Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Gruppi di Lie e loro Rappresentazioni in Fisica

Relatore:
Prof.Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:
Sara Peluso

Anno Accademico 2019/2020

Questo elaborato si sviluppa a partire dal concetto di gruppo, soffermandosi in particolar modo sui gruppi di Lie e sulle algebre di Lie, per poi traslare questi concetti nel potente linguaggio matematico della geometria differenziale. Dopo aver fornito le basi di questi due argomenti, ci si occupa della loro commistione, definendo importanti oggetti come i campi invarianti a sinistra e le rappresentazioni e trattando concetti come invarianza ed irriducibilità, accompagnando definizioni matematiche ad esempi in ambito fisico. Infine, grazie ad un ulteriore oggetto matematico, la derivata di Lie, vengono analizzati due ulteriori esempi, uno sui campi vettoriali di Killing ed il loro legame con le simmetrie, l'altro a partire dall'equazione di Dirac, sfruttando il concetto di spinore.

Indice

Introduzione: storia dietro ai gruppi

Nel corso del XIX secolo, il concetto di gruppo era già apparso in vari ambiti della matematica. Il primo esempio risale al 1832, quando Évariste Galois (1811-1832), per formulare una teoria sulla quale si potesse fondare un criterio per decidere quali equazioni si possano risolvere mediante formule algebriche, introdusse i gruppi di permutazioni delle soluzioni (in seguito definiti in suo onore gruppi di Galois). Pochi anni dopo, nel 1849, Auguste Bravais (1811-1863) introdusse il concetto di gruppo di simmetria, mentre studiava applicazioni della geometria alla cristallografia. Nel 1854, Arthur Cayley (1821-1895), nel saggio *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$, arrivò per primo a sistematizzare e astrarre quel concetto di gruppo che si andava sviluppando nei vari ambiti. A lui si deve la prima definizione di gruppo (anche se per quella attualmente in uso, come diremo a breve, si dovette aspettare ancora qualche decennio). In seguito fu Felix Klein (1849-1925), nel 1872, ad impiegare i gruppi di simmetria come concetto fondante della sua risistematizzazione della geometria, resa necessaria dalla scoperta delle geometrie non euclidee. Nell'ambito della teoria dei numeri, il primo impiego del concetto di gruppo si deve a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) – addirittura nel 1798 – ma per una certa sistematizzazione si dovette aspettare un saggio di Leopold Kronecker (1823-1891), pubblicato nel 1850. Il primo tentativo di sistematizzare tutti questi esempi di gruppi sviluppati nei vari ambiti della matematica in un'unica teoria si deve a Camille Jordan (1838-1922), nel suo saggio *Traité des substitutions et des équations algébriques* del 1870. Fu invece Walther von Dyck (1856-1934) a sviluppare nel 1882 la definizione di gruppo astratto come la conosciamo e che può essere esplicitata, informalmente, nel modo seguente: "Un gruppo è l'abbinamento tra un insieme non vuoto di elementi ed una operazione binaria, tale che siano garantiti i seguenti punti:

1. l'applicazione dell'operazione a elementi dell'insieme produce ancora elementi dell'insieme;
2. la proprietà associativa dell'operazione;
3. l'esistenza di un elemento neutro;
4. l'invertibilità della operazione."

Una definizione più formale e dettagliata verrà data nel capitolo 1.

Marius Sophus Lie (1842-1899), il protagonista dell'argomento di questa dissertazione, era un matematico norvegese che collaborò attivamente con alcuni dei personaggi già citati: prima con Felix Klein a Berlino, poi con Camille Jordan a Parigi (dove subì anche l'onta del carcere con l'accusa di essere una spia tedesca: i suoi appunti matematici furono scambiati per messaggi cifrati durante la guerra franco prussiana). Più tardi, a Lipsia, con il collega Friedrich Engel (1861-1941), allievo di Klein, redasse in tre volumi l'opera *Théories des groupes de transformation*, pubblicata nel quinquennio 1888-1893, in cui dettagliava la teoria dei gruppi di trasformazione continui, ora denominati in suo onore gruppi di Lie.

Capitolo 1

Nozioni basilari di teoria dei gruppi e geometria differenziale

In questo capitolo si definiranno e analizzeranno i principali concetti associati alla teoria dei gruppi e alla geometria differenziale, due fondamentali branche della matematica, con grandi applicazioni nella fisica, in particolare nella fisica moderna. Questi due ambiti, se uniti, definiscono uno degli oggetti più importanti della Fisica e della Matematica: i gruppi di Lie. Questi hanno una struttura elaborata e, pertanto, prima di definirli, necessitano della premessa che segue.

1.1 Teoria dei gruppi

Il concetto basilare da cui partire in questa sezione è, ovviamente, quello di gruppo, una particolare struttura algebrica utilizzata enormemente in Fisica, soprattutto nello studio delle simmetrie di sistemi, ma anche in tanti altri ambiti.

Da un punto di vista formale, la definizione di gruppo è la seguente: un **gruppo** $(G, \cdot)$ è un insieme dotato di un'**operazione binaria** (comunemente chiamata moltiplicazione di gruppo), avente le seguenti proprietà:

1. $\forall g_1, g_2 \in G \Longrightarrow g_1 \cdot g_2 \in G$
2. $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \Longrightarrow (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
3. $\exists\, 1 \in G$ tale che $g \cdot 1 = 1 \cdot g$, $\forall g \in G$
4. $\forall g \in G$, $\exists g^{-1} \in G$ tale che $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = 1$

In particolare, la proprietà (1) è detta *chiusura*, la (2) è detta *associatività*, mentre la (3) e la (4) definiscono rispettivamente l'**elemento neutro** e l'**elemento inverso**.

Oltre alle quattro proprietà sopra riportate, alcuni gruppi ne verificano una quinta, la commutatività: $\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$. I gruppi per cui è valida la proprietà commutativa sono detti **abeliani** (conseguentemente, tutti i restanti gruppi sono detti non-abeliani).

La cardinalità di un gruppo G viene indicata con $|G|$ ed è chiamata **ordine** del gruppo: se questa è finita allora G è un gruppo finito, perché il numero degli elementi che lo compongono è finito; altrimenti, il gruppo G è infinito.

La **dimensione** di un gruppo G, spesso indicata con $dim(G)$, è, invece, il numero di parametri reali che devono essere specificati affinché si possa identificare ogni elemento di G.

Un gruppo G generato da un unico elemento g del gruppo stesso è detto gruppo ciclico.

Si riportano di seguito alcuni esempi utili.

Esempio 1: il gruppo $O(n)$, che prende il nome di **gruppo ortogonale** di grado n, ha come elementi le matrici ortogonali $n \times n$ e come operazione binaria la moltiplicazione tra matrici. È un gruppo infinito e ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$ (ovvero $|O(n)| = \infty$; $dim\big(O(n)\big) = \frac{n(n-1)}{2}$).

Esempio 2: il gruppo $SO(n)$, che prende il nome di **gruppo ortogonale speciale** di grado n, ha come elementi le matrici ortogonali $n \times n$ con determinante uguale a $+1$ e come operazione binaria la moltiplicazione tra matrici. Pertanto è un sottogruppo di $O(n)$. È un gruppo infinito e ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$ (ovvero $|SO(n)| = \infty$; $dim\big(SO(n)\big) = \frac{n(n-1)}{2}$).

Esempio 3: il gruppo $U(n)$, che prende il nome di **gruppo unitario** di grado n, ha come elementi le matrici unitarie $n \times n$ e come operazione binaria la moltiplicazione tra matrici. È un gruppo infinito e ha dimensione n^2 (ovvero $|U(n)| = \infty$; $dim\big(U(n)\big) = n^2$).

Esempio 4: il gruppo $SU(n)$, che prende il nome di **gruppo unitario speciale** di grado n, ha come elementi le matrici unitarie $n \times n$ con determinante uguale a $+1$ e come operazione binaria la moltiplicazione tra matrici. Pertanto è un sottogruppo di $U(n)$. È un gruppo infinito e ha dimensione $n^2 - 1$ (ovvero $|SU(n)| = \infty$; $dim\big(SU(n)\big) = n^2 - 1$).

Esempio 5: il gruppo C_n, che prende il nome di **gruppo ciclico** di ordine n, ha come elementi, per convenzione, $\{1, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$ (dove 1 è l'elemento neutro e a è un numero) e come operazione binaria la moltiplicazione. Pertanto è proprio a ad essere il suo unico generatore. È un gruppo ciclico, finito (di ordine n) e di dimensione 1 (ovvero $|C_n| = n$; $dim\big(C_n\big) = 1$).

Esempio 6: il gruppo $GL(n, \mathbb{F})$, che prende il nome di **gruppo lineare generale**, è il gruppo di tutte le matrici invertibili $n \times n$ a valori in un campo $\mathbb{F}$ e ha come operazione binaria la moltiplicazione tra matrici. Pertanto ogni gruppo di matrici è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{F})$. È un gruppo infinito e ha dimensione n^2 se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, mentre ha dimensione $2n^2$ se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (ovvero $|GL(n, \mathbb{F})| = \infty$; $dim\big(GL(n, \mathbb{R})\big) = n^2$; $dim\big(GL(n, \mathbb{C})\big) = 2n^2$).

Negli esempi (2), (4) e (6) si è usato il concetto di sottogruppo: un sottogruppo è un sottoinsieme S di un gruppo G che risulta essere esso stesso un gruppo rispetto all'operazione binaria ereditata da G.

Nell'esempio (5) si è colta l'occasione di usare un termine estremamente importante nello studio dei gruppi: **generatore**. La definizione formale è articolata: sia G un gruppo e S un sottoinsieme di G. Il sottogruppo $\langle S \rangle$ generato da S è il più piccolo sottogruppo di G che contiene S. Se S è l'insieme vuoto, $\langle S \rangle$ è dunque il sottogruppo banale $\{1\}$. Se S non è vuoto, allora $\langle S \rangle$ consiste di tutti gli elementi che possono essere espressi come prodotto di elementi di S e dei loro inversi. S è dunque l'insieme dei generatori.

È a questo punto che entrano in gioco i **Gruppi di Lie**, i veri protagonisti del secondo capitolo e dei successivi, che in questo momento verranno introdotti, in chiave informale: un gruppo di Lie può essere visto come un gruppo definito da parametri continui e connessi.

La definizione formale è, in realtà, leggermente più complessa e potente, ma affinché la si possa enunciare è necessario introdurre il concetto di varietà differenziabile e questo è il compito della prossima sezione.

1.2 Geometria differenziale

La geometria differenziale si è sviluppata a partire dalla seconda metà del XIX secolo, ma è stata riorganizzata in maniera completa e formale soltanto nella prima metà del Novecento. I matematici e i fisici l'hanno utilizzata e sviluppata in vari campi, con l'intento di risolvere problemi complessi che l'analisi matematica "canonica" non era in grado di risolvere.

1.2.1 Applicazioni e omomorfismi

Prima ancora di andare a gettare le basi della geometria differenziale è, però, importante introdurre il concetto di applicazione, senza il quale risulterebbe complicato andare a definire oggetti come campo vettoriale o tensore.

Siano X e Y due insiemi, una **applicazione** f da X a Y è una regola che assegna ad ogni elemento $x \in X$ un elemento $y \in Y$ (univocamente determinata da x). Se all'elemento $x \in X$, l'applicazione f associa l'elemento $y \in Y$, allora si è soliti scrivere $y = f(x)$ e y è detta *immagine* di x, mentre x è detta *controimmagine* (o retroimmagine) di y.

Data un'applicazione $f : X \to Y$, questa è detta:

- *iniettiva* se $\forall y \in Y$ esiste al più un elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$;
- *suriettiva* se $\forall y \in Y$ esiste almeno un elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$;
- *biettiva* se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Inoltre, è utile sottolineare il fatto che il prodotto di due applicazioni f e g, con $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, è anch'essa un'applicazione, in questo caso da X a Z, e si indica con $g \circ f$.

Ora si considerino invece due gruppi $(G, \cdot)$ e $(\tilde{G}, *)$: si chiama **omomorfismo** da G a $\tilde{G}$, un'applicazione $f : G \to \tilde{G}$ che conserva il prodotto, ovvero tale che $\forall g_1, g_2 \in G$ si ha

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2) \tag{1.1}$$

Si noti che la (1.1) è coerente con la definizione di gruppo, dal momento che, per la proprietà di chiusura, $g_1 \cdot g_2 \in G$ e $f(g_1) * f(g_2) \in \tilde{G}$, cosicché l'applicazione f sia ben definita da G a $\tilde{G}$.

Se f è iniettiva, l'omomorfismo viene anche detto *monomorfismo*.
Se f è suriettiva, l'omomorfismo viene anche detto *epimorfismo*.
Se f è biettiva, l'omomorfismo viene anche detto *isomorfismo*.

Un omomorfismo $f : G \to G$ è detto anche *endomorfismo* del gruppo G.
Un endomorfismo che risulta essere anche isomorfismo si chiama *automorfismo*.

1.2.2 Il concetto di varietà differenziabile

La geometria differenziale si sviluppa a partire da diversi concetti: sfrutta il calcolo differenziale, ma anche tutta la struttura algebrica di cui sono ricchi oggetti matematici come il campo vettoriale o le forme differenziali. È quindi una branca della matematica estremamente ricca e trova molte applicazioni in Fisica, soprattutto nella formulazione della relatività generale, ma anche in altri ambiti, come la termodinamica, la meccanica analitica o l'elettromagnetismo.

Tutta la geometria differenziale si sviluppa a partire dalla definizione di varietà: si consideri un insieme M di dimensione n; questo è definito **varietà** se ogni suo punto ha un intorno aperto che abbia una mappa (ossia una funzione da M a $\mathbb{R}^n$) continua e iniettiva su un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Da un punto di vista meno formale, questa definizione è equivalente a richiedere che l'insieme M sia localmente simile a $\mathbb{R}^n$, così da poterli studiare in maniera analoga, almeno nell'intorno di un punto.

Una **carta** è, invece, la coppia composta da un intorno e dalla sua mappa, mentre l'insieme di tutte le carte (ammesso che si possano costruire) che ricoprono l'insieme M è detto **atlante**. La composizione di mappe costituita da una carta e dalla mappa inversa (cioè dalla mappa che va da $\mathbb{R}^n$ a M) di un'altra carta è detta **funzione di transizione** (o mappa di transizione). Se tutte le possibili funzioni di transizioni sono differenziabili, allora la varietà M è una **varietà differenziabile** - nota anche come varietà liscia. Anche in questo caso può essere utile ragionare in maniera più informale: una varietà differenziabile generalizza il concetto, più analitico, di curva e di superficie differenziabili a oggetti in dimensione arbitraria.

1.2.3 Funzioni, campi vettoriali, uno-forme e tensori

Definito il concetto di varietà differenziabile, la trattazione si sposta su tutti quegli oggetti matematici che si possono definire all'interno di quest'ultima.

Intuitivamente, si può immaginare una funzione f su una varietà M come una regola che assegna un numero reale a ogni punto di M. Una **funzione differenziabile** di classe C^k in M è, perciò, semplicemente un'applicazione di classe C^k da M a $\mathbb{R}$.

Una **curva differenziabile** γ di classe C^k in una varietà M è un'applicazione differenziabile di classe C^k che prende valori all'interno di un intervallo chiuso $[a, b] \in \mathbb{R}$ e restituisce punti di M.

Un **vettore** $\bar{v}$ associato al punto P di M è definito come l'applicazione che associa ad una generica funzione differenziabile f la derivata di f stessa lungo la curva γ:

$$\bar{v} : f \to \bar{v}_\gamma(f) = \frac{df}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_P} \in \mathbb{R}$$

Pertanto,

$$\bar{v}_\gamma = \frac{d}{d\lambda}$$

Per la proprietà di linearità delle derivate, è evidente che un vettore agisce linearmente sulle funzioni:

$$\bar{v}_\gamma(\mu f + \rho g) = \mu\frac{df}{d\lambda} + \rho\frac{df}{d\lambda}$$

dove μ e ρ sono coefficienti appartenenti a $\mathbb{R}$, f e g sono le due funzioni definite sulla varietà M, mentre γ è la curva parametrizzata da λ.

Si considerino ora due curve differenziabili γ_1 e γ_2 parametrizzate rispettivamente da λ_1 e λ_2 e passanti entrambe per il punto P della varietà M. Sfruttando la definizione di vettore data poco sopra, si può dire che queste due curve generino due vettori:

$$\bar{v_1} = \frac{d}{d\lambda_1} \qquad\qquad \bar{v_2} = \frac{d}{d\lambda_2}$$

Una generica combinazione lineare del tipo

$$\mu\bar{v_1} + \rho\bar{v_2} = \mu\frac{d}{d\lambda_1} + \rho\frac{d}{d\lambda_2} \tag{1.2}$$

rappresenta dunque il luogo dei punti tangente a P lungo le due curve differenziabili γ_1 e γ_2.

Generalizzando la relazione (1.2) ad una combinazione lineare di n curve (e conseguentemente n parametri), è possibile definire lo **spazio tangente** T_P al punto P della varietà M (n-dimensionale) come lo spazio vettoriale generato appunto dalle n curve.

Dalle definizioni di vettore e di spazio tangente, è anche possibile definire il concetto di **campo vettoriale** in un aperto $U \subseteq M$ come un'applicazione che $\forall P \in U$ restituisce un vettore $\bar{v}(P) \in T_P$.

Si definisce **curva integrale** γ (parametrizzata da λ) di un campo vettoriale $\bar{V}$, quella curva il cui vettore tangente $\frac{d}{d\lambda}$ è dato da un elemento di $\bar{V}$, per ogni punto appartenente a γ, ovvero:

$$\frac{d}{d\lambda} = \bar{V} \qquad\qquad \forall P \in \gamma$$

A questo punto, si hanno tutti gli strumenti necessari per definire i concetti di uno-forma e di tensore.

Dato un punto P della varietà M e un vettore $\bar{v}$, una **uno-forma** $\tilde{\omega}$ è un funzionale lineare agente su un vettore $\bar{v}$ nel punto P, che restituisce un numero reale indicato con $\tilde{\omega}(\bar{v})$. Per le uno-forme valgono le seguenti proprietà:

1. $\tilde{\omega}(\mu\bar{v} + \rho\bar{w}) = \mu\tilde{\omega}(\bar{v}) + \rho\tilde{\omega}(\bar{w})$
2. $(\mu\tilde{\omega})(\bar{v}) = \mu\tilde{\omega}(\bar{v})$
3. $(\tilde{\omega} + \tilde{\sigma})(\bar{v}) = \tilde{\omega}(\bar{v}) + \tilde{\sigma}(\bar{v})$,

con $\mu, \rho \in \mathbb{R}$, $\bar{v}, \bar{w}$ vettori e $\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}$ uno-forme.

Uno-forme agenti sullo stesso spazio tangente T_P formano uno spazio vettoriale ${T_P}^*$, ovvero lo **spazio duale** a T_P. Si noti che la varietà M, lo spazio tangente T_P, e lo spazio duale ${T_P}^*$ (dato un arbitrario punto $P \in M$) hanno tutti la stessa dimensione n.

A questo punto, vettori e uno-forme possono essere utilizzati per definire un tensore sulla varietà M.

Un **tensore** $T(n,m)$ in P è un funzionale lineare agente su n uno-forme e m vettori e restituente un numero reale. Perciò:

$$T : \underbrace{{T_P}^* \otimes \cdots \otimes {T_P}^*}_{n} \otimes \underbrace{T_P \otimes \cdots \otimes T_P}_{m} \to \mathbb{R}$$

Il tensore $T(n,m)$ si dice quindi essere di rango (n,m).

È possibile definire le seguenti operazioni sui tensori:

1. $T^{(n,m)} + R^{(n,m)} = S^{(n,m)}$
2. $T^{(n,m)} \to \mu T^{(n,m)} \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}$
3. $T^{(n,m)} \otimes Q^{(n',m')} = P^{(n+n',m+m')}$
4. $T^{(n,m)}(\ldots, \tilde{\omega}, \ldots, \bar{v}, \ldots) = T^{(n-1,m-1)}$.

Per visualizzare più facilmente gli ultimi oggetti proposti, sono riportati qui di seguito alcuni esempi di uno-forme o tensori particolarmente utili in ambito fisico.

Esempio 1: un tensore $(0,0)$ è uno **scalare**.

Esempio 2: il **gradiente** $\tilde{d}f$ di una generica funzione f è, invece, un esempio di uno-forma. È possibile definire la uno-forma $\tilde{d}f(d/d\lambda)$, riprendendo la definizione di campo vettoriale, e conseguentemente scrivere la seguente relazione:

$$\bar{V}(f) = \frac{df}{d\lambda} = \tilde{d}f\Big(\frac{d}{d\lambda}\Big).$$

dove $\bar{V}$ è un campo vettoriale sulla varietà M, mentre f è la funzione che si sta considerando.

Esempio 3: di ancora maggiore interesse, soprattutto nel campo della relatività generale, è la definizione di **tensore metrico** $g|$, un tensore $(0,2)$ che associa a due vettori un numero reale, verificando le seguenti proprietà:

1. $g|(\bar{v}, \bar{w}) = g|(\bar{w}, \bar{v})$
2. $g|(\bar{v}, \bar{w}) = 0 \quad \forall \bar{w} \in T_P \Longleftrightarrow \bar{v} = 0$

La proprietà (1) è detta di simmetria, mentre la (2) è detta di non degenerazione. Un tensore metrico definisce automaticamente un prodotto scalare ed è questo il motivo per cui ricopre un ruolo fondamentale nello spazio-tempo di Minkowski o nel modello cosmologico di Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker.

1.3 Il legame tra teoria dei gruppi e geometria differenziale

Date le premesse fatte nei primi due paragrafi, risulterà naturale aspettarsi che ci sia un forte legame tra un gruppo e una varietà differenziabile. E, infatti, così è. Questo forte legame si sviluppa nel concetto di gruppo di Lie, come già anticipato. In questa sede si darà un accenno di definizione, più formale, di questi oggetti tanto potenti, rimandando però la trattazione più completa e dettagliata ai successivi capitoli, in particolare al prossimo.

Nel frattempo, si è liberi di immaginare un **gruppo di Lie** come un *gruppo G*, munito di una struttura di *varietà differenziabile*, compatibile con le operazioni di gruppo.

Pertanto, ad esempio, l'operazione $g_1 \cdot g_2$ è un'operazione differenziabile (e, con $g_1, g_2 \in G$, anche la loro combinazione binaria $g_1 \cdot g_2$ apparterrà a G per la proprietà di chiusura).

Il legame dei gruppi di Lie con la geometria differenziale non finisce qui. Un altro concetto fondamentale è, infatti, l'algebra di Lie, la cui definizione può essere espressa come segue: l'**algebra di Lie** $\tilde{G}$ del gruppo di Lie G è lo spazio tangente all'elemento neutro di G, cioè

$$\tilde{G} = T_1 M \tag{1.3}$$

Si consideri ora un numero reale $\alpha = n\epsilon$, ovvero $\epsilon = \frac{\alpha}{n}$ ($\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \epsilon = 0$). Conseguentemente,

$$\gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \gamma(n\epsilon) = \lim_{n\to\infty} \gamma(\epsilon)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha v}{n}\right)^n = e^{\alpha v} = e^{\alpha\gamma'(0)} \tag{1.4}$$

dove, per la seconda uguaglianza si è usata la *chiusura* del gruppo G, per la terza si è usata la relazione $\gamma(\epsilon) \simeq 1 + \epsilon v$ (che è esattamente l'espansione di Taylor di $\gamma(\epsilon)$ intorno all'elemento neutro), con $v = \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}$ e γ che rappresenta una generica curva passante per $1 \in G$.

Dall'ultima uguaglianza della (1.4) si evince che un generico elemento g di G possa essere espresso tramite la *mappa esponenziale*:

$$exp : T_1 M \to M$$

nel modo seguente:

$$g = e^{i\alpha_i T^i}$$

dove si è scelto di riscrivere $\alpha\gamma'(0) = i\alpha_i T^i$, cioè come combinazione lineare di n parametri T^i. Tali parametri T^i sono detti **generatori** di G.

Un'ultima utile considerazione sull'algebra di Lie, è il fatto che questa risulta uno spazio vettoriale $\tilde{G}$ chiuso rispetto ad un'operazione bilineare $[\cdot,\cdot] : \tilde{G}\times\tilde{G} \to \tilde{G}$, tale che:

1. $[A, B] = -[B, A] \qquad \forall A, B \in \tilde{G}$
2. $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 \qquad \forall A, B, C \in \tilde{G}$

Questa operazione bilineare antisimmetrica (si veda la prima proprietà) prende il nome di *commutatore* o **parentesi di Lie**, mentre la proprietà (2) prende il nome di *identità di Jacobi*.

Altre proprietà e considerazioni verranno riportate e approfondite nei capitoli successivi, dove si entrerà più nel vivo nel mondo dei gruppi di Lie.

Capitolo 2

Gruppi di Lie: i concetti alla base

I gruppi sono considerati i più importanti oggetti in matematica e indirettamente anche in fisica teorica. Questa reputazione è legata al fatto che sono utilissimi, oltre che formali, strumenti per lo studio delle simmetrie. L'importanza dei gruppi è dunque un riflesso dell'importanza delle simmetrie in Fisica. Dalla prospettiva della geometria differenziale, una speciale classe di gruppi, che si rivela essere di particolare interesse, è, come si è già anticipato nel capitolo precedente, quella dei gruppi di Lie. Questi rappresentano oggetti in cui due distinti aspetti coesistono pacificamente: l'aspetto algebrico (sono gruppi) e l'aspetto geometrico o topologico-differenziale (sono varietà differenziabili). Da un certo punto di vista questi due aspetti possono limitarsi a vicenda, ma, d'altro canto, si arricchiscono immensamente l'un l'altro: la ricchezza della geometria sui gruppi di Lie è diretta conseguenza dell'esistenza di una struttura algebrica di gruppo.

2.1 Automorfismo di varie strutture e gruppi

I gruppi si presentano in tutte le possibili applicazioni, per mezzo di loro azioni, come gruppi di trasformazione di qualcosa. Le trasformazioni di un arbitrario insieme X (mappe biettive $g : X \to X$, che per insiemi finiti equivalgono a delle banali permutazioni) sono naturalmente dotate di una struttura di gruppo (rispetto alla composizione di mappe). Una semplice, anche se molto importante, osservazione è che se si aggiunge una qualche struttura a X (che al momento è un semplice insieme), $X \mapsto (X, s)$, allora le trasformazioni che preservano la struttura, gli automorfismi della struttura (X, s), costituiscono anch'esse un gruppo, che è chiaramente un sottogruppo del gruppo di tutte le trasformazioni del "semplice" insieme X; indicheremo questo gruppo con G. Di seguito verranno riportati alcuni esempi esplicativi.

Esempio 1: sia (X, s) una varietà liscia M, cioè "s" è la struttura liscia su una varietà. In questo caso, il gruppo degli automorfismi è, ovviamente, $G = \text{Aut}\,(M)$, ovvero il gruppo dei **diffeomorfismi** della varietà.

In questo primo esempio si è definito un nuovo concetto: un *diffeomorfismo* è una funzione tra due varietà differenziabili con la proprietà di essere differenziabile, invertibile e di avere l'inversa differenziabile. Di fatto, quindi, i diffeomorfismi giocano in geometria differenziale lo stesso ruolo degli omeomorfismi in topologia. Due varietà tra le quali sia possibile definire un diffeomorfismo si dicono *diffeomorfe*.

Esempio 2: sia (X, s) uno spazio lineare (reale e a dimensione finita) V. Il gruppo G degli automorfismi di questa struttura è indicata con $\mathrm{Aut}\,(V) = GL(V)$ (dove con GL si intende il **gruppo lineare generale**). In questo caso, preservare "s" significa garantire la linearità della trasformazione, cosicché

$$g(v + \lambda w) = g(v) + \lambda g(w)$$

Tali trasformazioni, essendo biettive, garantiscono anche l'invertibilità, perciò $\mathrm{Aut}\,(V)$ è il gruppo degli operatori lineari invertibili di V. Si noti, inoltre, che il gruppo $\mathrm{Aut}\,(V) = GL(V)$ è isomorfo al gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ di matrici reali $n \times n$. Infatti, una base $e_a \in V$, scelta in maniera arbitraria, identifica V con $\mathbb{R}^n$ e gli operatori su V con le matrici quadrate, cioè

$$Ae_a = A^b_a e_b \quad \Longrightarrow \quad A \mapsto A^b_a$$

dove A rappresenta l'operatore su V, mentre A^b_a la matrice quadrata associata (per mezzo del diffeomorfismo).

Esempio 3: sia (X, s) uno spazio lineare V dotato di una forma bilineare $h : V \times V \to \mathbb{R}$, cosicché $(X, s) := (V, h)$. Il gruppo G di automorfismi di questa struttura consiste di tutti quegli operatori lineari e invertibili A su V che soddisfano, inoltre, la condizione

$$h(Av, Aw) = h(v, w)$$

Questi operatori sono chiusi rispetto all'operazione di gruppo. In forma matriciale

$$A^a_c A^b_d h_{ab} = h_{cd} \quad \longmapsto \quad A^T h A = h$$

dove $h_{ab} := h(e_a, e_b)$, scelta arbitrariamente la base e_a, mentre A^T rappresenta la trasposta della matrice A.

Esempio 4: se la forma bilineare h dell'*Esempio 3* è simmetrica e non degenere (cioè un *tensore metrico* in V) con *segnatura* (r, s), il gruppo di automorfismi corrispondente è indicato da $O(r, s)$ ed è chiamato **gruppo pseudo-ortogonale**. In forma matriciale vale la condizione (analoga a quella dell'*Esempio 3*)

$$A^T \eta A = \eta \tag{2.1}$$

con

$$\eta = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{s})$$

La matrice A che soddisfa questa condizione è chiamata matrice pseudo-ortogonale. Uno dei più noti esempi di questa struttura è il *gruppo di Lorentz* $\equiv O(1, 3)$, cioè il gruppo pseudo-ortogonale di segnatura $r = 1$ e $s = 3$ (convenzione nota come "*mostly minus*").

Nella descrizione di quest'ultimo gruppo si è citato il concetto di segnatura, che svolge un ruolo importante nell'algebra lineare applicata in ambiti come la relatività generale. La **segnatura** è, in generale, una terna di numeri che corrispondono al numero di autovalori di una matrice simmetrica (per cui è possibile applicare il *teorema spettrale* e, quindi, diagonalizzarla). La generica segnatura (i_+, i_-, i_0) di A è definita nel modo seguente: i valori i_+, i_-, i_0 sono rispettivamente il numero di autovalori positivi, negativi e nulli di A, ciascuno contato con la sua *molteplicità algebrica*.

Nell'ultimo esempio si è, però, utilizzata una segnatura con soli due valori, escludendo perciò a priori l'eventualità che il tensore metrico η (in questo contesto visualizzabile come matrice) abbia autovalori nulli. Questo fatto è conseguenza della definizione di tensore metrico, in particolare della proprietà di non degenerazione.

Esempio 5: riprendendo l'*Esempio 4*, si noti che il caso in cui $s = 0$ (o equivalentemente $r = 0$) permette di ottenere il **gruppo ortogonale**, per cui vale la seguente condizione

$$A^T A = 1$$

Il gruppo ortogonale $O(n, \mathbb{R})$ è spesso indicato anche come $O(n, 0)$ come conseguenza di quanto appena detto.

Esempio 6: si consideri il gruppo pseudo-ortogonale analizzato nell'*Esempio 4*. Un esempio di sottogruppo di tale gruppo è $SO(r, s)$, ovvero il **gruppo speciale pseudo-ortogonale**, composto dalle matrici pseudo-ortogonali con determinante uguale a $+1$. Si noti che una generica matrice $A \in O(r, s)$ ha determinante $\det(A) = \pm 1$, condizione che si ottiene facendo il determinante di entrambi i membri dell'equazione definente (2.1).

Esempio 7: sia (X, s) uno spazio lineare complesso n-dimensionale V (uno spazio lineare su $\mathbb{C}$). Il gruppo G di automorfismi è costituito, in questo caso, dagli operatori $\mathbb{C}$-lineari e invertibili in V. G è isomorfo al gruppo $GL(n, \mathbb{C}) = GL(\mathbb{C}^n)$ di matrici complesse $n \times n$. Il ragionamento è del tutto analogo a quello seguito nell'*Esempio 2*, dove però il coefficiente λ è da considerarsi complesso $(\lambda \in \mathbb{C})$.

Esempio 8: sia (X, s) uno spazio lineare complesso $\mathbb{C}^n$ dotato di un prodotto scalare Hermitiano (e si scriva $n = p + q$)

$$h(z, w) := \eta_{ab} \bar{z}^a w^b = \bar{z}^1 w^1 + \cdots + \bar{z}^p w^p - \bar{z}^{p+1} w^{p+1} - \cdots - \bar{z}^{p+q} w^{p+q}$$

cioè $(X, s) := (\mathbb{C}^n, h)$. In questo caso il gruppo $G \equiv U(p, q)$ di automorfismi di questa struttura consiste di tutte le matrici complesse che soddisfano la relazione

$$A^+ \eta A = \eta \tag{2.2}$$

dove

$$\eta = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q})$$

e A^+ rappresenta la matrice trasposta complessa coniugata di A. Il gruppo $U(p, q)$ è dunque noto come il **gruppo pseudo-unitario**.

Esempio 9: riprendendo l'*Esempio 8*, si noti che il caso in cui $q = 0$ (o equivalentemente $p = 0$) permette di di ottenere il **gruppo unitario**, per cui vale la seguente condizione

$$A^{+}A = 1$$

Il gruppo unitario $U(n)$ è spesso indicato anche come $U(n, 0)$, come conseguenza di quanto appena detto.

Esempio 10: si consideri il gruppo pseudo-unitario analizzato nell'*Esempio 8*. Un esempio di sottogruppo di tale gruppo è $SU(p, q)$, ovvero il **gruppo speciale pseudo-unitario**, composto dalle matrici pseudo-unitarie con determinante uguale a 1. Si noti che una generica matrice $A \in U(p, q)$ ha determinante $|\det(A)| = 1$, cioè $\det(A) = e^{i\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, condizione che si ottiene calcolando il determinante di entrambi i membri della equazione definente (2.2).

Esempio 11: si consideri il gruppo speciale pseudo-unitario $SU(p, q)$: per $q = 0$ (o, equivalentemente $p = 0$) si ottiene il **gruppo speciale unitario** $SU(n)$, che è praticamente onnipresente in fisica e che verifica le seguenti condizioni:

$$A^{+}A = 1 \quad det(A) = 1$$

I gruppi di automorfismi menzionati nei primi esempi (per la precisione dall'*Esempio 2* al *6*) sono sottogruppi di $GL(k, \mathbb{R})$ per un appropriato valore di k, cioè sono gruppi che possiamo trattare per mezzo di matrici reali. In realtà anche i gruppi di automorfismi riportati negli*Esempi* dal *7* all'*11*, pur essendo nel campo complesso, possono essere visti, *a meno di un isomorfismo*, come sottogruppi di $GL(k, \mathbb{R})$ per un appropriato valore di k.

Nel prossimo esempio, l'ultimo di questa sezione, è utile menzionare un gruppo che non è un gruppo di matrici per definizione, ma che può essere comunque "mappato" facilmente ad una copia isomorfa la quale è, invece, un gruppo di matrici.

Esempio 12: si considerino le *trasformazioni affini* di $\mathbb{R}^n$, cioè le trasformazioni del tipo

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax + a \equiv (A, a)x \qquad A \in GL(n, \mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}^n$$

Queste costituiscono un gruppo (che denoteremo con $GA(n, \mathbb{R})$ e che chiameremo **gruppo affine generale**), di cui il gruppo lineare generale è un sottogruppo, cioè $GL(n, \mathbb{R}) \subset GA(n, \mathbb{R})$. L'operazione di moltiplicazione in $GA(n, \mathbb{R})$ è leggermente più complicata e si dimostra essere

$$(A, a) \circ (B, b) = (AB, Ab + a)$$

con $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ e $a, b \in \mathbb{R}^n$.

La mappa

$$\rho : GA(n, \mathbb{R}) \to GL(n + 1, \mathbb{R})$$
$$(A, a) \mapsto \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un omomorfismo iniettivo (monomorfismo) di gruppi. L'immagine $Im(\rho)$ è una copia isomorfa di $GA(n, \mathbb{R})$ in $GL(n+1, \mathbb{R})$ e può quindi essere usata come vera e propria sostituta del gruppo di partenza $GA(n, \mathbb{R})$, avendo però il vantaggio di essere un gruppo di matrici e quindi più facile da maneggiare.

2.2 La geometria sui gruppi: i gruppi di Lie

La maggior parte dei gruppi che incontrati nella sezione precedente (tutti tranne l'*Esempio 1*) sono dotati della struttura geometrica di una varietà liscia, oltre che di una struttura di gruppo. La prima avvisaglia di ciò la si ha notando che gli elementi di questi gruppi non costituiscono un insieme discreto, ma piuttosto un "continuo" in cui le coordinate possono essere introdotte per etichettare i punti. Sappiamo già che sono proprio le coordinate ad essere il cuore del concetto di varietà.

Analizziamo alcuni semplici esempi.

Esempio 1: si consideri il gruppo $SO(2)$, cioè il gruppo, già citato in una sua forma più generale nella sezione precedente, delle matrici reali 2×2, che soddisfano le condizioni

$$A^T A = 1 \qquad \det(A) = 1 \tag{2.3}$$

Anzitutto, è facile verificare che le matrici scritte nella seguente forma

$$A = A(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, verificano le due proprietà (2.3). Inoltre, $SO(2)$ è una varietà liscia che è ***diffeomorfa*** al cerchio, ovvero alla sfera S^1.

Esempio 2: si consideri il gruppo $U(1)$, cioè il gruppo, già citato in una sua forma più generale nella sezione precedente, delle matrici complesse 1×1 (quindi numeri) che soddisfano le condizioni

$$A^+ A = 1 \qquad |A| = 1 \tag{2.4}$$

con $A \in \mathbb{C}$. Anzitutto, è facile verificare che le "matrici" scritte nella seguente forma

$$A = A(\alpha) \equiv e^{i\alpha} = cos\alpha + isen\alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, verificano le due proprietà (2.4). Inoltre, $U(1)$ è una varietà liscia che è ***diffeomorfa*** al cerchio, ovvero alla sfera S^1.

Esempio 3: si consideri il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$. Questo è una varietà n^2-dimensionale. Il modo più semplice per visualizzare le n^2 dimensioni è quello di usare gli elementi della matrice A^a_b come coordinate per $A \in GL(n, \mathbb{R})$: è sufficiente una singola carta.

Esempio 4: si consideri il gruppo $GL(n, \mathbb{C})$. Questo è una varietà $2n^2$-dimensionale. Il modo più semplice per visualizzare le $2n^2$ dimensioni è quello di riscrivere la matrice $A \in GL(n, \mathbb{C})$ come $A = B + iC$ e usare gli elementi delle matrici (reali) B^a_b e C^a_b come coordinate: è sufficiente una singola carta.

Gli esempi che abbiamo analizzato qui erano molto semplici, ma lo stesso procedimento potrebbe essere utilizzato, impiegando più tempo e fatica, anche per tutti i restanti gruppi trattati nella sezione precedente. Tutti sono esempi di varietà lisce e, inoltre, anche i sottogruppi di $GL(n, \mathbb{R})$ precedentemente menzionati risultano essere sottovarietà di $GL(n, \mathbb{R})$. Questo fatto, storicamente, ha rappresentato un'ottima motivazione per introdurre un nuovo concetto, che combinasse la struttura di un gruppo con la struttura di una varietà liscia: il **gruppo di Lie**, già anticipato nel precedente capitolo. Se si vuole che due strutture (matematiche) diverse vivano insieme "pacificamente" in una famiglia comune, queste dovranno concordare i termini di questa convivenza: dovranno, perciò, essere compatibili. Una delle parti coinvolte, la struttura liscia su una varietà, costringe a considerare solo mappe lisce: il suo imperativo nei confronti del gruppo (l'altra parte coinvolta), quindi, consiste nel richiedere l'esistenza di sole mappe lisce (se esistono). Il gruppo non può, a sua volta, immaginare la propria esistenza senza tre mappe chiave (cosicché queste saranno sempre inequivocabilmente definite in un gruppo di Lie), che ora si definiranno.

Si consideri, dunque, un gruppo G che sia, allo stesso tempo, una varietà liscia. La definizione di gruppo può essere riscritta sfruttando le mappe m, i e j, definite come

$$m : G \times G \to G \qquad i : G \to G \qquad j : G \to G$$

$$m(g, h) = gh \qquad i(g) = g^{-1} \qquad j(g) = 1$$

(con $g, h \in G$, g^{-1} elemento inverso, 1 elemento neutro). La mappa m è nota come legge di composizione del gruppo; la mappa i definisce l'elemento inverso e la mappa j individua l'elemento neutro. Queste tre mappe sono utili per verificare formalmente le proprietà di gruppo, ma, dal momento che sono anche lisce, verificano anche la struttura di varietà. Si noti, tra l'altro, che, dal momento che la mappa j è "costante" (e quindi liscia), la richiesta che m, i e j siano lisce è equivalente a richiedere che lo sia la sola mappa $(g, h) \mapsto gh^{-1} := m(g, i(h))$.

In questo modo si arriva alla definizione ufficiale di **gruppo di Lie** come oggetto che è un gruppo e allo stesso tempo una varietà, e le cui operazioni di moltiplicazione e la transizione all'elemento inverso sono mappe lisce.

Prima di procedere con l'ultima sezione di questo capitolo, si analizzeranno le mappe di composizione m di alcuni gruppi semplici.

Esempio 1: si consideri il gruppo $(\mathbb{R}, +)$. La sua legge di composizione m sarà $m(x, y) = x + y$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Esempio 2: si consideri il gruppo $GL(1, \mathbb{R})$. La sua legge di composizione m sarà $m(x, y) = xy$, con $x, y \in GL(1, \mathbb{R})$.

Esempio 3: si consideri il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$. La sua legge di composizione m sarà $(m(x, y))^i_j = x^i_k y^k_j$, con $x^i_k, y^k_j \in GL(n, \mathbb{R})$.

Esempio 4: si consideri il gruppo $GA(1, \mathbb{R})$. Anzitutto, come già anticipato nell'*Esempio 12* della sezione precedente, sarà necessario mappare il gruppo per mezzo della corrispondenza

$$(x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per poterlo studiare più facilmente, attraverso le matrici. La sua legge di composizione m sarà quindi $m((a, b), (x, y)) = (ax, ay + b)$, in analogia con quanto visto nel già citato *Esempio 12* della sezione precedente.

Esempio 5: si consideri il gruppo $GA(n, \mathbb{R})$. Procedendo in maniera analoga all'*Esempio* precedente, si avrà che la sua legge di composizione m è $m((a,b),(x,y)) = (a^i_k x^k_j, a^i_k y^k + b^i)$.

Ora non resta altro che definire quella particolare struttura algebrica che ci permette di studiare questi potenti gruppi: l'algebra di Lie, anch'essa denominata in tal modo per onorare il lavoro del matematico norvegese.

2.3 Algebra di Lie

Un'algebra in cui la moltiplicazione è *antisimmetrica* e soddisfa l'*identità Jacobi* è chiamata **algebra di Lie**. Quindi è uno spazio lineare $\mathcal{G}$ in cui si ha inoltre una "moltiplicazione" bilineare $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (in questo caso, il prodotto xy è solitamente chiamato *commutatore* e denotato con $[x,y]$) con le proprietà:

$$[x,y] = -[y,x]$$

$$[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0$$

Se $\mathcal{A}$ è un'**algebra associativa**, la prescrizione $[a,b] := ab - ba$ permette di ottenere da questa algebra (anche) l'algebra di Lie (tuttavia, non tutte le algebra di Lie hanno questa origine; per esempio, il commutatore di campi vettoriali non deriva dalla loro moltiplicazione associativa - quest'ultima non è nemmeno definita).

Un sottospazio $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ è una **sottoalgebra di Lie** se esso è anche chiuso rispetto al commutatore e una sottoalgebra $\mathcal{I}$ è un ideale dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$ se il commutatore con qualunque elemento restituisce un elemento in $\mathcal{I}$, cioè se $[i,x] = i' \in \mathcal{I}$ per un arbitrario $i \in \mathcal{I}, x \in \mathcal{G}$. Dato un ideale $\mathcal{I}$ in un'algebra di Lie $\mathcal{G}$, introducendo il commutatore nello spazio quoziente $\mathcal{G}/\mathcal{I}$ tramite i rappresentanti, si ottiene l'algebra di Lie quoziente.

Una mappa $D : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ è chiamata **derivazione** dell'algebra (di Lie) $\mathcal{G}$ se è lineare e se si comporta sul "prodotto" (commutatore) secondo la regola di Leibniz

$$D(x + \lambda y) = D(x) + \lambda D(y)$$

$$D([x,y]) = [D(x),y] + [x,D(y)]$$

Un esempio importante di derivazione è la **derivazione interna** $D \equiv ad_x$, definita da

$$ad_x := [x, \cdot]$$

Una mappa $A : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ è detta un **automorfismo** di un'algebra (di Lie) $\mathcal{G}$ se è biettiva, lineare e se conserva il "prodotto" (commutatore)

$$A(x + \lambda y) = A(x) + \lambda A(y)$$

$$A([x,y]) = [A(x), A(y)]$$

Un esempio importante di ciò è dato dall'**automorfismo interno** $A \equiv Ad_g$, che, per $g \in \mathcal{G} \equiv$ il gruppo di Lie, è definito da

$$I_g e^x \equiv g e^x g^- 1 =: e^(Ad_g(x))$$

Tutti gli automorfismi di $\mathcal{G}$ formano un gruppo Aut $(\mathcal{G})$ (essi sono chiusi rispetto alla composizione), la cui algebra di Lie Der $(\mathcal{G})$ è data da tutte le derivazioni di $\mathcal{G}$. Il commutatore in Der $(\mathcal{G})$ emerge dalla moltiplicazione associativa di mappe lineari, cioè $[D_1, D_2] := D_1D_2 - D_2D_1$. Gli automorfismi infinitesimi hanno quindi la forma $\hat{1} + \epsilon D$, $D \in \text{Der}(\mathcal{G})$.

Se E_i è una base di $\mathcal{G}$, allora la formula $[E_i, E_j] =: c_{ij}^k E_k$ definisce le **costanti di struttura**. Queste formano le componenti di un tensore di tipo $\binom{1}{2}$. La proprietà di antisimmetria e l'identità di Jacobi sono riflesse nelle proprietà

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \qquad\qquad c_{si}^r c_{jk}^s + c_{sk}^r c_{ij}^s + c_{sj}^r c_{ki}^s = 0$$

Date due algebre di Lie, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, possiamo costruire la loro **somma diretta** $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ come lo spazio lineare $\mathcal{G}_1 \dotplus \mathcal{G}_2$, dove il commutatore è dato da

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] := ([x_1, y_1], [x_2, y_2]) \qquad x_j, y_j \in \mathcal{G}_j \quad j = 1, 2$$

Gli elementi della forma $(x_1, 0)$ costituiscono una sottoalgebra di Lie $\tilde{\mathcal{G}}_1$ isomorfa all'algebra $\mathcal{G}_1$ e, similmente, gli elementi $(0, x_2)$ formano $\tilde{\mathcal{G}}_2 \subset \mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}_2 \approx \mathcal{G}_2$. Le sottoalgebre $\tilde{\mathcal{G}}_j$ sono inoltre ideali in $\mathcal{G}$ e vale

$$\mathcal{G}/\tilde{\mathcal{G}}_1 \approx \mathcal{G}_2 \qquad\qquad \mathcal{G}/\tilde{\mathcal{G}}_2 \approx \mathcal{G}_1$$

Se $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ sono algebre di Lie di matrici, la loro somma diretta può essere realizzata da matrici diagonali a blocchi

$$(x_1, x_2) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

Capitolo 3

Gruppi di Lie: le applicazioni della geometria differenziale

La geometria differenziale fornisce uno strumento molto efficace per lo studio di oggetti sofisticati quali i gruppi di Lie. È infatti possibile associare l'algebra di Lie, un oggetto molto semplice, essendo uno spazio vettoriale finito-dimensionale, ad ogni gruppo di Lie con l'aiuto dei campi vettoriali invarianti a sinistra.

3.1 Campi tensoriali invarianti a sinistra su un gruppo di Lie

Su ogni tipo di gruppo, non soltanto su quelli di Lie, giocano un ruolo importante delle mappe speciali $G \to G$, chiamate **traslazioni sinistre** (e destre). Dato un elemento $g \in G$, le mappe sono, rispettivamente:

$$L_g : G \to G \quad h \mapsto L_g h := gh$$

$$R_g : G \to G \quad h \mapsto R_g h := hg$$

Entrambe sono biettive e, per gruppi di Lie, sono entrambe lisce, dunque sono diffeomorfismi di G su G. Le traslazioni destre e sinistre commutano tra loro. Dato che L_g è un diffeomorfismo $G \to G$, il suo pull-back L_g^* può essere applicato ad un arbitrario campo tensoriale su un gruppo G; il risultato sarà ancora un campo tensoriale su G. Esistono campi tensoriali che non cambiano sotto una mappa di pull-back di questo tipo: tali campi sono detti L_g**-invarianti**.

Un campo tensoriale T di tipo $\binom{p}{q}$ su G è detto essere **invariante a sinistra** (dall'inglese *left-invariant*) se soddisfa

$$L_g^* T = T \qquad \forall g \in G$$

Campi di questo tipo sono definiti univocamente dal loro valore nell'elemento unitario $e \in G$ del gruppo (o, in generale, in qualunque altro punto $h \in G$). È possibile dimostrare che gli spazi di campi tensoriali invarianti a sinistra risultano essere le immagini isomorfe degli spazi (finito-dimensionali) di tensori nel punto e. Inoltre, mentre campi tensoriali di tipo arbitrario (fissato) $\binom{p}{q}$ costituiscono uno spazio lineare ∞-dimensionale, i campi invarianti a sinistra formano sempre un sottospazio *finito-dimensionale*. In particolare, la dimensione dello spazio lineare dei campi invarianti a sinistra di tipo $\binom{p}{q}$ è $n^{(p+q)}$, dove $n = \dim G$.

Si riportano di seguito alcuni esempi utili.

Esempio 1: le funzioni (tensori di tipo $\binom{0}{0}$) invarianti a sinistra sono tutte le funzioni costanti su G. Lo spazio di tali funzioni ha dimensione $n^{(0+0)} = 1$.

Esempio 2: i tensori di tipo $\binom{1}{0}$, cioè i campi vettoriali, invarianti a sinistra costituiscono uno spazio lineare n-dimensionale, che copia esattamente lo spazio tangente nell'elemento unitario del gruppo.

È interessante notare che l'invarianza a sinistra dei campi tensoriali è conservata sotto le operazioni di prodotto tensoriale $\otimes$, di combinazione lineare (su $\mathbb{R}$) e di derivata di Lie $\mathcal{L}_V$ rispetto al campo invariante a sinistra V. L'invarianza a sinistra della forme è conservata sotto le operazioni di prodotto esterno $\wedge$, di prodotto interno i_V con un campo invariante a sinistra V e la derivata esterna d.

Per le traslazioni a destra, tutto viene realizzato in maniera analoga.

3.2 Algebra di Lie su un gruppo

Nella sezione precedente, è stato messo in evidenza il fatto che alcune operazioni standard effettuate sui tensori (in particolare, sulle forme) non modificano l'invarianza a sinistra degli oggetti su cui agiscono; esse potrebbero essere ristrette ai corrispondenti sottospazi finito-dimensionali dati dai campi invarianti a sinistra. Anche il commutatore di campi vettoriali gode di questa proprietà: conserva l'invarianza a sinistra degli oggetti su cui agisce. Ciò significa che i campi vettoriali invarianti a sinistra su un gruppo di Lie costituiscono un'**algebra di Lie finito-dimensionale**. Quindi, un gruppo di Lie induce sempre, canonicamente, un oggetto algebrico semplice: la *sua* algebra di Lie.

L'algebra di Lie dei campi vettoriali invarianti a sinistra su G è talvolta chiamata già come algebra di Lie di un gruppo G. Altre volte, è utilizzata la relazione tra i campi invarianti a sinistra e lo spazio tangente nell'elemento unitario, e viene usata la definizione in cui l'algebra di Lie $\mathcal{G}$ di un gruppo G è identificata con lo spazio tangente (nell'elemento unitario) stesso, $T_eG =: \mathcal{G}$. In questo spazio è chiaramente presente una struttura lineare, ma essa è sprovvista di un commutatore; per due vettori in un singolo spazio tangente su una varietà generale non è definito un commutatore. Tuttavia, si trova che, quando si tratta di un gruppo di Lie, un commutatore può essere introdotto.

Sia E_a una base dello spazio tangente nell'elemento unitario e si indichi con e_a i campi invarianti a sinistra su G generati da E_a. In questo caso, vale $e_a(g) = L_{g^*}E_a$, $E_a = e_a(e)$. Le costanti di struttura rispetto a E_a sono esprimibili secondo $[E_a, E_b] = c^c_{ab}E_c$. È utile ricordare che un campo invariante a sinistra è univocamente "esteso", dal suo valore stabilito $E_a = e_a(e)$ in e, a punti lontani da e per mezzo di una traslazione sinistra $L_g = m(g, \cdot)$, la quale dipende dalla legge di composizione $m : G \times G \to G$ su un gruppo G. Di conseguenza, modificando la legge di composizione si ottengono campi invarianti a sinistra differenti, e quindi costanti di struttura diverse, per gli stessi vettori E_a - cioè una diversa algebra di Lie. Risulta dunque chiaro che l'informazione di vitale importanza riguardo la **legge di composizione di un gruppo**, il "cuore" del gruppo, è codificata in una forma concentrata nelle costanti di struttura, nonostante esse siano formalmente espresse in termini di oggetti esistenti in un singolo punto (l'elemento unitario e).

Si introduce, di seguito, un oggetto canonico su un gruppo di Lie, la uno-forma a valori nell'algebra di Lie θ. Questa forma ha un ruolo importante in quanto la si ritrova in una formula che descrive la variazione dei potenziali di gauge sotto trasformazioni di gauge.

Esempio: dato un gruppo di Lie G, la **uno-forma canonica** a valori in $\mathcal{G}$ è definita da

$$\langle \theta(g), v \rangle := L_{g^{-1}*} v \qquad v \in T_g G$$

Questa forma è nota anche come *uno-forma di Maurer-Cartan.* Con questa forma, un vettore v è mappato da un'opportuna, e unica, traslazione sinistra da g a e, in modo che $\theta(g) : T_g G \to T_e G \equiv \mathcal{G}$. Una definizione equivalente è

$$\langle \theta, L_X \rangle := X$$

in cui L_X è il campo invariante a sinistra generato da $X \in \mathcal{G}$ e entrambi i lati sono funzioni a valori in $\mathcal{G}$ su G. Questa forma è invariante a sinistra: $L_g^* \theta = \theta$.

3.3 Sottogruppi ad un parametro

Su ogni gruppo di Lie, esistono curve distinte, dette **sottogruppi ad un parametro**. Queste curve $\gamma(t)$ possono essere univocamente caratterizzate dalle proprietà

$$\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s) \qquad \gamma(0) = e \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Ogni sottogruppo ad un parametro può essere visto (o definito) come l'immagine di un omomorfismo $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to G$, cioè l'immagine omomorfa del gruppo additivo dei numeri reali nel gruppo G. Una proprietà verificata è la seguente: suddividendo l'intervallo $[0, t]$ in un numero N grande di sottointervalli uguali, di lunghezza $\epsilon = t/N$, si ha che

$$\gamma(t) = \underbrace{\gamma(\epsilon)...\gamma(\epsilon)}_{N}$$

Questo significa che è possibile raggiungere il punto $\gamma(t)$ moltiplicando N volte il punto di partenza e per lo stesso elemento del gruppo "vicino all'elemento unitario" $\gamma(\epsilon)$. In un certo senso, l'intera curva dipende solo da questo "piccolo" elemento. Tuttavia, questo metodo di costruzione non è molto conveniente; ne esiste però uno molto più semplice utilizzando i campi vettoriali invarianti a sinistra su G. In realtà, esiste una corrispondenza biunivoca tra elementi di un'algebra di Lie del gruppo e sottogruppi ad un parametro, e una corrispondenza biunivoca tra questi ultimi e campi vettoriali invarianti a sinistra.

Sia L_X il campo vettoriale invariante a sinistra su G generato da un vettore $X \in \mathcal{G}$. Allora, la sua curva integrale $\gamma^X(t)$ con punto iniziale e è un sottogruppo ad un parametro

$$\gamma^X(t+s) = \gamma^X(t)\gamma^X(s) \qquad \gamma^X(0) = e$$

Si consideri il sottogruppo ad un parametro $\gamma^X(t)$ generato dall'elemento X dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$. Esso soddisfa

$$\gamma^X(0) = e \qquad \gamma^X(t+s) = \gamma^X(t)\gamma^X(s) \qquad \dot{\gamma}^X(0) = X$$

La **mappa esponenziale** è definita da

$$\exp : \mathcal{G} \to G \qquad X \mapsto \exp X \equiv e^X := \gamma^X(1)$$

Il punto risultante (l'immagine dell'elemento X) appartiene al sottogruppo ad un parametro $\gamma^X(t)$ ad una distanza parametrica di 1 dall'unità del gruppo. Si può dimostrare che valgono le seguenti proprietà:

1. $\gamma^X(kt) = \gamma^{kX}(t) \qquad k \in \mathbb{R}$
2. $\gamma^X(t) = \exp tX \equiv e^{tX}$
3. $\exp 0 = e$
4. $\exp(-X) = (\exp X)^{-1}$
5. $\exp(t+s)X = \exp tX \, \exp sX$

Dalla proprietà (2), si evince che il moto lungo un sottogruppo ad un parametro è l'immagine rispetto a exp del "moto rettilineo uniforme" nell'algebra di Lie. Dalla proprietà (3), si trova che l'origine (punto 0) di un'algebra di Lie è quindi mappata nell'elemento unitario del gruppo. In realtà, si potrebbe dire di più, cioè che un qualche intorno dell'origine è mappato tramite diffeomorfismo in un qualche intorno dell'elemento unitario del gruppo.

3.4 Gruppi di Lie di matrici

Molte informazioni riguardo i gruppi di Lie di matrici e le loro algebre di Lie possono essere, tuttavia, ottenuti senza minimamente utilizzare idee geometriche come campi invarianti a sinistra o le loro curve integrali. Un esempio di algebra di Lie di matrici è il seguente.

Esempio 1: si consideri $\mathrm{End}\, V$, l'insieme di tutti gli endomorfismi su uno spazio lineare V, cioè l'insieme $\mathrm{Hom}\,(V,V)$ di tutte le mappe lineari da V in V. Esso è naturalmente dotato della struttura di algebra associativa. Per $V = \mathbb{R}^n$, è possibile identificare questa algebra associativa con l'algebra $M_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}(n)$ di matrici reali $n \times n$. Inoltre, la prescrizione $[A,B] := AB - BA$ fa di $\mathrm{End}\, V$ (e, in particolare, anche di $M_n(\mathbb{R})$) un'algebra di Lie.

Le algebre di Lie di matrici sono strettamente collegate alle algebre di Lie di gruppi. Ad esempio, l'algebra di Lie $gl(n,\mathbb{R})$, definita in modo astratto come lo spazio tangente nell'elemento unitario dotato di un commutatore, può essere sostituita dalla sua copia isomorfa $M_n(\mathbb{R}) \equiv \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$, cioè dalle matrici $n \times n$ con un commutatore semplice $CD - DC$.

Dato un arbitrario gruppo di matrici $G \subset GL(n, \mathbb{R})$, la sua algebra di Lie è realizzata come un sottospazio dello spazio tangente del gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ nell'elemento unitario. Tuttavia, in virtù di quanto appena detto, è possibile considerare anche la sua copia isomorfa, il sottospazio dello spazio delle matrici $n \times n$. Riassumendo, ci sono già tre possibili realizzazioni dell'algebra di Lie di un gruppo di Lie G:

1. $\mathcal{G}$ come l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra su G;

2. $\mathcal{G}$ come lo spazio tangente nell'elemento unitario (la definizione più ufficiale);

3. $\mathcal{G}$ come una sottoalgebra dell'algebra delle matrici $n \times n$ $\mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$.

Di seguito è riportato un esempio che illustra la corrispondenza appena presentata tra le tre algebre isomorfe.

Esempio 2: sia $G = O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Se si identifica lo spazio tangente nell'elemento unitario del gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ (cioè l'algebra di Lie $gl(n, \mathbb{R})$) con le matrici $n \times n$, allora il sottospazio corrispondente al sottogruppo G in questione (cioè l'algebra di Lie $o(n, \mathbb{R})$ corrisponde alle matrici $n \times n$ antisimmetriche. Dato che tutte le matrici antisimmetriche sono chiuse rispetto alle combinazioni lineari e al commutatore, esse formano un'algebra di Lie.

L'algoritmo per trovare le versioni matriciali delle algebre di Lie può essere così riassunto: le matrici C dell'algebra sono ottenute tramite *differenziazione* (rispetto a t in $t = 0$) delle relazioni definenti valide per le matrici $x(t)$ del gruppo; in particolare:

1. Si considerano le curve in $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ che iniziano dall'elemento unitario; in coordinate $x(t) \in G \subset GL(n, \mathbb{R})$, $x(0) = \mathbb{I}_n$

2. La versione matriciale dell'algebra di Lie è costituita esattamente da tutte le matrici $C := \dot{x}(0)$

In alternativa, questo algoritmo può essere riformulato nella seguente maniera: si scrive un elemento del gruppo nella forma $x = \mathbb{I}_n + \epsilon C$, si inserisce l'ansatz nelle relazioni definenti del gruppo e si lasciano solo i termini entro il primo ordine di accuratezza in ϵ.

Riferendosi agli esempi di gruppi di matrici riportati nella sezione 1.1, le dimensioni delle corrispondenti algebre di Lie di matrici sono le stesse dei gruppi.

La costruzione esplicita dei sottogruppi ad un parametro e della mappa esponenziale si riduce, nel formalismo matriciale, al calcolo degli **esponenziali di matrici**, cioè delle serie infinite $e^X := \mathbb{I}_n + X + (1/2!)X^2 + ...$, dove X è una matrice $n \times n$ (un elemento dell'algebra di Lie corrispondente al sottogruppo). Qui di seguito sono riportati alcuni esempi in cui sono utilizzati gruppi particolarmente utili in ambito fisico.

Esempio 3: sia $\mathcal{G} = su(2)$. Una base in $su(2)$ è data da $e_j := -\frac{1}{2} i\sigma_j$, dove le $\sigma_j, j = 1, 2, 3$ sono le **matrici di Pauli**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le costanti di struttura rispetto a questa base risultano essere $c_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$. Un generico elemento $X \in su(2)$ può essere scritto nella forma

$$X = -\frac{i}{2}\alpha \mathbf{n} \cdot \sigma \equiv -\frac{i}{2}\alpha n_j \sigma_j \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |\mathbf{n}| = 1$$

I gruppi ad un parametro in $SU(2)$ sono

$$A(t) = e^{-\frac{1}{2}it\alpha \mathbf{n}\cdot\sigma} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |\mathbf{n}| = 1$$

La matrice generica $A \in SU(2)$ si scrive

$$A = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \qquad |z|^2 + |w|^2 = 1, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

da cui si nota che, topologicamente, $SU(2) = S^3$. La matrice generica $A \in SU(2)$ può essere sempre scritta nella forma $e^X, X \in su(2)$, quindi la mappa esponenziale copre l'intero gruppo $SU(2)$ (è suriettiva).

Esempio 4: sia $\mathcal{G} = so(3)$. Una base in $so(3)$ è data dalle matrici 3×3 l_i, con gli elementi

$$(l_i)_{jk} := -\varepsilon_{ijk}$$

che esplicitamente sono

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad l_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad l_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le costanti di struttura rispetto a questa base sono $c_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$. Un generico elemento $X \in so(3)$ può essere espresso come

$$X = \alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \equiv \alpha n_i l_i \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |\mathbf{n}| = 1$$

I sottogruppi ad un parametro in $SO(3)$ sono

$$A(t) = R(t\alpha, \mathbf{n}) \qquad \text{dove } R(\alpha, \mathbf{n}) := e^{\alpha \mathbf{n}\cdot\mathbf{l}}$$

La forma esplicita delle matrici 3×3 $R \equiv R(\alpha, \mathbf{n})$ è

$$R_{ij} \equiv (R(\alpha, \mathbf{n}))_{ij} = \delta_{ij} \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) n_i n_j - \varepsilon_{ijk} n_k \sin\alpha$$

in modo che, moltiplicando una colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a sinistra per una matrice di questo tipo,

$$x_i \mapsto x_i' := R_{ij} x_j$$

il risultato possa essere scritto come

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cos\alpha + (1 - \cos\alpha)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{x}) \sin\alpha$$

Questa formula descrive il risultato di una **rotazione** del vettore $\mathbf{x}$ di un angolo α attorno all'asse identificato dal vettore $\mathbf{n}$, in modo che la matrice $R(\alpha, \mathbf{n})$

corrisponda alla rotazione più generale nello spazio euclideo E^3; quindi, è la matrice più generale di $SO(3)$. Di conseguenza, la mappa esponenziale "copre" l'intero gruppo $SO(3)$ - essa è dunque suriettiva, e ogni matrice $A \in SO(3)$ è scritta nella forma e^X per qualche $X \in so(3)$. Inoltre, il moto lungo il sottogruppo ad un parametro $A(t) = R(t\alpha, \mathbf{n})$ corrisponde ad una rotazione uniforme con velocità angolare $\omega = \alpha\mathbf{n}$.

Talvolta, vi è una ragione *topologica* dietro al fallimento della mappa esponenziale di "coprire" tutto il gruppo: il fatto che quest'ultimo non sia connesso.

Uno spazio topologico M è detto **connesso per archi** se, per ogni coppia di punti $a, b \in M$ esiste una mappa continua dall'intervallo $\langle 0, 1\rangle$ a M tale che l'immagine di 0 è il punto "a" e l'immagine del punto 1 è il punto "b". Visivamente, questo significa che due punti qualsiasi possono essere collegati da una curva (continua), i cui punti sono tutti contenuti in M. La lrelazione "possono essere collegati" non è altro che un'equivalenza su M, e lo spazio M è connesso se e solo se esiste una singola classe di equivalenza (l'intero spazio è quindi una componente singolarmente connessa).

Esempio 5: i gruppi $GL(n, \mathbb{R})$ e $O(n, \mathbb{R})$ non sono connessi; essi hanno *almeno* due componenti connesse. Si verifica che ne hanno soltanto due.

Un gruppo di Lie generico può avere più di una componente connessa e l'elemento identità del gruppo appartiene ad una di esse, detta *componente connessa dell'identità*. L'immagine della mappa esponenziale non può contenere altre componenti del gruppo oltre a questa. Non va dimenticato però che la non-suriettività della mappa esponenziale impedisce, al pari, di scrivere ogni elemento come e^X, pur non essendo legata alla connessione o meno del gruppo. Esistono infatti gruppi di Lie connessi in cui la mappa esponenziale, non essendo suriettiva, non copre l'intero gruppo. Per questo si introduce il termine **gruppo esponenziale**, nel caso in cui $G = \exp \mathcal{G}$. Esempi di gruppi esponenziali sono $SU(2)$ e $SO(3)$. Se un gruppo è esponenziale, ne segue che esso è necessariamente connesso.

Capitolo 4

Rappresentazione dei gruppi di Lie e algebre di Lie

Quando si parla di un gruppo, spesso si sta facendo riferimento al gruppo di trasformazioni di qualcosa, attraverso la sua azione su un insieme, solitamente dotato di una qualche struttura aggiuntiva (in alternativa, si può anche parlare dei gruppi astratti, i quali non sono direttamente legati alle trasformazioni). Esiste dunque una regola che assegna ad ogni elemento g di un gruppo una trasformazione L_g su un qualche insieme M. Nello studio della teoria dei gruppi, risulta dunque naturale chiedersi dove e come un gruppo agisce. Nel seguente capitolo verrà trattata un'importante classe di azioni, chiamate **rappresentazioni**. Esse sono caratterizzate dall'agire in modo lineare in spazi lineari. L'importanza delle rappresentazioni risiede nel loro stretto legame con linearità e simmetrie.

4.1 Concetti di base

Se un gruppo di simmetria deve agire in uno spazio lineare V, è naturale chiedere la compatibilità delle operazioni di simmetria con la struttura lineare. Ciò significa che per ogni elemento g del gruppo si dovrebbe assegnare un operatore lineare $\rho(g)$, cioè $\rho(g) \in \operatorname{End} V$. Inoltre, queste mappe dovrebbero anche "riprodurre" il comportamento del gruppo astratto G stesso, cioè essere omomorfismi da G a $\operatorname{End} V$. Occorre tuttavia tenere a mente che tutte le mappe lineari (cioè $\operatorname{End} V$) non costituiscono un gruppo in modo che il concetto di omomorfismo da G a $\operatorname{End} V$ formalmente (come omomorfismo del gruppo) non ha senso.

Si osservi che

$$\operatorname{Aut} V \subset \operatorname{End} V \equiv \operatorname{Hom}(V, V)$$

e che, se ρ è un omomorfismo, la sua immagine $\operatorname{Im} \rho \equiv \rho(G)$ deve appartenere a $\operatorname{Aut} V$, cioè ogni operatore $\rho(g)$ deve essere invertibile. In generale, si può scrivere:

$$\rho(G) \subset \operatorname{Aut} V \subset \operatorname{End} V$$

Le simmetrie in V sono descritte attraverso omomorfismi

$$\rho : G \to \operatorname{Aut} V \equiv GL(V) \qquad \rho(g\tilde{g}) = \rho(g)\rho(\tilde{g})$$

Un tale omomorfismo è chiamato **rappresentazione** di un gruppo G in uno spazio vettoriale V. La dimensione dello spazio V è chiamata dimensione della rappresentazione ρ. La rappresentazione è quindi un'azione lineare sinistra. Esiste un punto di vista alternativo "matriciale" sulle rappresentazioni: a ciascun elemento del gruppo g, una rappresentazione ρ assegna un operatore lineare (invertibile) $\rho(g)$ e quindi, dopo aver introdotto una base E_a in V, essa assegna anche la matrice dell'operatore

$$\rho(g)E_a =: (\rho(g))^b_a E_b \qquad g \mapsto (\rho(g))^b_a$$

Otteniamo quindi un'assegnazione "elemento del gruppo $\mapsto$ matrice", in cui un prodotto di elementi è mappato al prodotto delle matrici corrispondenti.

Esempio 1: si consideri il gruppo che consiste di solo tre elementi $G = e, a, b$. L'assegnazione

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è una rappresentazione del gruppo in $\mathbb{R}^3$.

Esempio 2: dato un gruppo di matrici $G \subset GL(n, \mathbb{R})$, la prescrizione

$$A \mapsto \rho(A) \equiv A$$

è una rappresentazione del gruppo in $\mathbb{R}^n$. La matrice A, vista come un elemento del gruppo G, è rappresentata dalla matrice A stessa, interpretata però come un operatore lineare in $\mathbb{R}^n$. Questa rappresentazione è indicata con $\rho = \mathrm{id}$ ("identità"; talvolta, detta "tautologica").

Esempio 3: data una matrice quadrata non singolare A (ad esempio, $A \in GL(n, \mathbb{R})$), la prescrizione $A \mapsto \det A$ può essere vista come una rappresentazione unidimensionale del gruppo $GL(n, \mathbb{R})$. Anche la generalizzazione a $A \mapsto (\det A)^\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ è una rappresentazione.

Si rammenti che l'idea di rappresentazione di un gruppo nasce dalla semplice osservazione che gli operatori lineari invertibili sono naturalmente dotati della struttura di un gruppo. Una più attenta analisi, tuttavia, conduce a un'affermazione più generale; precisamente, che particolari sottoinsiemi di operatori lineari sono naturalmente dotati di varie strutture algebriche utili. Le rappresentazioni sono quindi omomorfismi (al fine di preservare le operazioni) della struttura in considerazione alla corrispondente classe di operatori. Due (o tre) casi importanti sono di particolare interesse: gli operatori invertibili, ovvero $\mathrm{Aut}\, V \equiv GL(V)$, costituiscono un gruppo (il caso di partenza) mentre tutti gli operatori lineari, ovvero $\mathrm{End}\, V$, costituiscono un'algebra associativa e di conseguenza anche un'algebra di Lie (essendo il commutatore realizzato come $[A, B] := AB - BA$). Ciò significa che la **rappresentazione di un'algebra di Lie $\mathcal{G}$ in uno spazio vettoriale V** è un omomorfismo dell'algebra di Lie

$$f : \mathcal{G} \to \mathrm{End}\, V$$

cioè si assegna ad un elemento arbitrario X dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$ un operatore lineare $f(X)$ in modo che

- dipenda linearmente da X

$$f(X+\lambda Y)=f(X)+\lambda f(Y)$$

e che

- preservi il commutatore

$$f([X,Y])=[f(X),f(Y)]\equiv f(X)f(Y)-f(Y)f(X)$$

Si noti che si osservano qui due linearità: $f(X)$ è un operatore lineare in V, il quale dipende linearmente da X.

Esempio 4: siano $f:\mathcal{G}\to \operatorname{End} V$ una rappresentazione di un'algebra di Lie $\mathcal{G}$ in V, E_j una base in $\mathcal{G}$ e siano $\varepsilon_j := f(E_j)$ i **generatori della rappresentazione**, cioè gli operatori lineari in V che rappresentano gli elementi di base dell'algebra di Lie. Gli operatori ε_j soddisfano le stesse relazioni di commutazione che gli elementi di base E_j soddisfano per l'algebra di Lie, cioè

$$[E_i,E_j]=c_{ij}^k E_k \to [\varepsilon_i,\varepsilon_j]=c_{ij}^k\varepsilon_k$$

Esempio 5: siano $\mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}}$ due algebre di Lie della stessa dimensione. Esse sono isomorfe se e solo se le loro costanti di struttura coincidono in basi opportunamente scelte. Ad esempio, le algebre di Lie $so(3)$ e $su(2)$ sono isomorfe, e sono isomorfe all'algebra di Lie $(E^3,\times)$ (vettori tridimensionali, commutatore $:=$ prodotto vettoriale).

La relazione tra i gruppi di Lie e le algebre di Lie si riflette in una relazione corrispondente tra le loro rappresentazioni. Il percorso unico e "senza problemi" $G\mapsto\mathcal{G}$ (un gruppo di Lie G induce la sua algebra di Lie $\mathcal{G}$) corrisponde al percorso unico e "senza problemi" $\rho\mapsto\rho'$ a livello delle loro rappresentazioni: una rappresentazione ρ di un gruppo di Lie G induce un'unica rappresentazione ρ' dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$; è chiamata **rappresentazione derivata**. Data una rappresentazione ρ di un gruppo di Lie G in V, la formula esplicita della rappresentazione derivata (la quale è una rappresentazione di $\mathcal{G}$ in V) è

$$\rho'(X)=\frac{d}{dt}\Big|_0\rho(e^{tX})$$

Questa formula per il calcolo di ρ' può essere riscritta nella forma

$$\rho(1+\epsilon X)=1+\epsilon\rho'(X)\qquad \text{entro l'ordine}\,\epsilon$$

Tuttavia, proprio come il percorso $\mathcal{G}\mapsto G$ non deve essere necessariamente così semplice (due algebre isomorfe possono possono avere sopra di loro gruppi non isomorfi, ad esempio $su(2)=so(3)$, ma $SU(2)\neq SO(3)$), in generale anche il percorso $\rho'\mapsto\rho$ potrebbe essere più complicato.

Esempio 6: siano $A\mapsto\det A$, o più in generale $A\mapsto(\det A)^\lambda$, rappresentazioni del gruppo $GL(n,\mathbb{R})$. Per le loro rappresentazioni derivate, si ottiene

$$\rho: A\mapsto\det A\quad\Rightarrow\quad\rho': C\mapsto\operatorname{Tr} C$$

$$\rho : A \mapsto (\det A)^\lambda \quad \Rightarrow \quad \rho' : C \mapsto \lambda \operatorname{Tr} C$$

Inoltre, le mappe ρ' sono lineari e conservano (trivialmente) il commutatore.

Una rappresentazione ρ di un gruppo G è chiamata **rappresentazione fedele** se la mappa $\rho : G \to \operatorname{Aut} V$ è iniettiva (e lo stesso vale per le rappresentazioni delle algebre di Lie). Il gruppo (astratto) stesso è quindi isomorfo al sottogruppo $\operatorname{Im} \rho \subset \operatorname{Aut} V$ degli operatori (matrici), essendo l'isomorfismo $g \leftrightarrow \rho(g)$.

Ad esempio, l'incorporazione del gruppo affine $GA(n, \mathbb{R})$ in $GL(n+1, \mathbb{R})$ dall'*esempio 12* della sezione 2.1 può essere considerata una rappresentazione fedele di $GA(n, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Si consideri ora una rappresentazione di un gruppo G in uno spazio lineare V, cioè una coppia (V, ρ). Lo stesso spazio lineare può essere anche dotato di un prodotto scalare h; si avrà anche (V, h). Se entrambe le strutture si verificano simultaneamente in una qualche situazione, poiché di regola sono compatibili, avremo una tripla compatibile (V, h, ρ). Ciò significa che il prodotto scalare di due vettori qualsiasi non cambia se viene applicato un arbitrario elemento g del gruppo (tramite la rappresentazione ρ) simultaneamente su entrambi i vettori. Se si verifica questa condizione, si parla di un *prodotto scalare ρ-invariante.*

Esempio 7: sia h un prodotto scalare ρ-invariante del tipo (r, s) in V. Si ha

$$h(\rho(g)v, \rho(g)w) = h(v, w) \qquad v, w \in V\,;\, g \in G$$

Allora, gli operatori $\rho(g)$ sono pseudo-ortogonali, cioè

$$\rho : G \to O(r, s) \equiv \operatorname{Aut}(V, h) \subset \operatorname{Aut} V \qquad r + s = \dim V$$

e gli operatori della rappresentazione derivata, $\rho' : \mathcal{G} \to o(r, s)$, soddisfano

$$h(\rho'(X)v, w) = -h(v, \rho'(X)w)$$

essendo quindi (pseudo-)antisimmetrici, ricordando che un operatore lineare A è detto (pseudo-)antisimmetrico rispetto ad un prodotto scalare h se la forma bilineare $B(v, w) := h(v, Aw)$ è antisimmetrica.

In questa situazione, si parla di una **rappresentazione ortogonale** di un gruppo. Più frequentemente, tuttavia, si verifica una versione complessa di questo concetto, ovvero la **rappresentazione unitaria** di un gruppo (in uno spazio complesso dotato del prodotto scalare hermitiano, che risulta essere ρ-invariante) e la **rappresentazione antihermitiana (derivata)** della sua algebra di Lie.

A volte, una situazione offre naturalmente prodotti scalari invarianti (come nel caso della metrica di Killing in $\mathcal{G}$). In altri casi, potrebbe essere abbastanza utile sapere quando e come si possa costruire un tale prodotto se esso non è disponibile e se ne manifesta il bisogno. Qui di seguito verrà descritta una semplice costruzione di un prodotto scalare ρ-invariante, applicabile per gruppi *finiti*, per poi analizzare cosa deve essere migliorato nel metodo affinché esso sia applicabile anche per i gruppi di Lie e i problemi connessi.

Esempio 8: sia $G \equiv e \equiv g_1, ...g_n$ un gruppo finito, ρ la sua rappresentazione in V e h_0 un qualsiasi prodotto scalare definito positivo in V. Il nuovo prodotto scalare

$$h(v, w) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} h_0(g_j v, g_j w)$$

è ρ-invariante. Se h_0 è già invariante, allora $h_0 \mapsto h = h_0$, in modo che un prodotto scalare "non buono" viene sistemato, mentre uno "buono" rimane invariato.

Si osserva che l'invarianza del prodotto si ottiene facendo la media sul gruppo (si esegue la media aritmetica dei prodotti scalari con gli argomenti che sono trasformati passo dopo passo da tutti gli elementi del gruppo). È chiaro che per un gruppo continuo (di Lie) si dovrebbe sostituire la somma con un integrale. Per l'integrale sul gruppo occorre una forma di volume (una n-forma differenziabile utilizzata per definire una misura su una varietà differenziabile, dove n è la dimensione della varietà), ma esiste un numero infinito di forme di volume sul gruppo (multipli di un singolo per un'arbitraria funzione non nulla).

Esempio 9: sia ω una forma di volume (non ancora specificata) su un gruppo di Lie compatto G, in modo che il volume del gruppo $\operatorname{vol} G := \int\limits_G \omega$ sia finito. Sia h_0 un arbitrario prodotto scalare (definito positivo) in V, dove la rappresentazione ρ del gruppo G agisce. Per vettori fissati $v, w \in V$, è definita sul gruppo la funzione

$$f_{v,w}(g) := h_0(gv, gw)$$

(prodotto scalare dei vettori g-trasformati) e si introduce in V un nuovo prodotto scalare (rifacendosi a quanto visto per un gruppo finito nell'*esempio 8*)

$$h(v, w) := \frac{1}{\operatorname{vol} G} \int\limits_G f_{v,w} \omega \equiv \langle f_{v,w} \rangle_G$$

in cui l'operazione $\langle (\cdot) \rangle_G$ è la *media sul gruppo*; quindi, $h(v, w)$ è il valor medio del prodotto scalare dei vettori g-trasformati. Allora, la funzione $f_{v,w}$ su G soddisfa

$$f_{gv,gw} = f_{v,w} \circ R_g \equiv R_g^* f_{v,w}$$

Inoltre, prendendo ω come forma di volume invariante a destra ($R_g^* \omega = \omega$), allora h risulta essere ρ-invariante. Se h_0 è già invariante, allora $h_0 \mapsto h = h_0$.

Si osserva infine che per gruppi di Lie compatti può essere applicata una variante più o meno diretta del metodo usato per gruppi finiti, ottenendo lo stesso risultato positivo: *esiste sempre* un prodotto scalare invariante (e si conosce anche l'algoritmo della sua costruzione). Per i gruppi non compatti, la situazione differisce in modo significativo poiché non esiste necessariamente l'integrale di fondamentale importanza $\int_G f\omega$. Un prodotto scalare invariante quindi non può essere costruito in questo modo e in generale la sua esistenza non è garantita. Questo è uno dei motivi per cui la teoria delle rappresentazioni di gruppi non compatti diventa molto più complicata rispetto a quella di gruppi compatti (o finiti).

4.2 Rappresentazioni irriducibili ed equivalenti, lemma di Schur

Talvolta in una data rappresentazione (V, ρ) è nascosta una rappresentazione più piccola dello stesso gruppo G. Ciò accade quando esiste un sottospazio invariante $W \subset V$ in V, cioè tale che i vettori che vi appartengono, vi rimangono anche dopo una trasformazione; formalmente

$$\rho(G)W \subset W$$

cioè

$$w \in W \implies \rho(g)w \in W \qquad g \in G$$

Si sottolinea che il sottospazio invariante in questione è un sottospazio invariante *simultaneo* di tutti gli operatori $\rho(g)$.

Due di questi sottospazi sono sempre disponibili: $W =$ l'intero V e $W = \{0\}$, e vengono definiti sottospazi banali. Se una rappresentazione ρ non ha altri sottospazi invarianti, viene chiamata **rappresentazione irriducibile**, così che essa non possa essere ridotta a una rappresentazione più piccola (cioè ad una sottorappresentazione), che si potrebbe ottenere attraverso una restrizione della rappresentazione iniziale nel sottospazio W, cioè limitando un dominio di $\rho(g)$ al solo W. Una **rappresentazione riducibile**, al contrario, ha almeno un sottospazio invariante non banale.

Esempio 1: un esempio di rappresentazione irriducibile è fornito dalla rappresentazione di $SO(2)$ in $\mathbb{R}^2$, cioè dalle ordinarie rotazioni del piano euclideo $v \mapsto Av, A \in SO(2)$.

Se si trova in V un sottospazio non banale W, si può iniziare a cercare il suo complemento invariante $\hat{W}$, cioè un sottospazio che è (anche) invariante e che, insieme a W, costituisce l'intero spazio V, così che $V = W \oplus \hat{W}$. Se esiste un tale complemento, si dice che la rappresentazione è **completamente riducibile**; essenzialmente essa si decompone in due rappresentazioni più piccole: la prima in W e la seconda in $\hat{W}$. Risulta, tuttavia, che il complemento invariante non deve necessariamente esistere, ovvero che una rappresentazione riducibile non necessariamente deve essere completamente riducibile.

Esempio 2: sia ρ una rappresentazione riducibile o completamente riducibile di un gruppo di Lie G. La riducibilità (o la completa riducibilità) riporta automaticamente alla rappresentazione derivata ρ' dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$ (cioè a tutti gli operatori $\rho'(X)\ \forall X \in \mathcal{G}$). Inoltre, se esiste un prodotto scalare invariante h in V, allora ogni rappresentazione riducibile è già necessariamente anche completamente riducibile. Per un gruppo compatto (o per uno finito), ogni rappresentazione riducibile è già necessariamente completamente riducibile.

È conveniente introdurre una relazione di equivalenza tra le rappresentazioni, poiché la differenza tra alcune di esse è irrilevante. Date due rappresentazioni (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) di un gruppo G, una mappa lineare A è detta **equivariante** se "commuta" con i corrispondenti operatori delle rappresentazioni, ovvero se il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_1(g)} & V_1 \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_2(g)]{} & V_2 \end{array}$$

cioè, $\rho_2(g)A = A\rho_1(g) \quad \forall g \in G$.

Tale mappa A è alternativamente chiamata ***operatore di intertwining*** (mappa equivariante, cioè mappa sui cui dominio e codominio agisce uno stesso gruppo di simmetria) per queste due rappresentazioni. Si noti che lo stesso operatore "intreccia" anche le rappresentazioni derivate di $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_1'(X)} & V_1 \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_2'(X)]{} & V_2 \end{array}$$

cioè, $\rho_2'(X)A = A\rho_1'(X) \quad \forall X \in \mathcal{G}$.

Si può facilmente verificare che gli operatori di intertwining per le due rappresentazioni fisse sono naturalmente dotati della struttura di uno spazio lineare e, nel caso particolare di rappresentazioni uguali, costituiscono anche un'algebra associativa (o unitale, cioè che contiene un elemento identità moltiplicativo).

Due rappresentazioni (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) di un gruppo G sono dette **equivalenti** se esiste un isomorfismo equivariante tra V_1 e V_2; l'operatore di intertwining è dunque un isomorfismo e $\rho_2(g) = A\rho_1(g)A^{-1}$. Ciò introduce un'equivalenza sull'insieme delle rappresentazioni di G. In basi opportunamente scelte, rappresentazioni equivalenti hanno matrici dei corrispondenti operatori uguali, cioè $\rho_1(g)$ e $\rho_2(g)$ per lo stesso g. Per rappresentazioni derivate, $\forall X \in \mathcal{G}$: $\rho_2'(X) = A\rho_1'(X)A^{-1}$.

Esempio 3: la prescrizione $l_j \mapsto -\frac{1}{2}i\sigma_j \equiv S_j$ definisce una rappresentazione (complessa) di $so(3)$ in $\mathbb{C}^2$. Anche le matrici complesse coniugate S_i^* definiscono una rappresentazione, e S_i e S_i^* sono, in questo caso, equivalenti.

Esempio 4: $S_j \equiv -\frac{i}{2}\sigma_j$ e $N_j \equiv \frac{1}{2}\sigma_j$ sono rappresentazioni di $\mathcal{G} = so(1,3)$, ovvero dell'algebra di Lie del **gruppo di Lorentz**. Anche le matrici complesse coniugate S_j^*, N_j^* forniscono una rappresentazione di $so(1,3)$; tuttavia, contrariamente all'*esempio 3*, le due rappresentazioni sono *inequivalenti.*

Il **lemma di Schur** è uno strumento formale standard utilizzato in riferimento alle rappresentazioni irriducibili. Si considerano qui *due* differenti lemmi di Schur; il primo riguarda gli operatori di intertwining tra due rappresentazioni irriducibili e il secondo è una semplice conseguenza per il caso particolare di due rappresentazioni uguali, cioè è un'affermazione riguardante l'intertwining di mappe per una singola rappresentazione irriducibile. Quando si legge un riferimento al "lemma di Schur" nei testi di fisica, di norma si intende il secondo.

Siano (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) due rappresentazioni irriducibili di un gruppo G. Si considerino tutti gli operatori di intertwining A tra di esse, cioè tutte le mappe lineari che soddisfano

$$A : V_1 \to V_2 \qquad A\rho_1(g) = \rho_2(g)A.$$

Il **primo lemma di Schur** afferma che:

1. ci sono (solo) due possibilità: o ρ_1, ρ_2 sono *inequivalenti* e quindi l'unico A possibile è $A = 0$, o ρ_1, ρ_2 sono *equivalenti* e quindi A è un isomorfismo (in altri termini, un operatore di intertwining A tra due rappresentazioni irriducibili può essere solo o zero o un isomorfismo)

2. se ρ_1, ρ_2 sono rappresentazioni *equivalenti complesse*, allora l'isomorfismo A è unico (a meno di costante moltiplicativa, $A \mapsto \lambda A \quad (\lambda \in \mathbb{C})$)

Sia (ρ, V) una rappresentazione *complessa irriducibile* di un gruppo G e sia A il suo operatore di intertwining, o equivalentemente un operatore lineare in V, che commuta con tutti gli operatori della rappresentazione: $\forall g \in G$ si avrà

$$\rho(g)A = A\rho(g)$$

cioè

$$[A, \rho(g)] = 0 \quad \forall g \in G.$$

Il **secondo lemma di Schur** afferma che:

$$A = \lambda \mathbf{1} \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

cioè A è solo, necessariamente, un multiplo dell'operatore identità (ovviamente, ogni multiplo dell'operatore di identità commuta con tutti i $\rho(g)$, a differenza di ogni altro operatore).

Di seguito, è fornito un controesempio sul fatto che l'assunzione di complessità della rappresentazione nel lemma di Schur è essenziale; successivamente, si trovano altri esempi.

Esempio 5: si consideri la rappresentazione "identica" di $SO(2)$, le ordinarie rotazioni del piano euclideo $A \mapsto \rho(A) = A$. Quando osservata come rappresentazione reale, cioè in $\mathbb{R}^2$, è noto che essa è irriducibile. Nonostante ciò, tutti i suoi operatori $\rho(A)$ commutano (oltre che con i multipli della matrice identità) con una matrice non singolare indipendente

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tuttavia, la prova del primo lemma di Schur fallisce, dato che l'equazione $\det(A - \lambda B) \equiv \det(\mathbf{1} - \lambda B) = 0$ non ha soluzioni reali.

Esempio 6: sia G un gruppo commutativo. Tutte le sue rappresentazioni irriducibili complesse sono necessariamente unidimensionali.

Esempio 7: nel caso del gruppo di Lie $U(1)$, tutte le rappresentazioni irriducibili complesse, che sono unidimensionali (come segue dall'*esempio 5*), sono date da $z \mapsto w(z), ||z|| = 1$, $w \in \mathbb{C}$. Per quanto riguarda le corrispondenti rappresentazioni derivate dell'algebra $u(1)$, la richiesta di omomorfismo fornisce, al primo ordine di accuratezza in ϵ

$$\rho(z(1 + i\epsilon)) = \rho(z)\rho[1 + \epsilon i] = \rho(z)[1 + \epsilon\rho'(i)] =$$

$$= w(z + \epsilon i z) = w(z) + \epsilon i z \frac{dw(z)}{dz}$$

dove, alla seconda linea, è stata usata l'espansione di Taylor di $w(z)$, di modo che $izw'(z) = \lambda w(z)$, $\lambda \equiv \rho'(i) \in \mathbb{C}$. La *continuità* restringe λ a $\lambda = in$, $n \in \mathbb{N}$; di conseguenza, $z \mapsto \rho_n(z) = z^n$, dove $n \in \mathbb{N}$ e la rappresentazione derivata sia $\rho_n'(i) = in$; equivalentemente

$$e^{i\alpha} \mapsto \rho_n(e^{i\alpha}) := e^{in\alpha} \qquad \rho_n'(i) = in \quad n \in \mathbb{N}$$

L'intero n, che caratterizza in modo completo una data rappresentazione irriducibile, è connessa, nelle applicazioni in fisica, con la **carica** di un oggetto che si trasforma sotto questa rappresentazione. Il tipo di carica (elettrica, etc.) dipende dal contesto; in generale, è una $U(1)$-*carica*.

Esempio 8: se $\rho(g)$ dell'*esempio 5* è visto come un operatore in $\mathbb{C}^2$ (anziché in $\mathbb{R}^2$; si parla di "*complessificazione*" della rappresentazione), allora la rappresentazione diventa riducibile (è bidimensionale).

È possibile trovare i sottospazi invarianti (attraverso la costruzione dell'operatore di intertwining) mediante un confronto con rappresentazioni irriducibili note. Vi sono tuttavia anche altri metodi disponibili. Si può partire, ad esempio, dall'*esempio 5*, in cui vi sono (in questo caso particolare) soltanto due operatori indipendenti che commutano con tutti gli operatori della rappresentazione: precisamente, **1** e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Come è già stato detto, gli operatori che commutano con tutti gli operatori $\rho(g)$ della rappresentazione (ovvero gli operatori di intertwining per questa rappresentazione) sono dotati della struttura di un'algebra e questa algebra codifica i sottospazi invarianti della rappresentazione.

Esempio 9: sia ρ una rappresentazione di G in V. Si considerino tutti gli isomorfismi lineari $A : V \to V$ che commutano con tutti gli operatori della rappresentazione. Questi operatori sono chiusi rispetto alle combinazioni lineari e rispetto al prodotto (composizione), costituendo quindi un'algebra associativa (unitale). Se si considera questa algebra su $\mathbb{C}$ (cioè con i coefficienti in $\mathbb{C}$), si possono formare le combinazioni lineari $P_{\pm}$, che si comportano come **proiettori** e realizzano la decomposizione dell'unità

$$P_+^2 = P_+ \quad P_-^2 = P_- \quad P_+P_- = 0 = P_-P_+ \quad P_+ + P_- = \mathbf{1}$$

Nello spazio della rappresentazione $V \equiv \mathbb{C}^2$ può quindi essere decomposto nella somma dei sottospazi invarianti (unidimensionali) $P_{\pm}V$

$$V = (P_+ + P_-)V \equiv P_+V \oplus P_-V \equiv V_+ \oplus V_-$$

nei quali agiscono le restrizioni degli operatori $\rho(g)$. Se la rappresentazione è irriducibile, l'algebra è solo unidimensionale e non è possibile effettuare proiezioni alcun sottospazio invariante non triviale.

Ci si dedicherà ora a vedere più da vicino la struttura degli operatori di intertwining tra due rappresentazioni i cui spazi possono essere decomposti nella somma di sottospazi invarianti.

Siano $(\rho_1, V \equiv \oplus_i V_i)$ e $(\rho_2, W \equiv \oplus_\alpha V_\alpha)$ due rappresentazioni complesse di G, con i sottospazi V_i e W_α invarianti e non contenenti già sottospazi invarianti più piccoli non banali (cosicché le restrizioni delle rappresentazioni a questi sottospazi siano irriducibili). Siano P_i e P_α i proiettori su questi sottospazi; è possibile dimostrare che:

1. se $A : V \to W$ è un operatore di intertwining tra ρ_1 e ρ_2, allora gli operatori

$$A_{\alpha i} : V_i \to W_\alpha \qquad A_{\alpha i} := P_\alpha A P_i, \quad A = \sum_{i,\alpha} A_{\alpha i}$$

   sono gli operatori di intertwining per le sottorappresentazioni irriducibili che derivano dalla restrizione a V_i e W_α;

2. ogni operatore $A_{\alpha i}$ è o zero o un isomorfismo dato univocamente dalla moltiplicazione per una costante;

3. tutti gli operatori di intertwining tra ρ_1 e ρ_2 costituiscono uno spazio lineare, che si denota con $\mathcal{C}(\rho_1, \rho_2)$ oppure con $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$;

4. la dimensione dello spazio $\mathcal{C}(\rho_1, \rho_2)$ esprime il numero totale di coppie di sottorappresentazioni irriducibili mutuamente equivalenti (con un membro della coppia in ρ_1 e l'altro in ρ_2);

5. se qualche particolare rappresentazione irriducibile $\hat{\rho}$ ricorre k volte in ρ_1 e l volte in ρ_2, essa contribuisce alla dimensione dello spazio $\mathcal{C}(\rho_1, \rho_2)$ con un termine kl.

Si vuole infine far notare che nella dimostrazione del lemma di Schur non è mai stato utilizzato il fatto che gli operatori $\rho(g)$ (o $\rho'(X)$) rappresentano un gruppo (o un'algebra di Lie). Il lemma, infatti, dice qualcosa su una qualsiasi famiglia di operatori che agiscono in uno spazio lineare comune: quali sono le proprietà di un operatore che commuta con l'intera famiglia, cosa succede quando la famiglia agisce in modo irriducibile (cioè non c'è alcun sottospazio invariante non banale simultaneo), etc.? Una conseguenza pratica di questa osservazione è che il lemma può essere usato (e di fatto lo è) in connessione con rappresentazioni di altre strutture algebriche, come le algebre associative e, in particolare, le algebre di Clifford.

4.3 Rappresentazione aggiunta e metrica di Killing-Cartan

Sia la rappresentazione aggiunta Ad di un gruppo G che la sua rappresentazione derivata ad dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$ si incontrano frequentemente in varie applicazioni. Il gruppo non si preoccupa troppo di trovare uno spazio vettoriale V per portare la rappresentazione. Esso semplicemente utilizza la propria algebra di Lie per farlo. Quindi (V, ρ, ρ') diventa, in questo caso particolare, $(\mathcal{G}, \mathrm{Ad}, \mathrm{ad})$. Sebbene questo possa essere considerato un comportamento ammirevolmente economico di G (invece di due strutture $\mathcal{G}$, V si accontenta di una sola), allo stesso tempo potrebbe rendersi un po' più complicato afferrare rapidamente queste idee (si dovrebbe sempre porre attenzione nel capire in modo chiaro se un dato $X \in \mathcal{G}$ abbia il ruolo di un elemento da rappresentare nell'algebra di Lie o il ruolo di un elemento dello spazio "trasportatore" $V \equiv \mathcal{G}$).

Esempio 1: si consideri la *coniugazione* I_g su un gruppo di Lie G, cioè la mappa

$$I_g : G \to G \qquad k \mapsto gkg^{-1}$$

I_g è, per un fissato $g \in G$, un omomorfismo biettivo, cioè un automorfismo del gruppo G - è chiamata anche automorfismo interno. Se l'automorfismo derivato a I_g è indicato con $\mathrm{Ad}_g := I'_g \equiv I_{g^*}$, vale il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{I_g} & G \\ {\scriptstyle A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle A} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow[\mathrm{Ad}_g \equiv I'_g]{} & \mathcal{G} \end{array}$$

cioè

$$ge^X g^{-1} = e^{\mathrm{Ad}_g X}$$

Questo diagramma può essere visto come definente la mappa Ad_g. Per il gruppo di matrici, la mappa Ad_A ($g \equiv A$ è una matrice di G) può essere esplicitata come

$$\mathrm{Ad}_A X = AXA^{-1}$$

Per ogni $g \in G$ si avrà dunque l'automorfismo I_g del gruppo G, così come l'automorfismo Ad_g dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$. Ci si concentri ora su alcuni comportamenti degli automorfismi I_g e Ad_g rispetto al "parametro" g:

1. entrambe le mappe I_g e Ad_g si comportano rispetto al "parametro" g come azioni a sinistra, cioè

$$I_{gh} = I_g \circ I_h \qquad \mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \circ \mathrm{Ad}_h$$

2. per ogni g la mappa Ad_g è una biezione, così che, una volta messa insieme, è un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$

3. la mappa

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{G} \qquad g \mapsto \rho(g) \equiv \mathrm{Ad}_g$$

è una rappresentazione di G in $\mathcal{G}$; essa è chiamata **rappresentazione aggiunta** del gruppo G.

Si vedranno ora due situazioni geometriche in cui si trova questa rappresentazione. La prima è la trasformazione di oggetti invarianti a sinistra rispetto alle traslazioni a destra su un gruppo, mentre la seconda riguarda la relazione tra campi invarianti a destra e campi invarianti a sinistra.

Sia L_X campo vettoriale invariante a sinistra su G che è dato dal suo valore X nel punto $e \in G$, cioè $L_X(e) = X$. Siano inoltre E_i una base in $\mathcal{G} \equiv T_eG$, E^i la base duale in $\mathcal{G}^* \equiv T^*_eG$ e e_i, e^i i corrispondenti campi invarianti a sinistra su G e infine L_g e R_g le traslazioni sinistra e destra su G.

Si può verificare che:

1. i campi invarianti a sinistra si comportano rispetto a L_g e R_g come segue:

$$L_g^* L_X = L_X \qquad R_g^* L_X = L_{\mathrm{Ad}_g X};$$

2. i valori stessi dei campi invarianti a sinistra e a destra L_X e R_X corrispondenti alla stessa X sono correlati nel punto g da

$$L_X(g) = R_{\mathrm{Ad}_g X}(g) \qquad R_X(g) = R_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}} X}(g)$$

Esempio 2: sia θ la *uno-forma canonica* su G. Sotto traslazioni sinistre e destre su G, si comporta così:

$$L_g^* \theta = \theta$$

$$R_g^* \theta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \theta$$

La forma θ è quindi invariante a sinistra e, rispetto alle traslazioni destre, è "di tipo Ad".

Esempio 3: sia $\rho = \mathrm{Ad}$ la rappresentazione aggiunta di G in $\mathcal{G}$. La sua rappresentazione derivata verrà indicata con $\rho' \equiv \mathrm{Ad}' =: \mathrm{ad}$. Vale il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Aut}\,\mathcal{G} \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow[\mathrm{ad} \equiv \mathrm{Ad}']{} & \mathrm{End}\,\mathcal{G} \end{array}$$

cioè

$$\mathrm{Ad}_{\exp X} = e^{\mathrm{ad}_X}$$

La formula esplicita per ad è

$$\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$$

ed essa definisce una rappresentazione di $\mathcal{G}$ in G, cioè

$$\mathrm{ad}_{X+\lambda Y} = \mathrm{ad}_X + \lambda \mathrm{ad}_Y$$

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_X \equiv [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]$$

Infine, se c_{ij}^k sono le costanti di struttura rispetto ad una base $E_i \in \mathcal{G}$, allora gli elementi di matrice dell'operatore ad_{E_i} rispetto alla base E_j sono

$$(\mathrm{ad}_{E_i})_j^k = c_{ij}^k \qquad \text{i.e.} \quad \mathrm{ad}_{E_i} E_j = (\mathrm{ad}_{E_i})_j^k E_k = c_{ij}^k E_k$$

e si dice che, nella rappresentazione aggiunta, i generatori sono dati direttamente in termini delle costanti di struttura.

Si noti che, per l'algebra $so(3)$, $\mathrm{ad} = \mathrm{id}$.

In un'algebra di Lie $\mathcal{G}$ vi è spesso un prodotto scalare distinto, dato dal *tensore metrico di Killing–Cartan*. La sua importanza consiste nel fatto che esso è invariante rispetto alla rappresentazione aggiunta, cioè è Ad-invariante. Quando si espande questo tensore metrico attraverso traslazioni a sinistra sull'intero gruppo, si ottiene un tensore metrico su G (proprio come un campo su una varietà G), che è (banalmente) invariante a sinistra, ma (non banalmente) anche invariante a destra.

Esempio 4: nell'algebra di Lie $\mathcal{G}$, si può definire la forma di Killing-Cartan, ovvero una forma bilineare simmetrica $K(X,Y) := \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y)$. Questa è Ad-invariante. La sua matrice di componenti rispetto alla base E_i in $\mathcal{G}$ è

$$k_{ij} \equiv K(E_i, E_j) = c^k_{il} c^l_{jk}$$

ed essa soddisfa la seguente relazione

$$k_{ij} (\mathrm{Ad}_g)^i_r (\mathrm{Ad}_g)^j_s = k_r s$$

Inoltre, la forma $K(X,Y)$ è invariante rispetto a tutti gli automorfismi di $\mathcal{G}$ (e non soltanto rispetto agli automorfismi interni, cioè Ad_g).

Esempio 5: sia K la forma di Killing-Cartan in un'algebra di Lie $\mathcal{G}$. La versione infinitesima della sua Ad-invarianza è

$$K(\mathrm{ad}_Z X, Y) + K(X, \mathrm{ad}_Z Y) = 0 \qquad \text{i.e. } K([Z,X],Y) + K(X,[Z,Y]) = 0$$

Su una base, essa dà $c_{ijk} + c_{jik} = 0$, $c_{ijk} := k_{il} c^l_{jk}$.

Esempio 6: le matrici di componenti delle forme di Killing-Cartan k_{ij} per le algebre di Lie $su(2)$ e $so(3)$ sono date da $k_{ij} = -2\delta_{ij}$. Per $ga(1,\mathbb{R})$ si ottiene invece $k_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esempio 7: considerando invece l'algebra di Lie di matrici $gl(n,\mathbb{R})$, la forma di Killing-Cartan per $\mathcal{G} = gl(n,\mathbb{R})$ è $K(X,Y) = 2n\mathrm{Tr}\,(XY) - 2(\mathrm{Tr}\,X)(\mathrm{Tr}\,Y)$ ed è degenere.

La forma di Killing–Cartan potrebbe non essere sempre usata come prodotto scalare invariante in $\mathcal{G}$, poiché a volte essa è degenere. Nel caso di $so(3) = su(2)$, essa risulta essere definita negativa, quindi, semplicemente moltiplicandola per un numero negativo, si ottiene un prodotto scalare invariante definito positivo. Per l'algebra $gl(n,\mathbb{R})$, la forma K risulta essere però degenere e non vi è alcuna possibilità, in questo caso, di ricavarne un prodotto scalare (anche indefinito). Si scopre quindi che la forma K è non degenere solo per una particolare classe di algebre di Lie, chiamate **algebre di Lie semi-semplici**. Per definizione, esse sono le algebre che non contengono ideali commutativi non nulli. Per le particolari algebre prese in esame, si verifica facilmente che questa affermazione è effettivamente valida. Si verifica cioè che:

1. le algebre $ga(1,\mathbb{R})$ e $gl(n,\mathbb{R})$ ha un ideale commutativo non nullo;
2. le algebre $so(3) = su(2)$ non hanno un ideale commutativo non nullo.

Gli operatori nello spazio della rappresentazione, che sono formati dai generatori della rappresentazione e che a loro volta commutano con tutti i generatori, giocano un ruolo importante nella teoria delle rappresentazioni delle algebre di Lie. Sono chiamati **operatori di Casimir**. Per il lemma di Schur, essi sono necessariamente solo multipli scalari dell'operatore identità (per una rappresentazione irriducibile). Il valore del multiplo (il numero λ nell'espressione $\lambda\mathbf{1}$)

dipende dalla rappresentazione, quindi può a sua volta essere utilizzato per caratterizzarla. Esiste una teoria che dice quanti operatori di Casimir indipendenti abbia una data algebra di Lie (e quindi quanti numeri devono essere specificati per fissare una rappresentazione irriducibile di tale algebra) e come sono costruiti a partire dai generatori (formano "polinomi" nei generatori). Questo problema è strettamente correlato alla struttura dei tensori Ad-invarianti nell'algebra di Lie. A titolo illustrativo vale la pena di citare la costruzione dell'*operatore di Casimir quadratico*. Per l'algebra di Lie $so(3)$, questo è il punto di partenza della costruzione di tutte le rappresentazioni irriducibili, che viene elaborato in ogni libro di testo sulla meccanica quantistica nei capitoli dedicati alla *teoria del momento angolare*.

Esempio 8: sia $\mathcal{G}$ un'algebra di Lie tale che un tensore metrico Ad-invariante (non degenere) k esiste in essa. Sia ρ' una rappresentazione di $\mathcal{G}$ con generatori $\varepsilon_i \equiv \rho'(E_i)$, con k_{ij} è la matrice di k e k^{ij} è la matrice inversa a k_{ij}. L'operatore di Casimir quadratico è

$$\hat{C} \equiv \hat{C}_2 := k^{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$$

ed esso commuta con tutti i generatori della rappresentazione

$$[\hat{C}, \varepsilon_j] = 0 \qquad j = 1, ..., \dim \mathcal{G}$$

Per ogni rappresentazione irriducibile, si ha $\hat{C} = \lambda\mathbf{1}$. Per $so(3) = su(2)$, quando moltiplicato per una costante opportuna, esso è l'*operatore del quadrato del momento angolare* in meccanica quantistica

$$-\hbar^2\hat{C} = \mathbf{J}^2 \equiv \mathbf{J}\cdot\mathbf{J} \equiv J_1J_1 + J_2J_2 + J_3J_3 \qquad J_j \equiv -i\hbar\varepsilon_j \equiv -i\hbar\rho'(E_j)$$

Ora si proverà a trasferire questi oggetti dall'algebra di Lie $\mathcal{G}$ al corrispondente gruppo di Lie G. Si assumerà che la forma K sia non degenere. Attraverso tecniche standard si potrà quindi assegnare al tensore K nell'algebra di Lie $\mathcal{G} \equiv T_eG$ il campo tensoriale invariante sinistro $\mathcal{K}$ di tipo $\binom{0}{2}$ sul gruppo G. Poiché esso è non degenere in $\mathcal{G}$ e la traslazione sinistra è biettiva, esso sarà anche non degenere in ogni punto $g \in G$, così che si ottiene il *tensore metrico invariante a sinistra* sul gruppo. Questo campo dovrebbe essere, comunque, per costruzione, invariante a sinistra per ogni scelta del tensore metrico in $\mathcal{G}$. Sorge allora una domanda spontanea: cosa si ottiene per una particolare scelta di K?

Esempio 9: sia K il tensore metrico di Killing-Cartan in $\mathcal{G}$, e sia $\mathcal{K}$ il corrispondente tensore metrico invariante a sinistra su G. Allora, il tensore metrico $\mathcal{K}$ è addirittura *bi-invariante*, cioè invariante sia rispetto a traslazioni sinistre sia rispetto a traslazioni destre su G

$$L_g^*\mathcal{K} = \mathcal{K} \qquad R_g^*\mathcal{K} = \mathcal{K}$$

Siano $\omega_L \equiv e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$ e $\omega_R \equiv f^1 \wedge \cdots \wedge f^n$ le forme di volume invarianti a sinistra e a destra su un gruppo di Lie G. In generale esse differiscono. Si vuole ora vedere "quanto" esse differiscono . Si può verificare che

1. in generale, le forme ω_R e ω_L sono legate nel modo seguente

$$\omega_R(g) = (\det \mathrm{Ad}_g)\, \omega_L(g);$$

2. per il gruppo $SO(3)$ si ha:

$$\mathrm{Ad}_A = \text{la rotazione data dalla matrice } A \qquad \omega_R = \omega_L,$$

   risultato conforme a quanto affermato nel precedente punto; questo significa che su $SO(3)$ la forma di volume invariante a destra sembra essere allo stesso tempo anche invariante a sinistra.

Si è così ottenuto un risultato abbastanza notevole sul gruppo $SO(3)$, e precisamente che le forme di volume invarianti a sinistra e a destra coincidono; in altre parole, si ha la forma di volume bi-invariante $\omega_L = \omega_R$. Si può inoltre dimostrare un qualcosa di analogo su un arbitrario gruppo di Lie compatto (e banalmente anche su uno commutativo, dove $e^a = f^a$; invece su uno non commutativo non sarà banale, poiché in generale $e^a \neq f^a$ e soltanto il loro prodotto coincide).

Su ogni gruppo di Lie *compatto* esiste una forma bi-invariante di volume, cioè ogni forma di volume invariante a destra è anche invariante a sinistra, e viceversa. Inoltre, nell'algebra di Lie di ogni gruppo di Lie compatto esiste un tensore metrico Ad-invariante definito positivo

$$B(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) = B(X, Y)$$

in modo che valga

$$B(\mathrm{ad}_Z X, Y) + B(X, \mathrm{ad}_Z Y) \equiv B([Z, X], Y) + B(X, [Z, Y]) = 0$$

Ogni algebra in cui esiste un prodotto scalare definito positivo che soddisfa $B([Z, X], Y) + B(X, [Z, Y]) = 0$ è detta *algebra di Lie compatta*. I gruppi di Lie compatti hanno algebre di Lie compatte. Questo risultato è utile, ad esempio, per la struttura degli integrali di azione nella teoria dei campi di gauge.

Per concludere questa sezione, si darà ora uno sguardo ad un'importante rappresentazione di G che si trova nello spazio duale $\mathcal{G}^*$ dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$.

La rappresentazione coaggiunta Ad^*_g di un gruppo di Lie G agisce nello spazio lineare $\mathcal{G}^*$ secondo la prescrizione

$$\left\langle \mathrm{Ad}^*_g X^*, Y \right\rangle := \left\langle X^*, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} Y \right\rangle \qquad X^* \in \mathcal{G}^*, Y \in \mathcal{G}.$$

Si può dimostrare che:

1. se c'è un prodotto scalare Ad-invariante (non degenere) in $\mathcal{G}$, allora la rappresentazione coaggiunta Ad^*_g è equivalente a quella aggiunta Ad_g;

2. essa agisce sulla base duale tramite matrici inverse e trasposte della rappresentazione aggiunta

$$\mathrm{Ad}^*_g E^i = E^j (\mathrm{Ad}_{g^{-1}})^i_j;$$

3. nella rappresentazione derivata ad^*_X, i generatori sono dati (proprio come per ad_X) direttamente in termini delle costanti di struttura:

$$\langle \mathrm{ad}^*_X Z^*, Y \rangle = - \langle Z^*, [X, Y] \rangle \qquad \mathrm{ad}^*_{E_i} E^j \equiv (\mathrm{ad}^*_{E_i})^j_k E^k = -c^j_{ik} E^k.$$

Si osservi infine che a volte la rappresentazione coaggiunta viene introdotta senza "ri-effettuare l'azione destra su quella di sinistra" (il trucco $g \mapsto g^{-1}$), ovvero dalla relazione $\left\langle Ad_g^* X^*, Y \right\rangle := \langle X^*, Ad_g Y\rangle$. Ciò si traduce chiaramente nella azione lineare destra ("antirappresentazione").

4.4 Costruzioni di base con gruppi, algebre di Lie e loro rappresentazioni

In questa sezione si affronteranno delle più semplici (e allo stesso tempo più frequenti e importanti) costruzioni che vengono eseguite normalmente con gruppi, algebre di Lie e con le loro rappresentazioni. Verranno trattati prima il prodotto diretto e quello semidiretto di gruppi, poi la corrispondente somma diretta e quella semidiretta delle algebre di Lie.

Esempio 1: dati due gruppi G e H, si consideri il prodotto cartesiano degli insiemi $G \times H$ (con gli elementi ordinati in coppie (g, h)) e si introduca la moltiplicazione "per componenti" in esso:

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

Si può dimostrare che:

1. questa moltiplicazione soddisfa effettivamente gli assiomi di un gruppo; si ottiene pertanto un nuovo gruppo, il **prodotto diretto dei gruppi** G e H, che viene indicato con $G \times H$;

2. se si tratta di gruppi di matrici, una semplice realizzazione del loro prodotto diretto risulta
$$(g, h) \leftrightarrow \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix};$$
vale a dire, il gruppo di matrici nella forma diagonale a blocchi visualizzato sopra (dotato dell'operazione di prodotto realizzato dalla comune moltiplicazione di matrici) è isomorfo al gruppo “ufficiale” $G \times H$;

3. all'interno del gruppo $G \times H$ sono nascosti i sottogruppi $\tilde{G}$ e $\tilde{H}$, che sono isomorfi agli elementi costitutivi originali G e H; gli elementi di $\tilde{G}$ e $\tilde{H}$ commutano l'uno con l'altro e, inoltre, ogni elemento di $G \times H$ può essere espresso in modo univoco sotto forma di un prodotto $\tilde{g}\tilde{h}$, dove $\tilde{g} \in \tilde{G}, \tilde{h} \in \tilde{H}$ (ciò sarà scritto come $\tilde{G} \cdot \tilde{H}$);

4. vale anche l'affermazione opposta: se un gruppo K ha due sottogruppi G e H tali che $K = G \cdot H$ (cioè se ogni forma di un elemento K può essere espressa univocamente nella forma di un prodotto $k = gh$, dove $g \in G, h \in H$), allora K è isomorfo al prodotto diretto $G \times H$ nel senso della definizione data al precedente punto (1).

Esempio 2: date due algebre di Lie $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$, si consideri ora il prodotto cartesiano degli insiemi $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ (gli elementi vengono ordinati a coppie (X, Y)) e si introducano in esso la struttura lineare e il commutatore "per componenti":

$$(X_1, Y_1) + \lambda(X_2, Y_2) := (X_1 + \lambda X_2, Y_1 + \lambda Y_2)$$

$$[(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)] := ([X_1,X_2],[Y_1,Y_2]).$$

Si può dimostrare che:

1. gli assiomi di un'algebra di Lie sono effettivamente soddisfatti; si ottiene pertanto una nuova algebra di Lie, la **somma diretta** delle algebre di Lie $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$; essa viene indicata con $\mathcal{G}+\mathcal{H}$;

2. se si trattano le algebre di Lie della matrice, una semplice realizzazione della loro somma diretta risulta
$$(X,Y) \leftrightarrow \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix};$$
vale a dire, l'algebra di Lie delle matrici nella forma diagonale a blocchi mostrata sopra (dotata dell'operazione di commutatore realizzato dal comune commutatore di matrici) è isomorfo all'algebra di Lie $\mathcal{G}+\mathcal{H}$;

3. all'interno dell'algebra di Lie $\mathcal{G}+\mathcal{H}$ sono nascoste le sottoalgebre $\tilde{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathcal{H}}$ che sono isomorfe agli elementi costitutivi originali $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$; gli elementi di $\tilde{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathcal{H}}$ commutano l'uno con l'altro e inoltre ogni elemento di $\mathcal{G}+\mathcal{H}$ può essere espresso in modo univoco sotto forma di una somma $\tilde{X}+\tilde{Y}$, dove $\tilde{X}\in\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{Y}\in\tilde{\mathcal{H}}$ (in modo che l'algebra di Lie come spazio lineare sia la somma diretta di queste sottoalgebre commutanti);

4. vale anche l'affermazione opposta: se un'algebra $\mathcal{K}$ ha due sottoalgebre mutualmente commutanti $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ tali che sia, come spazio lineare, una somma diretta di queste sottoalgebre (cioè se ogni elemento di $\mathcal{K}$ può essere espresso univocamente nella forma di una somma $Z = X+Y$, dove $X\in\mathcal{G}, Y\in\mathcal{H}$), allora $\mathcal{K}$ è isomorfo alla somma diretta $\mathcal{G}+\mathcal{H}$ nel senso della definizione data al precedente punto (1).

Esempio 3: sia $K = G\times H$ un prodotto diretto dei gruppi di Lie G e H e siano $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ le corrispondenti algebre di Lie. Si dimostra che $\mathcal{K}$ è isomorfo alla somma diretta di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$, così che sotto un prodotto diretto di gruppi si nasconde la somma diretta delle loro algebre di Lie:

$$K = G\times H \quad\Rightarrow\quad \mathcal{K} = \mathcal{G}+\mathcal{H}$$

Il fatto che un gruppo (algebra di Lie) sia il prodotto diretto (somma) dei suoi sottogruppi (subalgebre) non è necessariamente evidente a prima vista. Ciò è illustrato in alcuni semplici esempi che seguono.

Esempio 4: si consideri il gruppo di Lie $GL_+(n,\mathbb{R})$ e sia la sua algebra di Lie $gl(n,\mathbb{R})$. Si può dimostrare che:

1. il gruppo $GL_+(n,\mathbb{R})$ è un prodotto diretto di $GL_+(1,\mathbb{R})$ e $SL(n,\mathbb{R})$ (che è il gruppo lineare speciale, ovvero con determinante uguale a $+1$):
$$GL_+(n,\mathbb{R}) = GL_+(1,\mathbb{R})\times SL_+(n,\mathbb{R});$$

2. l'algebra di Lie $gl(n,\mathbb{R})$ è una somma diretta di $gl(1,\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$ e $sl(n,\mathbb{R})$:

$$gl(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R} + sl(n,\mathbb{R}).$$

Esempio 5: l'algebra di Lie $u(n)$ è una somma diretta delle due sottoalgebre (isomorfe a) $su(n)$ e $u(1)$. Tuttavia, lo stesso ma per i gruppi (passando quindi alle "lettere maiuscole") non vale: il gruppo $U(n)$ non è un prodotto diretto di $SU(n)$ e $U(1)$:

$$u(n) = su)n + u(1) \qquad\qquad U(n) \neq SU(n) \times U(1)$$

Esempio 6: l'algebra di Lie $so(4)$ è una somme diretta delle due copie di $so(3)$:

$$so(4) = so(3) + so(3)$$

Ora si introdurrà un prodotto leggermente più complesso (per il caso di gruppi) e di somma (per le algebre di Lie), corrispondenti a un prodotto e una somma semidiretti. Per fare ciò, tuttavia, non è sufficiente avere due gruppi G, H (o le algebre $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$). Si necessita di una struttura, vale a dire un'azione di G mediante automorfismi di H (e di $\mathcal{G}$ mediante derivazioni di $\mathcal{H}$). Esempi ben noti di questa costruzione sono forniti dal prodotto semidiretto nel gruppo affine e nei suoi sottogruppi (il gruppo di Poincaré e il gruppo euclideo).

Esempio 7: siano G e H due gruppi e G agisca da sinistra mediante automorfismi su H, cioè esiste una mappa

$$\phi : G \to \operatorname{Aut} H$$

tale che

$$\phi_{g\tilde{g}} = \phi_g \circ \phi_{\tilde{g}}$$
$$g \mapsto \phi_g$$
$$\phi_g(h\tilde{h}) = \phi_g(h)\phi_g(\tilde{h}).$$

Sul prodotto cartesiano degli insiemi $G \times H$, si introduce una moltiplicazione mediante la prescrizione seguente:

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 \phi_{g1}(h_2))$$

(nel membro di destra è presente il prodotto (nel gruppo H) tra l'elemento h_1 e la ϕ_{g1}-immagine dell'elemento h_2. Si può dimostrare che:

1. questa moltiplicazione soddisfa gli assiomi di un gruppo; si ottiene dunque un nuovo gruppo, il **prodotto semidiretto dei gruppi** G e H; esso sarà indicato con $G \ltimes H$ oppure con $G \times_\phi H$;

2. per l'automorfismo banale $\phi_g = \mathrm{id}$ (cioè $\phi_g(h) = h$), il prodotto semidiretto si riduce a quello diretto;

3. gli elementi della forma (e_G, h) costituiscono un sottogruppo normale (ossia invariante) isomorfo a H.

Esempio 8: sia G un gruppo e (V, ρ) una rappresentazione. Si può dimostrare che:

1. qualsiasi spazio vettoriale V può essere considerato come un gruppo di Lie (commutativo = abeliano);
2. la rappresentazione ρ in V fornisce un'azione a sinistra di G mediante gli automorfismi di (un gruppo) V, così che le ipotesi per l'introduzione di un prodotto semidiretto sono soddisfatte;
3. in questo caso particolare il prodotto è esplicitamente:
$$(g, v) \circ (\tilde{g}, \tilde{v}) := (g\tilde{g}, v + \rho(g)\tilde{v})$$
4. il prodotto nel gruppo affine, euclideo o di Poincaré,
$$(A, a) \circ (B, b) := (AB, a + Ab)$$
(dove a, b sono le colonne da $\mathbb{R}^n$, A, B appartengono a $GL(n, \mathbb{R})$ per il gruppo affine, a $SO(1,3)$ per il gruppo di Poincaré e a $SO(n)$ per il gruppo euclideo) è esattamente di quel tipo, così che il gruppo affine è un prodotto semidiretto dei suoi sottogruppi (lineari e traslazionali).

Esempio 9: siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ due algebre di Lie, e sia $\mathcal{G}$ rappresentata per derivazione di $\mathcal{H}$, cioè esiste una mappa

$$D : \mathcal{G} \to \operatorname{Der}\mathcal{H} \qquad D_{X+\lambda\tilde{X}} = D_X + \lambda D_{\tilde{X}} \qquad D_X(Y + \lambda\tilde{Y}) = D_X Y + \lambda D_x \tilde{Y}$$

$$X \mapsto D_X \qquad D_{[X,\tilde{X}]} = D_X D_{\tilde{X}} - D_{\tilde{X}} D_X \qquad D_X[Y, \tilde{Y}] = [D_X Y, \tilde{Y}] + [Y, D_X \tilde{Y}]$$

Sul prodotto cartesiano degli insiemi $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$, si introduce una struttura di un'algebra di Lie mediante la prescrizione

$$(X_1, Y_1) + \lambda(X_2, Y_2) := (X_1 + \lambda X_2, Y_1 + \lambda Y_2)$$
$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] := ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2] + D_{X_1} Y_2 - D_{X_2} Y_1).$$

Si può dimostrare che:

1. gli assiomi di un'algebra di Lie sono soddisfatti; otteniamo così una nuova algebra di Lie, la **somma semidiretta delle algebre di Lie** $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$; essa sarà indicata con $\mathcal{G} \ltimes \mathcal{H}$ (cioè allo stesso modo in cui si è indicato il prodotto semidiretto di gruppi; dovrebbe essere chiaro cosa si intende effettivamente circa quali oggetti sono attorno al simbolo) oppure con $\mathcal{G} +_D \mathcal{H}$;
2. il modo alternativo per definire questo commutatore è il seguente: all'interno delle algebre di Lie originali, tutto procede come prima e il commutatore "misto" si definisce come
$$[X, Y] := D_X(Y)$$

3. per la derivazione banale (= zero) la somma semidiretta si riduce a quella diretta (il commutatore misto è ora definito in modo da annullarsi);

4. gli elementi della forma $(0, Y)$ costituiscono un *ideale* di questa algebra;

5. la derivazione D_X è $D_X x = \rho'(X)x$ (essendo ρ' la rappresentazione derivata della rappresentazione ρ, x è un elemento dell'algebra di Lie abeliana (commutativa) del gruppo V), così che il commutatore è

$$[(X, x), (Y, y)] = ([X, Y], \rho'(X)y - \rho'(Y)x)$$

e nel caso particolare dell'algebra di Lie affine (di Poincaré, euclidea) si ottiene

$$[(X, x), (Y, y)] = ([X, Y], Xy - Yx)$$

che corrisponde al risultato ottenuto dall'incorporamento di $ga(n, \mathbb{R})$ in $gl(n + 1, \mathbb{R})$, risultando dall'incorporamento dei gruppi corrispondenti

$$(A, a) \mapsto \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (X, x) \mapsto \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si rivolge ora l'attenzione alle costruzioni che portano alla **somma diretta e** al **prodotto diretto delle rappresentazioni**. Siano date due rappresentazioni *dello stesso gruppo* G, vale a dire (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2). Allora, due "nuovi" spazi vettoriali sono automaticamente disponibili: la somma diretta $V_1 \oplus V_2$ e il prodotto diretto $V_1 \otimes V_2$. Se vengono dati anche degli operatori lineari negli spazi iniziali (A in V_1 e B in V_2), si possono considerare due nuovi operatori: $A \oplus B$ in $V_1 \oplus V_2$ e $A \otimes B$ in $V_1 \otimes V_2$. Semplici proprietà algebriche di questi particolari operatori garantiscono che, se gli operatori iniziali corrispondevano alle rappresentazioni di un gruppo, anche gli operatori risultanti definiscono una rappresentazione. Queste rappresentazioni sono chiamate la **somma diretta** $\rho_1 \oplus \rho_2$ e il **prodotto diretto** $\rho_1 \otimes \rho_2$ **delle rappresentazioni iniziali**.

Riguardo alla somma diretta si può dimostrare che:

1. dalla prescrizione

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) := \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$$

(il membro di destra è l'operatore della struttura $A \oplus B$), si definisce una rappresentazione del gruppo G;

2. la sua dimensione è $n_1 + n_2$ (se $n_1 \equiv \dim V_1$ e $n_2 \equiv \dim V_2$);

3. in linguaggio matriciale si può scrivere

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix};$$

4. la rappresentazione derivata dell'algebra di Lie è la somma diretta delle rappresentazioni derivate iniziali:

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)'(X) = \rho_1'(X) \oplus \rho_2'(X).$$

Riguardo al prodotto diretto si può dimostrare che:

1. dalla prescrizione
$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$$
(il membro di destra è l'operatore della struttura $A \otimes B$), si definisce infatti una rappresentazione del gruppo G;

2. la sua dimensione è $n_1 \cdot n_2$ (se $n_1 \equiv \dim V_1$ e $n_2 \equiv \dim V_2$);

3. l'espressione della rappresentazione derivata dell'algebra di Lie in termini delle rappresentazioni derivate iniziali risulta essere:
$$(\rho_1 \otimes \rho_2)'(X) = \rho_1'(X) \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \rho_2'(X).$$

Spesso si incontrano tuttavia rappresentazioni che sono somme o prodotti di altre più semplici nel linguaggio degli indici. Ci si chiede dunque che forma assumano.

Per la **somma**, si parta dal fatto che un generico vettore $u \in V_1 \oplus V_2$ può essere scritto come $u = u^i E_i + u^\alpha E_\alpha$. Si ricordi che:

1. (le componenti di) vettori da $u \in V_1 \oplus V_2$ portano un solo indice, assumendo valori "di due tipi" (i o α);

2. gli indici di tipo i si trasformano sotto l'azione di $\rho_1 \oplus \rho_2$ mediante la matrice $(\rho_1(g))^i_j$, mentre gli indici di tipo α si trasformano mediante la matrice $(\rho_2(g))^\alpha_\beta$, cioè:
$$u^i \mapsto (\rho_1(g))^i_j u^j \qquad u^\alpha \mapsto (\rho_2(g))^\alpha_\beta u^\beta;$$

3. per la rappresentazione derivata $(\rho_1 \oplus \rho_2)'$, in piena analogia, si ha:
$$u^i \mapsto (\rho_1'(X))^i_j u^j \qquad u^\alpha \mapsto (\rho_2'(X))^\alpha_\beta u^\beta.$$

Per il **prodotto**, si parta dal fatto che un generico vettore $u \in V_1 \otimes V_2$ può essere scritto come $u = u^{i\alpha} E_i \otimes E_\alpha$. Si ricordi che:

1. (le componenti di) vettori da $u \in V_1 \otimes V_2$ portano due indici, uno "del tipo i" e l'altro "del tipo α";

2. l'indice di tipo i è trasformato sotto l'azione di $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)$ mediante la matrice $(\rho_1(g))^i_j$, mentre allo stesso tempo l'indice di tipo α è trasformato mediante la matrice $(\rho_2(g))^\alpha_\beta$, cioè:
$$u^{i\alpha} \mapsto (\rho_1(g))^i_j (\rho_2(g))^\alpha_\beta u^{j\beta}.$$

   Una regola generale (valida per il prodotto diretto di un numero arbitrario di rappresentazioni) è dunque la seguente: ogni indice è trasformato dalla propria matrice e ciò avviene tutto in una volta: sotto $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_n$ le componenti si trasformano in accordo alla regola seguente:
$$u^{i\alpha\ldots a} \mapsto (\rho_1(g))^i_j (\rho_2(g))^\alpha_\beta \ldots (\rho_n(g))^a_b u^{j\beta\ldots b};$$

3. per la rappresentazione derivata $(\rho_1 \otimes \rho_2)'$, si ha:
$$u^{i\alpha} \mapsto (\rho_1'(X))^i_j u^{j\alpha} + (\rho_2'(X))^\alpha_\beta u^{j\beta}$$
(ed in piena analogia, per la rappresentazione derivata del prodotto di più di due rappresentazioni, si ha la somma di tali termini).

Esempio 10: si considerino ora i tensori del tipo $\binom{p}{q}$ in uno spazio lineare L. Si può dimostrare che:

1. nella formula per la trasformazione delle componenti $t \equiv t^{a\ldots b}_{c\ldots d}$ sotto il cambiamento di base $e_a \mapsto A^b_a e_b$ in L si ha una rappresentazione ρ del gruppo $GL(n,\mathbb{R})$
$$t(eA) = \rho(A^{-1})\, t(e)$$
(con $t(e)$ componenti del tensore rispetto alla base e) che è un prodotto tensoriale di diverse rappresentazioni del tipo $\rho^1_0 \equiv \mathrm{id}\,(A \mapsto A)$
$$\rho \equiv \rho^p_q = \underbrace{\rho^1_0 \otimes \cdots \otimes \rho^1_0}_{p} \otimes \underbrace{\rho^0_1 \otimes \cdots \otimes \rho^0_1}_{q}$$
cioè
$$(\rho(A)t)^{a\ldots b}_{c\ldots d} = A^a_i \ldots A^b_j (A^{-1})^k_c \ldots (A^{-1})^l_d t^{i\ldots j}_{k\ldots l}$$
(così che ci sia un ρ^1_0 per ogni indice superiore e un ρ^0_1 per ogni indice inferiore);
2. la sua rappresentazione derivata risulta essere
$$(\rho'(C)t)^{a\ldots b}_{c\ldots d} = C^a_i t^{i\ldots b}_{c\ldots d} + \cdots + C^b_i t^{a\ldots i}_{c\ldots d} - C^i_c t^{a\ldots b}_{i\ldots d} - \cdots - C^i_d t^{a\ldots b}_{c\ldots i};$$
3. a titolo di esempio, per un tensore metrico si ottiene
$$(\rho(A)g)_{ab} = (A^{-1})^k_a\,(A^{-1})^l_b\, g_{kl} \qquad (\rho'(C)g)_{ab} = -C^i_a g_{ib} - C^i_b g_{ai}.$$

Esempio 11: si indichi con (V^p_q, ρ^p_q) la rappresentazione del gruppo $GL(n,\mathbb{R})$ nello spazio dei componenti di tensori di tipo $\binom{p}{q}$ nello spazio lineare L (nel senso dell'esempio precedente); essa agisce secondo la formula
$$(\rho^p_q(A)t)^{a\ldots b}_{c\ldots d} = A^a_i \ldots A^b_j (A^{-1})^k_c \ldots (A^{-1})^l_d\; t^{i\ldots j}_{k\ldots l}$$
(ci sono p matrici A e q matrici A^{-1}). Si può dimostrare che una *contrazione arbitraria* C è un operatore di intertwining tra le rappresentazioni (V^p_q, ρ^p_q) e $(V^{p-1}_{q-1}, \rho^{p-1}_{q-1})$, cioè che:
$$C : (V^p_q, \rho^p_q) \to (V^{p-1}_{q-1}, \rho^{p-1}_{q-1}) \qquad C \circ \rho^p_q(A) = \rho^{p-1}_{q-1}(A) \circ C.$$

In connessione con una teoria dei campi di gauge, un'altra semplice costruzione di una rappresentazione potrebbe tornare utile, ovvero la rappresentazione di un prodotto diretto dei gruppi $G_1 \times G_2$ nel prodotto tensoriale $V_1 \otimes V_2$ a partire da due rappresentazioni date ρ_1 del gruppo G_1 in V_1 e ρ_2 del gruppo G_2 in V_2, così come un piccolo argomento riguardante un tensore metrico Ad-invariante nell'algebra di Lie di un prodotto di gruppi.

Esempio 12: sia ρ_1 una rappresentazione di un gruppo G_1 in V_1 e ρ_2 una rappresentazione di un gruppo G_2 in V_2. Si indichi con E_a una base in V_1 e con E_A una base in V_2, così che una base nel prodotto tensoriale $V_1 \otimes V_2$ sia $E_a \otimes E_A$.

Si ricordi che l'algebra di Lie del prodotto $G_1 \times G_2$ è la somma diretta $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$, così che un suo elemento generico possa essere scritto come $X = X_1 + X_2$. Si può dimostrare che:

1. la prescrizione
$$\rho(g_1, g_2) := \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$$
fornisce una rappresentazione di $G_1 \times G_2$ in $V_1 \otimes V_2$ (confrontandola con il prodotto tensoriale delle rappresentazioni si nota che quest'ultimo può essere ottenuto dalla rappresentazione qui considerata se si rappresenta la "diagonale" in $G \times G$, cioè gli elementi della forma (g, g));

2. la sua rappresentazione derivata risulta essere
$$\rho'(X_1 + X_2) = \rho_1'(X_1) \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \rho_2'(X_2);$$

3. se E_i è una base dell'algebra di Lie $\mathcal{G}_1$ e E_I è una base dell'algebra di Lie $\mathcal{G}_2$, allora per gli elementi della matrice $\rho^{\;bB}_{\;aAi}$ e $\rho^{\;bB}_{\;aAI}$ della rappresentazione derivata, si ottiene
$$\rho^{\;bB}_{\;aAi} = \rho^{\;b}_{\;ai}\, \delta^B_A \qquad \rho^{\;bB}_{\;aAI} = \delta^b_a\, \rho^{\;B}_{\;AI}$$
dove ρ^b_{ai} e ρ^B_{AI} sono gli elementi di matrice delle rappresentazioni derivate iniziali;

4. se h_1 è un prodotto scalare ρ_1-invariante in V_1 e h_2 è un prodotto scalare ρ_2-invariante in V_2, allora
$$h := h_1 \otimes h_2 \qquad (h_1 \otimes h_2)(E_a \otimes E_\alpha, E_b \otimes E_\beta) := h_1(E_a, E_b)\, h_2(E_\alpha, E_\beta)$$
risulta essere ρ-invariante in $V_1 \otimes V_2$.

Si osserva ora un semplice fatto relativo ai prodotti scalari Ad-invarianti nelle algebre di Lie per il caso di un prodotto diretto di due gruppi
$$G = G_1 \times G_2 \qquad \mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2.$$

Precisamente, si dimostra che, se h_1 è un prodotto scalare Ad_{G_1}-invariante in $\mathcal{G}_1$ e h_2 è un prodotto scalare Ad_{G_2}-invariante in $\mathcal{G}_2$, allora
$$h \equiv \lambda_1 h_1 \oplus \lambda_2 h_2$$
è G-invariante per degli arbitrari λ_1, λ_2.

Se, ad esempio, i prodotti scalari h_1 e h_2 sono assegnati in modo univoco a meno di un fattore costante, si osserva che la libertà in $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ è già più grande, vale a dire che ora è grande quanto una classe a due parametri di prodotti scalari invarianti (la libertà fino a un fattore sarebbe solo una classe a un parametro). Questo semplice fatto si riflette nella struttura degli integrali di azione nelle **teorie di gauge**: se un gruppo di gauge è un prodotto, l'azione corrispondente contiene più costanti libere (con conseguente minore "potere predittivo" della teoria).

Per chiudere la sezione si spenderà ora qualche parola sull'irriducibilità. Se le rappresentazioni iniziali (V_1, ρ_1) e (V_2, ρ_2) sono irriducibili, allora la loro somma diretta chiaramente non è una rappresentazione irriducibile (essendo sia V_1 che V_2 due sottospazi invarianti). In generale, nessuno dei due è un prodotto diretto irriducibile. Per alcune classi di gruppi il prodotto può essere decomposto in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili; questa è chiamata **serie di Clebsch–Gordan**. La procedura di decomposizione può essere riformulata per trovare un'altra base in $V_1 \otimes V_2$ (anziché di $E_i \otimes E_\alpha$, che è adattata alle rappresentazioni iniziali ρ_1 e ρ_2), vale a dire una base adattata alla struttura dei sottospazi invarianti rispetto all'azione delle rappresentazioni risultanti $\rho_1 \otimes \rho_2$. Questo importante e vasto argomento non sarà trattato in questa tesi. Elementi della tecnica per le rappresentazioni di $SU(2)$ possono essere trovati nei libri di testo sulla meccanica quantistica (nell'ambito della trattazione di "addizione di momenti angolari").

4.5 Tensori invarianti e operatori di intertwining

Ogni mappa equivariante $A : (V_1, \rho_1) \to (V_2, \rho_2)$ permette di trasformare una quantità di tipo ρ_1 in una di tipo ρ_2. Si assegna ad un vettore $v_1 \in V_1$ il vettore $Av_1 := v_2 \in V_2$, dato che l'azione di g fornisce

$$v_1 \mapsto \rho_1(g)v_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 \equiv Av_1 \mapsto A(\rho_1(g)v_1) = \rho_2(g)(Av_1) \equiv \rho_2(g)v_2$$

in modo che l'effetto della mappa equivariante A consista nella "perdita" di ciò che riguardava V_1 e nella completa assimilazione nel nuovo "ambiente" V_2. La stessa cosa può essere effettuata con l'aiuto di un elemento *invariante* nello spazio $V_1^* \otimes V_2$.

In effetti, esiste una stretta relazione tra gli operatori di intertwining (= mappe *equivarianti* $V \to W$) ed elementi *invarianti* in $V^* \otimes W$. Più in dettaglio, sia A un operatore di intertwining tra le rappresentazioni (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) di un gruppo G; siano inoltre E_i una base in V_1 e E_a una base in V_2

$$A : V_1 \to V_2 \qquad \rho_2(g)A = A\rho_1(g) \qquad AE_i =: A_i^a E_a$$

Allora:

1. l'elemento $\hat{A}$ dello spazio $V_1^* \otimes V_2$

$$\hat{A} := A_i^a E^i \otimes E_a \qquad \text{i.e.} \hat{A}(v_1, v_2^*) := \langle v_2^*, Av_1 \rangle$$

   è invariante rispetto alla rappresentazione $\check{\rho}_1 \otimes \rho_2$

$$(\check{\rho}_1 \otimes \rho_2)(g)\hat{A} = \hat{A}$$

2. viceversa, un elemento $\hat{B} \in V_1 \otimes V_2$ che è invariante rispetto alla rappresentazione $\rho_1 \otimes \rho_2$ induce l'operatore di intertwining B tra $(V_1^*, \check{\rho}_1)$ e (V_2, ρ_2)

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)\hat{B} = \hat{B} \qquad \Rightarrow \qquad B : V_1^* \to V_2 \quad \hat{B}(v_1^*, v_2^*) =: \langle v_2^*, Bv_1^* \rangle$$

$$\rho_2(g)B = B\check{\rho}_1(g)$$

La notazione $\check{\rho}$ indica la rappresentazione $\check{\rho} : G \to \mathrm{Aut}\, V^*$ del gruppo G nello spazio duale V^*, che è detta "*rappresentazione contragradiente*" (o, talvolta, "rappresentazione duale"). Essa è definita a partire da una rappresentazione $\rho : G \to \mathrm{Aut}\, V$ di G; la prescrizione che la definisce è

$$\langle \check{\rho}(g)\alpha, v \rangle := \langle \alpha, \rho(g)^{-1} v \rangle \qquad \alpha \in V^*,\, v \in V$$

Elementi invarianti di questo tipo sono spesso chiamati **tensori invarianti**; in generale, essi sono elementi $\hat{A}$ di prodotto tensoriale multiplo $V_1 \otimes ... \otimes V_n$, il quale è invariante rispetto all'azione della rappresentazione naturale in questo spazio, vale a dire il prodotto tensoriale delle rappresentazioni individuali ρ_i

$$(\rho_1 \otimes ... \otimes \rho_n)(g)\hat{A} = \hat{A} \qquad \hat{A} = A^{i...a} E_i \otimes ... \otimes E_a \in V_1 \otimes ... \otimes V_n$$

Si noti che un *singolo* tensore invariante induce in generale *numerosi* operatori di intertwining; ad esempio, un tensore invariante $\hat{A}$ per il prodotto di due rappresentazioni $V_1 \otimes V_2$

$$\hat{A} = A^{ia} E_i \otimes E_a$$

definisce quattro operatori di intertwining:

$$A_{(1)} : V_1^* \to V_2 \qquad E^i \mapsto A^{ia} E_a$$

$$A_{(2)} : V_2^* \to V_1 \qquad E^a \mapsto A^{ia} E_i$$

$$A_{(3)} : V_1^* \otimes V_2^* \to \mathbb{R} \qquad E^a \otimes E^i \mapsto A^{ia}$$

$$A_{(4)} : \mathbb{R} \to V_1^* \otimes V_2^* \qquad 1 \mapsto A^{ia} E_a \otimes E_i$$

dove $\mathbb{R}$ è la rappresentazione unidimensionale triviale di un gruppo G.

Esempio 1: in meccanica quantistica, si lavora con una funzione d'onda complessa a due componenti $\psi(\mathbf{r})$ per descrivere una particella con spin $\left(\frac{1}{2}\right)$. Questa funzione si trasforma sotto rotazioni (di un angolo α attorno a $\mathbf{n}$) secondo la regola

$$\psi \mapsto A\psi \equiv e^{-\frac{1}{2} i \alpha \mathbf{n} \cdot \sigma} \psi \qquad A \in SU(2)$$

Spesso si sfrutta il fatto che è possibile formare un vettore da due funzioni d'onda di questo tipo ψ, χ

$$\mathbf{w} = \psi^+ \sigma \chi \qquad \text{o, in particolare, per solo } \psi \quad \psi^+ \sigma \psi$$

Questa affermazione deriva dal fatto che gli elementi di matrice della *matrici di Pauli* forniscono un tensore di $SU(2)$ invariante

$$(\sigma_j)^a{}_b$$

Gli indici di tipo $(\ )^a$ corrispondono alla rappresentazione $\rho = \mathrm{id}$ in $\mathbb{C}^2$, gli indici $(\ )^i$ corrispondono a $\rho(A) = R =$ una comune rotazione. Anche i simboli bidimensionali di Levi-Civita ϵ_{ab} e ϵ^{ab} sono tensori di $SU(2)$ invarianti; per questo è canonicamente possibile alzare e abbassare gli indici di tipo $a, b, ...$ con essi.

Di seguito si riporta una serie di osservazioni:

- per ogni rappresentazione (V, ρ) di un gruppo G, il tensore identità è un tensore invariante rispetto a $\check{\rho} \otimes \rho$

  $$\hat{1} := \delta^a_b E^b \otimes E_a \equiv E^a \otimes E_a \qquad \text{i.e.}\hat{1}(v, w^*) := \langle w^*, v\rangle \qquad (\check{\rho} \otimes \rho)(g)\hat{1} = \hat{1}$$

- per il gruppo (pseudo-)ortogonale $G = O(r, s)$, i tensori

  $$\eta_{ab} \qquad \text{e} \qquad \eta^{ab}$$

  sono invarianti e, per $SO(r, s)$ possono essere inoltre aggiunti

  $$\epsilon_{a...b} \qquad \text{e} \qquad \epsilon^{a...b}$$

- una contrazione (se avente significato) non "rovina" l'invarianza di un tensore

Si noti infine che i tensori invarianti sono naturalmente dotati della struttura di un'algebra (rispetto al prodotto tensoriale).

4.6 Azioni di gruppi di Lie, orbita e stabilizzatore, spazio omogeneo

Nelle sezioni precedenti, sono stati discussi dei casi particolari di azioni, cioè le rappresentazioni (le azioni negli spazi lineari).

Dati un gruppo di Lie G e una varietà liscia M, si dice che G ***agisce da sinistra*** (o ***agisce da destra***) su M se, per ogni elemento del gruppo $g \in G$ è dato un diffeomorfismo L_g (o R_g) che soddisfa, per $g, h \in G$, le seguenti

$$L_g : M \to M \qquad L_{gh} = L_g \circ L_h \qquad L_e = \mathrm{id}_M$$

$$R_g : M \to M \qquad R_{gh} = R_h \circ R_g \qquad R_e = \mathrm{id}_M$$

La notazione "compressa" è

$$x \mapsto L_g x =: gx \qquad \text{o} \qquad x \mapsto R_g x =: xg$$

in modo che la proprietà di essere un'azione sinistra o destra sia

$$(gh)x = g(hx) \qquad \text{o} \qquad x(gh) = (xg)h$$

Si noti che gx non è un prodotto, ma una "scorciatoia" per $L_g x$.

Una varietà M su cui è disponibile un'azione sinistra di un gruppo G è detta G-spazio sinistro (e G-spazio destro per un'azione destra).

Sulla stessa varietà, possono a volte essere definite diverse azioni dello stesso gruppo; essi sono visti come G-spazi diversi.

Quando un gruppo G agisce su M, su entrambi emerge una struttura addizionale; vale a dire, su M si presenta un sistema di sottoinsiemi, chiamati **orbite**, mentre su G si presentano dei sottogruppi chiamati **stabilizzatori**.

L'**orbita** $\mathcal{O}_x$ di un punto $x \in M$ è l'insieme di punti in M che possono essere raggiunti da x tramite un'azione di un opportuno elemento del gruppo, in modo che

$$M \supset \mathcal{O}_x := \{y \in M \mid \exists\, g \in G \text{ tale che } y = gx\}$$

Un'orbita è interamente data da uno qualsiasi dei suoi punti

$$y \in \mathcal{O}_x \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$$

A volte succede che un G-spazio consista di una singola orbita; ciò significa che due punti qualsiasi possono essere connessi dall'azione del gruppo. Si parla quindi di un'*azione transitiva* e il corrispondente G-spazio è chiamato uno **spazio omogeneo**. L'estremo opposto è fornito dal caso in cui un'orbita $\mathcal{O}_x$ consiste di un singolo punto x; si parla in questo caso di un *punto fisso* dell'azione.

Esempio 1: si consideri la restrizione dell'azione $x \mapsto Ax$ del gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^n$ del sottogruppo $SO(n)$. Le orbite della nuova azione coincidono con le *sfere* S_r^{n-1} di tutti i possibili raggi r e centrate nell'origine

$$S_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \eta(x, x) \equiv (x^1)^2 + ... + (x^n)^2 = r^2\}$$

Questa nuova azione è transitiva su ogni sfera: un punto arbitrario sulla sfera di raggio r può essere generato, ad esempio, dal punto $x_0 := (0, ..., r)$.

Sia G un gruppo che agisce (da sinistra) su M e sia $x \in M$. Lo **stabilizzatore** di un punto x è il sottogruppo $G_x \subset G$ che contiene solo quegli elementi g del gruppo G che lasciano il punto x fisso

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

Gli stabilizzatori di tutti i punti della stessa orbita sono isomorfi. Ad esempio, lo stabilizzatore di un punto qualsiasi sulla sfera S_r^{n-1}, vista come un'orbita dell'azione dell'*esempio 1* del gruppo $SO(n)$ in E^n, è un sottogruppo isomorfo a $SO(n-1)$.

Ogni spazio omogeneo M in un gruppo G può essere sostituito dalla sua copia isomorfa, costruita direttamente in termini del gruppo.

Esempio 2: sia G un gruppo, $H \subset G$ un sottogruppo, $g \in G$. La classe laterale (*coset*) sinistra $gH \subset G$ è l'insieme di tutti gli elementi della forma gh per h nel sottogruppo H, cioè

$$gH = \{k \mid k = gh, h \in H\}$$

Le classi laterali realizzano una decomposizione di G, cioè per ogni elemento $k \in G$ appartiene ad una sola classe laterale. Inoltre, le classi laterali hanno tutte la stessa cardinalità ("numero di elementi"), cioè esiste una biezione $g_1H \leftrightarrow g_2H$ per ciascuna coppia di classi laterali. La relazione su G, definita come

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2h \qquad \text{per qualche } h \in H$$

è un'equivalenza e le classi di equivalenza coincidono con le classi laterali sinistre.

Esempio 3: sia $H \subset G$ un sottogruppo di G. Si definisca un insieme G/H come un insieme-prodotto (*factor-set*) di G rispetto all'equivalenza dell'*esempio 1*, cioè un punto $[g] \in G/H$ è la classe di equivalenza del punto g in $(G, \sim)$. La **proiezione canonica**

$$\pi : G \to G/H \qquad g \mapsto [g]$$

è una mappa suriettiva. La controimmagine di un punto $[g] \in G/H$ è semplicemente la classe laterale $gH \subset G$.

Esempio 4: la prescrizione

$$L_{\hat{g}}[g] \equiv \hat{g}[g] := [\hat{g}g]$$

definisce un'azione sinistra del gruppo G su G/H, che non dipende dalla scelta dei rappresentanti. Questa azione è *transitiva*, quindi G/H è uno *spazio omogeneo* naturale del gruppo G.

Due spazi omogenei (sinistri) (M, L_g) e $(N, \tilde{L}_g)$ dello stesso gruppo G sono detti *isomorfi* (equivalenti) se esiste una mappa biettiva equivariante tra essi.

Esempio 5: si considerino le sfere standard negli spazi cartesiani (di raggio 1, centrate nell'origine). Vi sono i seguenti isomorfismi di spazi omogenei (indicati con "=")

- $S^n = SO(n+1)/SO(n) = O(n+1)/O(n)$
- $S^{2n-1} = SU(n)/SU(n-1) = U(n)/U(n-1)$
- $S^1 = (\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z}$

Il metodo comune a questi esempi, utile in varie situazioni, può essere così riassunto:

1. trovare un'azione L_g del gruppo G su un insieme X;
2. trovare un'orbita $\mathcal{O}_x := M$ di un punto $x \in X$ - questo è già uno spazio omogeneo;
3. trovare lo stabilizzatore $H \equiv G_x$ del punto x;
4. scrivere il risultato nella forma $M = G/H$, i.e. $\mathcal{O}_x = G/G_x$.

Di seguito, viene enunciato un importante teorema, con conseguenze di notevole interesse in ambito fisico. Sia $f : G \to \tilde{G}$ un omomorfismo di gruppi.

Allora, la mappa $\hat{f} : G/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$, $\hat{f}(\pi(g)) := f(g)$ è un isomorfismo di gruppi; quindi

$$G/\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$$

è un isomorfismo di gruppi. Si ricordi che la proiezione canonica $\pi : G \to G/\mathrm{Ker}\, f$ è un omomorfismo suriettivo.

Un caso particolare di omomorfismo di gruppi di Lie $f : G \to \tilde{G}$ è fornito dal caso in cui l'immagine $\mathrm{Im}\, f$ è l'intero gruppo $\tilde{G}$ e il nucleo (kernel) $\mathrm{Ker}\, f$ è un sottogruppo discreto (eventualmente infinito). Indicando gli elementi del sottogruppo con $(g_1 \equiv e, g_2, ..., g_k, ...)$, allora, per definizione, essi costituiscono la controimmagine dell'elemento unitario $\tilde{e} \in \tilde{G}$. Dalla continuità di f segue che la controimmagine di un intorno (sufficientemente piccolo) $\tilde{\mathcal{O}}$ dell'elemento unitario $\tilde{e} \in \tilde{G}$ è dato da certi intorni $\tilde{\mathcal{O}}_k$ degli elementi g_k, ciascuno mappato biettivamente in $\tilde{\mathcal{O}}$. Tuttavia, ciò non si verifica solo sull'elemento unitario $\tilde{e}$, ma anche su ogni elemento $\tilde{g} = f(g)$ in $\tilde{G}$. In generale, una mappa di varietà con queste proprietà è chiamata **rivestimento** (***covering***) o *omeomorfismo locale*. Se il numero di controimmagini è n, si parla di rivestimento a n fogli. Se il rivestimento di gruppi di Lie $f : G \to \tilde{G}$ è un omomorfismo, si parla di "rivestimento-omomorfismo". Se G è (semplicemente) connesso, f è chiamato **rivestimento universale** di $\tilde{G}$, e G "gruppo del rivestimento universale". Si può dimostrare che, per un dato gruppo di Lie connesso $\tilde{G}$, il rivestimento universale - e il gruppo di rivestimento universale - è unico, a meno di isomorfismi.

Se $G, \tilde{G}$ sono gruppi di Lie e $f : G \to \tilde{G}$ è un rivestimento-omomorfismo, allora le loro algebre di Lie sono isomorfe (anche se i gruppi sono tra loro solo omomorfi).

Un'importante applicazione di un rivestimento-omomorfismo è il rivestimento a 2 fogli del gruppo rotazionale in tre dimensioni $SO(3)$ da parte del gruppo $SU(2)$. Dato che $SU(2)$ è una sfera S^3 (dunque connessa, e semplicemente connessa), questo è un esempio di rivestimento universale. Le relazioni tra gruppi e tra algebre sono

$$SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}^2 \qquad \text{ma} \qquad so(3) = su(2)$$

Tutto ciò è strettamente legato agli *spinori*. Si può dimostrare che ci sono più rappresentazioni del gruppo $SU(2)$ che del gruppo $SO(3)$. Un'analisi più dettagliata conduce al seguente risultato: le rappresentazioni irriducibili complesse finito-dimensionali di $SU(2)$ sono etichettate da un singolo intero o semi-intero non negativo $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...$; in meccanica quantistica, esso è legati al momento angolare dell'oggetto, in particolare al suo spin. Si trova che le rappresentazioni etichettate da interi j sono prese (*lifted*) da $SO(3)$, mentre le rappresentazioni semi-intere sono specifiche per $SU(2)$, cioè non è possibile ottenerle per mezzo di $SO(3)$. Ad esempio, la rappresentazione $\rho = \mathrm{id}$ ha spin $j = \frac{1}{2}$, quindi non è un *lift*. È chiamata *rappresentazione spinoriale* del gruppo $SU(2)$ e gli oggetti (le colonne complesse a due componenti) che si trasformano secondo questa rappresentazione sono detti *spinori* (non relativistici). Dalla relazione tra le rappresentazioni di $SO(3)$ e quelle del suo gruppo di rivestimento $SU(2)$, lo spinore cambia segno ($e \to -e$) se esso è ruotato una volta di un angolo 2π.

Capitolo 5

Applicazioni in ambito fisico

Oltre agli esempi trattati nei capitoli precedenti, possono essere affrontati ulteriori esempi, più completi, di gruppi di Lie con un'importante applicazione in ambito fisico. Prima di fare ciò, è utile definire l'oggetto matematico *derivata di Lie*.

5.1 Derivata di Lie

Un campo vettoriale V "spezzetta" una varietà in un sistema di curve integrali. Se *ogni* punto $P \in M$ si muove di una distanza parametrica t lungo la "sua" curva integrale, si ottiene una mappa

$$\Phi_t : M \to M \qquad P \equiv \gamma(t_0) \mapsto \gamma(t_0 + t)$$

che è chiamata **flusso locale** generato dal campo V. Il termine "locale" indica che Φ_t non deve essere definito per t arbitrariamente grande, ma in generale solo in qualche intorno di $t = 0$ e questo intorno può a sua volta dipendere da $P \in M$.

Sia V un campo vettoriale su una varietà M e sia

$$\Phi_t : M \to M$$

il corrispondente flusso. Dato che Φ_t è un diffeomorfismo , induce la mappa di *pull-back* di campi tensoriali di tipo arbitrario su M

$$\Phi_t^* : \mathcal{T}_q{}^p(M) \to \mathcal{T}_q{}^p(M)$$

Questa mappa è nota come **trascinata di Lie** (*Lie transport* o *Lie dragging*) di campi tensoriali. I campi sono trasportati di una distanza parametrica t lungo le curve integrali del campo V *contro* la direzione del flusso Φ_t.

Tuttavia, non vi è alcun motivo per cui un generico campo tensoriale A debba essere costante lungo le curve integrali di un campo V. Il tensore $\Phi_t^*(A)(x)$, che è trasportato in x dal punto $\Phi_t(x)$, in generale dipende da t. Una misura di questa dipendenza (cioè della Lie *non-constancy* = non-invarianza rispetto a V) è data dall'oggetto

$$\mathcal{L}_V A := \frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi_t^* A$$

che è chiamato **derivata di Lie** di un campo tensoriale A lungo un campo vettoriale V.

Da questa definizione segue che essa conserva il grado di un campo tensoriale

$$\mathcal{L}_V : \mathcal{T}_q{}^p(M) \to \mathcal{T}_q{}^p(M)$$

e che $\quad \mathcal{L}_V A = 0 \Leftrightarrow A$ è invariante (*Lie dragged*) rispetto a V.

Sia γ una generica curva su M, f una trasformazione su M (è un diffeomorfismo $f : M \to M$). Se si richiede che la lunghezza della curva γ *non* cambi, occorre restringere la classe delle mappe, tenendo in considerazione quelle per cui

$$f : M \to M \qquad \text{tali che } \; f^* g = g$$

Queste trasformazioni di M sono chiamate **isometrie** di una varietà (M, g).

Uno strumento efficace per trovare una parte rilevante di tutte le isometrie (cioè quelle isometrie che possono essere ottenute da una deformazione liscia dell'isometria banale = l'identità) riguarda l'approccio infinitesimale. Come primo passo, si cercano tutte le isometrie infinitesime $\Phi_\epsilon : M \to M$ (che differiscono solo di poco dall'identità). Successivamente, si ottengono le mappe finite per iterazione di quelle infinitesime. In questo modo, si ottiene un intero *gruppo ad un parametro*, cioè un *flusso* di isometrie $\Phi_t : M \to M$, dove il generatore del flusso è il campo vettoriale ξ.

Il campo vettoriale ξ soddisfa le *equazioni di Killing*

$$\mathcal{L}_\xi g = 0$$

dove g è un tensore metrico. I vettori di Killing sono le soluzioni delle equazioni di Killing ed essi costituiscono una sottoalgebra dell'algebra di Lie di tutti i campi vettoriali su M. A differenza però di quest'ultima, l'algebra di Lie dei vettori di Killing è sempre finito-dimensionale e, per una varietà n-dimensionale, essa ha dimensione al massimo $n(n+1)/2$. I vettori di Killing di $SO(3)$ definiscono sfere S^2 per mezzo delle loro curve integrali.

Un campo vettoriale di Killing è dunque un campo vettoriale rispetto al quale il tensore metrico è Lie-costante.

5.2 Esempi di applicazioni

5.2.1 Campi vettoriali di Killing e simmetrie

È noto che, in meccanica classica, se una forza risulta essere il gradiente di un potenziale con simmetria assiale, allora il momento angolare di una particella attorno all'asse di simmetria è costante lungo la traiettoria della particella. In modo simile, se il potenziale non dipende da una delle coordinate cartesiane, ad esempio x, allora la componente x del momento è conservata. Tuttavia, se il potenziale ha un altro tipo di simmetria (ad esempio su una famiglia di ellissoidi), non vi è alcun momento conservato associato a quella simmetria. Ciò equivale a dire che, nella dinamica delle particelle, le grandezze conservate non vengono direttamente dall'invarianza del potenziale sotto ad un certo tipo di moto (circolare, rettilineo o ellittico, nei tre esempi riportati), ma richiedono anche che il moto avvenga lungo un *campo vettoriale di Killing* dello spazio euclideo in cui la dinamica ha luogo.

Esempio: la ***simmetria sferica***

Una varietà M con un tensore metrico $g|$ è detta possedere *simmetria sferica* se l'algebra di Lie dei suoi campi vettoriali di Killing hanno una sottoalgebra che è l'algebra di Lie di $SO(3)$. Questa definizione di simmetria sferica implica l'esistenza di una foliazione di M in superfici con la geometria delle sfere. Si noti che i centri delle sfere non sono necessariamente in M.

Prendendo in particolare le funzioni definite sulla sfera S^2, si ha che ogni funzione su M definisce una funzione di questo tipo su una qualsiasi delle sue sfere di simmetria. Si definisce lo spazio delle funzioni $L^2(S^2)$ come lo spazio di Hilbert di tutte le funzioni a valori complessi su S^2 che sono quadrato-integrabili; la norma

$$||f|| = \left[\int_{S^2} |f|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \right]^{\frac{1}{2}}$$

esiste, dove l'integrale è solitamente su un elemento di superficie della sfera.

Lo spazio $L^2(S^2)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, e i suoi elementi sono funzioni.

La realizzazione di un elemento g di $SO(3)$ come una mappa di S^2 può essere identificata come una rappresentazione di $SO(3)$ nello spazio vettoriale $L^2(S^2)$, una rappresentazione che sarà ∞-dimensionale. Ciò che a questo punto sorge spontaneo chiedersi è se esistono sottospazi finito-dimensionali di $L^2(S^2)$ che forniscono rappresentazioni di $SO(3)$, dove tali sottospazi saranno invarianti sotto $SO(3)$. Si ricordi che una rappresentazione di $SO(3)$ in un generico spazio vettoriale V è detta *irriducibile* se V non contiene sottospazi invarianti sotto $SO(3)$ finito-dimensionali.

La costruzione della rappresentazione irriducibile di $SO(3)$ in $L^2(S^2)$ è un argomento trattato in molti libri di testo. Le funzioni di base dei sottospazi irriducibili sono le ***armoniche sferiche*** Y_{lm}, con $m = -l, ..., l$. Queste funzioni sono particolarmente importanti in meccanica quantistica, nel caso di campo centrale.

5.2.2 Equazione di Dirac e spinori

Vale la pena menzionare un oggetto geometrico presente sulle varietà, il *campo spinoriale.* Fu Paul Dirac (1902-1984) a giungere a questo concetto.

L'oggetto della ricerca di Dirac era una formulazione relativistica della meccanica quantistica, nell'ottica di generalizzare la teoria non-relativistica basata sull'equazione di Schroedinger. Klein e Gordon, nel tentare di risolvere lo stesso problema, giunsero ad un'equazione del *secondo ordine* nel tempo, ma questo poneva seri problemi interpretativi; per questo Dirac era alla ricerca di un'equazione differenziale del *primo ordine.* Da questa sua ricerca, emersero l'*equazione di Dirac* e i *campi spinoriali.*

L'equazione di Dirac in unità naturali ($c = 1 = \hbar$) per una particella di massa m e spin $\frac{1}{2}$ è

$$(i\partial\!\!\!/ - m\hat{1})\psi = 0$$

dove $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ è l'operatore di Dirac, ∂_μ indica le derivate parziali rispetto a x^μ per $\mu = 0, 1, 2, 3$ (che corrispondono rispettivamente alle coordinate t, x, y, z, cioè la coordinata temporale e le tre coordinate spaziali), ψ è la funzione d'onda e γ^μ sono delle matrici quadrate. Le matrici γ^μ formano una rappresentazione dell'algebra di Clifford e sono:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2\times 2} \\ \mathbb{1}_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, 3$$

dove le σ^i sono le matrici di Pauli.

Affinché il tutto sia relativisticamente invariante, il vettore colonna ψ dovrebbe trasformarsi secondo una nuova rappresentazione "spinoriale" del gruppo di Lorentz speciale $SO(1, 3)$.

L'equazione di Dirac può essere ricavata direttamente dalla lagrangiana della particella

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}\, (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, \psi$$

dove

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$$

Si noti che la lagrangiana così definita risulta invariante per trasformazioni del gruppo di Lie $U(1)$. Lo spinore di Dirac ψ si trasforma, per trasformazioni di questo tipo, nel seguente modo

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{iq\theta}\psi$$

Di conseguenza, $\bar{\psi}$ si trasforma secondo

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = e^{-iq\theta}\bar{\psi}$$

in virtù del legame tra ψ e $\bar{\psi}$.

Da ciò segue che $\mathscr{L}' = \mathscr{L}$, dalla semplificazione di $e^{iq\theta}$ con $e^{-iq\theta}$.

Dal momento che $U(1)$ è una simmetria globale, è possibile applicare il **teorema di Noether**: ogni simmetria continua di $\mathscr{L}$ dà origine ad una corrente conservata J^μ dato che le equazioni del moto implicano $\partial_\mu J^\mu = 0$. Inoltre, ogni corrente conservata genera una carica conservata Q, definita come $Q = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\, J^0$.

Nel caso considerato, la carica conservata Q è la carica elettrica, e si dimostra essere uguale a $+q$ per le particelle, uguale a $-q$ per le antiparticelle.

Bibliografia

[1] Fecko M. (2006), *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Schutz B. (1980), *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Tung W. (1985) *Group Theory in Physics*, World Scientific Publishing, Singapore.

[4] Weyl H. (2014) *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Martino Publishing, Mansfield Centre.

[5] Odifreddi P. (2000), *La Matematica del Novecento*, Einaudi, Torino.

[6] Abate M., Tovena F. (2011), *Geometria Differenziale*, Springer Verlag Italia, Milano.

[7] Hermann R. (1968), *Differential Geometry and the Calculus of Variations*, Academic Press, New York.