

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Un risultato di  $h$ -principle per curve  
a curvatura costante in  $\mathbb{R}^n$

Tesi di Laurea Magistrale in Analisi Matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Alberto Parmeggiani

Presentata da:  
Chiara Bernardini

Sessione II  
Anno Accademico 2019-2020



*A mio padre,  
grazie per avermi trasmesso  
l'amore per la Matematica,  
so che ora saresti orgoglioso di me.*



# Introduzione

Oggetto di questa tesi è mostrare che ogni curva liscia ( $\mathcal{C}^\infty$ ) immersa nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^{n \geq 3}$ , può essere deformata in una curva con curvatura costante, mediante una perturbazione arbitrariamente piccola della curva iniziale e delle sue rette tangenti. Tale valore costante della curvatura deve essere maggiore o uguale del massimo della curvatura della curva iniziale, e tale bound inferiore è ottimale. Questo significa che le curve  $\mathcal{C}^\infty$  di curvatura costante, soddisfano, secondo la terminologia di Gromov, il ‘*relative  $\mathcal{C}^1$ -dense  $h$ -principle*’ nello spazio delle curve immerse in  $\mathbb{R}^{n \geq 3}$ .

La teoria dell’ $h$ -principle fu introdotta da Gromov negli anni ‘70 del Novecento e costituisce un metodo di risoluzione di relazioni differenziali alle derivate parziali (per relazione differenziale intendiamo una qualsiasi condizione imposta sulle derivate parziali di una funzione incognita). Uno dei principali scopi delle tecniche del principio di omotopia è quindi la risoluzione di PDE. Gromov ha dimostrato che la relazione differenziale ha tante soluzioni quante sono quelle predette dalla topologia del problema e quindi ci si può ricondurre a risolvere un problema di topologia algebrica.

Al fine di introdurre i concetti principali utilizzati in tutto il lavoro, nel primo capitolo, dopo aver fornito le definizioni fondamentali che ruotano attorno ai concetti di immersione ed omotopia, utilizziamo alcune nozioni basilari di teoria della convessità per dimostrare una proposizione che fornisce il più piccolo valore di  $\lambda$ , affinché la contrazione dell’involuppo convesso di una curva  $f$  di un fattore  $(1 - \lambda)$  rispetto al suo centro di massa, contenga  $\text{ave}[f]$ . Dopodiché vedremo alcuni risultati riguardanti le curve sulla sfera

$n$ -dimensionale  $\mathbf{S}^{n-1}$ : per ogni punto  $p \in \mathbf{S}^{n-1}$  possiamo costruire una curva chiusa di lunghezza assegnata  $L$  e media  $(1 - \delta)p$ , a patto che  $\delta/L$  sia sufficientemente piccolo; tale loop inizia e finisce nel punto  $p$  e si può costruire per raccordare in modo liscio ogni data curva passante per  $p$ .

Uno dei risultati centrali di questo capitolo è la dimostrazione che una curva di lunghezza  $L$ , simmetrica rispetto al punto  $p$ , si può contrarre su  $\mathbf{S}^{n-1}$  con continuità a  $p$ , preservandone lunghezza e simmetria, finché la sua media non raggiunge il valore desiderato.

A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti, mostriamo che ogni curva  $f$  su  $\mathbf{S}^{n-1}$  può essere approssimata da un'altra curva, che abbia la stessa media di  $f$  e velocità uguale ad una costante assegnata, che sia maggiore o uguale della massima velocità di  $f$ . Per trovare la curva approssimante, è necessario aggiungere un certo numero di piccoli loop all'immagine di  $f$ ; per determinare i punti in cui questi loop devono essere 'incollati' e la lunghezza di ciascuno, risultano utili alcuni risultati di analisi convessa.

Il secondo capitolo è incentrato su alcuni risultati di Teoria della Trasversalità, dopo aver definito le nozioni di fibrato, sezione e di getti di mappe da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^q$ , enunciamo il Teorema di Trasversalità di Thom che è di fondamentale importanza per le dimostrazioni che seguono.

Nel capitolo seguente forniamo una breve esposizione teorica dei concetti di  $h$ -principle; infine il quarto capitolo è dedicato alla dimostrazione del teorema che costituisce il risultato centrale di tutta la tesi.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Risultati fondamentali</b>	<b>1</b>
1.1 Nozioni preliminari . . . . .	1
1.2 Alcuni concetti di Analisi Convessa . . . . .	5
1.3 Media e centro di massa di una curva . . . . .	13
1.4 Loop sferici con media e lunghezza assegnate . . . . .	19
1.5 Approssimazioni a velocità costante per curve sferiche . . . . .	30
<b>2 Teorema di trasversalità di Thom</b>	<b>35</b>
2.1 Nozione di fibrato e di sezione . . . . .	35
2.2 Getti di mappe da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^q$ . . . . .	36
2.3 Definizione invariante di getti . . . . .	38
2.4 Teoria della trasversalità . . . . .	41
<b>3 Nozione di <math>h</math>-principle</b>	<b>47</b>
3.1 Relazione differenziale . . . . .	48
3.2 Soluzione formale e soluzione vera di una relazione differenziale	49
3.3 Principio di omotopia . . . . .	51
<b>4 <math>h</math>-Principle per curve e nodi a curvatura costante</b>	<b>53</b>
4.1 Ogni curva liscia si può deformare in una curva con curvatura costante . . . . .	53
4.2 Il limite inferiore è ottimale . . . . .	60

Bibliografia

63



# Capitolo 1

## Risultati fondamentali

### 1.1 Nozioni preliminari

Denotiamo con  $\Gamma$  l'intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  oppure la circonferenza data dal quoziente  $\mathbb{R}/(b-a)\mathbb{Z}$  (a seconda del contesto nel quale ci troviamo), sia  $\alpha$  un intero non negativo, indichiamo con  $\mathcal{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  lo spazio delle funzioni  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  (quindi  $f = (f_1, \dots, f_n)$  dove ciascuna  $f_j : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ) le cui derivate  $f^{(i)}$  esistono e sono continue per  $i = 0, \dots, \alpha$ . La norma standard su  $\mathcal{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  è la seguente:

$$\|f\|_\alpha := \sup\{|f_j^{(i)}(t)| \mid t \in \Gamma, 1 \leq i \leq \alpha, 1 \leq j \leq n\}. \quad (1.1.1)$$

In generale indicheremo con  $\|\cdot\|$  la norma euclidea in  $\mathbb{R}^n$ .

Per le definizioni seguenti si faccia riferimento a [AT11] e [Le03].

**Definizione 1.1.1.** (Varietà topologica). Uno spazio topologico  $M$  è una varietà topologica di dimensione  $n$ , se ha le seguenti proprietà:

- $M$  è uno spazio di Hausdorff, cioè per ogni coppia di punti  $p, q \in M$  esistono  $U, V \subset M$  tali che  $p \in U$  e  $q \in V$ ;
- esiste una base numerabile per la topologia di  $M$ ;
- $M$  è localmente euclideo, cioè  $\forall x \in M \exists U \subset M$  intorno aperto di  $x$  e un aperto  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  tale che  $U$  è omeomorfo a  $V$ .

**Definizione 1.1.2.** (Carta coordinata). Sia  $M$  una  $n$ -varietà topologica, una carta coordinata su  $M$  è una coppia  $(U, \varphi)$  dove  $U$  è un aperto contenuto in  $M$  e  $\varphi : U \rightarrow V$  è un omeomorfismo in cui  $V$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

Le definizioni che seguono servono per introdurre il concetto di varietà differenziabile. D'ora in avanti, in tutta la trattazione, per 'liscia' intenderemo  $\mathcal{C}^\infty$ , cioè differenziabile infinite volte.

**Definizione 1.1.3.** (Mappa di transizione). Sia  $M$  una varietà topologica  $n$ -dimensionale, se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  sono due carte tali che  $U \cap V \neq \emptyset$  allora la mappa  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  è detta mappa di transizione da  $\varphi$  in  $\psi$ , ed è un omeomorfismo.

**Definizione 1.1.4.** (Carte compatibili). Due carte  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  su una varietà  $M$ , sono dette compatibili se  $U \cap V = \emptyset$  oppure se  $U \cap V \neq \emptyset$  e si ha che la mappa di transizione  $\psi \circ \varphi^{-1}$  è un diffeomorfismo (una mappa suriettiva  $f : U \rightarrow V$  con  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, è un diffeomorfismo se è  $\mathcal{C}^\infty$ , invertibile e con inversa  $\mathcal{C}^\infty$ ).

**Definizione 1.1.5.** (Atlante). Un atlante per  $M$  è una collezione di carte i cui domini ricoprono  $M$ , l'atlante è detto liscio se le carte sono tra loro a due a due compatibili.

Vogliamo costruire una 'struttura differenziale' su  $M$  assegnando un atlante liscio, e definire una funzione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  liscia se e solo se  $f \circ \varphi^{-1}$  è liscia (nel senso classico per funzioni definite su aperti di  $\mathbb{R}^n$ ) per ogni carta coordinata  $(U, \varphi)$  nell'atlante. Dato che ci possono essere vari atlanti che inducono la stessa 'struttura differenziale', dobbiamo considerare un atlante liscio che sia massimale rispetto all'inclusione.

**Definizione 1.1.6.** (Varietà differenziabile). Una varietà differenziabile è una coppia  $(M, \mathcal{A})$ , dove  $M$  è una varietà topologica ed  $\mathcal{A}$  è un atlante liscio massimale.

Durante la trattazione, indicheremo semplicemente con  $M$  una varietà differenziabile, sottintendendo l'atlante massimale.

**Definizione 1.1.7.** (Mappa liscia fra varietà). Siano dunque  $M$  ed  $N$  due varietà differenziabili, una mappa  $F : M \rightarrow N$  è detta liscia se, per ogni carta  $(U, \varphi)$  su  $M$  e per ogni carta  $(V, \psi)$  su  $N$ , la composizione  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$  è un'applicazione liscia da  $\varphi(U \cap F^{-1}(V))$  in  $\psi(V)$ .

**Definizione 1.1.8.** (Rango di una mappa liscia fra varietà). Sia  $F : M \rightarrow N$  una mappa liscia, definiamo il rango di  $F$  in  $p \in M$  come il rango della mappa lineare  $F_{*,p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ , ovviamente questo è il rango della matrice delle derivate parziali della  $F$  in una carta coordinata. Se  $F$  ha lo stesso rango  $k$  in ogni punto  $p \in M$ , scriveremo  $\text{rank } F = k$ .

**Definizione 1.1.9.** (Immersione). Una mappa liscia fra varietà  $F : M \rightarrow N$  è un'immersione se  $\text{rank } F = \dim M$  (questo equivale a chiedere che  $F_{*,p}$  sia iniettiva in ogni punto).

**Definizione 1.1.10.** (Spazio delle immersioni). Se  $\alpha \geq 1$ , lo spazio vettoriale delle immersioni  $\text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  è formato dalle curve  $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  regolari, cioè con velocità  $\|f'\|_\alpha$  non nulla (l'operazione di somma in questo spazio vettoriale è definita usando la somma di  $\mathbb{R}^n$ ).

**Definizione 1.1.11.** (Omotopia). Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici, un'omotopia fra due funzioni continue  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  è una funzione continua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tale che:

$$H(x, 0) = f_0(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = f_1(x) \quad \forall x \in X .$$

Questa definizione (si veda [Ma14]) non è altro che una formalizzazione dell'idea intuitiva di deformabilità di una mappa in un'altra. Scriviamo  $f_t(x) = H(x, t)$  per ogni  $(x, t) \in X \times [0, 1]$ ; si ha che per ogni fissato  $t \in [0, 1]$ , l'applicazione

$$\begin{aligned} f_t : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f_t(x) \end{aligned}$$

è continua, per  $t = 0$  abbiamo l'applicazione  $f_0$  che, al variare di  $t$  nell'intervallo  $[0, 1]$ , si deforma in maniera continua fino ad arrivare, per  $t = 1$ , a coincidere con l'applicazione  $f_1$ .

Vediamo la seguente definizione di immersioni omotope, del tutto equivalente alla precedente e che ci tornerà utile nella trattazione.

**Definizione 1.1.12.** (Immersioni omotope). Due immersioni  $f, g \in \text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  sono omotope se esiste una famiglia di curve  $f_t \in \text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  che dipende con continuità dal parametro  $t \in [0, 1]$ , tale che  $f_0 = f$  e  $f_1 = g$ . La famiglia  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  è detta omotopia fra  $f$  e  $g$ .

*Osservazione 1.1.13.* Quando diciamo che la famiglia  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  di curve in  $\text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  dipende con continuità dal parametro  $t \in [0, 1]$ , intendiamo che l'applicazione  $t \mapsto f_t$  è continua rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\alpha$  su  $\mathcal{C}^\alpha$ , cioè per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che se  $|t - t'| < \delta$  allora  $\|f_t - f_{t'}\|_\alpha < \varepsilon$ .

**Definizione 1.1.14.** (Immersioni regolarmente omotope). Se due immersioni  $f, g \in \text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  sono omotope e la famiglia di curve  $f_t \in \text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ , che definisce l'omotopia, è tale che  $t \mapsto f_t$  è continua rispetto alla norma  $\|\cdot\|_1$ , allora  $f$  e  $g$  si dicono regolarmente omotope.

**Definizione 1.1.15.** (Spazio degli embedding). Lo spazio degli embedding  $\text{Emb}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n) \subset \text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  è formato dall'insieme delle curve in  $\text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  che sono iniettive.

**Definizione 1.1.16.** (Nodo) Un embedding  $f \in \text{Emb}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  è un nodo se  $\Gamma$  è una circonferenza.

**Definizione 1.1.17.** (Embedding isotopi). Una coppia di embedding  $f_0, f_1 \in \text{Emb}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  è detta isotopa, se uno si può trasformare nell'altro mediante un'omotopia di embedding  $(f_t)_{t \in [0,1]} \in \text{Emb}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ .

Nel seguito utilizzeremo la nozione di indicatrice sferica delle tangenti di una curva, a volte abbreviata con "Tantrix" (si veda [So96]), che si può vedere come la curva su  $\mathbf{S}^{n-1}$  tracciata dai versori orientati tangenti alla curva.

**Definizione 1.1.18.** (Indicatrice delle tangenti). Sia  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare, l'indicatrice delle tangenti della curva  $f$  è l'applicazione  $T : \Gamma \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$  che ad ogni punto  $p \in \Gamma$  associa il versore tangente alla curva  $f$  in quel punto:

$$T(p) = \frac{f'(p)}{\|f'(p)\|}.$$

L'indicatrice delle tangenti di una curva regolare in  $\mathbb{R}^n$  traccia una curva sulla sfera unitaria  $\mathbf{S}^{n-1}$  che, come insieme di punti, è indipendente dalla parametrizzazione di  $f$ . Interpretando  $T$  come una curva in  $\mathbf{S}^{n-1}$  si può dimostrare che le velocità di  $T$  ed  $f$  sono collegate, come vedremo di seguito, mediante la curvatura  $k$  della curva  $f$ , infatti si ha la seguente relazione:

$$\|T'(t)\| = k(t)\|f'(t)\|.$$

Infine la lunghezza della curva  $T$  su  $\mathbf{S}^{n-1}$  fornisce la curvatura totale (l'integrale di  $k$  rispetto alla lunghezza d'arco) della curva iniziale  $f$ .

**Definizione 1.1.19.** (Curvatura). Se  $\alpha \geq 2$ , la curvatura di  $f \in \text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  è così definita

$$k := \frac{\|T'\|}{\|f'\|} \quad \text{dove} \quad T = \frac{f'}{\|f'\|}.$$

**Definizione 1.1.20.** (Curva chiusa). Una curva  $f \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$  è chiusa se  $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b)$  per  $0 \leq i \leq \alpha$ , in tal caso scriveremo  $f \in \text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  dove  $\Gamma = \mathbb{R}/(b-a)\mathbb{Z}$ .

Quindi da qui in avanti  $\Gamma$  indicherà la circonferenza  $\mathbb{R}/(b-a)\mathbb{Z}$ , mentre quando saremo sull'intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  lo scriveremo esplicitamente.

## 1.2 Alcuni concetti di Analisi Convessa

Sia ora  $X$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ , vediamo le seguenti definizioni (per le quali si faccia riferimento a [Ro70] e [We94]):

**Definizione 1.2.1.** (Inviluppo affine). L'inviluppo affine di  $X$ , denotato con  $\text{aff}(X)$ , è il più piccolo sottospazio affine di  $\mathbb{R}^n$  contenente  $X$ , o equivalentemente l'intersezione di tutti i sottospazi affini contenenti  $X$ .

**Esempio 1.2.2.** l'inviluppo affine dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto, l'inviluppo affine di un singolo è se stesso, l'inviluppo affine di un insieme formato da due punti di  $\mathbb{R}^n$  è la retta che passa per essi, se consideriamo tre punti di  $\mathbb{R}^n$  (non allineati) è il piano che passa per essi.

**Definizione 1.2.3.** (Parte interna relativa).

$$\text{relint}(X) = \{x \in X \mid \exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap \text{aff}(X) \subseteq X\}$$

cioè  $x$  è un punto interno relativo di  $X$ , se è il centro di un'opportuna palla aperta la cui intersezione con  $\text{aff}(X)$  è contenuta in  $X$ .

Quindi la parte interna relativa di un insieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  è definita come la parte interna dell'insieme  $X$  quando lo si pensa come un sottoinsieme del suo inviluppo affine  $\text{aff}(X)$ . Ad esempio la parte interna di un segmento in  $\mathbb{R}^n$  è vuota se  $n > 1$ , mentre la sua parte interna relativa è non vuota indipendentemente dal valore di  $n$ , ed è il segmento considerato esclusi gli estremi. Si vede facilmente che  $\text{relint}(X) \subseteq X \subseteq \text{cl}(X)$ .

**Definizione 1.2.4.** (Inviluppo convesso). L'inviluppo convesso di  $X$ , denotato con  $\text{conv}(X)$ , è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi di  $\mathbb{R}^n$  contenenti  $X$ , o equivalentemente è il più piccolo insieme convesso in  $\mathbb{R}^n$  contenente  $X$ .

*Osservazione 1.2.5.* Per un insieme convesso  $n$ -dimensionale  $C$ ,  $\text{aff}(C) = \mathbb{R}^n$  per definizione, quindi  $\text{relint}(C) = \text{int}(C)$ .

A questo punto consideriamo la parte interna relativa dell'inviluppo convesso di  $X$ , cioè l'insieme  $\text{relint}(\text{conv}(X))$ , i punti di tale insieme sono caratterizzati nel modo seguente.

**Proposizione 1.2.6.** *Sia  $X$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in \text{relint}(\text{conv}(X))$  se e solo se  $X$  sta da entrambe le parti di ogni iperpiano  $H \subset \mathbb{R}^n$  che passa per  $x$  e non contiene tutto  $X$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo innanzitutto che se  $x \in \text{relint}(\text{conv}(X))$  allora  $X$  sta da entrambe le parti di ogni iperpiano  $H \subset \mathbb{R}^n$  che passa per  $x$  e non

contiene tutto  $X$ . Se  $\text{conv}(X)$  è un insieme  $n$ -dimensionale, abbiamo osservato che  $\text{aff}(\text{conv}(X)) = \mathbb{R}^n$ , quindi nelle ipotesi che  $x \in \text{relint}(\text{conv}(X))$  deve esistere  $\varepsilon > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon) \subseteq \text{conv}(X)$ . La tesi segue immediatamente, perché un qualsiasi iperpiano  $H$  passante per  $x$  (in questo caso non può contenere tutto  $X$ ) divide  $B(x, \varepsilon)$  in due parti che sono contenute in  $\text{conv}(X)$  e quindi ciascuno dei due semispazi determinati da  $H$  contiene almeno un punto di  $X$ . Nel caso in cui  $\text{conv}(X)$  sia un insieme di dimensione minore di  $n$ , i ragionamenti sono analoghi. Esiste  $\varepsilon > 0$  tale che la traccia della palla  $B(x, \varepsilon)$  rispetto ad  $\text{aff}(\text{conv}(X))$  (cioè  $B(x, \varepsilon) \cap \text{aff}(\text{conv}(X))$ ) sia contenuta in  $\text{conv}(X)$ . Un qualsiasi iperpiano  $H$  passante per  $x$ , che non contiene tutto  $X$ , divide  $B(x, \varepsilon)$  in due parti le cui intersezioni con  $\text{aff}(\text{conv}(X))$  sono contenute in  $\text{conv}(X)$  e quindi ciascuno dei due semispazi determinati da  $H$  contiene almeno un punto di  $X$ .

Per dimostrare il viceversa, facciamo vedere che se  $x \notin \text{relint}(\text{conv}(X))$  allora esiste un iperpiano  $\bar{H}$  passante per  $x$  (che non contiene tutto  $X$ ) rispetto al quale  $X$  sta da una sola parte. Considero  $x \in \text{conv}(X)$  tale che  $x \notin \text{relint}(\text{conv}(X))$ , questo significa che  $\forall \varepsilon > 0$   $B(x, \varepsilon) \cap \text{aff}(\text{conv}(X))$  non è contenuta in  $\text{conv}(X)$ . Se  $\text{conv}(X)$  è un insieme  $n$ -dimensionale si dovrà avere che  $\forall \varepsilon > 0$   $B(x, \varepsilon) \not\subseteq \text{conv}(X)$ , quindi deve esistere un iperpiano  $\bar{H}$  tangente a  $\text{conv}(X)$  nel punto  $x$  tale che  $\text{conv}(X)$ , e di conseguenza  $X$ , sia contenuto in uno solo dei due semispazi determinati da  $\bar{H}$ ; nel caso in cui  $\text{conv}(X)$  abbia dimensione minore di  $n$  la dimostrazione è analoga.  $\square$

**Definizione 1.2.7.** (Iperpiano di supporto proprio).  $H$  è un iperpiano di supporto proprio di un insieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  se  $X$  sta da una parte sola di  $H$  e interseca  $H$  in qualche punto, senza però essere contenuto interamente in  $H$ .

*Osservazione 1.2.8.* Segue che se  $x \in X$  ed esiste un iperpiano di supporto proprio di  $X$  passante per il punto  $x$  allora  $x \notin \text{relint}(\text{conv } X)$

Sia  $f$  una curva in  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ , indicheremo con  $\text{int conv}[f]$  la parte interna dell'involuppo convesso di  $f([a, b])$  e con  $\text{relint conv}[f]$  la parte interna relativa dell'involuppo convesso di  $f([a, b])$ .

**Definizione 1.2.9.** (Supporto di una funzione). Il supporto di una funzione  $f$  è la chiusura dell'insieme dei punti in cui  $f \neq 0$ , e lo indichiamo con  $\text{supp } f$ .

Risulteranno utili in seguito i seguenti risultati (per i quali si vedano [Ka61], [Ro70] e [Sc93]).

**Definizione 1.2.10.** (Politopo). Un politopo convesso, o semplicemente politopo, è l'involuppo convesso di un insieme finito di punti di  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.2.11** (Teorema di Steinitz). *Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $p \in \text{int}(\text{conv} X)$ . Esistono  $k \leq 2n$  punti  $x_1, \dots, x_k \in X$  tali che  $p \in \text{int}(\text{conv}\{x_1, \dots, x_k\})$ .*

**Teorema 1.2.12** (Teorema di Kalman [Ka61]). *Sia  $P \subset \mathbb{R}^n$  un politopo convesso di vertici  $x_1, \dots, x_k$ , allora esistono delle funzioni continue  $\phi_i : P \rightarrow \mathbb{R}$  per  $i = 1, \dots, k$  tali che  $\forall i \phi_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \phi_i = 1$  e*

$$\forall x \in P \quad x = \sum_{i=1}^k \phi_i(x)x_i.$$

Sia ora  $P \subset \mathbb{R}^n$  un politopo che scriviamo nella forma  $P = \text{conv}(\text{ext}(P))$ , dove  $\text{ext}(P) = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  è un insieme minimale di punti estremi di  $P$  (dunque tra essi abbiamo anche i vertici di  $P$ ). Supponiamo inoltre che  $\text{int}(P) \neq \emptyset$ , in tal caso  $P$  deve avere dimensione massima  $n$ . Sappiamo che  $N \leq 2n$ . Dunque  $n \leq N \leq 2n$ . Consideriamo le funzioni continue  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N : P \rightarrow [0, 1]$  con  $\sum_{i=1}^k \phi_i = 1$ , garantite dal teorema di Kalman 1.2.12. Facciamo le seguenti considerazioni preliminari. Dato  $x \in P$  esiste  $j_0 \in \{0, \dots, N\}$  tale che  $\phi_{j_0}(x) > 0$ . Cambiando nome agli  $x_j$  possiamo dunque supporre che

- $j_0 = 0$ ;
- i vettori  $v_1 := x_1 - x_0, \dots, v_n := x_n - x_0$  formano una base per  $\mathbb{R}^n$ .

Dimostriamo il seguente lemma.

**Lemma 1.2.13.** *Per ogni  $x \in \text{int}(P)$  esiste una rappresentazione  $x = \sum_{j=0}^N \phi_j(x)x_j$  data dal teorema di Kalman, esiste  $r > 0$  e quindi una palla euclidea aperta  $B(x, r) \subset \text{int}(P)$ , tale che le funzioni di Kalman  $\phi_j$  per*



$0 \leq j \leq N$ , possono essere deformate su  $B(x, r)$  in funzioni continue  $\psi_j : B(x, r) \rightarrow [0, 1]$ , in modo che

$$y = \sum_{j=0}^N \psi_j(y)x_j, \quad \forall y \in B(x, r),$$

$\psi_j(y) > 0$  per tutti gli  $y \in B(x, r)$  e tutti i  $j = 0, \dots, N$  e

$$\sum_{j=0}^N \psi_j \equiv 1 \quad \text{su } B(x, r).$$

Prima di fornire la dimostrazione del lemma, diamo un esempio significativo che spieghi l'idea della prova.

**Esempio 1.2.14.** Supponiamo che  $P \subset \mathbb{R}^3$  con  $\text{ext}(P) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$  dove

$$x_0 = (1, 1, 1), \quad x_1 = (-1, 2, 1), \quad x_2 = (3, 2, 1), \quad x_3 = (1, 3, 1), \quad x_4 = (1, 2, 3).$$

Consideriamo i vettori

$$v_1 := x_1 - x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 := x_2 - x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$v_3 := x_3 - x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 := x_4 - x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

In questo modo  $v_1, v_2, v_4$  formano una base di  $\mathbb{R}^3$  e  $v_3 = v_1 + v_2$ .

Sia allora

$$x = \sum_{j=0}^4 \phi_j(x)x_j = x_0 + \phi_1(x)v_1 + \phi_2(x)v_2 + \phi_4(x)v_4$$

una rappresentazione di Kalman in cui  $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \phi_4(x) > 0$  e  $\phi_3(x) = 0$ . Notiamo che, poiché  $x \in \text{int}(P)$ , si deve necessariamente avere che

$\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_4(x) \neq 0$  perché altrimenti  $x \in \partial P$ . Riscriviamo  $x$  nella forma seguente

$$\begin{aligned} x &= (\phi_0(x) + \phi_1(x) + \phi_2(x) + \phi_4(x))x_0 + \phi_1(x)v_1 + \phi_2(x)v_2 + \phi_4(x)v_4 = \\ &= ((\phi_0(x) + \varepsilon) + (\phi_1(x) - \varepsilon) + (\phi_2(x) - \varepsilon) + \varepsilon + \phi_4(x))x_0 + (\phi_1(x) - \varepsilon)v_1 + \\ &\quad + \varepsilon v_1 + (\phi_2(x) - \varepsilon)v_2 + \varepsilon v_2 + \phi_4(x)v_4 = \\ &= ((\phi_0(x) + \varepsilon) + (\phi_1(x) - \varepsilon) + (\phi_2(x) - \varepsilon) + \varepsilon + \phi_4(x))x_0 + (\phi_1(x) - \varepsilon)v_1 + \\ &\quad + (\phi_2(x) - \varepsilon)v_2 + \varepsilon v_3 + \phi_4(x)v_4 \\ &= (\phi_0(x) + \varepsilon)x_0 + (\phi_1(x) - \varepsilon)x_1 + (\phi_2(x) - \varepsilon)x_2 + \varepsilon x_3 + \phi_4(x)x_4 \end{aligned}$$

dove  $\varepsilon > 0$  è così piccolo che  $\phi_1(x) - \varepsilon, \phi_2(x) - \varepsilon > 0$ . Grazie alla continuità delle  $\phi_j$  esiste  $r > 0$  tale che per  $y \in B(x, r) \subset \text{int}(P)$  le funzioni

$$\psi_0(y) := \phi_0(y) + \varepsilon, \quad \psi_1(y) := \phi_1(y) - \varepsilon,$$

$$\psi_2(y) := \phi_2(y) - \varepsilon, \quad \psi_3(y) := \phi_3(y) + \varepsilon, \quad \psi_4(y) := \phi_4(y),$$

sono positive ed inoltre  $\forall y \in B(x, r)$  abbiamo

$$y = \sum_{j=0}^4 \psi_j(y)x_j.$$

Passiamo ora alla prova del Lemma 1.2.13.

*Dimostrazione.* Poiché la somma delle  $\phi_j$  è identicamente uno, riordinando i nomi dei punti estremi possiamo supporre che  $\phi_0(x) > 0$  e che i vettori  $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$  siano linearmente indipendenti. Sia  $I = \{1, \dots, n\}$ ,  $J = \{n+1, \dots, N\}$  e chiamiamo

$$I_1 = \{j \in I \mid \phi_j(x) > 0\}, \quad J_1 = \{j \in J \mid \phi_j(x) > 0\}, \quad I_2 = I \setminus I_1, \quad J_2 = J \setminus J_1.$$

Scriviamo

$$v_j := x_j - x_0, \quad \text{per } j \in I \quad \text{e} \quad w_k := x_k - x_0, \quad \text{per } k \in J.$$

Abbiamo allora che

$$w_k = \sum_{j \in I} \alpha_{kj} v_j, \quad k \in J,$$

(ovviamente  $v_j \neq 0$  per tutti i  $j \in I$  e  $w_k \neq 0$  per tutti i  $k \in J$ ).

Scriviamo  $x$  nella forma

$$x = x_0 + \sum_{j \in I_1} (\phi_j(x) + \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} \phi_k(x)) v_j + \sum_{j \in I_2} (\sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} \phi_k(x)) v_j,$$

dove

$$1 = \phi_0(x) + \sum_{j \in I_1} \phi_j(x) + \sum_{k \in J_1} \phi_k(x)$$

con tutti gli addendi  $> 0$ . Poiché  $x \in \text{int}(P)$  abbiamo che

$$\phi_j(x) + \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} \phi_k(x) \neq 0, \quad \forall j \in I_1$$

$$\sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} \phi_k(x) \neq 0, \quad \forall j \in I_2$$

perché altrimenti  $x \in \partial P$ . Riscriviamo ora, per  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  reali e piccoli in valore assoluto,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_1} \phi_j(x) + \sum_{k \in J_1} \phi_k(x) w_k &= \sum_{j \in I_1} \left( \phi_j(x) + \varepsilon_1 \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} - \varepsilon_2 \sum_{k \in J_2} \alpha_{kj} \right) v_j + \\ &+ \sum_{k \in J_1} (\phi_k(x) - \varepsilon_1) w_k + \varepsilon_1 \sum_{j \in I_2} \left( \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} \right) v_j + \varepsilon_2 \sum_{j \in I_1} \left( \sum_{k \in J_2} \alpha_{kj} \right) v_j. \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \sum_{j \in I_2} \left( \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} \right) v_j + \varepsilon_2 \sum_{j \in I_1} \left( \sum_{k \in J_2} \alpha_{kj} \right) v_j &= \\ = \sum_{j \in I_2} \left( \varepsilon_1 \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} - \varepsilon_2 \sum_{k \in J_2} \alpha_{kj} \right) v_j + \varepsilon_2 \underbrace{\sum_{k \in J_2} \sum_{j \in I} \alpha_{kj} v_j}_{\sum_{k \in J_2} w_k}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_1} \phi_j(x) + \sum_{k \in J_1} \phi_k(x) w_k &= \sum_{j \in I_1} \left( \phi_j(x) + \varepsilon_1 \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} - \varepsilon_2 \sum_{k \in J_2} \alpha_{kj} \right) v_j + \\ &+ \sum_{k \in J_1} (\phi_k(x) - \varepsilon_1) w_k + \sum_{j \in I_2} \left( \varepsilon_1 \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} - \varepsilon_2 \sum_{k \in J_2} \alpha_{kj} \right) v_j + \varepsilon_2 \sum_{k \in J_2} w_k. \end{aligned}$$

dove scegliamo

- il segno di  $\varepsilon_1$  in modo che  $\varepsilon_1 \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} > 0$  che è lecito in quanto, come abbiamo già osservato,  $\sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} \neq 0$ ,
- $\varepsilon_2 > 0$ ,
- $|\varepsilon_1|$  e  $\varepsilon_2$  così piccoli da avere

$$\phi_j(x) + \varepsilon_1 \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} - \varepsilon_2 \sum_{k \in J_2} \alpha_{kj} > 0, \quad \forall j \in I_1$$

$$\varepsilon_1 \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} - \varepsilon_2 \sum_{k \in J_2} \alpha_{kj} > 0, \quad \forall j \in I_2.$$

Poniamo allora

1. per  $j \in I_1$

$$\psi_j(x) := \phi_j(x) + \varepsilon_1 \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} - \varepsilon_2 \sum_{k \in J_2} \alpha_{kj},$$

2. per  $j \in I_2$

$$\psi_j(x) := \phi_j(x) + \varepsilon_1 \sum_{k \in J_1} \alpha_{kj} - \varepsilon_2 \sum_{k \in J_2} \alpha_{kj},$$

3. per  $k \in J_1$

$$\psi_j(x) := \phi_j(x) - \varepsilon_1,$$

4. per  $k \in J_2$

$$\psi_j(x) := \phi_j(x) + \varepsilon_2,$$

5. ed infine

$$\psi_0(y) = \phi_0(y) - \varepsilon_1 \sum_{k \in J_1} \left( \sum_{j \in I} \alpha_{kj} - 1 \right) + \varepsilon_2 \sum_{k \in J_2} \left( \sum_{j \in I} \alpha_{kj} - 1 \right).$$

Rimpicciolendo  $|\varepsilon_1|$  e  $\varepsilon_2$  se necessario, in modo da avere anche  $\psi_0(x) > 0$ , abbiamo per la continuità delle  $\phi_j$  l'esistenza di  $r > 0$  tale che  $\psi_j(y) > 0$  per ogni  $y \in B(x, r) \subset \text{int}(P)$  per  $j = 0, \dots, N$ . Poiché infine  $\sum_j \psi_j \equiv 1$  su  $B(x, r)$ , questo conclude la dimostrazione.  $\square$

## 1.3 Media e centro di massa di una curva

**Definizione 1.3.1.** (Media di una curva). La media di una curva  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$  è definita come:

$$\text{ave}[f] := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt .$$

**Lemma 1.3.2.**  $\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ ,  $\text{ave}[f] \in \text{relint conv}[f]$

*Dimostrazione.* Sia  $u \in \mathbf{S}^{n-1}$ , definiamo la seguente funzione

$$g(t) := \langle f(t) - \text{ave}[f], u \rangle .$$

Si vede facilmente che  $\int_a^b g(t) dt = 0$  quindi, dato che  $f$  e di conseguenza  $g$  sono continue, si ha che o  $g$  si annulla dappertutto oppure cambia segno. Consideriamo l'iperpiano  $H_u$  passante per  $\text{ave}[f]$  ed ortogonale a  $u$

$$H_u := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p - \text{ave}[f], u \rangle = 0\} .$$

Per quanto detto o  $f([a, b])$  è contenuto interamente in  $H_u$  oppure sta da entrambe le parti di  $H_u$ .  $\square$

**Definizione 1.3.3.** (Centro di massa). Sia  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ . Il centro di massa di  $f$  è

$$\text{cm}[f] := \frac{1}{\text{length}[f]} \int_a^b f(t) \|f'(t)\| dt ,$$

dove  $\text{length}[f] = \int_a^b \|f'(t)\| dt$ .

*Osservazione 1.3.4.* Si noti che il centro di massa è invariante per riparametrizzazioni: se  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una riparametrizzazione di  $f$  (cioè esiste un diffeomorfismo  $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$  tale che  $g = f \circ \theta$ ) allora  $\text{cm}[g] = \text{cm}[f]$ .

*Osservazione 1.3.5.* Se  $\|f'\|$  è costante allora  $\text{ave}[f] = \text{cm}[f]$ .

In questa sezione vogliamo stimare la distanza tra la media di una curva e il suo centro di massa, nel caso in cui la sua velocità non sia costante in norma, perché, come abbiamo appena visto, in caso di velocità costante in

norma media e centro di massa coincidono.

Definiamo ora il centro di massa di una curva in termini di una funzione densità di massa  $\rho \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^+)$  (in tutta la trattazione per  $\mathbb{R}^+$  intendiamo  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ).

**Definizione 1.3.6.** (Centro di massa di una curva di densità  $\rho$ ). Sia  $\rho \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^+)$  una funzione densità di massa ed  $f \in \text{Imm}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ . Il centro di massa della curva  $f$  di densità  $\rho$  è

$$\text{cm}[f, \rho] := \frac{\int_a^b f(t)\rho(t)\|f'(t)\|dt}{\int_a^b \rho(t)\|f'(t)\|dt}$$

*Osservazione 1.3.7.* Si vede facilmente che se  $\rho$  è costante,  $\text{cm}[f, \rho] = \text{cm}[f]$  e anche che

$$\text{ave}[f] = \text{cm}\left[f, \frac{1}{\|f'\|}\right] \quad (1.3.1)$$

**Lemma 1.3.8.** Per ogni  $f \in \text{Imm}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  e  $\rho \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^+)$  con  $\rho > 0$ , esiste un diffeomorfismo  $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$  di classe  $\mathcal{C}^1$  tale che

$$\text{cm}[f, \rho] = \text{ave}[f \circ \theta].$$

*Dimostrazione.* Da (1.3.1) si ha che

$$\text{ave}[f \circ \theta] = \text{cm}\left[f \circ \theta, \frac{1}{\|(f \circ \theta)'\|}\right]$$

e dato che il centro di massa è invariante per riparametrizzazioni, per ogni diffeomorfismo  $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$  si ha

$$\text{cm}[f, \rho] = \text{cm}[f \circ \theta, \rho \circ \theta].$$

Quindi per avere l'uguaglianza desiderata, deve essere:

$$\rho \circ \theta = \frac{1}{\|f'(\theta) \cdot \theta'\|}$$

che equivale a

$$\rho = \frac{1}{\|f' \cdot (\theta' \circ \theta^{-1})\|} = \frac{|(\theta^{-1})'|}{\|f'\|}.$$

Definiamo ora la **funzione di massa**  $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$m(t) := \int_a^t \rho(u) \|f'(u)\| du .$$

Dalle ipotesi  $\rho$  è continua e positiva, quindi  $m \in \mathcal{C}^1([a, b])$  e  $m'$  non si annulla mai, quindi  $\theta := m^{-1} : [0, m(b)] \rightarrow [a, b]$  è la mappa desiderata, che è ben definita e  $\mathcal{C}^1$ .  $\square$

Dai due lemmi precedenti, otteniamo il seguente, che fornisce delle condizioni affinché il centro di massa di una curva, di densità  $\rho$ , appartenga a  $\text{relint conv}[f]$ .

**Lemma 1.3.9.** *Per ogni  $f \in \text{Imm}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  e  $\rho \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^+)$  tale che  $\rho \not\equiv 0$  si ha*

$$\text{cm}[f, \rho] \in \text{conv}[f] .$$

*Inoltre, se non esiste nessun iperpiano di supporto proprio di  $f([a, b])$  che contiene  $f(\text{supp } \rho)$  allora*

$$\text{cm}[f, \rho] \in \text{relint conv}[f] .$$

L'ultima ipotesi nel lemma precedente è fondamentale, perché se esiste un iperpiano di supporto proprio  $H$  di  $f([a, b])$  che contiene  $f(\text{supp } \rho)$  allora  $\text{cm}[f, \rho]$  è contenuto in  $H$  e quindi  $\text{cm}[f, \rho] \notin \text{relint conv}[f]$ .

*Dimostrazione.* Usando il Lemma 1.3.8 (posso applicarlo in quanto  $\rho + \varepsilon > 0$  se  $\varepsilon > 0$ ) e il Lemma 1.3.2 si ha che

$$\text{cm}[f, \rho + \varepsilon] \in \text{conv}[f] \quad \forall \varepsilon > 0 ,$$

e dato che  $\text{cm}[f, \rho + \varepsilon]$  converge a  $\text{cm}[f, \rho]$  per  $\varepsilon$  che diventa piccolo e  $\text{conv}[f]$  è compatto, segue che  $\text{cm}[f, \rho] \in \text{conv}[f]$ . Possiamo supporre che  $\text{int conv}[f] \neq \emptyset$ , altrimenti potremmo ridurre la dimensione di  $\mathbb{R}^n$  tramite una trasformazione affine. Sia  $H$  un iperpiano di supporto proprio di  $f([a, b])$ . Per definizione  $f([a, b])$  non può essere contenuto interamente in  $H$ , e per ipotesi neanche  $f(\text{supp } \rho)$  è contenuto interamente in  $H$ . Possiamo supporre (basta

applicare un movimento rigido) che  $H$  coincida con l'iperpiano delle prime  $n - 1$  coordinate in  $\mathbb{R}^n$  e che  $f(\text{supp } \rho)$  stia sopra  $H$ . Allora  $\langle f(t)\rho(t), e_n \rangle \geq 0$  e non è identicamente nullo, di conseguenza  $\langle \text{cm}[f, \rho], e_n \rangle > 0$ . Questo vuol dire che  $\text{cm}[f, \rho]$  non può stare in  $H$ . Dato che  $H$  è stato scelto in modo arbitrario, possiamo concludere che  $\text{cm}[f, \rho]$  non sta in nessun iperpiano di supporto proprio di  $\text{conv}[f]$  e quindi deve appartenere a  $\text{relint conv}[f]$ .  $\square$

Ci sarà utile la seguente definizione.

**Definizione 1.3.10.** (Contrazione dell'insieme  $X$  di un fattore  $(1 - \lambda)$  rispetto a  $p$ ). Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $p \in X$  e  $\lambda \in [0, 1]$ . La contrazione dell'insieme  $X$  di un fattore  $(1 - \lambda)$  rispetto a  $p$  è l'insieme

$$\lambda p + (1 - \lambda)X := \{\lambda p + (1 - \lambda)x \mid x \in X\}.$$

Enunciamo il seguente lemma che servirà nella dimostrazione della proposizione successiva.

**Lemma 1.3.11.** Sia  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], [0, 1])$  con  $\int_0^1 f(s)ds = 1$  allora  $f \equiv 1$ .

*Dimostrazione.* Se per assurdo esistesse  $t_0 \in [0, 1]$  tale che  $f(t_0) < 1$ , allora dovrebbe esistere  $\delta_0 \in (0, 1)$  tale che, per un certo  $c \in (0, 1)$ ,

$$f(t) \leq 1 - c \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0, 1] \quad \text{e} \quad \forall \delta \in (0, \delta_0).$$

Per fissare le idee supponiamo che  $t_0 \in (0, 1)$  (gli altri casi sono analoghi), per  $\delta$  sufficientemente piccolo si ha

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 f(s)ds = \int_0^{t_0 - \delta} f(s)ds + \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} f(s)ds + \int_{t_0 + \delta}^1 f(s)ds \leq \\ &\leq t_0 - \delta + 2\delta(1 - c) + 1 - t_0 - \delta = \\ &= 2\delta(1 - c) + 1 - 2\delta = 1 - 2\delta c < 1 \end{aligned}$$

il che è assurdo.  $\square$

La proposizione seguente fornisce il più piccolo valore di  $\lambda$  affinché la contrazione dell'involuppo convesso di una curva  $f$  di un fattore  $(1 - \lambda)$  rispetto al suo centro di massa, contenga  $\text{ave}[f]$ .



**Proposizione 1.3.12.** *Sia  $f \in \text{Imm}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ , si ha che:*

$$\text{ave}[f] \in \lambda \text{cm}[f] + (1 - \lambda) \text{conv}[f] \quad (1.3.2)$$

per ogni valore di  $\lambda$  tale che:

$$0 \leq \lambda \leq \frac{\text{ave}[\|f'\|]}{\max\|f'\|} \leq 1 .$$

Inoltre

$$\text{ave}[f] \in \lambda \text{cm}[f] + (1 - \lambda) \text{relint conv}[f] \quad (1.3.3)$$

se

$$0 \leq \lambda < \frac{\text{ave}[\|f'\|]}{\max\|f'\|}$$

oppure se non esiste nessun iperpiano di supporto proprio di  $f([a, b])$  che contenga  $f(\text{supp}(-\|f'\| + \max\|f'\|))$ .

*Dimostrazione.* Definiamo  $\tilde{f} \in \text{Imm}^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$  come  $\tilde{f}(t) := \frac{f(a+(b-a)t)}{b-a}$ . Si vede facilmente che  $\tilde{f}' = f'$ ,  $\text{ave}[\tilde{f}] = \text{ave}[f]/(b-a)$ ,  $\text{cm}[\tilde{f}] = \text{cm}[f]/(b-a)$  e  $\text{conv}[\tilde{f}] = \text{conv}[f]/(b-a)$ . Si può osservare che la (1.3.2) vale per  $f$  se e solo se vale per  $\tilde{f}$ ; quindi supponiamo per comodità che  $a = 0$  e  $b = 1$ , e facendo un'opportuna dilatazione di  $\mathbb{R}^n$  possiamo anche assumere  $\text{length}[f] = 1$ , cioè  $\text{ave}[\|f'\|] = 1$ . Se la (1.3.2) vale per  $f$ , allora vale anche per  $f + p$  con  $p \in \mathbb{R}^n$ , quindi possiamo ipotizzare che  $\text{cm}[f] = O$  (origine di  $\mathbb{R}^n$ ). Ci basta dunque mostrare che  $\forall f \in \text{Imm}^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$  con  $\text{cm}[f] = O$  e  $\text{length}[f] = 1$  (per cui  $\max\|f'\| \geq 1$ ):

$$\text{ave}[f] \in (1 - \lambda) \text{conv}[f] \quad \forall \lambda \in \left[0, \frac{1}{\max\|f'\|}\right] .$$

Per quanto già osservato, dobbiamo dimostrare che per  $\rho = 1/\|f'\|$

$$\text{cm}[f, \rho] \in (1 - \lambda) \text{conv}[f].$$

Se  $\lambda = 1$ , deve essere  $\max\|f'\| = 1$  e per quanto appena detto si ha

$$\int_0^1 \|f'(s)\| ds = \text{length}[f] = 1;$$

siamo quindi nelle ipotesi del Lemma 1.3.11 e perciò  $\|f'\|$  è costante uguale ad 1. Dunque se  $\lambda = 1$ , allora  $\|f'\| \equiv 1$  e in tal caso  $\rho \equiv 1$ , dall'Osservazione 1.3.7 segue che  $\text{cm}[f, \rho] = \text{cm}[f]$ . Dato che per ipotesi  $\text{cm}[f] = O$  abbiamo concluso.

Se  $\lambda < 1$ :

$$\frac{\text{cm}[f, \rho]}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 - \lambda} \frac{\int_0^1 f(t)\rho(t)\|f'(t)\|dt}{\int_0^1 \rho(t)\|f'(t)\|dt} =$$

dato che  $\rho = 1/\|f'\|$  il denominatore vale 1:

$$= \frac{1}{1 - \lambda} \int_0^1 f(t)\rho(t)\|f'(t)\|dt =$$

si osserva che  $\int_0^1 f(t)\lambda\|f'(t)\|dt = \lambda\text{cm}[f] = O$  e dato che sottraendo una quantità nulla il risultato non cambia:

$$= \frac{1}{1 - \lambda} \int_0^1 f(t)(\rho(t) - \lambda)\|f'(t)\|dt = \text{cm}[f, \rho - \lambda]$$

in cui nell'ultima uguaglianza si usa la relazione:  $1 - \lambda = \int_0^1 (\rho(t) - \lambda)\|f'(t)\|dt$ . Dato che  $\lambda \leq \frac{1}{\max\|f'\|} = \min \rho$ , si ha  $\rho - \lambda \geq 0$ . Quindi dal Lemma 1.3.9 segue

$$\text{cm}[f, \rho - \lambda] \in \text{conv}[f].$$

Per dimostrare la (1.3.3) si osserva che se  $\lambda < \min \rho$ , si ha  $\rho - \lambda > 0$ , quindi si usa nuovamente il Lemma 1.3.9 (più precisamente, il secondo asserto del lemma).

Infine  $\text{supp}(-\|f'\| + \max\|f'\|)$  è la chiusura dell'insieme dei punti per cui  $\rho \neq \min \rho$ , quindi se  $\lambda = \min \rho$  e fissiamo  $\tilde{\rho} := \rho - \lambda$  si ha

$$\text{supp}(-\|f'\| + \max\|f'\|) = \text{supp} \tilde{\rho}.$$

Utilizzando il Lemma 1.3.9 si ha  $\text{cm}[f, \tilde{\rho}] \in \text{relint conv}[f]$ . □

## 1.4 Loop sferici con media e lunghezza assegnate

In questa sezione mostreremo alcuni risultati riguardanti le curve sulla sfera  $n$ -dimensionale  $\mathbf{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ . Mostriamo che per ogni punto  $p \in \mathbf{S}^{n-1}$  possiamo costruire una curva chiusa su  $\mathbf{S}^{n-1}$  di lunghezza assegnata  $L$  e media  $(1 - \delta)p$ , a patto che  $\delta/L$  sia sufficientemente piccolo; tale curva inizia e finisce nel punto  $p$  e si può costruire per raccordare in modo liscio ogni data curva che passa per  $p$ .

Dimostreremo che una curva di lunghezza  $L$ , simmetrica rispetto a  $p$ , si può contrarre su  $\mathbf{S}^{n-1}$  con continuità al punto  $p$ , preservandone lunghezza e simmetria, finché la sua media non raggiunge il valore desiderato.

A tal fine, dobbiamo costruire una famiglia opportuna di contrazioni sulla sfera, per definire tali contrazioni sfruttiamo la famiglia di funzioni fornita dal seguente lemma.

**Lemma 1.4.1.** *Per ogni intervallo  $[0, b] \subset \mathbb{R}$  e per ogni  $\varepsilon \in (0, b)$  esiste una famiglia continua di funzioni lisce  $f_t : [0, b] \rightarrow [0, b]$  per  $t \in [0, 1)$  tale che:*

- i.  $f_0(x) = x \quad \forall x \in [0, b]$ ;*
- ii.  $f_t(x) = x \quad \forall x \in [0, (1 - t)\varepsilon]$ ;*
- iii. per ogni  $t$  fissato,  $f_t$  è crescente;*
- iv. per ogni coppia di punti  $x, y \in [0, b]$ ,  $|f_t(x) - f_t(y)|$ , come funzione di  $t$ , converge in modo monotono a 0 se  $t \rightarrow 1$  ed è strettamente decrescente se  $x$  o  $y$  appartengono all'intervallo  $[\varepsilon, b]$ .*

*Dimostrazione.* La famiglia di funzioni  $f_t$  si costruisce integrando una famiglia opportuna di funzioni che indicheremo con  $g_t$ . Fissiamo  $f_t(0) := 0$ ; richiediamo che  $(g_t)_{t \in [0, 1)}$  sia una famiglia di funzioni lisce che soddisfino le seguenti proprietà:

- (i)  $g_0 \equiv 1 \quad \text{su } [0, b]$ ;

- (ii)  $g_t \equiv 1$  su  $[0, (1-t)\varepsilon]$  per  $0 \leq t < 1$ ;
- (iii)  $g_t > 0 \quad \forall t$ ;
- (iv)  $|\int_y^x g_t(s)ds|$  converge in modo monotono a 0 per  $t \rightarrow 1$  ed è strettamente decrescente se  $x$  o  $y$  appartengono a  $[\varepsilon, b]$

(affinché sia soddisfatta la (iv) è sufficiente richiedere che  $g_t(x)$  converga in modo monotono a 0 per ogni fissato  $x > 0$  e sia strettamente decrescente in  $t$  se  $x \in [\varepsilon, b]$ ). A questo punto,  $\forall t \in [0, 1)$  e  $\forall x \in [0, b]$  definiamo

$$f_t(x) := \int_0^x g_t(s)ds.$$

Per la regolarità imposta sulle  $g_t$ , le  $f_t(x)$  sono funzioni lisce in  $x$ . Dalla proprietà (i) segue che  $f_0(x) = \int_0^x g_0(s)ds = \int_0^x ds = x \quad \forall x \in [0, b]$ . Dalla (ii) segue in modo analogo che  $f_t(x) = x \quad \forall x \in [0, (1-t)\varepsilon]$ . Dalla (iii) si ha che  $g_t$  è una funzione non negativa e quindi per ogni  $t$  fissato,  $f_t$  è crescente. Infine dato che  $|\int_y^x g_t(s)ds| = |\int_0^x g_t(s)ds - \int_0^y g_t(s)ds| = |f_t(x) - f_t(y)|$  dalla condizione (iv) per la famiglia delle  $g_t$  segue immediatamente la proprietà *iv*. per la famiglia delle  $f_t$ .

Per concludere, costruiamo esplicitamente una famiglia di funzioni che soddisfino tutte le proprietà richieste alle  $g_t$ . Tale famiglia è formata dalle funzioni così definite

$$g_t(x) := 1 - t\psi_t(x)$$

dove  $\psi_t$  è una famiglia continua di funzioni lisce non decrescenti definite nel modo seguente:

$$\psi_t(x) := \frac{\int_{-\infty}^x \phi_t(u)du}{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t(u)du}, \quad \text{per } x \in [0, b]$$

con  $\varepsilon < \bar{\varepsilon} < b$  e

$$\phi_t(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{(x-(1-t)\varepsilon)((1-t)\bar{\varepsilon}-x)}\right), & \text{se } x \in [(1-t)\varepsilon, (1-t)\bar{\varepsilon}] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quindi  $\psi_t(x) \equiv 0$  se  $x \in [0, (1-t)\varepsilon]$  e  $\psi \equiv 1$  se  $x \in [(1-t)\varepsilon, b]$ .

Verifichiamo che la famiglia  $(g_t)_{t \in [0,1]}$  soddisfi le proprietà richieste. Per come abbiamo definito le  $g_t$ , se  $t = 0$ ,  $g_0 \equiv 1$  su  $[0, b]$ . Se  $0 \leq t < 1$ ,  $g_t \equiv 1$  su  $[0, (1-t)\varepsilon]$ , dato che  $\psi_t(x) = 0$  se  $x \in [0, (1-t)\varepsilon]$ . La positività delle  $g_t$  si dimostra osservando che se  $t \in [0, 1)$  allora  $t\psi_t(x) \in [0, 1)$  (dato che per definizione  $\psi_t \in [0, 1]$ ) e quindi  $g_t(x) = 1 - t\psi_t(x) > 0$ . Per quanto riguarda la proprietà (iv), basta mostrare che  $g_t(x)$  converge in modo monotono a 0 per  $x > 0$  fissato ed è strettamente decrescente se  $x \in [\varepsilon, b]$ .  $\square$

**Definizione 1.4.2.** (Riflessione del punto  $x$  rispetto ad un punto  $p$ ). Siano  $x$  e  $p$  due punti in  $\mathbf{S}^{n-1}$ , la riflessione di  $x$  rispetto a  $p$ , indicata con  $x'$ , è uguale a  $x$  se  $x = \pm p$ , altrimenti  $x'$  è il punto, oltre  $x$  stesso, che sta sulla geodetica passante per  $p$  e  $x$ , tale che  $\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(x', p) = \text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(p, x)$ .

La riflessione di un insieme  $X \subset \mathbf{S}^{n-1}$  rispetto al punto  $p$ , è l'insieme  $X'$  che si ottiene riflettendo ogni punto di  $X$  rispetto a  $p$ . Se  $X = X'$  diremo che  $X$  è simmetrico rispetto a  $p$ . Diremo che una mappa  $f : A \subset \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$  conserva la simmetria rispetto a  $p$  se per ogni insieme  $X \subset A$  simmetrico rispetto a  $p$ , anche la sua immagine mediante  $f$ , cioè  $f(X)$ , è simmetrica rispetto a  $p$ .

**Definizione 1.4.3.** (Legge dei coseni sferici). Su una sfera unitaria, un triangolo sferico è definito dai segmenti di geodetica che collegano tre punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ , supponiamo che la lunghezza di questi tre segmenti sia  $a$  per il segmento da  $A$  a  $B$ ,  $b$  per il segmento da  $A$  a  $C$  e  $c$  per il segmento da  $B$  a  $C$ , chiamiamo  $\alpha$  l'angolo opposto al segmento da  $B$  a  $C$ , allora la legge dei coseni sferici afferma che:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \alpha \quad (1.4.1)$$

**Lemma 1.4.4.** Sia  $p \in \mathbf{S}^{n-1}$  e  $H$  una semisfera centrata in  $p$ . Esiste una famiglia continua di embedding lisci  $\phi_t : H \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ , per  $t \in [0, 1)$ , che preservano la simmetria rispetto a  $p$ , e tali che:

- i.  $\phi_0$  è l'identità;

ii. ogni  $\phi_t$  coincide con l'identità su un opportuno intorno di  $p$ ;

iii.  $\phi_t$  converge a  $p$  se  $t$  tende a 1;

iv. per ogni coppia di punti  $q, r \in H$  e  $t > s$  si ha

$$\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(\phi_t(q), \phi_t(r)) \leq \text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(\phi_s(q), \phi_s(r)); \quad (1.4.2)$$

inoltre, per ogni intorno aperto  $U \subset \mathbf{S}^{n-1}$  di  $p$ , l'ultima disuguaglianza è stretta se  $q$  oppure  $r$  non appartiene ad  $U$ .

*Dimostrazione.* Sia  $U \subset \mathbf{S}^{n-1}$  un intorno aperto di  $p$ , scegliamo  $\varepsilon \in (0, \pi/2)$  in modo che  $B_{\mathbf{S}^{n-1}}(p, \varepsilon)$  (cioè la palla geodetica su  $\mathbf{S}^{n-1}$  centrata in  $p$  e di raggio  $\varepsilon$ ) sia contenuta in  $U$ . Tramite il Lemma 1.4.1, otteniamo una famiglia di funzioni  $f_t : [0, \pi/2] \rightarrow [0, \pi/2]$ . Sia  $q \in B_{\mathbf{S}^{n-1}}(p, \varepsilon)$ , definiamo  $\phi_t(q)$  come il punto sul segmento di geodetica che passa per  $q$  e  $p$ , tale che

$$\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(\phi_t(q), p) = f_t(\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q, p)). \quad (1.4.3)$$

Per la proprietà (iii.) del Lemma 1.4.1, le funzioni  $f_t$  sono crescenti per ogni fissato  $t$ . Da ciò segue che ogni  $\phi_t$  è un embedding. Mostriamo che le  $\phi_t$  soddisfano le proprietà richieste. Dato che  $f_0(x) = x \quad \forall x \in [0, \pi/2]$  ed avendo definito  $\phi_0(q)$  come il punto sul segmento di geodetica che passa per  $q$  e  $p$  tale che

$$\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(\phi_0(q), p) = f_0(\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q, p)) = \text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q, p),$$

si ha che  $\phi_0(q) = q$ , quindi  $\phi_0$  è l'identità. Dalla proprietà (ii.) del Lemma 1.4.1 segue che

$$\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(\phi_t(q), p) = \text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q, p) \quad \forall q \text{ t.c. } \text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q, p) \in [0, (1-t)\varepsilon]$$

quindi  $\phi_t$  coincide con l'identità su un opportuno intorno di  $p$ .

La proprietà (iv.) del Lemma 1.4.1 afferma che, per ogni coppia di punti  $x, y \in [0, \pi/2]$ ,  $|f_t(x) - f_t(y)|$  come funzione di  $t$ , converge in modo monotono a 0 se  $t \rightarrow 1$ , quindi si ha che

$$|f_t(\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q, p)) - f_t(\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(\phi_t^{-1}(p), p))|$$

come funzione di  $t$ , converge in modo monotono a 0 se  $t \rightarrow 1$ . Per come abbiamo definito le  $\phi_t$  si ha che

$$|\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(\phi_t(q), p) - \text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(\phi_t(\phi_t^{-1}(p)), p)| \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$$

in modo monotono, quindi

$$|\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(\phi_t(q), p) - \text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(p, p)| = |\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(\phi_t(q), p)|$$

come funzione di  $t$ , converge in modo monotono a 0 se  $t \rightarrow 1$ . Segue allora che  $\phi_t$  converge a  $p$  se  $t \rightarrow 1$ .

Dimostriamo la proprietà *iv*. Per comodità adottiamo le seguenti notazioni: per ogni  $q \in \mathbf{S}^{n-1}$  sia  $\bar{q} := \text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q, p)$  e  $q_t := \phi_t(q)$ ; quindi la relazione (1.4.3) diventa:

$$\bar{q}_t = f_t(\bar{q}).$$

Applicando la legge dei coseni sferici (1.4.1) al triangolo sferico di vertici  $q_t$ ,  $p$  e  $r_t$  otteniamo:

$$\cos(\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q_t, r_t)) = \cos \bar{q}_t \cos \bar{r}_t + \sin \bar{q}_t \sin \bar{r}_t \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo con vertice in  $p$  del triangolo considerato, e analogamente

$$\cos(\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q_s, r_s)) = \cos \bar{q}_s \cos \bar{r}_s + \sin \bar{q}_s \sin \bar{r}_s \cos \theta$$

dato che la distanza tra due punti qualunque di  $H$  è al più  $\pi$  (perché  $H$  è una semisfera) ed il coseno è una funzione decrescente nell'intervallo  $[0, \pi]$ , la (1.4.2) è vera se e solo se

$$\cos(\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q_t, r_t)) \geq \cos(\text{dist}_{\mathbf{S}^{n-1}}(q_s, r_s)).$$

Per le relazioni viste sopra, tale disuguaglianza è equivalente alla seguente:

$$\cos \bar{q}_t \cos \bar{r}_t - \cos \bar{q}_s \cos \bar{r}_s \geq (\sin \bar{q}_s \sin \bar{r}_s - \sin \bar{q}_t \sin \bar{r}_t) \cos \theta. \quad (1.4.4)$$

Si può osservare che  $\bar{q}_t = f_t(\bar{q}) - f_t(0)$  è una funzione non crescente di  $t$  (si veda la *iv*. del Lemma 1.4.1); quindi se per ipotesi  $t > s$ , si avrà  $\bar{q}_t \leq \bar{q}_s$  ed

analogamente  $\bar{r}_t \leq \bar{r}_s$ . Dato che i valori su cui calcolo i seni appartengono tutti all'intervallo  $[0, \pi/2]$  ed in tale intervallo  $\sin$  è crescente, si ha:

$$\sin \bar{q}_s \sin \bar{r}_s - \sin \bar{q}_t \sin \bar{r}_t \geq 0 .$$

Segue che la (1.4.4) è vera se

$$\cos \bar{q}_t \cos \bar{r}_t - \cos \bar{q}_s \cos \bar{r}_s \geq \sin \bar{q}_s \sin \bar{r}_s - \sin \bar{q}_t \sin \bar{r}_t$$

e quest'ultima è equivalente a

$$\cos(\bar{q}_t - \bar{r}_t) \geq \cos(\bar{q}_s - \bar{r}_s) . \quad (1.4.5)$$

Non è restrittivo supporre che  $\bar{q} \geq \bar{r}$ , in tal caso  $\bar{q}_t \geq \bar{r}_t$ , in quanto  $f_t$  è una funzione crescente per ogni  $t$  fissato e  $\bar{q}_t = f_t(\bar{q})$ . Analogamente  $\bar{q}_s \geq \bar{r}_s$ . Inoltre, per costruzione delle  $f_t$  si ha che  $\bar{q}_t \in [0, \pi/2]$ , per cui  $\bar{q}_t - \bar{r}_t$  e  $\bar{q}_s - \bar{r}_s$  appartengono all'intervallo  $[0, \pi/2]$ . Dato che la funzione  $\cos$  è decrescente sull'intervallo  $[0, \pi/2]$ , la disuguaglianza (1.4.5) vale se

$$\bar{q}_t - \bar{r}_t \leq \bar{q}_s - \bar{r}_s .$$

Riscrivendo tale disuguaglianza come

$$f_t(\bar{q}) - f_t(\bar{r}) \leq f_s(\bar{q}) - f_s(\bar{r}) \quad (1.4.6)$$

si vede che tale disuguaglianza è vera per la proprietà *iv.* del Lemma 1.4.1. Rimane da dimostrare che la disuguaglianza (1.4.2) è stretta se  $q$  oppure  $r$  non appartengono ad  $U$ . Supponiamo che  $q \notin U$ . Dato che per ipotesi  $q \in H$  ma non è contenuto nella palla centrata in  $p$  e di raggio  $\varepsilon$ , si deve avere  $\bar{q} \in [\varepsilon, \pi/2]$ . A questo punto, utilizzando la proprietà *iv.* del Lemma 1.4.1, si ottiene che la disuguaglianza (1.4.6) è stretta e di conseguenza anche la disuguaglianza (1.4.2) lo è.  $\square$

Possiamo quindi enunciare il seguente Lemma, che, sotto opportune ipotesi, ci permette di deformare (dentro  $\mathbf{S}^{n-1}$ ) in modo continuo una data curva in  $\mathbf{S}^{n-1}$  conservandone lunghezza e simmetria.



**Lemma 1.4.5.** *Sia  $f_0 \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbf{S}^{n-1})$  con  $f_0(a) = p = f_0(b)$ , tale che  $f_0$  si raccordi in modo liscio (almeno  $C^\alpha$ ) in  $p$  e  $f_0([a, b])$  sia contenuto in una semisfera centrata in  $p$ , allora esiste una famiglia continua di curve immerse  $f_t \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbf{S}^{n-1})$  per  $t \in [0, 1)$ , tale che  $\text{length}[f_t] = \text{length}[f_0]$  ed  $f_t$  converge a  $p$  per  $t$  che tende a 1.*

*Inoltre possiamo richiedere che per ogni  $t \in [0, 1)$  ci sia un intorno aperto degli estremi dell'intervallo  $[a, b]$ , in cui  $f_t = f_0$  e  $f_t$  sia simmetrica rispetto a  $p$ , nel caso in cui  $f_0$  presenti tale simmetria.*

*Dimostrazione.* Possiamo supporre per comodità che  $\|f_0'\| = 1$ , in tal caso  $\text{length}[f_0] = b - a$ ; definiamo  $\alpha_t := \phi_t \circ f_0$  per  $t \in [0, 1)$ , dove le  $\phi_t$  sono costruite tramite il Lemma 1.4.4 in cui l'intorno  $U$  è scelto abbastanza piccolo in modo che non contenga interamente  $f_0([a, b])$ . In questo modo, la famiglia delle  $\alpha_t \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbf{S}^{n-1})$  è una famiglia continua che soddisfa le proprietà richieste su  $f_t$ , eccetto che per  $\text{length}[\alpha_t]$  che è strettamente decrescente (per come è stato scelto l'intorno  $U$ , le curve  $\alpha_t$  si contraggono). Si osserva che  $\forall t \in [0, 1)$  esiste un unico  $s(t) \in [0, 1)$  tale che  $\text{length}[\alpha_{s(t)}] = (1-t)(b-a)$ , quindi dopo un'opportuna reindicizzazione possiamo supporre che  $\text{length}[\alpha_t] = (1-t)(b-a)$ . A questo punto possiamo riparametrizzare in modo che:

$$\alpha_t : [a, b - t(b-a)] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$$

ed  $\alpha_t$  abbia velocità unitaria. Definiamo la famiglia di curve

$$\beta_t : [b - t(b-a), b] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$$

in questo modo:

$$\beta_t(s) := \alpha_{1-t}(s - (1-t)(b-a)).$$

Per  $t \in [0, 1/2]$  sia  $f_t : [a, b] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$  la curva così definita:

$$f_t(s) := \begin{cases} \alpha_t(s), & \text{se } s \in [a, b - t(b-a)] \\ \beta_t(s), & \text{se } s \in (b - t(b-a), b] \end{cases}.$$

La famiglia delle  $(f_t)_t$  è una famiglia continua di immersioni  $\mathcal{C}^\alpha$  (le curve che abbiamo costruito, si raccordano in modo che tutto sia  $\mathcal{C}^\alpha$  grazie al fatto che ogni  $\phi_t$  coincide con l'identità su un opportuno intorno di  $p$ , dunque su un opportuno intorno di  $p$ , eventualmente ristretto,  $\alpha_t$  e  $\beta_t$  coincidono con  $f_0$  che per ipotesi è si raccorda in modo  $\mathcal{C}^\alpha$  nel punto  $p$ ). Inoltre dato che  $f_t$  ha velocità costante unitaria,  $\text{length}[f_t] = (b - a) = \text{length}[f_0]$ , come richiesto. Si può notare che  $f_{1/2}$  è la curva che copre due volte il sostegno della curva  $\alpha_{1/2}$ , dato che  $\alpha_{1/2}$  e  $\beta_{1/2}$  hanno lo stesso sostegno.

Abbiamo mostrato dunque che possiamo deformare in modo continuo  $f_0$ , conservandone lunghezza, simmetria ed altre proprietà richieste, fino a coprire due volte una curva la cui lunghezza è la metà della lunghezza di  $f_0$ . Possiamo iterare questo procedimento e definire  $f_t$  per  $t \in [1/2, 3/4]$ , partendo dalla curva  $f_{1/2}$  e arrivando alla curva  $f_{3/4}$  che coprirà quattro volte una curva la cui lunghezza è un quarto della lunghezza di  $f_0$ . Consideriamo per  $t \in [1/2, 3/4]$  la curva

$$\alpha_t : [a, b - t(b - a)] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$$

parametrizzata a velocità unitaria; si può osservare che al variare di  $t$  tra  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{4}$  la lunghezza della curva  $\alpha_t$  passa da  $\frac{b-a}{2}$  a  $\frac{b-a}{4}$ . In questo caso dovremmo dividere l'intervallo  $[a, b]$  in quattro parti le cui ampiezze dipendono da  $t$ , tali intervalli sono i seguenti:

$$[a, b - t(b - a)], \quad \left[ b - t(b - a), \frac{a + b}{2} \right], \quad \left[ \frac{a + b}{2}, \frac{3b - a}{2} - t(b - a) \right]$$

e

$$\left[ \frac{3b - a}{2} - t(b - a), b \right].$$

In questo modo quando  $t = \frac{3}{4}$  si ottiene una suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$  in quattro parti della stessa lunghezza. Analogamente a quanto fatto in precedenza, definiamo la famiglie di curve  $\beta_t$

$$\beta_t : \left[ b - t(b - a), \frac{a + b}{2} \right] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1},$$

come

$$\beta_t(s) := \alpha_{\frac{3}{2}-t}(s - (1-t)(b-a));$$

la famiglia delle

$$\gamma_t : \left[ \frac{a+b}{2}, \frac{3b-a}{2} - t(b-a) \right] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1},$$

come

$$\gamma_t(s) := \alpha_t \left( s - \frac{b-a}{2} \right);$$

e la famiglia delle curve

$$\delta_t : \left[ \frac{3b-a}{2} - t(b-a), b \right] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1},$$

come

$$\delta_t(s) := \beta_t \left( s - \frac{b-a}{2} \right).$$

A questo punto possiamo definire per  $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$  la curva  $f_t : [a, b] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$  nel modo seguente

$$f_t(s) := \begin{cases} \alpha_t(s), & \text{se } s \in [a, b - t(b-a)]; \\ \beta_t(s), & \text{se } s \in (b - t(b-a), \frac{a+b}{2}]; \\ \gamma_t(s), & \text{se } s \in (\frac{a+b}{2}, \frac{3b-a}{2} - t(b-a)]; \\ \delta_t(s), & \text{se } s \in (\frac{3b-a}{2} - t(b-a), b]. \end{cases}$$

Si può notare che  $f_{3/4}$  è la curva che copre quattro volte il sostegno della curva  $\alpha_{3/4}$ , quindi possiamo deformare in modo continuo  $f_0$ , conservandone lunghezza, simmetria ed altre proprietà richieste, fino a coprire quattro volte una curva la cui lunghezza è un quarto della lunghezza di  $f_0$ .

Possiamo allora definire  $f_t \forall t \in [0, 1)$ , iterando i ragionamenti precedenti su ogni intervallo

$$\left[ \frac{2^k - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \right] \quad \text{con } 0 \leq k \leq +\infty,$$

Questa è proprio la famiglia di funzioni cercata, perché per ogni  $t = \sum_{i=1}^j \frac{1}{2^i}$  si ha che  $f_t$  ha sostegno che coincide con quello di una curva la cui lunghezza

diventa arbitrariamente piccola per  $j$  grande e quindi la distanza della curva dal punto  $p$  tende a 0. Infine, nel caso in cui la curva iniziale  $f_0$  sia simmetrica rispetto a  $p$ , anche le  $f_t$  presentano tale proprietà, dato che la famiglia delle  $\phi_t$  preserva la simmetria rispetto al punto  $p$ .  $\square$

Possiamo ora enunciare la seguente Proposizione:

**Proposizione 1.4.6.** *Sia  $p \in \mathbf{S}^{n-1}$ ,  $U \subset \mathbf{S}^{n-1}$  un intorno aperto di  $p$  ed  $l, c > 0$ . Esiste  $\bar{\delta} > 0$  tale che  $\forall \delta \in (0, \bar{\delta}]$  e per ogni intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  con  $(b - a) \geq l$ , si può trovare una curva immersa  $f : [a, b] \rightarrow U$  tale che:*

- i.  $f$  ha velocità costante uguale a  $c$ ;*
- ii.  $\text{ave}[f] = (1 - \delta)p$ ;*
- iii.  $f(a) = p = f(b)$ ;*
- iv.  $f'(a)$  è parallelo a  $f'(b)$ .*

*Inoltre se  $C \subset \mathbf{S}^{n-1}$  è l'immagine di un qualsiasi embedding di classe  $C^{\alpha \geq 1}$  definito su  $[a, b]$  che passi per  $p$ , allora possiamo richiedere che  $f$  ammetta un'estensione  $C^\alpha \tilde{f} : [a - \varepsilon, b + \varepsilon] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$  per opportuni valori di  $\varepsilon > 0$ , tale che*

$$\tilde{f}([a - \varepsilon, a] \cup [b, b + \varepsilon]) \subset C$$

*e  $\tilde{f}'(a)$  sia parallelo alla direzione di  $C$  in  $p$ .*

*Dimostrazione.* Innanzi tutto vediamo come si può ottenere  $\bar{\delta}$ . Consideriamo un piccolo segmento curvilineo di  $\mathbf{S}^{n-1}$  di estremi  $q$  ed  $r$  che contenga  $p$  nella sua parte interna e che sia contenuto in  $U$ . Possiamo supporre che  $q$  preceda  $p$  rispetto alla direzione scelta; sia  $q'r'$  la riflessione del segmento  $qr$  rispetto a  $p$ . Se abbiamo scelto  $q$  ed  $r$  abbastanza vicini a  $p$  possiamo assumere che il segmento  $q'r'$  sia contenuto anch'esso in  $U$ . I punti  $q'$  ed  $r$  possono essere arbitrariamente vicini, purché la lunghezza  $\lambda$  del segmento  $qr$  sia sufficientemente piccola; infatti se prendiamo  $\lambda$  abbastanza piccola, possiamo dire che  $q$  ed  $r$  sono vicini tra loro ed entrambi vicini a  $p$ , da ciò

segue che anche il simmetrico di  $q$ , cioè  $q'$ , è vicino a  $p$ , quindi per la proprietà transitiva si ha che  $q'$  è vicino a  $r$ . In particolare possiamo scegliere  $\lambda$  in modo che la distanza tra  $r$  e  $q'$  sia minore di  $(lc - 2\lambda)/2$  ed il segmento di geodetica più breve che colleghi  $r$  e  $q'$  sia contenuto in  $U$ . Dato che per ipotesi  $(b - a) \geq l$ ,  $r$  e  $q'$  possono essere collegati mediante un segmento liscio  $rq'$  di lunghezza  $((b - a)c - 2\lambda)/2$  in  $U$  che si collega ai segmenti  $qr$  e  $q'r'$  in modo liscio. Questo segue dal fatto che se la lunghezza del segmento di geodetica che congiunge  $r$  e  $q'$  è minore di  $(lc - 2\lambda)/2$ , allora posso trovare una curva liscia, che non è più un segmento di geodetica, di lunghezza maggiore, cioè pari a  $((b - a)c - 2\lambda)/2$ , che si raccordi ai segmenti  $qr$  e  $q'r'$  in modo liscio. Riflettendo  $rq'$  rispetto a  $p$ , otteniamo il segmento  $r'q$  che collega le altre due estremità dei segmenti.

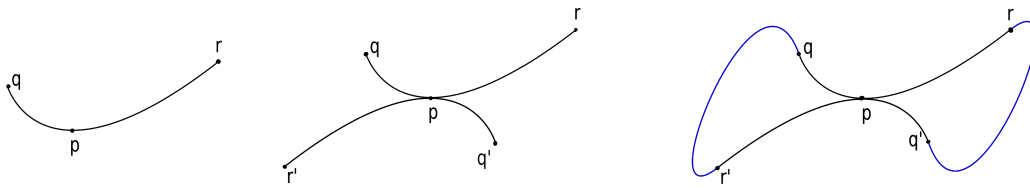


Figura 1.1: proiezione del segmento e costruzione della curva chiusa liscia.

Abbiamo ottenuto una curva chiusa liscia di lunghezza  $(b - a)c$  che possiamo parametrizzare con  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$  di velocità costante  $c$ , tale che  $f(a) = p = f(b)$  e  $f$  percorre i punti considerati in questo ordine  $p, r, q', p, r', q, p$ . Per simmetria, si ha che  $\text{ave}[f] = kp$  con  $k \in (0, 1)$ . Se fissiamo allora  $\bar{\delta} := 1 - k$ , risulta  $\|\text{ave}[f] - p\| = \bar{\delta}$ . Dal Lemma 1.4.5 segue che possiamo deformare  $f$  con continuità al punto  $p$ , conservandone simmetria e lunghezza; quindi possiamo rendere  $\|\text{ave}[f] - p\|$  arbitrariamente piccolo, e possiamo richiedere che sia  $\|\text{ave}[f] - p\| = \delta, \forall \delta \in (0, \bar{\delta}]$ .  $\square$

## 1.5 Approssimazioni a velocità costante per curve sferiche

Sfruttando i risultati della sezione precedente, possiamo mostrare che ogni curva  $f$  su  $\mathbf{S}^{n-1}$  può essere approssimata da un'altra curva su  $\mathbf{S}^{n-1}$  che abbia la stessa media di  $f$  e velocità uguale a una costante assegnata, che sia maggiore o uguale della massima velocità di  $f$ . Per trovare la curva approssimante, è necessario aggiungere un certo numero di piccoli loop all'immagine di  $f$ ; per determinare i punti in cui questi loop devono essere 'incollati' e la lunghezza di ciascuno, richiameremo alcuni risultati di teoria della convessità visti in precedenza.

**Teorema 1.5.1.** *Sia  $f \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbf{S}^{n-1})$ ,  $U \subset \mathbf{S}^{n-1}$  un intorno aperto di  $f([a, b])$  e  $c$  una costante tale che  $c \geq \max \|f'\|$ . Supponiamo che  $\text{int conv}[f] \neq \emptyset$  ed inoltre che o  $c > \max \|f'\|$ , oppure che non esista alcun iperpiano di supporto proprio di  $f([a, b])$  che contenga  $f(\text{supp}(-\|f'\| + \max \|f'\|))$ . Allora esiste  $\tilde{f} \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbf{S}^{n-1})$  tale che:*

- i.  $\tilde{f}$  ha velocità costante  $c$ ;
- ii.  $\tilde{f}([a, b]) \subset U$ ;
- iii.  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$ ;
- iv.  $\tilde{f}(a) = f(a)$  e  $\tilde{f}(b) = f(b)$ ;
- v.  $\forall \eta > 0 \exists \tilde{\eta} > 0$  tale che  $\tilde{f}([a, a + \tilde{\eta}]) \subset f([a, a + \eta])$  e  $\tilde{f}([b - \tilde{\eta}, b]) \subset f([b - \eta, b])$ ;
- vi. se  $f$  è una curva chiusa anche  $\tilde{f}$  è chiusa.

*Dimostrazione.* Se  $\|f'\| \equiv c$  possiamo porre  $\tilde{f} := f$ , che ovviamente soddisfa tutte le proprietà enunciate. Se  $\|f'\| \not\equiv c$ , per costruire  $\tilde{f}$  dobbiamo "incollare" ad  $f$  dei piccoli loop in un certo numero di punti determinati nel modo seguente. Innanzi tutto poniamo  $\lambda := \frac{\text{ave}\|f'\|}{c}$ , dato che abbiamo supposto

che  $c$  fosse una costante  $c \geq \max \|f'\|$ , risulta ovvio che  $\|f'\|$  può essere o una funzione non costante che assume valori  $\leq c$  oppure una funzione costante  $< c$  (siamo nelle ipotesi  $\|f'\| \neq c$ ). Si ha che

$$\frac{\text{ave}[\|f'\|]}{c} = \frac{\frac{1}{b-a} \int_a^b \|f'(t)\| dt}{c} < \frac{\frac{(b-a)c}{b-a}}{c} = 1$$

quindi in tal caso  $\lambda < 1$ .

Dato che per ipotesi  $\text{int conv}[f] \neq \emptyset$ , deve essere  $\text{relint conv}[f] = \text{int conv}[f]$ , quindi usando la Proposizione 1.3.12 si ottiene che

$$\frac{\text{ave}[f] - \lambda \text{cm}[f]}{(1 - \lambda)} \in \text{int conv}[f] .$$

Dato che per ipotesi  $\text{int conv}[f] \neq \emptyset$ , possiamo scegliere un  $\bar{\delta}$  abbastanza piccolo in modo che  $\forall \delta \in [0, \bar{\delta}]$

$$q(\delta) := \frac{\text{ave}[f] - \lambda \text{cm}[f]}{(1 - \lambda)(1 - \delta)} \in \text{int conv}[f] .$$

A questo punto per il Teorema di Steinitz 1.2.11 ci sono  $k \leq 2n$  punti che denoteremo con  $t_i \in [a, b]$  tali che

$$q(\delta) \in \text{int conv}\{f(t_1), \dots, f(t_k)\} .$$

Scegliamo  $k$  più piccolo possibile, potendo così assumere che ciascun  $f(t_i)$  sia un punto estremo del politopo  $\text{conv}\{f(t_1), \dots, f(t_k)\}$ ; questi sono i punti in cui verranno attaccati i loop. Ora utilizzando il Teorema 1.2.12 ed il Lemma 1.2.13 si ha che

$$q(\delta) = \sum_{i=1}^k \phi_i(\delta) f(t_i) \tag{1.5.1}$$

dove, per comodità abbiamo denotato con  $\phi_i(\delta)$  i coefficienti della sommatoria (ma occorre puntualizzare che tali valori sono dati dalla valutazione delle funzioni continue  $\phi_i$  nel punto  $q(\delta)$ , cioè  $\phi_i(\delta) := \phi_i(q(\delta))$ ). Possiamo supporre  $\phi_i(0) > 0$  e quindi se scegliamo  $\bar{\delta}$  abbastanza piccolo (ogni  $\phi_i$  è continua) si ha che  $\phi_i(\delta) > 0 \forall \delta \in [0, \bar{\delta}]$ . Sia  $m_i$  il minimo di  $\phi_i$  su  $[0, \bar{\delta}]$ . Dovrà essere  $\phi_i(\delta) \geq m_i > 0$ .

Dividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in  $2k + 1$  sotto-intervalli; per fare questa suddivisione utilizziamo i  $k$  punti  $t_i \in [a, b]$  considerati prima, poniamo  $t_0 := a$  e  $t_{k+1} := b$ ; per  $i = 1, \dots, k + 1$  definiamo:

$$L_i := \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\| dt$$

che è la distanza tra  $f(t_{i-1})$  e  $f(t_i)$  lungo  $f$ . Quindi  $L = \sum_{i=1}^{k+1} L_i$  è la lunghezza totale della curva  $f$ . Definiamo i punti  $x_j$  per  $j = 0, \dots, 2k + 1$  nel modo seguente, a seconda che  $j$  sia dispari ( $j = 2i - 1$  per  $i = 1, \dots, k + 1$ ) oppure pari ( $j = 2i$  per  $i = 1, \dots, k$ )

$$x_0 := a ,$$

$$x_{2i-1} := x_{2i-2} + \frac{L_i}{L} \lambda(b-a), \quad \text{per } i = 1, \dots, k + 1 ,$$

$$x_{2i} := x_{2i-1} + (1 - \lambda)(b-a)\phi_i(\delta), \quad \text{per } i = 1, \dots, k .$$

Si ha allora che

$$\begin{aligned} x_{2i} - x_{2i-1} &= x_{2i-1} + (1 - \lambda)(b-a)\phi_i(\delta) - x_{2i-1} = \\ &= (1 - \lambda)(b-a)\phi_i(\delta) \geq (1 - \lambda)(b-a)m_i > 0 . \end{aligned}$$

A questo punto per ogni fissato  $i = 1, \dots, k$  poniamo  $p_i := f(t_i)$ . Abbiamo che  $U$  è già un intorno di  $p_i$  essendo per ipotesi un intorno di  $f([a, b])$ . Poniamo anche  $l_i := (1 - \lambda)(b-a)m_i$ , per cui, utilizzando la Proposizione 1.4.6, si ottiene un opportuno valore  $\bar{\delta}_i > 0$ . Ovviamente troveremo  $k$  valori  $\bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_k$ , per cui scegliamo  $\delta \in (0, \bar{\delta})$  in modo che  $\delta \leq \min_{i=1, \dots, k} \bar{\delta}_i$ .

Definiamo  $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$  come la curva che manda gli intervalli  $[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$  per  $i = 1, \dots, k + 1$ , nel segmento della curva  $f$  dato da  $f([t_{i-1}, t_i])$ , e gli intervalli  $[x_{2i-1}, x_{2i}]$  per  $i = 1, \dots, k$ , nel loop fornito dalla Proposizione 1.4.6 prendendo come  $p$  il punto  $p_i := f(t_i)$ ,  $U := U$ ,  $c := c$ ,  $[a, b] := [x_{2i-1}, x_{2i}]$  e  $C$  un segmento dell'immagine di  $f$  vicino a  $f(t_i)$ . Assumiamo che la curva  $\tilde{f}$  sia di classe  $\mathcal{C}^\alpha$ , in quanto possiamo costruire i loop in modo che si raccordino alla curva in modo liscio (cioè  $\mathcal{C}^\alpha$ ). La curva  $\tilde{f}$  ha velocità costante, in



particolare si ha che

$$\|\tilde{f}'(t)\| = \frac{L}{\lambda(b-a)} = \frac{\text{ave}[\|f'\|]}{\lambda} = c.$$

Per vederlo, osserviamo innanzi tutto che ciascun intervallo  $[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$  per  $i = 1, \dots, k+1$  (che viene mandato in  $f([t_{i-1}, t_i])$ ) ha lunghezza pari a

$$x_{2i-1} - x_{2i-2} = x_{2i-2} + \frac{L_i}{L}\lambda(b-a) - x_{2i-2} = \frac{L_i}{L}\lambda(b-a).$$

La curva  $\tilde{f}$ , ristretta all'intervallo  $[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$ , ha lunghezza  $L_i$ , quindi la sua velocità su tale intervallo è

$$\|\tilde{f}'_i\| := \frac{L_i}{\frac{L_i}{L}\lambda(b-a)} = \frac{L}{\lambda(b-a)}, \quad (1.5.2)$$

come si può vedere essa non dipende da  $i$  quindi è la stessa su ogni arco della curva  $\tilde{f}$  definito sull'intervallo  $[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$  per  $i = 1, \dots, k+1$ . A questo punto, notiamo che

$$\text{ave}[\|f'\|] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \|f'(t)\| dt = \frac{L}{b-a}$$

quindi

$$L = (b-a) \text{ave}[\|f'\|].$$

Sostituendo nella (1.5.2) si ottiene

$$\|\tilde{f}'_i\| = \frac{\text{ave}[\|f'\|]}{\lambda} = c$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che, per definizione di  $\lambda$ , si ha  $\text{ave}[\|f'\|] = \lambda c$ ) quindi su tutti gli intervalli  $[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$  per  $i = 1, \dots, k+1$ , la curva  $\tilde{f}$  ha velocità  $c$ . Dato che per costruzione, ciascun loop ha velocità costante pari a  $c$ , possiamo concludere che la curva  $\tilde{f}$  da noi costruita ha velocità costante pari a  $c$ . Vediamo che  $\tilde{f}$  è la curva desiderata:

$$\frac{1}{b-a} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} \tilde{f}(t) dt = \frac{x_{2i} - x_{2i-1}}{b-a} \text{ave}[\tilde{f}|_{[x_{2i-1}, x_{2i}]}] =$$

(utilizzando la proprietà *ii.* della Proposizione 1.4.6)

$$= (1 - \lambda)\phi_i(\delta)(1 - \delta)f(t_i) ,$$

quindi sommando per  $i = 1, \dots, k$  si ha

$$\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^k \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} \tilde{f}(t) dt = (1 - \lambda)(1 - \delta) \sum_{i=1}^k \phi_i(\delta)f(t_i) =$$

(utilizzando la (1.5.1) e poi la definizione di  $q(\delta)$ )

$$= (1 - \lambda)(1 - \delta)q(\delta) = \text{ave}[f] - \lambda \text{cm}[f] .$$

Sfruttando l'Osservazione 1.3.5 dato che  $\tilde{f}$  ha velocità costante, si ha:

$$\text{ave} \left[ \tilde{f} \Big|_{[x_{2i-2}, x_{2i-1}]} \right] = \text{cm} \left[ \tilde{f} \Big|_{[x_{2i-2}, x_{2i-1}]} \right] = \text{cm} \left[ f \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} \right] . \quad (1.5.3)$$

A questo punto calcoliamo:

$$\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{k+1} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i-1}} \tilde{f}(t) dt = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{k+1} (x_{2i-1} - x_{2i-2}) \text{ave} \left[ \tilde{f} \Big|_{[x_{2i-2}, x_{2i-1}]} \right] =$$

(utilizzando la (1.5.3))

$$= \lambda \sum_{i=1}^{k+1} \frac{L_i}{L} \text{cm} \left[ f \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} \right] = \lambda \text{cm}[f] ,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che il centro di massa di una curva è uguale alla media pesata dei centri di massa dei suoi tratti. A questo punto sommando le due quantità ottenute, risulta

$$\begin{aligned} \text{ave}[\tilde{f}] &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \tilde{f}(t) dt = \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{k+1} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i-1}} \tilde{f}(t) dt + \frac{1}{b-a} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} \tilde{f}(t) dt = \text{ave}[f] , \end{aligned}$$

e ciò dimostra che la condizione *iii.* del Teorema è verificata.  $\square$

# Capitolo 2

## Teorema di trasversalità di Thom

Questo capitolo è incentrato su alcuni risultati di Teoria della Trasversalità; dopo aver definito i concetti di fibrato, sezione e getti di mappe (anche tra varietà), enunciamo il Teorema di Trasversalità di Thom, che sarà di fondamentale importanza per le dimostrazioni del Capitolo 4. Per gli argomenti qui trattati si faccia riferimento a [EM02], [GG73] e [KMS93].

### 2.1 Nozione di fibrato e di sezione

**Definizione 2.1.1.** (Fibrato). Siano  $E, M, S$  delle varietà e  $p : E \rightarrow M$  una mappa liscia ( $\mathcal{C}^\infty$ ) e suriettiva. Diciamo che  $p : E \rightarrow M$  è un fibrato se  $\forall x \in M$  esiste un intorno aperto  $U \subset M$  tale che la controimmagine  $p^{-1}(U)$  (detta *fibra di  $E$  sopra  $U$* ) sia diffeomorfa ad  $U \times S$  tramite un diffeomorfismo  $\phi$  che rispetti le fibre, cioè si richiede che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times S \\ \downarrow p & \swarrow \text{proj}_1 & \\ U & & \end{array}$$

(abbiamo denotato con  $\text{proj}_1 : U \times S \rightarrow U$  la proiezione naturale sul primo fattore). La varietà  $E$  è detta *spazio totale*,  $M$  è lo *spazio di base*, la mappa

$p$  è detta *proiezione*,  $S$  è detta *fibra standard* ed  $(U, \phi)$  è una *banalizzazione locale di  $E$  su  $U$* .

In definitiva, un fibrato si può vedere come una mappa liscia e suriettiva fra varietà  $p : E \rightarrow M$ , che localmente è la proiezione sul primo fattore, del prodotto dell'intorno  $U$  con la fibra standard  $S$ .

**Definizione 2.1.2.** (Sezione). Una sezione di un fibrato  $p : E \rightarrow M$  è una mappa liscia  $s : M \rightarrow E$  tale che  $p \circ s = \text{Id}_M$ .

Da qui in avanti siano  $V, W$  ed  $X$  delle varietà differenziabili di dimensione finita rispettivamente  $n, q$  ed  $n + q$ , e sia  $r$  un intero non negativo. Quando parliamo di mappe o di sezioni fra queste varietà, sottintendiamo che siano lisce, cioè  $\mathcal{C}^\infty$ ; per famiglia di mappe o di sezioni intendiamo una famiglia continua, che sia liscia nel caso in cui sia necessario differenziare. Seguendo le notazioni presenti in [Gr86] denoteremo con  $OpA$  un intorno aperto di  $A \subset V$ .

Se come spazio totale  $E$  considero il prodotto fra varietà  $V \times W$  e come mappa  $p$  la proiezione sul primo fattore, si ha che  $p : V \times W \rightarrow V$  è un *fibrato banale* con base  $V$  e fibra standard  $W$ .

*Osservazione 2.1.3.* A volte risulta comodo pensare una mappa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  come il suo grafico  $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ . Il grafico si può vedere come immagine della mappa  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$  definita mandando  $x \mapsto (x, f(x))$ . Quindi ogni mappa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  si può vedere come una sezione  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$  del fibrato banale  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Similmente ogni mappa  $f : V \rightarrow W$ , si può pensare come una sezione  $V \rightarrow V \times W$  del fibrato banale  $V \times W \rightarrow V$ .

## 2.2 Getti di mappe da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^q$

**Definizione 2.2.1.** ( $r$ -getto di una funzione un punto). Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  una mappa liscia  $\mathcal{C}^\infty$  ed  $x \in \mathbb{R}^n$ . L' $r$ -getto di  $f$  in  $x$  è la stringa dei differenziali

di  $f$  fino all'ordine  $r$ :

$$J_f^r(x) = (f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x))$$

dove le  $f^{(k)}(x)$  sono mappe multilineari, simmetriche, definite su  $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ volte}}$  a valori in  $\mathbb{R}^q$ . In particolare, quando i  $k$  vettori sono tutti uguali a  $v$  si ha

$$f^{(k)}(x)(v, \dots, v) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x) v^\alpha.$$

*Osservazione 2.2.2.* Per comprendere la definizione precedente, ricordiamo che un multi-indice  $n$ -dimensionale è una  $n$ -upla di numeri interi maggiori o uguali a zero:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n,$$

l'ordine di  $\alpha$  è  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , e si definisce  $D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$ . Quindi  $f^{(k)}$  è formato da tutte le derivate  $D^\alpha f$  tali che  $|\alpha| = k$ , scritte in ordine lessicografico.

Sia  $d_k = d(n, k)$  il numero di tutte le derivate parziali  $D^\alpha$  di ordine  $k$  di una funzione  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . L' $r$ -getto della mappa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  nel punto  $x$ , si può vedere come un punto dello spazio

$$\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{qd_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{qd_r} = \mathbb{R}^{qN_r}$$

dove  $N_r = 1 + d_1 + \dots + d_r$ .

*Osservazione 2.2.3.* Si può dimostrare che  $d(n, k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$  e  $N_r = \frac{(n+r)!}{n!r!}$ .

**Definizione 2.2.4.** (Spazio degli  $r$ -getti). Al variare di  $x \in \mathbb{R}^n$  otteniamo tutti i possibili valori degli  $r$ -getti della mappa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  nel punto  $x$ , quindi lo spazio:

$$J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{qN_r} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{qd_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{qd_r}$$

è detto spazio degli  $r$ -getti delle mappe  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ , oppure spazio degli  $r$ -getti delle sezioni  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ .

**Esempio 2.2.5.** Si vede facilmente che  $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times M_{q \times n}$  dove  $M_{q \times n} \cong \mathbb{R}^{qn}$  è lo spazio delle matrici  $q \times n$  (fissata una  $f$  è proprio la sua matrice jacobiana).

**Definizione 2.2.6.** (*r*-getto estensione di  $f$ ). Consideriamo il seguente fibrato banale:

$$p^r : J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{qNr} \rightarrow \mathbb{R}^n .$$

Come precedentemente osservato, una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  si può vedere come una sezione del fibrato banale su  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ , quindi

$$J_f^r : \mathbb{R}^n \rightarrow J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \quad \text{tale che} \quad x \mapsto J_f^r(x)$$

si può vedere una sezione del fibrato  $p^r$  ed è chiamata *r-getto di  $f$* , oppure *r-getto estensione di  $f$* .

## 2.3 Definizione invariante di getti

In questa sezione vogliamo definire lo spazio  $J^r(V, W)$  degli *r*-getti di sezioni  $V \rightarrow V \times W$  di un fibrato banale  $p : V \times W \rightarrow V$ ; e più in generale lo spazio degli *r*-getti delle sezioni  $V \rightarrow X$  di un arbitrario fibrato  $p : X \rightarrow V$ . Dobbiamo quindi definire i getti in modo invariante.

Per prima cosa definiamo il concetto di *r*-getto per mappe fra varietà. Parlando approssimativamente, diremo che due mappe  $f, g : V \rightarrow W$  determinano lo stesso *r*-getto nel punto  $x \in V$ , se sono *r*-tangenti nel punto  $x$ . Per dare una definizione precisa, dobbiamo definire il concetto di tangenza di ordine *r* tra due curve su una varietà.

**Definizione 2.3.1.** (Curve *r*-tangenti in zero). Due curve lisce  $\gamma, \delta : \mathbb{R} \rightarrow V$  sono *r*-tangenti in zero, se per ogni funzione liscia  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ , si ha che la differenza  $\varphi \circ \gamma - \varphi \circ \delta$  si annulla con ordine *r* nel punto  $0 \in \mathbb{R}$ .

In tal caso scriveremo  $\gamma \sim_r \delta$  in zero, ovviamente  $\sim_r$  è una relazione di equivalenza; si può notare facilmente che per  $r = 0$  tale relazione significa richiedere che  $\gamma(0) = \delta(0)$ .

*Osservazione 2.3.2.* Ricordiamo che una funzione liscia da  $\mathbb{R}$  a valori in  $\mathbb{R}$ , si annulla con ordine  $r$  in un punto, se tutte le sue derivate fino all'ordine  $r$  si annullano in quel punto.

**Lemma 2.3.3.** *Se  $\gamma \sim_r \delta$  in zero, allora per ogni mappa liscia  $f : V \rightarrow W$  si ha che  $(f \circ \gamma) \sim_r (f \circ \delta)$  in zero.*

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia, allora  $\varphi \circ f$  è una funzione liscia da  $V$  a valori in  $\mathbb{R}$  ed utilizzando proprio  $\varphi \circ f$  nella definizione di  $r$ -tangenza tra  $\gamma$  e  $\delta$ , segue che  $\varphi \circ f \circ \gamma - \varphi \circ f \circ \delta$  si annulla con ordine  $r$  in zero e quindi che  $f \circ \gamma \sim_r f \circ \delta$  in zero.  $\square$

**Definizione 2.3.4.** (Equivalenza di  $r$ -getti in un punto). Diremo che due mappe  $f, g : V \rightarrow W$  determinano lo stesso  $r$ -getto nel punto  $x \in V$  (o che sono  $r$ -tangenti nel punto  $x$ ), se per ogni curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow V$  tale che  $\gamma(0) = x$ , le curve  $f \circ \gamma$  e  $g \circ \gamma$  sono  $r$ -tangenti in zero.

La definizione precedente fornisce una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza che determina definiscono gli  $r$ -getti della  $f$  nel punto considerato  $x$ .

**Definizione 2.3.5.** ( $r$ -getto di  $f$  in  $x$ ). La classe di  $r$ -tangenza di una mappa  $f : V \rightarrow W$  in un punto  $x \in V$  è chiamata  $r$ -getto di  $f$  in  $x$  ed è denotata con  $J_f^r(x)$ .

A questo punto possiamo definire il concetto di  $r$ -getto per una generica sezione  $f : V \rightarrow X$ .

**Definizione 2.3.6.** (Sezioni  $r$ -tangenti in un punto). Sia  $v \in V$ . Due sezioni locali  $f : Opv \rightarrow X$  e  $g : Opv \rightarrow X$  del fibrato  $p : X \rightarrow V$  sono dette  $r$ -tangenti nel punto  $v$  se  $f(v) = g(v)$  ed inoltre

$$J_{\varphi \circ f}^r(v) = J_{\varphi \circ g}^r(v)$$

per qualche banalizzazione locale  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$  di  $X$  in un intorno  $U$  del punto  $x = f(v) = g(v)$ .

*Osservazione 2.3.7.* Senza la definizione di  $r$ -getto per una mappa fra varietà, non avrei potuto dare la definizione precedente, perché  $J_{\varphi \circ f}^r(v)$  e  $J_{\varphi \circ g}^r(v)$  sono  $r$ -getti di mappe definite su varietà.

**Definizione 2.3.8.** ( $r$ -getto di  $f$  in  $v$ ). La classe di  $r$ -tangenza di una sezione  $f : Opv \rightarrow X$  in un punto  $v \in V$  è chiamata  $r$ -getto di  $f$  in  $v$ , ed è denotata con  $J_f^r(v)$ .

Consideriamo un fibrato liscio  $p : X \rightarrow V$ , denotiamo con  $X^{(r)}$  l'insieme formato da tutti gli  $r$ -getti di sezioni  $V \rightarrow X$  (anche detto spazio degli  $r$ -getti associati al fibrato  $p : X \rightarrow V$ ). Possiamo definire le mappe  $p_s^r : X^{(r)} \rightarrow X^{(s)}$  per  $r > s \geq 0$  (dove per definizione  $X^{(0)} = X$ ) come le proiezioni naturali. Si può osservare che le mappe  $p_s^r$  sono dei fibrati. Se consideriamo la mappa  $p_0^r : X^{(r)} \rightarrow X$  e la componiamo con il fibrato  $p$  otteniamo la mappa  $p^r := p \circ p_0^r : X^{(r)} \rightarrow V$ . A questo punto se considero le mappe

$$\varphi^r : (p_0^r)^{-1}(U) \rightarrow J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$$

estensioni delle banalizzazioni locali  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ , che mandano le classi di  $r$ -tangenza di sezioni locali di  $X$  nelle classi di  $r$ -tangenza delle loro immagini in  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ , definiscono una struttura liscia su  $X^{(r)}$  tale che  $p^r : X^{(r)} \rightarrow V$  diventa un fibrato liscio.

**Definizione 2.3.9.** ( $r$ -getto estensione del fibrato  $p$ ). Il fibrato

$$p^r : X^{(r)} \rightarrow V$$

appena visto, è detto  $r$ -getto estensione del fibrato  $p : X \rightarrow V$ .

**Definizione 2.3.10.** ( $r$ -getto estensione della sezione  $f : V \rightarrow X$ ).

La sezione

$$J_f^r : V \rightarrow X^{(r)} \quad v \mapsto J_f^r(v)$$

è detta  $r$ -getto della sezione  $f : V \rightarrow X$  (oppure  $r$ -getto estensione di  $f$ ).

Concludiamo la sezione fornendo la definizione di sezioni olonome nello spazio dei getti  $X^{(r)}$ .



**Definizione 2.3.11.** (Sezione olonoma). Una sezione  $F : V \rightarrow X^{(r)}$  è detta olonoma se è l' $r$ -getto della sezione  $p_0^r \circ F : V \rightarrow X$ , cioè se  $F = J_{p_0^r \circ F}^r$ .

Quindi una sezione  $F : V \rightarrow X^{(r)}$  è olonoma se si può vedere come  $r$ -getto di una opportuna sezione  $f : V \rightarrow X$  tale che  $f = p_0^r \circ F$ . Si può osservare inoltre, che se tale  $f$  esiste, essa è unica.

## 2.4 Teoria della trasversalità

In questa sezione introduciamo alcuni concetti di teoria della trasversalità ed enunciamo il Teorema di Trasversalità di Thom. Infine vediamo due conseguenze importanti di tale teorema; dimostriamo infatti, che le prime  $n$  derivate di un insieme denso di applicazioni  $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}^n)$  sono linearmente indipendenti dappertutto eccetto un insieme finito di punti; ed inoltre che esiste un insieme denso di curve in  $\mathcal{C}^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$  (con  $\alpha \geq n$ ) che abbiano curvatura che non si annulla.

**Definizione 2.4.1.** Sia  $S$  uno spazio di mappe. Diremo che *vale la proprietà*  $\mathcal{P}$  se l'insieme  $P \subset S$  formato dalle mappe che soddisfano tale proprietà è denso in  $S$  rispetto alla topologia compatta-aperta.

**Definizione 2.4.2.** (Topologia compatta-aperta su  $\mathcal{C}(X, Y)$ ). Dati due spazi topologici  $X$  e  $Y$ , denotiamo con  $\mathcal{C}(X, Y)$  l'insieme di tutte le applicazioni continue da  $X$  in  $Y$ . La topologia compatta-aperta su  $\mathcal{C}(X, Y)$  è per definizione la topologia che ha come prebase tutti i sottoinsiemi

$$W(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(K) \subset U\},$$

al variare di  $K$  tra i compatti di  $X$  e di  $U$  tra gli aperti di  $Y$  (una *prebase* di uno spazio topologico è una famiglia  $\mathcal{F}$  di aperti tale che la famiglia delle intersezioni finite di elementi di  $\mathcal{F}$  è una base della topologia).

Possiamo definire la topologia compatta-aperta su spazi di funzioni con maggior regolarità, come ad esempio  $\mathcal{C}^n(M, N)$ , nel caso in cui  $M$  ed  $N$  siano due varietà differenziabili (si veda [Hi76]).

**Definizione 2.4.3.** (Topologia compatta-aperta su  $\mathcal{C}^n(M, N)$ ). Siano  $M$  ed  $N$  due varietà differenziabili di classe almeno  $\mathcal{C}^n$ , denotiamo con  $\mathcal{C}^n(M, N)$  l'insieme delle mappe da  $M$  in  $N$  di classe  $\mathcal{C}^n$  (supponiamo per ora che  $n$  sia finito). La topologia compatta-aperta su  $\mathcal{C}^n(M, N)$  è generata dagli insiemi seguenti. Sia  $f \in \mathcal{C}^n(M, N)$  e siano  $(\varphi, U)$  e  $(\psi, V)$  due carte coordinate rispettivamente su  $M$  e su  $N$ . Sia  $K \subset U$  un insieme compatto tale che  $f(K) \subset V$  ed  $\varepsilon \in (0, +\infty]$ . Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{N}(f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$$

formato dalle mappe  $g \in \mathcal{C}^r(M, N)$  tali che  $g(K) \subset V$  e

$$\|D^k(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - D^k(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x)\| < \varepsilon$$

$\forall x \in \varphi(K), \forall k = 0, \dots, r$ . La topologia compatta-aperta su  $\mathcal{C}^n(M, N)$  è per definizione la topologia generata dagli insiemi  $\mathcal{N}(f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$ .

*Osservazione 2.4.4.* Nel seguito, quando scriveremo che un insieme è  $\mathcal{C}^n$ -denso, intenderemo rispetto alla topologia compatta-aperta su  $\mathcal{C}^n$  (definita su spazi opportuni a seconda del contesto).

**Definizione 2.4.5.** (Mappa trasversale). Una mappa  $f : V \rightarrow W$  è detta trasversale ad una sottovarietà  $\Sigma \subset W$ , se per ogni punto  $x \in V$  vale una delle seguenti due condizioni:

- $f(x) \notin \Sigma$
- $f(x) \in \Sigma$  e vale  $T_{f(x)}W = T_{f(x)}\Sigma + df(T_xV)$ .

*Osservazione 2.4.6.* Se  $\text{codim } \Sigma > \dim V$  la seconda condizione non può mai essere verificata, quindi la mappa  $f$  è trasversale a  $\Sigma$  se  $f(V) \cap \Sigma = \emptyset$ .

**Definizione 2.4.7.** (Sottoinsieme stratificato). Un sottoinsieme chiuso  $S$  di  $V$  è detto stratificato se si può vedere come un'unione disgiunta

$$\bigsqcup_{j=0}^N S_j,$$

dove le  $S_j$  sono sottovarietà localmente chiuse, dette *strati*, tali che per ogni  $k = 0, \dots, N$  si abbia

$$\bar{S}_k = \bigsqcup_{j=k}^N S_j$$

dove  $\bar{S}_k$  è la chiusura dello strato  $S_k$ . La dimensione di un insieme stratificato è la massima dimensione dei suoi strati.

*Osservazione 2.4.8.* Ricordiamo che, un sottoinsieme  $Y$  di uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si dice localmente chiuso, se per ogni punto  $x \in Y$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  tale che  $Y \cap U$  è chiuso in  $U$ .

**Esempio 2.4.9.** Ogni varietà  $V$  con bordo ammette una stratificazione con due strati:  $S_0 = \text{Int}(V)$  ed  $S_1 = \partial V$

**Esempio 2.4.10.** Data una triangolazione liscia di una varietà  $V$ , ogni sottoinsieme chiuso che è unione di semplici della triangolazione, è stratificato se consideriamo come strati gli interni dei semplici. Chiameremo *poliedri* gli insiemi stratificati di questo tipo.

Vediamo la seguente proposizione che fornisce una stratificazione per l'insieme delle matrici  $q \times n$  di rango limitato.

**Proposizione 2.4.11.** Denotiamo con  $\Sigma^i$  per  $i = 0, \dots, n$  il sottoinsieme di  $M_{q \times n}$  (con  $n \leq q$ ) formato dalle matrici di rango  $\leq n - i$ . Sia  $S_i$  lo spazio delle matrici di rango  $n - i$ . Allora gli  $S_i$  sono sottovarietà localmente chiuse di  $M_{q \times n}$  di codimensione  $i(q - n + i)$  e  $\bigsqcup_{j=i}^n S_j$  è una stratificazione di  $\Sigma^i$ .

*Dimostrazione.* La condizione che il rango di una matrice  $q \times n$  sia uguale a  $n - i$  è espressa uguagliando a zero  $(q - n + i)i$  minori di ordine  $n - i + 1$  che si ottengono orlando una sottomatrice di rango  $n - i$  □

**Definizione 2.4.12.** Una mappa  $f : V \rightarrow W$  è trasversale ad un insieme stratificato  $\Sigma = \bigsqcup_{j=0}^N S_j \subset W$  se è trasversale ad ogni strato  $S_j$  per  $j = 0, \dots, N$ .

Siamo pronti ad enunciare il Teorema di Trasversalità di Thom, che sarà fondamentale per le dimostrazioni presenti nel Capitolo 4.

**Teorema 2.4.13** (Teorema di Trasversalità di Thom). *Consideriamo un fibrato liscio  $X \rightarrow V$  e  $\Sigma$  un sottoinsieme stratificato dello spazio dei getti  $X^{(r)}$ . Allora per una generica sezione  $f : V \rightarrow X$  l' $r$ -getto estensione di  $f$ , cioè  $J_f^r : V \rightarrow X^{(r)}$ , è trasversale a  $\Sigma$ .*

*Osservazione 2.4.14.* Dal Teorema di Trasversalità di Thom, segue che esiste un insieme  $\mathcal{C}^n$ -denso di applicazioni  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}^n)$  tali che le prime  $n$  derivate sono linearmente indipendenti dappertutto eccetto un insieme finito di punti (per insieme  $\mathcal{C}^n$ -denso intendiamo un insieme denso rispetto alla topologia compatta-aperta definita su  $\mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}^n)$ ). Quando parliamo delle prime  $n$  derivate di una funzione  $f$ , intendiamo  $f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$  e come visto nell'Osservazione 2.2.2,  $f^{(j)}(x)$  rappresenta tutte le derivate di  $f$  di ordine  $j$ . In questo caso stiamo considerando applicazioni definite su  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , quindi  $f^{(j)}(x)$  è formato da  $f_1^{(j)}(x), \dots, f_n^{(j)}(x)$ . Possiamo perciò rappresentare le prime  $n$  derivate di  $f$  in una matrice  $n \times n$ , nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} f_1'(x) & f_1''(x) & \dots & f_1^{(n)}(x) \\ f_2'(x) & f_2''(x) & \dots & f_2^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_n'(x) & f_n''(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo che una tale successione di curve  $(\tilde{f}_i)_i$  esiste. Dobbiamo mostrare che l'insieme delle applicazioni  $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}^n)$ , le cui prime  $n$  derivate sono linearmente indipendenti dappertutto eccetto un insieme finito di punti, è  $\mathcal{C}^n$ -denso. Sia

$$J^n([a, b], \mathbb{R}^n) = [a, b] \times \mathbb{R}^{n(n+1)}$$

lo spazio degli  $n$ -getti delle applicazioni  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cioè per ogni  $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}^n)$  il corrispondente  $n$ -getto  $J_f^n : [a, b] \rightarrow J^n([a, b], \mathbb{R}^n)$  è dato da:

$$J_f^n(x) = (x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)).$$

Sia  $L \subset J^n([a, b], \mathbb{R}^n)$  l'insieme formato dagli  $n$ -getti le cui ultime  $n$  componenti non sono linearmente indipendenti; possiamo identificare l'insieme

formato dalle ultime  $n$  componenti di ciascun elemento in  $L$ , con l'insieme delle matrici  $n \times n$  di rango non massimo (il rango deve essere non massimo perché devo avere lineare dipendenza), quindi si richiede che il rango sia  $< n$ . Dalla Proposizione 2.4.11 segue che queste matrici formano uno spazio stratificato di dimensione  $n^2 - 1$ , quindi  $\dim(L) = 1 + n + (n^2 - 1)$ , e di conseguenza  $\text{codim}(L) = 1$ . Dal Teorema di Trasversalità di Thom 2.4.13 e sfruttando la Definizione 2.4.1, segue che esiste un insieme  $\mathcal{C}^n$ -denso di applicazioni  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}^n)$ , per cui  $J_{\tilde{f}}^n$  è trasversale ad  $L$ . Ora, dato che  $\dim([a, b]) = \text{codim}(L)$ , segue che

$$\{x \in [a, b]; J_{\tilde{f}}^n(x) \in L\}$$

è un insieme discreto e finito (dato che  $[a, b]$  compatto). Abbiamo quindi che le ultime  $n$  derivate di  $\tilde{f}$  sono linearmente dipendenti solo in un insieme finito di punti.

*Osservazione 2.4.15.* Dal Teorema di Trasversalità di Thom segue che esiste un insieme denso (rispetto alla topologia compatta-aperta) di curve  $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$  (con  $\alpha \geq n$ ) che hanno curvatura che non si annulla. Verifichiamolo. Si osservi che la curvatura di una curva si annulla se e solo se le sue prime due derivate sono linearmente dipendenti (si veda la Definizione 1.1.19). Consideriamo lo spazio dei getti

$$J^2([a, b], \mathbb{R}^n) = [a, b] \times \mathbb{R}^{3n}$$

e sia  $A \subset J^2([a, b], \mathbb{R}^n)$  il sottoinsieme formato dagli elementi le cui ultime due componenti sono linearmente dipendenti. In questo caso, dato che ho preso  $J^2$ , le ultime due componenti di un elemento di  $A$  sono proprio la derivata prima e la derivata seconda.

Possiamo identificare l'insieme delle ultime due componenti degli elementi di  $A$ , con l'insieme delle matrici  $n \times 2$  di rango  $< 2$ . Utilizzando le notazioni della Proposizione 2.4.11, tale sottoinsieme è  $\Sigma^1$ , cioè il sottoinsieme dello spazio delle matrici  $n \times 2$  formato dalle matrici di rango  $\leq 1$ . Dalla proposizione segue che  $S_1 \sqcup S_2$  è una stratificazione di  $\Sigma^1$  e che  $\text{codim}(S_j) = j(n - 2 + j)$ .

In questo caso  $\text{codim}(S_1) = n - 1$  e  $\text{codim}(S_2) = 2n$ , quindi  $\dim(S_1) = n + 1$  e  $\dim(S_2) = 0$ , dato che la dimensione di un insieme stratificato è uguale alla massima dimensione dei suoi strati, si ottiene che  $\dim(\Sigma^1) = n + 1$ .

A questo punto  $\dim(A) = 1 + n + (n + 1) = 2n + 2$  e quindi  $\text{codim}(A) = n - 1$ . Dal Teorema di Trasversalità di Thom segue che esiste un insieme denso di curve  $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$ , il cui 2-getto  $J_{\tilde{f}_i}^2$  è trasversale ad  $A$ . Dato che  $n \geq 3$ , si ha  $\dim([a, b]) < \text{codim}(A)$ . Sfruttando l'Osservazione 2.4.6, si ha che  $J_{\tilde{f}}^2$  è disgiunto da  $A$  e quindi ha curvatura positiva.

## Capitolo 3

# Nozione di $h$ -principle

La nozione di  $h$ -principle fu introdotta da Gromov negli anni Settanta in [Gr70] e costituisce un metodo di risoluzione di relazioni differenziali alle derivate parziali. Dai lavori di Gromov sul principio di omotopia, [Gr70], [Gr73] [Gr86], emerse l'esistenza di una dicotomia flessibilità/rigidità (soft/hard) per problemi formulati in termini di relazioni differenziali. La flessibilità di un particolare problema analitico, sinonimo di validità del principio di omotopia, si contrappone infatti alla rigidità, che si manifesta nel caso di condizioni di regolarità sufficientemente alta. In questo contesto, flessibilità e rigidità si riferiscono alle proprietà topologiche dell'insieme delle soluzioni di una data relazione differenziale.

Tali fenomeni di flessibilità erano già stati notati nel 1954 da John Nash [Na54] per le immersioni isometriche (e gli embedding isometrici) di classe  $\mathcal{C}^1$ , e qualche anno dopo da S. Smale [Sm58] nell'ambito delle immersioni differenziali. Tuttavia, esempi di questo tipo erano stati osservati già prima da H. Whitney in [Wh37].

Diversi anni dopo Gromov, sviluppando la tecnica dell'integrazione convessa, sistematizzò e generalizzò questi processi, fornendo un punto di vista nuovo sui lavori di Nash. Gromov enunciò un principio generale, applicabile ad ogni tipo di relazione differenziale, il principio di omotopia, spesso abbreviato con  $h$ -principle, ed introdusse la teoria dell'integrazione convessa

(una trattazione dettagliata è fornita da D. Spring in [Sp98]) tramite la quale si può ottenere una nuova dimostrazione del teorema di Nash-Kuiper sulle immersioni isometriche.

In questo capitolo introduciamo il concetto di  $h$ -principle (si faccia riferimento a [EM02], [Gr86], [Sp98]), vediamo quindi alcune definizioni basilari.

### 3.1 Relazione differenziale

Siano  $V$ ,  $W$  ed  $X$  delle varietà differenziabili e sia  $r$  un intero non negativo.

**Definizione 3.1.1.** (Relazione differenziale). Una relazione differenziale (o anche condizione differenziale) di ordine  $r$  imposta sulle sezioni  $f : V \rightarrow X$  di un fibrato  $X \rightarrow V$ , è un sottoinsieme  $\mathcal{R}$  dello spazio degli  $r$ -getti  $X^{(r)}$ .

**Esempio 3.1.2.** Ogni sistema di equazioni differenziali ordinarie ( $n = 1$ ), oppure alle derivate parziali ( $n > 1$ )

$$\Psi(x, f, D^\alpha f) = 0$$

dove  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ed  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  è la funzione incognita, può essere interpretato come una relazione differenziale  $\mathcal{R}$  nello spazio degli  $r$ -getti  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ . Chiamiamo

$$y_j := f_j(x_1, \dots, x_n) \quad j = 1, \dots, q$$

e le loro derivate

$$z_{j,\alpha} := D^\alpha f_j = \frac{\partial^{|\alpha|} f_j}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{dove } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), |\alpha| \leq r$$

in questo modo possiamo pensare le variabili  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_q)$  e  $z_\alpha = (z_{1,\alpha}, \dots, z_{q,\alpha})$  come coordinate in  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$  e quindi il sistema di equazioni ‘algebriche’

$$\Psi(x, y, z_\alpha) = 0$$

definisce una relazione differenziale nello spazio dei getti  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ .



## 3.2 Soluzione formale e soluzione vera di una relazione differenziale

Prima di procedere ricordiamo alcune notazioni. Con  $X^{(r)}$  abbiamo indicato lo spazio degli  $r$ -getti associati ad un fibrato liscio  $p : X \rightarrow V$ . Sia  $\mathcal{R} \subset X^{(r)}$  una relazione differenziale. In alcuni contesti, chiameremo ‘relazione su  $X^{(r)}$ ’ la mappa continua  $\rho : \mathcal{R} \rightarrow X^{(r)}$  data dall’inclusione  $\mathcal{R} \subset X^{(r)}$ . Denotiamo con  $\Gamma^r(X)$  lo spazio delle sezioni di classe  $\mathcal{C}^r$  del fibrato  $p : X \rightarrow V$  rispetto alla topologia compatta-aperta su  $\mathcal{C}^r$ .

**Definizione 3.2.1.** (Soluzione formale di una relazione differenziale). Sia  $\mathcal{R} \subset X^{(r)}$  una relazione differenziale. Una soluzione formale di  $\mathcal{R}$  è una qualsiasi sezione continua  $F : V \rightarrow \mathcal{R}$  rispetto alla topologia compatta-aperta. Denoteremo con  $\text{Sec } \mathcal{R}$  (oppure con  $\Gamma(\mathcal{R})$ ) lo spazio delle soluzioni formali di  $\mathcal{R}$ .

**Esempio 3.2.2.** Una soluzione formale di un sistema di equazioni differenziali è una soluzione del sottostante sistema di equazioni ‘algebriche’ ottenuto sostituendo le derivate con nuove variabili indipendenti.

Richiamiamo la definizione di sezione olonoma.

**Definizione 3.2.3.** (Sezione olonoma). Una sezione  $F : V \rightarrow X^{(r)}$  è detta olonoma se è l’ $r$ -getto della sezione  $p_0^r \circ F : V \rightarrow X$ , cioè se  $F = J_{p_0^r \circ F}^r$ .

Se  $\alpha \in \Gamma(\mathcal{R})$  allora si ha che  $\rho \circ \alpha \in \Gamma(X^{(r)})$ . Una sezione  $\alpha \in \Gamma(\mathcal{R})$  è detta **olonoma** se esiste una sezione di classe almeno  $\mathcal{C}^r$ , cioè  $f \in \Gamma^r(X)$ , tale che  $\rho \circ \alpha = J_f^r \in \Gamma(X^{(r)})$ .

**Definizione 3.2.4.** (Soluzione vera di una relazione differenziale). Sia  $\mathcal{R} \subset X^{(r)}$  una relazione differenziale. Una sezione  $f : V \rightarrow X$  soddisfa  $\mathcal{R}$  se  $J_f^r : V \rightarrow X^{(r)}$  è tale che  $J_f^r(V) \subset \mathcal{R}$ . La sezione  $f : V \rightarrow X$  è detta soluzione vera di  $\mathcal{R}$ . Denoteremo con  $\text{Sol } \mathcal{R}$  lo spazio delle soluzioni vere.

Le soluzioni vere di  $\mathcal{R}$  sono identificate in modo naturale con le sezioni olonome  $V \rightarrow \mathcal{R} \subset X^{(r)}$ .

Per risolvere una relazione differenziale  $\mathcal{R}$  si può procedere nel modo seguente. Il primo passo è risolvere il problema topologico, cioè costruire una sezione continua  $V \rightarrow \mathcal{R}$ . Per esempio, se  $\mathcal{R}$  è rappresentata dall'equazione

$$\Psi\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n}\right) = 0$$

allora le sezioni continue  $V \rightarrow \mathcal{R}$  (cioè le soluzioni formali di  $\mathcal{R}$ ) corrispondono alle soluzioni di

$$\Psi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$$

con arbitrarie funzioni  $\varphi_i$  al posto delle derivate parziali. Ho quindi trovato le soluzioni formali della relazione differenziale considerata. Il secondo passo, consiste nel andare ad imporre che le  $\varphi_i$  per  $i = 1, \dots, n$  siano effettivamente le derivate parziali prime di  $f$  rispetto alle varie variabili.

**Esempio 3.2.5.** In  $\mathbb{R}^3$ , sia  $\omega$  una 1-forma data, vogliamo trovare  $f$  tale che

$$df = \omega$$

cioè trovare  $f$  per cui si abbia

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 = \omega.$$

Utilizzando la notazione precedente, la relazione differenziale è rappresentata dall'equazione

$$\Psi\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_3}\right) = 0$$

dove  $\Psi(x, y, z) = x du_1 + y du_2 + z du_3 - \omega$ . Innanzitutto troviamo le soluzioni formali, cioè le  $g = (g_1, g_2, g_3)$  tali che

$$\Psi(g_1, g_2, g_3) = 0,$$

(è come se stessi risolvendo la relazione modulo un getto precedente). Dopodiché una soluzione vera  $f$  si trova imponendo che

$$g_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1} \quad g_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2} \quad g_3 = \frac{\partial f}{\partial u_3}$$

cioè dobbiamo fare in modo che  $g_1, g_2$  e  $g_3$  siano le derivate parziali di una stessa  $f$  rispetto a  $u_1, u_2$  e  $u_3$ .

### 3.3 Principio di omotopia

L'esistenza di una soluzione formale è una condizione necessaria per la risolubilità di una relazione differenziale  $\mathcal{R}$ , quindi prima di provare a risolvere  $\mathcal{R}$  è utile controllare se  $\mathcal{R}$  ammette una soluzione formale. Perciò, innanzitutto, è importante trattare il problema topologico relativo alle soluzioni formali, cioè costruire una sezione  $V \rightarrow \mathcal{R}$ , e cercare soluzioni vere solo dopo aver stabilito l'esistenza di una soluzione formale.

Trovare una soluzione formale di una relazione differenziale significa risolvere un problema topologico-algebrico. Si tratta dunque, di una semplificazione notevole del problema differenziale iniziale e perciò, a prima vista, sembrerebbe che l'esistenza di una soluzione formale non possa essere *sufficiente* per la risolubilità di  $\mathcal{R}$ . Nella seconda metà del Novecento Gromov ha dimostrato che esistono delle classi di relazioni differenziali per le quali la risolubilità formale risulta sufficiente per l'esistenza di soluzioni vere. Questa proprietà si formalizza nel modo seguente.

- **Principio di omotopia (*h*-principle).** Diremo che una relazione differenziale  $\mathcal{R}$  soddisfa l'*h*-principle, o che l'*h*-principle vale per le soluzioni di  $\mathcal{R}$ , se ogni soluzione formale di  $\mathcal{R}$  è omotopa in  $\text{Sec } \mathcal{R}$  ad una soluzione vera di  $\mathcal{R}$ .

La nozione di *h*-principle risulta particolarmente utile in molte relazioni differenziali che intervengono in geometria e topologia.

Seguendo le notazioni presenti in [Gr86], indichiamo con  $Op A$  un intorno aperto arbitrariamente piccolo di  $A \subset V$ . Siano  $A$  e  $B$  sottoinsiemi di  $V$  tali che  $B \subset A$ , denotiamo con  $\text{Sec}_{Op(A,B)} \mathcal{R}$  lo spazio delle soluzioni formali  $F : Op A \rightarrow \mathcal{R}$  che sono olonome se ristrette ad  $Op B$ .

- **Relative *h*-principle.** Diremo che una relazione differenziale  $\mathcal{R}$  soddisfa il relative *h*-principle sulla coppia  $(A, B)$ , se per ogni soluzione formale

$$F_0 \in \text{Sec}_{Op(A,B)} \mathcal{R}$$

esiste un'omotopia mediante soluzioni formali

$$F_t \in \text{Sec}_{\text{Op}(A,B)}\mathcal{R}, \quad t \in [0, 1],$$

tale che  $F_t|_{\text{Op}B} = F|_{\text{Op}B}$  per ogni  $t \in [0, 1]$  ed  $F_1$  sia una soluzione vera.

Vediamo ora la definizione di  $\mathcal{C}^i$ -dense  $h$ -principle, per la quale dobbiamo prima introdurre il concetto di  $h$ -principle verificato  $\mathcal{C}^i$ -vicino ad una sezione  $f : V \rightarrow X$ .

- **$h$ -principle verificato  $\mathcal{C}^i$ -vicino ad  $f$ .** Sia  $\rho : \mathcal{R} \rightarrow X^{(r)}$  una relazione su  $X^{(r)}$ , consideriamo  $\alpha \in \Gamma(\mathcal{R})$  ed  $f \in \Gamma^i(X)$  con  $0 \leq i \leq r-1$  tale che  $p_i^r \circ \rho \circ \alpha = J_f^i \in \Gamma(X^{(i)})$  (cioè  $\alpha$  è olonoma a meno di getti di ordine  $i$ ). La relazione differenziale  $\mathcal{R}$  soddisfa l' $h$ -principle  $\mathcal{C}^i$ -vicino ad  $f$  se per ogni intorno  $\mathcal{N}$  dell'immagine  $J_f^i(V)$  in  $X^{(i)}$  esiste un'omotopia  $H : [0, 1] \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$  tale che:
  - i.  $H_0 = \alpha$ ;
  - i.  $\forall t \in [0, 1]$  si ha che  $(p_i^r \circ \rho \circ H_t)(V) \subset \mathcal{N}$ ;
  - ii. la sezione  $H_1 \in \Gamma(\mathcal{R})$  è olonoma, cioè esiste  $f_1 \in \Gamma^r(X)$  tale che  $\rho \circ H_1 = J_{f_1}^r$ .

Enunciamo quindi il *principio di omotopia  $\mathcal{C}^i$ -denso*.

- **$\mathcal{C}^i$ -dense  $h$ -principle.** Diremo che la relazione differenziale  $\mathcal{R}$  soddisfa il  $\mathcal{C}^i$ -dense  $h$ -principle, se la relazione differenziale  $\mathcal{R}$  soddisfa l' $h$ -principle  $\mathcal{C}^i$ -vicino ad  $f$  per ogni coppia  $(\alpha, f)$  assegnata come sopra.

# Capitolo 4

## h-Principle per curve e nodi a curvatura costante

Nel lavoro di Ghomi [Gh07] si dimostra che ogni curva liscia ( $C^\infty$ ) immersa nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^{n \geq 3}$ , può essere deformata in una curva con curvatura costante, mediante una perturbazione arbitrariamente piccola della curva iniziale e delle sue rette tangenti. Tale valore della curvatura costante deve essere maggiore o uguale del massimo della curvatura della curva iniziale. Tale limite inferiore è ottimale.

### 4.1 Ogni curva liscia si può deformare in una curva con curvatura costante

Enunciamo quindi il seguente teorema che costituisce il risultato centrale di questo capitolo.

**Teorema 4.1.1.** *Sia  $f_0 \in \text{Imm}^{\alpha \geq 2}(\Gamma, \mathbb{R}^{n \geq 3})$  una curva immersa di curvatura  $k_0$ . Allora  $\forall \varepsilon > 0$  e  $c \geq \max k_0$ , esiste un'omotopia regolare  $f_t \in \text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  per  $t \in [0, 1]$  tale che:*

- i.  $\|f_0 - f_t\|_1 \leq \varepsilon \forall t \in [0, 1]$ ;*
- ii.  $f_1$  ha curvatura costante uguale a  $c$ ;*

- iii. se  $f_0$  è un embedding, allora scegliendo  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, possiamo richiedere che  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  sia un'isotopia regolare;
- iv. possiamo richiedere che le  $f_t$  siano tangenti a  $f$  lungo un assegnato insieme finito di punti di  $\Gamma$ ;
- v. infine, possiamo mantenere le  $f_t$  fisse su un opportuno sottoinsieme compatto di  $\Gamma$  che abbia un intorno aperto in cui  $k_0 = c$ .

Per dimostrare questo teorema possiamo supporre, grazie ad un opportuno lemma, che la curva iniziale  $f_0$  abbia velocità unitaria. In tal caso  $k_0 = \|T'_0\|$ , cioè la curvatura  $k_0$  si può interpretare come la velocità dell'indicatrice delle tangenti  $T_0 : \Gamma \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ . Per trovare  $f_1$  usiamo basilari nozioni di teoria della convessità, tramite le quali possiamo costruire una curva  $T_1 : \Gamma \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$  che abbia velocità costante, sia  $\mathcal{C}^0$ -vicina a  $T_0$  ed abbia lo stesso integrale su  $\Gamma$  di  $T_0$ . Infine si definisce  $f_1(x)$  come  $f_0(a) + \int_a^x T_1(s) ds$ . In questo modo  $f_1$  ha curvatura costante, è  $\mathcal{C}^1$ -vicina ad  $f_0$  e coincide con  $f_0$  agli estremi di  $\Gamma$ . L'omotopia desiderata è data dall'interpolazione  $f_t := (1-t)f_0 + tf_1$ .

Inoltre, come dimostreremo nella sezione successiva, il limite inferiore per la curvatura di  $f_1$  è ottimale.

Vediamo ora tre lemmi che ci serviranno per dimostrare il Teorema 4.1.1. In particolare il seguente ci permetterà di supporre che la curva iniziale  $f_0$  abbia velocità unitaria.

**Lemma 4.1.2.** *Sia  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  e  $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$  funzione  $C^1$ . Allora*

$$\|f \circ \phi\|_1 \leq \|f\|_1(1 + \|\phi\|_1).$$

*Dimostrazione.* Per come è definita  $\|\cdot\|_1$  si ha che:

$$\|f \circ \phi\|_1 \leq \max\{\|f\|_0, \|f\|_1\|\phi\|_1\} \leq \|f\|_0 + \|f\|_1\|\phi\|_1$$

dato che  $\|f\|_0 \leq \|f\|_1$  la tesi segue immediatamente.  $\square$

I due lemmi che seguono invece, ci permetteranno di assumere che la curvatura della curva iniziale  $f_0$ , si comporti abbastanza bene, in modo che la sua indicatrice delle tangenti soddisfi le ipotesi del Teorema 1.5.1.

**Lemma 4.1.3.** *Sia  $f \in \text{Imm}^{\alpha \geq 2}([a, b], \mathbb{R}^n)$  di curvatura  $k$  e sia  $c \geq \max k$ . Supponiamo che  $k \not\equiv c$ . Allora  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\bar{f} \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$  tale che:*

- i.  $\bar{f}$  ha curvatura  $\bar{k}$  e  $\max \bar{k} \leq c$ ;
- ii.  $\|f - \bar{f}\|_2 \leq \varepsilon$ ;
- iii.  $\bar{f} = f$  su un intorno aperto relativo ad  $[a, b]$  degli estremi di tale intervallo;
- iv.  $\bar{f}(\text{supp}(-\bar{k} + \max \bar{k}))$  non è contenuto in nessun iperpiano.

*Dimostrazione.* Dal Teorema di Trasversalità di Thom, segue che le prime  $n$  derivate di un insieme  $\mathcal{C}^n$ -denso di applicazioni  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}^n)$ , sono linearmente indipendenti dappertutto eccetto un insieme finito di punti (quando parliamo delle prime  $n$  derivate di un'applicazione  $f$ , intendiamo  $f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$ ). Per la dimostrazione dettagliata si veda l'Osservazione 2.4.14).

Da ciò segue che per un insieme denso di curve  $\tilde{f} \in \text{Imm}^n([a, b], \mathbb{R}^n)$  non esiste nessun insieme aperto  $U \subset [a, b]$  tale che  $\tilde{f}(U)$  sia contenuto in un iperpiano  $H$ , e tale che tutte le derivate di  $\tilde{f}$  nei punti di  $U$  siano contenute in un sottospazio  $(n - 1)$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$  parallelo ad  $H$ . Sia  $(\tilde{f}_i)_i$  una successione di queste curve totalmente non planari, tali che  $\|f - \tilde{f}_i\|_2 \rightarrow 0$ .

Consideriamo  $A \subset [a, b]$  insieme aperto tale che  $\bar{A} \subset (a, b)$  e supponiamo che su  $\bar{A}$  si abbia  $k < c$  (questo è possibile perché per ipotesi  $k \not\equiv c$ ).

A questo punto si consideri  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzione  $\mathcal{C}^\infty$  tale che  $\text{supp } \phi \subset A$ ,  $0 \leq \phi \leq 1$  e  $\phi \equiv 1$  su un insieme aperto  $B \subset A$ . Sia ora

$$f_i := (1 - \phi)f + \phi\tilde{f}_i$$

dato che  $\phi$  è fissata, si vede che  $\|f_i - f\|_2 \rightarrow 0$  e di conseguenza anche  $\|k_i - k\| \rightarrow 0$  (dove  $k$  e  $k_i$  sono le curvatures di  $f_i$  ed  $f$  rispettivamente).

Scegliendo  $i$  abbastanza grande si ha  $k_i < c$  su  $A$ . Dato che  $k_i = k$  su  $[a, b] \setminus A$ , segue che  $\max k_i \leq c$  per  $i$  grande; ma  $f_i = \tilde{f}_i$  su  $B$ , quindi  $f_i(B)$  non è contenuta in nessun iperpiano. Quando  $i$  è abbastanza grande  $\bar{f} := f_i$  è la curva cercata, dato che  $B \subset \text{supp}[\max k_i - k_i]$ .  $\square$

Tramite il lemma appena dimostrato, possiamo supporre che l'immagine tramite  $f_0$  dei punti in cui la curvatura della curva  $f_0$  è strettamente minore del suo massimo non è contenuto in un iperpiano; mentre il seguente ci permette di assumere che la curvatura della curva iniziale  $f_0$  non si annulli.

**Lemma 4.1.4.** *Sia  $f \in \text{Imm}^{\alpha \geq 2}([a, b], \mathbb{R}^n)$  di curvatura  $k$  e sia  $c \geq \max k$ ,  $c > 0$ . Allora  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste  $\tilde{f} \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$  di curvatura  $\tilde{k} > 0$  tale che:*

- i.  $\max \tilde{k} \leq c$ ;
- ii.  $\|f - \tilde{f}\|_\alpha \leq \varepsilon$ ;
- iii.  $\tilde{f}$  è tangente ad  $f$  lungo un numero finito di punti assegnati;
- iv.  $\tilde{f} = f$  su ogni assegnato insieme aperto  $U \subset [a, b]$  con  $k > 0$  su  $\bar{U}$ .

*Dimostrazione.* Dal Teorema di Trasversalità di Thom 2.4.13 segue che esiste un insieme denso di curve  $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$  che hanno curvatura che non si annulla (si veda l'Osservazione 2.4.15). Usiamo l'esistenza delle  $\tilde{f}_i$  per dimostrare che possiamo supporre che la curvatura di  $f$  non si annulli nell'insieme dei punti assegnati. Sia quindi  $p \in [a, b]$  uno dei punti assegnati. Supponiamo per assurdo che  $k(p) = 0$ , allora  $p \notin U$ ; inoltre dato che  $\|f - \tilde{f}_i\|_1 \rightarrow 0$ , possiamo assumere, dopo aver composto  $\tilde{f}_i$  con una successione di movimenti rigidi convergenti all'identità, che  $\tilde{f}_i(p) = f(p)$ , e la retta tangente ad  $\tilde{f}_i$  in  $p$  sia parallela alla retta tangente ad  $f$  in  $p$ . Sia  $V_p \subset [a, b]$  un intorno aperto di  $p$  tale che  $V_p \cap \bar{U} = \emptyset$ , non contenga nessun altro dei punti assegnati e  $k < c$  su  $\bar{V}_p$ . Consideriamo  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mathcal{C}^\infty$  con supporto contenuto in  $V_p$ , tale che  $0 \leq \phi \leq 1$  e  $\phi = 1$  su un intorno aperto di  $p$ . Definiamo  $\bar{f}_i := \phi \tilde{f}_i + (1 - \phi)f$ . In questo modo  $\bar{f}_i$  differisce da  $f$  solo su  $V_p$  e  $\|\bar{f}_i - f\|_\alpha \rightarrow 0$ . In particolare, dato che  $\|\bar{f}_i - f\|_2 \rightarrow 0$ , la



curvatura  $\bar{k}_i$  di  $\bar{f}_i$  converge a  $k$ , che è strettamente minore di  $\max k$  su  $\bar{V}_p$ . Da ciò segue che  $\max \bar{k}_i \leq \max k$ . Inoltre per costruzione,  $\bar{k}_i(p) = \tilde{k}_i(p) > 0$ ,  $\bar{f}_i(p) = \tilde{f}_i(p) = f(p)$ , e dato che  $\bar{f}_i$  coincide con  $\tilde{f}_i$  su un intorno aperto di  $p$ , la tangente ad  $\bar{f}_i$  in  $p$  è parallela a quella di  $f$ . Rimpiazzando  $f$  con  $\bar{f}_i$ , per  $i$  abbastanza grande, possiamo assumere che  $k(p) \neq 0$ , arrivando quindi ad un assurdo.

Ripetendo questo ragionamento per tutti i punti assegnati  $p \notin \bar{U}$ , possiamo supporre che  $k$  non si annulli in questi punti. Esiste un aperto  $W \subset [a, b]$  disgiunto da  $\bar{U}$  e dall'insieme dei punti assegnati, che contiene tutti i punti di  $[a, b]$  in cui  $k$  si annulla. Sia  $W_1$  una delle componenti connesse di  $W$ . Vicino agli estremi di  $W_1$  sarà  $k > 0$ . Sia  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mathcal{C}^\infty$  con supporto contenuto in  $W_1$  tale che  $0 \leq \psi \leq 1$  e  $k > 0$  nella chiusura dell'insieme di punti di  $W_1$  in cui  $\psi < 1$ , quindi  $\psi = 1$  dappertutto eccetto in un intorno sufficientemente piccolo degli estremi di  $W_1$ . Rimpiazzando  $f$  con  $\tilde{f}_i\psi + (1 - \psi)f$ , per  $i$  abbastanza grande, possiamo supporre che  $k > 0$  su  $W_1$ . Ripetendo tale procedura per ogni componente connessa di  $W$  si ottiene che possiamo supporre  $k > 0$  dappertutto.  $\square$

Possiamo ora dimostrare una versione **locale** del Teorema 4.1.1:

**Proposizione 4.1.5.** *Sia  $f \in \text{Imm}^{\alpha \geq 2}([a, b], \mathbb{R}^n)$  una curva immersa di curvatura  $k$ , allora  $\forall \varepsilon > 0$  e  $c \geq \max k$ , esiste  $\tilde{f} \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$  di curvatura costante  $c$  tale che  $\|f - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon$  ed  $\tilde{f}$  è tangente ad  $f$  in  $a, b$  e in un numero finito di punti assegnati.*

*Inoltre se  $f$  è una curva chiusa, lo è anche  $\tilde{f}$ , e se  $k = c$  su un intorno aperto degli estremi di  $[a, b]$ , allora possiamo richiedere che  $f = \tilde{f}$  su di un opportuno intorno aperto relativo ad  $[a, b]$ .*

*Dimostrazione.* Per prima cosa dimostriamo che basta considerare il caso in cui  $\|f'\| = 1$ : tramite una dilatazione di  $\mathbb{R}^n$ , possiamo supporre che  $\text{length}[f] = b - a$  e poi si può costruire un diffeomorfismo  $\theta : [a, b] \rightarrow [a, b]$  in modo che la curva riparametrizzata  $f \circ \theta$  abbia velocità unitaria (ad esempio

ponendo  $\theta := s^{-1}(t)$  con  $s(t) = a + \int_a^t \|f'(u)\| du$ . Se la proposizione vale per curve a velocità unitaria, la possiamo applicare alla curva appena costruita  $f \circ \theta$  ed ottenere una curva  $\widetilde{f \circ \theta}$  con le proprietà di curvatura desiderate, tale che  $\|f \circ \theta - \widetilde{f \circ \theta}\|_1 \leq \varepsilon / (1 + \|\theta^{-1}\|_1)$ . Sia allora  $\tilde{f} := \widetilde{f \circ \theta} \circ \theta^{-1}$ . Per il Lemma 4.1.2 si ha

$$\|f - \tilde{f}\|_1 = \|(f \circ \theta - \widetilde{f \circ \theta}) \circ \theta^{-1}\|_1 \leq \|f \circ \theta - \widetilde{f \circ \theta}\|_1 (1 + \|\theta^{-1}\|_1) \leq \varepsilon,$$

quindi  $\tilde{f}$  è la curva cercata, dato che la curvatura è invariante per riparametrizzazioni e, inoltre, se  $f \circ \theta = \widetilde{f \circ \theta}$  su un intorno aperto degli estremi di  $[a, b]$ , allora si ha che  $f = \tilde{f}$  su un intorno aperto (più piccolo) di  $a$  e  $b$ .

D'ora in avanti assumiamo  $\|f'\| = 1$ , in tal caso l'indicatrice delle tangenti è  $T = f'$  e di conseguenza  $k = \|T'\| = \|f''\|$ .

Se  $c = 0$ , dovrà essere  $k = 0$  (questo perché per ipotesi  $c \geq \max k$  e la curvatura  $k$ , per come è stata definita, è sempre positiva) in tal caso possiamo porre  $\tilde{f} := f$ .

Se  $c > 0$ , sfruttando il Lemma 4.1.4 possiamo supporre  $k > 0$  e quindi  $T \in \text{Imm}^{\alpha-1}([a, b], S^{n-1})$ . Dividiamo  $[a, b]$  in  $l$  sotto-segmenti  $[a_{i-1}, a_i]$  dove  $a_0 := a$  e  $a_l := b$ , ed in modo che l'insieme  $\{a_0, a_1, \dots, a_l\}$  contenga tutti i punti assegnati in cui vogliamo che  $\tilde{f}$  sia tangente ad  $f$ . Scegliendo  $l$  abbastanza grande, possiamo supporre che la lunghezza di ciascun segmentino, cioè  $|a_i - a_{i-1}|$ , sia abbastanza piccola in modo che

$$\text{length } [T|_{[a_{i-1}, a_i]}] < \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, l.$$

In questo modo  $T([a_{i-1}, a_i])$  sarà contenuto in una palla aperta  $U_i \subset \mathbf{S}^{n-1}$  di raggio  $\varepsilon/2$ . Sia ora  $\bar{f}$  la perturbazione  $\mathcal{C}^1$  di  $f$  ottenuta applicando il Lemma 4.1.3 ad  $f$  ristretta ad ogni intervallo  $[a_{i-1}, a_i]$ . Dato che possiamo costruire  $\bar{f}$  arbitrariamente vicina ad  $f$  (in senso  $\mathcal{C}^1$ ), possiamo supporre, facendo una riparametrizzazione, che  $\bar{f}$  abbia velocità unitaria, e che la sua indicatrice tangente sia tale che

$$\bar{T}([a_{i-1}, a_i]) \subset U_i.$$

Sia  $\bar{T}_i$  la restrizione di  $\bar{T}$  all'intervallo  $[a_{i-1}, a_i]$ ; per costruzione

$$\bar{T}_i(\text{supp}(-\|\bar{T}'_i\| + \max \|\bar{T}'_i\|))$$

non è contenuto in nessun iperpiano, a meno che  $\bar{T}_i$  abbia velocità costante  $c$ . Quindi possiamo applicare il Teorema 1.5.1 ad ogni  $\bar{T}_i$ , ed otteniamo per ogni  $i$  una  $\tilde{T}_i \in \text{Imm}^{\alpha-1}([a_{i-1}, a_i], \mathbf{S}^{n-1})$  di velocità costante  $c$ . Definiamo la curva  $\tilde{T}$  ponendola uguale a  $\tilde{T}_i$  su ogni intervallo  $[a_{i-1}, a_i]$ .

In questo modo  $\tilde{T} \in \text{Imm}^{\alpha-1}([a, b], \mathbf{S}^{n-1})$  (possiamo affermare che la  $\tilde{T}$  ha tale regolarità nei punti di incollamento perché la proprietà *iv.* del Teorema 1.5.1 permette di dire che  $\forall \eta > 0 \exists \tilde{\eta} > 0$  tale che  $\tilde{T}_i([a_{i-1}, a_{i-1} + \tilde{\eta}]) \subset \bar{T}_i([a_{i-1}, a_{i-1} + \eta])$  e  $\tilde{T}_i([a_i - \tilde{\eta}, a_i]) \subset \bar{T}_i([a_i - \eta, a_i])$ , dato che la  $\bar{T}$  ha tale regolarità segue che  $\tilde{T} \in \text{Imm}^{\alpha-1}([a, b], \mathbf{S}^{n-1})$ ).

Inoltre  $\|\tilde{T}'\| = c$ ,  $\|T - \tilde{T}\|_0 \leq \varepsilon$ ,  $\tilde{T}(a_i) = T(a_i)$  e  $\int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{T}(t) dt = \int_{a_{i-1}}^{a_i} T(t) dt$ . A questo punto per  $t \in [a, b]$  definiamo:

$$\tilde{f}(t) := f(a) + \int_a^t \tilde{T}(u) du .$$

in questo modo si ha che  $\tilde{f} \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$ ,  $\|f - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon$  ed  $\tilde{f}$  è tangente ad  $f$  in  $a_i$ .

Infine dal punto *v.* del Teorema 1.5.1, si ha che la traccia di  $T$  coincide con quella di  $\tilde{T}$  vicino a gli estremi di  $[a, b]$ . Quindi se  $T$  ha velocità costante  $c$  vicino gli estremi di  $[a, b]$  allora  $\tilde{T} = T$  vicino a gli estremi di  $[a, b]$  e questo implica che  $\tilde{f} = f$  in tale regione.  $\square$

Da quest'ultima proposizione segue la dimostrazione del Teorema 4.1.1.

*Dimostrazione Teorema 4.1.1.* Sia  $X$  il sottoinsieme compatto di  $\Gamma$  che abbia un intorno aperto in cui  $k_0 = c$ . Se  $X = \emptyset$ , sfruttando la Proposizione 4.1.5, si ottiene la tesi. Se  $X \neq \emptyset$ , sia  $U$  in intorno aperto di  $X$  in cui  $k_0 = c$ , scegliendo  $U$  abbastanza vicino ad  $X$ , possiamo supporre che  $k_0 = c$  vicino gli estremi di ogni segmento di  $\Gamma \setminus U$ . Definiamo  $f_1$  nel modo seguente:

$$f_1 := \begin{cases} f_0 & \text{in } U \\ \tilde{f} & \text{in } \Gamma \setminus U \end{cases}$$

(dove  $\tilde{f}$  si ottiene tramite la Proposizione 4.1.5 applicata ad ogni segmento di  $\Gamma \setminus U$  fissando  $f = f_0$ ). In questo modo  $f_1 \in \text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ , non si hanno

problemi nei punti di saldatura, perché dato che  $k_0 = c$  vicino agli estremi di ogni segmento di  $\Gamma \setminus U$  la Proposizione 4.1.5 permette di affermare che in opportuni intorno dei punti di saldatura  $\tilde{f} = f_0$ .

Dato che le immersioni e gli embedding formano insiemi aperti in  $\mathcal{C}^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ ,

$$f_t := (1 - t)f_0 + tf_1$$

per  $t \in [0, 1]$  è proprio l'omotopia cercata, se nella Proposizione 4.1.5 scelgo  $\varepsilon$  abbastanza piccolo. Infatti

$$\|f_t - f_0\|_1 = t\|f_1 - f_0\|_1 \leq \|f_1 - f_0\|_1 \leq \varepsilon$$

quindi  $\varepsilon$  deve essere scelto abbastanza piccolo in modo che ogni volta che  $\|f_0 - g\|_1 \leq \varepsilon$  allora  $g$  è un'immersione, ed è un embedding se  $f_0$  lo è.  $\square$

## 4.2 Il limite inferiore è ottimale

In questa sezione mostriamo che la stima dal basso per la costante  $c$  nel Teorema 4.1.1 è ottimale, cioè se  $f \in \text{Imm}^2(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  è una qualsiasi curva immersa di curvatura  $k$  ed  $\tilde{f} \in \text{Imm}^2(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  è una curva con curvatura costante  $c < \max k$ , allora  $\tilde{f}$  non può essere arbitrariamente  $\mathcal{C}^1$ -vicina ad  $f$ .

Il lemma che segue servirà per dimostrare l'ottimalità del limite inferiore. Prima però ricordiamo le seguenti definizioni. Una partizione  $P = \{t_0, \dots, t_l\}$  dell'intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  è un insieme finito di punti tali che  $a = t_0 < \dots < t_l = b$ . La lunghezza di una curva  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$  rispetto ad una partizione  $P$  è così definita:

$$\text{length}[f, P] := \sum_{i=1}^l \|f(t_{i-1}) - f(t_i)\|$$

quindi la lunghezza di  $f$  sarà:

$$\text{length}[f] := \sup_{P \text{ partizione di } [a, b]} \text{length}[f, P].$$

Se  $f \in \mathcal{C}^1$  questa definizione di lunghezza coincide con la definizione data nel Capitolo 1. Se  $\text{length}[f]$  è finita, diremo che  $f$  è *rettificabile*.

**Lemma 4.2.1.** *Sia  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$  una curva rettificabile ed  $f_i \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$  una successione di curve rettificabili che converge ad  $f$  rispetto alla norma  $\mathcal{C}^0$ . Allora si ha che*

$$\liminf_{i \rightarrow +\infty} \text{length}[f_i] \geq \text{length}[f].$$

*Dimostrazione.* Sia  $P = \{t_0, \dots, t_l\}$  una partizione di  $[a, b]$ . Si ha che  $f_i|_{[t_{j-1}, t_j]}$  è una curva connessa i cui estremi sono contenuti in sfere di raggio  $\|f_i - f\|_0$  centrate in  $f(t_{j-1})$  ed in  $f(t_j)$ . Quindi

$$\text{length}[f_i|_{[t_{j-1}, t_j]}] \geq \|f(t_{j-1}) - f(t_j)\| - 2\|f_i - f\|_0.$$

Sommando su  $j$  si ottiene:

$$\text{length}[f_i] \geq \text{length}[f, P] - 2l\|f_i - f\|_0.$$

Dato che per ipotesi  $\|f_i - f\|_0 \rightarrow 0$  per  $i \rightarrow +\infty$ , si conclude che

$$\liminf_{i \rightarrow +\infty} \text{length}[f_i] \geq \text{length}[f, P],$$

da cui la tesi segue immediatamente, dato che la partizione  $P$  è stata presa in modo arbitrario.  $\square$

**Proposizione 4.2.2.** *Sia  $f \in \text{Imm}^2(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  una curva immersa di curvatura  $k$  ed  $\tilde{f}_i \in \text{Imm}^2(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  una successione di curve tali che ogni  $\tilde{f}_i$  abbia curvatura costante pari a  $c$  e le  $\tilde{f}_i$  convergano ad  $f$  rispetto alla norma  $\mathcal{C}^1$ . Allora si ha che  $c \geq \max k$ .*

*Dimostrazione.* Riparametizziamo la  $f$  e le  $\tilde{f}_i$  mediante le rispettive lunghezze d'arco. In questo modo possiamo supporre che  $f$  e le  $\tilde{f}_i$  abbiano velocità unitaria. In tal caso si ha che l'indicatrice delle tangenti delle  $\tilde{f}_i$ , cioè  $\tilde{T}_i = \tilde{f}'_i$ , ha velocità costante uguale a  $c$  e converge a  $T = f'$  rispetto alla norma  $\mathcal{C}^0$ . Dal Lemma 4.2.1 segue che per ogni fissato  $t_0 \in \Gamma$  ed  $\varepsilon > 0$ , si ha:

$$\liminf_{i \rightarrow +\infty} \text{length}[\tilde{T}_i|_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}] \geq \text{length}[T|_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}]$$

dato che  $T$  e  $\tilde{T}_i$  sono  $\mathcal{C}^1$ . La relazione precedente significa che  $\forall \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tale che

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \|\tilde{T}'_j(t)\| dt \geq \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \|T'(t)\| dt - \delta \quad \forall j \geq N,$$

dato che per ipotesi  $\|\tilde{T}'_i\| = c$ , segue che  $\forall \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tale che

$$c \geq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \|T'(t)\| dt - \frac{\delta}{2\varepsilon} \quad \forall j \geq N,$$

e quindi

$$c \geq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \|T'(t)\| dt$$

per ogni fissato  $t_0 \in \Gamma$  ed  $\varepsilon > 0$ . Passando al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ottiene

$$c \geq \|T'(t_0)\| = k(t_0), \quad \forall t_0 \in \Gamma,$$

e quindi  $c \geq \max k$ . □

# Bibliografia

- [AT11] Abate M, Tovena, F., *Geometria differenziale*, La Matematica per il 3+2, Springer-Verlag, Italia (2011)
- [EM02] Eliashberg, Y., Mishachev, N., *Introduction to the h-principle*, volume 48 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI (2002).
- [Gh07] Ghomi, M., *h-Principles for curves and knots of constant curvature*. *Geom Dedicata* **127**, 19-35 (2007).
- [GG73] Golubitsky, M., Guillemin, V.: *Stable mappings and their singularities*, volume 14 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York (1973).
- [Gr70] Gromov M., *A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities*, ICM 1970, Nice, vol. 2, 221–225
- [Gr73] Gromov M., *Convex integration of partial differential relations*. I, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **37**(1973), 329–343.
- [Gr86] Gromov M., *Partial Differential Relations*, volume 9 A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1986)

- [Gu13] Guessab A., *Generalized barycentric coordinates and approximations of convex functions on arbitrary convex polytopes*. Computers and Mathematics with Applications **66**, 1120-1136 (2013).
- [Hi76] Hirsch M. W., *Differential Topology*, volume 33 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York (1976).
- [Ka61] Kalman, J. A., *Continuity and convexity of projections and barycentric coordinates in convex polyhedra*. Pacific J. Math. **11**, 1017-1022 (1961).
- [KMS93] Kolář I., Michor P. W., Slovák J., *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1993).
- [Le03] Lee J.M., *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York (2003).
- [Ma14] Manetti M., *Topologia*, volume 78 La Matematica per il 3+2, Springer-Verlag, Milan (2014).
- [Na54] Nash J.,  *$C^1$ -isometric embeddings*, Ann. of Math.(2), **60**(1954), 383–396.
- [Ro70] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1970).
- [Sc93] Schneider, R., *Convex Bodies: the Brunn-Minkowski theory*. Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [Sm58] Smale S., *A classification of immersions of the two-sphere*, Trans. Am. Math. Soc. **90**(1958), 281-290.
- [Sp98] Spring D., *Convex Integration Theory*, Birkhauser, 1998.
- [So96] Solomon, B., *Tantrices of spherical curves*, Amer. Math. Monthly, **103**, 1, 30-39 (1996).



- 
- [We94] Webster R.J., *Convexity*. Oxford University Press, New York (1994).
- [Wh37] Whitney H., *On regular closed curves in the plane*, *Compositio Math.*, 4(1937), 276–284.



# Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il Professor Alberto Parmeggiani, relatore di questa tesi, per la pazienza, la disponibilità e l'aiuto fornitomi durante questi mesi. Grazie per i confronti costruttivi, gli stimoli e le tante conoscenze che ha saputo trasmettermi.

Grazie a tutti i professori che ho incontrato lungo questo percorso, che oltre ad avermi insegnato tanto, mi hanno dato un buon consiglio quando ne avevo bisogno.

Un enorme grazie va poi a tutta la mia famiglia. In particolare, grazie a mia mamma per essere sempre al mio fianco e per avermi incoraggiata e sostenuta in questi anni. Grazie a mia sorella Alessandra che, da bravo ingegnere quale sono sicura diventerà, sa sempre riportarmi con i piedi per terra e farmi vedere il lato concreto delle cose.

Alla mia compagnia 'Ammaccabanane', gli amici di una vita, grazie per esserci e per i tanti momenti di spensieratezza passati insieme. Grazie a Elena, amica di sempre e mia spalla in ogni occasione. Grazie a Lucia, amica sempre pronta ad ascoltarmi quando ne ho bisogno. Agli amici di matematica, grazie per le risate in Dipartimento, spero che, anche se impegnati a rincorrere i nostri sogni, possiamo non perderci. Alle mie coinquiline di Bologna, grazie per le tante serate passate a studiare e scherzare, senza di voi sarebbe stato tutto più noioso.