 1 \rangle.$$

Osservazione 2.2.1.2. *Le immagini di s e t nel quoziente W sono distinte e non banali, quindi senza creare confusione possiamo denotare queste immagini con le stesse lettere s e t. Segue inoltre che st ha ordine infinito e quindi che anche il gruppo W è infinito.*

Proposizione 2.2.1. *Sia $W = \langle s, t; s^2 = t^2 = 1 \rangle$ e $S = \{s, t\} \subset W$; la coppia (W, S) soddisfa la condizione **(A)**.*

Dimostrazione. Per come abbiamo definito W, ovvero tramite una presentazione, non risulta difficile trovare degli omomorfismi tra W e altri gruppi; infatti basta trovare due elementi nel gruppo con cui vogliamo stabilire l'omomorfismo che al quadrato siano banali e si ottiene un omomorfismo che porta s e t nei due elementi del gruppo.

In particolare se vogliamo studiare l'azione di W su un dato insieme, per esempio proprio $\mathcal{H} \times \{\pm 1\}$, ci basterà specificare le involuzioni ρ_s e ρ_t di questo insieme e fare agire s e t rispettivamente come ρ_s e ρ_t. Quindi si può definire un'azione di W su $\mathcal{H} \times \{\pm 1\}$, ovvero una mappa

$$W \times \mathcal{H} \times \{\pm 1\} \longmapsto \mathcal{H} \times \{\pm 1\},$$

tale che $(s, (H, \varepsilon)) \longmapsto \rho_s(H, \varepsilon)$ e $(t, (H, \varepsilon)) \longmapsto \rho_t(H, \varepsilon)$. Siccome ρ_s e ρ_t definite precedentemente sono automaticamente involuzioni si ha che la condizione **(A)** è verificata. $\square$

2.2.2 Il gruppo $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{Z})$

Sia $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$ il gruppo delle matrici invertibili 2×2 a coefficienti nell'anello degli interi $\mathbf{Z}$. Sia $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{Z})$ il quoziente di $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$ con il sottogruppo centrale di ordine 2 generato da -1 (la matrice identità con il segno meno davanti).

Notazioni:

- Un elemento $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$ lo denotiamo con:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

- Un elemento di $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{Z})$, ovvero l'immagine nel quoziente di un elemento $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$, lo denotiamo con:

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Osservazione 2.2.2.1. *Il gruppo $W = \boldsymbol{PGL}_2(\boldsymbol{Z})$ ammette un insieme di generatori $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, dove gli s_i $(i = 1, 2, 3)$ sono elementi di ordine 2; in particolare si ha che:*

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, s_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si può mostrare, facendo il calcolo esplicito, che gli elementi s_1s_2, s_1s_3 e $s_2s_3 \in W$ hanno ordine 3,2 e ∞ rispettivamente; inoltre si può dimostrare che W ammette la seguente presentazione, nella quale le relazioni specificano l'ordine dei diversi prodotti tra i generatori , ovvero:

$$W = \langle s_1, s_2, s_3; s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = (s_1s_2)^3 = (s_1s_3)^2 = 1\rangle.$$

Proposizione 2.2.2. *Sia $W = \boldsymbol{PGL}_2(\boldsymbol{Z})$ e $S = \{s_1, s_2, s_3\}$; allora (W, S) soddisfa la condizione **(A)**.*

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione dobbiamo provare che le involuzioni $\rho_i = \rho_{s_i}$ di cui si parla nella condizione **(A)** soddisfano le relazioni che compaiono nella definizione di W. Senza perdita di generalità lo dimostriamo per la relazione $(\rho_1\rho_2)^3 = 1$, e poi con un ragionamento analogo si dimostra anche per $(\rho_1\rho_3)^2 = 1$.

Sia $S' = \{s_1, s_2\}$, e sia $W' = D_{2m}$ con $m = 3$, il gruppo diedrale di ordine 6 generato da S'; il gruppo W' ammette la seguente presentazione:

$$W' = \langle s_1, s_2; s_1^2 = s_2^2 = (s_1s_2)^3 = 1\rangle,$$

e le riflessioni del gruppo, che per definizione sono gli elementi di W' coniugati a s_1 e s_2, formano un sottoinsieme delle riflessioni di W; di conseguenza l'insieme $\mathcal{H}'$ dei W'-muri è un sottoinsieme dell'insieme $\mathcal{H}$ dei W-muri.

Supponiamo adesso di applicare $(\rho_1\rho_2)^3$ ad un elemento $(H, \varepsilon) \in \mathcal{H} \times \{\pm1\}$; l'unica cosa che dobbiamo controllare è che, applicando successivamente le ρ_i, il segno nel secondo fattore non cambi; infatti vogliamo dimostrare che $(\rho_1\rho_2)^3$ è l'identità su $\mathcal{H} \times \{\pm1\}$. Il segno cambia, per come abbiamo definito ρ_s, se e solo se $w'H \in \mathcal{H}'$ per qualche $w' \in W'$, e in questo caso si ha che $H \in \mathcal{H}'$. Quindi ci basta mostrare che l'elemento $(\rho_1\rho_2)^3$ è l'identità ristretto a $\mathcal{H}' \times \{\pm1\}$; questo segue dal fatto che W' è un gruppo di riflessione finito e quindi sappiamo già che soddisfa la condizione **(A)**. $\square$

2.3 Il gruppo D_∞ e la geometria euclidea

In questa sezione W denota il gruppo D_∞; l'obbiettivo è quello di mostrare utilizzando un altro approccio che W soddisfa la condizione **(A)**; in particolare lo mostriamo dal punto di vista della geometria euclidea.

Facciamo agire W come un gruppo di isometrie della retta reale L; in particolare s agisce come la riflessione rispetto a 0, ovvero, come l'applicazione $L \longrightarrow L$ tale che $x \longmapsto -x$, mentre t come la riflessione rispetto a 1, ovvero, come l'applicazione $L \longrightarrow L$ tale che $x \longmapsto 2 - x$. Quindi W agisce come un gruppo di *trasformazioni affini* della forma $x \longmapsto ax + b$.

Osservazione 2.3.0.1. *Si può notare che all'azione di W corrisponde una geometria delle camere, analoga a quella che si ha per i gruppi di riflessione finiti. Di seguito mostriamo con una figura, nella quale C denota l'intervallo unitario aperto, quello che succede:*

$$\cdots \;\circ\; stC \;\bullet\; sC \;\circ\; C \;\bullet\; tC \;\circ\; tsC \;\bullet\; \cdots$$

I vertici nella figura sono i numeri interi della retta reale; li abbiamo indicati con due colori diversi per mostrare più chiaramente le due orbite sotto l'azione di W.

Identifichiamo l'insieme astratto $\mathcal{H}$ con l'insieme degli interi della retta reale L e l'insieme $\mathcal{H} \times \{\pm 1\}$ con l'insieme delle semi-rette che hanno come punto finale un numero intero; si ha che l'azione di W sulla retta L induce un'azione di W sull'insieme delle semi-rette e la condizione **(A)** segue.

2.4 Rappresentazione lineare di D_∞

Prima di concludere il secondo capitolo, proponiamo un terzo e ultimo approccio per verificare che D_∞ soddisfa la condizione **(A)**: l'algebra lineare; in particolare troveremo una rappresentazione di D_∞ che prende il nome di *rappresentazione canonica lineare.*

2.4.1 Linearizzazione di un'azione affine

Denotiamo con W il gruppo diedrale di ordine infinito, D_∞.

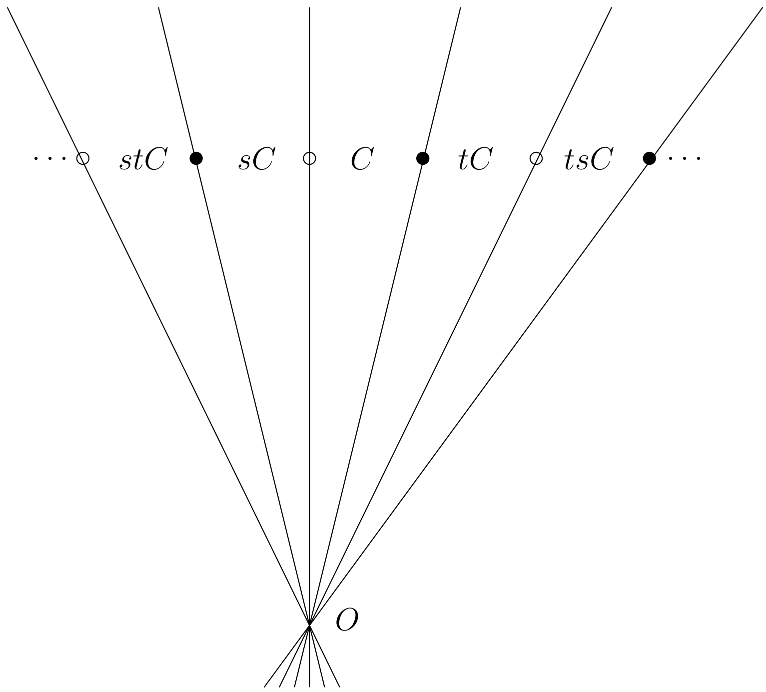
Osservazione 2.4.1.1. *Quello che vogliamo fare è cercare di "linearizzare" l'azione di D_∞ che abbiamo trattato nella sezione precedente; in generale esiste un metodo che ci permette di raggiungere il nostro obbiettivo, che consiste nell'immergere lo spazio affine che stiamo considerando in uno spazio vettoriale di dimensione maggiore. In particolare vediamo lo spazio che stiamo considerando come un iperpiano affine, cioè il traslato di un iperpiano lineare, in uno spazio vettoriale più grande di una dimensione.*

Identifichiamo la retta reale L con la retta affine $y = 1$ nel piano $V = \mathbf{R}^2$; in questo modo si ha che l'azione affine di W su L può essere estesa ad un'azione lineare di W su tutto V. In modo esplicito, poiché vogliamo che $s(x,1) = (-x,1)$ e $t(x,1) = (2-x,1)$, poniamo $s(x,y) = (-x,y)$ e $t(x,y) = (2y-x,y)$.

In altre parole facciamo agire s e t rispettivamente come le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'azione di W su V è mostrata nella figura seguente:



In particolare C è il cono sopra l'intervallo unitario sulla retta $y = 1$. Identifichiamo $\mathcal{H}$ con l'insieme dei muri delle camere mostrate nella figura, i quali sono degli iperpiani lineari dello spazio vettoriale V e inoltre identifichiamo l'insieme $\mathcal{H} \times \{\pm 1\}$ con l'insieme dei semi-piani delimitati da questi muri.

Osservazione 2.4.1.2. *Si può notare che la condizione **(A)** segue dall'azione di W su questi semi-piani.*

2.4.2 Confronto tra D_∞ e gruppi di riflessione finiti

Definizione 2.4.1 (Riflessione lineare)**.** Denotiamo con V uno spazio vettoriale reale, non necessariamente dotato di un prodotto interno, allora una *riflessione lineare* su V è una mappa lineare che è l'identità su un certo iperpiano (lineare) H ed è la moltiplicazione per -1 su un certo complemento di H, cioè su un sottospazio H' di dimensione 1, tale che $V = H \oplus H'$.

Osservazione 2.4.2.1. *Gli elementi s e t che abbiamo definito precedentemente agiscono come delle* riflessioni lineari *su V.*

Osservazione 2.4.2.2. *Le riflessioni con cui si ha a che fare nel caso di gruppi di riflessione finiti, in cui V ha un prodotto interno e $H' = H^\perp$, vengono chiamate* riflessioni ortogonali*, proprio per distinguerle dalle riflessioni lineari più generali che abbiamo definito sopra.*

Notiamo inoltre che queste ultime, a differenza delle riflessioni ortogonali, non sono univocamente determinate dal loro iperpiano H di punti fissi; più precisamente, dato H, il sottospazio H' non è univocamente determinato.

Osservazione 2.4.2.3. *In questo esempio, in analogia con il caso di gruppi di riflessione finiti, il gruppo W è generato da riflessioni lineari i cui iperpiani associati sono i due muri della "camera fondamentale" C.*

Inoltre è vero che $\overline{C}$ è un dominio fondamentale per l'azione di W sull'insieme: $\cup_{w\in W} w\overline{C}$. Ma in questo caso l'unione non è tutto lo spazio vettoriale V; piuttosto è il cono convesso formato dal semipiano superiore aperto a cui va aggiunta l'origine.

2.4.3 Rappresentazione canonica di D_∞

Viene naturale chiedersi come saremmo potuti risalire alla rappresentazione di $W = D_\infty$ come un *gruppo di riflessione lineare* se non avessimo avuto il legame tra W e la geometria euclidea; daremo una risposta a questa domanda in modo da poter applicare un ragionamento analogo in generale, quando non abbiamo a disposizione un'analisi geometrica come quella vista precedentemente.

Prima di procedere, enunciamo tre risultati che ci saranno utili:

Lemma 2.4.2. Se s è una riflessione lineare su uno spazio vettoriale V di dimensione 2, le uniche rette affini s-invarianti, non passanti per l'origine, sono quelle parallele all'autospazio relativo all'autovalore -1.

Lemma 2.4.3. Due riflessioni lineari s e t di V hanno una retta invariante in comune, non passante per l'origine, se e solo se hanno lo stesso autospazio relativo all'autovalore -1.

Lemma 2.4.4. Se s e t hanno lo stesso autospazio relativo all'autovalore 1, allora le riflessioni indotte s^* e t^* su $V^* = Hom(V, \mathbf{R})$ hanno lo stesso autospazio relativo all'autovalore -1.

Sia quindi $W = D_\infty$, scriviamo al posto di s e t rispettivamente s_1 e s_2 e introduciamo la matrice di Coxeter $M = (m_{ij})$, dove m_{ij} è l'ordine dell'elemento $s_i s_j$; in questo caso M è:

$$\begin{pmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{pmatrix},$$

e il diagramma di Coxeter corrispondente è: $\circ \overset{\infty}{\text{---}} \circ$.

Nonostante alcuni degli m_{ij} siano infiniti possiamo comunque definire la matrice $A = (a_{ij})$, dove $a_{ij} = -\cos(\pi/m_{ij})$; in questo caso si ha che la matrice A è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia B la forma bilineare di $\mathbf{R}^2$ associata alla matrice A, cioè, tale che $B(e_i, e_j) = a_{ij}$ e denotiamo $\mathbf{R}^2$ dotato della forma bilineare B con V'. Notiamo che B è una forma *degenere*, infatti la sua matrice è singolare, e quindi in particolare non può essere un prodotto interno. Nonostante questo, possiamo comunque definire le riflessioni s'_1 e s'_2 in V' utilizzando la seguente formula:

$$s'_i x = x - 2B(e_i, x)e_i.$$

Per ogni $i = 1, 2$ questa è la formula di una riflessione lineare; infatti s'_i porta e_i in $-e_i$ e inoltre è l'identità ristretta all'iperpiano $e_i^{\perp} = \{x \in V' : B(e_i, x) = 0\}$.

Le due riflessioni hanno autospazio relativo all'autovalore -1 diverso ma hanno lo stesso autospazio relativo all'autovalore 1; questo perchè le applicazioni lineari $B(e_1, -)$ e $B(e_2, -)$ sono una l'opposta dell'altra. Quindi si può affermare che $e_1^{\perp} = e_2^{\perp}$.

Per il secondo lemma, si ha che questa azione lineare di W non è la *linearizzazione* di un'azione affine su una retta; d'altra parte per l'ultimo lemma si ha che, passando allo spazio duale V di V', le riflessioni indotte $(s'_1)^* = s_1$ e $(s'_2)^* = s_2$ hanno lo stesso autospazio relativo all'autovalore -1 e quindi hanno una retta invariante L in comune.

In particolare si può dedurre che l'azione risultante di W su V ha una *geometria delle camere* come quella raffigurata nella figura all'inizio della discussione.

Osservazione 2.4.3.1. *Concludendo questo esempio, abbiamo una rappresentazione di W su uno spazio vettoriale $V = (V')^*$ in cui c'è una decomposizione delle camere analoga a quella che si ha nel caso dei gruppi di riflessioni finiti; inoltre la rappresentazione duale (W che agisce su V') ha delle formule algebriche comode come nel caso dei gruppi di riflessione finiti. Quello che cambia rispetto a questi ultimi è che in questo caso abbiamo la geometria delle camere e le formule algebriche in due spazi vettoriali diversi; questo perchè nel caso dei gruppi di riflessione finiti avevamo una forma bilineare W-invariante non degenere su V, cioè il prodotto interno $\langle -, - \rangle$ e potevamo identificare V con il suo spazio duale quando avevamo una forma bilineare di questo tipo.*

Capitolo 3

Conseguenze della condizione di cancellazione

3.1 Conseguenze della condizione (D)

In questa sezione W denota un gruppo generato da un sottoinsieme S costituito da elementi di ordine 2. Vogliamo mostrare delle conseguenze della condizione **(D)**, in particolare le condizioni **(E)** ed **(F)**.

3.1.1 Condizione (E)

(E) Dati $w \in W$, $s \in S$, e una decomposizione ridotta $w = s_1 \dots s_d$ di w allora $l(sw) = d + 1$, oppure c'è un indice i tale che $w = ss_1 \dots \hat{s}_i \dots s_d$.

Proposizione 3.1.1. ***(D)*** *implica* ***(E)****.*

Dimostrazione. Sia $l(sw) < d + 1$, allora per la condizione **(D)** sappiamo che $sw = ss_1 \dots s_d$ con due lettere cancellate. Necessariamente una delle due lettere cancellate da sw deve essere s, infatti: se esistessero due indici $i < j$ tali che $sw = ss_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_d$, allora avremmo $w = s^2 s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_d$ e poiché $s^2 = 1$ si avrebbe che $l(w) < d$, che contraddice l'ipotesi. Moltiplichiamo per s, ricordando che $l(w) = d$, e otteniamo $w = ss_1 \dots \hat{s}_i \dots s_d$. $\square$

Osservazione 3.1.1.1. *Per visualizzare meglio la condizione* ***(E)****, notiamo che per* (W, S) *abbiamo le seguenti possibilità:*

1. $l(sw) = l(w) + 1$;

2. $l(sw) = l(w) - 1$;

3. $l(sw) = l(w)$;

In particolare si ha $l(sw) = l(w)+1$ *se e solo se possiamo ottenere una decomposizione ridotta di* sw *mettendo* s *davanti a una decomposizione ridotta di* w *e* $l(sw) = l(w)-1$ *si verifica se e solo se* w *ammette una decomposizione ridotta che inizia per* s.

Lo scopo della condizione **(E)** è quello di mostrare che la terza possibilità non è ammessa e inoltre ci mostra che se si verifica $l(sw) = l(w)-1$, è sempre possibile trovare una decomposizione ridotta di w che inizia per s a partire da una decomposizione ridotta arbitraria di $w = s_1 \dots s_d$, "scambiando" una lettera s_i $(i = 1 \dots d)$ con una s davanti.

Osservazione 3.1.1.2. *La condizione* ***(E)*** *viene chiamata per questo motivo condizione di scambio.*

Osservazione 3.1.1.3. *Notiamo che, nonostante la condizione* ***(E)*** *sembri "asimmetrica" a prima vista, poiché prende in considerazione solo la moltiplicazione a sinistra per un elemento di* S*, in realtà non lo è; infatti se* ***(E)*** *vale, possiamo formularla allo stesso modo applicandola a* w^{-1} *e si deduce una formulazione della condizione di scambio equivalente che coinvolge la moltiplicazione a destra.*

3.1.2 Condizione (F)

Mostriamo adesso una conseguenza della condizione **(E)**, vale a dire la condizione **(F)**:

(F) Dati $w \in W$ e $s, t \in S$ tali che $l(sw) = l(w) + 1$ e $l(wt) = l(w) + 1$, allora $l(swt) = l(w) + 2$ oppure $swt = w$.

Osservazione 3.1.2.1. *Come vedremo nel seguito, la condizione* ***(F)*** *prende anche il nome di condizione pieghevole.*

Proposizione 3.1.2. *La condizione* ***(E)*** *implica la condizione* ***(F)****.*

Dimostrazione. Sia $w = s_1 \dots s_d$ una decomposizione ridotta di w; si ha che allora $s_1 \dots s_d t$ è una decomposizione ridotta di wt.

Applicando **(E)** a s e wt, si conclude che $l(swt) = l(w) + 2$ oppure possiamo scambiare una delle lettere di $s_1 \dots s_d t$ per una s davanti. Nel secondo caso la lettera che scambiamo con la s non può essere una delle s_i poiché sarebbe in contraddizione con l'ipotesi che $l(sw) = d + 1$, quindi la lettera che scambiamo deve essere la t finale. Concludendo abbiamo che $wt = sw$, ovvero $swt = w$. □

3.1.3 Equivalenza di (D), (E) e (F)

Finora abbiamo mostrato che **(D)** $\Longrightarrow$ **(E)** $\Longrightarrow$ **(F)**; quello che mostriamo in questa sezione è che in realtà queste tre condizioni sono equivalenti tra loro;

Proposizione 3.1.3. *Le condizioni* ***(D)****,* ***(E)*** *ed* ***(F)*** *sono equivalenti.*

Dimostrazione. Ci basta mostrare che **(F)** implica **(D)** per dimostrare la proposizione.

Supponiamo $w = s_1 \dots s_d$ con $d > l(w)$. Assumiamo che valga la condizione **(F)**, e mostriamo per induzione su d che possiamo eliminare due lettere, ovvero che vale la condizione **(D)**.

Se uno degli elementi $s_1 \dots s_{d-1}$ e $s_2 \dots s_d$ ha lunghezza minore di $d - 1$, allora per l'ipotesi induttiva abbiamo che la condizione **(D)** è verificata; supponiamo quindi abbiano entrambi lunghezza $d - 1$.

Sia $w' = s_2 \dots s_{d-1}$ (questa scrittura ha senso perché necessariamente $d \geq 2$); allora si ha che $l(s_1 w') = l(w') + 1 = l(w' s_d)$ e $l(s_1 w' s_d) = l(w) < l(w') + 2 = d$, che è vero per ipotesi $l(w) < d$. La condizione **(F)** implica $s_1 w' s_d = w'$, cioè, $w = \hat{s_1} s_2 \dots s_{d-1} \hat{s_d}$, quindi possiamo eliminare due lettere dalla scrittura di w; la condizione **(D)** vale. □

3.2 Applicazione della condizione (F)

Anche se abbiamo dato solo una definizione intuitiva dei semispazi in Σ, mostriamo, come applicazione della condizione **(F)**, come costruire delle mappe che "piegano" Σ lungo un muro.

In particolare vogliamo costruire per un fissato $s = s_H \in S$ la mappa ϕ che, intuitivamente, piega Σ sopra il semispazio Φ determinato da H che contiene la camera fondamentale C.

3.2.1 Costruzione di "piegamenti"

Prima di costruire Φ e ϕ, ricordiamo cosa può succedere ad un elemento $w \in W$;

Osservazione 3.2.1.1. *Dato $w \in W$ abbiamo due opzioni possibili:*

1. $l(sw) = l(w) - 1$;
2. $l(sw) = l(w) + 1$;

Nel primo caso, abbiamo che w ammette una decomposizione ridotta che inizia per s, cioè, c'è una galleria minimale della forma $C, sC, \ldots, wC$; inoltre ci aspettiamo che H separi C da wC e quindi che $wC \notin \Phi$.

Nel secondo caso, c'è una galleria minimale della forma $C, sC, \ldots, swC$; quindi ci aspettiamo che $swC \notin \Phi$ ma che la sua "immagine riflessa" $wC \in \Phi$.

Proposizione 3.2.1. *Supponiamo che (W, S) soddisfi la condizione **(D)**, **(E)**, ed **(F)**; sia $s \in S$, e sia $\mathcal{C}$ l'insieme delle camere del poset Σ. Allora c'è una funzione $\phi = \phi_s : \mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C}$ tale che:*

1. *ϕ è una retrazione sull'immagine Φ, che consiste nelle camere wC tali che $l(sw) = l(w) + 1$;*
2. *Ogni camera in Φ è l'immagine tramite ϕ di esattamente una camera nel complemento Φ' di Φ;*

3. L'azione di s sull'insieme $\mathcal{C}$ scambia gli insiemi Φ e Φ';

4. ϕ porta camere adiacenti in camere adiacenti;

Dimostrazione. Definiamo ϕ nel modo seguente:

$$\phi(wC) = \begin{cases} wC, & l(sw) = l(w) + 1 \\ swC, & l(sw) = l(w) - 1 \end{cases} .$$

Da questa definizione seguono direttamente (1), (2) e (3).

Ora verifichiamo (4), che è il punto che ci permetterà di estendere ϕ ad una mappa su tutto il poset Σ. In realtà proveremo una versione del punto (4) più precisa, ovvero, che ϕ porta camere $t-$adiacenti in camere $t-$adiacenti, per ogni $t \in S$.

Assumiamo $wC \neq wtC$ e $l(wt) = l(w) + 1$ poiché, a meno di scambiare il ruolo di w e wt, la seconda condizione che abbiamo scritto vale; in particolare se $l(wt) = l(w) - 1$ significa che w ammette una decomposizione ridotta che finisce per t, quindi abbiamo che $l(w) = l(wt) + 1$ e scambiando w con wt si ha quello che volevamo.

Abbiamo due casi distinti da considerare:

- $l(sw) = l(w) + 1$.

  Per definizione di ϕ si ha che $\phi(wC) = wC$. Se $l(swt) = l(wt) + 1$, allora $\phi(wtC) = wtC$, che è $t-$adiacente a $\phi(wC) = wC$; se invece $l(swt) \neq l(wt) + 1$, la condizione **(F)** ci dice che $swt = w$. Abbiamo che $\phi(wtC) = swtC = wC$, dove $wC = \phi(wC)$ e quindi è $t-$adiacente a $\phi(wtC)$ come volevamo mostrare.

- $l(sw) = l(w) - 1$.

  Se siamo in questa situazione significa che w ammette una decomposizione ridotta che inizia per s, quindi di conseguenza anche wt. Allora abbiamo che $\phi(wtC) = swtC$, che è $t-$adiacente a $swC = \phi(wC)$ e si conclude la dimostrazione.

$\square$

3.3 Problema delle parole

In generale con il termine "problema delle parole" nell'ambito dell'algebra astratta si intende la seguente questione: data una presentazione di una struttura algebrica tramite un insieme di generatori e relazioni, stabilire quando due espressioni diverse rappresentano lo stesso elemento.

In particolare il problema delle parole per (W, S) è il seguente: date due parole $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ e $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_e)$ vogliamo riuscire a stabilire se rappresentano lo stesso elemento di W. In generale il problema non ammette una soluzione, ma vedremo che nel caso in cui il gruppo che si considera soddisfa la condizione **(D)**, o condizioni equivalenti ad essa, c'è un teorema che ci permette di dare una risposta alla questione iniziale.

3.3.1 $W = D_{2m}$

Sia W, il gruppo diedrale di ordine $2m$, con $2 \leq m \leq \infty$.

Osservazione 3.3.1.1. *Possiamo supporre di considerare "parole alternanti", cioè, parole in cui non compaiono delle s e delle t consecutive, poiché $s^2 = t^2 = 1$.*

Osservazione 3.3.1.2. *Possiamo inoltre assumere di considerare parole al massimo lunghe m; infatti, la relazione $(st)^m = 1$, quando $m < \infty$, può essere riscritta come $stst \cdots = tsts \dots$, dove entrambi i lati hanno lunghezza m.*

Da questo segue che in ogni parola di lunghezza maggiore di m possiamo prendere una sottoparola $(s, t, \dots)$ di lunghezza m, e sostituirla con la parola $(t, s, \dots)$ di lunghezza m, in modo da creare delle sottoparole della forma (s, s) o (t, t) che possono essere eliminate.

Quindi il problema delle parole di lunghezza minore o uguale ad m ha la seguente soluzione: le due parole di lunghezza m, quando $m < \infty$, rappresentano lo stesso elemento di D_{2m}; tutte le altre coppie di parole alternanti e distinte di lunghezza minore di m rappresentano elementi diversi e segue dal fatto che l'ordine di st è proprio m.

3.3.2 (W, S) arbitrario

Sia $M = (m(s,t))_{s,t \in S}$ la matrice di Coxeter di (W, S), dove $m(s,t)$ è l'ordine di st.

Definizione 3.3.1 (M-operazione elementare)**.** Per M-operazione elementare su una parola intendiamo una delle seguenti operazioni:

1. Eliminare una sottoparola della forma (s, s);
2. Dati $s, t \in S$ con $s \neq t$ e $m(s,t) < \infty$, sostituire una sottoparola alternante della forma $(s, t, \dots)$ di lunghezza $m = m(s,t)$ con la parola alternante $(t, s, \dots)$ di lunghezza m;

Definizione 3.3.2 (Parola M-ridotta)**.** Una parola si dice $M-$ridotta se non può essere accorciata da una sequenza finita di M-operazioni elementari.

Osservazione 3.3.2.1. *Data una parola è possibile descrivere tutte le parole ottenibili a partire da quest'ultima tramite M-operazioni elementari. In modo analogo, è possibile decidere quando una parola* $\boldsymbol{s}$ *può essere trasformata in una parola data* $\boldsymbol{t}$ *tramite delle operazioni M-elementari.*

3.3.3 Soluzione nel caso in cui vale (D)

Il seguente teorema ci permette di trovare una soluzione al problema delle parole nel caso in cui vale la condizione **(D)**:

Teorema 3.3.3. *Assumiamo che* (W, S) *soddisfi la condizione* ***(D)****, allora si ha che:*

1. *Una parola è ridotta se e solo se è* $M-$*ridotta;*
2. *Se* $\boldsymbol{s}$ *e* $\boldsymbol{t}$ *sono ridotte, allora rappresentano lo stesso elemento di* W *se e solo se* $\boldsymbol{s}$ *può essere trasformata in* $\boldsymbol{t}$ *tramite delle M-operazioni elementari di tipo* (2)*;*

Dimostrazione. Iniziamo con il dimostrare il secondo punto del teorema; supponiamo che $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ e $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$ siano due parole ridotte che rappresentano lo stesso elemento $w \in W$. Dimostriamo per induzione su $d = l(w)$ che $\mathbf{s}$ può essere trasformata in $\mathbf{t}$ tramite delle operazioni di tipo (2) (questa è l'unica implicazione che proviamo perché se due parole non rappresentano lo stesso elemento del gruppo, ovviamente non possono essere trasformate l'una nell'altra tramite M-operazioni elementari).

Sia $s = s_1$ e sia $t = t_1$; ci sono due possibilità:

- $s = t$. Allora possiamo cancellare la prima lettera da entrambi i membri dell'equazione
$$s_1 \dots s_d = t_1 \dots t_d,$$
e per l'ipotesi induttiva abbiamo che possiamo passare da $\mathbf{s}$ a $\mathbf{t}$ tramite operazioni di tipo (2).

- $s \neq t$. Allora per dimostrare il risultato in questo caso facciamo vedere che $m = m(s,t)$ è finito e che w ammette una terza decomposizione ridotta $\mathbf{u}$, che inizia con la parola alternante $(s, t, s, t, \dots)$ di lunghezza m.

Assumiamo per il momento che quanto appena affermato sia vero; sia **u'** la parola ottenuta da $\mathbf{u}$ scambiando il segmento iniziale di lunghezza m con la parola $(t, s, t, s, \dots)$ di lunghezza m. Possiamo quindi passare da $\mathbf{s}$ a $\mathbf{t}$ nel seguente modo:
$$\mathbf{s} \longmapsto \mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u'} \longmapsto \mathbf{t},$$
dove la prima e la terza operazione sono del tipo del caso precedente $(s = t)$ e la seconda è un'operazione di tipo (2).

Proviamo ora che $m < \infty$ e che $\mathbf{u}$ esiste. La strategia che usiamo è quella di applicare la condizione di scambio, ovvero, la condizione **(E)**, ripetutamente. Poiché w ammette una decomposizione ridotta che inizia per t, ne possiamo trovare una scambiando una delle lettere in $(s, s_2, \dots, s_d)$ per una t davanti. Osserviamo che la lettera che verrà scambiata con la t non può essere la s iniziale, poiché potremmo poi cancellare $s_2 \dots s_d$ e avremmo che $s = t$, mentre siamo nell'ipotesi in cui $s \neq t$. Quindi deve necessariamente essere una delle altre lettere e in questo modo otteniamo una decomposizione ridotta di w che inizia con (t, s). A questo punto se $m = 2$ abbiamo finito perché (t, s) può essere sostituito con (s, t); se invece $m \geq 3$ continuiamo: sappiamo che w ammette una decomposizione ridotta che inizia per s, quindi possiamo trovarne una partendo dalla decomposizione di w appena ottenuta, cioè, $w = ts \dots$ e scambiando una delle lettere per una s davanti. A questo punto, ragionando in modo analogo, si ha che la lettera che scambiamo non può appartenere al segmento iniziale di lunghezza 2, poiché questo sarebbe in contraddizione con la discussione fatta a proposito di D_{2m}, cioè, avremmo che $w = ts \cdots = st \dots$ ma $st \neq ts$ perché $m > 2$; quindi deve necessariamente essere una delle lettere dopo il segmento iniziale di lunghezza 2. A questo punto sappiamo che $d \geq 3$, e abbiamo una decomposizione ridotta di w che inizia con (s, t, s). Se $m = 3$, abbiamo concluso; altrimenti facciamo uno scambio a partire dall'ultima decomposizione di w che abbiamo ottenuto per avere una decomposizione di w con una t davanti.

Possiamo continuare questo ragionamento fino a quando il segmento iniziale avrà lunghezza minore di m; poiché la lunghezza deve essere sempre minore o uguale a d segue che $m \leq d < \infty$ e inoltre è possibile trovare un segmento iniziale alternante lungo m, come avevamo affermato.

Dimostriamo adesso, per induzione su d, il primo punto del teorema; l'unica implicazione che proviamo è che se $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ non è una parola ridotta allora può essere accorciata tramite delle operazioni M-elementari. Se la sottoparola **s'** $= (s_2, \dots, s_d)$ non è ridotta, allora per l'ipotesi induttiva abbiamo concluso; assumiamo quindi che **s'** sia ridotta e poniamo $w' = s_2 \dots s_d$. Poiché, $l(s_1 w') < l(w') + 1$, possiamo trovare una decomposizione ridotta di w' che inizia per s_1 e poniamo **t'** $= (s_1, t_1, \dots, t_{d-2})$. Per il secondo punto del teorema, possiamo passare da **s'** a **t'** con delle M-operazioni, quindi possiamo trasformare $\mathbf{s}$ in $(s_1, s_1, t_1, \dots, t_{d-2})$ che può essere ulteriormente ridotta a $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{d-2})$ con un'operazione di tipo (1). $\square$

3.4 Conseguenze

Osservazione 3.4.0.1. *Questa soluzione del problema delle parole mostra che possiamo dare una descrizione completa degli elementi $w \in W$ tramite la matrice di Coxeter associata a (W, S).*

Dato un gruppo di riflessione finito W, con una camera fissata C e con S l'insieme delle riflessioni rispetto ai muri di C, avevamo già un risultato importante; infatti assumendo (W, V) essenziale, (W, V) era completamente determinato, a meno di isomorfismi, da $M = (m_{ij})$, cioè, dalla sua matrice di Coxeter $n \times n$ $(n = dim(V))$. Adesso siamo in grado di generalizzare questo risultato nel caso di gruppi astratti che verificano la condizione **(D)**, infatti:

Corollario 3.4.1. *Se (W, S) soddisfa **(D)**, allora W è determinato, a meno di isomorfismi, dalla sua matrice di Coxeter $M = (m(s,t))_{s,t\in S}$.*

In maniera più precisa si ha che:

Corollario 3.4.2. *Se (W, S) soddisfa **(D)**, allora W ammette la seguente presentazione:*

$$W = \langle S; (st)^{m(s,t)} = 1\rangle,$$

dove c'è una relazione per ogni s, t con $m(s,t) < \infty$.

Dimostrazione. Sia $\widetilde{W}$ il gruppo astratto definito dalla presentazione dell'enunciato; consideriamo la proiezione canonica $\widetilde{W} \twoheadrightarrow W$. Un elemento $\widetilde{w}$ che appartiene al nucleo può essere rappresentato, per il teorema precedente, da una parola **s** che può essere ridotta alla parola vuota tramite operazioni M-elementari; ma le M-operazioni non cambiano l'elemento di $\widetilde{W}$ rappresentato da una parola, quindi si ha che $\widetilde{w} = 1$. Da questo segue che la proiezione canonica è $1-1$ e poiché è anche banalmente suriettiva, W ammette una presentazione come nell'enunciato. □

Corollario 3.4.3. *Assumiamo che (W, S) soddisfi la condizione **(D)**, allora per ogni $w \in W$ c'è un sottoinsieme $S(w) \subseteq S$ tale che tutte le decomposizioni ridotte di w sono costituite esattamente dalle lettere di $S(w)$. In più $S(w)$ è il più piccolo sottoinsieme $S' \subseteq S$ tale che $w \in \langle S'\rangle$.*

Dimostrazione. La prima affermazione segue direttamente dal teorema della sezione precedente perché le M-operazioni di tipo (2) non cambiano l'insieme delle lettere che costituiscono le parole.

Supponiamo che S' sia un sottoinsieme arbitrario di S con $w \in \langle S' \rangle$; allora possiamo ottenere una decomposizione ridotta di w a partire da una parola costituita da elementi di S' che rappresenta w e applicare ripetutamente la condizione **(D)** fino a che non si ottiene una parola ridotta; quindi $S(w) \subseteq S'$. □

Capitolo 4

Gruppi di Coxeter

4.1 Condizione (C)

In questa sezione W denota un gruppo e S un insieme di generatori del gruppo di ordine 2. Abbiamo visto nel capitolo precedente che se la condizione **(D)** è soddisfatta il gruppo ammette una presentazione in cui le relazioni tra i generatori specificano l'ordine dei prodotti tra essi.

4.1.1 Condizione di Coxeter

Diamo una nuova condizione, la condizione **(C)**, che (W, S) può o non può soddisfare:

(C) W ammette la presentazione

$$\langle S; (st)^{m(s,t)} = 1 \rangle,$$

dalla quale segue che $m(s,t)$ è l'ordine del prodotto st e c'è una relazione per ogni coppia $s, t \in S$ tale che $m(s,t) < \infty$.

Osservazione 4.1.1.1. *La condizione **(C)** viene chiamata Condizione di Coxeter.*

4.1.2 Cinque condizioni equivalenti

Osservazione 4.1.2.1. *Abbiamo cinque condizioni che (W, S) può o non può soddisfare e il legame tra le condizioni, per il momento, è il seguente:*

$$\textbf{\textit{(A)}} \Rightarrow \textbf{\textit{(D)}} \Leftrightarrow \textbf{\textit{(E)}} \Leftrightarrow \textbf{\textit{(F)}} \Rightarrow \textbf{\textit{(C)}}.$$

Teorema 4.1.1. *Le condizioni **(A)**,**(D)**,**(E)**,**(F)** e **(C)** sono tutte equivalenti, cioè, **(A)** $\Leftrightarrow$ **(D)** $\Leftrightarrow$ **(E)** $\Leftrightarrow$ **(F)** $\Leftrightarrow$ **(C)**.*

Dimostrazione. Basta provare che **(C)** $\Rightarrow$ **(A)** per provare il teorema. Supponiamo che (W, S) soddisfi **(C)**, allora W ammette una presentazione come quella specificata dalla condizione; per verificare che vale **(A)**, come abbiamo fatto per l'esempio $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{Z})$, basta mostrare che le involuzioni ρ_s con $s \in S$ verifichino le relazioni che compaiono nella presentazione del gruppo. La dimostrazione procede esattamente come quella fatta nel capitolo 2. □

Abbiamo così trovato la classe di gruppi che possiamo chiamare d'ora in avanti *gruppi di riflessione astratti*, o gruppi di Coxeter.

4.2 Gruppi di Coxeter

Prima di concludere questo elaborato vediamo alcuni risultati che valgono in generale per i gruppi di Coxeter; in particolare mostriamo che è possibile trovare per questa famiglia di gruppi una rappresentazione lineare, *la rappresentazione canonica*, che si può dimostrare essere fedele e che ci permette di affermare che i gruppi di Coxeter sono isomorfi a gruppi di trasformazioni lineari generati da riflessioni.

4.2.1 Matrice di Coxeter

Osservazione 4.2.1.1. *Data una coppia (W, S) arbitraria, dove W denota un gruppo e S un sottoinsieme di generatori di ordine 2, sappiamo che possiamo associargli una matrice di Coxeter; ci chiediamo al contrario se data* *una matrice M, è sempre possibile trovare un gruppo di Coxeter W, tale che M sia la matrice di Coxeter corrispondente al gruppo W.*

Sia I un insieme arbitrario di indici e sia $M = (m_{ij})_{i,j} \in I$ una matrice con $m_{ij} \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$. Chiameremo M *matrice di Coxeter* se $m_{ii} = 1$ e $2 \leq m_{ij} = m_{ji} \leq \infty$ con $i \neq j$.

Osservazione 4.2.1.2. *Il teorema seguente ci autorizza ad usare questa terminologia.*

Teorema 4.2.1. *Ogni matrice di Coxeter è la matrice di Coxeter di un gruppo di Coxeter.*

Dimostrazione. Sia $W = \langle (s_i)_{i \in I}; \quad (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle$, dove la relazione compare nella presentazione del gruppo soltanto se $m_{ij} < \infty$. Per dimostrare il teorema facciamo due affermazioni che poi dimostreremo nel seguito:

1. Le immagini in W degli s_i sono distinte e non banali;

2. $s_i s_j$ ha ordine m_{ij} in W;

Assumendo che entrambe siano vere per il momento, possiamo identificare gli s_i con la loro immagine in W e possiamo introdurre l'insieme $S = \{s_i\} \subset W$; se le proviamo entrambe il teorema segue.

Sia V uno spazio vettoriale con base $(e_i)_{i \in I}$; sia B la forma bilineare su V tale che $B(e_i, e_j) = -\cos(\frac{\pi}{m_{ij}})$ e sia $\sigma_i : V \longmapsto V$ la riflessione definita dalla formula: $\sigma_i x = x - 2B(e_i, x)e_i$, tale che porti e_i in $-e_i$ e fissi l'iperpiano $H_i = e_i^{\perp} = \{x \in V; \quad B(e_i, x) = 0\}$.

Per ogni $i \neq j$ con $m_{ij} < \infty$, la forma bilineare B è non degenere sul sottospazio $V_1 = \mathbf{R}e_i \oplus \mathbf{R}e_j \subseteq V$, infatti abbiamo che B è degenere sul sottospazio $\mathbf{R}e_i \oplus \mathbf{R}e_j$ se e solo se $m_{ij} = \infty$; in quel caso infatti la matrice associata a B ristretta al sottospazio V_1 è della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forma quadratica Q associata a B è definita positiva su V_1, infatti:

$$Q(x_ie_i + x_je_j) = Q(x_ie_i) + Q(x_je_j) + 2B(x_ie_i, x_je_j) =$$

$$= x_i^2 + x_j^2 - 2x_ix_j\cos(\frac{\pi}{m_{ij}}) = (x_i - x_j\cos(\frac{\pi}{m_{ij}}))^2 + (x_j\sin(\frac{\pi}{m_{ij}}))^2;$$

quindi abbiamo una decomposizione di V della forma: $V = V_1 \oplus V_0$, dove $V_0 = V_1^{\perp} = H_i \cap H_j$. Questa decomposizione è invariante sotto l'azione di σ_i e σ_j, che generano un gruppo diedrale $D_{2m_{ij}}$. In particolare si ha che il gruppo che generano agisce in modo canonico su V_1 e in modo triviale su V_0 e inoltre si ha che l'ordine di $\sigma_i\sigma_j$ è proprio m_{ij}.

Quindi abbiamo un'azione lineare di W su V in cui s_i agisce come σ_i e poiché le σ_i sono distinte e non banali si ha che lo stesso vale per le s_i; in questo modo abbiamo provato la prima affermazione. In più poiché $\sigma_i\sigma_j$ ha ordine precisamente m_{ij}, l'ordine di s_is_j non può essere un divisore proprio di m_{ij}; questo prova la seconda affermazione quando $m_{ij} < \infty$.

Ci resta da provare che s_is_j ha ordine infinito quando $m_{ij} = \infty$. Osserviamo a tal fine che σ_i e σ_j lasciano ancora invariato il piano V_1, quindi è sufficiente mostrare che il loro prodotto ha ordine infinito quando è ristretto a V_1. In questo caso ci basta notare che V_1 con le riflessioni σ_i e σ_j può essere identificato con lo spazio vettoriale V' con le riflessioni s'_1 e s'_2 che abbiamo introdotto nel caso di D_∞. Il risultato a questo punto segue dal fatto che se consideriamo le riflessioni indotte nel duale $(s'_1)^* = s_1$ e $(s'_2)^* = s_2$, s_1 e s_2 generano un gruppo diedrale infinito che agisce sul duale di V' e quindi si ha che s_is_j ha ordine infinito. $\square$

Osservazione 4.2.1.3. *Dal teorema segue che è semplice a questo punto dare un esempio di gruppo di Coxeter, poiché ci basta fornire una matrice di Coxeter arbitraria.*

Osservazione 4.2.1.4. *La dimostrazione di questo teorema ci fornisce inoltre uno spazio vettoriale V sul quale W agisce, in modo tale che i generatori $s \in S$ di W agiscano come riflessioni lineari.*

Chiameremo questa azione la rappresentazione canonica lineare di W.

4.2.2 Gruppi di Coxeter e gruppi di riflessione

In questa sezione enunciamo, senza dimostrarlo, un teorema che ci permette di affermare che i gruppi di Coxeter sono isomorfi a dei gruppi di trasformazioni lineari generati da riflessioni; in particolare si può dedurre che nel caso in cui consideriamo gruppi di Coxeter finiti non c'è nessuna differenza tra questi ultimi e i gruppi di riflessione finiti.

Teorema 4.2.2. *La rappresentazione canonica lineare di W è fedele, cioè, l'omomorfismo da W al gruppo $Aut(V)$ degli automorfismi lineari di W è iniettivo. Quindi W è isomorfo a un gruppo di trasformazioni lineari generato da riflessioni.*

Proviamo ora, come corollario del teorema precedente, che:

Corollario 4.2.3. *Se W è un gruppo di Coxeter finito, allora W può essere rappresentato fedelmente come un gruppo di riflessione finito.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema precedente che W è isomorfo ad un gruppo di automorfismi di un certo spazio vettoriale V generato da riflessioni lineari; per completare la dimostrazione ci resta da mostrare che le riflessioni che generano il gruppo sono ortogonali rispetto ad un prodotto interno di V.

L'azione di W su V lascia sicuramente invariato un prodotto interno in V; infatti dato un prodotto interno in V qualsiasi, $(-,-)$, possiamo costruire un prodotto interno $W-invariante$ nel seguente modo:

$$\langle x, y\rangle = \Sigma_{w\in W}(wx, wy).$$

In questo modo si ha che per ogni $s \in S$, gli autospazi di s relativi agli autovalori ± 1 sono ortogonali tra loro rispetto al prodotto $W-invariante$ che abbiamo costruito sopra, quindi s agisce su V come una riflessione ortogonale. $\square$

Bibliografia

[1] Kenneth S.Brown. Buildings, Springer-Verlag, New-York (1989)