

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**Studio di fattibilità di imaging in  
fluorescenza e caratterizzazione di una  
telecamera EMCCD**

**Relatore:**  
Prof. Francesco Minardi

**Presentata da:**  
Riccardo Gaeta

Anno Accademico 2019/2020



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Fisica dell'interazione tra luce e materia</b>	<b>4</b>
1.1 I coefficienti di Einstein . . . . .	4
1.1.1 Equazione di rate ed equilibrio . . . . .	5
1.2 Raffreddamento Laser . . . . .	6
1.3 Equazioni di Bloch Ottiche . . . . .	7
1.3.1 Matrice di densità ed equazione di von Neumann . . . . .	7
1.3.2 Equazioni di Bloch ottiche per un sistema a due livelli . . . . .	8
1.3.3 RWA e i termini contro-rotanti . . . . .	12
<b>2 Studio di fattibilità per imaging in fluorescenza in esperimenti di interferometria atomica</b>	<b>13</b>
2.1 Descrizione dell'esperimento . . . . .	13
2.2 L'imaging in assorbimento . . . . .	14
2.3 L'imaging in fluorescenza . . . . .	14
2.3.1 Angolo solido coperto dall'obiettivo nell'esperimento . . . . .	16
2.4 Calcolo dello scattering rate . . . . .	16
2.4.1 Equazioni di Bloch ottiche per un sistema a tre livelli e due frequenze laser . . . . .	16
2.4.2 Equazioni di Bloch ottiche per la transizione D2 del $^{39}K$ . . . . .	19
2.4.3 Tempo minimo di integrazione per il nostro sistema . . . . .	21
<b>3 Caratterizzazione EMCCD</b>	<b>23</b>
3.1 Descrizione di una telecamera CCD . . . . .	23
3.2 Telecamera EMCCD . . . . .	24
3.3 Fonti di rumore . . . . .	25
3.4 Caratterizzazione della nostra telecamera EMCCD . . . . .	27
3.4.1 Linearità . . . . .	33
<b>Conclusioni</b>	<b>35</b>



# Introduzione

Con il lavoro svolto in questa tesi si studiano le equazioni che governano l'interazione luce-materia, al fine di esaminare la fattibilità di un implementazione di un sistema di imaging in fluorescenza per uno specifico esperimento di interferometria atomica.

Inoltre si è svolto un lavoro di caratterizzazione di una telecamera EMCCD che troverà impiego nello stesso esperimento od in esperimenti simili.

L'elaborato si soffermerà sulla fisica dell'interazione luce-materia prima di analizzare a fondo il problema principale di questa trattazione. Inoltre nel terzo capitolo, dopo aver mostrato il funzionamento generale di una telecamera CCD ed EMCCD, si evidenzieranno gli aspetti più importanti per una caratterizzazione in pratica di una telecamera EMCCD.

# Capitolo 1

## Fisica dell'interazione tra luce e materia

### 1.1 I coefficienti di Einstein

I coefficienti A e B di Einstein, formulati da Einstein nel 1917, modellano fenomenologicamente l'assorbimento, l'emissione stimolata e l'emissione spontanea di radiazione. Questo modello prevede una trattazione della luce come radiazione elettromagnetica classica, descritta per intero dalla propria frequenza  $\omega$  e dalla densità energetica associata a questa frequenza  $\mu(\omega)$  mentre si assumono che gli atomi, descritti dalla meccanica quantistica, abbiano solo due livelli energetici con una separazione di  $\hbar\omega_0$ .

Si ipotizza che la probabilità per unità di tempo di un atomo di **assorbire** radiazione e passare dal suo livello fondamentale  $|1\rangle$  al suo livello eccitato  $|2\rangle$  sia **proporzionale alla densità di energia** del campo elettromagnetico alla frequenza  $\omega_0$ :

$$dP_{1\rightarrow 2} = B_{12}\mu(\omega_0)dt$$

La diseccitazione dell'atomo, invece, avrà due componenti: emissione spontanea ed emissione stimolata.

$$dP_{2\rightarrow 1} = (B_{21}\mu(\omega_0) + A)dt$$

L'**emissione stimolata** è l'emissione di un fotone da parte dell'atomo dovuta alla presenza di radiazione elettromagnetica alla frequenza risonante  $\omega_0$ . Questo fotone avrà la stessa frequenza, fase, polarizzazione e direzione della radiazione incidente. L'emissione stimolata è il principio alla base del laser (light amplification by stimulated emission of radiation).

L'emissione stimolata è modellata dal primo termine che descrive  $dP_{2\rightarrow 1}$ .

Il secondo termine di  $dP_{2\rightarrow 1}$  descrive invece l'**emissione spontanea** che è il processo che permette ad un atomo di passare dallo stato eccitato allo stato fondamentale anche in assenza di radiazione.

### 1.1.1 Equazione di rate ed equilibrio

$N_1$  ed  $N_2$  sono le popolazioni rispettivamente dello stato  $|1\rangle$  e dello stato  $|2\rangle$ . Assumendo un sistema chiuso, il numero totale di atomi non varia  $N_1 + N_2 = \text{cost}$ .

L'equazione di rate allora è:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_2(B_{21}\mu(\omega_0) + A) - N_1B_{12}\mu(\omega_0) = -\frac{dN_2}{dt}$$

Allo stato stazionario ( $\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = 0$ ) possiamo trovare l'espressione per la densità di energia

$$\mu(\omega_0) = \frac{A}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}} = \frac{A}{B_{21}} \frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}}\frac{N_1}{N_2} - 1}$$

Quando il sistema è all'**equilibrio termico** varrà la distribuzione di Boltzmann:

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{\beta(E_2 - E_1)} = e^{\beta\hbar\omega_0}$$

che sostituiamo in  $\mu(\omega_0)$

$$\mu(\omega_0) = \frac{A}{B_{21}} \frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}}e^{\beta\hbar\omega_0} - 1}$$

Se ora ignoriamo la forma di riga dell'atomo ed assumiamo che può assorbire solo a frequenza  $\omega = \omega_0$  la **distribuzione di Planck**, che descrive la distribuzione dell'energia dei quanti di luce di un corpo nero, ci darà:

$$\mu(\omega_0) = \int B(\omega, T)\delta(\omega - \omega_0)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_0} - 1}$$

Uguagliando queste ultime due equazioni

$$\frac{A}{B_{21}} \frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}}e^{\beta\hbar\omega_0} - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_0} - 1}$$

otteniamo le relazioni tra i coefficienti A e B

$$B_{12} = B_{21} = B \qquad \frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \qquad (1.1)$$

## 1.2 Raffreddamento Laser

Il raffreddamento laser è una tecnica utilizzata per **intrappolare e raffreddare un gruppo di atomi**. Qui descriverò in breve il raffreddamento Doppler.

Consideriamo inizialmente il caso unidimensionale in cui un gruppo di atomi (modellati come un sistema a due livelli) può interagire con **due fasci laser**, provenienti da direzioni opposte, con la stessa frequenza  $\omega$  che è stata regolata **leggermente al di sotto della frequenza di risonanza** della transizione dell'atomo  $\omega_0$  (un detuning  $\delta = \omega - \omega_0 < 0$ ).

Un atomo che si muove, a causa dell'**effetto Doppler**, vede il fascio contropropagante a se stesso con una frequenza più vicina alla frequenza di risonanza e quindi ha una probabilità maggiore di assorbire fotoni da questo fascio rispetto all'altro (Figura 1.1). Per la conservazione del momento il fotone imprime un momento pari al momento del fotone  $p = E/c = \hbar k$  nella direzione di propagazione dello stesso, e quindi ne **riduce l'energia cinetica traslazionale** dell'atomo: viene raffreddato.

I passaggi sono riassunti di seguito:

1. Il fotone viene assorbito dal fascio contropropagante all'atomo, rallentandolo
2. L'atomo, come abbiamo visto, può decadere in due modi diversi:
  - Emissione stimolata, a questo punto l'atomo torna alle condizioni iniziali (punto 1) siccome riguadagna l'esatto momento perso dall'assorbimento.
  - Emissione spontanea, che è isotropa e quindi, in media, contribuisce un momento nullo.

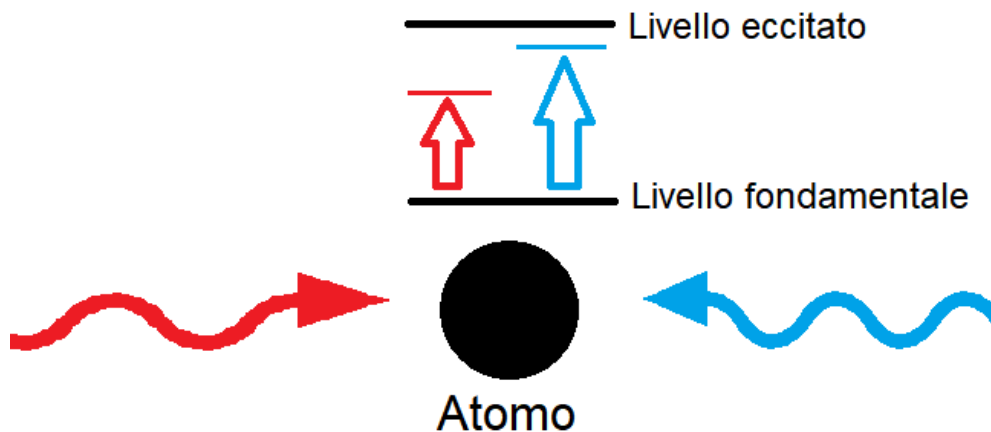


Figura 1.1: Rappresentazione dei due fasci laser opposti visti dal sistema di riferimento di un atomo in movimento verso il fascio di destra (*blue-shifted*). Il fascio di destra ha più probabilità di eccitare l'atomo a causa del detuning minore.



Quando un atomo viene rallentato a sufficienza, non assorbirà più prevalentemente da nessun fascio.

Le temperature così raggiunte però sono piuttosto alte siccome il laser rimane vicino alla frequenza di risonanza per brevi tempi. Questa temperatura vale circa  $125\mu K$  per il  $^{133}Cs$ , non abbastanza per raggiungere la condensazione di Bose che richiede temperature dell'ordine delle centinaia di  $nK$ .

Questo limite si chiama **limite Doppler** o **temperatura Doppler** che a titolo informativo è:

$$T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B}$$

Per il raffreddamento laser si utilizzano di solito elementi del **primo gruppo** come il Potassio, il Rubidio ed il Cesio perché hanno transizioni nel visibile e nell'infrarosso compatibili con i tipi di laser commercialmente disponibili.

Questi atomi però non hanno una semplice struttura a due livelli, ma, per quanto riguarda gli isotopi usati per creare condensati di Bose, hanno una struttura iperfine del livello fondamentale sdoppiata. Questo comporta ad avere una probabilità non nulla che una volta eccitato, l'atomo possa decadere in uno stato "**dark**" fuori risonanza con il laser di raffreddamento. Per questa ragione si utilizza un secondo laser della frequenza appropriata per "**ripompare**" gli atomi che finiscono nello stato dark nello stato eccitato. Questo laser è chiamato, dall'inglese, "*repumper*".

Per raggiungere temperature più basse dette **sub-Doppler** si utilizzano metodi come l'effetto Sisifo od il raffreddamento evaporativo.

## 1.3 Equazioni di Bloch Ottiche

Si discute ora come ricavare le equazioni che governano l'interazione luce-materia mantenendo una descrizione della luce classica.

Prima di fare ciò si introducono gli strumenti matematici necessari.

### 1.3.1 Matrice di densità ed equazione di von Neumann

La matrice di densità o operatore di densità è una matrice che viene utilizzata per descrivere uno stato **quantistico misto**.

La matrice di densità  $\rho$  è così definita:

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

Dove  $P_i$  sono le probabilità classiche associate agli stati  $|\psi_i\rangle$ . La loro somma deve essere uguale a 1,  $\sum_i P_i = 1$ .

Le proprietà della matrice di densità sono qui riassunte:

- $\rho^\dagger = \rho$ ,  $\rho$  è una matrice hermitiana
- $\rho$  è semidefinita positiva
- $Tr(\rho) = 1$
- $\rho^2 = \rho$  (idempotenza)  $\iff \rho$  descrive stati puri

L'evoluzione temporale della matrice di densità data un Hamiltoniana  $H$ , in analogia con l'equazione di Schrödinger, è descritta dall'**equazione di von Neumann** della forma:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \quad (1.2)$$

dove  $[A, B] = AB - BA$  indica il commutatore

### 1.3.2 Equazioni di Bloch ottiche per un sistema a due livelli

Cerchiamo ora di ricavare le equazioni di Bloch ottiche per un sistema a due livelli che interagisce con un laser di frequenza  $\omega$ .

Data uno stato di un sistema con due stati:

$$|\psi\rangle = c_a(t) |a\rangle + c_b(t) |b\rangle$$

dove  $|a\rangle$  indica il livello fondamentale (anche chiamato di ground) e  $|b\rangle$  indica il livello eccitato.

L'**Hamiltoniana atomica**, impostando l'energia del livello  $|a\rangle$  a zero, è:

$$H_{atomica} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_e \end{pmatrix}$$

L'**Hamiltoniana dell'interazione** atomo-laser, ignorando la dipendenza spaziale della radiazione, è data da:

$$H_{int} = -\vec{d} \cdot \vec{E}(t) = -\vec{d} \cdot \hat{\epsilon} E_0 \cos(\omega t) = -\vec{d} \cdot \frac{E_0}{2} (\hat{\epsilon} e^{-i\omega t} + \hat{\epsilon}^* e^{i\omega t})$$

dove  $\vec{d}$  è l'operatore di momento di dipolo della transizione.

l'Hamiltoniana totale è quindi:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \langle a | H_{int} | b \rangle \\ \langle b | H_{int} | a \rangle & \hbar\omega_e \end{pmatrix}$$

dove i termini fuori diagonale sono:

$$\begin{aligned}\langle a | H_{int} | b \rangle &= -\frac{E_0}{2} \langle a | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} | b \rangle \\ \langle b | H_{int} | a \rangle &= -\frac{E_0}{2} \langle b | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} | a \rangle\end{aligned}$$

Dall'equazione di Schrödinger otteniamo le derivate temporali dei coefficienti  $c_a$  e  $c_b$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{c}_a = -\frac{E_0}{2} \langle a | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} | b \rangle c_b \\ i\hbar \dot{c}_b = -\frac{E_0}{2} \langle b | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} | a \rangle c_a + \hbar\omega_e c_b \end{cases} \quad (1.3)$$

Adottiamo ora un sistema di riferimento rotante assieme alla radiazione

$$\begin{cases} \tilde{c}_a = c_a \\ \tilde{c}_b = c_b e^{i\omega t} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} c_a = \tilde{c}_a \\ c_b = \tilde{c}_b e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{c}}_a = \dot{c}_a \\ \dot{\tilde{c}}_b = \partial_t(\tilde{c}_b e^{-i\omega t}) = \dot{\tilde{c}}_b e^{-i\omega t} - i\omega \tilde{c}_b e^{-i\omega t} \end{cases}$$

e sostituiamo questi nuovi coefficienti nell'equazione (1.3)

$$\begin{cases} i\hbar \dot{\tilde{c}}_a = -\frac{E_0}{2} \langle a | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} | b \rangle \tilde{c}_b e^{-i\omega t} \\ i\hbar \dot{\tilde{c}}_b e^{-i\omega t} + \hbar\omega \tilde{c}_b e^{-i\omega t} = -\frac{E_0}{2} \langle b | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} | a \rangle \tilde{c}_a + \hbar\omega_e \tilde{c}_b e^{-i\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{\tilde{c}}_a = -\frac{E_0}{2} \langle a | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i2\omega t} + \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} e^{-i\omega t} | b \rangle \tilde{c}_b \\ i\hbar \dot{\tilde{c}}_b e^{-i\omega t} = -\frac{E_0}{2} \langle b | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} / e^{-i\omega t} | a \rangle \tilde{c}_a + \hbar(\omega_e - \omega) \tilde{c}_b e^{-i\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\dot{\tilde{c}}_a = -\frac{E_0}{2\hbar} \langle a | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} e^{-2i\omega t} + \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* | b \rangle \tilde{c}_b \\ i\dot{\tilde{c}}_b = -\frac{E_0}{2\hbar} \langle b | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} + \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* e^{i2\omega t} | a \rangle \tilde{c}_a - \delta \tilde{c}_b \end{cases}$$

Dove nell'ultimo passaggio si è introdotto il **detuning**  $\delta = (\omega - \omega_e)$  che indica quanto è lontana la frequenza del laser dalla frequenza di risonanza della transizione atomica.

Ora utilizziamo l'**approssimazione di onda rotante** (**RWA** dall'inglese Rotating Wave Approximation) in cui si trascurano i termini che oscillano velocemente alla frequenza  $2\omega$  e definiamo le **frequenze di Rabi** come:

$$\Omega = \Omega_{eg} = -\frac{E_0}{\hbar} \langle b | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon} | a \rangle \quad \Omega^* = \Omega_{ge} = -\frac{E_0}{\hbar} \langle a | \vec{d} \cdot \hat{\varepsilon}^* | b \rangle \quad (1.5)$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} i\dot{\tilde{c}}_a = -\frac{\Omega^*}{2}\tilde{c}_b \\ i\dot{\tilde{c}}_b = -\frac{\Omega}{2}\tilde{c}_a - \delta\tilde{c}_b \end{cases}$$

che ci permette di scrivere l'Hamiltoniana totale nel sistema rotante con RWA:

$$\tilde{H}^{RWA} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega^*}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & -\delta \end{pmatrix}$$

Mancano ancora i termini dell'emissione spontanea che si possono aggiungere manualmente se adottiamo il formalismo delle matrici di densità.

Definiamo il nostro stato

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

che nella base non rotante ci dà:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_a(t)|^2 & c_a c_b^* \\ c_b c_a^* & |c_b(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Se ora ci spostiamo nel sistema rotante applicando la trasformazione (1.4) a  $\rho$  otteniamo:

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{aa} & \tilde{\rho}_{ab} \\ \tilde{\rho}_{ba} & \tilde{\rho}_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_a(t)|^2 & c_a c_b^* e^{-i\omega t} \\ c_b c_a^* e^{i\omega t} & |c_b(t)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} e^{-i\omega t} \\ \rho_{ba} e^{i\omega t} & \rho_{bb} \end{pmatrix}$$

Sostituendo  $\tilde{H}^{RWA}$  e  $\tilde{\rho}$  nell'equazione di von Neumann (1.2) ci porta ad avere le equazioni

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\rho}}_{aa} = -\frac{i}{2}(\Omega^* \tilde{\rho}_{ba} - \Omega \tilde{\rho}_{ab}) \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ab} = i\frac{\Omega^*}{2}(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}) - i\tilde{\rho}_{ab}\delta \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ba} = -i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}) + i\tilde{\rho}_{ba}\delta \\ \dot{\tilde{\rho}}_{bb} = -\frac{i}{2}(\Omega \tilde{\rho}_{ab} - \Omega^* \tilde{\rho}_{ba}) \end{cases}$$

a cui aggiungiamo il termine di emissione spontanea con cui la popolazione dello stato eccitato  $\tilde{\rho}_{bb}$  **decade esponenzialmente** con un tasso  $\Gamma$  nel livello fondamentale  $\tilde{\rho}_{aa}$ .

I termini fuori diagonale, detti **coerenze**, decadono con un tasso di  $\Gamma/2$ :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\rho}}_{aa} = -\frac{i}{2}(\Omega^* \tilde{\rho}_{ba} - \Omega \tilde{\rho}_{ab}) + \Gamma \tilde{\rho}_{bb} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ab} = i\frac{\Omega^*}{2}(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}) - i\tilde{\rho}_{ab}\delta - \frac{\Gamma}{2}\tilde{\rho}_{ab} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ba} = -i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}) + i\tilde{\rho}_{ba}\delta - \frac{\Gamma}{2}\tilde{\rho}_{ba} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{bb} = -\frac{i}{2}(\Omega \tilde{\rho}_{ab} - \Omega^* \tilde{\rho}_{ba}) - \Gamma \tilde{\rho}_{bb} \end{cases} \quad (1.7)$$

Queste sono le equazioni di Bloch ottiche che ci permettono di trovare le popolazioni all'equilibrio se si impostano tutte le derivate uguali a zero e si vincolano le popolazioni  $\tilde{\rho}_{aa} + \tilde{\rho}_{bb} = Tr(\tilde{\rho}) = 1$  [11]:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{aa} &= \frac{1}{1 + \frac{|\Omega|^2}{\Gamma^2 + 4\delta^2 + |\Omega|^2}} \\ \tilde{\rho}_{bb} &= \frac{|\Omega|^2}{\Gamma^2 + 4\delta^2 + 2|\Omega|^2} \tilde{\rho}_{aa} \\ \tilde{\rho}_{ab} &= \frac{i\Omega^* (-2i\delta + \Gamma)}{\Gamma^2 + 4\delta^2 + 2|\Omega|^2} \tilde{\rho}_{aa} = \tilde{\rho}_{ba}^*\end{aligned}\tag{1.8}$$

Per calcolare le frequenze di Rabi sarebbe necessario calcolarsi l'elemento di matrice del dipolo di transizione come mostra la definizione (1.5). Vediamo ora come è possibile svincolarsi da questa dipendenza.

Data la relazione tra  $\Omega$ ,  $\Gamma$  e l'intensità di saturazione

$$\frac{|\Omega|^2}{\Gamma^2} = \frac{I}{2I_{sat}}\tag{1.9}$$

Inserendo  $\Omega = -\frac{E_0}{\hbar} \langle g | \vec{d} \cdot \hat{\epsilon} | e \rangle$  ed  $I = E_0^2 \epsilon_0 c / 2$ :

$$I_{sat} = \frac{c\epsilon_0 \Gamma^2 \hbar^2}{4 |\langle g | \hat{\epsilon} \cdot \vec{d} | e \rangle|^2}$$

Possiamo eliminare l'elemento di matrice di dipolo usando:

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{\pi \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle g | \vec{d} | e \rangle|^2$$

Quindi tenendo conto di tutte le polarizzazioni possibili

$$I_{sat} = \frac{\hbar \omega_0^3 \Gamma}{12\pi c^2}$$

che sostituita nell'equazione (1.9) ci permette di trovare un'equazione per  $\Omega$  che non utilizzi il momento di dipolo di transizione  $\vec{d}$  [1].

### 1.3.3 RWA e i termini contro-rotanti

Vediamo ora come usare l'approssimazione di onda rotante in modo generale.

Rinominiamo l'Hamiltoniana atomica e di interazione rispettivamente come  $H_0$  e  $H_1$ .

Partendo dalla

$$H_1 = -\vec{d} \cdot \frac{E_0}{2} (\hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t})$$

ed esplicitando l'operatore di dipolo  $\vec{d}$

$$\vec{d} = \vec{d}^+ |b\rangle \langle a| + \vec{d}^- |a\rangle \langle b|$$

si vede che in  $H_1$  appaiono quattro termini:

$$H_1 = -\frac{E_0}{2} \left( \vec{d}^+ \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d}^+ \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} \right) |b\rangle \langle a| + \left( \vec{d}^- \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d}^- \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} \right) |a\rangle \langle b|$$

Utilizzare la RWA significa eliminare il secondo ed il terzo termine chiamati “**termini contro-rotanti**”.

Per vedere il perché si chiamano così basta passare alla **rappresentazione di interazione** attraverso la trasformazione unitaria

$$U(t) = e^{iH_0 t/\hbar} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\omega_e t} \end{pmatrix}$$

$$H_1^I = U(t) H_1 U^\dagger(t)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{E_0}{2} \left( \vec{d}^+ \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d}^+ \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} \right) e^{i\omega_e t} |b\rangle \langle a| + \left( \vec{d}^- \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + \vec{d}^- \hat{\varepsilon}^* e^{i\omega t} \right) e^{-i\omega_e t} |a\rangle \langle b| = \\ &= -\frac{E_0}{2} \left( \vec{d}^+ \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\delta t} + \vec{d}^+ \hat{\varepsilon}^* e^{i(\omega+\omega_e)t} \right) |b\rangle \langle a| + \left( \vec{d}^- \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i(\omega+\omega_e)t} + \vec{d}^- \hat{\varepsilon}^* e^{i\delta t} \right) |a\rangle \langle b| \end{aligned}$$

Siccome abbiamo assunto inizialmente che il detuning  $\delta$  sia piccolo questo implica che  $\omega + \omega_e \gg \delta$  e quindi possiamo eliminare il secondo ed il terzo termine perché, **oscillando velocemente, la loro media è zero per la scala dei tempo in cui evolve  $\tilde{\rho}$** . Tornando nella rappresentazione di Schrödinger troviamo il risultato visto in precedenza:

$$\begin{aligned} H_1^I &= -\frac{E_0}{2} \left( \vec{d}^+ \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\delta t} \right) |b\rangle \langle a| + \left( \vec{d}^- \cdot \hat{\varepsilon} e^{i\delta t} \right) |a\rangle \langle b| \\ &\Downarrow \\ H_1 &= -\frac{E_0}{2} \left( \vec{d}^+ \cdot \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} \right) |b\rangle \langle a| + \left( \vec{d}^- \cdot \hat{\varepsilon} e^{i\omega t} \right) |a\rangle \langle b| = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega^*}{2} e^{i\omega t} \\ \frac{\Omega}{2} e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Capitolo 2

# Studio di fattibilità per imaging in fluorescenza in esperimenti di interferometria atomica

L'obiettivo principale di questa tesi è verificare che sia realizzabile un sistema di imaging in fluorescenza per un particolare esperimento di interferometria atomica.

Per verificare ciò serve calcolare il tempo minimo di esposizione per ottenere una precisione del singolo atomo in una nuvola di qualche centinaia di atomi utilizzando l'apparato matematico appena introdotto.

### 2.1 Descrizione dell'esperimento

L'esperimento in questione, su cui si vorrebbe adottare l'imaging in fluorescenza, è un esperimento di **interferometria atomica** che usa atomi di  $^{39}\text{K}$ . Questi atomi vengono raffreddati fino al raggiungere la condensazione di Bose e vengono intrappolati in un potenziale a doppia buca ottenuta usando i **battimenti** dati dalla sovrapposizione di due fasci laser a frequenze vicine tra loro in configurazione stazionaria. Le buche così create sono distanti  $5\mu\text{m}$ .

Il condensato in una doppia buca mostra fenomeni di coerenza macroscopici in diretta analogia con le giunzioni ad effetto Josephson nei materiali superconduttori. In particolare l'interferenza tra le funzioni d'onda permette di realizzare un interferometro che misura la forza presente sul condensato a partire dalla differenza di popolazione nelle due buche.

Quindi serve un metodo preciso ed efficace che permette di avere un piccolo errore sulla misura del numero degli atomi presenti in ciascuna buca.

## 2.2 L'imaging in assorbimento

Fino ad ora l'esperimento ha usato l'imaging in assorbimento per contare gli atomi. L'imaging in assorbimento usa un fascio laser ad intensità dell'ordine dell'intensità di saturazione ed alla frequenza di risonanza in modo da avere un **alta probabilità di assorbimento di fotoni**.

Una volta attraversato il campione di atomi, il fascio laser è indirizzato sull'obiettivo di una telecamera che acquisirà un'immagine. Dall'immagine così ottenuta si riesce ad estrarre informazioni sulla distribuzione spaziale della densità della nuvola di atomi osservando l'**attenuazione del fascio** rispetto ad una immagine di riferimento acquisita senza atomi nel percorso della luce. In pratica si fotografa l'ombra della nuvola di atomi.

I **brevi tempi di integrazione**, assieme al rumore di *photon-shot*, sono due delle ragioni principali per cui la risoluzione del numero di atomi presenti è limitata. Quest'ultimo rumore è dovuto alla natura statistica del processo (che verrà descritto in maggior dettaglio nella sezione 3.3) e quindi causa un errore sulla misura legato alla distribuzione di Poisson: per  $N$  atomi dà un'incertezza dell'ordine di  $\sqrt{N}$ .

Questo limite è specialmente rilevante quando le nuvole atomiche sono diluite e contengono un basso numero di atomi.

Un altro tipo di imaging che ha migliori prestazioni a base densità ottiche è l'imaging in fluorescenza [3].

## 2.3 L'imaging in fluorescenza

La fluorescenza è il processo per cui un atomo riemette radiazione assorbita attraverso l'emissione spontanea, quindi una nuvola di atomi che è intrappolata in una trappola magneto ottica (MOT) od in una melassa ottica emette fotoni per fluorescenza, **costantemente ed isotropicamente**.

Il numero di fotoni diffusi è proporzionale al numero di atomi presenti nel campione, all'intensità e dipende dal detuning della luce incidente.

Questi fotoni verranno rivelati dalla telecamera e verranno convertiti in un numero proporzionale di elettroni. Il numero medio di questi elettroni, in generale, è

$$N_e = N_a \Theta Q_E R_{sc} t$$

dove  $t$  è il **tempo di integrazione** utilizzato,  $N_a$  è il **numero di atomi** presenti nel campione,  $\Theta$  la frazione di **angolo solido** coperto dall'obiettivo,  $Q_E$  l'**efficienza quantica** del sistema ed infine  $R_{sc}$  è il **rate di diffusione** degli atomi.

Il vantaggio dell'imaging in fluorescenza è la possibilità di adottare tempi di integrazione molto più lunghi dell'imaging in assorbimento dando la possibilità di raggiungere la **precisione del singolo atomo** per campioni sufficientemente diluiti [3, 4].



Le fonti di errore nuove che non sono presenti nell'imaging in assorbimento sono principalmente due: il **rumore di fluorescenza** e il **rumore di caricamento/perdita** (*loading/loss* in inglese).

Il **rumore di fluorescenza** è dovuto alle fluttuazioni di intensità e frequenza della sorgente laser che variano il tasso di diffusione  $R_{sc}$ . Questo rumore può essere limitato da tempi di integrazioni più lunghi e dalla stabilizzazione del laser.

Il **rumore di caricamento/perdita** è, invece, dovuto alla cattura od alla fuga di uno o più atomi dalla trappola. Il tasso di caricamento dipende solo dalla densità di atomi presenti nella camera da vuoto e quindi è indipendente dal numero di atomi nel campione, mentre il tasso di perdita scala linearmente con il numero di atomi presenti nella nuvola, per quanto riguarda le perdite singole, o con quadraticamente con il numero di atomi, per quanto riguarda le perdite doppie.

Si può determinare il tasso di caricamento/perdita sperimentalmente prendendo più immagini dello stesso campione e determinando la media degli atomi persi/catturati per ogni paio di immagini consecutive.

Questo rumore, inoltre, scala con il tempo di integrazione e quindi impone un limite sul tempo di integrazione ottimale [4].

Nel nostro caso, dopo l'esperimento di interferometria le due nuvole vengono intrappolate in una melassa e vengono tenute separate da una lama ottica perché vogliamo contare il numero di atomi per ciascuna delle due nuvole.

Per il calcolo del tasso di diffusione bisogna tenere conto dello scattering rate di **due laser diversi** il *cooler* ed il *repumper*. Inoltre, il  $^{39}\text{K}$  ha più livelli iperfini sia fondamentali che eccitati e quindi non può essere modellato da un semplice atomo a due livelli con accuratezza (Figura 2.1). Andiamo a calcolare i termini che ci servono per trovare  $t$  dall'equazione di  $N_e$ .

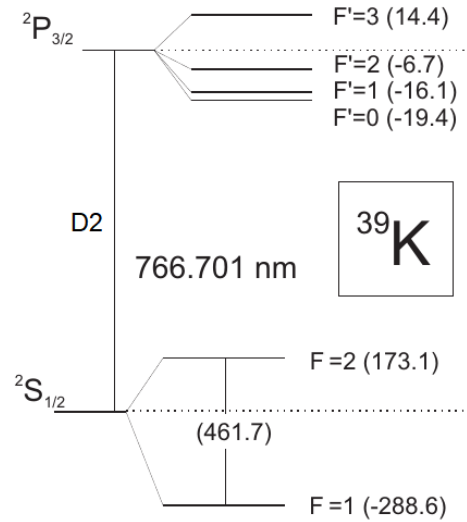


Figura 2.1: Struttura iperfine del  $^{39}\text{K}$ . Sul livello di ground con  $F=2$  agisce il *cooler* mentre sul livello  $F=1$  agisce il *repumper*. Da notare che la separazione dei singoli stati espressa tra parentesi è in MHz

### 2.3.1 Angolo solido coperto dall'obiettivo nell'esperimento

L'emissione spontanea è distribuita omogeneamente su tutti i  $4\pi$  steradiani di angolo solido di una sfera, ma l'obiettivo ne coprirà solo una piccola sezione. La parte di angolo solido che l'obiettivo copre può essere ricavato dall'apertura numerica del sistema.

$$NA = \sin(\phi) = \sin(\arctan(D/2f))$$

La parte di angolo solido corrispondente a  $\phi$  (Figura 2.2):

$$\Theta = 2\pi(1 - \cos \phi)/4\pi$$

Nel nostro sistema  $f=25\text{mm}$ ,  $D=32\text{mm} \rightarrow NA = 0.54 \rightarrow \phi = 32.7^\circ$  da cui ricaviamo un  $\Theta = 8 \cdot 10^{-2}$

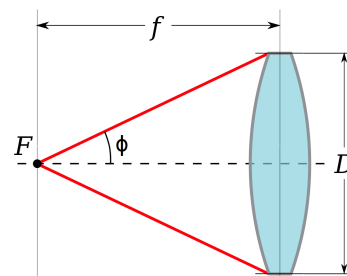


Figura 2.2

## 2.4 Calcolo dello scattering rate

In generale il tasso di diffusione (o scattering rate) di una nuvola di atomi all'equilibrio con la radiazione presente nell'ambiente è dato da:

$$R_{sc} = \Gamma \sum_i \pi_{ei}$$

in cui  $\pi_{ei}$  è la popolazione dello stato eccitato  $i$ , mentre  $\Gamma$  è il tasso di decadimento dello stato eccitato nel livello fondamentale.

### 2.4.1 Equazioni di Bloch ottiche per un sistema a tre livelli e due frequenze laser

Cerchiamo ora di trovare le popolazioni degli stati eccitati del  $^{39}\text{K}$  attraverso le equazioni di Bloch ottiche.

Per ora, per semplicità, unendo la struttura iperfine dei livelli eccitati e considerandoli un solo livello, si possono definire i **proiettori** sui sottospazi dei singoli stati in questo modo:

$$P_1 = |1\rangle \langle 1| \quad P_2 = |2\rangle \langle 2| \quad P_e = |e\rangle \langle e|$$

Inoltre L'Hamiltoniana atomica si può scrivere:

$$H_{at} = P_2 \hbar \omega_2 + P_e \hbar \omega_e$$

L'Hamiltoniana di interazione considerando i due laser di *cooler* e di *repumper* è quindi:

$$\begin{aligned}
H_{int} &= -\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}(t) \\
&= -\frac{1}{2} \vec{d} \cdot (\mathcal{E}_R \hat{\epsilon}_R e^{-i\omega_R t} + \mathcal{E}_C \hat{\epsilon}_C e^{-i\omega_C t} + c.c.)
\end{aligned}$$

Utilizzando la **RWA** come discussa nella sezione 1.3.3 possiamo eliminare i termini contro-rotanti e riscrivere  $H_{int}$  come:

$$H_{int} = -\frac{1}{2} (\vec{d})^+ \cdot (\mathcal{E}_R \hat{\epsilon}_R e^{-i\omega_R t} + \mathcal{E}_C \hat{\epsilon}_C e^{-i\omega_C t}) + h.c.$$

dove

$$(\vec{d})^+ = \vec{d}_{e1}^+ |e\rangle \langle 1| + \vec{d}_{e2}^+ |e\rangle \langle 2| = P_e \vec{d} (P_1 + P_2)$$

La trasformazione unitaria che ci permette di **eliminare la dipendenza esplicita temporale** è  $U(t) = P_1 + P_2 e^{i(\omega_R - \omega_C)t} + P_e e^{i\omega_R t}$ .

L'Hamiltoniana nel nuovo sistema di riferimento sarà quindi:

$$\tilde{H} = U H U^\dagger + i\hbar (\partial_t U) U^\dagger$$

in particolare l'Hamiltoniana atomica diventa

$$\tilde{H}_{at} = \hbar(\omega_2 - (\omega_R - \omega_C)) P_2 + \hbar(\omega_e - \omega_R) P_e$$

e la parte dell'Hamiltoniana che tiene conto dell'interazione diventa:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{int} &= -\frac{1}{2} P_e e^{i\omega_R t} (\vec{d})^+ \cdot (\mathcal{E}_R \hat{\epsilon}_R e^{-i\omega_R t} + \mathcal{E}_C \hat{\epsilon}_C e^{-i\omega_C t}) (P_1 + P_2 e^{-i(\omega_R - \omega_C)t}) + h.c. \\
&= -\frac{1}{2} (\vec{d})^+ \cdot (\mathcal{E}_R \hat{\epsilon}_R + \mathcal{E}_C \hat{\epsilon}_C e^{+i\omega_R t - i\omega_C t}) (P_1 + P_2 e^{-i(\omega_R - \omega_C)t}) + h.c. \\
&= -\frac{1}{2} (\vec{d})^+ \cdot (\mathcal{E}_R \hat{\epsilon}_R P_1 + \mathcal{E}_C \hat{\epsilon}_C P_2) + \\
&\quad -\frac{1}{2} (\vec{d})^+ \cdot (\mathcal{E}_R \hat{\epsilon}_R P_2 e^{-i(\omega_R - \omega_C)t} + \mathcal{E}_C \hat{\epsilon}_C e^{+i\omega_R t - i\omega_C t} P_1) + h.c.
\end{aligned}$$

Gli ultimi due termini si possono tralasciare siccome descrivono l'accoppiamento fuori risonanza del *repumper* con la transizione  $|2\rangle \rightarrow |e\rangle$  e del *cooler* con la transizione  $|1\rangle \rightarrow |e\rangle$ .

In definitiva

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{int} &= -\frac{1}{2} (\vec{d})^+ \cdot (\mathcal{E}_R \hat{\epsilon}_R P_1 + \mathcal{E}_C \hat{\epsilon}_C P_2) + h.c. \\
&= -\frac{1}{2} \left( \cancel{\vec{d}_{e2}^+ \mathcal{E}_R \hat{\epsilon}_R |e\rangle \langle 2|} \langle 1| \langle 1| + \vec{d}_{e2}^+ \mathcal{E}_C \hat{\epsilon}_C |e\rangle \langle 2| \langle 2| + \right. \\
&\quad \left. + \vec{d}_{e1}^+ \mathcal{E}_R \hat{\epsilon}_R |e\rangle \langle 1| \langle 1| + \cancel{\vec{d}_{e1}^+ \mathcal{E}_C \hat{\epsilon}_C |e\rangle \langle 1|} \langle 2| \langle 2| \right) + h.c. \\
&= -\frac{1}{2} (\hbar\Omega_C |e\rangle \langle 2| + \hbar\Omega_R |e\rangle \langle 1|) + h.c.
\end{aligned}$$

dove si sono introdotte le due frequenze di Rabi:

$$\Omega_C = \frac{\mathcal{E}_C}{\hbar} \vec{d}_{e2}^+ \cdot \hat{\epsilon}_C = \frac{\mathcal{E}_C}{\hbar} \langle e | (\vec{d})^+ \cdot \hat{\epsilon}_C | 2 \rangle \quad \Omega_R = \frac{\mathcal{E}_R}{\hbar} \vec{d}_{e1}^+ \cdot \hat{\epsilon}_R = \frac{\mathcal{E}_R}{\hbar} \langle e | (\vec{d})^+ \cdot \hat{\epsilon}_R | 1 \rangle$$

In totale le equazioni di Bloch ottiche per questo sistema si trovano risolvendo:

$$i\hbar\partial_t\tilde{\rho} = \left[ \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_R^*/2 \\ 0 & (\omega_2 - (\omega_R - \omega_C)) & \Omega_C^*/2 \\ \Omega_R/2 & \Omega_C/2 & -\delta_R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{11} & \tilde{\rho}_{12} & \tilde{\rho}_{1e} \\ \tilde{\rho}_{12}^* & \tilde{\rho}_{22} & \tilde{\rho}_{2e} \\ \tilde{\rho}_{1e}^* & \tilde{\rho}_{2e}^* & \tilde{\rho}_{ee} \end{pmatrix} \right]$$

A cui si aggiungeranno i termini di **emissione spontanea** analogamente al sistema a due livelli.

Le derivate delle coerenze tra uno stato fondamentale ( $g = 1, 2$ ) e lo stato eccitato si possono scrivere così:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_{eg} &= \frac{i}{2} \left( -\Omega_g \tilde{\rho}_{ee} + \sum_g \Omega_g \tilde{\rho}_{ge} \right) - \left( \frac{\Gamma}{2} - i\delta_g \right) \tilde{\rho}_{eg} = \\ &= \frac{i}{2} (\Omega_R \tilde{\rho}_{g1} + \Omega_C \tilde{\rho}_{g2} - \Omega_g \tilde{\rho}_{ee}) - \left( \frac{\Gamma}{2} - i\delta_g \right) \tilde{\rho}_{eg} \end{aligned}$$

dove  $\Omega_g = \Omega_R$ ,  $\delta_g = \delta_R$  per  $g = 1$  e  $\Omega_g = \Omega_C$ ,  $\delta_g = (\omega_2 - (\omega_R - \omega_C))\delta_C$  per  $g = 2$ .  
Assumendo la condizione adiabatica dove  $\tilde{\rho}_{eg}$  è **all'equilibrio** imponiamo  $\dot{\tilde{\rho}}_{eg} = 0$  e ricaviamo:

$$\tilde{\rho}_{eg} = \tilde{\rho}_{ge}^* = \frac{i}{2} (\Omega_R \tilde{\rho}_{g1} + \Omega_C \tilde{\rho}_{g2} - \Omega_g \tilde{\rho}_{ee}) \frac{1}{\left( \frac{\Gamma}{2} - i\delta_g \right)}$$

La derivata della popolazione del livello eccitato è:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_{ee} &= -\Gamma \tilde{\rho}_{ee} + \frac{i}{2} (\Omega_C \tilde{\rho}_{2e} + \Omega_R \tilde{\rho}_{1e}) + c.c \\ &= -\Gamma \tilde{\rho}_{ee} - \frac{i}{2} \left( \Omega_C \frac{i (\Omega_R^* \tilde{\rho}_{21} + \Omega_C^* \tilde{\rho}_{22} - \Omega_C^* \tilde{\rho}_{ee})}{\left( \frac{\Gamma}{2} + i\delta_C \right)} + \Omega_R \frac{i (\Omega_R^* \tilde{\rho}_{11} + \Omega_C^* \tilde{\rho}_{12} - \Omega_R^* \tilde{\rho}_{ee})}{\left( \frac{\Gamma}{2} + i\delta_R \right)} \right) + c.c \\ &= -\Gamma \tilde{\rho}_{ee} + \frac{1}{4} \left( \frac{\Omega_C (\Omega_R^* \tilde{\rho}_{21} + \Omega_C^* \tilde{\rho}_{22} - \Omega_C^* \tilde{\rho}_{ee})}{(\Gamma^2/4 + \delta_C^2)} \left( \frac{\Gamma}{2} - i\delta_C \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Omega_R (\Omega_R^* \tilde{\rho}_{11} + \Omega_C^* \tilde{\rho}_{12} - \Omega_R^* \tilde{\rho}_{ee})}{(\Gamma^2/4 + \delta_R^2)} \left( \frac{\Gamma}{2} - i\delta_R \right) \right) + c.c \end{aligned}$$

Trascuriamo i termini contenenti  $\Omega_C \Omega_R^*$  siccome se la fase relativa tra  $\Omega_C$  e  $\Omega_R$  fluttua  $\Omega_C \Omega_R^*$  si media a zero.

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ee} = -\Gamma \tilde{\rho}_{ee} + \frac{1}{4} \left( \frac{\Omega_C \Omega_C^* (\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{ee})}{(\Gamma^2/4 + \delta_C^2)} \left( \frac{\Gamma}{2} - i\delta_C \right) + \frac{\Omega_R \Omega_R^* (\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{ee})}{(\Gamma^2/4 + \delta_R^2)} \left( \frac{\Gamma}{2} - i\delta_R \right) \right) + c.c$$

Notiamo come  $(\Gamma/2 - i\delta)$  sommato al suo coniugato dà  $\Gamma$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ee} = -\Gamma\tilde{\rho}_{ee} + \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\Omega_C\Omega_C^*(\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{ee})}{(\Gamma^2/4 + \delta_C^2)} + \frac{\Omega_R\Omega_R^*(\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{ee})}{(\Gamma^2/4 + \delta_R^2)}\right) + c.c$$

Analizziamo ora come si comportano  $\Omega_C\Omega_C^*$  ed  $\Omega_R\Omega_R^*$

$$\Omega_g\Omega_g^* = \frac{\mathcal{E}_g^2}{\hbar^2} \langle g | (\vec{d})^- \cdot \hat{\epsilon}_g^* | e \rangle \langle e | (\vec{d})^+ \cdot \hat{\epsilon}_g | g \rangle$$

Avendo che  $|e\rangle \langle e| (\vec{d})^+ = (\vec{d})^+$  si ottiene:

$$\Omega_g\Omega_g^* = \frac{\mathcal{E}_g^2}{\hbar^2} \sum_{i,j} \hat{\epsilon}_{gi}\hat{\epsilon}_{gj}^* \langle g | (\vec{d})_i^- (\vec{d})_j^+ | g \rangle$$

Assumendo che la luce **non abbia una polarizzazione predefinita**, sostituiamo

$$\hat{\epsilon}_{gi}\hat{\epsilon}_{gj}^* \rightarrow \frac{1}{3}\delta_{ij}$$

ed otteniamo

$$\Omega_g\Omega_g^* = \Omega_g^2 = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{E}_g^2}{\hbar^2} \langle g | \vec{d}^2 | g \rangle = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{E}_g^2}{\hbar^2} d^2$$

dove  $d$  senza il simbolo di vettore indica la norma  $\|d\|$ .

Ci siamo così ricavati una semplice equazione differenziale per la popolazione dello stato eccitato:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_{ee} &= -\Gamma\tilde{\rho}_{ee} + \Gamma\left(\frac{(d\mathcal{E}_C/2\hbar)^2}{(\Gamma^2/4 + \delta_C^2)} \frac{1}{3}(\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{ee}) + \frac{(d\mathcal{E}_R/2\hbar)^2}{(\Gamma^2/4 + \delta_R^2)} \frac{1}{3}(\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{ee})\right) \\ &= -(\dot{\tilde{\rho}}_{11} + \dot{\tilde{\rho}}_{22}) \end{aligned}$$

## 2.4.2 Equazioni di Bloch ottiche per la transizione D2 del $^{39}\text{K}$

Nella stato eccitato  $^2P_{3/2}$  del  $^{39}\text{K}$  esistono quattro sottolivelli iperfini con  $F'=0,1,2,3$  (Figura 2.1).

Il livello fondamentale  $F=1$ , per le regole di selezione, può interagire solo con i livelli  $F'=0,1,2$  mentre il livello fondamentale  $F=2$  può interagire solo con i livelli  $F'=1,2,3$ . Se si rifanno i conti precedenti utilizzando tutti i livelli eccitati  $F'$  si nota che compaiono due coefficienti, che dipendono solo da  $F$  e  $F'$ , affianco alle popolazioni dei livelli:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_{ee} &= -\Gamma\tilde{\rho}_{ee} + \Gamma\left(\frac{(d\mathcal{E}_C/2\hbar)^2}{(\Gamma^2/4 + \delta_C^2)} \frac{1}{3}(\tilde{\rho}_{22}C(F, F') - \tilde{\rho}_{ee}C'(F, F')) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(d\mathcal{E}_R/2\hbar)^2}{(\Gamma^2/4 + \delta_R^2)} \frac{1}{3}(\tilde{\rho}_{11}C(F, F') - \tilde{\rho}_{ee}C'(F, F'))\right) \end{aligned}$$

Questi coefficienti sono dati da:

$$C(F, F') = \sum_{q, m'} \langle F, m | d_q | F', m' \rangle \langle F', m' | d_{-q} | F, m \rangle$$

$$C'(F, F') = \sum_{q, m} \langle F', m' | d_q | F, m \rangle \langle F, m | d_{-q} | F', m' \rangle$$

qui  $q=-1,0,+1$  indica la polarizzazione del fotone emesso/assorbito.

Dato che per il teorema di Wigner–Eckart [1]

$$\langle F, m | d_q | F', m' \rangle = \langle J_g | |d| | J_e \rangle (-1)^{F'+J_g+1+I} \sqrt{(2F'+1)(2J_g+1)+}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{ccc} J_g & J_e & 1 \\ F' & F & I \end{array} \right\} \langle F, m | F', m'; 1, q \rangle$$

e visto che nel caso del  $^{39}K$  si ha  $J_g = 1/2$ ,  $J_e = 3/2$ ,  $I = 3/2$  e  $\|d\|^2 = 1$  i nostri coefficienti diventano:

$$C(F, F') = 2(2F'+1) \times \left\{ \begin{array}{ccc} 1/2 & 3/2 & 1 \\ F' & F & 3/2 \end{array} \right\}^2$$

$$C'(F, F') = 2(2F+1) \times \left\{ \begin{array}{ccc} 1/2 & 3/2 & 1 \\ F' & F & 3/2 \end{array} \right\}^2$$

I valori numerici di questi coefficienti sono riassunti in tabella qua sotto:

	F'=0	1	2	3
F=1	1/2	5/72	1/24	0
F=2	0	1/120	1/40	1/20

Questo ci porta alle equazioni finali per ogni stato, una volta definite le quantità

$$\xi_C = \frac{1}{3} \frac{(d\mathcal{E}_C/2\hbar)^2}{(\Gamma^2/4 + \delta_C^2)} \quad \xi_R = \frac{1}{3} \frac{(d\mathcal{E}_R/2\hbar)^2}{(\Gamma^2/4 + \delta_R^2)}$$

$\pi_i$  si riferisce alla popolazione del livello con  $F = i$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma} \dot{\pi}_{3'} = -\pi_{3'} + \xi_C \frac{7}{10} (\pi_2 - \frac{5}{7} \pi_{3'}), \\ \frac{1}{\Gamma} \dot{\pi}_{2'} = -\pi_{2'} + \xi_C \frac{1}{4} (\pi_2 - \pi_{2'}) + \xi_R \frac{5}{12} (\pi_1 - \frac{3}{5} \pi_{2'}) \\ \frac{1}{\Gamma} \dot{\pi}_{1'} = -\pi_{1'} + \xi_C \frac{1}{20} (\pi_2 - \frac{5}{3} \pi_{1'}) + \xi_R \frac{5}{12} (\pi_1 - \pi_{1'}) \\ \frac{1}{\Gamma} \dot{\pi}_{0'} = -\pi_{0'} + \xi_R \frac{1}{6} (\pi_1 - 3\pi_{0'}) \\ \frac{1}{\Gamma} \dot{\pi}_2 = +\pi_{3'} + \frac{1}{2} \pi_{2'} + \frac{1}{6} \pi_{1'} \\ \quad \quad \quad - \xi_C \frac{7}{10} (\pi_2 - \frac{5}{7} \pi_{3'}) - \xi_C \frac{1}{4} (\pi_2 - \pi_{2'}) - \xi_C \frac{1}{20} (\pi_2 - \frac{5}{3} \pi_{1'}) \\ \frac{1}{\Gamma} \dot{\pi}_1 = \frac{1}{2} \pi_{2'} + \frac{5}{6} \pi_{1'} + \pi_{0'} \\ \quad \quad \quad - \xi_R \frac{5}{12} (\pi_1 - \frac{3}{5} \pi_{2'}) - \xi_R \frac{5}{12} (\pi_1 - \pi_{1'}) - \xi_R \frac{1}{6} (\pi_1 - 3\pi_{0'}) \end{array} \right.$$

I valori stazionari si trovano imponendo le derivate uguali a zero  $\dot{\pi}_i = 0$  ed aggiungendo l'equazione  $\sum_i \pi_i = 1$ .

**La somma delle popolazioni degli stati eccitati  $\pi_e$  è:**

$$\pi_e = \left[ \frac{3}{2} + \frac{5}{8\xi_C} + \frac{3}{8\xi_R} \right]^{-1} \quad (2.1)$$

Di conseguenza lo scattering rate è

$$R_{sc} = \Gamma\pi_e$$

### 2.4.3 Tempo minimo di integrazione per il nostro sistema

Il tempo minimo di integrazione è il tempo minimo per cui la deviazione standard, del numero di fotoni che la telecamera cattura, ci permette di ottenere la precisione del singolo atomo.

Ricordando l'equazione generale per il numero medio di elettroni generati dai fotoni che colpiscono la telecamera.

$$N_e = N_a \Theta Q_E R_{sc} t$$

Sappiamo che  $N_e$  segue la distribuzione di Poisson e di conseguenza la deviazione std è  $\sqrt{N_e}$ .

Noi vogliamo che un numero  $M$  sufficientemente grande di deviazioni standard sia più piccolo della differenza di fotoni all'aggiunta di un solo atomo nel campione:

$$M\sqrt{N_e} < N_e(N_a = N + 1) - N_e(N_a = N) = \Theta Q_E R_{sc} t$$

$$M\sqrt{N_a}\sqrt{\Theta Q_E R_{sc} t} < \Theta Q_E R_{sc} t$$

$$M\sqrt{N_a} < \sqrt{\Theta Q_E R_{sc} t}$$

$$\Theta Q_E R_{sc} t > M^2 N_a$$

Per grandi intensità laser sia  $\xi_C$  che  $\xi_R$  tendono ad  $\infty$  che, secondo l'equazione (2.1), porta le popolazioni degli stati eccitati  $\pi_e = 2/3$ .

Questo valore è ragionevole perché, ad alte intensità, ci si aspetta che tutti i sottolivelli Zeeman siano equamente popolati. Lo stato fondamentale ha un totale di 8 sottolivelli Zeeman (5 da  $F=2$  e 3 da  $F=1$ ), mentre il livello eccitato ne ha 16. Il numero complessivo di livelli è 24 ed il rapporto livelli eccitati/livelli totali è, appunto,  $16/24 = 2/3$ .

I valori numerici al completo sono:

$\Theta = 8 \cdot 10^{-2}$ ,  $N_a \approx 100$ ,  $Q_E \approx 70\%$ ,  $\Gamma = 2\pi \cdot 6$  MHz ed infine  $\pi_e = 2/3$ .

L'efficienza quantica  $Q_E$  è stata estratta dalla Figura 3.3 ed ignora le perdite dovute alle ottiche dell'obiettivo, che si considerano minime.

Quindi il nostro  $t$  minimo sarà dell'ordine di:

$$\begin{aligned} t &= M^2 N_a / (\Theta Q_E R_{sc}) \\ &= 70 \mu s \cdot M^2 \end{aligned}$$

Durante questo tempo il numero di elettroni che vengono generati dalla telecamera è dell'ordine di 9800 elettroni (98 elettroni per atomo) o di circa 140 milioni al secondo.

Per quanto riguarda l'ingrandimento da utilizzare, il limite inferiore è dato dalla separazione dei due campioni che è di circa  $5 \mu m$ . Questi  $5 \mu m$  devono corrispondere, come minimo, ad un pixel. La nostra telecamera ha pixel della dimensione di  $16 \mu m$  da cui ricaviamo che **l'ingrandimento minimo è di  $16/5 = 3.2$** .

Il limite superiore dell'ingrandimento è dato dal rumore che la telecamera genera. Come vedremo in dettaglio nel capitolo 3, la nostra telecamera, con le impostazioni migliori, ha un rumore di circa 5.6 elettroni/pixel quindi al massimo i nostri 9800 conteggi potranno coprire un quadrato di lato  $\sqrt{9800/5.6} \approx 41$  pixel che equivalgono a  $656 \mu m$ . Se si suppone che i campioni siano anche essi dell'ordine di  $5 \mu m$  allora otteniamo un **ingrandimento massimo di 131**.

Si consiglia comunque di mantenere un ingrandimento più piccolo possibile da minimizzare l'area che i fotoni di fluorescenza copriranno. Questo aumenta il SNR e ridurre il rumore che la luce diffusa dalle ottiche dalle finestre della camera di vuoto possa creare.

Nel prossimo capitolo verrà analizzato in dettaglio il comportamento della telecamera EMCCD che potrà essere utilizzata nell'esperimento.



# Capitolo 3

## Caratterizzazione EMCCD

### 3.1 Descrizione di una telecamera CCD

Nel cuore del funzionamento di una telecamera CCD giace il **chip CCD (Charge-Coupled Device)** che è in grado di accumulare carica elettrica in un pozzo elettronico in base alla quantità di luce incidente sul chip (Figura 3.1).

Il pozzo elettronico è ottenuto ponendo la giunzione p-n in condizione di polarizzazione inversa allargando la *depletion region* che farà da muro per gli elettroni nella direzione verticale.

La luce incidente genera delle coppie buca-elettrone nella *depletion region*, e gli **elettroni si accumuleranno** nella regione di tipo p in modo proporzionale alla luce incidente.

L'isolamento nella direzione orizzontale è ottenuta aggiungendo un paio di elettrodi ai capi del canale N ad una polarizzazione positiva minore rispetto all'elettrodo principale (non rappresentato in figura).

Una volta che tutta la schiera di pixel è stata esposta per un tempo grande a piacere la carica accumulata viene spostata nei pixel verticalmente adiacenti creando così uno **shift register**.

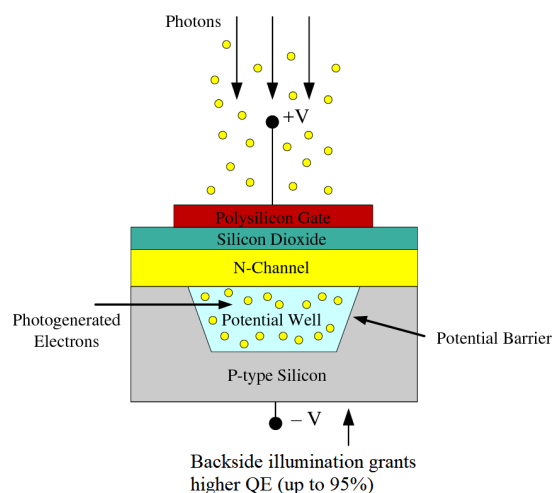


Figura 3.1: Schema di un pixel di una CCD MOS [7].

Quando la carica raggiunge l'ultima riga di pixel, viene poi spostata su un registro che amplifica la carica e la tramuta in un segnale di voltaggio.

L'ultimo step in una telecamera CCD digitale è il passaggio in un **convertitore analogico-digitale** che converte questo voltaggio in un segnale digitale così completando la lettura del contenuto dei pixel.

### 3.2 Telecamera EMCCD

In una telecamera EMCCD (Electron Multiplying CCD) prima della conversione digitale gli elettroni vengono amplificati in un **gain register** addizionale (Figura 3.2). Questo registro, formato da un grande numero di stadi, usa un alto voltaggio (circa 50V) per amplificare il numero di elettroni presenti in un pixel usando la **ionizzazione ad impatto** in modo del tutto simile ad un diodo a valanga.

Ogni stadio ha una bassa probabilità di amplificazione ( $P < 2\%$ ) ma siccome sono presenti circa  $N = 500$  stadi abbiamo un gain totale  $g = (1 + P)^N$  che può raggiungere facilmente il migliaio.

Questo attribuisce alle telecamere EMCCD una sensibilità comparabile con le telecamere CCD intensificate (con un fotomoltiplicatore installato prima del chip CCD). Data la natura intrinsecamente stocastica del gain è impossibile sapere l'esatto gain applicato ad ogni pixel [3].

Le EMCCD hanno la caratteristica che in condizioni di *low-light* rendono il rumore di lettura dovuto al digital converter insignificante rispetto al segnale, ma viene amplificato il rumore chiamato **clock-induced-charge** (CIC) dovuto alla variazione della tensione durante lo spostamento dei pixel verticalmente [8]. Questo alto signal-to-noise-ratio (SNR) fa sì che le telecamere EMCCD vengano ampiamente impiegate per osservazioni astronomiche, come l'osservazione di esopianeti in cui il rate di fotoni è dell'ordine di  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  [8].

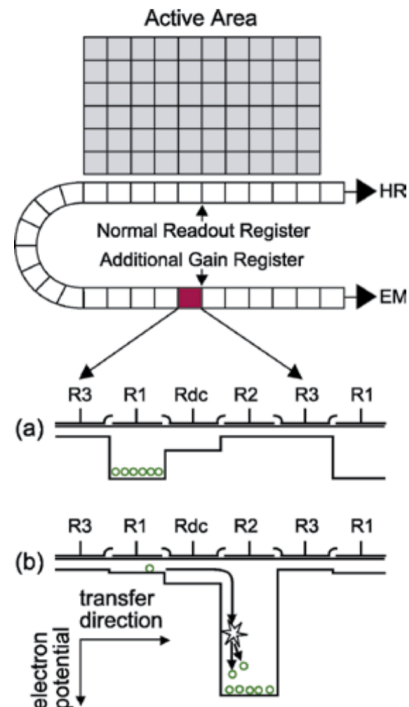


Figura 3.2: Figura che mostra come il registro di gain addizionale moltiplica gli elettroni primari [2].

(a) In R1 sono presenti degli elettroni primari.

(b) Creando una grande buca di potenziale hanno luogo gli eventi di ionizzazione ad impatto aumentando il numero di elettroni.

### 3.3 Fonti di rumore

In una telecamera EMCCD ci sono varie fonti di rumore, alcune sono mitigabili con degli accorgimenti, altre sono dovute alla fisica di base o all'elettronica utilizzata. Il rumore nelle CCD, nella maggior parte dei casi, è dovuto ad un eccesso di carica accumulata nei pozzi elettronici. Questa carica può essere creata in vari modi:

- La **clock-induced-charge** (CIC) è un accumulo indesiderato di carica che avviene per ionizzazione ad impatto durante il trasferimento di una riga di pixel a quella verticalmente successiva. Questa fonte di rumore è sensibile alla velocità di salita e discesa del clock e dalla sua ampiezza in tensione. Anche se sembra contro-intuitivo per mitigare la CIC si può, attraverso il software della telecamera, aumentare la velocità di trasferimento da una riga all'altra (*vertical shift speed*) [3] e tenere l'ampiezza del voltaggio più bassa possibile, assicurandosi che i singoli pozzi si riescano a svuotare in un singolo ciclo di clock o si avrà un effetto di “*smearing*” dei pixel contenenti elettroni.
- La **corrente di buio** (o dark current) è l'accumulo di carica dovuta dalla generazione randomica di coppie buca-elettrone nella *depletion region* quando i pixel sono polarizzati inversamente (fase di acquisizione immagine). Questa fonte di rumore è dipendente dal tempo di acquisizione, ma può essere soppressa abbassando la temperatura del chip mediante l'apposito modulo Peltier all'interno della telecamera. Nel caso della telecamera studiata il produttore segnala che può arrivare a  $-100^{\circ}\text{C}$ , se si ha accesso ad un raffreddamento ad acqua esterno, oppure una temperatura minima di  $-80^{\circ}\text{C}$  in caso contrario [5].
- Il **convertitore analogico-digitale** è una fonte di rumore dovuta all'elettronica usata per il campionamento e la conversione in digitale del segnale analogico di voltaggio che purtroppo è solo mitigabile aumentando il gain prima del convertitore.
- Il **photon-shot noise** è il rumore dovuto alla natura discreta della carica e dei quanti di luce. Questo rumore ha una rilevanza solo in condizioni di bassissima luminosità quando si hanno pochi fotoni per pixel. Il rumore di shot è associato alla distribuzione di Poisson che descrive l'occorrenza di eventi casuali indipendenti la cui probabilità è costante nel tempo (come appunto la generazione di una coppia elettrone-lacuna da parte di un fotone, oppure lo scattering di fotoni da parte di un campione di atomi freddi visto in precedenza). Quindi l'incertezza su  $N$  fotoni è dell'ordine di  $\sqrt{N}$ .
- Il rumore associato al **moltiplicatore di elettroni** è dovuto alla sua natura stocastica di generare  $N_S$  elettroni secondari da  $N_P$  elettroni primari. Per un numero  $N_P$  fissato di elettroni primari l'incertezza su  $N_S = gN_P$  (con  $g$  il gain) è dell'ordine di  $\sqrt{N_S}$  poiché anche questo rumore è associato ad una distribuzione poissoniana.

- Un'ultima fonte che modifica il termine di rumore per le telecamere CCD è l'**efficienza quantica** (*quantum efficiency* o QE). La QE esprime la frazione di fotoni incidenti che vengono effettivamente convertiti in elettroni. La QE dipende dalla frequenza del fotone incidente e migliora a temperature più basse (Figura 3.3). Per ottenere una QE maggiore le telecamere scientifiche usano il tipo di sensore CCD *back-illuminated* (Figura 3.1). Solitamente la QE nominale della telecamera include anche le perdite dovute alle lenti impiegate dal costruttore.

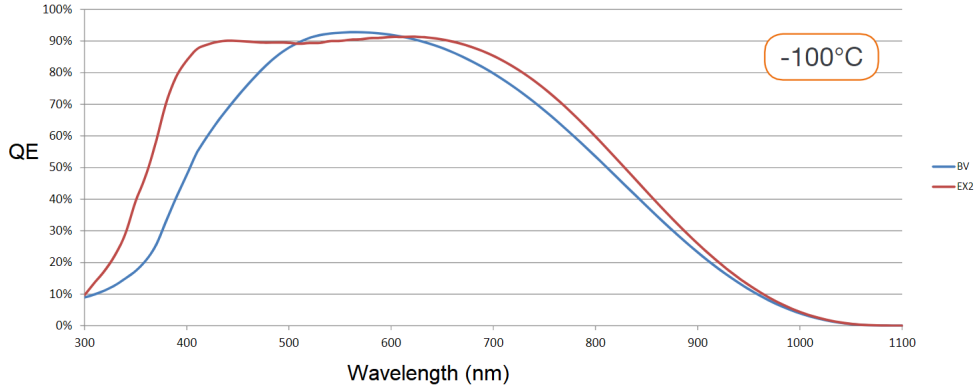


Figura 3.3: Quantum efficiency per la nostra telecamera Andor iXon Ultra 897 EXF (in rosso) in base alla frequenza incidente [5].

Quando un segnale viene amplificato, inevitabilmente anche il rumore contenuto nel segnale in entrata viene amplificato. Generalmente l'amplificazione del rumore viene tenuta conto nella cifra di rumore (*noise factor*)  $F$  così definita:

$$F = \frac{\delta_{out}}{g\delta_{in}}$$

Questo fattore moltiplica tutti i termini di rumore che passano attraverso l'amplificatore. Per la nostra EMCCD il produttore specifica una  $F = 1.41$  [10]. La formula finale del SNR in funzione del tempo di esposizione  $t$  e del flusso di fotoni incidenti al secondo  $\Phi$  è quindi [9, 10]:

$$\begin{aligned}
 SNR &= \frac{g Q_E \Phi t}{\sqrt{\delta_{readout}^2 + F^2 g^2 (\delta_{fotoni}^2 + \delta_{dark}^2 + \delta_{CIC}^2)}} = \\
 &= \frac{Q_E \Phi t}{\sqrt{\frac{\delta_{readout}^2}{g^2} + F^2 (\Phi Q_E t + I_d(T)t + \delta_{CIC}^2)}}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$I_d(T)$  esprime la corrente di buio alla temperatura  $T$ .

Si noti come il rumore di readout diventa insignificante utilizzando alti gain e si possono raggiungere livelli di corrente di buio irrilevanti abbassando appropriatamente la temperatura. Quindi il limite ultimo di rivelazione per le EMCCD è dovuto al rumore indotto dalla CIC [3].

### 3.4 Caratterizzazione della nostra telecamera EMCCD

Specifiche Telecamera	
Produttore	Andor
Modello	iXon Ultra 897 EXF
Numero Pixel	512x512
Dimensioni Pixel	16x16 $\mu\text{m}$
Area Immagine Totale	8.2x8.2 mm
Profondità pozzo elettronico	160 000 $e^-$
Efficienza Quantica massima	> 95%
Massimo rate di readout	17 MHz

La telecamera di cui è stata fatta la caratterizzazione è una Andor iXon Ultra 897 EXF (Figura 3.4). EXF si riferisce al fatto che il sensore è *back-illuminated* ed ha un doppio rivestimento anti-riflesso ed un rivestimento *anti-etaloning* [5].

Per caratterizzare la telecamere e trovare il numero minimo di conteggi rilevabili sono state fatte prima di tutto delle prove a buio, dove si è dato il comando di catturare immagini tenendo il tappo della telecamera avvitato davanti all'obiettivo.

I parametri che si sono fatti variare nelle immagini catturate sono il **tempo di esposizione**, **temperatura** del chip, livello di **gain del EM** ed il **pixel readout rate**. Quest'ultimo è misurato in MHz e rappresenta la quantità di pixel al secondo che viene letto dal digital converter una volta che è passato nell'EM. Le immagini sono sempre state catturate utilizzando la risoluzione massima senza nessun binning dei pixel o filtro applicato post-acquisizione. Inoltre sono state tutte acquisite in modalità "conteggi" in cui la telecamera automaticamente traduce il numero di elettroni presenti in un pixel in un "conteggio". Nel manuale è segnalato che ogni conteggio equivale a circa 4 elettroni.



Figura 3.4: Andor iXon Ultra 897

Come prima prova si sono catturate immagini per diversi tempi di “esposizione” a diverse temperature. Il gain è uno, il pixel readout rate è 17 MHz ed il vertical shift speed è di  $3.3 \mu s$ .

Per ognuna di queste immagini si è poi creato un istogramma che mette in relazione il numero di pixel che contiene un dato numero di conteggi.

Un esempio di questo istogramma è in Figura 3.5 sottostante.

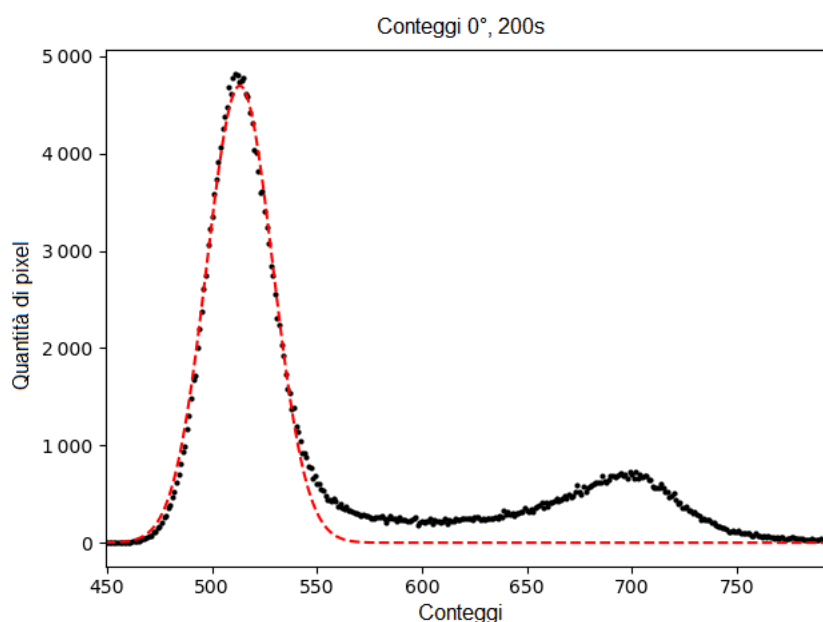


Figura 3.5: Esempio di istogramma di una immagine acquisita a  $0^\circ$  con un tempo di esposizione di 200s. In rosso è presente la curva del fit gaussiano fatto per il primo picco.

Si nota immediatamente come il grafico preso in esempio ha un andamento **bimodale** con due picchi ben distinti. Entrambi i picchi hanno una distribuzione **gaussiana**. Per capire il perché esistono e a quali tipi di rumore corrispondono questi picchi, bisogna guardare come si evolvono al variare sia della temperatura che del tempo di esposizione. Si può però già notare come la moda dei conteggi di tutta l’immagine sia locata attorno a 510 con una deviazione standard di circa 15. Sarà mostrato come con alcune impostazioni della camera si può eliminare completamente la presenza del secondo picco e di come ridurre il primo picco sia in conteggi che in deviazione standard. È però necessario sottolineare che le telecamere iXon Ultra 897 EXF quando sono in modalità “conteggi” aggiungono un **offset fisso di 500 conteggi** (chiamato *baseline*) ad ogni pixel per garantire che la macchina non segnali conteggi negativi [6].

Nella Figura 3.6 si può osservare il comportamento del secondo picco al crescere del tempo di esposizione: si separa sempre di più. La moda continua ad essere circa 510 conteggi, ma il primo picco subisce una riduzione in altezza.

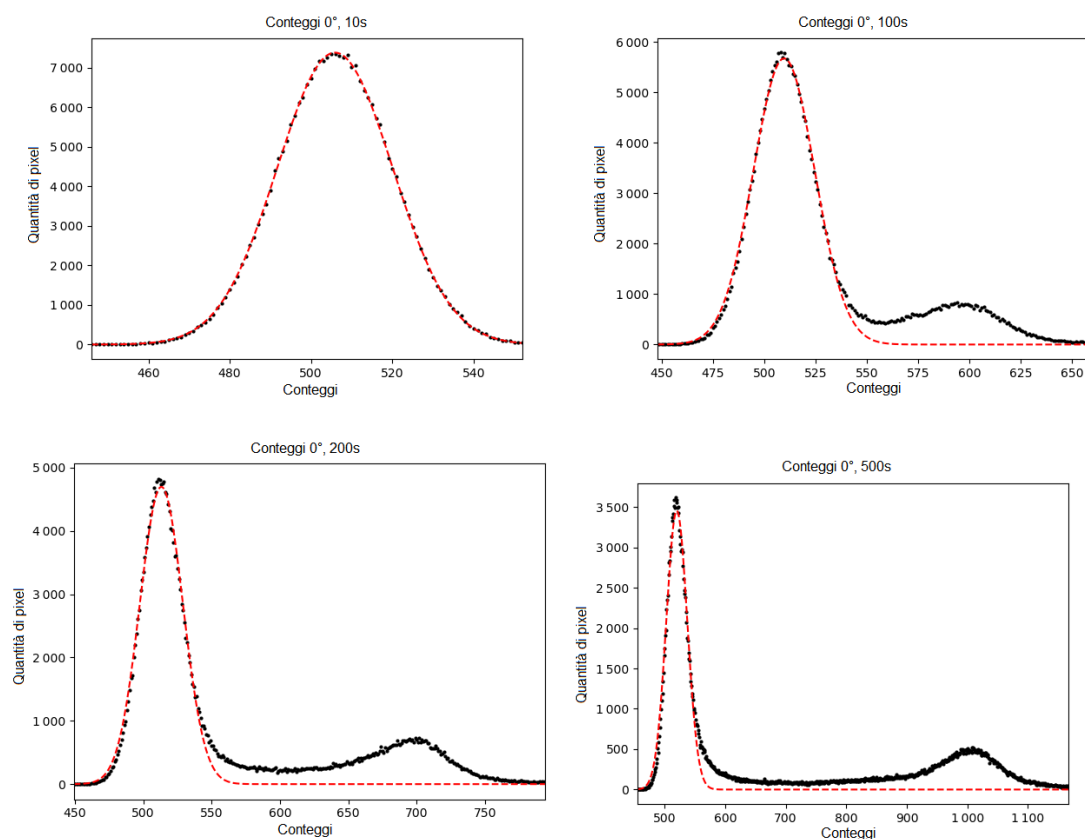


Figura 3.6: Serie di istogrammi che mostra come il secondo picco si distacca dal primo all'aumentare del tempo di esposizione. In ordine i tempi di esposizione sono: 10s, 100s, 200s e 500s. Fare attenzione che i limiti sugli assi non sono uguali. Tutti gli istogrammi si riferiscono a immagini catturate con la temperatura del sensore pari a  $0^\circ$ .

Questa dipendenza dal tempo di esposizione ci dà già un buon indizio sull'origine del secondo picco. Se poi osserviamo la Figura 3.7 notiamo come alla temperatura di  $10^\circ$  il secondo picco si separa ampiamente.

Come si è visto in precedenza la corrente di buio  $\delta_{dark} = I_d(T)t$  ha una dipendenza dalla temperatura ed una dipendenza lineare del tempo.

Andando ad indagare sul massimo del secondo picco rispetto al tempo troviamo, come evidenzia la Figura 3.8, che ha l'andamento lineare nel tempo come atteso.

La dipendenza dalla temperatura non è stata indagata a fondo, ma dalla regola empirica che la corrente di saturazione inversa raddoppia ogni  $4^\circ$ , aumentando la temperatura  $10^\circ$  la corrente dovrebbe essere circa 5.65 volte maggiore. Questo valore è in buon accordo con il rapporto dei coefficienti angolari delle due rette in Figura 3.8.

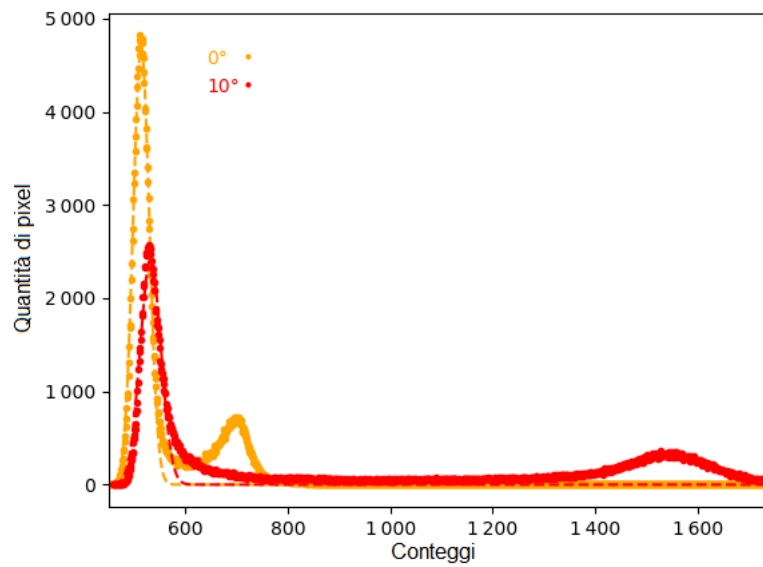


Figura 3.7: Sovrapposizione degli istogrammi ottenuti dalle immagini acquisite a  $0^\circ$  e  $10^\circ$ , entrambi a 200s di esposizione



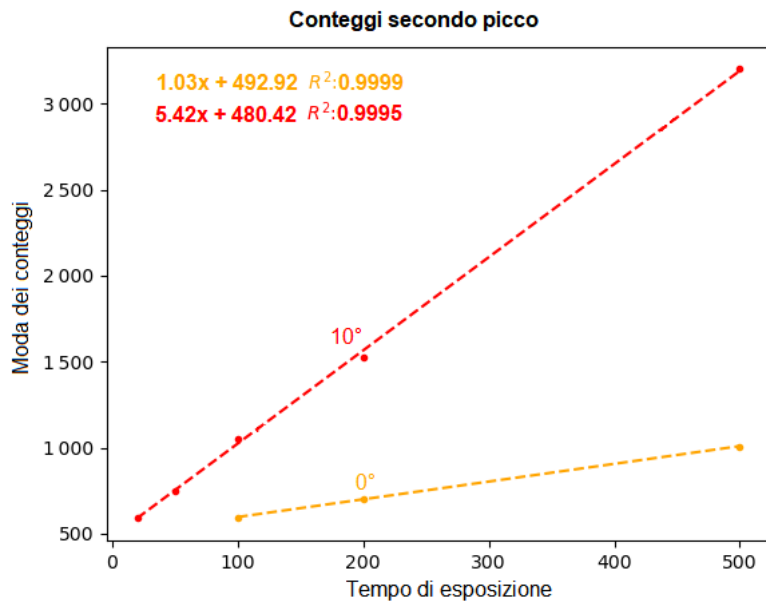


Figura 3.8: Andamento della moda dei conteggi rispetto al tempo di esposizione. In alto a sinistra le equazioni del fit con il relativo  $R^2$  nei colori corrispondenti alle serie di dati.

**Quindi possiamo asserire che il secondo picco corrisponde al rumore dovuto alla corrente di buio.**

Se si acquisiscono immagini ad una bassa temperatura ( $-60^\circ$ ) si osserva che il secondo picco e di conseguenza la presenza della corrente di buio spariscono completamente. Per essere sicuri che il primo picco è il rumore dovuto solo all'elettronica di readout ed alla CIC analizziamo gli istogrammi quando il tempo di esposizione è meno di un secondo. Nella Figura 3.9 a fianco sono graficati gli istogrammi a varie temperature ma con un tempo di integrazione temporale minuscolo. Da questo grafico si può concludere che rimane ancora una piccola dipendenza del rumore dalla temperatura in quanto, prima di tutto il picco si sposta verso destra ed in contemporanea si abbassa e si allarga leggermente.

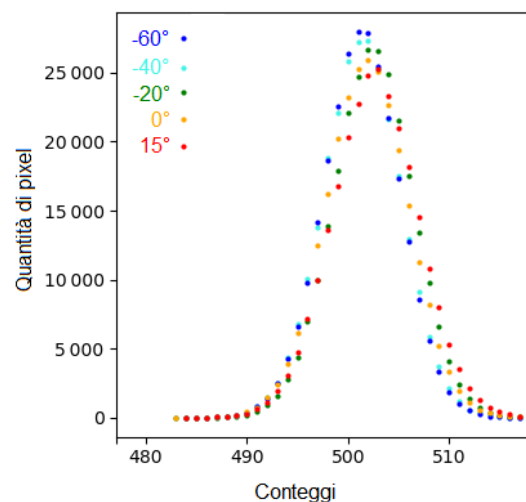


Figura 3.9: Sovrapposizione di istogrammi ottenuti a temperature diverse, tutti a  $10^{-4}s$  di esposizione

Un'ultima importante osservazione è data dalla Figura 3.10 in cui osserviamo che se **riduciamo il readout rate** da 17 MHz (quello utilizzato fin ora) a **1 MHz** la varianza del picco si riduce notevolmente.

La media dei conteggi passa da 504.2 a 500.7 conteggi/px e **la deviazione passa dai 14.5 ai 1.4 conteggi/px** come riassunto in tabella 3.1. Ci si deve però ricordare che a questi valori di conteggi ne sono stati aggiunti 500 dalla telecamera per garantire che non si registrino conteggi negativi.

Una cosa importante da notare è che questo rumore, quando la telecamera è raffreddata a  $-60^\circ$  **non varia con il tempo di integrazione**.

Readout rate	Media conteggi (c/px)	Dev std (c/px)	Dev std ( $e^-$ /px)
17 MHz	504.2	14.5	58
1 MHz	500.7	1.4	5.6

Tabella 3.1

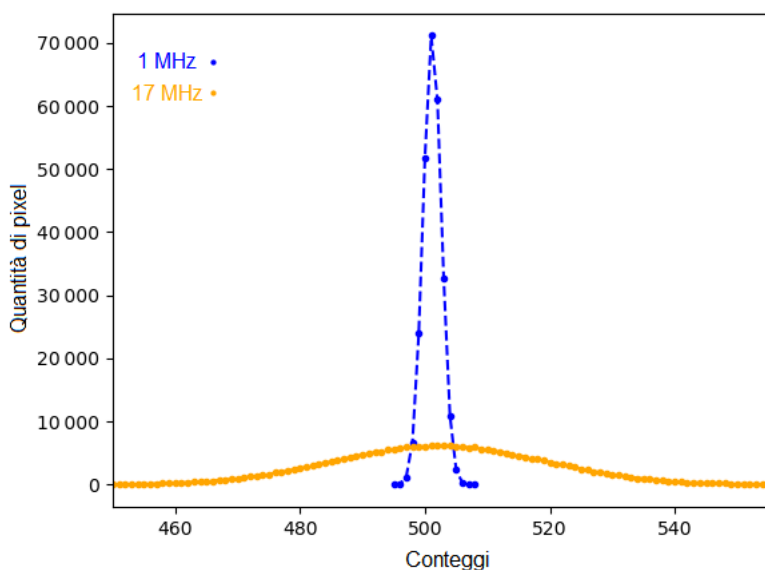


Figura 3.10: Sovrapposizione di istogrammi di immagini acquisite a  $-60^\circ$ , e 0.01 secondi di esposizione

In conclusione, **utilizzando la telecamera a basse temperature e utilizzando il readout rate più piccolo** consigliato dal costruttore (1 MHz), il numero minimo di conteggi rilevabili è di qualche deviazione std, se si fa attenzione a rimuovere i 500 conteggi della baseline. Bisogna inoltre fare attenzione che un readout più lento comporta un maggior tempo di esposizione per i pixel “in cima” al chip siccome mentre il

convertitore analogico-digitale lavora il chip rimane esposto alla luce. Con un readout di 1MHz ed una telecamera come la nostra composta da  $512 \times 512 = 262\,144$  pixel si ha un ritardo sull'ultima riga di 0.26 secondi. Quindi, se possibile, è consigliabile oscurare la CCD prima dell'inizio dell'acquisizione.

### 3.4.1 Linearità

La seconda prova che è stata fatta per caratterizzare la telecamera è l'osservazione di quanto i conteggi aumentino all'aumentare della luce incidente. Ci si aspetta un andamento lineare.

Questo è stato fatto puntando un laser, di cui potevamo controllare la potenza, sull'obiettivo della telecamera. La lunghezza d'onda del laser è di 780nm (e quindi una QE di circa il 70%). Sono stati usati due metodi diversi: facendo incidere il laser per  $50\ \mu s$  sull'obiettivo e aumentando la potenza manualmente tra un'acquisizione e l'altra, mentre nell'altro metodo si varia il tempo in cui il laser è acceso da  $10^{-3}ms$  a 0.2ms.

Le impostazioni della telecamera invece erano:

- Temperatura:  $-60^\circ$
- Tempo di esposizione: 10ms
- Vertical Shift Speed:  $3.3\ \mu s$
- Pixel Readout Rate: 17MHz
- Ampiezza di clock: +4
- Modalità: conteggi

L'ampiezza di clock è stata aumentata, dal software della telecamera, da 0 al valore massimo +4 (la relazione con il voltaggio applicato è monotona ma non specificata) per prevenire lo "smearing" delle immagini.

Si noti che il tempo di esposizione è ampiamente superiore alla durata dell'impulso laser. Dalle immagini risultanti si sono estratti i conteggi totali e sono stati graficati insieme al loro fit lineare (Figura 3.12 e Figura 3.13).

Il valore del coefficiente  $R^2$  per entrambi è molto prossimo alla unità e quindi **si può asserire che la risposta della telecamera è lineare.**

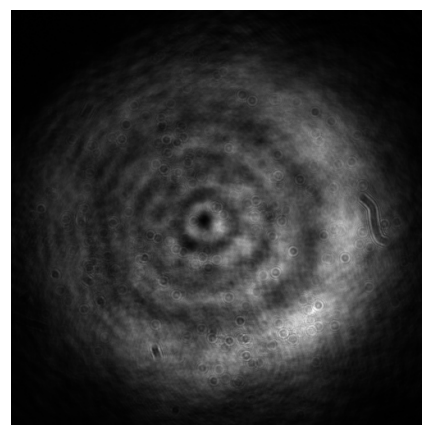


Figura 3.11: Esempio di immagine del laser incidente. In questo momento il laser aveva una potenza di  $47\ \mu W$ .

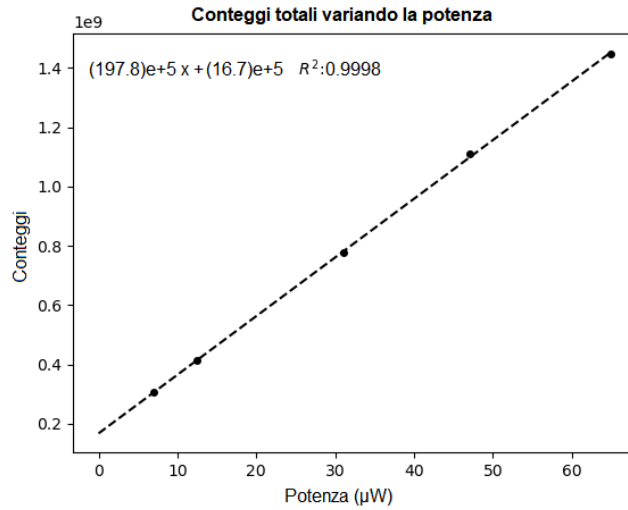


Figura 3.12: Grafico del numero di conteggi rispetto alla potenza incidente misurata. In alto l'equazione del fit lineare ed il relativo  $R^2$

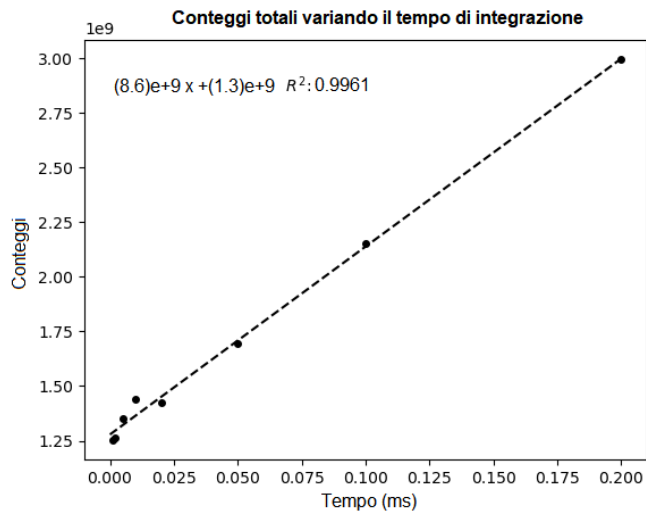


Figura 3.13: Grafico del numero di conteggi rispetto al tempo di integrazione. In alto l'equazione del fit lineare ed il relativo  $R^2$

# Conclusioni

In questa tesi è discusso dell'interazione luce-materia, prima attraverso i coefficienti di Einstein e successivamente si è trattato un sistema a due livelli attraverso le equazioni di Bloch ottiche.

Si sono discusse due tecniche di imaging per gli atomi freddi: l'imaging in assorbimento ed in fluorescenza.

È stato ottenuto il tempo minimo di integrazione per l'imaging in fluorescenza per un esperimento usante il  $^{39}K$  attraverso le equazioni di Bloch ottiche per le popolazioni dei livelli reali del potassio, estendendo il modello di un sistema a due livelli attraverso adeguate approssimazioni.

Questo tempo  $t = 70\mu s \cdot M^2$  dipende dal numero  $M$  che rappresenta quante deviazioni standard di separazione si vuole ottenere tra misure con numero di atomi limitrofo.

Si è inoltre ricavato che il numero di fotoni che la telecamera rivela per 100 atomi nel tempo  $t$  è all'incirca di 9800. Da questo numero abbiamo ricavato i limiti per dell'ingrandimento considerando anche il rumore della telecamera.

Il limite minimo è di 3.2 ed il limite massimo di 131.

Nell'ultima parte si sono discusse le particolari proprietà di una telecamera EMCDD e sono state esposte in dettaglio le varie fonti di rumore in questo tipo di telecamera. Si è poi passato alla caratterizzazione di una specifica telecamera Andor iXon Ultra 897 EXF analizzandone il comportamento in assenza di luce.

Si è osservato che, a basse temperature, il rumore proviene prevalentemente dall'elettronica di conversione analogico-digitale e che è possibile ridurre al minimo (dell'ordine di un conteggio per pixel) se si imposta da software il tasso di readout più piccolo possibile. Per ultimo si è confermato la linearità della telecamera esponendola ad un fascio laser di intensità crescente.

Tutto questa trattazione implica che la telecamera, con un gain adatto, è in grado di svolgere il lavoro del conteggio degli atomi in una nuvola di atomi di  $^{39}K$ .

# Bibliografia

- [1] D. A. Steck, *Quantum and Atom Optics* Department of Physics, University of Oregon.
- [2] *Andor iXon Ultra and iXon3 EMCCD Brochure*. [http://auroscience.hu/docs/Andor\\_iXon3\\_EMCCD\\_Brochure.pdf](http://auroscience.hu/docs/Andor_iXon3_EMCCD_Brochure.pdf)
- [3] R. Bücker, *Fluorescence Imaging of Ultracold Atoms* University of Heidelberg, Heidelberg, 2007.
- [4] P. Kunkel *Implementation of Atom-Counting in the BEC-Experiment* University of Heidelberg, Heidelberg, 2015.
- [5] *Andor iXon Ultra specifications*. <https://andor.oxinst.com/assets/uploads/products/andor/documents/andor-ixon-ultra-emccd-specifications.pdf>  
[http://irtfweb.ifa.hawaii.edu/~moris/user/Andor\\_Ixon\\_Ultra/iXon%20Ultra%20897%20Hardware%20Guide%201.3.pdf](http://irtfweb.ifa.hawaii.edu/~moris/user/Andor_Ixon_Ultra/iXon%20Ultra%20897%20Hardware%20Guide%201.3.pdf)
- [6] *Andor iXon Ultra 897 Hardware Guide*. Andor Technology (2015)
- [7] Ross F Chun, *A High Voltage Charge-Coupled Device (CCD) Controller ASIC for the Large Synoptic Survey Telescope (LSST)*, [https://www.semanticscholar.org/paper/A-High-Voltage-Charge-Coupled-Device-\(CCD\)-ASIC-for-Chun/4bceb2f351025c1f4688f56640d23cc0493654e5/figure/0](https://www.semanticscholar.org/paper/A-High-Voltage-Charge-Coupled-Device-(CCD)-ASIC-for-Chun/4bceb2f351025c1f4688f56640d23cc0493654e5/figure/0)
- [8] Ashlee N. Wilkins, Michael W. McElwain, Timothy J. Norton, Bernard J. Rauscher, Johannes F. Rothe, Michael Malatesta, George M. Hilton, James R. Bubeck, Carol A. Grady, Don J. Lindler, *Characterization of a photon counting EMCCD for space-based high contrast imaging spectroscopy of extrasolar planets*, High Energy, Optical, and Infrared Detectors for Astronomy VI, [arXiv:1407.0701v2], 2014.
- [9] A. Mullan, *Calculating the Signal to Noise Ratio of a Camera*, <https://andor.oxinst.com/learning/view/article/ccd-signal-to-noise-ratio>, 20194.
- [10] *Comparing EMCCD, ICCD and CCD Cameras*. <https://andor.oxinst.com/learning/view/article/ccd,-emccd-and-iccd-comparisons>.

- [11] Wolswijk Louise, *Experimental observation of self-bound quantum droplets of ultracold potassium atoms in free space*, Tesi di Laurea Magistrale (2017-2018).