Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

FUNZIONI SIMMETRICHE DI JACK: UNA GENERALIZZAZIONE NEL SUPERSPAZIO

Relatore:
Chiar.mo Prof.
FABRIZIO CASELLI

Presentata da:
ELENA COLLACCIANI

III Sessione
Anno Accademico 2019/20

Introduzione

L'algebra delle funzioni simmetriche a coefficienti in un campo F è costituita dalle serie formali in infinite (numerabili) variabili invarianti rispetto ad una qualsiasi permutazione delle variabili. In questa tesi presenteremo l'algebra delle funzioni simmetriche a coefficienti razionali, in particolare studiando quattro basi e un'involuzione abbastanza naturali per tale spazio e introducendo un prodotto scalare. Ci concentreremo poi su una base meno ovvia dello spazio, la base di Schur, caratterizzata dalle proprietà di ortogonalità e unitriangolarità rispetto alla base monomiale con un particolare ordine e che gode di notevoli proprietà combinatorie. Il secondo capitolo sarà dedicato alla generalizzazione delle funzioni di Schur nell'ambiente delle funzioni simmetriche a coefficienti in $\mathbb{Q}(\alpha)$ (con α indeterminata), le cosiddette funzioni di Jack, caratterizzate ancora dalle stesse proprietà delle funzioni di Schur; in particolare, il risultato principale proposto sarà proprio l'esistenza e unicità di tale base, dopodichè verranno presentate alcune proprietà delle funzioni di Jack che possono essere viste come generalizzazioni di quelle esibite nel capitolo precedente per le funzioni di Schur. Nel terzo e ultimo capitolo si presenterà un'estensione delle funzioni simmetriche, ovvero le funzioni simmetriche nel superspazio (o superfunzioni simmetriche): serie formali in cui oltre ad infinite variabili commutative compaiono infinite variabili anticommutative che siano invarianti rispetto ad una qualsiasi permutazione delle variabili che agisca simultaneamente sulle variabili commutative e su quelle anticommutative. In particolare, si proporrà prima una generalizzazione nel superspazio di quanto visto per l'algebra delle funzioni simmetriche a coefficienti in $\mathbb{Q}$, dopodiché si fornirà una prima introduzione alle superfunzioni di Jack.

Indice

Capitolo 1

Funzioni simmetriche classiche

1.1 Partizioni e ordinamenti

Definizione 1.1.1. *Si definisce partizione di un intero non negativo $n \in \mathbb{N}$ una sequenza*

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$$

tale che

1. $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$
2. $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = n$

e si scrive $\lambda \vdash n$ oppure $|\lambda|$=n.
Poichè qualsiasi $\lambda_i = 0$ è irrilevante, possiamo identificare una partizione λ con la sequenza $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots)$.

Si denota con *Par(n)* l'insieme di tutte le partizioni di n, dove $Par(0)$ contiene solo partizione vuota $\emptyset$ (ovvero la sequenza $(0, 0, \cdots)$, e con Par l'insieme di tutte le partizioni, ovvero $Par = \bigcup_{n \geq 0} Par(n)$. Indichiamo con $p(n)$ il numero di partizioni di n, ovvero $p(n) = |Par(n)|$, e in particolare $p(0) = 1$.

Ad esempio:
Par(3)=$\{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}$
dove sono stati sottintesi gli zeri.

Altre notazioni che useremo sono:

- $l(\lambda)$ per indicare la *lunghezza* di una partizione λ, cioè il numero di elementi di λ diversi da zero.
- $m_k(\lambda)$ per indicare il numero di elementi di λ uguali a k.
  Osserviamo che una partizione λ può essere univocamente individuata tramite la scrittura $\lambda = \langle 1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots \rangle$, cioè esplicitando quante volte ogni naturale compare in tale sequenza.

Un modo utile di visualizzare le partizioni è tramite i cosiddetti *diagrammi di Ferrers*:

Definizione 1.1.2. *Si definisce diagramma di Ferrers di una partizione $\lambda \vdash n$ la matrice di n celle giustificata a sinistra con $l(\lambda)$ righe e avente sull'i-esima riga λ_i celle.*

Esempio:

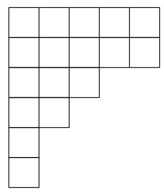

Figura 1.1: diagramma di Ferrers della partizione $\lambda = (5, 5, 3, 2, 1, 1) \vdash 17$

Definizione 1.1.3. *Sia $\lambda \in Par(n)$. Definiamo partizione coniugata di λ la partizione $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, 0, 0, \dots)$ in modo tale che il diagramma di Ferrers di λ' sia il diagramma di λ trasposto. Equivalentemente, possiamo definire λ' tramite la relazione $m_i(\lambda') = \lambda_i - \lambda_{i+1}$.*

Osserviamo che $l(\lambda') = \lambda_1$ (e reciprocamente $l(\lambda) = \lambda'_1$).

Esempio:
Se λ=(5,5,3,2,1,1), allora λ' =(6,4,3,2,2).
Infatti questo si può vedere trasponendo il diagramma di Ferrers:

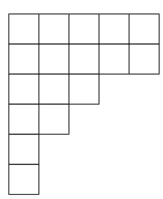

Figura 1.2: diagramma di Ferrers della partizione $\lambda = (5, 5, 3, 2, 1, 1)$

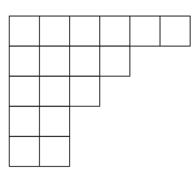

Figura 1.3: diagramma di Ferrers della partizione $\lambda' = (6, 4, 3, 2, 2)$

Altrimenti si può verificare considerando che $\lambda = \langle 1^2, 2^1, 3^1, 4^0, 5^2, 6^0, \dots \rangle$ e applicando la formula su data.

In seguito sarà utile considerare anche dei riempimenti numerici dei diagrammi di Ferrers: le cosiddette tabelle di Young.

Definizione 1.1.4. *Data λ partizione di n e α composizione debole di n, con n intero positivo, una tabella di Young semistandard (SSYT) di forma λ e tipo α è una matrice $T = (T_{i,j})$, $T_{i,j} \in \mathbb{N}$, con $1 \leq i \leq l(\lambda)$ e $1 \leq j \leq \lambda(i)$ che abbia esattamente $\alpha(k)$ componenti uguali a k, e tale che gli interi sulle righe siano ordinati in modo debolmente crescente e quelli sulle colonne in modo strettamente crescente.*
Una tabella di questo genere avente tipo $\alpha = \langle 1^n \rangle$ prende il nome di tabella standard di Young (SYT).

Esempio:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 6 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Figura 1.4: Tabella di Young semistandard (SSYT) di forma $\lambda = (3, 3, 1)$ e tipo $\alpha = (2, 2, 1, 0, 1, 1)$.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Figura 1.5: Tabelle di Young standard (SYT) di forma $\lambda = (2, 1)$.

Per sviluppare la teoria delle funzioni simmetriche, è utile avere delle relazioni d'ordine fra partizioni. In particolare rivestono un ruolo significativo i seguenti ordinamenti:

- Siano $\mu, \lambda \in$ Par. Diciamo che $\mu \subseteq \lambda$ se $\mu_i \leq \lambda_i$ per ogni i. Equivalentemente, $\mu \subseteq \lambda$ se il diagramma di Young di μ è contenuto in quello di λ. Questo è un ordine parziale su tutto l'insieme Par.

- Siano $\mu, \lambda \in Par(n)$. Diciamo che $\mu \leq \lambda$ se $\sum_{i=1}^{k} \mu_i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ per ogni $k \geq 1$. Graficamente, $\mu \leq \lambda$ se il diagramma di Young di μ si ottiene da quello di λ spostando uno o più quadrati da una riga ad un'altra più in basso. Tale relazione prende il nome di *ordine di dominanza* (*dominance order*) ed è un ordine parziale defnito su $Par(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Siano $\mu, \lambda \in Par(n)$. Diciamo che $\mu \overset{L}{\leq} \lambda$ se $\mu = \lambda$ o se esiste un k per cui $\mu_i = \lambda_i$ per ogn $i < k$ e $\mu_k < \lambda_k$. Tale relazione si dice *ordine lessicografico* ed è un ordine lineare su $Par(n)$ che estende l'ordine di dominanza.

Ad esempio:
Per Par(6), possiamo raffigurare l'ordine di dominanza nel seguente modo (Figura 1.6):

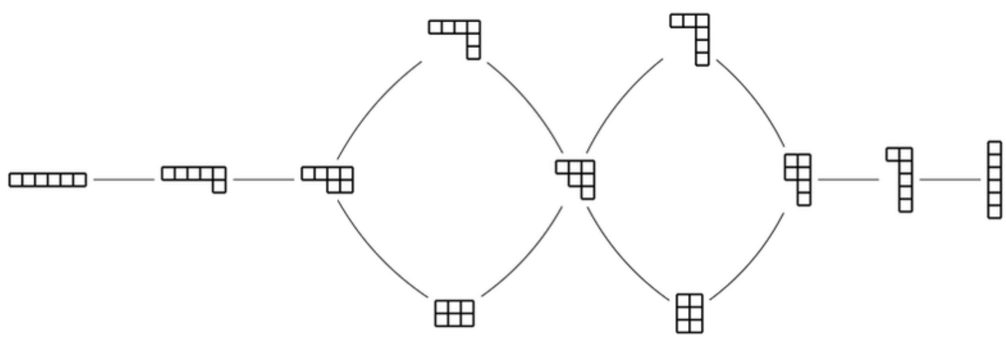

Figura 1.6: Diagaramma di Hasse rappresentante l'oridine di dominanza per Par(6) (in cui ogni partizione è identificata con il proprio diagramma di Young), dove le linee indicano che la partizione a sinistra è coperta da quella a destra

mentre l'ordine lessicografico è dato da

$$\begin{aligned}(6) &\overset{L}{>} (5,1) \overset{L}{>} (4,2) \overset{L}{>} (4,1,1) \overset{L}{>} (3,3 \overset{L}{>} (3,2,1) \overset{L}{>} (3,1,1,1) \overset{L}{>} (2,2,2)\\ &\overset{L}{>} (2,2,1,1) \overset{L}{>} (2,1,1,1,1) \overset{L}{>} (1,1,1,1,1,1)\end{aligned}$$

che infatti è un ordine lineare che estende quello di dominanza (ad esempio (4,1,1) e (3,3) non sono confrontabili con l'ordine di dominanza)

Proposizione 1.1.1. *Siano μ,λ $\in$Par(n).*
Si ha $\mu \leq \lambda$ se e solo se $\mu' \geq \lambda'$

Dimostrazione. Vista la simmetria dell'affermazione, è sufficiente provare un'implicazione. Proviamo la contronominale. Supponiamo che $\mu' \ngeq \lambda'$; ciò vuol dire che esiste un $i \geq 1$ tale che

$$\sum_{j=1}^{k} \mu'_j \geq \sum_{j=1}^{k} \lambda'_j \quad \text{per ogni } 1 \leq k \leq (i-1),$$
$$\sum_{j=1}^{i} \mu'_j < \sum_{j=1}^{i} \lambda'_j.$$

Da quest'ultima disuguaglianza segue che $\mu'_i < \lambda'_i$, e che $\sum_{j=i+1}^{l(\mu')} \mu'_j > \sum_{j=i+1}^{l(\lambda')} \lambda'_j$. Osserviamo che poichè μ'_j è il numero di celle nella j-esima colonna del diagramma di μ, $\sum_{j=i+1}^{l(\mu')} \mu'_j$ è il numero di celle nelle colonne più a destra della i-esima. Poichè le partizioni sono decrescenti, $\mu'_i \geq \mu'_k$ per ogni $k \geq i$ pertanto le celle oltre l'i-esima colonna nel diagramma di μ si trovano tutte nelle prime μ'_i righe, e in ognuna di esse ve ne sono esattamente $\mu_j - i$. Pertanto, contandole rispettivamente per righe e per colonne, si ottiene

$$\sum_{j=i+1}^{l(\mu')} \mu'_j = \sum_{j=1}^{\mu'_i} \mu_j - i$$

analogamente per λ' si ha

$$\sum_{j=i+1}^{l(\lambda')} \lambda'_j = \sum_{j=1}^{\lambda'_i} \lambda_j - i$$

e dunque si ha

$$\sum_{j=1}^{\mu'_i} \mu_j - i > \sum_{j=1}^{\lambda'_i} \lambda_j - i$$

da cui, poichè $\mu'_i < \lambda'_i$ e $\lambda_j - i \geq 0$ (per monotonia decrescente delle partizioni, in quanto $j \leq \lambda'_i$) si ha

$$\sum_{j=1}^{\mu'_i} \mu_j - i > \sum_{j=1}^{\mu'_i} \lambda_j - i.$$

Segue che

$$\sum_{j=1}^{\mu'_i} \mu_j > \sum_{j=1}^{\mu'_i} \lambda_j$$

e quindi che $\mu \not\leq \lambda$. □

Introduciamo inoltre una generalizzazione delle tabelle di Young che sarà utile in seguito:
se λ, μ sono due partizioni tali che $\mu \subseteq \lambda$, si può definire la tabella di Young

"storta" (skew) di forma λ/μ come una matrice T=$(T_{i,j})$, $T_{i,j} \in \mathbb{N}$, , con $1 \leq i \leq l(\lambda)$ e $\mu(i) \leq j \leq \lambda(i)$, in cui le righe sono debolmente crescenti e le colonne strettamente crescenti.
Esempio:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \boxed{3} & \boxed{4} \\ & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{5} & \\ & \boxed{3} & & & \\ \boxed{1} & \boxed{4} & & & \end{array}$$

è una tabella di Young di forma (5,4,2,2)/(3,1,1) e tipo $\alpha = (1, 2, 2, 2, 1)$

1.2 L'algebra delle funzioni simmetriche

Definizione 1.2.1. *Sia $x = (x_1, x_2, \dots)$ un insieme di indeterminate, sia $n \in \mathbb{N}$. Una funzione simmetrica di grado n su un anello commutativo unitario R è una serie formale di potenze*

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha$$

dove

- *$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ è una composizone debole di n (sequenza di interi non negativi la cui somma è n)*
- *$c_\alpha \in R$*
- *x^α è il monomio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$*

tale che per ogni σ permutazione degli interi positivi, si ha

$$f(x_1, x_2, \dots) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots)$$

Denotiamo con $\Lambda^n_{\mathbb{R}}$ l'insieme delle funzioni omogenee simmetriche di grado n a coefficienti in R. Una combinazione lineare a coefficienti in R di funzioni omogenee simmetriche di grado n è ancora una funzione omogenea simmetrica di grado n, quindi Λ^n_R è un R-modulo. In questo capitolo considereremo $R = \mathbb{Q}$, e ci limiteremo a scrivere Λ^n per $\Lambda^n_{\mathbb{Q}}$; in particolare poichè $\mathbb{Q}$ è un campo Λ^n è un $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale.
Definiamo inoltre

$$\Lambda = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \cdots$$

i cui elementi sono dunque somme finite di funzioni simmetriche omogenee (quindi in ognuno di essi compare solo un numero finito di gradi). Tale spazio è chiuso rispetto al prodotto di serie formali, poichè se $f_n \in \Lambda^n$ e $f_m \in \Lambda^m$ allora $f_n f_m \in \Lambda^{n+m}$, pertanto Λ ha anche una struttura di $\mathbb{Q}$-algebra. Notiamo che Λ è un'algebra commutativa e unitaria, oltre ad essere un'algebra graduata mediante la sua decomposizione come somma diretta dei Λ^n.

Poichè Λ e Λ^n hanno una struttura di spazio vettoriale, è naturale cercare come prima cosa di identificare delle basi.
La prima base che descriviamo è quella delle *funzioni simmetriche monomiali.*

Definizione 1.2.2. *Definiamo la funzione simmetrica monomiale $m_\lambda(x) \in \Lambda^n$, con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash n$, nel modo seguente:*

$$m_\lambda(x) = \sum_\alpha x^\alpha$$

dove $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ varia fra tutte le possibili permutazioni del vettore $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$.

Per esempio, come funzioni monomiali in $\Lambda^0, \Lambda^1, \Lambda^2$ abbiamo:

$$\begin{aligned} m_\emptyset &= 1, \\ m_1 &= \sum_i x_i, \\ m_2 &= \sum_i x_i^2, \\ m_{11} &= \sum_{i<j} x_i x_j. \end{aligned}$$

Poichè se in $f \in \Lambda^n$ appare un monomio x^α allora devono comparire in f anche tutte le sue permutazioni con stesso coefficiente, risulta evidente che $\{m_\lambda | \lambda \vdash n\}$ è una base per Λ^n. Da qui segue che

$$dim \Lambda^n = p(n).$$

Inoltre, l'insieme $\{m_\lambda | \lambda \in Par\}$ è una base per Λ.

Nelle prossime sezioni verranno presentate altre basi dello spazio delle funzioni simmetriche classiche. Vedremo che varie di queste basi $\{u_\lambda | \lambda \in Par\}$ avranno elementi scriitti nella forma

$$u_\lambda = u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} \dots .$$

Ogni volta che una base ha una scrittura del genere, diremo che è una base moltiplicativa. Se $\{u_\lambda | \lambda \in Par\}$ è una base moltiplicativa, risultano equivalenti i seguenti fatti:

- $\{u_\lambda | \lambda \in Par\}$ è una base di Λ come spazio vettoriale
- $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme di generatori di Λ come $\mathbb{Q}$-algebra algebricamente indipendenti (scriviamo $\Lambda = \mathbb{Q}[u_1, u_2, \dots])$

Nello studio delle funzioni simmetriche, a volte è utile ridursi a un numero finito di variabili, o sostituire (quando ciò ha senso) alle indeterminate degli elementi di $\mathbb{Q}$. Operazioni di questo tipo prendono il nome di *specializzazioni*. Piu precisamente,

Definizione 1.2.3. *Una specializzazione è un omorfismo di anelli (unitario) dall'anello delle funzioni simmetriche Λ ad una $\mathbb{Q}$-algebra commutativa e unitaria.*

Esempi importanti di specializzazione sono:

- *la riduzione del numero di variabili*: Sia $\Lambda_n = (\mathbb{Q}(x_1, x_2 \dots x_n)^{S_(n)}$, ovvero l'algebra dei polinomi simmetrici a coefficienti in $\mathbb{Q}$ in n variabili (ovvero i polinomi in n variabili invarianti rispetto a permutazioni di variabili: S_n agisce sui polinomi in modo che $\sigma(p(x_1, x_2 \dots x_n)) = p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)})$. Definiamo

  $$r_n : \Lambda \to \Lambda_n \quad ; \quad r_n(f) = f(x_1, x_2 \dots x_n, 0, 0 \dots)$$

  ovvero manda in 0 tutte le variabili x_i con $i > n$

  Osservazione 1.2.1. *Si ha che $r_n(m_\lambda) \neq 0$ se e solo se $l(\lambda) \leq n$. Inoltre $\{m_\lambda; l(\lambda) \leq n\}$ è una base di Λ_n*

  Dimostrazione. Dalla definizione della base monomiale e di r_n segue che $r_n(m_\lambda) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ dove $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ varia fra le permutazioni del vettore $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ tali che $\alpha_i = 0$ se $i > n$ (perchè in un qualsiasi monomio di m_λ avente come esponente una permutazione α che non soddisfi tale proprietà compare almeno un x_i con $i > n$, e dunque tale monomio scompare sotto l'azione di r_n), e una permutazione che soddisfa tali proprietà esiste se e solo se $l(\lambda) \leq n$, perchè permutare le componenti non cambia il numero di elementi non nulli di un vettore. Inoltre questa è ancora una base per Λ_n, perchè se $f \in \Lambda_n$ per ogni monomio che compare in f devono comparire anche tutte le sue permutazioni possibili in n variabili. □

- *sostituzione*: diciamo sostituzione di x_i con a_i la specializzazione ottenuta sostituendo ad ogni indeterminata x_i un elemento a_i della $\mathbb{Q}$-algebra che si sta considerando (ovviamente accertandosi che tale sostituzione sia

formalmente ben definita: non ha senso, ad esempio, sostituire ogni indeterminata con 1 in una funzione simmetrica monomiale).
Un esempio interessante è la *specializzazione principale*:

$$ps_n : \Lambda \to \mathbb{Q}[q]$$

tale che $ps_n(f) = f(1, q, q^2 \dots q^n, 0, 0, \dots)$.
In particolare, si può considerare una specializzazione ulteriore di tale omomorfismo ponendo q=1, ottenendo dunque

$$ps_n^1 : \Lambda \to \mathbb{Q}$$

tale che $ps_n(f) = f(1^n, 0, 0, \dots)$. A volte ci riferiremo a tale specializzazione ps_n^1 come *"valutazione costante"*.

1.3 Funzioni simmetriche elementari

Definizione 1.3.1. *Definiamo la funzione simmetrica elementare e_λ, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in$ Par nel modo seguente:*

$$e_n = m_{1^n} = \sum_{i_1 < \cdots < i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}, \quad n \geq 1 \quad (con\ e_0 = m_\emptyset = 1) \tag{1.1}$$

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots \tag{1.2}$$

Per esempio, come funzioni elementari in $\Lambda^0, \Lambda^1, \Lambda^2$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
&e_0 = m_\emptyset = 1, \\
&e_1 = m_1 = \sum_i x_i, \\
&e_2 = m_{11} = \sum_{i<j} x_i x_j, \\
&e_{11} = e_1 e_1 = (\sum_i x_i)(\sum_j x_j) = \sum_{i,j} x_i x_j = \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} 2 x_i x_j = m_2 + 2m_{11}.
\end{aligned}$$

Introduciamo ora delle notazioni che risulteranno utili in seguito. Se $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ è una matrice di interi con un numero finito di elementi diversi da zero,usiamo le seguenti notazloni per indicare la somma degli elementi rispettivamente sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna

$$\begin{aligned}
r_i &= \sum_j a_{ij} \\
c_j &= \sum_i a_{ij}.
\end{aligned}$$

Indichiamo con $Row(A)$ il vettore avente come componenti le somme degli elementi su ogni riga, con $Col(A)$ il vettore avente come componenti le somme degli elementi su ogni colonna:

$$\begin{aligned}
Row(A) &= (r_1, r_2, \ldots) \\
Col(A) &= (c_1, c_2, \ldots).
\end{aligned}$$

Se gli elementi della matrice sono tutti 0 o 1, diciamo che A è una (0,1)-matrice.

Proposizione 1.3.1. *Sia $\lambda \vdash n$, e sia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ una composizione debole di n. Allora il coefficiente $M_{\lambda\alpha}$ di x^α in e_λ, ovvero, detta μ la partizione di cui*

α è permutazione, il coefficiente di m_μ in

$$e_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda\mu} m_\mu$$

è uguale al numero di (0,1)-matrici $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ tali che $Row(A) = \lambda$ e $Col(A) = \mu$.

Dimostrazione. Consideriamo la matrice

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Per ottenere un monomio di $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots$ si devono scegliere λ_1 elementi dalla prima riga (che corrispodono al termine di e_{λ_1} scelto), λ_2 elementi dalla seconda riga, ecc. In particolare, sia il prodotto degli elementi scelti x^α; questo vuol dire che ogni x_i è stato scelto α_i volte. Dunque se si convertono in 1 gli elementi di X scelti e in 0 gli altri, si ottiene una (0,1)-matrice A con $Row(A) = \lambda$ e $Col(A) = \alpha$. Vi è dunque una corrispondenza biunivoca fra prodotti di termini in e_λ che abbiano come risultato x^α e (0,1)-matrici A tali che $Row(A) = \lambda$ e $Col(A) = \alpha$, da cui la tesi. □

Corollario 1.3.1. *Nelle notazioni della proposizione precedente, si ha $M_{\lambda\mu} = M_{\mu\lambda}$.*

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente, $M_{\lambda\mu}$ è uguale al numero di (0,1)-matrici A tali che $Row(A) = \lambda$, $Col(A) = \mu$. Ma se A soddisfa tali condizioni, allora A^t soddisfa $Row(A^t) = \mu$, $Col(A^t) = \lambda$, ovvero la trasposizione è una biezione tra un insieme di cardinalità $M_{\lambda\mu}$ e uno di cardinalità $M_{\mu\lambda}$. □

Diamo ora una riformulazione della Proposizione 1.3.1 in termini di funzioni generatrici. Si ha il seguente risultato:

Proposizione 1.3.2. *Si ha*

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda,\mu} M_{\lambda\mu} m_\lambda(x) m_\mu(y) = \sum_\lambda m_\lambda(x) e_\lambda(y)$$

Dimostrazione. Un monomio $x^\alpha y^\beta = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2}$ nell'espansione del prodotto $\prod_{i,j} (1 + x_i y_j)$ è ottenuto scegliendo una (0,1)-matrice A che soddisfi

$\prod_{i,j}(x_i y_j)^{a_{i,j}} = x^\alpha y^\beta$, dove dunque le entrate $a_{i,j} = 1$ di A corrispondono ai fattori in cui si è scelto $x_i y_j$, le altre (quelle uguali a 0) corrispondono ai fattori in cui si è scelto 1. Tuttavia si ha $\prod_{i,j}(x^i y^j)^{a_{i,j}} = x^{Row(A)} y^{Col(A)}$, dunque il coefficiente di $x^\alpha y^\beta$ in $\prod_{i,j}(1 + x_i y_j)$ è uguale al numero di (0,1)-matrici A che soddisfino $Row(A) = \alpha$ e $Col(A) = \beta$. Dunque poichè $M_{\lambda\mu}$ è proprio il il numero di (0,1)-matrici A che soddisfino $Row(A) = \lambda$ e $Col(A) = \mu$, la prima uguaglianza è provata. La seconda uguaglianza è una conseguenza della Proposizione 1.3.1. □

Il particolare interesse che stiamo dedicando alle funzioni simmetriche elementari è dovuto al fatto che $\{e_\lambda; \lambda \vdash n\}$ costituisce una base di Λ^n, come mostrato nel prossimo teorema, che è conosciuto come "Teorema fondamentale delle funzioni simmetriche".

Teorema 1.3.2. *Siano $\lambda, \mu \vdash n$. Se $M_{\lambda\mu} \neq 0$, allora $\mu \leq \lambda'$, e si ha $M_{\lambda\lambda'} = 1$. Da ciò segue che $\{e_\lambda | \lambda \vdash n\}$ è una base di Λ^n e quindi $\{e_\lambda | \lambda \in Par\}$ è una base di Λ. Equivalentemente, $\{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme di generatori di Λ (come $\mathbb{Q}$-algebra) algebricamente indipendenti.*

Dimostrazione. Sia $M_{\lambda\mu} \neq 0$. Allora esiste una $(0,1)$-matrice A con $Row(A) = \lambda$ e $Col(A) = \mu$. Si consideri ora $A' = (a'_{ij})_{1 \leq i,j}$ la matrice con Row(A')$=\lambda$ e gli 1 giustificati a sinistra, ovvero $a'_{ij} = 1$ se e solo se $1 \leq j \leq \lambda_i$. Considerando gli (a'_{ij}) uguali ad 1, si ottiene il diagramma di Ferrers di λ , per cui si ha che $Col(A') = \lambda'$. Inoltre dalla costruzione di A' si ha che $\sum_{i=1}^k Col(A)_i \leq \sum_{i=1}^k Col(A')_i$, ovvero (per la definizione di ordine di dominanza) $\mu = Col(A) \leq Col(A') = \lambda'$. Abbiamo dunque provato che se $M_{\lambda\mu} \neq 0$, allora $\mu \leq \lambda'$, che è equivalente a quanto enunciato nel teorema. Inoltre A' è l'unica (0,1) matrice tale che $Row(A') = \lambda$ e $Col(A') = \lambda'$, pertanto $M_{\lambda\lambda'} = 1$.
Da questo risultato possiamo provare che $\{e_\lambda | \lambda \vdash n\}$ è una base di Λ^n. Consideriamo $Par(n) = \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{p(n)}$ ordinato secondo una relazione che sia compatibile con l'ordine di dominanza (ovvero tale che $\lambda^i \leq \lambda^j$, dove $\leq$ indica l'ordine di dominanza, se $i \leq j$), ad esempio l'ordine lessicografico; per la Proposizione 1.1.1, si ha che considerando l'ordine inverso sulle partizioni coniugate anch'esso risulta compatibile con l'ordine di dominanza (ovvero $(\lambda^i)' \leq (\lambda^j)'$, dove $\leq$ indica l'ordine di dominanza, se $j \leq i$) . Allora la matrice $M = (M_{\lambda\mu})$, con gli elementi ordinati in modo che $M_{ij} = M_{\lambda^i(\lambda^j)'}$ (ovvero con ordine $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{p(n)}$ sulle righe, ordine $(\lambda^1)', (\lambda^2)', \ldots, (\lambda^{p(n)})'$) è triangolare superiore con tutti 1

sulla diagonale principale, pertanto è invertibile. Poichè questa è la matrice di cambiamento di base dalle funzioni elementari a quelle monomiali, segue la tesi. □

Osservazione 1.3.1. *Si ha che* $r_n(e_\lambda) \neq 0$ *se e solo se* $l(\lambda') \leq n$.
Inoltre $\{r_n(e_\lambda); l(\lambda') \leq n\}$ *è una base di* Λ_n.

Dimostrazione. Conseguenza diretta delle proprietà triangolari della matrice di cambiamento di base , ricordando $\{r_n(m_\lambda); l(\lambda) \leq n\}$ è una base di Λ_n dall'Osservazione 1.2.1. □

1.4 Funzioni simmetriche omogenee complete

Definizione 1.4.1. *Definiamo la funzione omogenea completa* h_λ, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in$ *Par nel modo seguente:*

$$h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = \sum_{i_1 \le \cdots \le i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}, \quad n \ge 1 \quad (\text{con } h_0 = m_\emptyset = 1) \tag{1.3}$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots \tag{1.4}$$

Per esempio, come funzioni complete in $\Lambda^0, \Lambda^1, \Lambda^2$ rispettivamente abbiamo:

$$\begin{aligned}
h_0 &= m_\emptyset = 1, \\
h_1 &= m_1 = \sum_i x_i, \\
h_2 &= m_2 + m_{11} = \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j, \\
h_{11} &= h_1 h_1 = (\sum_i x_i)(\sum_j x_j) = \sum_{i,j} x_i x_j = \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} 2 x_i x_j = m_2 + 2m_{11}.
\end{aligned}$$

Proposizione 1.4.1. *Sia* $\lambda \vdash n$*, e sia* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ *una composizione debole di* n*. Allora il coefficiente* $N_{\lambda\alpha}$ *di* x^α *in* h_λ*, ovvero, detta* μ *la partizione di cui* α *è permutazione, il coefficiente di* m_μ *in*

$$h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} N_{\lambda\mu} m_\mu$$

è uguale al numero di $\mathbb{N}$*-matrici infinite* $A = (a_{ij})_{i,j \ge 1}$ *tali che* $Row(A) = \lambda$ *e* $Col(A) = \mu$*.*

Dimostrazione. La prova è molto simile a quella della Proposizione 1.3.1. Consideriamo la matrice

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Ottenere un monomio di $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots$ equivale a scegliere un esponente per ogni elemento dalla prima riga in modo che la somma di questi sia λ_1 (il che corrisponde a scegliere un monomio in h_{λ_1},), un esponente per ogni elemento dalla seconda riga in modo che la somma di questi sia λ_2, ecc. In particolare se il prodotto dei monomi corrispondenti agli elementi scelti è x^α, questo vuol dire che per ogni x_i la somma degli esponenti scelti è α_i . Dunque sostituendo in X ad ogni x_i l'esponente corrispondente scelto, si ottiene una $\mathbb{N}$-matrice A con $Row(A) = \lambda$ e $Col(A) = \alpha$. Vi è dunque una corrispondenza biunivoca fra le possibili scelte di monomi nei fattori di h_λ che abbiano come risultato x^α e le $\mathbb{N}$-matrici A tali che $Row(A) = \lambda$ e $Col(A) = \alpha$, da cui la tesi. □

Corollario 1.4.1. *Nelle notazioni della proposizione precedente, si ha* $N_{\lambda\mu} = N_{\mu\lambda}$.

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente, $N_{\lambda\mu}$ è uguale al numero di $\mathbb{N}$-matrici A tali che $Row(A) = \lambda$, $Col(A) = \mu$. Ma se A soddisfa tali condizioni, allora A^t soddisfa $Row(A^t) = \mu$, $Col(A^t) = \lambda$, ovvero la trasposizione è una biezione tra un insieme di cardinalità $N_{\lambda\mu}$ e uno di cardinalità $N_{\mu\lambda}$. □

Come per le funzioni elementari, diamo ora una riformulzione della Proposizione 1.4.1 in termini di funzioni generatrici. Si ha il seguente risultato:

Proposizione 1.4.2. *Si ha*

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda,\mu} N_{\lambda\mu} m_\lambda(x) m_\mu(y) = \sum_\lambda h_\lambda(x) m_\lambda(y)$$

Dimostrazione. Si ha la seguente identità per il prodotto più a sinistra nell'uguaglianza;

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \prod_{i,j}\sum_k (x_i y_j)^k$$

Allora un monomio $x^\alpha y^\beta = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2}$ nell'espansione di tale prodotto è ottenuto scegliendo una $\mathbb{N}$-matrice A che soddisfi $\prod_{i,j}(x_i y_j)^{a_{ij}} = x^\alpha y^\beta$, dove dunque la componente a_{ij} di A corrisponde all'esponente scelto per $x_i y_j$. Inoltre si ha $\prod_{i,j}(x^i y^j)^{a_{ij}} = x^{Row(A)} y^{Col(A)}$, dunque il coefficiente di $x^\alpha y^\beta$ in $\prod_{i,j}(1 + x^i y^j)$ è uguale al numero di $\mathbb{N}$-matrici A che soddisfino $Row(A) = \alpha$ e $Col(A) = \beta$. Dunque poichè $N_{\lambda\mu}$ è proprio il il numero d $\mathbb{N}$-matrici A che soddisfino $Row(A) = \lambda$ e $Col(A) = \mu$, la prima uguaglianza è provata. La seconda uguaglianza è una conseguenza della Proposizione 1.4.1. □

Le funzioni simmetriche omogenee complete sono una base di Λ, tuttavia poichè la matrice di cambiamento di base con la monomiale non gode di particolari proprietà simmetriche non è facile fornire una prova combinatoria di questo fatto. Risulta invece molto più semplice dimostrarlo sfruttando il fatto che tali funzioni sono l'immagine della base delle funzioni elementari tramite l'automorfismo di Λ che sarà l'argomento del prossimo paragrafo.

1.5 L'automorfismo ω

Definizione 1.5.1. *Indichiamo con ω il seguente endomorfismo dell'algebra delle funzioni simmetriche:*

$$\omega : \Lambda \to \Lambda \quad \text{tale che } \omega(e_n) = h_n \text{ per ogni } n \geq 1.$$

Tale definizione è ben posta perchè $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ sono generatori algebricamente indipendenti di Λ.
Inoltre, poichè ω è un endomorfismo di algebre, quindi in particolare rispetta il prodotto, si ha

$$\omega(e_\lambda) = \omega(e_{\lambda_1})\omega(e_{\lambda_2})\dots\omega(e_{\lambda_{l(\lambda)}}) = h_{\lambda_1}h_{\lambda_2}\dots h_{\lambda_{l(\lambda)}} = h_\lambda.$$

Si noti inoltre che ω preserva il grado delle funzioni simmetriche, ovvero la restrizione di ω a Λ^n ha immagine in Λ^n.

Teorema 1.5.1. *L'endomorfismo ω è un'involuzione, ovvero $\omega^2 = I$.*
Segue in particolare che ω è invertibile, in quanto $\omega^{-1} = \omega$.

Dimostrazione. Siano

$$H(t) = \sum_{n\geq 0} h_n t^n \qquad\qquad E(t) = \sum_{n\geq 0} e_n t^n \tag{1.5}$$

serie di potenze formali a coefficienti in Λ.
Considerando la sostituzione di $(y_1, y_2, \dots)$ con $(t, 0, 0\dots)$ in ambo i membri delle uguaglianze nelle Proposizioni 1.3.2 e 1.4.2, si ottengono rispettivamente le identità:

$$H(t) = \prod_i (1 - x_i t)^{-1} \qquad\qquad E(t) = \prod_i (1 + x_i t). \tag{1.6}$$

Infatti basta osservare che la sostituzione fatta corrisponde di fatto alla riduzione ad una sola variabile, e l'immagine tramite tale specializzazione di qualsiasi funzione monomiale indiciazzata da una partizione λ con $l(\lambda) > 1$ è 0. Pertanto gli unici elemente della sommatoria che non si annullano sono quelli della forma $m_n(t, 0\dots)h_n(x) = t^n h_n(x)$.
Segue dunque che

$$1 = H(t)E(-t) = \sum_{n\geq 0} h_n t^n \sum_{n\geq 0} e_n(-t)^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e_k h_{n-k} t^n$$

Ovvero, dall'eguaglianza dei coefficienti di t^n nei due membri,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k h_{n-k} = 0 \tag{1.7}$$

per ogni $n \geq 1$.
In particolare, se per degli $f_i \in \Lambda$, $i \in \mathbb{N}$ con $f_0 = 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k h_{n-k} = 0, \tag{1.8}$$

allora $f_i = e_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Questa affermazione si può verificare per induzione, infatti $f_0 = 1 = e_0$, e se $f_k = e_k$ per ogni $k < n$, si ha

$$(-1)^n f_n h_0 = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f_k h_{n-k} = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e_k h_{n-k} = (-1)^n e_n h_0$$

in cui l'ultima uguaglianza è vera per (1.7); quindi si ha, ricordando che $h_0 = 1$, $f_n = e_n$ Dunque applicando ω a (1.8) si ha

$$0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \omega(e_k)\omega(h_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k h_k \omega(h_{n-k}) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \omega(h_k) h_{n-k}$$

ovvero $\omega(h_i)$ soddisfano (1.8), e quindi $\omega(h_i) = e_i$. □

Si è dunque mostrato, come era stato anticipato, che tale applicazione è un automorfismo che preserva il grado e manda le funzioni simmetriche elementari in quelle complete omogenee. Segue immediatamente il seguente risultato:

Teorema 1.5.2. *Le funzioni simmetriche omogenee di grado n* $\{h_\lambda; \lambda \vdash n\}$ *sono una base di* Λ^n*, e quindi* $\{h_\lambda; \lambda \in Par\}$ *sono una base di* Λ*. Equivalentemente,* $\{h_n; n \in \mathbb{N}\}$ *sono generatori di* Λ *algebricamente indipendenti.*

Si può considerare una variante di tale endomorfismo definita sui polinomi simmetrici in n variabili:

Definizione 1.5.2. *Indichiamo con* ω_n *l'endomorfismo dell'algebra dei polinomi simmetrici in n variabili*

$$\omega_n : \Lambda_n \longrightarrow \Lambda_n \quad \textit{tale che } \omega(r_n(e_m)) = r_n(h_m) \textit{ per ogni } 1 \leq m \leq n.$$

In particolare $\omega(r_n(e_\lambda)) = r_n(h_\lambda)$ *per ogni* λ *tale che* $l(\lambda') \leq n$.

Si osservi che il numero di variabili non riveste un ruolo fondamentale nel Teorema 1.5.1. Pertanto, sostituendo alle funzioni simmetriche che compaiono la loro immagine tramite r_n, si può riprodurre il Teorema 1.5.1 per ω_n. Quindi ω_n è un involuzione di Λ_n, e in particolare segue che $\{h_\lambda; \lambda' \leq n\}$ è una base per Λ_n (perchè immagine tramite automorfismo della base $\{e_\lambda; \lambda' \leq n\}$) ; osserviamo però che, contrariamente a quanto accade per la base delle funzioni elementari, si può avere $r_n(h_\lambda) \neq 0$ anche se $l(\lambda') \geq n$.

1.6 Funzioni simmetriche somme di potenze

Definizione 1.6.1. *Definiamo la funzione somma di potenze* p_λ*,* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in Par$ *nel modo seguente:*

$$p_n = m_n = \sum_i x_i^n \quad n \geq 1 \quad (\textit{con } p_0 = m_\emptyset = 1), \tag{1.9}$$

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots . \tag{1.10}$$

Per esempio, come funzioni somme di potenze in $\Lambda^0, \Lambda^1, \Lambda^2$ rispettivamente abbiamo:

$$\begin{aligned} p_0 &= m_\emptyset = 1, \\ p_1 &= m_1 = \sum_i x_i, \\ p_2 &= m_2 = \sum_i x_i^2, \\ p_{11} &= p_1 p_1 = (\sum_i x_i)(\sum_j x_j) = \sum_{i,j} x_i x_j = \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} 2x_i x_j = m_2 + 2m_{11}. \end{aligned}$$

Proposizione 1.6.1. *Sia* $\lambda \vdash n$*, e sia* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ *una composizione debole di n. Indichiamo con* $R_{\lambda\alpha}$ *il coefficiente di* x^α *in* p_λ*, ovvero, detta* μ *la partizione di cui* α *è permutazione, il coefficiente di* m_μ *in*

$$p_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} R_{\lambda\mu} m_\mu.$$

Detto $k= l(\mu)$ *,* $l=l(\lambda)$*,* $R_{\lambda\mu}$ *è uguale al numero di partizioni ordinate in k parti* $(B_1 \dots B_k)$ *dell'insieme* $\{1, 2, \dots, l\}$ *che soddisfino*

$$\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i \quad 1 \leq j \leq k$$

Dimostrazione. Per ottenere un monomio $x^\mu = x^{\mu_1} x^{\mu_2} \dots x^{\mu_k}$ basta scegliere un termine $x_{i_j}^{\lambda_j}$ in ogni fattore di $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_l}$ in modo tale che $\prod_j x_{i_j}^{\lambda_j} = x^\mu$. Questo, ponendo $B_r = \{j; i_j = r\}$ corrisponde a scegliere una partizione di $\{1, 2, \dots l\}$ che soddisfi la tesi. □

Teorema 1.6.1. *Siano* $\lambda, \mu \vdash n$*. Si ha che se* $R_{\lambda\mu} \neq 0$*, allora* $\lambda \leq \mu$*, e si ha* $R_{\lambda\lambda} = \prod_i m_i!$*.*

Da ciò segue che $\{p_\lambda | \lambda \vdash n\}$ è una base di Λ^n e quindi $\{p_\lambda | \lambda \in Par\}$ è una base di Λ. Equivalentemente, $\{p_n | n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme di generatori di Λ (come $\mathbb{Q}$-algebra) algebricamente indipendenti.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 1.6.1 si ha che se $R_{\lambda\mu} \neq 0$ esiste almeno una partizione $(B_1 \ldots B_k)$ dell'insieme $\{1, 2, \ldots, l\}$ (con $k = l(\mu)$,$l = l(\lambda)$). Allora per ogni $1 \leq n \leq l$ si considerino i blocchi distinti $(B_{i_1} \ldots B_{i_r})$ tali che $B_{i_j} \cap \{1, 2 \ldots, n\} \neq \emptyset$ per ogni $1 \leq j \leq r$; dunque si ha $r \leq n$ e $\{\lambda_1 \ldots \lambda_r\} \subset \{\lambda_i ; i \in \bigcup_{h_1}^r B_{i_h}\}$. Inoltre per costruzione della partizione considerata, si ha $\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i$ per $1 \leq j \leq k$, quindi valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \geq \sum_{j=1}^{r} m_{i_j} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{h \in B_{i_j}} \lambda_h \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j,$$

ovvero $\mu \geq \lambda$.
Inoltre se $\mu = \lambda$, le uniche partizioni che soddisfano $\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i$ sono quelle costruite in modo che $B_i = j$ con $\lambda_j = \mu_i$, pertanto per ogni $1 \leq i \leq k$ ci sono m_{μ_i} modi per scegliere ogni B_i, e quindi possiamo scrivere (ricordando che 0!=1) $R_{\lambda\lambda} = \prod_i m_i!$ □

Presentiamo ora alcune identità di serie generatrici che stabiliscono delle relazioni fra le basi $\{p_\lambda\}$,$\{e_\lambda\}$.$\{h_\lambda\}$. A tal fine introduciamo la notazione

$$z_\lambda = \prod_i i^{m_i} m_i!$$

Detta K_λ la classe di coniugio in S_n $(n = |\lambda|)$ costituita dalle permutazioni che si fattorizzano in cicli disgiunti di lunghezza $m_1, m_2 \ldots,$ z_λ è la cardinalià del centralizzatore di una delle permutazioni appartenenti a K_λ .

Proposizione 1.6.2. *Valgono le seguenti uguaglianze:*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = exp \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y) = \sum_{\lambda \in Par} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y), \tag{1.11}$$

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = exp \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y) = \sum_{\lambda \in Par} (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y). \tag{1.12}$$

Dimostrazione. Proviamo (1.11)

$$log(\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}) = \sum_{i,j} -log(1-x_iy_j) = \sum_{i,j}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x_i^n y_j^n$$
$$= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_i x_i^n \sum_j y_j^n = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y)$$

dunque

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = exp\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y)$$

da cui segue che

$$exp\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y) = \prod_{n\geq 0} exp(\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y)) = \prod_{n\geq 1}\sum_{m_n\geq 1}\frac{1}{m_n!n^{m_n}}p_n^{m_n}(x)p_n^{m_n}(y)$$
$$= \sum_{\lambda\in Par} z_\lambda^{-1}p_\lambda(x)p_\lambda(y),$$

dove l'ultima uguaglianza vale perchè p_λ è una base moltiplicativa, e la scelta dei fattori per ogni addendo nell'espressione più a sinistra equivale alla scelta di una partizione $\lambda = \langle 1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots\rangle$.
La prova di (1.12) è sostanzialmente analoga alla precedente:

$$log\prod_{i,j}(1+x_iy_j) = \sum_{i,j} log(1+x_iy_j) = \sum_{i,j}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x_i^n y_j^n = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y)$$

da cui

$$\prod_{i,j}(1+x_iy_j) = exp\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y)$$

e, come nel caso precedente,

$$exp\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y) = \sum_{n\geq 1}\sum_{m_n\geq 1}(-1)^{(n-1)m_n}\frac{1}{m_n!n^{m_n}}p_n^{m_n}(x)p_n^{m_n}(y)$$
$$= \sum_{\lambda\in Par}(-1)^{|\lambda|-l(\lambda)}z_\lambda^{-1}p_\lambda(x)p_\lambda(y),$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato che
$\sum_i (i-1)m_i = \sum_i (m_i i) - \sum_i m_i =\mid\lambda\mid - l(\lambda)$. □

Corollario 1.6.2. *Si ha*

$$h_n = \sum_{\lambda\vdash n} z_\lambda^{-1}p_\lambda, \tag{1.13}$$
$$e_n = \sum_{\lambda\vdash n}(-1)^{|\lambda|-l(\lambda)}z_\lambda^{-1}p_\lambda. \tag{1.14}$$

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente e dalla proposizione 1.4.2, si ha

$$\sum_{\lambda \in Par} h_\lambda(x) m_\lambda(y) = \sum_{\lambda \in Par} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y).$$

Specializzando tale uguaglianza per $y = (t, 0, 0 \dots)$ si ottiene

$$\sum_{n \geq 0} h_n t^n = \sum_{\lambda \in Par} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) t^{|\lambda|} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda t^n.$$

Eguagliando i coefficienti di t^n nei due membri risulta 1.13.
L'equazione (1.14) si dimostra in modo analogo considerando la Proposizione 1.3.2. □

Da tali identità possiamo dedurre il comportamento della base $\{p_\lambda\}$ quando si riducono le variabili:

Proposizione 1.6.3. *Si ha che $\{r_n(p_\lambda); l(\lambda') \leq n\}$ è una base di Λ_n.*

Dimostrazione. Basta mostrare che $\{r_n(p_\lambda); l(\lambda') \leq n\}$ è un insieme di generatori per Λ_n (la lineare indipendenza segue osservando la dimensione dello spazio, indicata ad esempio nell'osservazione 1.2.1) , ovvero, per moltiplicatività della base, che $\{r_n(p_s); 1 \leq s \leq n\}$ sono generatori algebrici. Infatti $l(\lambda') \leq n$ se e solo se $\lambda_1 \leq n$, quindi se e solo $\lambda_i \leq n$ per ogni i, per monotonia delle partizioni. Poichè sappiamo che $\{r_n(e_\lambda); l(\lambda') \leq n\}$ è una base di Λ_n, e quindi $\Lambda_n = \mathbb{Q}[e_1 \dots e_n]$, basta mostrare che $e_i \in \mathbb{Q}[p_1 \dots p_n]$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Ma questo è vero per (1.14), in quanto se $\lambda \vdash n$ allora $\lambda_i \leq n$ per ogni i, il che vuol dire che nell'espressione di ogni e_s compaiono solo p_j con $1 \leq j \leq s$. □

Le serie generatrici esposte nella Proposizione 1.6.2 ci permettono anche di comprendere come agisce l'automorfismo ω sulle somme di potenze.

Proposizione 1.6.4. *Gli elementi di $\{p_\lambda, \lambda \in Par\}$ sono autovettori per ω. In particolare,*

$$\omega(p_\lambda) = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} p_\lambda \tag{1.15}$$

Dimostrazione. Si consideri ω come agente sull'insieme di variabili $y = (y_1, y_2 \dots)$ (rispetto a tale azione, le variabili $x = (x_1, x_2 \dots)$ si comportano come scalari). Allora dalle proposizioni 1.4.2, 1.3.2 e dal Teorema 1.5.1 seguono le seguenti identità:

$$\omega \sum_{\lambda \in Par} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y) = \sum_{\lambda \in Par} \omega(h_\lambda(y)) m_\lambda(x) = \sum_{\lambda \in Par} e_\lambda(y) m_\lambda(x)$$
$$= \sum_{\lambda \in Par} (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y).$$

Dalla lineare indipendenza dei $p_\lambda(x)$, eguagliando i coefficienti risulta dunque $\omega(p_\lambda) = (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} p_\lambda$. □

Si osservi che tale risultato resta vero per ω_n e $\{r_n(p_\lambda); l(\lambda') \leq n\}$; infatti l'espressione di $r_n(p_\lambda)$ rispetto alla base $\{r_n(e_\lambda); l(\lambda') \leq n\}$ in Λ_n è la stessa di p_λ rispetto ad $\{e_\lambda\}$ in Λ, e si ha che $r_n(\omega(e_\lambda)) = r_n(h_\lambda) = \omega_n(r_n(e_\lambda))$. Questo non è più vero nel caso di $r_n(p_\lambda)$ con $l(\lambda') \geq n$: il discorso non è più valido perchè alcuni degli e_λ che compaiono nell'espressione di p_λ si azzerano sotto l'azione di r_n , cosa che può non accadere per gli h_λ corrispondenti, pertanto non c'è più corrisponenza fra le due scritture.

1.7 Prodotto scalare

Si può aggiungere un ulteriore struttura sull'algebra delle funzioni simmetriche introducendo un prodotto scalare (i.e. una forma bilineare simmetrica definita positiva), definita come segue

Definizione 1.7.1. *Indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forma bilineare*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Q} \quad ; \quad \langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

(dove $\delta_{\lambda\mu}$ è il delta di Kroneker, cioè $\delta_{\lambda\mu} = 1$ se $\lambda = \mu$, 0 altrimenti).
In altre parole,indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forma bilineare rispetto alla quale base monomiale e completa sono basi duali.

Tale definizione è ben posta in quanto $\{m_\lambda\}, \{h_\lambda\}$ sono basi di Λ, quindi è univocamente determinata l'estensione per linearità:
se $f = \sum_\lambda a_\lambda m_\lambda$ e $g = \sum_\mu b_\mu h_\mu$, si ha $\langle f, g \rangle = \sum_{\lambda,\mu} a_\lambda b_\mu \langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \sum_\lambda a_\lambda b_\lambda$.

Proposizione 1.7.1. *La forma bilineare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è simmetrica, cioè. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.*

Dimostrazione. Per bilinearità della forma basta provare la simmetria su una base di Λ; si consideri la base $\{h_\lambda\}$. Ricordando dalla proposizione 1.4.1 che $h_\lambda = \sum_\mu N_{\lambda\mu} m_\mu$, si ottiene

$$\langle h_\lambda, h_\mu \rangle = \sum_\eta N_{\lambda\eta} \langle m_\eta, h_\mu \rangle = N_{\lambda\mu}.$$

Allora poichè si ha $N_{\lambda\mu} = N_{\mu\lambda}$, segue la simmetria di $\langle \cdot, \cdot \rangle$. □

Forniamo ora un criterio per verificare la dualità di due basi, che in particolare varie volte si rivela utile per provare l'ortogonalità di una base; presenteremo un'applicazione di questo tipo appena dopo il lemma.

Lemma 1.7.1. *Siano, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\{u_\lambda\}_{\lambda \in Par(n)}$ e $\{v_\lambda\}_{\lambda \in Par(n)}$ due basi di Λ^n. Si ha che $\{u_\lambda\}_{\lambda \in Par}$ e $\{v_\lambda\}_{\lambda \in Par}$ sono basi duali di Λ se e solo se*

$$\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Dimostrazione. Siano

$$u_\lambda = \sum_\rho a_{\lambda\rho} m_\rho \qquad\qquad v_\mu = \sum_\rho b_{\mu\rho} h_\rho. \tag{1.16}$$

Si ha che $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ sono basi duali se e solo se

$$\sum_\rho a_{\lambda\rho} b_{\mu\rho} = \delta_{\lambda\mu}. \tag{1.17}$$

Inoltre da 1.4.2 si ha che la condizione

$$\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$$

è equivalente a

$$\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \sum_\lambda m_\lambda(x) h_\lambda(y);$$

espandendo nella scrittura di $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ rispetto alle basi monomiale e completa rispettivamente si ha quindi

$$\sum_{\rho\mu} (\sum_\lambda a_{\lambda\rho} b_{\lambda\mu}) m_\rho(x) h_\mu(y) = \sum_\lambda (\sum_\rho a_{\lambda\rho} m_\rho(x)) (\sum_\mu b_{\lambda\mu} h_\mu(y)) = \sum_\lambda h_\lambda(x) m_\lambda(y)$$

per indipendenza lineare delle basi la tale scrittura equivale a

$$\sum_\lambda a_{\lambda\rho} b_{\lambda\mu} = \delta_{\rho\mu}$$

il che, come espresso in (2.2), vuol dire che $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ sono basi duali. □

Proposizione 1.7.2. *La base $\{p_\lambda\}$ è una base ortogonale di Λ. In particolare,*

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$$

Dimostrazione. dalla Proposizione 1.6.2 e dal Lemma 1.7.1 segue immediatamente che $\{p_\lambda\}$ e $\{\frac{p_\lambda}{z_\lambda}\}$ sono basi duali, il che è equivalente alla tesi. □

Dato che ora abbiamo trovato una base ortogonale, risulta facile mostrare varie proprietà della forma bilineare $\langle \cdot, \cdot \rangle$: per prima cosa dimostriamo che questa è effettivamente un prodotto scalare, ovvero che è definita positiva.

Proposizione 1.7.3. *Si ha che $\langle f, f \rangle > 0$ per ogni $f \in \Lambda$.*

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente si ha che $\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda > 0$, e che le funzioni p_λ costituiscono una base ortogonale di Λ. Allora se $f \in \Lambda$, scrivendo $f = \sum_\lambda a_\lambda p_\lambda$ si ha

$$\langle f, f \rangle = \sum_\lambda a_\lambda^2 p_\lambda > 0$$

□

Notiamo inoltre che l'endomorfismo ω, definito nella definizione 1.5.1, gode di notevoli proprietà rispetto al prodotto scalare.

Proposizione 1.7.4. *L'endomorfismo ω è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare, i.e. $\langle \omega f, g \rangle = \langle f, \omega g \rangle$. Inoltre è isometria, ovvero $\langle \omega f, \omega g \rangle = \langle f, g \rangle$.*

Dimostrazione. Per bilinearità della forma e linearità di ω è sufficiente lavorare con una base. Ricordiamo dalla proposizione 1.15 che le funzioni simmetriche somme di potenze sono autovettori per ω, e in particolare $\omega(p_\lambda) = (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} p_\lambda$. Si ha dunque

$$\begin{aligned}\langle \omega p_\lambda, p_\mu \rangle = (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} \langle p_\lambda, p_\mu \rangle = (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} z_\lambda \delta_{\lambda\mu} = (-1)^{|\mu|-l(\mu)} z_\mu \delta_{\lambda\mu} \\ = (-1)^{|\mu|-l(\mu)} \langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \langle p_\lambda, \omega p_\mu \rangle.\end{aligned}$$

Sfruttando tale risultato e il fatto che ω è un'involuzione (dal Teorema 1.5.1), si ottiene

$$\langle f, g \rangle = \langle \omega\omega f, g \rangle = \langle \omega f, \omega g \rangle$$

ovvero ω è isometria. □

1.8 Funzioni di Schur

La base presentata in questa sezione, la base delle "funzioni di Schur", è una base che gode di notevoli proprietà algebriche e combinatorie. Esistono varie definizioni equivalenti per questa base, qui se ne presenteranno due: prima una definizione "combinatoria" in termini della base monomiale e in seguito, dopo aver sviluppato parte della teoria, una "classica" come quoziente di determinanti. Inoltre l'argomento principale del prossimo capitolo sarà una generalizzazione di questa base in un ambiente più ampio (il significato di questa frase verrà chiarificato in seguito), le cosiddette funzioni di Jack.
Per definire le funzioni di Schur, ricordiamo che data una $SSYT$ (Definizione 1.1.4) di una certa forma $\lambda \in Par$ (oppure di forma "storta" λ/μ, con $\mu \subset \lambda$ entrambe partizioni) , con $tipo(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ si intende il vettore avente come componente i-esima α_i il numero di celle di T che sono riempite dal numero i. Data T una $SSYT$ di tipo α, scriviamo x^T per indicare il monomio $x^{tipo(T)} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$.

Definizione 1.8.1. *Per ogni $\mu \subset \lambda$ partizioni, definiamo la funzione di Schur storta $s_{\lambda/\mu}$ nelle variabili $x = (x_1, x_2, \dots)$ come la serie formale*

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T$$

in cui la somma è in $T \in \{SSYT \text{ di forma } \lambda/\mu\}$.
Se $\mu = \emptyset$, si ha $\lambda/\mu = \lambda$, e diciamo s_λ la funzione di Schur di forma λ.

Ad esempio: scriviamo le funzioni di Schur in 3 variabili (quindi il numero più grande che compare nelle $SSYT$ considerate è al massimo 3) associate a $\lambda \in Par(3)$:

- per $\lambda = (1, 1, 1)$ si ha che l'unica $SSYT$ di forma λ è:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}$$

  che ha tipo (1,1,1), quindi

$$s_{(1,1,1)} = x_1 x_2 x_3 = m_{(1,1,1)};$$

- per $\lambda = (2, 1)$ si ha che le $SSYT$ di forma λ sono:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

che hanno tipo rispettivamente
(2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,1,1), (1,1,1), (1,0,2), (0,2,1) ,(0,1,2), quindi

$$s_{(2,1)} = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 = 2m_{(1,1,1)} + m_{(2,1)};$$

- per $\lambda = (3)$ si ha che l3 SSYT di forma λ sono:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&3\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline\end{array}$$

  che hanno tipo rispettivamente
  (3,0,0), (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,1,1), (1,0,2), (0,3,0), (0,2,1), (0,1,2), (0,0,3), quindi

$$s_3 = x_1^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^3+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^3 = m_{(3)}+m_{(2,1)}+m_{(1,1,1)}.$$

In questi esempi possiamo osservare che le funzioni di Schur descritte sono effettivamente funzioni simmetriche, ma in generale tale proprietà non è evidente dalla definizione precedente: questo è il contenuto del prossimo teorema.

Teorema 1.8.1. *Per ogni $\mu \subset \lambda$ partizioni, la funzione di Schur (storta) $s_{\lambda/\mu}$ è una funzione simmetrica.*

Dimostrazione. Poichè ogni permutazione si scrive come composizione di trasposizioni del tipo $(i, i+1)$, basta mostrare che $s_{\lambda/\mu}$ è invariante scambiando x_i e x_{i+1}: vogliamo provare quindi che esiste una biezione fra le *SSYT* di forma λ/μ e tipo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots)$ e quelle di stessa forma e tipo $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots)$.
Per costruire tale biezione, data T *SSYT* di forma λ/μ e tipo
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots)$, consideriamo soltanto le colonne in cui compare i oppure $i+1$, ma non entrambi. In ogni riga di tale porzione della *SSYT*, vi saranno r celle riempite con i ed s celle riempite con $i+1$. Se $s > r$, si sostituiscono i primi $(s-r)$ $i+1$ con $(s-r)$ i, al contrario se $s < r$ si sostituiscono gli ultimi $(r-s)$ i con $(r-s)$ $i+1$ (se $r = s$ non si compie alcuna operazione). Quest'operazione genera ancora una *SSYT*, perchè avendo isolato colonne in cui

non compaiono sia i che $i+1$ non viene violata la monotonia stretta delle colonne, e la *SSYT* che viene così generata è di tipo $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots)$. L'operazione descritta è involutiva, e pertanto è una biezione. $\square$

Dunque, poichè $s_{\lambda/\mu} \in \Lambda$, questa si espande nella base monomiale.

Proposizione 1.8.1. *Siano $\rho \subset \lambda$ partizioni tali che $|\lambda/\rho| = |\lambda| - |\rho| = n$ e sia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ una composizione debole di n. Indichiamo con $K_{\lambda/\rho,\alpha}$ il coefficiente di x^α in s_λ, ovvero, detta μ la partizione di cui α è permutazione, il coefficiente di m_μ in*

$$s_{\lambda/\rho} = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda/\rho,\mu} m_\mu$$

$K_{\lambda/\rho,\mu}$ si dice numero di Kostka storto (semplicemente numero di Kostka se $\rho = \emptyset$) ed è il numero di SSYT di forma λ/ρ e tipo μ.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione data di funzioni di Schur e dalla simmetria di queste. $\square$

Osserviamo che in particolare $K_{\lambda,(1^n)}$, con $\lambda \vdash n$ è il numero di *SYT* di forma λ.

Proposizione 1.8.2. *Siano $\lambda, \mu \vdash n$. Si ha che se $K_{\lambda,\mu} \neq 0$ allora $\mu \leq \lambda$, e inoltre $K_{\lambda\lambda} = 1$. Da ciò segue che $\{s_\lambda; \lambda \vdash n\}$ è base per Λ^n, e quindi che $\{s_\lambda; \lambda \in Par\}$ è base per Λ.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 1.8.1, si ha che se $K_{\lambda,\mu} \neq 0$ deve esistere almeno una *SSYTT* di forma λ e tipo μ. Osserviamo che le celle in T in cui compare un numero j si trovano tutte nelle prime j righe, perchè le colonne di T sono strettamente crescenti (ed è impossibile costruire una catena di interi positivi $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k = j$ di lunghezza maggiore di j). Quindi il numero di elementi uguali a $1, 2, \dots j$ che compaiono in T è minore o uguale del numero di celle che si trovano nelle prime j righe, ovvero $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_j \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j$, e quindi $\mu \leq \lambda$. Inoltre se $\mu = \lambda$ l'unica *SSYT* possibile è quella che ha tutte le celle della riga j-esima riempite con j, da cui $K_{\lambda\lambda} = 1$. $\square$

La proposizione precedente dunque prova che le funzioni di Schur indicizzate da partizioni di n formano una base per Λ^n: in particolare, afferma che la matrice di cambiamento di base dalle funzioni di Schur alle funzioni monomiali è unitriangolare superiore, ovvero che le funzioni di Schur hanno un'espressione nella base monomiale del tipo

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu.$$

In particolare, osservando che le partizioni di n rispetto all'ordine di dominanza hanno un minimo, ovvero la partizone (1^n), si deduce il caso particolare

$$s_{1^n} = m_{1_n} = e_n.$$

Inoltre da tale struttura unitriangolare segue che le funzioni di Schur hanno un comportamento particolarmente intuitivo, simile a quello delle monomiali, quando si lavora con un numero di variabili ridotte, come esplicitato nella seguente osservazione.

Osservazione 1.8.1. *Si ha che $r_n(s_\lambda) \neq 0$ se e solo se $l(\lambda) \leq n$. Inoltre $\{r_n(s_\lambda), l(\lambda) \leq n\}$ è base per Λ_n.*

Dimostrazione. Tali proprietà sono conseguenze dirette della struttura triangolare della matrice di cambiamento di base. □

Vogliamo ora studiare alcune proprietà delle funzioni di Schur, quali le espressioni rispetto alle altre basi finora introdotte e il comportamento rispetto al prodotto scalare e all'endomorfismo ω. Per farlo introduciamo il seguente risultato, che ha conseguenze fondamentali in tale ambito.

Teorema 1.8.2. *Esiste una biezione fra le $\mathbb{N}$-matrici infinte con un numero finito di elementi non nulli e le coppie ordinate di SSYT di stessa forma. In particolare se la $\mathbb{N}$-matrice A è posta in corrispondenza con la coppia di SSYT di stessa forma (P, Q), si ha $tipo(P) = Col(A)$ e $tipo(Q) = Row(A)$.*

Dimostrazione. Diamo soltanto una traccia.
Si può procedere a una dimostrazione di tipo algoritmico di tale risultato. Per descrivere l'algoritmo che costituisce la biezione, che prende il nome di algoritmo RSK, definiamo l'operazione di *inserimento* di un numero k in una *SSYT* T nel modo seguente: il numero k viene inserito nella prima riga di T al posto del "primo" elemento maggiore di k (ovvero l'elemento più a sinistra nella prima riga che sia maggiore di k), il quale viene "sbalzato via"; se un tale elemento non esiste, ovvero nella prima riga compaiono solo numeri minori o uguali di k,

si appone semplicente k alla fine della prima riga (aggiungendo quindi una cella) e l'algoritmo termina, altrimenti si prosegue "inserendo", con le stesse regole, il numero che era stato sbalzato via da k nella riga successiva. Si dimostra che comunque siano dati k e T, il risultato dell'inserimento di k in T è ancora una $SSYT$; si prova inoltre che tale operazione si può invertire, ovvero conoscendo la $SSYT$ finale e qual è l'ultimo numero (quello sulla riga di indice maggiore) ad essere stato modiicato dall'operazione di inserimento, si può risalire alla SSYT originale e al numero inserito.
Descriviamo ora l'algoritmo che permentte di costruire a partire da una $\mathbb{N}$-matrice A la coppia di $SSYT$ (P,Q) di stessa forma.
Sia $A = (a_{ij})$ una $\mathbb{N}$-matrice infinita con finiti elementi non nulli; esisteranno dunque un n e un m tali che $a_{ij} = 0$ per $i > n$ e $j > m$, e possiamo pensare quindi A come una matrice $n \times m$. Alla matrice A si può associare univocamente una matrice di 2 righe

$$\omega_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_k \\ j_1 & j_2 \dots & j_k \end{pmatrix}$$

nel modo seguente: per ogni elemeto (a_{ij}) in A, la colonna (i,j) compare in ω_A esattamente (a_{ij}) volte, e gli elemti di ω_A sono ordinati in modo che $i_h \leq i_{h+1}$ e se $i_h = i_{h+1}$ allora $j_h \leq j_{h+1}$ (ovvero si può pensare di scorrere A per righe da sinistra verso destra). A questo punto da ω_A si costruisce una coppia di $SSYT$ (P,Q) con il seguente metodo; iniziando da $(P(0), Q(0)) = (\emptyset, \emptyset)$ si costruiscono ricorsivamente:

- $P(h+1)$, che si ottiene inserendo j_{h+1} in $P(h)$,
- $Q(h+1)$, che si ottiene da $Q(h)$ aggiungendo una cella in modo che $Q(h+1)$ abbia la stessa forma di $P(h+1)$, in particolare tale cella viene posta alla fine della riga a cui deve essere aggiunta, e riempendo tale cella con i_{h+1},

dopodichè si definisce $(P,Q) = (P(k), Q(k))$. Si dimostra che effettivamente P e Q sono $SSYT$, e si ha $tipo(P) = Col(A)$, $tipo(Q) = Row(A)$ per come si è costruito ω_A. Inoltre poichè Q "registra" l'ordine degli inserimenti in P, tale algoritmo è invertibile, ovvero è possibile risalire a ω_A, e conseguentemente ad A, a partire dalla coppia si $SSYT$ (P,Q). □

Prima di analizzare le conseguenze del teorema precedente per le funzioni di Schur, presentiamo un esempio per rendere più chiaro l'effettivo comportamento

dell'algoritmo RSK.
Esempio:
Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora si ha

$$\omega_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e la costruzione iterativa di $P(i)$, $Q(i)$ è la seguente (a sinistra sulla riga i-esima si ha $P(i)$, a destra $Q(i)$):

$$\begin{ytableau} 2 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}$$

$$\begin{ytableau} 1 \\ 2 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 \\ 2 \end{ytableau}$$

$$\begin{ytableau} 1 & 1 \\ 2 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 2 \end{ytableau}$$

$$\begin{ytableau} 1 & 1 & 3 \\ 2 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 2 & 2 \\ 2 \end{ytableau}$$

$$\begin{ytableau} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{ytableau}$$

$$\begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{ytableau}$$

Dove l'ultima coppia di SSYT rappresenta il risultato finale dell'algoritmo RSK. Osserviamo inoltre che $Col(A) = (2,3,1) = tipo(P)$, $Row(A) = (1,3,2) = tipo(Q)$.

Dall'esistenza di questo algortimo segue direttamente il prossimo risultato per le funzioni di Schur.

Teorema 1.8.3. *Vale la seguente identità, nota come identità di Cauchy:*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x) s_\lambda(y).$$

Dimostrazione. Il coefficiente del termine $x^\alpha y^\beta$ nell'espansione del prodotto a sinistra è dato dal numero delle $\mathbb{N}$-matrici A che soddisfano $Row(A) = \alpha$, $Col(A) = \beta$ (come visto nella Proposizione 1.4.2), mentre il coefficiente di $x^\alpha y^\beta$

nella sommatoria a destra è dato dal numero di coppie di *SSYT* (P, Q) che soddisfino $tipo(P) = \alpha$, $tipo(Q) = \beta$. La trasposizione fornisce una biezione fra le $\mathbb{N}$-matrici A che verificano $Row(A) = \alpha$, $Col(A) = \beta$ e quelle che verificano $Col(A) = \alpha$, $Row(A) = \beta$, e queste sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di *SSYT* (P, Q) che soddisfano $tipo(P) = \alpha$, $tipo(Q) = \beta$ tramite l'algoritmo RSK. Pertanto il coefficiente di ogni monomio $x^\alpha y^\beta$ è uguale nelle due espressioni. □

Corollario 1.8.4. *Le funzioni di Schur formano una base di Λ ortonormale.*

Dimostrazione. Dal teorema precedente e dal Lemma 1.7.1 segue che la base di Schur è la base duale di se stessa, ovvero $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$. □

Dunque le funzioni di Schur sono una base ortonormale dello spazio delle funzioni simmetriche. Inoltre tale base è unitriangolare rispetto alla base monomiale, e da ciò segue che le funzioni di Schur in cui compaiono soltanto monomi di lunghezza ≤ n (i.e. le funzioni s_λ con $l(\lambda) \leq n$) ridotte ad n variabili costituiscono ancora una base per lo spazio dei polinomi simmetrici in n variabili (osservazione 1.8.1). Possiamo dunque definire un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ in Λ_n richiedendo che $\{s_\lambda; l(\lambda) \leq n\}$ sia ancora una base ortonormale di Λ_n, ovvero

$$\langle r_n(s_\lambda), r_n(s_\mu) \rangle = \delta_{\lambda\mu} \quad \text{per } l(\lambda), l(\mu) \leq n.$$

Dalle proprietà ortonormali della base di Schur segue inoltre il seguente risultato, che identifica la matrice di cambiamento di base dalla base delle funzioni omogenee complete a quella di Schur.

Proposizione 1.8.3. *Si ha*

$$h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} s_\lambda.$$

Dimostrazione. Sia $h_\mu = \sum_\lambda a_{\lambda\mu} s_\lambda$; allora

$$\langle h_\mu, s_\lambda \rangle = \langle \sum_\lambda a_{\lambda\mu} s_\lambda, s_\lambda \rangle = a_{\lambda\mu}$$

per linearità del prodotto scalare e ortonormalità della base di Schur. D'altronde,

$$\langle h_\mu, s_\lambda \rangle = \langle h_\mu, \sum_\rho K_{\lambda\rho} m_\rho \rangle = K_{\lambda\mu}$$

dalla espressione di s_λ rispetto alla base monomiale e dalla dualità delle basi monomiale e completa. Segue dunque che $a_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu}$. □

Modificando leggermente l'algoritmo RSK, si riesce ad ottenere un altro risultato utile per lo studio del comportamento delle funzioni di Schur.

Teorema 1.8.5. *Esiste una biezione fra le* $(0,1)$*-matrici con un numero finito di elementi non nulli e le coppie* (P,Q) *tali che* (P^t,Q) *è una coppia di SSYT e* P *e* Q *hanno la stessa forma. In particolare se la* $(0,1)$*-matrice* A *è posta in corrispondenza con la coppia* (P,Q)*, si ha* $tipo(P) = Col(A)$ *e* $tipo(Q) = Row(A)$.

Dimostrazione. La prova è simile a quella del Teorema 1.8.2. L'algoritmo che si considera procede in modo analogo all'algoritmo RSK, ma l'operazione di inserimento di un numero k in una tabella viene definita in modo che k si sostituisca al numero più a sinistra che sia maggiore o uguale di k (invece che maggiore stretto come nell'algoritmo RSK "classico"). Ci si riferisce a tale variazione dell'algoritmo RSK con il termine *"algoritmo RSK duale"*. □

Anche qui vediamo un esempio per chiarire come proceda l'algoritmo RSK duale.

Esempio: Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora si ha

$$\omega_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e la costruzione iterativa di $P(i)$, $Q(i)$ è la seguente (a sinistra sulla riga i-esima si ha $P(i)$, a destra $Q(i)$):

$$\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}1&3\\1&\\2&\end{array}\qquad\begin{array}{cc}1&2\\2&\\3&\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}1&2\\1&3\\2&\end{array}\qquad\begin{array}{cc}1&2\\2&3\\3&\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}1&2\\1&2\\2&3\end{array}\qquad\begin{array}{cc}1&2\\2&3\\3&4\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}1&2&3\\1&2&\\2&3&\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}1&2&4\\2&3&\\3&4&\end{array}$$

Dove l'ultima coppia di tabelle rappresenta il risultato finale dell'algoritmo RSK. Osserviamo inoltre che $Col(A) = (2,3,1) = tipo(P)$, $Row(A) = (1,3,2) = tipo(Q)$.
Analogamente a come si è ricavata l'identità di Cauchy quindi, si ottiene il sguente risultato.

Teorema 1.8.6. *Vale la seguente identità, nota come identità di Cauchy duale:*

$$\prod_{i,j}(1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y).$$

Dimostrazione. Il coefficiente del termine $x^\alpha y^\beta$ nell'espansione del prodotto a sinistra è dato dal numero delle $(0,1)$-matrici A che soddisfano $Row(A) = \alpha$, $Col(A) = \beta$ (come visto nella Proposizione 1.3.2), mentre il coefficiente di $x^\alpha y^\beta$ nella sommatoria a destra è dato dal numero di coppie (P,Q) di tabelle di stessa forma, con (P^t, Q) coppia di $SSYT$, che soddisfino $tipo(P) = \alpha$, $tipo(Q) = \beta$. La trasposizione fornisce una biezione fra le $(0,1)$-matrici A che verificano $Row(A) = \alpha$, $Col(A) = \beta$ e quelle che verificano $Col(A) = \alpha$, $Row(A) = \beta$, e queste tramite l'algoritmo RSK duale sono in corrispondenza biunivoca con le i coppie (P,Q) come sopra che soddisfano $tipo(P) = \alpha$, $tipo(Q) = \beta$. Pertanto il coefficiente di ogni monomio $x^\alpha y^\beta$ è uguale nelle due espressioni. □

Da questi risultati possiamo dedurre come agisce l'endomorfismo ω sulle funzioni di Schur.

Teorema 1.8.7. *Per ogni $\lambda \in Par$ si ha*

$$\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}.$$

Dimostrazione. Denotiamo con ω_y l'involuzione ω agente solo sulle variabili y_i (trattiamo le x_i come costanti rispetto a tale endomorfismo). Si ha che

$$\omega_y(\prod_{i,j}(1-x_i y_j)^{-1}) = \prod_{i,j}(1+x_i y_j) \tag{1.18}$$

infatti si ha, dalle Proposizioni 1.3.2 e 1.4.2, e dal Teorema 1.5.1,

$$\omega_y(\prod_{i,j}(1-x_i y_j)^{-1}) = \omega_y(\prod_{\lambda} m_\lambda(x)h_\lambda(y)) = \prod_{\lambda} m_\lambda(x)e_\lambda(y) = \prod_{i,j}(1+x_i y_j).$$

Allora usando l'identità di Cauchy e l'identità di Cauchy duale otteniamo:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in Par} s_\lambda(x)\omega_y(s_\lambda(y)) = \omega_y \sum_{\lambda\in Par} s_\lambda(x)s_\lambda(y) &= \omega_y(\prod_{i,j}(1-x_i x_j)^{-1}) \\ &= \prod_{i,j}(1+x_i x_j) = \sum_{\lambda\in Par} s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y).\end{aligned}$$

Per cui, data l'indipendenza lineare delle funzioni di Schur in x, si ha $\omega(s_\lambda(y)) = s_{\lambda'}(y)$, o semplicemente

$$\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}.$$

□

Un caso particolare che si può dedurre dal teorema precedente è la funzione di Schur relativa alla partizione (n). Ricordando che $s_{1^n} = e_n$ e applicando ω ai due membri, poichè $(1^n)' = n$ risulta

$$s_n = h_n.$$

Diamo ora una definizione alternativa delle funzioni di Schur, nota come definizione "classica". Mostreremo l'equivalenza di tale definizione con quella "combinatoria" usata finora, dopodichè sfrutteremo tale riformulazione per sviluppare ulteriori proprietà delle funzioni di Schur.
Sia $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, sia $\sigma \in S_n$. Usiamo come notazione $x^\alpha = x^{\alpha_1},\ldots,x^{\alpha_n}$, $\sigma(x^\alpha) = x^{\sigma(\alpha_1)},\ldots,x^{\sigma(\alpha_n)}$, e definiamo

$$a_\alpha = a_\alpha(x_1\ldots x_n) = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma\sigma(x^\alpha)$$

Dove ϵ_σ è il segno della permutazione σ. Osserviamo che

$$a_\alpha = det(x_i^{\alpha_j})_{i,j=1}^n$$

Esempio:
$a_{341} = x_1^3x_2^4x_3 + x_1^4x_2x_3^3 + x_1x_2^3x_3^4 - x_1^4x_2^3x_3 - x_1^3x_2x_3^4 - x_1x_2^4x_3^3$
ovvero

$$a_{341} = det\begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^4 & x_1 \\ x_2^3 & x_2^4 & x_2 \\ x_3^3 & x_3^4 & x_3 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che a_α è alternante, cioè $\sigma(a_\alpha) = \epsilon_\sigma a_\alpha$, perchè l'azione della permutazione σ su a_α equivale a permutare secondo σ le colonne della matrice di cui a_α è determinante; di conseguenza, $a_\alpha = 0$ a meno che gli α_i siano tutti distinti. Pertanto si può scegliere α in modo che $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n$ (si tratta soltanto di ordinare le colonne in modo crescente, dunque a meno della scelta di un segno per a_α non è restrittivo). Definiamo ora $\delta = \delta_n = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, a cui è associato il polinomio

$$a_\delta = det\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j)$$

noto come determinante di Vandermonde. Osserviamo che posta $\lambda = \alpha - \delta$, dove la differenza fra partizioni è intesa come il vettore ottenuto sottraendo componente a componente (cioè $\lambda_i = \alpha_i - \delta_i$), si ha che λ è debolmente decrescente, ovvero è una partizione. Possiamo scrivere

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n.$$

Esempio:

$$a_{431} = a_{221+210} = det\begin{pmatrix} x_1^4 & x_1^3 & x_1 \\ x_2^4 & x_2^3 & x_2 \\ x_3^4 & x_3^3 & x_3 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che a_δ divide sempre a_α, perchè se si pone $x_i = x_j$ in a_α per un qualche $i \neq j$ allora a_α si annulla (perchè a_α è una funzione alternante, o equivalentemente perchè si ottengono due righe uguali nella matrice di cui a_α è determinante), ovvero a_α è divisibile in $\mathbb{Z}[x_1 \ldots x_n]$ per $(x_i - x_j)$ per ogni $i < j$ e quindi è divisibile per il determinate di Vandermonde.
Osserviamo che allora a_α/a_δ è una funzione simmetrica, perchè quoziente di funzioni alternanti, a coefficienti interi e omogenea di grado $|\lambda| = |\alpha| - |\delta|$.

Teorema 1.8.8. *Il quoziente di determinanti $a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ è la riduzione in n variabili della funzione di Schur s_λ:*

$$\frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = r_n(s_\lambda).$$

Dimostrazione. Dal Corollario 1.8.3 si ha che $h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} s_\lambda$. Ricordando l'azione di ω sulle funzioni complete e sulle funzioni di Schur, applicando tale endomorfismo ad ambo i membri e sosituendo λ con λ' risulta

$$e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} s_\lambda.$$

Poichè le funzioni simmetriche elementari in n variabili $\{r_n(e_\mu); l(\mu') \leq n\}$ sono una base di Λ_n, per provare la tesi basta mostrare che

$$r_n(e_\mu) = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta},$$

ovvero che

$$r_n(e_\mu) a_\delta = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} a_{\lambda+\delta}.$$

D'ora in poi, poichè lavoreremo sempre in n variabili, ometteremo il simbolo r_n nel corso della dimostrazione, per evitare di appesantire eccessivamente la notazione.

Ambo i membri dell'identità sono funzioni dispari omogenee di grado $|\lambda| + |\delta|$, perciò è sufficiente provare l'uguaglianza nelle due espressioni del coefficiente di $x^{\lambda+\delta}$ con λ partizione di n. Possiamo mostrare tale uguaglianza esibendo una biezione fra i modi di costruire il termine $x^{\lambda+\delta}$ nel prodotto di a_δ per e_μ e le *SSYT* di forma λ' e tipo μ.

Il prodotto $a_\delta e_\mu$ può essere pensato come il risultato di prodotti successivi per $e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \ldots$ e ognuno di questi prodotti parziali $a_\delta e_{\mu_1} \ldots e_{\mu_k}$ è alternante, perciò se in esso compare un monomio x^α deve essere $\alpha_i \neq \alpha_j$. Inoltre poichè nei monomi che compongono ogni fattore e_{μ_i} non compaiono mai esponenti maggiori di 1, quando si moltiplica un monomio x^α per una funzione di questo tipo si possono ottenere soltanto dei monomi i cui esponenti preservano l'ordine relativo che avevano in α, oppure due esponenti diventano uguali e in quest'ultimo caso il monomio scompare per proprietà delle funzioni alternanti. Pertanto l'unico modo per ottenere $x^{\lambda+\delta}$ è iniziare da x^δ, che è l'unico monomio in a_δ avente esponenti decrescenti, e moltiplicare successivamente per monomi $x_{i_1^1} \ldots x_{i_{\mu_1}^1}$ di

e_{μ_1}, $x_{i_1^2} \dots x_{i_{\mu_2}^2}$ di e_{μ_2} etc. che mantengano gli esponenti strettamente decrescenti.

Il numero di modi di scegliere questi monomi corrisponde al coefficiente di $x^{\lambda+\delta}$; data una scelta qualsiasi di monomi i $x_{i_1^1} \dots x_{i_{\mu_1}^1}, x_{i_1^2} \dots x_{i_{\mu_2}^2}, \dots$ che soddisfi le condizioni richieste, si può costruire una *SSYT* T nel modo seguente: se in $x_{i_1^k} \dots x_{i_{\mu_1}^k}$, ovvero nel monomio scelto in e_{μ_k}, compare x_j, allora deve comparire un k nella colonna j-esima di T; in altre parole, la colonna j-esima di T contiene tutti e soli gli indici k delle funzioni e_{μ_k} per cui si è scelto un monomio in cui compare x_j.

Quella così ottenuta è una *SSYT*. Infatti, poichè non si possono avere ripetizioni sulle colonne (un termine x_j non può "comparire due volte" nel monomio scelto per un certo e_{μ_k}) queste sono strettamente crescenti. La monotonia debole delle righe segue dal fatto che gli esponenti devono mantenere sempre il loro ordine relativo, e può essere verificata per induzione: la prima riga deve essere debolmente crescente, perchè se si avesse $T_{1,j} > T_{1,j+1}$, vorrebbe dire che x_{j+1} compare in un monomio (ipoteticamnete quello scelto per $e_{\mu_{T_{1,j+1}}}$) che precede quello in cui compare x_j, pertanto non si manterrebbe l'ordine relativo degli esponenti di x^δ; induttivamente, se in una certa riga i-esima si avesse $T_{i,j} > T_{i,j+1}$, vorrebbe dire che x_{j+1} compare in un monomio (ipoteticamente quello scelto per $e_{\mu_{T_{i,j+1}}}$) che precede quello in cui compare x_j, e poichè per ipotesi induttiva e monotonia stretta delle colonne si ha che sia x_j che x_{j+1} compaiono $i-1$ monomi che precedono quello relativo a $e_{\mu_{T_{i,j+1}}}$, non si manterrebbe l'ordine relativo degli esponenti. Inoltre poichè per ottenere $x^{\lambda+\delta}$ da x^δ è necessario che x_i appaia complessivamene λ_i volte nei monomi per cui si moltiplica , esso deve apparire in λ_i fattori (ricordando che in ogni e_{μ_k} ogni indeterminata ha esponente al più 1), pertanto nella colonna i-esima compariraornno λ_i componenti: T ha forma λ'. D'altronde nel monomio scelto da un certo e_{μ_k} compaiono μ_k indeterminate distinte, in T compariranno μ_k componenti uguali a k, ovvero T ha tipo $(\mu_1, \mu_2, \dots) = \mu$.

Il procedimento descritto è invertibile, cioè data una *SSYT* di tipo μ è possibile risalire a una scelta di monomi che permettono di ottenere $x^{\lambda+\delta}$ da x^δ : basta considerare per ogni k gli indici delle μ_k colonne che contengono k, e scegliere quindi il monomio di e_{μ_k} contenente tutte e sole le indeterminate da questi indicizzate.

Dunque abbiamo costruito la biezione desiderata fra i modi per ottenere $x^{\lambda+\delta}$ da

x^{δ} nel prodotto $a_{\delta}e_{\mu}$ e SSYT di forma λ' e tipo μ, pertanto la tesi è provata. □

Esempio:
In un esempio precedente si è scritta la funzione $s_{(2,1)}$ in 3 variabili usando la definizione combinatoria; vogliamo ora ritrovare tale funzione come quoziente di determinanti.
Poichè stiamo lavorando in 3 indeterminate, si ha $\delta = \delta_3 = (2, 1, 0)$, quindi se $\lambda = (2, 1)$ si ha $\lambda + \delta = (4, 2, 0)$

$$s_{(2,1)} = a_{(4,2,0)}/a_{(2,1,0)}$$

$$a_{(4,2,0)} = det\begin{pmatrix} x_1^4 & x_1^2 & x_1 \\ x_2^4 & x_2^2 & x_2 \\ x_3^4 & x_3^2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1^4x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3^4 + x_1x_2^4x_3^2 - x_1x_2^2x_3^4 - x_1^4x_2x_3^2 - x_1^2x_4^2x_3$$

$$a_{(2,1,0)} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

dunque poichè

$$x_1^4x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3^4 + x_1x_2^4x_3^2 - x_1x_2^2x_3^4 - x_1^4x_2x_3^2 - x_1^2x_4^2x_3 =$$
$$= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2)$$

si ha
$s_{(2,1)} = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$
in accordo con quanto trovato seguendo la definizione combinatoria.

Il teorema 1.8.8 può essere generalizzato nel modo seguente:

Teorema 1.8.9. *Si ha la seguente identità:*

$$r_n(s_\rho)r_n(e_\mu) = \sum_\lambda K_{\lambda'/\rho',\mu}r_n(s_\lambda)$$

Dimostrazione. Come nella dimostrazione precedente, poichè lavoriamo sempre in n variabili sottintendiamo nel corso della dimostrazione il simbolo r_n: le funzioni simmetriche che compariranno saranno da considerarsi ridotte ad n variabili.
L'identità che si vuole provare è equivalente, moltiplicando ambo i membri per a_δ, alla seguente:

$$a_{\delta+\rho}e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'/\rho',\mu}a_{\lambda+\delta}.$$

Si possono fare le stesse osservazioni presentate nel teorema 1.8.8, e quindi il coefficiente di $x^{\lambda+\delta}$ nel prodotto $a_{\delta+\rho}e_\mu$ è il numero di modi di ottenere $x^{\lambda+\delta}$ da $x^{\delta+\rho}$ scegliendo un monomio da ogni e_{μ_i} in modo da mantenere gli esponenti strettamente decrescenti. Analogamente al teorema 1.8.8, si ottiene una biezione fra le scelte degli $l(\mu)$ monomi e le *SSYT* di tipo μ e forma λ'/ρ' costruendo per ognuna di tali scelte una *SSYT* contenente un i nella j-esima colonna se e solo se nel monomio scelto per e_{μ_i} compare x_j. $\square$

Corollario 1.8.10. *Si ha*

$$s_\rho e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'/\rho',\mu} s_\lambda$$

Dimostrazione. Basta considerare il risultato del teorema precedente per n abbastanza grande. $\square$

Corollario 1.8.11. *Si ha la seguente identità:*

$$s_\rho h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda/\rho,\mu} s_\lambda$$

Dimostrazione. Applicando ω ad entrambi i membri dell'identità del Corollario 1.8.10 si ha

$$s_{\rho'} h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'/\rho',\mu} s_{\lambda'}$$

dunque sostutuendo ρ con ρ' e λ con λ' segue la tesi. $\square$

Dall'identità precedente è facile provare il seguente risultato, che è una proprietà significativa delle funzioni si Schur storte.

Teorema 1.8.12. *Per ogni funzione simmetrica $f \in \Lambda$ si ha la seguente relazione*

$$\langle f s_\rho, s_\lambda \rangle = \langle f, s_{\lambda/\rho} \rangle$$

In particolare, si ha

$$\langle s_\mu s_\rho, s_\lambda \rangle = \langle s_\mu, s_{\lambda/\rho} \rangle$$

e tale numero si indica con $c^\mu_{\rho\lambda}$ e si dice coefficiente di Littlewood-Richardson.

Dimostrazione. Si consideri l'identità

$$s_\rho h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda/\rho,\mu} s_\lambda.$$

Considerando il prodotto scalare con s_λ dei due membri si ottiene, poichè la base di Schur è ortonormale,

$$\langle s_\rho h_\mu, s_\lambda \rangle = K_{\lambda/\rho,\mu}.$$

Inoltre per definizioni delle funzioni di Schur storte si ha

$$s_{\lambda/\rho} = \sum_\mu K_{\lambda/\rho,\mu} m_\mu$$

e considerando il prodotto scalare dei due membri per h_μ si ottiene, poichè le basi monomiali e completa sono basi duali,

$$\langle s_{\lambda/\rho}, h_\mu \rangle = K_{\lambda/\rho,\mu}.$$

Dunque si ha

$$\langle s_{\lambda/\rho}, h_\mu \rangle = \langle s_\rho h_\mu, s_\lambda \rangle$$

e poichè le funzioni simmetriche complete omogenee sono una base per Λ e l'espressione precedente è lineare in h_μ, si ha la tesi. $\square$

Dunque abbiamo definito i coefficienti di Littlewood-Richardson come

$$c^\mu_{\rho\lambda} = \langle s_\mu s_\rho, s_\lambda \rangle = \langle s_\mu, s_{\lambda/\rho} \rangle,$$

ovvero si ha

$$s_\mu s_\rho = \sum_\lambda c^\mu_{\rho\lambda} s_\lambda,$$
$$s_{\lambda/\rho} = \sum_\mu c^\mu_{\rho\lambda} s_\mu.$$

Nel caso in cui $\lambda = (n)$ o $\lambda = (1^n)$ tali coefficienti hanno un'elegante interpretazione combinatoria nota come Formula di Pieri. Per enunciarla, definiamo *"n-striscia orizzontale"* una forma λ/μ, con λ, μ partizioni costituita da n celle in cui ogni cella si trova su una colonna distinta (quindi deve verificarsi $\lambda_{i+1} \leq \mu_i$); analogamente, definiamo *"n-striscia verticale"* una forma λ/μ, con λ, μ partizioni costituita da n celle in cui ogni cella si trova su una riga distinta (quindi deve verificarsi $\lambda_i - \mu_i \leq 1$). Ricordiamo inoltre che $s_{1^n} = e_n$, $s_n = h_n$.

Teorema 1.8.13. *Valgono le seguenti espansioni, note come Formule di Pieri:*

$$s_\rho s_n = \sum_\lambda s_\lambda, \qquad \textit{dove } \lambda \in Par \textit{ tale che } \lambda/\rho \textit{ è } n\textit{-striscia orizzontale} \tag{1.19}$$

$$s_\rho s_{1^n} = \sum_\lambda s_\lambda, \qquad \textit{dove } \lambda \in Par \textit{ tale che } \lambda/\rho \textit{ è } n\textit{-striscia verticale} \tag{1.20}$$

Dimostrazione. Ricordando che $s_n = h_n$, si ha che il coefficiente di s_λ nell'espressione di $s_\rho s_n = s_\rho h_n$ nella base di Schur è dato da (utilizzando il corollario 1.8.11)

$$\langle s_\rho h_n, s_\lambda \rangle = K_{\lambda/\rho,n}$$

ovvero il numero di *SSYT* di forma λ/ρ e tipo n, quindi costituite da n celle ognuna contenente un 1. Per monotonia stretta delle colonne nell *SSYT*, se ci sono due celle nella stessa colonna in λ/ρ queste non possono contenere entrambe un 1, pertanto $K_{\lambda/\rho,n} = 0$ se λ/ρ non è un n-striscia orizzontale. Se invece λ/ρ è una n-striscia orizzontale, riempiendo ogni cella con 1 si ottiene effettivamente una *SSYT*, che dunque è l'unica di forma λ/ρ e tipo n, pertanto in tal caso $K_{\lambda/\rho,n} = 1$. Quindi si ha

$$s_\rho s_n = s_\rho h_n = \sum_\lambda s_\lambda$$

con λ partizioni che soddisfano λ/ρ n-stiscia orizzontale.
La seconda espansione si ottiene dalle prima applicando l'endomorfismo ω ad entrambi i membri, ricordando che ω agisce sulle funzioni di Schur come visto nel teorema 1.8.7 e osservando che se λ/ρ è una n-striscia orizzontale, allora λ'/ρ' sarà una n-striscia verticale. □

Esempio: mostriamo un'esempio concreto di espansione tramite le formule di Pieri.
Consideriamo $\rho = (2, 1)$, $n = 2$, e vogliamo dunque espandere $s_{2,1}s_2$ in termini di funzioni di Schur.
Si ha che le partizioni λ tali che λ/ρ è una 2-striscia verticale sono le seguenti; per evidenziare la 2-striscia verticale λ/ρ, le celle di tale partizioni saranno riempite con degli 1, mentre le celle di ρ contengono degli 0.

0	0	1	1
0			

Figura 1.7: $\lambda = (4, 1)$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Figura 1.8: $\lambda = (3, 2)$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Figura 1.9: $\lambda = (3, 1, 1)$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Figura 1.10: $\lambda = (2, 2, 1)$

Pertanto si ha

$$s_{2,1}h_2 = s_{4,1} + s_{3,2} + s_{3,1,1} + s_{2,21}.$$

Se invece vogliamo espandere $s_{2,1}s_{1^2}$, dobbiamo considerare le partizioni λ tali che λ/ρ è una 2-striscia orizzontale (ancora, λ/ρ è evidenziata con degli 1):

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Figura 1.11: $\lambda = (2, 1, 1, 1)$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Figura 1.12: $\lambda = (2, 2, 1)$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Figura 1.13: $\lambda = (3, 1, 1)$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Figura 1.14: $\lambda = (3, 2)$

Osserviamo che queste sono effettivamente le trasposte delle partizioni considerate nel caso precedente.

Dunque si ha

$$s_{2,1}e_2 = s_{2,1,1,1} + s_{2,2,1} + s_{3,1,1} + s_{3,2}.$$

Vogliamo ora concludere questa trattazione sulle funzioni di Schur studiandone il comportamento sotto l'azione di alcune specializzazioni. Abbiamo già osservato il comportamento di tali funzioni rispetto alla riduzione di variabili; ora studieremo un'espressione combinatoria dell'immagine di tali funzioni tramite la specializzazione principale $ps_n(s_\lambda) = s_\lambda(1, q, q^2, \ldots, q^n, 0, 0, \ldots)$ (con q parametro formale), tramite cui ne otterremo anche una per la valutazione costante $ps_n^1(s_\lambda) = s_\lambda(1^n, 0, 0\ldots)$.
Per farlo introduciamo le seguenti notazioni.

Definizione 1.8.2. *Sia $\lambda \in Par$, e diciamo s la cella di posto (i, j) nel diagramma di Ferrers associato a λ. Definiamo*

$$a_\lambda(s) = \lambda_i - j \quad \textit{"arm length"} \tag{1.21}$$

$$l_\lambda(s) = \lambda'_j - i \quad \textit{"leg length"} \tag{1.22}$$

$$a'_\lambda(s) = j - 1 \quad \textit{"arm colength"} \tag{1.23}$$

$$l'_\lambda(s) = i - 1 \quad \textit{"leg colength"}. \tag{1.24}$$

Inoltre a partire da tali quantità definiamo "uncino" relativo ad s in λ:

$$h_\lambda(s) = a_\lambda + l_\lambda + 1$$

Tali definizioni risultano forse più chiare con una rappresentazione grafica: consideriamo la partizione $\lambda = (4, 3, 2, 2)$, e sia s la cella di posto (1,2), che evidenzieremo appunto con il simbolo s nelle figure sottostanti.

	s	1	1

Figura 1.15: $a_{5,4,2,2}(1,2) = 4 - 2 = 2$, ed è graficamentee il numero di celle a destra di s, che sono evidenziate in figura con degli 1

	s		
	1		
	1		
	1		

Figura 1.16: $l_{5,4,2,2}(1,2) = 4 - 1 = 3$, ed è graficamente il numero di celle al di sotto di s, che sono evidenziate in figura con degli 1

1	s		

Figura 1.17: $a'_{5,4,2,2}(1,2) = 2 - 1 = 1$, ed è graficamente il numero di celle a sinistra dis, che sono evidenziate in figura con degli 1

	s		

Figura 1.18: $l'_{5,4,2,2}(1,2) = 1 - 1 = 0$, ed è graficamentee il numero di celle al di sopra di s

	1	1	1
	1		
	1		
	1		

Tabella 1.1: $h_{5,4,2,2}(1,2) = 3 + 2$, ed è graficamente il numero di celle a destra e al di sotto di s contando anche s stessa, che sono evidenziate in figura con degli 1 (il nome "uncino" è dovuto proprio alla disposizione di tali celle)

Sia dunque ora q un parametro formale, e consideriamo l'algebra $\mathbb{Q}[q]$. Useremo le notazioni

$$[k] = \frac{(1-q^k)}{(1-q)} \qquad\qquad [k]! = \prod_{i=1}^{k} \frac{(1-q^i)}{1-q)}.$$

Lemma 1.8.1. *Sia $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2; \ldots, \lambda_n) \in Par$, e sia $\mu = (\mu_1, \mu_2; \ldots, \mu_n) \in Par$ tale che $\mu_i = \lambda_i + n - i$. Allora valgono le seguenti uguaglianze:*

$$\prod_{s \in \lambda} [h_\lambda(s)] = \frac{\prod_{i \geq 1} [\mu_i]!}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} [\mu_i - \mu_j]} \tag{1.25}$$

$$\prod_{s \in \lambda} [n + a'_\lambda(s) - l'_\lambda(s)] = \prod_{i \geq 1} \frac{[\mu_i]!}{[n-i]!} \tag{1.26}$$

Dimostrazione. Si consideri il diagramma di Ferrers di λ. Aggiungendo $n - i$ celle alla riga i-esima si ottiene il diagramma di Ferrers di μ. Ora si riempia ogni cella (i, j) con il numero $\mu_i - j + 1$, ovvero ogni riga è riempita con i numeri $\{1, 2, \dots, \mu_i\}$ ordinati da sinistra a destra in modo strettamente decrescente.

7	6	5	4	3	2	1
4	3	2	1			
1						

Figura 1.19: Ad esempio, se si parte da $\lambda = (5, 3, 1)$ si ha questa situazione.

A questo punto se si rimuovono le celle di posto $(i, \mu_j + 1)$ per ogni $1 \leq i < j \leq n$ (graficamente le "colonne appena dopo la fine di ogni riga") si ottiene una tabella di forma λ riempita in modo che in ogni cella s si trovi $h_\lambda(s)$ (basta considerare che in ogni riga sono stati rimosse tante celle dopo s quante sono le celle che si trovano al di sotto di s)

7	5	4	2	1
4	2	1		
1				

Tabella 1.2: Restando nell'esempio precedente, si giungerebbe a questa tabella

Dunque poichè le celle rimosse contenevano elementi del tipo $(\mu_i - \mu_j)$, il fatto che la costruzione descritta porti alla *SSYT* contenente $h_\lambda(s)$ al posto s ci permette di dedurre l'uguaglianza (1.25).
La prova dell'uguaglianza (1.26) è sostanzialmente analoga: basta considerare il diagramma di μ in cui la riga i-esima è riempita con i numeri $\{1, 2, \dots, \mu_i)$ ordinati da destra verso sinistra in modo crescente, e cancellare poi le pime $(n - i)$ celle di ognuna di tali righe.

□

1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4			
1						

3	4	5	6	7
2	3	4		
1				

Tabella 1.3: sempre nell'esempio $\lambda = (5, 3, 1)$, le tabelle da considerarsi per l'identità 1.26, rispettivamente prima e dopo la cancellazione di celle

Ora abbiamo tutti gli strumenti necessari per dedurre l'azione della specializzazione principale sulle funzioni di Schur

Teorema 1.8.14. *Sia n intero positivo. Per ogni $\lambda \in Par$ si ha*

$$ps_n(s_\lambda) = s_\lambda(1, q, q^2, \dots q^{n-1}) = q^{\sum (i-1)\lambda_i} \prod_{s\in\lambda} \frac{[n + a'_\lambda(s) - l'_\lambda(s)]}{[h_\lambda(s)]}.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $n \geq l(\lambda)$, altrimenti la tesi è banalmente vera perchè entrambi i membri si annullano.
Dalla definizione classica di funzioni di Schur, si ha che

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots q^{n-1}) = \frac{det(q^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})^n_{i,j=1}}{det(q^{(i-1)(n-j)})^n_{i,j=1}} \tag{1.27}$$

Il denominatore di tale espressione è una specializzazione del determinante di Vandermonde, pertanto si ha

$$det(q^{(i-1)(n-j)})^n_{i,j=1} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (q^{i-1} - q^{j-1})$$

Per quanto riguarda il numeratore, anche questo a meno di segno può essere visto come un determinante di Vandermonde. Definendo $a_{\delta}* = (x_j^{i-1})^n_{i,j=1}$, si ha che il numeratore di (1.27) è proprio $a_\delta* = (q^{\mu_1}, q^{\mu_2}, \dots, q^{\mu_n})$ dove $\mu_j = \lambda_j + n - j$; inoltre la matrice $(x_j^{i-1})^n_{i,j=1}$ si può ottenere trasponendo e poi invertendo l'ordine delle righe della matrice $(x_i^{n-j})^n_{i,j=1}$, e quest'ultima è la matrice il cui determinante è il determnante di Vandermonde. Pertanto si ha

$$det(q^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})^n_{i,j=1} = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{1\leq i<j\leq n} (q^{\mu_i} - q^{\mu_j})$$

Quindi si ha

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots q^{n-1}) = (-1)^{\binom{n}{2}} \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n} (q^{\mu_i} - q^{\mu_j})}{\prod_{1\leq i<j\leq n} (q^{i-1} - q^{j-1})}$$

ovvero, moltiplicando numeratore e denominatore per $\prod_{i\geq 1} [\mu_i]!$

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots q^{n-1}) = \frac{q^{\sum_{i<j} \mu_j} \prod_{i<j} [\mu_i - \mu_j] \prod_{i\geq 1} [\mu_i]!}{q^{\sum_{i<j} (i-1)} \prod_{i<j} [j-i] \prod_{i\geq 1} [\mu_i]!}$$

Osservando che $\prod_{i<j} [j-i] = \prod_{1\leq i}^{n} [n-i]$ e utilizzando il lemma 1.8.1 si ha dunque

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots q^{n-1}) = q^{\sum (i-1)\lambda_i} \prod_{s\in\lambda} \frac{[n + a'_\lambda(s) - l'_\lambda(s)]}{[h_\lambda(s)]}.$$

□

Corollario 1.8.15. *Sia n intero positivo. Per ogni $\lambda \in Par$ si ha*

$$ps_n^1(s_\lambda) = s_\lambda(1^n) = \prod_{s\in\lambda} \frac{n + a'_\lambda(s) - l'_\lambda(s)}{h_\lambda(s)}$$

Dimostrazione. basta sfruttare il teorema precedente considerando che $\frac{(1-q^k)}{(1-q)} = (1 + q + \cdots + q^{k-1})$ e ponendo $q = 1$. □

Capitolo 2

Funzioni di Jack

2.1 Il parametro formale α

Nel capitolo precedente si sono trattate le funzioni simmetriche a coefficienti in $\mathbb{Q}$, con particolare attenzione alle funzioni di Schur. In questo capitolo se ne presenterà una generalizzazione mediante l'estensione del campo dei coefficienti con un parametro formale α, ponendo in particolare risalto le *funzioni di Jack*, che sono l'estensione naturale delle funzioni di Schur in tale ambiente.

Sia pertanto α un'indeterminata. Poniamo $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ il campo delle funzioni razionali in α a coefficieni in $\mathbb{Q}$; denotiamo dunque con Λ_F l'algebra delle funzioni simmetriche a coefficienti in F, con Λ_F^n il sottospazio vettoriale di quelle omogenee di grado n.
Definiamo un prodotto scalare in Λ_F in modo che le funzioni simmetriche somme di potenze siano ancora una base ortogonale:

Definizione 2.1.1. *Indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ la forma bilineare su Λ_F determinata da*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha : \Lambda_F \times \Lambda_F \longrightarrow F \quad ; \quad \langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\alpha = z_\lambda(\alpha)\delta_{\lambda\mu}$$

Dove $z_\lambda(\alpha) = z_\lambda \alpha^{l(\lambda)}$.

La definizione precedente è ben posta perchè le funzioni simmetriche somme di potenze sono una base di Λ_F; inoltre a partire da questa si deduce che $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ è una forma bilineare simmetrica e non degenere.
Risulta ancora possibile fornire un criterio utile per verificare la dualità di due basi, molto simile a quello presentato nel caso classico (lemma 1.7.1).

Lemma 2.1.1. *Siano, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\{u_\lambda\}_{\lambda \in Par(n)}$ e $\{v_\lambda\}_{\lambda \in Par(n)}$ due basi di Λ^n. Si ha che $\{u_\lambda\}_{\lambda \in Par}$ e $\{v_\lambda\}_{\lambda \in Par}$ sono basi duali di Λ se e solo se*

$$\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

dove si usa la notazione

$$f^\beta = exp(\beta log(f)) \quad \textit{per ogni } f \in \Lambda,\ \beta \in F$$

Dimostrazione. Per prima cosa, mostriamo che

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-\frac{1}{\alpha}} = \sum_\lambda z_\lambda(\alpha)^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y). \tag{2.1}$$

La prova di questa identità è molto simile a quella della proposizione 1.6.2:

$$log(\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}) = \sum_{i,j} -\frac{1}{\alpha}log(1-x_iy_j) = \sum_{i,j}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}x_i^n y_j^n$$
$$= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\sum_i x_i^n \sum_j y_j^n = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y)$$

quindi

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}} = exp\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y)$$

da cui si deduce

$$exp\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y) = \prod_{n\geq 0} exp(\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y))$$
$$= \prod_{n\geq 1}\sum_{m_n\geq 1}\frac{1}{m_n!n^{m_n}\alpha^{m_n}}p_n^{m_n}(x)p_n^{m_n}(y)$$
$$= \sum_{\lambda\in Par} z_\lambda(\alpha)^{-1}p_\lambda(x)p_\lambda(y).$$

A questo punto, definiamo temporaneamente le funzioni $p^*_\lambda = z_\lambda(\alpha)^{-1}p_\lambda$, che costituiscono una base, in particolare la base duale delle somme di potenze. Scriviamo dunque

$$u_\lambda = \sum_\rho a_{\lambda\rho}p^*_\rho \qquad\qquad v_\mu = \sum_\rho b_{\mu\rho}p_\rho.$$

Si ha che $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ sono basi duali se e solo se

$$\sum_\rho a_{\lambda\rho}b_{\mu\rho} = \delta_{\lambda\mu} \tag{2.2}$$

D'altronde abbiamo appena mostrato che

$$\sum_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(y) = \prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

è equivalente a

$$\sum_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(y) = \sum_\lambda p^*_\lambda(x)p_\lambda(y),$$

che può essere riscritta come

$$\sum_{\rho,\mu}(\sum_\lambda a_{\lambda\rho}b_{\lambda\mu})p^*_\rho(x)p_\mu(y) = \sum_\lambda(\sum_\rho a_{\lambda\rho}p^*_\rho(x))(\sum_\mu b_{\lambda\mu}p_\mu(y)) = \sum_\lambda p^*_\lambda(x)p_\lambda(y)$$

e per indipendenza lineare delle basi tale scrittura equivale a

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda\rho} b_{\lambda\mu} = \delta_{\rho\mu}$$

ovvero alla dualità delle basi. □

Chiaramente, con questo nuovo prodotto scalare le basi monomiale e completa non sono più basi duali. Introduciamo allora una nuova base che può essere considerata in tal senso una generalizzazione della base delle funzioni simmetriche complete.

Definizione 2.1.2. *Definiamo le funzioni g_n^α per $n \in \mathbb{N}$ tramite la funzione generatrice*

$$\sum_{n\geq 0} g_n^\alpha(x) y^n = \prod_i (1 - x_i y)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

e poniamo per ogni partizione $\lambda \in Par$

$$g_\lambda^\alpha(x) = \prod_{i\geq 1} g_{\lambda_i}^\alpha(x).$$

Proposizione 2.1.1. *Le funzioni $\{g_\lambda^\alpha; \lambda \in Par\}$ sono le funzioni duali della base monomiale, i.e. $\langle g_\lambda^\alpha, m_\mu\rangle_\alpha = \delta_{\lambda\mu}$.*

Dimostrazione. Ponendo $y = y_1 = y_2 = \dots$ in (2.1) risulta

$$\prod_i (1 - x_i y)^{-\frac{1}{\alpha}} = \sum_n \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda(\alpha)^{-1} p_\lambda(x) y^n$$

da cui

$$g_n^\alpha = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda(\alpha)^{-1} p_\lambda(x).$$

Allora segue che

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-\frac{1}{\alpha}} = \prod_j \sum_n g_n^\alpha(x) y_j^n = \sum_\lambda g_\lambda^\alpha(x) m_\lambda(y)$$

che è equivalente alla tesi per il lemma 2.1.1. □

Corollario 2.1.1. *Le funzioni $\{g_\lambda^\alpha; \lambda \in Par\}$ costituiscono una base di Λ_F*

Osserviamo che le riduzioni ad n variabili delle funzioni simmetriche somme di potenze non sono più linearmente indipendenti nell'algebra $\Lambda_{F,n}$ dei polinomi simmetrici in n variabili, pertanto per definire un prodotto scalare in $\Lambda_{F,n}$ non si può adottare una definizione analoga a quella data in Λ_F in termini di somme di potenze; quello che richiederemo, invece, sarà che si mantenga la dualità fra base monomiale e la base delle g_λ^α. Per assicurarci che ciò sia ben posto abbiamo bisogno della seguente proposizione.

Proposizione 2.1.2. *I polinomi $\{r_n(g_\lambda^\alpha); l(\lambda) \leq n\}$ costituiscono una base di $\Lambda_{F,n}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che ponendo $\alpha = 1$ si ha $g_\lambda^1 = h_\lambda$. Dalla proposizione 1.8.3 si ha che $h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} s_\lambda$, e poichè $\{r_n(s_\lambda); l(\lambda) \leq n\}$ formano una base di Λ_n e $(K_{\lambda,\mu})_{l(\lambda),l(\mu)\leq n}$ è unitriangolare, allora $\{r_n(h_\lambda); l(\lambda) \leq n\}$ è una base di Λ_n. Sia ora α indeterminata, e scriviamo

$$r_n(g_\lambda^\alpha) = \sum_\mu a_{\lambda\mu}(\alpha) r_n(m_\mu)$$

dove la somma è sulle partizioni μ con $l(\mu) \leq n$, perchè $\{r_n(m_\lambda); l(\lambda) \leq n\}$ è una base di Λ_n, e $a_{\lambda\mu}(\alpha) \in F$. La matrice $A(\alpha) = (a_{\lambda\mu}(\alpha))_{l(\lambda),l(\mu)\leq n}$ è non singolare quando $\alpha = 1$, dunque il suo determinante , che è una funzione razionale in α, non può essere identicamente nullo; questo vuol dire che la $A(\alpha)$ è una matrice a coefficienti in F invertibile, e quindi $\{r_n(g_\lambda^\alpha); l(\lambda) \leq n\}$ è base di $\Lambda_{n,F}$. □

Possiamo ora definire, come anticipato, un prodotto scalare su $\Lambda_{n,F}$:

Definizione 2.1.3. *Indichiamo con $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\alpha,n}$ il prodotto scalare su $\Lambda_{F,n}$ individuato dalla richiesta che $\{r_n(g_\lambda^\alpha); l(\lambda) \leq n\}$ e $\{r_n(m_\lambda); l(\lambda) \leq n\}$ siano basi duali, ovvero*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\alpha,n} : \Lambda_{F,n} \times \Lambda_{F,n} \longrightarrow F \quad ; \quad \langle r_n(g_\lambda^\alpha), r_n(m_\mu)\rangle_{\alpha,n} = \delta_{\lambda\mu}$$

Introduciamo ora un endomorfismo che può essere considerato la naturale generalizzazione dell'endomorfismo ω.

Definizione 2.1.4. *Sia $\beta \in F$.Indichiamo con ω_β l'endomorfismo dell'F-algebra delle funzioni simmetriche a coeffiecienti in F definito come segue:*

$$\omega_\beta : \Lambda_F \longrightarrow \Lambda_F \qquad \textit{tale che } \omega_\beta(p_n) = (-1)^{n-1}\beta p_n.$$

Tale definizione è ben posta perchè $\{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ sono generatori algebricamente indipendenti di Λ_F.

Di particolare interesse risulta l'endomorfismo ω_α, che quindi è definito come l'endomorfismo dell'F-algebra delle funzioni simmetriche a coeffiecienti in F tale che

$$\omega_\alpha(p_n) = (-1)^{n-1}\alpha p_n.$$

Poichè ω_α è un endomorfismo di algebre, e quindi in particolare rispetta il prodotto, si ha

$$\omega_\alpha(p_\lambda) = (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)}\alpha^{l(\lambda)}p_\lambda, \tag{2.3}$$

dunque l'endomorfismo ω_α ha una base di autovettori ortogonali; da questo segue direttamente il prossimo risultato.

Proposizione 2.1.3. *L'endomorfismo ω_α è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$.*

Dimostrazione. Per linearità del prodotto scalare e dell'endomorfismo è sufficiente verificare la tesi su una base, ma per le funzioni simmetriche somme di potenze questa è una conseguenza diretta della definizione di ω_α:

$$\begin{aligned}\langle\omega_\alpha(p_\lambda), p_\mu\rangle_\alpha &= (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)}\alpha^{l(\lambda)}\langle p_\lambda, p_\mu\rangle_\alpha = (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)}\alpha^{l(\lambda)}z_\lambda(\alpha)\delta_{\lambda\mu}\\ &= (-1)^{|\mu|-l(\mu)}\alpha^{l(\mu)}z_\mu(\alpha)\delta_{\lambda\mu} = (-1)^{|\mu|-l(\mu)}\alpha^{l(\mu)}\langle p_\lambda, p_\mu\rangle_\alpha\\ &= \langle p_\lambda, \omega_\alpha(p_\mu)\rangle_\alpha\end{aligned}$$

□

Notiamo tuttavia che ω_α in generale non è più un'involuzione (nè un'isometria) di Λ_F. In particolare possiamo osservare che $\omega_\alpha^{-1} = \omega_{\alpha^{-1}}$, infatti segue immediatamente dalla definizione di ω_α che

$$\omega_{\alpha^{-1}}(\omega_\alpha(p_n)) = \omega_{\alpha^{-1}}((-1)^{n-1}\alpha p_n) = p_n.$$

Studiamo ora il comportamento di ω_α su un'altra coppia di basi.

Proposizione 2.1.4. *L'immagine delle funzioni g_λ^α tramite l'endomorfismo ω_α sono le funzioni simmetriche elementari:*

$$\omega_\alpha(g_\lambda^\alpha) = e_\lambda.$$

Dimostrazione. Si consideri ω_α agente sull'insieme di variabili $y = (y_1, y_2 \ldots)$ (rispetto a tale azione, le variabili $x = (x_1, x_2 \ldots)$ si comportano come scalari).

Valgono le seguenti identità:

$$\omega_\alpha \sum_{\lambda \in Par} g_\lambda^\alpha(y) m_\lambda(x) = \omega_\alpha \sum_{\lambda \in Par} z_\lambda(\alpha)^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y)$$
$$= \sum_{\lambda \in Par} (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y) = \sum_{\lambda \in Par} e_\lambda(y) m_\lambda(x),$$

da cui segue la tesi per indipendenza lineare delle funzioni simmetriche monomiali. □

Corollario 2.1.2. *Si ha*

$$\omega_\alpha e_\lambda = g_\lambda^{\alpha^{-1}}.$$

Dimostrazione. Dal teorema precedente si ha

$$\omega_\alpha(g_\lambda^\alpha) = e_\lambda$$

da cui segue, applicando $\omega_\alpha^{-1} = \omega_{\alpha^{-1}}$ ad ambo i membri

$$g_\lambda^\alpha = \omega_{\alpha^{-1}} e_\lambda$$

che è equivalente alla tesi (scambiando i ruoli di α e α^{-1}). □

2.2 Funzioni di Jack

In questa sezione presentiamo una generalizzazione delle funzioni di Schur nell'algebra Λ_F: le funzioni di Jack. In particolare, le proprietà fondamentali di tali funzioni saranno l'unitriangolarità rispetto alla base monomiale ordinata secondo l'ordine di dominanza e l'ortogonalità, ovvero:

$$P_\lambda^\alpha = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu, \qquad \text{(Proposizione 1.8.2)}$$

$$\langle P_\lambda^\alpha, P_\mu^\alpha \rangle_\alpha = 0 \text{ se } \lambda \neq \mu \qquad \text{(Corollario1.8.4)}$$

Tuttavia tali due condizioni costituiscono un sistema sovradeterminato: l'esistenza di una base di Λ_F che soddisfi tali richieste non è ovvia, in quanto l'ordine di dominanza non è lineare. Infatti se si considera la base monomiale ordinata con un ordine lineare qualsiasi compatibile con quello di dominanza, ad esempio l'ordine lessicografico, esiste un'unica base ortogonale e unitriangolare rispetto a quella di partenza (quella costruibile mediante il processo di Gram-Schmidt), pertanto non resta alcun grado di libertà per imporre che nell'espressione di un elemento $P_\lambda^\alpha = m_\lambda + \sum_{\mu \overset{R}{<} \lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu$ della nuova base i coefficienti $u_{\lambda,\mu}$ tali che μ eλ non sono comparabili secondo l'ordine di dominanza siano tutti nulli. L'idea che seguiremo per introdurre tali funzioni dunque sarà quella di presentarle come autovalori di particolari endomorfismi autoaggiunti e unitriangolari di Λ_F. In particolare, lavoreremo prima con un numero finito di variabili, dunque nell'algebra $\Lambda_{F,n}$, per poi generalizzare i risultati in Λ_F.
Sia $x = (x_1 \dots x_n)$ un insieme di variabili; in seguito indicheremo, per non appesantire la notazione, con $f(x)$ la riduzione ad n variabili di f, dove f è una funzione simmetrica. Sia X un'altra indeterminata. Definiamo

$$D_n(X;\alpha) = a_\delta(x)^{-1} \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) x^{\sigma\delta} \prod_{i=1}^{n} (X + (\sigma\delta)_i + \alpha x_i \frac{\partial}{\partial x_i})$$

dove $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$, $a_\delta(x)$ è il determinante di Vandermonde, $\epsilon(\sigma)$ è il segno della permutazione $\sigma \in S_n$, $(\sigma\delta)_i$ è la i-esima componente di $\sigma\delta$, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ è la derivata parziale formale rispetto alla variabile x_i.
Denotiamo ora con D_n^r il coefficiente di X^r in $D_n(X;\alpha)$ per ogni $r = 0, 1, \dots, n$, cioè

$$D_n(X;\alpha) = \sum_{r=0}^{n} D_n^r X^r.$$

Proposizione 2.2.1. *Per ogni $r = 0, 1, \ldots, n$ D_n^r è un endomorfismo di $\Lambda_{F,n}$, ovvero un'applicazione dallo spazio dei polinomi simmetrici in se stesso.*

Dimostrazione. Per dimostrare che l'immagine di un polinomio simmetrico tramite D_n^r è ancora un polinomio simmetrico, basta provare che il coefficiente di X^r in $D_n(X;\alpha)m_\lambda(x)$ lo è. Per prima cosa allora consideriamo l'azione di $D_n(X;\alpha)$ su un monomio qualsiasi x^ρ con $\rho \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned} D_n(X;\alpha)x^\rho &= a_\delta(x)^{-1} \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) x^{\sigma\delta} \prod_{i=1}^n (X + (\sigma\delta)_i + \alpha x_i \frac{\partial}{\partial x_i}) x^\rho \\ &= a_\delta(x)^{-1} \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) x^{\sigma\delta} \prod_{i=1}^n (X + (\sigma\delta)_i + \alpha(\rho)_i) x^\rho. \end{aligned}$$

Cosideriamo ora $\lambda \in Par$; si ha $m_\lambda(x) = |S_n^\lambda|^{-1} \sum_{\sigma \in S_n} x^{\sigma\lambda}$, dove $|S_n^\lambda|$ è la cardinalità del sottogruppo di S_n che fissa λ. Possiamo dunque scrivere

$$\begin{aligned} |S_n^\lambda| D_n(X;\alpha) m_\lambda(x) &= \sum_{\omega \in S_n} a_\delta(x)^{-1} \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) x^{\sigma\delta} \prod_{i=1}^n (X + (\sigma\delta)_i + \alpha(\omega\lambda)_i) x^{\omega\lambda} \\ &= a_\delta(x)^{-1} \sum_{\sigma, \omega \in S_n} \epsilon(\sigma) x^{\sigma\delta} \prod_{i=1}^n (X + (\sigma\delta)_i + \alpha(\omega\lambda)_i) x^{\omega\lambda}. \end{aligned}$$

Poniamo ora $\omega = \sigma\omega_1$. Allora possiamo riscrivere l'espressione precedente in questa forma:

$$\begin{aligned} & a_\delta(x)^{-1} \sum_{\sigma, \omega_1 \in S_n} \epsilon(\sigma) x^{\sigma\delta} \prod_{i=1}^n (X + (\sigma\delta)_i + \alpha(\sigma\omega_1\lambda)_i) x^{\sigma\omega_1\lambda} \\ =& a_\delta(x)^{-1} \sum_{\sigma, \omega_1 \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (X + (\sigma\delta)_i + \alpha(\sigma\omega_1\lambda)_i) x^{\sigma(\omega_1\lambda + \delta)} \\ =& \sum_{\omega_1 \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n (X + (\sigma\delta)_i + \alpha(\rho)_i) \epsilon(\sigma) a_\delta^{-1} x^{\sigma(\omega_1\lambda + \delta)} \\ =& \sum_{\omega_1 \in S_n} \prod_{i=1}^n (X + (n-i) + \alpha(\omega_1\lambda)_i) \frac{a_{\omega_1\lambda+\delta}}{a_\delta}. \end{aligned}$$

Indichiamo l'ultimo termine che compare in tale riformulazione, ovvero $\frac{a_{\omega_1\lambda+\delta}}{a_\delta}$ con $s_{\omega_1\lambda}$; tale termine è zero se in $\omega_1\lambda+\delta$ compaiono due componenti uguali, altrimenti è un polinomio di Schur (a meno di segno): indicando con $(\omega_1\lambda+\delta)^+$ la permutazione di $(\omega_1\lambda+\delta)$ le cui componenti sono ordinate in modo decrescente

e considerando la partizione $\mu = (\omega_1\lambda + \delta)^+ - \delta$, si ha che $s_{\omega_1\lambda}$ è il polinomio di Schur $\pm s_\mu$.
Pertanto l'immagine tramite $D_n(X;\alpha)$ delle monomiali è una combinazione lineare a coefficienti in $F[X]$ di polinomi di Schur, quindi il coefficiente di X^r in tale espressione, per $r = 0, 1, \dots n$ è una combinazione lineare di polinomi di Schur a coefficienti in F, ossia un elemento di $\Lambda_{F,n}$. □

La proposizione precedente dunque afferma che gli operatori D_n^r sono effettivamente endomorfismi di $\Lambda_{F,n}$; dalla sua dimostrazione, inoltre, è possibile dedurre qualche informazione aggiuntiva sulla struttura di tali endomorfismi.

Proposizione 2.2.2. *Gli endomorfismi D_n^r sono triangolari superiori rispetto alla base monomiale. In particolare $D_n(X;\alpha)m_\lambda(x) = \sum_{\mu\le\lambda} c_{\lambda\mu}(X;\alpha)m_\mu$ con gli elementi diagonali $c_{\lambda\lambda}$ tutti distinti.*

Dimostrazione. Dalla dimostrazione della proposizione precedente si ha che

$$D_n(X;\alpha)m_\lambda(x) = |S_n^\lambda|^{-1} \sum_{\omega\in S_n} \prod_{i=1}^{n} (X + (n-i) + \alpha(\omega\lambda)_i)s_{\omega\lambda}(x)$$

dove, come nella dimostrazione della proposizione precedente, $s_{\omega\lambda} = \frac{a_{\omega\lambda+\delta}}{a_\delta}$ può essere zero oppure, a meno di segno, il polinomio di Schur indicizzato dalla partizione $\mu = (\omega\lambda + \delta)^+ - \delta$; poichè δ è strettamente decrescente, si ha che $\mu < \lambda$, dove $<$ indica l'ordine di dominanza, a meno che $\omega\lambda = \lambda$. Pertanto possiamo scrivere

$$D_n(X;\alpha)m_\lambda(x) = \sum_{\mu\le\lambda} a_{\lambda\mu}(X;\alpha)s_\mu,$$

quindi ricordando ora che la base di Schur è triangolare superiore rispetto alla base momomiale, concludiamo

$$D_n(X;\alpha)m_\lambda(x) = \sum_{\mu\le\lambda} c_{\lambda\mu}(X;\alpha)m_\mu$$

ovvero che ogni endomorfismo D_n^r è triangolare superiore rispetto alla base monomiale.
Gli autovalori sono dunque dati dagli elementi diagonali $c_{\lambda\lambda}$, ma poichè la base di Schur è unitriangolare rispetto a quella monomiale si ha che $c_{\lambda\lambda} = a_{\lambda\lambda}$, pertanto vogliamo studiare il coefficiente di s_λ nell'espansione in base di Schur di $D_n(X;\alpha)m_\lambda(x)$. Tuttavia sappiamo che $s_{\omega\lambda} = s_\lambda$ se e solo se $\omega \in S_n^\lambda$, pertanto il

coefficiente cercato è dato da

$$c_{\lambda\lambda} = \prod_{i=1}^{n} (X + (n-i) + \alpha\lambda_i),$$

allora si ha che $c_{\lambda\lambda} = c_{\mu\mu}$ se e solo se $\lambda = \mu$. □

Vogliamo ora provare che gli endomorfismi D_n^r sono autoaggiunti; a tal fine introduciamo il seguente lemma.

Lemma 2.2.1. *Un endomorfismo E di Λ_F è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ se e solo*

$$E_x(\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}) = E_y(\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}})$$

dove la x (rispettivamente la y) al pedice indica che l'endomorfismo E agisce sulle variabili x (rispettivamente y).

Dimostrazione. Siano $\lambda, \mu \in Par$, scriviamo $e_{\lambda\mu} = \langle Em_\lambda, m_\mu\rangle$. L'endomorfismo E è autoaggiunto se e solo se $e_{\lambda\mu} = e_{\mu\lambda}$ per ogni $\lambda, \mu \in Par$, perchè le funzioni monomiali cono una base per Λ_F.
Inoltre poichè la base $\{g_\lambda^\alpha; \lambda \in Par\}$ è la base duale di quella monomiale, si ha $Em_\lambda = \sum_\mu e_{\lambda\mu} g_\mu$. Allora ricordando che $\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}} = \sum_\lambda m_\lambda(x) g_\lambda^\alpha(y) = \sum_\lambda m_\lambda(y) g_\lambda^\alpha(x)$, possiamo osservare che

$$E_x(\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}) = \sum_{\lambda\mu} e_{\lambda\mu} g_\mu^\alpha(x) g_\lambda^\alpha(y)$$
$$E_y(\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}) = \sum_{\lambda\mu} e_{\lambda\mu} g_\mu^\alpha(y) g_\lambda^\alpha(x)$$

pertanto, per indipendenza lineare delle g_λ^α, queste due coincidono se e solo se $e_{\lambda\mu} = e_{\mu\lambda}$, ovvero se E è autaggiunto. □

Corollario 2.2.1. *Un endomorfismo E di $\Lambda_{F,n}$ è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\alpha,n}$ se e solo*

$$E_x(\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}) = E_y(\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}})$$

Dimostrazione. Basta ripercorrere la dimostrazione del lemma precedente, in cui il numero di variabili non riveste mai un ruolo fondamentale. □

Proposizione 2.2.3. *Gli endomorfismi D_n^r sono autoaggiunti rispetto al prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\alpha,n}$.*

Dimostrazione. Per il lemma precedente, basta provare che per ogni $r = 0, 1, \ldots n$

$$(D_n^r)_x(\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}) = (D_n^r)_y(\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}),$$

o equivalentemente che

$$D_n(X;\alpha)_x(\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}) = D_n(X;\alpha)_y(\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}). \tag{2.4}$$

Osserviamo che per ogni $k = 1, \ldots, n$ si ha che

$$\begin{aligned}
&(\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{\frac{1}{\alpha}})\alpha x_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}})\\
&=\prod_{j=1}^{n}(1-x_ky_j)^{\frac{1}{\alpha}}\alpha x_k(\sum_{h=1}^{n}\prod_{j\neq h}(1-x_ky_j)^{(-\frac{1}{\alpha}-1)}(-\frac{1}{\alpha}y_h) = \sum_{h=1}^{n}-y_h(1-x_ky_h)^{-1}.
\end{aligned}$$

Tale espressione è indipendente da α, pertanto lo è anche

$$(\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{\frac{1}{\alpha}})D_n(X;\alpha)_x(\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-\frac{1}{\alpha}}).$$

Allora per provare (2.4) o equivalentemente la tesi è sufficiente porsi nel caso $\alpha = 1$.
Osserviamo che per ogni polinomio f e per ogni permutazione σ si ha

$$x^{\sigma\delta}(X+(\sigma\delta_i)+x_i\frac{\partial}{\partial x_i})f = (X+x_i\frac{\partial}{\partial x_i})(x^{\sigma\delta}f),$$

per cui

$$x^{\sigma\delta}\prod_{i=1}^{n}(X+(\sigma\delta_i)+x_i\frac{\partial}{\partial x_i})f = \prod_{i=1}^{n}(X+x_i\frac{\partial}{\partial x_i})(x^{\sigma\delta}f).$$

Segue dunque che

$$\begin{aligned}
D_n(X;1)f &= a_\delta^{-1}\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)x^{\sigma\delta}\prod_{i=1}^{n}(X+(\sigma\delta_i)+x_i\frac{\partial}{\partial x_i})f\\
&= a_\delta^{-1}\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(X+x_i\frac{\partial}{\partial x_i})(x^{\sigma\delta}f) = a_\delta^{-1}\prod_{i=1}^{n}(X+x_i\frac{\partial}{\partial x_i})(a_\delta f)
\end{aligned}$$

e quindi in particolare per ogni partizione λ tale che $l(\lambda) \leq n$

$$\begin{aligned} D_n(X;1)s_\lambda &= a_\delta^{-1} \prod_{i=1}^{n} (X + x_i \frac{\partial}{\partial x_i})(a_{\lambda+\delta}) \\ &= a_\delta^{-1} \prod_{i=1}^{n} (X + \lambda_i + n - i) a_{\lambda+\delta} = \prod_{i=1}^{n} (X + \lambda_i + n - i) s_\lambda \end{aligned}$$

Osserviamo che inoltre quando $\alpha = 1$ si ha che il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,n}$ coincide con il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ definito nel capitolo precedente, rispetto al quale $\{s_\lambda; l(\lambda) \leq n\}$ è una base ortonormale, pertanto (l'indeterminata X si comporta come uno scalare rispetto al prodotto scalare in $\Lambda_{F,1}$)

$$\langle D_n(X;1)s_\lambda, s_\mu \rangle_{1,n} = 0 \qquad \text{se } \lambda \neq \mu$$

per cui

$$\langle D_n(X;1)s_\lambda, s_\mu \rangle_{1,n} = \langle s_\lambda, D_n(X;1)s_\mu \rangle_{1,n}.$$

□

Abbiamo dunque definito gli operatori D_n^r e stabilito le loro proprietà fondamentali. Possiamo ora presentare il risultato fondamentale di questo capitolo, ossia l'esistenza (e unicità) delle cosiddette *funzioni di Jack*.

Teorema 2.2.2. *Per ogni $\lambda \in Par$ esiste un'unica funzione simmetrica $P_\lambda^\alpha \in \Lambda_F$ tale che*

- $P_\lambda^\alpha = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu$ *(dove $u_{\lambda\mu} \in F$ e $<$ indica l'ordine di dominanza)*
- $\langle P_\lambda^\alpha, P_\mu^\alpha \rangle_\alpha = 0$ *se $\lambda \neq \mu$*

Dimostrazione. Ricordiamo dalla Proposizione 2.2.2 che

$$D_n(X;\alpha)m_\lambda(x) = \sum_{\mu \leq \lambda} c_{\lambda\mu}(X;\alpha) m_\mu$$

e gli elementi diagonali $c_{\lambda\lambda}$ sono tutti distinti. Vogliamo ora costruire le funzioni P_λ^α come nell'enunciato ponendole essere il limite in infinite variabili degli autovettori degli endomorfismi D_n^r; tutte le funzioni che compariranno d'ora in avanti nella dimostrazione, salvo quando diversamente indicato, vanno intese come polinomi in n variabili. Sia ora

$$P_\lambda^\alpha = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu \tag{2.5}$$

dove i coefficienti $u_{\lambda\mu}$ non sono ancora determinati. Si ha che

$$D_n(X;\alpha)P_\lambda^\alpha = c_{\lambda\lambda}(X;\alpha)P_\lambda^\alpha \tag{2.6}$$

se e solo se

$$\sum_{\mu\leq\lambda} u_{\lambda\mu} \sum_{\rho\leq\mu} c_{\mu\rho}(X;\alpha)m_\rho = c_{\lambda\lambda}(X;\alpha) \sum_{\rho\leq\lambda} u_{\lambda\rho}m_\rho$$

ovvero, per indipendenza lineare delle m_ρ, per ogni $\rho < \lambda$ si ha

$$\sum_{\rho\leq\mu\leq\lambda} u_{\lambda\mu}c_{\mu\rho}(X;\alpha) = c_{\lambda\lambda}(X;\alpha)u_{\lambda\rho}$$

o equivalentemente (sottraendo $c_{\rho\rho}(X;\alpha)u_{\lambda\rho}$ ad ambo i membri)

$$\sum_{\rho<\mu\leq\lambda} u_{\lambda\mu}c_{\mu\rho}(X;\alpha) = (c_{\lambda\lambda}(X;\alpha) - c_{\rho,\rho}(X;\alpha))u_{\lambda\rho}.$$

Poichè se $\lambda \neq \rho$ si ha $c_{\lambda\lambda}(X;\alpha) \neq c_{\rho\rho}(X;\alpha)$, quest'equazione determina univocamente $u_{\lambda\rho}$ in funzione di $u_{\lambda\mu}$ con $\rho < \mu \leq \lambda$, pertanto per ogni λ risulta univocamente determinata una funzione che soddisfi le condizioni (2.5) e (2.6). Inoltre per la Proposizione 2.2.3 si ha

$$\begin{aligned} c_{\lambda\lambda}(X;\alpha)\langle P_\lambda^\alpha, P_\mu^\alpha\rangle_{\alpha,n} &= \langle D_n(X;\alpha)P_\lambda^\alpha, P_\mu^\alpha\rangle_{\alpha,n} \\ &= \langle P_\lambda^\alpha, D_n(X;\alpha)P_\mu^\alpha\rangle_{\alpha,n} = c_{\rho\rho}(X;\alpha)\langle P_\lambda^\alpha, P_\mu^\alpha\rangle_{\alpha,n}, \end{aligned}$$

da cui possiamo dedurre, poichè $c_{\lambda\lambda}(X;\alpha) \neq c_{\rho\rho}(X;\alpha)$ se $\lambda \neq \rho$, che

$$\langle P_\lambda^\alpha, P_\mu^\alpha\rangle_{\alpha,n} = 0 \qquad \text{se } \lambda \neq \mu.$$

Dunque i polinomi di Jack così costruiti sono unitriangolari rispetto alla base monomiale e ortogonali; queste due proprietà bastano inoltre a caratterizzarli univocamente: per induzione, supponiamo di aver determinato P_μ^α per ogni $\mu < \lambda$ (osservando che l'insieme delle partizioni rispetto all'ordine di dominanza ammette minimo (1^n) e $P_{1^n} = m_{1^n}$ per unitriangolarità), allora possiamo scrivere

$$P_\lambda^\alpha = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} v_{\lambda\mu}P_\mu$$

perchè la matrice di cambiamento di base fra quella monomiale e quella di Jack è unitriangolare, e dunque imponendo l'ortogonalità si ha

$$v_{\lambda\mu} = -\frac{\langle m_\lambda, P_\mu^\alpha\rangle_{\alpha,n}}{\langle P_\mu^\alpha, P_\mu^\alpha\rangle_{\alpha,n}}.$$

Osserviamo allora che scelta una qualsiasi linearizzazione dell'ordine di dominanza, il procedimento di Gram-Schmidt sulle monomiali ordinate secondo tale ordinamento costruisce l'unica base ortogonale che sia unitriangolare rispetto a quella iniziale; tuttavia le funzioni di Jack soddisfano entrambe tali proprietà qualsiasi sia la linearizzazione scelta, pertanto la base trovata deve essere proprio quella delle funzioni P_λ^α. Se ne deduce dunque che i coefficienti $u_{\lambda\mu}$ possono essere calcolati ricorsivamente tramite il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla base monomiale ordinata con un ordinamento lineare compatibile con l'ordine di dominanza, pertanto essi saranno sempre funzioni razionali in α (senza alcuna dipendenza da X): $u_{\lambda,\mu} \in F$.
Quanto finora detto prova l'esistenza e unicità dei polinomi di Jack, ossia polinomi unitriangolari rispetto alla base monomiale con l'ordine di dominanza e ortogonali, in $\Lambda_{F,n}$. Inoltre se si considera un numero di variabili abbastanza grande, ad esempio $n \geq |\lambda|$, si ha che $\langle m_\mu, m_\rho\rangle_\alpha = \langle r_n(m_\mu), r_n(m_\rho)\rangle_{\alpha,n}$ per ogni $\mu, \rho \leq \lambda$, pertanto i coefficienti $u_{\lambda\mu}$ non dipendono dal numero di variabili n (ammesso che questi sia abbastanza grande, altrimenti alcuni di essi possono annullarsi). Possiamo allora lasciare che il numero di variabili sia infinito, e restano ben poste, continuando a soddisfare le proprietà richieste nell'enunciato e ad essere univocamente caratterizzate da esse, le cosiddette funzioni di Jack in Λ_F, definite da

$$P_\lambda^\alpha = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu.$$

□

2.3 Prime proprietà delle funzioni di Jack

In questa sezione enunciamo alcune proprietà, spesso combinatorie, delle funzione di Jack; in particolare, ci soffermeremo sulla generalizzazione in questo caso più ampio di molte delle proprietà delle funzioni di Schur studiate nel capitolo precedente.
Osserviamo in primo luogo alcuni casi particolari.

Proposizione 2.3.1. *Si hanno le seguenti identità:*

$$P^{\alpha}_{1^r} = m_{1^r} = e_r$$
$$P^{1}_{\lambda} = s_{\lambda}.$$

Dimostrazione. La prima identità è vera per struttura unitriangolare delle funzioi di Jack rispetto alla base monomiale, considerando che 1^r è il minimo delle partizioni di r secondo l'ordine di dominanza. La seconda identità segue dall'unicità della base di Jack, che è caratterizzata dall'essere unitriangolare rispetto alla monomiale con ordine di dominanza e ortogonale, in quanto le funzioni di Schur soddisfano tali proprietà (osservando che il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ coincide con quello definito nel capitolo 1). □

Dalla definizione delle funzioni di Jack, inoltre, risulta immediato il seguente risultato.

Proposizione 2.3.2. *Si ha che $r_n(P^{\alpha}_{\lambda}) \neq 0$ se e solo se $l(\lambda) \leq n$.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che la matrice di cambiamento di base fra funzioni di Jack e base monomiale è unitriangolare. □

Le funzioni di Jack sono inoltre ortogonali per costruzione; tuttavia, mentre le funzioni di Schur costituivano una base ortonormale, non c'è alcuna ragione per cui in generale la forma quadratica calcolata nelle funzioni di Jack debba essere 1. Tuttavia quest'ultima è calcolabile esplicitamente e per scriverla in forma compatta introduciamo le seguenti notazioni, che generalizzano quella di *"uncino"* data nel capitolo precedente.

Definizione 2.3.1. *Sia $\lambda \in Par$, e sia s la cella di posto (i, j) nel diagramma di Ferrers di λ. Allora, usando le notazioni della definizione 1.8.2, poniamo*

$$h^{up}_{\lambda}(\alpha; s) = \alpha(a_{\lambda}(s) + 1) + l_{\lambda}(s),$$
$$h^{low}_{\lambda}(\alpha; s) = \alpha a_{\lambda}(s) + l_{\lambda}(s) + 1;$$

tali elementi di F vengono talvolta indicati rispettivamente come "uncino superiore" ed "uncino inferiore" relativo ad s in λ.

Si ha il seguente risultato.

Proposizione 2.3.3. *Indichiamo con b_λ^α l'inverso della forma quadratica calcolata in P_λ^α, ossia*

$$b_\lambda^\alpha = \langle P_\lambda^\alpha, P_\lambda^\alpha \rangle_\alpha^{-1}.$$

Allora si ha

$$b_\lambda^\alpha = \prod_{s\in\lambda} \frac{h_\lambda^{low}(\alpha; s)}{h_\lambda^{up}(\alpha; s)}.$$

Con questa notazione definiamo la base duale della base di Jack, che indichiamo come

$$Q_\lambda^\alpha = b_\lambda^\alpha P_\lambda^\alpha$$

che per definizione di b_λ^α, data l'ortogonalità della base di Jack, soddisfa

$$\langle P_\lambda^\alpha, Q_\mu^\alpha \rangle_\alpha = \delta_{\lambda\mu}.$$

Osserviamo che nel caso $\alpha = 1$ sia l'uncino superiore che quello inferiore coincidono con l'uncino definito nel capitolo 1, pertanto si ha $b_\lambda^1 = 1$, coerentemente con il fatto che $\langle P_\lambda^1, P_\lambda^1 \rangle_1 = \langle s_\lambda^1, s_\lambda^1 \rangle_1 = 1$, e in particolare $Q_\lambda^1 = P_\lambda^1 = s_\lambda$.
Possiamo inoltre chiederci come agisca l'endomorfismo ω_α sulle funzioni P_λ^α, ricordando che nel caso $\alpha = 1$ si ha $\omega s_\lambda = s_{\lambda'}$.

Proposizione 2.3.4. *L'endomorfismo ω_α agisce sulla base di Jack nel modo seguente:*

$$\omega_\alpha P_\lambda^\alpha = Q_{\lambda'}^{\alpha^{-1}}.$$

Da tale risultato possiamo anche dedurre che $Q_r^\alpha = g_r^\alpha$. Infatti

$$Q_r^\alpha = \omega_{\alpha^{-1}} P_{1^r}^{\alpha^{-1}} = \omega_{\alpha^{-1}} e_r = g_r^\alpha.$$

Le formule di Pieri, che esprimono il il prodotto di funzioni di Schur con funzioni elementari e complete del tipo e_n, h_n, hanno un'elegante generalizzazione in termini di funzioni di Jack.

Proposizione 2.3.5. *Valgono le seguenti identità, note come Formule di Pieri per le funzioni di Jack:*

$$P^{\alpha}_{\mu} g^{\alpha}_{r} = \sum_{\lambda} \phi_{\lambda/\mu} P^{\alpha}_{\lambda}, \quad \textit{dove } \lambda \in Par \textit{ tale che } \lambda/\mu \textit{ è r-striscia orizzontale,}$$

$$Q^{\alpha}_{\mu} g^{\alpha}_{r} = \sum_{\lambda} \psi_{\lambda/\mu} Q^{\alpha}_{\lambda}, \quad \textit{dove } \lambda \in Par \textit{ tale che } \lambda/\mu \textit{ è r-striscia orizzontale,}$$

$$Q^{\alpha}_{\mu} e_{r} = \sum_{\lambda} \phi'_{\lambda/\mu} Q^{\alpha}_{\lambda}, \quad \textit{dove } \lambda \in Par \textit{ tale che } \lambda/\mu \textit{ è r-striscia verticale,}$$

$$P^{\alpha}_{\mu} e_{r} = \sum_{\lambda} \psi'_{\lambda/\mu} P^{\alpha}_{\lambda}, \quad \textit{dove } \lambda \in Par \textit{ tale che } \lambda/\mu \textit{ è r-striscia verticale.}$$

I coefficienti sono definiti nel modo seguente:

$$\phi_{\lambda/\mu} = \prod_{s \in C_{\lambda/\mu}} \frac{h^{low}_{\lambda}(s;\alpha)}{h^{up}_{\lambda}(s;\alpha)} \frac{h^{up}_{\mu}(s;\alpha)}{h^{low}_{\mu}(s;\alpha)},$$

$$\psi_{\lambda/\mu} = \prod_{s \in R_{\lambda/\mu} - C_{\lambda/\mu}} \frac{h^{low}_{\mu}(s;\alpha)}{h^{up}_{\mu}(s;\alpha)} \frac{h^{up}_{\lambda}(s;\alpha)}{h^{low}_{\lambda}(s;\alpha)}.$$

$$\phi'_{\lambda/\mu} = \prod_{s \in R_{\lambda/\mu}} \frac{h^{low}_{\mu}(s;\alpha)}{h^{up}_{\mu}(s;\alpha)} \frac{h^{up}_{\lambda}(s;\alpha)}{h^{low}_{\lambda}(s;\alpha)},$$

$$\psi'_{\lambda/\mu} = \prod_{s \in C_{\lambda/\mu} - R_{\lambda/\mu}} \frac{h^{low}_{\lambda}(s;\alpha)}{h^{up}_{\lambda}(s;\alpha)} \frac{h^{up}_{\mu}(s;\alpha)}{h^{low}_{\mu}(s;\alpha)}.$$

Dove $C_{\lambda/\mu}$ (rispettivamente $R_{\lambda/\mu}$) denota l'unione delle colonne (rispettivamente righe) di μ che intersecano λ/μ.

	s		s	
	s			
	s			

Figura 2.1: Le celle di $C_{\lambda/\mu}$ con $\lambda = (5,4,2,2)$ e $\mu = (5,3,2,1)$ sono quelle evidenziate in figura con delle s.

Si osservi che tali formule sono in realtà tutte equivalenti: se ad esempio si assume la prima, la seconda è semplicemente una sua riformulazione ricordando

che $Q_\lambda^\alpha = b_\lambda^\alpha P_\lambda^\alpha$ e l'espressione di b_λ^α data nella Proposizione 2.3.3, mentre la terza e la quarta si ottengono applicando l'endomorfismo ω_α rispettivamente alla prima e alla seconda equazione.
Con opportune manipolazioni, da tali formule si ottiene un'interpretazione combinatoria per i coefficienti $u_{\lambda\mu}$ dell'espansione di P_λ^α nella base monomiale, ovvero per la generalizzazione dei numeri di Kostka.

Proposizione 2.3.6. *Sia $u_{\lambda\mu}$ il coefficiente relativo a m_μ nell'espansione di P_λ^α nella base monomiale, i.e $P_\lambda^\alpha = \sum_{\mu \leq \lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu$. Allora si ha*

$$u_{\lambda\mu} = \sum_T \psi_T, \quad \text{dove } T \text{ varia nelle } SSYT \text{ di forma } \lambda \text{ e tipo } \mu,$$

dove definiamo ψ_T con T SSYT di forma λ e tipo μ nel modo seguente:
si consideri la sequenza di partizioni $\emptyset = \lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \cdots \subset \lambda_{l(\mu)} = \lambda$ determinata da T in modo che λ_i sia la partizione relativa al diagramma di Ferrers costituito dalle celle di T aventi come riempimento un numero in $\{1, 2, \ldots, i\}$; si ha

$$\psi_T = \prod_{i=1}^{l(\mu)} \psi_{\lambda_i/\lambda_{i-1}},$$

dove $\psi_{\rho/\eta}$, con $\eta \subset \rho \in Par$, è definito come nella proposizione precedente.

Illustriamo il contenuto della proposizione precedente tramite un esempio:

$$P_{(2,1)}^\alpha = m_{(2,1)} + u_{(2,1),(1,1,1)} m_{(1,1,1)}.$$

Calcoliamo $u_{(2,1),(1,1,1)}$ tramite la proposizione precedente; le *SSYT* di forma $(2,1)$ e tipo $(1,1,1)$ sono le seguenti:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

consideriamo $T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$;
la sequenza di partizioni ad essa associata è $\emptyset \subset (1) \subset (2) \subset (2,1)$. Si ha

$$\psi_{(1)/\emptyset} = 1, \quad \text{perchè la produttoria è vuota,}$$

$$\psi_{(2)/(1)} = \frac{h_{(1)}^{low}((1,1);\alpha)}{h_1^{up}((1,1);\alpha)} \frac{h_{(2)}^{up}((1,1);\alpha)}{h_{(2)}^{low}((1,1);\alpha)} = \frac{1}{\alpha} \frac{2\alpha}{\alpha+1},$$

$$\psi_{(2,1)/(2)} = 1, \quad \text{perchè la produttoria è vuota.}$$

Pertanto

$$\psi_{T_1} = \frac{1}{\alpha}\frac{2\alpha}{\alpha+1}.$$

Consideriamo ora $T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$;
la sequenza di partizioni ad essa associata è $\emptyset \subset (1) \subset (1,1) \subset (2,1)$. Si ha

$$\psi_{(1)/\emptyset} = 1, \quad \text{perchè la produttoria è vuota,}$$

$$\psi_{(1,1)/(1)} = 1, \quad \text{perchè la produttoria è vuota,}$$

$$\psi_{(2,1)/(1,1)} = \frac{h^{low}_{(1,1)}((1,1);\alpha)}{h^{up}_{1,1}((1,1);\alpha)}\frac{h^{up}_{(2,1)}((1,1);\alpha)}{h^{low}_{(2,1)}((1,1);\alpha)} = \frac{2}{\alpha+1}\frac{1+2\alpha}{\alpha+2}.$$

Pertanto

$$\psi_{T_2} = \frac{2}{\alpha+1}\frac{1+2\alpha}{\alpha+2}.$$

Si ha quindi

$$u_{\lambda\mu} = \psi_{T_1} + \psi_{T_2} = \frac{2}{\alpha+1}\frac{1+2\alpha}{\alpha+2} + \frac{2}{\alpha+1}\frac{1+2\alpha}{\alpha+2} = \frac{6}{\alpha+2},$$

ovvero

$$P^{\alpha}_{(2,1)} = m_{(2,1)} + \frac{6}{\alpha+2}m_{(1,1,1)}.$$

Osserviamo ora il comportamento delle funzioni di Jack sotto l'azione della valutazione costante.

Proposizione 2.3.7. *Sia $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in Par$; allora si ha*

$$P_{\lambda}(1^n) = \prod_{s\in\lambda} \frac{n + \alpha a'_{\lambda}(s) - l'_{\lambda}(s)}{h^{low}_{\lambda}(s;\alpha)}.$$

In ultimo, segnaliamo che spesso si considera una modifica delle funzioni di Jack ottenuta tramite una moltiplicazione per scalare: si definisce

$$c^{\alpha}_{\lambda} = \prod_{s\in\lambda} h^{low}_{\lambda}(s;\alpha)$$

e si pone

$$J^{\alpha}_{\lambda} = c^{\alpha}_{\lambda}P^{\alpha}_{\lambda}.$$

L'interesse nel considerare queste funzioni invece delle funzioni di Jack P^{α}_{λ} risiede nel fatto che i coefficienti di tali funzione rispetto alla base monomiale sono polinomi in α a coefficienti interi e positivi (ovvero sono elementi di $\mathbb{N}[\alpha]$).

Ad esempio, per quanto riguarda $P^{\alpha}_{(2,1)}$, di cui abbiamo calcolato i coefficienti precedentemente, si ha $c^{\alpha}_{\lambda} = (\alpha + 2)$, pertanto

$$J_{(2,1)} = (\alpha + 2)m_{2,1} + 6m_{1,1,1}$$

Capitolo 3

Funzioni simmetriche nel superspazio e superfunzioni di Jack

3.1 Superpartizioni

L'argomento di questo capitolo sono le funzioni supersimmetriche, ovvero funzioni simmetriche in cui accanto alle variabili classiche commutative compaiono anche delle nuove variabili anticommutative. Come per indicizzare gli elementi di una base dello spazio delle funzioni simmetriche abbiamo avuto bisogno della nozione di partizione, così per le basi dello spazio delle funzioni supersimmetriche dobbiamo definire le *"superpartizioni"*. Per tali oggetti presenteremo ora due rappresentazioni equivalenti, poichè a seconda dell'utilizzo l'una può risultare più comoda dell'altra.

Definizione 3.1.1. *Una superpartizione* Λ *di grado* $(n|m)$*, in cui* n *si dice "grado pari" ed* m *"grado dispari" della partizione, è una coppia di partizioni*

$$\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s) = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m; \Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_l)$$

che soddisfa

$$\Lambda_1 > \Lambda_2 > \cdots > \Lambda_m \geq 0, \qquad \Lambda_{m+1} \geq \Lambda_{m+2} \geq \cdots \geq \Lambda_l > 0$$

e tale che

$$m = l(\Lambda^a), \qquad n = |\Lambda| = \sum_{i=1}^{l} \Lambda_i.$$

Diciamo che il numero di interi non negativi che compaiono in Λ *in tale rappresentazione è la lunghezza di* Λ*, e scriviamo* $l(\Lambda) = l$*.*

L'insieme delle superpartizioni di grado $(n|m)$ si indica con *SPar(n|m)*; se $\Lambda \in SPar(n|m)$ scriviamo $\Lambda \vdash (n|m)$.
Alternativamente, possiamo descrivere una superpartizione nel modo seguente.

Definizione 3.1.2. *Una superpartizione* Λ *di grado* $(n|m)$ *e lunghezza* l *è descritta da una coppia di partizioni, che denotiamo con* $(\Lambda^*; \Lambda^{\circledast})$*, che soddisifino*

- $\Lambda^* \subset \Lambda^{\circledast}$*, ossia* $\Lambda^*_i \leq \Lambda^{\circledast}_i$ *per ogni* $i = 1, \dots, l$*;*
- $|\Lambda^*| = n$*;*
- $l(\Lambda^{\circledast}) = l$*;*
- $\Lambda^{\circledast}/\Lambda^*$ *è una* m*-striscia sia orizzontale che verticale.*

Le due definizioni sono equivalenti. Infatti la biezione fra le due rappresentazioni è data dalla funzione che associa ad ogni coppia $(\Lambda^*, \Lambda^\circledast)$ che soddisfi la seconda definizione una coppia $(\Lambda^a; \Lambda^s)$ definita in modo tale che le componenti di Λ^s siano date dagli elementi di Λ^* che soddisfano $\Lambda_i^\circledast = \Lambda_i^*$, mentre quelle di Λ^a siano gli elementi di Λ^* che soddisfano $\Lambda_i^\circledast \neq \Lambda_i^*$; la coppia di partizioni così ottenuta è una superpartizione perchè gli elementi di Λ^a sono tutti distinti (perchè $\Lambda^\circledast/\Lambda^*$ è una striscia verticale), inoltre se $(\Lambda^\circledast, \Lambda^*)$ aveva grado $(n|m)$ (rispetto alla definizione data per la seconda rappresentazione) allora anche la superpartizione $(\Lambda^a; \Lambda^s)$ associata avrà grado $(n|m)$ (rispetto alla definizione data per la prima rappresentazione): poichè le sue componenti sono esattamente le stesse di Λ^*, deduciamo che il grado pari è n, mentre il grado dispari è m perchè $\Lambda^\circledast/\Lambda^*$ è una m-striscia orizzontale e verticale. Il fatto che tale mappa sia una biezione si può mostrare definendo l'inversa, che è la funzione che data una coppia (Λ^a, Λ^s) che soddisfi la prima definizione vi associa una coppia $(\Lambda^*, \Lambda^\circledast)$ definita in modo che Λ^* sia ottenuta ordinando in modo decrescente tutte le componenti di $(\Lambda^a; \Lambda^s)$, mentre $\Lambda^\circledast$ sia ottenuta ordinando in modo decrescente tutte le componenti di Λ^s e quelle di Λ^a aumentate di 1.
Ad esempio:
sia

$$\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s) = (5, 3, 0; 4, 3, 1, 1)$$

una superpartizione di grado $(3|17)$ e lunghezza $l(\Lambda) = 7$. Questa può essere rappresentata anche dalle due partizioni

$$\Lambda^* = (5, 4, 3, 3, 1, 1)$$
$$\Lambda^\circledast = (6, 4, 4, 3, 1, 1, 1).$$

Una rappresentazione grafica particolarmente intuitiva delle superpartizioni è costituita dai *superdiagrammi.*

Definizione 3.1.3. *Un superdiagramma associato ad una superpartizione $\Lambda =$ è il diagramma di Ferrers relativo alla partizione $\Lambda^\circledast$ in cui le celle relative a $\Lambda^\circledast/\Lambda^*$ sono rappresentate con dei cerchi.*

Ad esempio:
cosiderando la superpartizione dell'esempio precedente $\Lambda = (5, 3, 0; 4, 3, 1, 1)$, che può essere rappresentata dalle partizioni $\Lambda^* = (5, 4, 3, 3, 1, 1)$, $\Lambda^\circledast = (6, 4, 4, 3, 1, 1, 1)$, si ha il seguente superdiagramma associato:

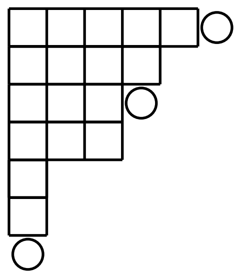

Figura 3.1: Superdiagramma relativo alla superpartizione $\Lambda = (5, 3, 0; 4, 3, 1, 1)$

Definizione 3.1.4. *Sia $\Lambda \in SPar(n|m)$. Definiamo superpartizione coniugata di Λ la superpartizione che, nella rappresentazione della forma $(\Lambda^*, \Lambda^{\circledast})$, è data da*

$$\Lambda' = ((\Lambda^*)', (\Lambda^{\circledast})').$$

Equivalentemente, Λ' è la superpartizione associata al superdiagramma ottenuto trasponendo il superdiagramma relativo a Λ.

Ad esempio: considerando ancora la superpartizione $\Lambda = (5, 3, 0; 4, 3, 1, 1)$, si ha

$$(\Lambda^*)' = (6, 4, 4, 2, 1) \qquad\qquad (\Lambda^{\circledast})' = (7, 4, 4, 3, 1, 1),$$

dunque nella rappresentazione della forma $(\Lambda^a; \Lambda^s)$ si ha $\Lambda' = (6, 2, 0; 4, 4, 1)$. Graficamente, il superdiagramma relativo a tale superpatizione è il trasposto di quello rappresentato in figura 3.1:

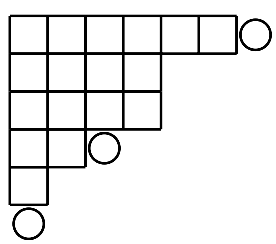

Figura 3.2: Superdiagramma relativo alla superpartizione $\Lambda = (6, 2, 0; 4, 4, 1)$

Come nel caso delle partizioni, è possibile definire degli ordinamenti su $SPar$ (o su $SPar(n|m)$ con n, m fissati).

- Siano $\Omega, \Lambda \in Spar$. Diciamo che $\Omega \subseteq \Lambda$ se e solo se

$$\Omega^* \subseteq \Lambda^* \qquad\qquad \Omega^{\circledast} \subseteq \Lambda^{\circledast},$$

ovvero se $\Omega_i^* \le \Lambda_i^*$ e $\Omega_i^{\circledast} \le \Lambda_i^{\circledast}$ per ogni i. Graficamente, $\Omega \subseteq \Lambda$ se e solo se il superdiagramma di Ω è contenuto in quello di Λ, con la convenzione che un cerchio può essere contenuto in un quadrato ma non viceversa.

- Siano $\Omega, \Lambda \in Spar(n|m)$. Diciamo che $\Omega \le \Lambda$ se e solo se

$$\Omega^* \le \Lambda^* \qquad \qquad \Omega^{\circledast} \le \Lambda^{\circledast},$$

ovvero se $\sum_{i=1}^k \Omega_i^* \le \sum_{i=1}^k \Lambda_i^*$ e $\sum_{i=1}^k \Omega_i^{\circledast} \le \sum_{i=1}^k \Lambda_i^{\circledast}$ per ogni k. Tale ordine è un'estensione dell'*ordine di dominanza* classico alle superpartizioni, ed è un ordine parziale su $SPar(n|m)$ con n, m fissati. Graficamente, $\Omega \le \Lambda$ se e solo se il superdiagramma di Ω si può ottenere da quello di Λ "trasportando in basso" dei quadrati o dei cerchi.

3.2 Funzioni simmetriche nel superspazio

Introduciamo ora l'argomento centrale di questo capitolo, ossia la generalizzazione delle funzioni simmetriche tramite l'aggiunta di variabili anticommutative. Per farlo, lavoriamo inizialmente con un numero finito di variabili, definendo i superpolinomi, dopodichè tramite questi definiremo formalmente le funzioni simmetriche nel superspazio.

Definizione 3.2.1. *Sia R un anello commutativo unitario, sia $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ un insieme di N variabili commutative, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ un insieme di N variabili anticommutative, i.e. $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$; diciamo superpolinomi su R i polinomi in queste $2N$ variabili (x, θ) e a coefficienti in R , e indichiamo con $R[x, \theta]$ l'anello dei superpolinomi.*
Consideriamo il gruppo simmetrico S_N agente in modo "diagonale" sui superpolinomi, ovvero simultaneamente sui due insiemi di variabili:

$$\sigma \in S_N \quad : \quad x_i, \theta_i \longrightarrow x_{\sigma(i)}, \theta_{\sigma(i)} \qquad \textit{per } i = 1, 2, \dots, N.$$

Diciamo superpolinomi simmetrici su R quelli invarianti rispetto a tale azione di S_N, ovvero quelli costituenti il sottoanello di $R[x, \theta]$, che indichiamo con $A_{R,N}$, fissato da S_N: $A_{R,N} = R[x, \theta]^{S_N}$.

Lo spazio dei superpolinomi simmetrici a coefficienti in R è, oltre che un anello, un R-modulo. In questo capitolo, R sarà sempre un campo: in particolare, inizialmente considereremo $R = \mathbb{Q}$, poi $R = \mathbb{Q}(\alpha)$; in entrambi i casi, comunque, lo spazio dei superpolinomi simmetrici sarà uno spazio vettoriale, e quindi un'algebra. Inoltre $A_{F,N}$, con F campo qualsiasi, è un'algebra graduata: indicando con $A_{F,N}[n|m]$ il sottospazio dei superpolinomi simmetrici omogenei di grado n nelle variabili x, m nelle variabili θ, possiamo scrivere

$$A_{F,N} = \bigoplus_{n,m \geq 0} A_{F,N}[n|m]$$

e se $f \in A_{F,N}[n_1|m_1]$, $g \in A_{F,N}[n_2|m_2]$, allora $fg \in A_{F,N}[n_1 + n_2|m_1 + m_2]$.
Osserviamo che per la natura anticommutativa delle variabili θ, si ha che $(\theta_i)^k = 0$ se $k \geq 2$ (perchè $\theta_i^2 = -\theta_i^2$, da cui $\theta_i^2 = 0$, dunque si annulla anche ogni potenza di ordine superiore); quindi un superpolinomio simmetrico ha grado m nelle variabili θ se e solo se in ogni suo termine compaiono esattamente m variabili anticommutative distinte. Introduciamo ora una prima base dello spazio dei

superpolinomi simmetrici in N variabili, che è la "versione super" della base monomiale.

Definizione 3.2.2. *Sia $\Lambda \in SPar(n|m)$ tale che $l(\Lambda) \leq N$. Poniamo*

$$m_\Lambda = m_\Lambda(x, \theta) = \frac{1}{|S_N^{\Lambda^s}|} \sum_{\sigma \in S_N} \sigma(\theta_1 \dots \theta_m x^\Lambda),$$

dove $|S_N^{\Lambda^s}|$ è la cardinalità del sottogruppo di S_N che fissa Λ^s, mentre $x^\Lambda = x_1^{\Lambda_1} x_2^{\Lambda_2} \dots x_N^{\Lambda_N}$ (se $l(\Lambda) < N$ si può completare Λ^s con degi zeri in modo che Λ abbia lunghezza N).

Ad esempio:
sia $N = 3$; come funzioni monomiali in $A_3[2|2]$ si hanno:

$$m_{(1,0;1)} = \theta_1\theta_2(x_1x_3 - x_2x_3) + \theta_1\theta_3(x_1x_2 - x_2x_3) + \theta_2\theta_3(x_1x_2 - x_1x_3),$$
$$m_{(2,0;)} = \theta_1\theta_2(x_1^2 - x_2^2) + \theta_1\theta_3(x_1^2 - x_3^2) + \theta_2\theta_3(x_3^2 - x_2^2).$$

Come nel caso classico, le funzioni monomiali $\{m_\Lambda; \Lambda \vdash (n|m))\}$ sono una base per $A_{F,N}[n|m]$, perchè se in $f \in A_{F,N}[n|m]$ compare il monomio $\theta_{i_1} \dots \theta_{i_m} x^\alpha$, allora in f compaiono (con stesso coefficiente) tutti i monomi $\sigma(\theta_{i_1} \dots \theta_{i_m} x^\alpha)$ con $\sigma \in S_N$; in particolare tutte le funzioni $\{m_\Lambda; \Lambda \in SPar\}$ costituiscono dunque una base per $A_{F,N}$.
Consideriamo ora per ogni $M > N$ l'omomorfismo $r_{M,N} : A_{F,M} \longrightarrow A_{F,N}$ che agisce come l'identità sugli elementi del campo e sulle variabil $x_1, x_2 \dots x_N, \theta_1, \theta_2 \dots \theta_N$, mentre annulla le variabili $x_{N+1}, \dots, x_M, \theta_{N+1}, \dots, \theta_M$; tramite tale omomorfismo $m_\Lambda(x_1 \dots x_M, \theta_1 \dots \theta_M)$ ha come immagine $m_\Lambda(x_1 \dots x_N, \theta_1 \dots \theta_N)$ se $l(\Lambda) \leq N$, 0 altrimenti. La famiglia di algebre $(A_{F,N})_{N \in \mathbb{N}}$ con tali morfismi $r_{M,N} : A_{F,M} \longrightarrow A_{F,N}$ costituisce un sistema inverso, pertanto possiamo definire l'algebra delle funzioni simmetriche nel superspazio come il limite inverso di tale sistema:

$$A_F = \varprojlim A_{F,N}.$$

Equivalentemente, poichè gli omomorfismi $r_{M,N}$ preservano il grado, ovvero è ben posta la restrizione $r_{M,N} : A_{F,M}[n|m] \rightarrow A_{F,N}[n|m]$ per ogni $n, m \geq 0$, possiamo definire lo spazio vettoriale delle funzioni simmetriche omogenee nel superspazio come limite inverso del sistema inverso $(A_{F,M}[n|m]; r_{M,N})$:

$$A_F[n|m] = \varprojlim A_{F,N}[n|m]$$

ed A_F è un'algebra graduata tramite la decomposizione

$$A_F = \bigoplus_{n,m \geq 0} A_F[n|m].$$

Più intuitivamente, dal momento in cui un superpolinomio simmetrico $f \in A_{F.N}$ può essere scritto nella base monomiale, il numero di variabili può essere considerando irrilevante in quanto (ammesso che il numero di variabili sia abbastanza grande) la scrittura nella base monomiale non varia rispetto all'incremento di variabili.

Nel seguito di questo paragrafo lavoreremo sul campo $\mathbb{Q}$, e scriveremo A in luogo di $A_{\mathbb{Q}}$, $A[n|m]$ in luogo di $A_{\mathbb{Q}}[n|m]$. Presentiamo ora delle "versioni-super" per le basi moltiplicative (elementare, completa, somma di potenze) presentate nel capitolo precedente. Una base moltiplicativa di $A[n|m]$ è una base i cui elementi ammettono una scritture del tipo

$$u_\Lambda = \tilde{u}_{\Lambda_1}\tilde{u}_{\Lambda_2}\dots\tilde{u}_{\Lambda_m}u_{\Lambda_{m+1}}\dots u_{\Lambda_l} \quad \text{con } \Lambda \vdash (n|m)$$

dove $\tilde{u}_i$ denota un termine dispari (in cui compationo sia le variabili x che le variabili θ), u_i denota un termine pari (in cui compaiono solo le variabili commutative x).

Definizione 3.2.3. *Le generalizzazioni nel superspazio delle funzioni elementari, complete omogenee, somme di potenze sono definite come segue.*

- *Superfunzioni simmetriche elementari: sia $\Lambda \vdash (n|m)$, definiamo la superfunzione simmetrica elementare indicizzata da Λ nel modo seguente:*

$$\tilde{e}_n = m_{(0;1^n)} \qquad\qquad e_n = m_{(1^n)},$$
$$e_\Lambda = \tilde{e}_{\Lambda_1}\tilde{e}_{\Lambda_2}\dots\tilde{e}_{\Lambda_m}e_{\Lambda_{m+1}}\dots e_{\Lambda_l}.$$

- *Superfunzioni simmetriche complete omogenee: sia $\Lambda \vdash (n|m)$, definiamo la superfunzione simmetrica completa omogenea indicizzata da Λ nel modo seguente;*

$$\tilde{h}_n = \sum_{\Lambda \vdash (n|1)} (\Lambda_1 + 1) m_\Lambda \qquad\qquad h_n = \sum_{\lambda \vdash (n|0)} m_\lambda,$$
$$h_\Lambda = \tilde{h}_{\Lambda_1}\tilde{h}_{\Lambda_2}\dots\tilde{h}_{\Lambda_m}h_{\Lambda_{m+1}}\dots h_{\Lambda_l}.$$

- *Superfunzioni simmetriche somme di potenze: sia $\Lambda \vdash (n|m)$, definiamo la superfunzione simmetrica somma di potenze indicizzata da Λ nel modo seguente;*

$$\tilde{p_n} = \sum_i \theta_i x_i^n \qquad\qquad p_n = \sum_i x_i^n,$$
$$p_\Lambda = \tilde{p}_{\Lambda_1}\tilde{p}_{\Lambda_2}\dots\tilde{p}_{\Lambda_m}p_{\Lambda_{m+1}}\dots p_{\Lambda_l}.$$

Ad esempio:
sia $N = 3$, consideriamo $\Lambda = (2;1)$. Nelle varie basi sopra definite, abbiamo i seguenti elementi indicizzati da tale superpartizione:

- Superfunzione elementare associata a Λ:

$$e_{(2;1)} = \tilde{e}_2 e_1,$$

ovvero, poichè

$$\tilde{e}_2 = m_{(0;1,1)} = \theta_1 x_2 x_3 + \theta_2 x_1 x_3 + \theta_3 x_1 x_2$$
$$e_1 = m_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$

scritta esplicitamente risulta essere

$$\begin{aligned} e_{(2,1)} &= (\theta_1 x_2 x_3 + \theta_2 x_1 x_3 + \theta_3 x_1 x_2)(x_1 + x_2 + x_3) \\ &= \theta_1(x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2) + \theta_2(x_1x_2x_3 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2) + \theta_3(x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2) \end{aligned}$$

- Superfunzione completa omogenea associata a Λ:

$$h_{(2;1)} = \tilde{h}_2 h_1,$$

ovvero, poichè

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2 &= m_{0;2} + m_{(0;1,1)} + 2m_{(1;1)} + 3m_{(2;)} = \theta_1(x_2^2 + x_3^2) + \theta_2(x_1^2 + x_3^2) + \theta_3(x_1^2 + x_2^2) + \\ &\quad + \theta_1x_2x_3 + \theta_2x_1x_3 + \theta_3x_1x_2 + 2(\theta_1(x_1x_2 + x_1x_3) + \theta_2(x_1x_2 + x_2x_3) + \theta_3(x_1x_3 + x_2x_3)) + 3(\theta_1x_1^2 + \theta_2x_2^2 + \theta_3x_3^2) \\ h_1 &= m_1 = x_1 + x_2 + x_3, \end{aligned}$$

scritta esplicitamente risulta essere

$$\begin{aligned} h_{(2;1)} =& \theta_1(3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_1^2x_2 + 5x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 3x_1x_3^2 + 2x_2^2x_3 + 2x_2x_3^2 + 5x_1x_2x_3) \\ & \theta_2(x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 5x_1x_2^2 + 5x_2^2x_3 + 3x_1^2x_2 + 3x_2x_3^2 + 2x_1^2x_3 + 2x_1x_3^2 + 5x_1x_2x_3) \\ & \theta_3(x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 5x_2x_3^2 + 5x_1x_3^2 + 3x_2^2x_3 + 3x_1^2x_3 + 2x_1x_2^2 + 2x_1^2x_2 + 5x_1x_2x_3). \end{aligned}$$

- Superfunzione somma di potenze associata a Λ:

$$p_{(2;1)} = \tilde{p}_2 p_1,$$

ovvero, poichè

$$\tilde{p}_2 = \theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_2^2 + \theta_3 x_3^2$$
$$p_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$

scritta esplicitamente risulta essere

$$p_{(2,1)} = \theta_1(x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3) + \theta_2(x_1 x_2^2 + x_2^3 + x_2^2 x_3) + \theta_3(x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + x_3^3).$$

Definiamo ora un'estensione dell'endomorfismo ω e del prodotto scalare classico $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione 3.2.4. *Indichiamo con $\hat{\omega}$ l'endomorfismo dell'algebra delle funzioni simmetriche nel superspazio così definito:*

$$\hat{\omega} : A \longrightarrow A \quad \textit{tale che}$$

$$\hat{\omega}(e_n) = h_n, \qquad \hat{\omega}(\tilde{e}_n) = \tilde{h}_n.$$

Si osservi che poichè $\hat{\omega}$ è un endomorfismo, quindi in particolare preserva il prodotto, si ha

$$\hat{\omega}(e_\Lambda) = h_\Lambda \qquad \text{per ogni } \Lambda \in SPar.$$

Evidentemente $\hat{\omega}$ ristretto alle funzioni simmetriche è l'endomorfismo ω definito nel caso classico; tale estensione mantiene molte delle proprietà di ω.

Proposizione 3.2.1. *L'endomorfismo $\hat{\omega}$ è un involuzione di A, i.e $\hat{\omega}^{-1} = \hat{\omega}$.*

Proposizione 3.2.2. *Le funzioni somme di potenze sono autovettori per l'endomorfismo $\hat{\omega}$. In particolare,*

$$\hat{\omega}(p_n) = (-1)^{n-1} p_n \qquad \hat{\omega}(\tilde{p}_n) = (-1)^n \tilde{p}_n,$$

e quindi

$$\hat{\omega}(p_\Lambda) = (-1)^{|\Lambda| - l(\Lambda^s)} \qquad \textit{per ogni } \Lambda \in SPar.$$

Definizione 3.2.5. *Indichiamo con* $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ *la forma bilineare*

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle : A \times A \to \mathbb{Q} \quad ; \quad \langle\langle m_\Lambda, h_\Omega\rangle\rangle = (-1)^{\binom{m}{2}}\delta_{\Lambda\Omega},$$

dove m *è il grado dispari di* Λ.

La forma bilineare così definita è simmetrica ma non è definita positiva; tuttavia si usa spesso l'espressione *prodotto scalare* per riferirsi ad essa, in analogia con il caso classico.
Analogamente a quanto accade nel caso classico, possiamo fornire un semplice criterio per verificare la dualità di due basi.

Lemma 3.2.1. *Siano, per ogni* $n, m \in \mathbb{N}$, $\{u_\Lambda\}_{\Lambda\in SPar[n|m]}$ *e* $\{v_\Lambda\}_{\Lambda\in SPar[n|m]}$ *due basi di* $A[n|m]$. *Si ha che* $\{u_\Lambda\}_{\Lambda\in SPar}$ *e* $\{v_\Lambda\}_{\Lambda\in SPar}$ *sono basi duali di* A *se e solo se*

$$\sum_{\Lambda\in SPar} u_\Lambda(x,\theta)v_\Lambda(y,\Phi) = \prod_{i,j\geq 1}(1 - x_i y_j - \theta_i\Phi_j)^{-1},$$

dove $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ *sono insiemi di variabili commutative,* $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots)$ *sono insiemi di variabili anticommutative.*

Tramite tale lemma si arriva a provare il prossimo risultato; per enunciarlo, introduciamo la seguente notazione: sia $\Lambda \in SPar$; poniamo

$$z_\Lambda = z_{\Lambda^s} = \prod_i i^{m_i} m_i!$$

dove m_i indica il numero di componenti di Λ^s uguali ad i.

Proposizione 3.2.3. *Le superfunzioni simmetriche somme di potenze sono ortogonali rispetto al prodotto scalare* $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ *; in particolare*

$$\langle\langle p_\Lambda, p_\Omega\rangle\rangle = (-1)^{\binom{m}{2}} z_\Lambda \delta_{\Lambda\Omega}.$$

Combinando tale risultato e la proposizione 3.2.2, si ottengono le seguenti proprietà di $\hat{\omega}$, sfruttando per quanto riguarda il secondo risultato proposto anche il carattere involutivo di $\hat{\omega}$ (in modo analogo al caso classico).

Proposizione 3.2.4. *L'endomorfismo* $\hat{\omega}$ *è autoaggiunto, ovvero per ogni* $f, g \in A$ *si ha*

$$\langle\langle\hat{\omega}(f), g\rangle\rangle = \langle\langle f, \hat{\omega}(g)\rangle\rangle.$$

Corollario 3.2.1. *L'endomorfismo* $\hat{\omega}$ *è un'isometria, ovvero per ogni* $f, g \in A$ *si ha*

$$\langle\langle\hat{\omega}(f), \hat{\omega}(g)\rangle\rangle = \langle\langle f, g\rangle\rangle.$$

3.3 Funzioni di Jack nel superspazio

In questo paragrafo presentiamo una generalizzazione nel superspazio delle funzioni di Jack: come nel caso classico, si estende il campo dei coefficienti $\mathbb{Q}$ con un parametro formale α e (dopo aver definito una generalizzazione del prodotto scalare definito nel paragrafo precedente) si cerca una base ortogonale che sia unitriangolare rispetto alla base monomiale ordinata con l'ordine di dominanza per le superpartizioni.
Sia dunque $F = \mathbb{Q}(\alpha)$, con α indeterminata, e denotiamo con A_F l'algebra delle funzioni simmetriche nel superspazio a coefficienti in tale campo, con $A_F[n|m]$ il sottospazio di quelle omogenee di grado dispari m e pari n. Definiamo ora un prodotto scalare in modo che le superfunzioni simmetriche somme di potenze siano ancora ortogonali fra loro.

Definizione 3.3.1. *Indichiamo con $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_\alpha$ la forma bilineare su A_F determinata da*

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_\alpha : A_F \times A_F \to F \quad ; \quad \langle\langle p_\Lambda, p_\Omega\rangle\rangle_\alpha = (-1)^{\binom{m}{2}} z_\Lambda(\alpha)\delta_{\Lambda\Omega},$$

dove $z_\Lambda(\alpha) = z_{\Lambda^s}\alpha^{l(\Lambda)}$.

Anche in questo caso abbiamo una generalizzazione del criterio per verificare la dualità di due basi.

Lemma 3.3.1. *Siano, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $\{u_\Lambda\}_{\Lambda\in SPar[n|m]}$ e $\{v_\Lambda\}_{\Lambda\in SPar[n|m]}$ due basi di $A[n|m]$. Si ha che $\{u_\Lambda\}_{\Lambda\in SPar}$ e $\{v_\Lambda\}_{\Lambda\in SPar}$ sono basi duali di A se e solo se*

$$\sum_{\Lambda\in SPar} u_\Lambda(x,\theta)v_\Lambda(y,\Phi) = \prod_{i,j\geq 1}(1 - x_i y_j - \theta_i\Phi_j)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

dove $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots)$ sono insiemi di variabili commutative, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots), \Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots)$ sono insiemi di variabili anticommutative.

Come nel caso classico, base monomiale e completa non sono più duali rispetto a tale prodotto scalare; introduciamo pertanto la "versione super" delle funzioni g_λ^α definite nel capitolo 2.

Definizione 3.3.2. *Definiamo le funzioni $\tilde{g}_n^\alpha, g_n^\alpha$ con $n \in \mathbb{N}$ tramite la funzione generatrice*

$$\sum_{n\geq 0} t^n(g_n^\alpha(x) + \tau\tilde{g}_n^\alpha(x,\theta)) = \prod_i (1 - tx_i + \tau\theta_i)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

dove t è una variabile commutativa, τ una variabile anticommutativa. Definiamo poi $\{g^\alpha_\Lambda\}$ come la base moltiplicativa definita da tali elementi, cioè poniamo per ogni superpartizione $\Lambda \in SPar[n|m]$, con n, m interi positivi,

$$g^\alpha_\Lambda = \prod_{i=1}^{m} \tilde{g}^\alpha_{\Lambda_i} \prod_{i=m+1}^{l(\Lambda)} g^\alpha_{\Lambda_i}.$$

Tali superfunzioni sono a meno di segno le duali di quelle monomiali, come più precisamente enunciato nella proposizione seguente.

Proposizione 3.3.1. *Risulta valida la seguente identità:*

$$\sum_{\Lambda \in SPar} (-1)^{\binom{m}{2}} m_\Lambda(x,\theta) g^\alpha_\Lambda(y,\Phi) = \prod_{i,j \geq 1} (1 - x_i y_j - \theta_i \Phi_j)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

pertanto

$$\langle\langle m_\Lambda, g^\alpha_\Omega \rangle\rangle_\alpha = (-1)^{\binom{m}{2}} \delta_{\Lambda\Omega}$$

dove, in entrambe le espressioni, m è il grado dispari di Λ.

Definiamo ora una "versione super" dell'endomorfismo ω_α di Λ_F definito nel capitolo 2, o equivalentemente una generalizzazione in A_F dell'endomorfismo $\hat{\omega}$ di A definito nel paragrafo precedente.

Definizione 3.3.3. *Per ogni $\beta \in F$ indichiamo con $\hat{\omega}_\beta$ l'endomorfismo dell'algebra delle funzioni simmetriche nel superspazio a coefficienti in F così definito:*

$$\hat{\omega}_\beta : A_F \longrightarrow A_F \quad \textit{tale che}$$

$$\hat{\omega}_\beta(p_n) = (-1)^{n-1}\beta p_n \qquad \hat{\omega}_\beta(\tilde{p}_n) = (-1)^n \beta \tilde{p}_n.$$

In particolare siamo interessati all'endomorfismo $\hat{\omega}_\alpha$, che quindi è definito da

$$\hat{\omega}_\alpha(p_n) = (-1)^{n-1}\alpha p_n \qquad \hat{\omega}_\alpha(\tilde{p}_n) = (-1)^n \alpha \tilde{p}_n.$$

Poichè $\hat{\omega}_\alpha$ è un endomorfismo di algebre si ha, data $\Lambda \vdash (n|m)$,

$$\hat{\omega}_\alpha(p_\Lambda) = (-1)^{n+m-l(\Lambda)} \alpha^{l(\Lambda)} p_\Lambda,$$

ovvero $\hat{\omega}_\alpha$ ammette una base ortogonale di A_F come autovettori. Come nel caso classico per ω_α, dunque, si ha che $\hat{\omega}_\alpha$ è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare, ovvero

$$\langle\langle \hat{\omega}_\alpha(f), g \rangle\rangle_\alpha = \langle\langle f, \hat{\omega}_\alpha(g) \rangle\rangle_\alpha \qquad \text{per ogni } f, g \in A_F.$$

Analogamente al caso classico, $\hat{\omega}_\alpha$, in generale, non è più un'involuzione (nè un'isometria) di A_F; in particolare $\hat{\omega}_\alpha^{-1} = \hat{\omega}_{\alpha^{-1}}$. Inoltre l'azione di $\hat{\omega}_\alpha$ sulla base $\{g_\Lambda^\alpha\}$ è un'estensione molto naturale di quella di ω_α sulle funzioni g_λ^α, in quanto si ha

$$\hat{\omega}_\alpha(g_\Lambda^\alpha) = e_\Lambda.$$

Possiamo ora introdurre l'argomento fondamentale di questo paragrafo, ovvero le funzioni di Jack nel superspazio, o superfunzioni di Jack (o, per brevità, super-Jack).

Definizione 3.3.4. *Le superfunzioni di Jack P_Λ^α sono funzioni simmetriche nel superspazio definite dalle seguenti proprieta:*

- $P_\Lambda^\alpha = m_\Lambda + \sum_{\Omega<\Lambda} u_{\Lambda\Omega} m_\Omega$
  dove $u_{\Lambda\Omega} \in F$ e $<$ indica l'ordine di dominanza sulle superpartizioni,
- $\langle\langle P_\Lambda^\alpha, P_\Omega^\alpha \rangle\rangle_\alpha = 0$ *se* $\Lambda \neq \Omega$.

Ovvero sono superfunzioni unitriangolari rispetto alla base monomiale con l'ordine di dominanza e ortogonali.

Come nel caso classico, l'esistenza di funzioni che soddisfino tali proprietà non è ovvia, perchè l'ordine di dominanza nelle superpartizioni non è lineare. Un modo per provare che le superfunzioni di Jack sono definite per ogni superpartizione è lavorare, similmente a quanto fatto nel caso classico, con N variabili e mostrare che i superpolinomi di Jack sono gli autovettori comuni di due operatori di $A_{N,F}$ e considerare poi il limite in infinite variabili; in particolare, si considerano i seguenti endomorfismi:

$$D = \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{1<i\neq j<N} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\theta_i - \theta_j}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial \theta_i}\right)$$

$$\Delta = \alpha \sum_{i=1}^{N} x_i \theta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \theta_i} + \sum_{1<i\neq j<N} \frac{x_i\theta_j - x_j\theta_i}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial \theta_i}.$$

I superpolinomi di Jack possono dunque essere caratterizzati nel modo seguente:

$$P_\Lambda^\alpha = m_\Lambda + \sum_{\Omega<\Lambda} u_{\Lambda\Omega} m_\Omega$$

$$DP_\Lambda^\alpha = \epsilon_\Lambda(\alpha) P_\Lambda^\alpha \quad \text{e} \quad \Delta P_\Lambda^\alpha = \tilde{\epsilon}_\Lambda(\alpha) P_\Lambda^\alpha.$$

Si osservi che, a differenza del caso classico, tali operatori non hanno tutti gli autovalori distinti: può accadere che per due partizioni Ω, Λ si abbia $\epsilon_\Lambda(\alpha) = \epsilon_\Omega(\alpha), \tilde{\epsilon}_\Lambda(\alpha) = \tilde{\epsilon}_\Omega(\alpha)$; tuttavia si dimostra che in tali casi Λ e Ω non sono confrontabili per l'ordine di dominanza, pertanto il sistema resta univocamente determinato grazie alla richiesta di unitriangolarità rispetto alla base monomiale con l'ordine di dominanza. Osserviamo che se $\Lambda \in SPar(0|n)$, ovvero è una partizione classica, la superfunzione di Jack indicizzata da questa coincide con la funzione di Jack classica.
Presentiamo ora alcune proprietà delle Super-Jack; in particolare, ci soffermeremo su quelle che possono essere considerate le generalizzazioni di quelle enunciate nel caso classico.
Osservando che $SPar(m|n)$ ammette un minimo, ovvero la partizione $\Lambda_{min} = (m-1, m-2\ldots, 1, 0; 1^{n-\frac{m(m-1)}{2}})$, possiamo dedurre dall'unitriangolarità delle Super-Jack il caso particolare

$$P^\alpha_{\Lambda_{min}} = m^\alpha_{\Lambda_{min}}$$

e quindi nei casi specifici di $SPar(0|n), SPar(1|n)$ si ha

$$P_{(;1^n)} = m_{(;1^n)} = e_n,$$
$$P_{(0;1^n)} = m_{(0;1^n)} = \tilde{e}_n.$$

Per descrivere la forma quadratica delle superfunzioni di Jack, introduciamo una notazione che generalizza la nozione di "uncini" alle superpartizioni.

Definizione 3.3.5. *Sia $\Lambda \in SPar$, e consideriamo la sua rappresentazione nella forma $(\Lambda^*, \Lambda^{\circledast})$. Sia s una cella quadrata del superdiagramma di Λ; usando le notazioni della definizione 1.8.2, poniamo*

$$h^{up}_\Lambda(\alpha; s) = \alpha(a_{\Lambda^*}(s) + 1) + l_{\Lambda^{\circledast}}(s), \tag{3.1}$$
$$h^{low}_\Lambda(\alpha; s) = \alpha a_{\lambda^{\circledast}}(s) + l_{\Lambda^*}(s) + 1. \tag{3.2}$$

Ad esempio:
Sia s la cella di posto $(2, 1)$ nella superpartizione $\Lambda = (5, 3, 0; 4, 3, 1, 1)$.

Allora gli uncini di s relativi alla superpartizione Λ sono:

$$h^{up}_\Lambda(\alpha; s) = 4\alpha + 5, \qquad h^{low}_\Lambda(\alpha; s) = 3\alpha + 5.$$

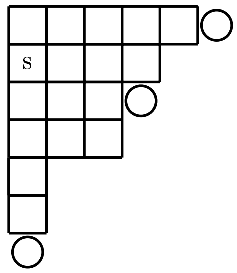

Figura 3.3: Superdiagramma relativo alla superpartizione $\Lambda = (5, 3, 0; 4, 3, 1, 1)$ con la cella di posto $(2, 1)$ evidenziata da una s

Introduciamo inoltre la seguente notazione: se $\Lambda \in SPar$, indichiamo con B_Λ è l'insieme delle celle quadrate del superdiagramma di Λ che non appartengono sia a una riga che a una colonna terminanti con un cerchio.

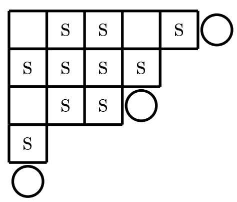

Figura 3.4: Supedriagramma relativo alla superpartizione $\Lambda = (5, 3, 0; 4, 1)$ con la celle appartenenti a $B_{(5,3,0;4,1)}$ evidenziate da una s

Si ha il seguente risultato:

Proposizione 3.3.2. *Indichiamo con b_Λ^α l'inverso della forma quadratica di P_Λ^α a meno di segno, ossia*

$$b_\Lambda^\alpha = (-1)^{\binom{m}{2}} \langle\langle P_\Lambda^\alpha, P_\Lambda^\alpha \rangle\rangle_\alpha^{-1},$$

dove m è il grado dispari di Λ. Allora si ha

$$b_\Lambda^\alpha = \alpha^{-m} \prod_{s \in B_\Lambda} \frac{h_\Lambda^{low}(\alpha; s)}{h_\Lambda^{up}(\alpha; s)}.$$

Possiamo ora definire la "versione super" della base $\{Q_\lambda^\alpha; \lambda \in Par\}$ esplicitamente: per ogni $\Lambda \in SPar$, si pone

$$Q_\Lambda^\alpha = b_\Lambda^\alpha P_\Lambda^\alpha$$

che, data l'ortogonalità delle superfunzioni di Jack e la definizione di b_Λ^α, soddisfa

$$\langle\langle P_\Lambda^\alpha, Q_\Omega^\alpha\rangle\rangle_\alpha = (-1)^{\binom{m}{2}}\delta_{\Lambda\Omega}.$$

Vediamo ora come agisce l'endomorfismo $\hat{\omega}_\alpha$ sulle superfunzioni P_Λ^α.

Proposizione 3.3.3. *Sia $\Lambda \in Spar(n|m)$. L'endomorfismo $\hat{\omega}_\alpha$ agisce sulla superfunzione di Jack P_Λ^α nel modo seguente:*

$$\hat{\omega}_\alpha P_\lambda^\alpha = (-1)^{\binom{m}{2}} Q_{\lambda'}^{\alpha^{-1}}.$$

Da tale risultato possiamo anche dedurre che

$$Q_{(;r)}^\alpha = g_r^\alpha, \qquad Q_{(r;)}^\alpha = \tilde{g}_r^\alpha.$$

Infatti

$$\begin{aligned} Q_{(;r)}^\alpha &= \omega_{\alpha^{-1}} P_{(;1^r)}^{\alpha^{-1}} = \omega_{\alpha^{-1}} e_r = g_r^\alpha, \\ Q_{(r;)}^\alpha &= \omega_{\alpha^{-1}} P_{(0;1^r)}^{\alpha^{-1}} = \omega_{\alpha^{-1}} \tilde{e}_r = \tilde{g}_r^\alpha. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, è possibile fornire delle espressioni per il prodotto delle superfunzioni di Jack e le funzioni elementari o omogenee della forma $\tilde{e}_n, e_n, \tilde{h}_n, h_n$, ovvero delle formule di Pieri per le super-Jack nel caso supersimmetrico; queste tuttavia risultano notevolmente più complesse rispetto al caso classico, in quanto nei coefficienti di tali formule accanto a un fattore lineare, simile a quelli che compaiono nel caso classico, ne occorre uno non lineare, che può essere calcolato come determinante di apposite matrici. Data la complessità di tali espressioni, ci limiteremo a una formulazione elementare delle formule di Pieri, senza calcolare esplicitamente i coefficienti che occorrono. Preliminarmente introduciamo una notazione utile: date Λ, Ω superpartizioni, diciamo che Ω/Λ è un n-stricia verticale (rispettivamente orizzontale) se sia Ω^*/Λ^* che $\Omega^\circledast/\Lambda^\circledast$ sono n-stricie vertical (rispettivamente orizzontali)i, è un $\tilde{n}$-stricia verticale (rispettivamente orizzontale) se Ω^*/Λ^* è un n-stricia verticale (rispettivamente orizzontale) mentre $\Omega^\circledast/\Lambda^\circledast$ è un $(n+1)$-striscia orizzontale.

Proposizione 3.3.4. *Si hanno le seguenti espressioni, note come formule di Pieri per le funzioni di Jack nel superspazio:*

$$e_n P_\Lambda^\alpha = \sum_\Omega d_{\Lambda\Omega}^\alpha P_\Omega^\alpha, \qquad \tilde{e}_n P_\Lambda^\alpha = \sum_\Omega \tilde{d}_{\Lambda\Omega}^\alpha P_\Omega^\alpha,$$

con $d^{\alpha}_{\Lambda\Omega}, \tilde{d}^{\alpha}_{\Lambda\Omega} \in F$*. In tali formule gli unici coefficienti non nulli sono, rispettivamente, i* $d^{\alpha}_{\Lambda\Omega}$ *tali che* Λ/Ω *è una* n*-striscia verticale è i* $\tilde{d}^{\alpha}_{\Lambda\Omega}$ *tali che* Λ/Ω *è una* $\tilde{n}$*-striscia verticale .*

Vorremmo ora studiare il comportamento delle superfunzioni di Jack rispetto alla valutazione costante, che indichiamo con $P^{\alpha}_{\Lambda}(1^N)$. Tuttavia dobbiamo prima specificare cosa si intende con "valutazione costante" nell'ambiente delle superfunzioni simmetriche; infatti quella che a prima vista può sembrare la definizione più naturale, ovvero porre $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 1$, $x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = 0$ non darebbe risultati particolarmente interessanti, in quanto nella maggior parte dei casi il risultato di questa operazione sarebbe banalmente 0 a causa della presenza delle variabili anticommutative. Pertanto per definire l'azione della valutazione costante abbiamo bisogno di introdurre alcune notazioni. Sia $f \in A_F$, di grado dispari m; consideriamo la riduzione ad N variabili (ottenuta ponendo $x_{N+1} = \theta_{N+1} = x_{N+2} = \theta_{N+2} = \cdots = 0$ ed è dunque un superpolinomio simmetrico in $A_{F,N}$) che per semplicità indichiamo ancora con f. Indichiamo con $\rho_{(1\ldots m)}$ l'operatore che seleziona il coefficiente di $\theta_1, \ldots, \theta_m$ in una superfunzione, ovvero l'applicazione definita come segue

$$\rho_{(1\ldots m)}(\theta_{i_1}\theta_{i_k}) = \begin{cases} 1 & se \quad k = m \quad \text{ed} \quad i_j = j \quad \text{per ogni } j = 1, \ldots, m, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Consideriamo ora l'operatore la cui azione si ottiene dividendo il risultato di $\rho_{(1\ldots m)}$ per il determinante di Vandermonde nelle prime m variabili, in modo da rimuovere la parte antisimmetrica:

$$\hat{\rho}_m = \frac{\rho_{(1,\ldots,m)}}{\prod_{1\leq i<j\leq m}(x_i - x_j)}.$$

Definiamo dunque la valutazione costante nel modo seguente.

Definizione 3.3.6. *Sia* $f \in A_N$ *di grado dispari* m*. Poniamo*

$$f(1^N) = (\hat{\rho}_m f)|_{x_1=\ldots x_N=1}.$$

Ad esempio:
Si vuole calcolare la specializzazione costante di $f = m_{(1,0;1)} \in A_3[2|2]$. Si ha

$$\rho_{(1,2)}m_{(1,0;1)} = \rho_{(1,2)}(\theta_1\theta_2(x_1x_3-x_2x_3)+\theta_1\theta_3(x_1x_2-x_2x_3)+\theta_2\theta_3(x_1x_2-x_1x_3)) = x_1x_3-x_2x_3$$

dunque

$$\hat{\rho}_2 m_{(1,0;1)} = \frac{x_1x_3 - x_2x_3}{x_1 - x_2} = x_3.$$

In conclusione quindi

$$m_{(1,0;1)}(1,1,1) = 1.$$

Introduciamo inoltre la seguente notazione: per Λ superpartizione di grado dispari m, indichiamo con S_Λ il diagramma di Ferrers "storto" $\Lambda^{\circledast}/(m, m-1, \dots, 1)$.

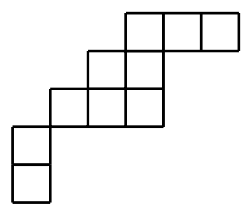

Figura 3.5: diagramma relativo ad $S_{(5,3,0;4,1)}$

Possiamo finalmente applicare la valutazione costante alle superfunzioni di Jack.

Proposizione 3.3.5. *Sia $N \in \mathbb{N}$, $\Lambda \in SPar$; allora si ha*

$$P_\Lambda^\alpha(1^N) = \frac{\prod_{s \in S_\Lambda} N + \alpha a'_{S_\Lambda}(s) - l'_{S_\Lambda}(s)}{\prod_{s \in B_\Lambda} h_\Lambda^{low}(s;\alpha)}.$$

In ultimo, notiamo che si può considerare l'equivalente nel superspazio delle funzioni J_λ^α, ottenute dalle funzioni di Jack tramite una moltiplicazione per scalare. Per ogni $\Lambda \in SPar$ si definisce

$$v_\Lambda^\alpha = \prod_{s \in B_\Lambda} h_\Lambda^{low}(s;\alpha)$$

e si pone

$$J_\Lambda^\alpha = v_\Lambda^\alpha P_\Lambda.$$

Bibliografia

[1] Richard P. Stanley. Enumerative Combinatorics: Volume 2, Cambridge University Press (1999)

[2] Ian G. Macdonald. Symmetric Functions and Hall Polynomials, Oxford University Press (1995)

[3] Ludovic Alarie-Vezina, Olivier Blondeau-Fournier, Patrick Desrosiers, Luc Lapointe, Pierre Mathieu. Symmetric functions in superspace: a compendium of results and open problems (2019)

Ringraziamenti

Un grazie sentito al Professor Caselli non solo per la disponibilità e la gentilezza con cui mi ha seguito nello svolgere questo lavoro, ma anche per l'incoraggiamento e i validi consigli con cui mi ha supportato.